MARCIAL R. CANDIOTI

FRACCIONES CONTÍNUAS

(Artículo publicado en los «Anales de la Sociedad Científica Argentina», tomo XLVI, páginas 149 y siguientes)

BUENOS AIRES
IMPRENTA DE PABLO E. CONI É HIJOS
680 — CALLE PERÚ — 680

1898

MARCIAL R. CANDIOTI

FRACCIONES CONTÍNUAS

(Artículo publicado en los «Anales de la Sociedad Científica Argentina», tomo XLVI, páginas 149 y siguientes)

BUENOS AIRES

IMPRENTA DE PABLO E. CONI É HIJOS

680 — CALLE PERÚ — 680

1898

FRACCIONES CONTINUAS (*)

I. La aplicación de las determinantes al estudio de las fracciones continuas facilita y simplifica notablemente su cálculo.

Consideremos una sucesión de números

$$U, \qquad U_1, \qquad U_2, \qquad \ldots$$

ligados por relaciones de la forma :

$$UU_1 - a_0U_1 - b_1 = 0;$$

de la que se deduce : $\qquad U = a_0 + \dfrac{b_1}{U_1}.$

Del mismo modo, la relación :

$$U_1U_2 - a_1U_2 - b_2 = 0,$$

nos daría : $\qquad U_1 = a_1 + \dfrac{b_2}{U_2}.$

Y análogamente : $\quad U_2 = a_2 + \dfrac{b_3}{U_3}$, etc.

Tendríamos así la *fracción continua* en su forma más general :

$$U = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots}}$$

que será *limitada* ó *ilimitada*, según que lo sea ó no el número de *elementos* ó cocientes incompletos a_0, a_1, a_2, ...

(*) De las *Lecciones* profesadas en el primer año de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

Los *cocientes completos*, son las expresiones :

$$a_0 + \frac{b_1}{x_0}, \qquad a_1 + \frac{b_2}{x_1}, \qquad \ldots$$

Fracciones integrantes serán :

$$\frac{b_1}{a_1}, \qquad \frac{b_2}{a_2}, \qquad \frac{b_3}{a_3}, \qquad \ldots$$

y finalmente, *reducidas* ó *fracciones convergentes* las cantidades :

$$a_0, \qquad a_0 + \frac{b_1}{a_1}. \qquad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}. \qquad \text{etc.,}$$

una vez reducidas á fracciones comunes.

II. *Formación de reducidas.* — Si indicamos con :

$$\frac{P_0}{Q_0}, \qquad \frac{P_1}{Q_1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2}, \qquad \ldots$$

as reducciones sucesivas, tendremos :

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0a_1 + b_1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_0a_1a_2 + b_1a_2 + a_0b_2}{a_1a_2 + b_2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_0a_1a_2a_3 + b_1a_2a_3 + a_0b_2a_3 + a_0a_1b_3 + b_1b_3}{a_1a_2a_3 + b_2a_3 + a_1b_3},$$

y así sucesivamente. Luego :

Los términos de una reducida se forman multiplicando los de la anterior por el denominador de la última fracción integrante considerada, y agregándoles respectivamente el producto de los términos de la reducida, que está dos lugares antes por el numerador de la misma fracción integrante.

Es fácil generalizar la efectividad de esta ley.

Podemos escribir, pues :

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_0 a_1 + b_1}{Q_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 a_2 + P_0 b_2}{Q_1 a_2 + Q_0 b_2};$$

. . . .

ó bien así :

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 \\ b_1 & a_1 & -1 \\ 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & -1 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 \\ 0 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}}$$

y así sucesivamente. Las determinantes que forman cada fracción, presentan una forma análoga, y la diagonal principal está formada por los *cocientes incompletos* considerados. Esta forma se llama *continuante* (*), lo que concuerda con el nombre de *fracción continua*.

Se observará que la continuante denominador es de un grado menor que el numerador, habiéndose suprimido la primera fila y y columna de este.

