Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de fin de grado

Introducción a los métodos de proyección de tablas input-output

Sergio Valdés Álvarez

Junio 2024

Trabajo de Fin de Grado presentado en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Santiago de Compostela para la obtención del Grado en Economía

Resumen

El modelo input-output fue desarrollado por el economista ruso Wassily Leontief durante la primera mitad del siglo XX. Éste permite estudiar las transacciones entre los diversos sectores industriales de una región y, por ello, constituye la base del análisis input-output, la rama de la economía que se centra en el estudio de las relaciones entre industrias.

El modelo de Leontief se construye a partir de la información contenida en las tablas input-output. En ellas se representa, por una parte, el origen y el destino de los inputs intermedios de las industrias de una determinada región y, por otra, los diversos usos no relacionados con el proceso productivo que se le dan al output. Para muchos autores, estas tablas son el retrato más detallado posible de una economía.

Ahora bien, el proceso de construcción de una tabla input-output es extremadamente laborioso debido a la gran cantidad de información que abarca. En los casos más complejos, con cientos de filas y columnas, su elaboración puede llevar meses o incluso años. Por esta razón, Leontief apunta que una tabla input-output siempre será un documento histórico.

Sin embargo, existen varias técnicas matemáticas de proyección de matrices que permiten estimar tablas input-output para años en los que todavía no se cuenta con la oficial. Este trabajo realiza una breve introducción a las características principales de las tablas input-output y los métodos para estimarlas, prestando particular atención al RAS, un método iterativo ampliamente utilizado por su sencillez y su capacidad para realizar buenas proyecciones.

Número de palabras contando sólo texto expositivo: 7.908

Número de palabras contando texto, tablas y fórmulas: 9.979

Índice

Índice de abreviaturas

Abreviación	Significado
CRAN	Comprehensive R Archive Network
GAMS	General Algebraic Modeling System
GEMPACK	General Equilibrium Modeling Package
GRAS	Generalized RAS
IPF	Ajuste Proporcional Iterativo
IO	Input-Output

Parte 1. Introducción

1. La Economía Input-Output

El modelo input-output fue desarrollado por el economista ruso Wassily Leontief y es uno de los más utilizados en el análisis económico. Éste permite estudiar las transacciones entre los sectores industriales de una región en un año determinado, es decir, que representa como el output anual de una industria se transfiere a otras, donde es utilizado como como input en sus procesos productivos. Esta información resulta de gran interés para comprender el comportamiento general de una economía, ya que las compras y ventas entre industrias influencian las dinámicas de oferta y demanda de las empresas y, por consiguiente, todos los componentes de su comportamiento estratégico (de la Torre, 2023, p. 37). Debido a esto, el modelo de Leontief constituye la base analítica de la economía input-output, rama de estudio que se centra en las relaciones interindustria.

Ahora bien, desde su nacimiento, el modelo de Leontief y la economía IO han experimentado un rápido desarrollo propulsado por avances no sólo teóricos, sino también tecnológicos. El progreso de los sistemas computacionales ha supuesto una verdadera revolución para la disciplina, pasando las publicaciones anuales relacionadas con el análisis IO de 9 en 1990 a 343 en 2017 (Xie, Ji, Zhang y Huang, 2018). Herramientas informáticas como MATLAB o R han simplificado enormemente el proceso de estudio de los modelos IO, mientras que otras como GAMS o GEMPACK han facilitado la implementación de modelos dinámicos en sustitución de los estáticos tradicionales, haciendo el análisis más exhaustivo y práctico (Cheng y Daniels, 2017).

Sin embargo, existe otro factor que ha influenciado el reciente aumento del número de publicaciones relacionadas con el análisis IO: su uso en ámbitos diferentes a la economía. A pesar de que, originalmente, los modelos IO se utilizaban exclusivamente para estudiar las relaciones industriales, hoy en día también resultan útiles en otras disciplinas como en el análisis de cuestiones medioambientales o energéticas. Por ejemplo, Tarancón y del Río (2004) utilizan el análisis IO para estimar cómo cambios en el proceso productivo de un determinado país podrían afectar a sus emisiones de dióxido de carbono.

2. Las Tablas Input-Output

Para construir el modelo de Leontief, es necesario elaborar primero lo que frecuentemente se denomina tabla simétrica input-output (de ahora en adelante, tabla IO), una matriz que representa las transacciones entre industrias. Alternativamente, los datos de esta matriz pueden entenderse como una representación del origen y el destino de los inputs intermedios que cada sector industrial utiliza en su proceso productivo.