(*) SYLVESTER.

III. Consideremos nuevamente la fracción continua U, á la que puede ponerse bajo la forma :

$$U = \frac{A\begin{pmatrix} & b_1 & & b_2 & & b_3 & \\ a_0 & & a_1 & & a_2 & & \ldots \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & & b_4 & \ldots \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & \ldots \end{pmatrix}}; \qquad (1)$$

siendo el numerador y el denominador una forma simbólica de la continuante. En efecto, sea la continuante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_n \end{vmatrix}$$

Desarrollemos por la primera columna :

$$\Delta = a_0 \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Desarrollemos el segundo término por la primera fila :

$$\Delta = a_0 \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & a_3 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

ó bien en anotación abreviada :

$$\Delta = a_0 A \begin{pmatrix} & b_2 & & b_3 & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & \ldots \end{pmatrix} + b_1 A \begin{pmatrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & a_4 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Apliquemos esta descomposición á la expresión (1), y escribamos :

$$\alpha = \frac{a_0 \mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_2 & & b_3 & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots \end{matrix}\right) + b_1 \mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & & \dots \end{matrix}\right)}{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_2 & & b_3 & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots \end{matrix}\right)} \tag{2}$$

ó bien $$\alpha = a_0 \frac{b_1}{\dfrac{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_2 & & b_3 & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & \dots \end{matrix}\right)}{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & a_4 & \dots \end{matrix}\right)}}.$$

El denominador de está última expresión, será á su vez :

$$\alpha_1 = \frac{a_1 \mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & a_4 & \dots \end{matrix}\right) + b_2 \mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_4 & & \\ a_3 & & a_4 & \dots \end{matrix}\right)}{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & a_4 & \dots \end{matrix}\right)};$$

y de aquí se deduce :

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{b_2}{\dfrac{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_3 & & b_4 & & \\ a_2 & & a_3 & & a_5 & \dots \end{matrix}\right)}{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_4 & & b_5 & & \\ a_3 & & a_4 & & a_5 & \dots \end{matrix}\right)}}.$$

Del mismo modo :

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{b_3}{\dfrac{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_4 & & b_5 & & \\ a_3 & & a_4 & & a_5 & \dots \end{matrix}\right)}{\mathrm{A}\left(\begin{matrix} & b_5 & & b_6 & & \\ a_4 & & a_5 & & a_6 & \dots \end{matrix}\right)}};$$

y así de seguida. Sustituyendo valores, se ve que las expresiones de U y α son iguales y, por lo tanto se verifica la igualdad (1).

IV. *El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas es — 1 elevado al número de orden de la reducida menos elevado disminuido en una unidad, por el producto de los numeradores de las fracciones integrantes consideradas.*

En efecto, según la ley de formación, se tiene :

$$P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1} b_{n+1}$$
$$Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} b_{n+1}.$$

De aquí se deduce :

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (P_n a_{n+1} + P_{n-1}b_{n+1})\,Q_n -$$
$$(Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}b_{n+1})\,P_n = -\,(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n)\,b_{n+1}.$$

Demos á n valores sucesivos :

$$P_1Q_0 - P_0Q_1 = b_1$$
$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = -\,(P_1Q_0 - P_0Q_1)\,b_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = -\,(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n)\,b_{n+1}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, y observando que el factor (-1) se halla repetido n veces, resulta :

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (-1)^n\, b_1b_2b_3 \ldots b_{n+1},$$

que era lo que debía probarse.

Obs. — Según esto, se tiene :

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{b_1}{Q_0Q_1}$$
$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{(-1)^2\, b_1b_2}{Q_1Q_2}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\, b_1b_2b_3 \ldots b_n}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Sumemos miembro á miembro estas igualdades y simplifiquemos:

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{b_1}{Q_0Q_1} - \frac{b_1b_2}{Q_1Q_2} + \ldots$$

Se puede, por lo tanto, formar una reducida cualquiera con sólo formar las continuantes Q_0, Q_1, Q_2, ..., en virtud de la última igualdad.

V. *Caso en que los numeradores de las fracciones integrantes son unitarios.* — Este es el caso más interesante de fracciones continuas y el más aplicado en Análisis. La fracción U se escribe simbólicamente así :

$$U = |a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots|.$$

En este caso a_0, a_1, a_2, ..., son siempre *cocientes incompletos ;* y las expresiones :

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \quad \ldots$$

las *fracciones integrantes.*

Todas las fórmulas halladas precedentemente se simplifican mucho en este caso.

Así las reducidas sucesivas serán :

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 \\ 0 & 1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}}, \qquad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}},$$

y así de las demás. Las determinantes adoptan una forma especial llamada *pseudosimétrica*, pues los elementos homólogos son iguales y de signo contrario.

VI. Una reducida cualquiera se formará multiplicando los términos de la anterior por el último cociente incompleto y se agregará respectivamente los términos de la reducida que está dos lugares antes. Así se tendrá :

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas es, en este caso, $+1$ ó -1, según que la reducida minuendo sea de orden par ó impar.

VII. *Fracciones continuas inversas.* — Se llama *fracción inversa* de la expresión :

$$U = |a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n|,$$

á esta otra :

$$U_1 = |a_n, \quad a_{n-1}, \quad \ldots, \quad a_2, \quad a_1, \quad a_0|.$$

Supongamos que

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \qquad \frac{P_n}{Q_n},$$

sean las dos últimas reducidas de la fracción U; es fácil probar que :

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}}, \qquad \frac{P_n}{P_{n-1}},$$

serán las dos últimas reducidas de la fracción U_1.

En efecto, por la ley general de formación, se tiene :

$$P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2}$$
$$P_{n-1} = P_{n-2}a_{n-1} + P_{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1 = P_0 a_1 + 1.$$

De estas igualdades se deduce :

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}}$$
$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{P_1}{P_0} = a_1 + 1.$$

Pero estas operaciones no son sino las necesarias para obtener las reducidas, según la ley general de formación, de la expresión :

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dots + \cfrac{1}{a_0.}}}$$

De un modo análogo, se deduce :

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \dots + \cfrac{1}{a_1.}}}$$

VIII. Las fracciones continuas *ilimitadas* pueden presentarse bajo forma *periódica;* y si el período de elementos empieza con el primero será *periódica pura*, y en caso contrario, periódica mixta.

Esta clase de fracciones tiene importancia en el estudio de las raíces de una ecuación de segundo grado, mediante la siguiente propiedad : « *La raíz inconmensurable de una ecuación de segundo grado de coeficientes conmensurables, puede expresarse bajo la forma de fracción continua periódica* » (*).

IX. Aplicación. *Desarrollo del número* π. — Se tiene :

$$\pi = 3{,}141592653 \dots$$

Este número está comprendido etre otros dos consecutivos :

$$m = \frac{3141592653}{10^9},$$

y

$$n = \frac{3141592654}{10^9}.$$

(*) Esta proposición se conoce con el nombre de *Teorema de Lagrange*. Su demostración completa en : Longchamps, *Algèbre*.

Desarrollando estas dos fracciones por el procedimiento del m. c. d., se obtienen las fracciones :

$$m = |3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 292, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \ldots|$$

$$n = |3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 292, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \ldots|$$

que tiene idénticos los ocho primeros elementos. Luego :

$$\pi = |3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 292, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \ldots|.$$

Los valores de π, ó sean las reducidas sucesivas, serán :

$$\pi = \frac{3}{1}, \qquad \pi = \frac{22}{7}, \qquad \pi = \frac{333}{106}, \qquad \pi = \frac{355}{113}, \qquad \ldots$$

La relación $\frac{22}{7}$ es debida á Arquímedes.

La $\frac{333}{106}$ á Rivard, y la última á Mécio (*).

(*) Célebre astrónomo holandés: 1571-1635.