> Las filas muestran como el output de cada sector de la economía se distribuye entre otros. Al mismo tiempo, las columnas verticales muestran como cada sector obtiene los inputs necesarios de bienes y servicios de otros. Como cada una de las cifras de una fila es también una cifra en una columna, el output de cada sector aparece como el input de otra (Leontief, 1986, p. 5).

Véase el ejemplo siguiente:

Tabla 1. Tabla IO simplificada para una economía de tres sectores

Industria / Industria	Agricultura	Manufacturas	Hogares	Output total
Agricultura	25	20	55	100 fanegas de trigo
Manufacturas	14	6	30	50 yardas de tela
Hogares	80	180	40	300 unidades de trabajo
Input total	119	206	125	

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de Input-Output Economics, de W. Leontief, 1986, p. 20, Tabla 2-1, Copyright 1966, 1986 de Wassily Leontief

Esta tabla muestra la producción en un año de una economía de tres sectores: el de la agricultura, que produce trigo; el manufacturero, que produce tela y los hogares, que producen trabajo. Analizando la primera fila de la tabla, se puede observar el output total del sector de la agricultura y qué parte de esa producción consume cada sector, es decir, como el output total de 100 fanegas de trigo se distribuye como input entre las diferentes industrias: el propio sector de la agricultura consume 25 fanegas de trigo y se han transferido 20 al sector de las manufacturas y 55 al de los hogares. La interpretación de estos datos es la siguiente: el propio sector de la agricultura consume trigo para producir trigo, hecho que pudiera deberse, por ejemplo, a que el sector necesita proveerse de semillas para la plantación; el sector manufacturas requiere trigo para elaborar su producto (tela) y, por último, los hogares consumen trigo como alimento para producir trabajo. Alternativamente, analizando la primera columna de la tabla, se puede observar que el sector de la agricultura ha consumido 25 fanegas de su propio producto, 14 yardas de tela y 80 unidades de trabajo en su proceso productivo.

Esta tabla permite construir la matriz de coeficientes input de esta economía, la matriz $\boldsymbol{Z}$, también llamada de inputs intermedios:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 55 \\ 14 & 6 & 30 \\ 80 & 180 & 40 \end{pmatrix}$$

Una manera alternativa de presentar una tabla IO sería expresando sus entradas en función de su valor monetario, por ejemplo, de 2$ por fanega de trigo, 5$ por yarda de tela y 1$ por unidad de trabajo:

Tabla 2. Tabla IO simplificada expresada en valor monetario ($)

Industria \ Industria	Agricultura	Manufacturas	Hogares	Output total
Agricultura	50	40	110	200
Manufacturas	70	30	150	250
Hogares	80	180	40	300
Input total	220	250	300	

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de Input-Output Economics, de W. Leontief, 1986, p. 21, Tabla 2-2, Copyright 1966, 1986 de Wassily Leontief

La interpretación, sin embargo, sigue la misma lógica que en el caso anterior: de los 200$ de trigo producidos en ese año, 50$ fueron consumidos por el sector de la agricultura, 40$ por el de las manufacturas y 110$ por el de los hogares. Por otra parte, analizando la primera columna se llega a la conclusión de que el gasto total en inputs del sector de la agricultura fue de 220$, divididos éstos en 50$ de trigo, 70$ de tela y 80$ de trabajo. Otro elemento interesante que permite observar esta tabla es la renta anual total de los hogares, los 300$ que aparecen como output total en la tercera fila.

Estos ejemplos, aunque simples, sirven para ilustrar que los sectores de una economía son interdependientes y, por lo tanto, una caída o un aumento del output total en uno de ellos afecta a los demás.

2.1 Matriz de Coeficientes Técnicos

Debido a su interés económico y sus aplicaciones matemáticas, también puede resultar interesante representar la matriz de inputs intermedios $\boldsymbol{Z}$ como una matriz de coeficientes técnicos $\boldsymbol{A}$, en la que sus entradas a_{ij} verifican que:

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} \tag{1}$$

donde:

- z_{ij} son las entradas de la matriz de inputs intermedios, es decir, la cantidad física de producto del sector i que es absorbida como input por el sector j.
- x_j es igual al output físico total del sector j.

Utilizando los datos de la tabla 1, se puede construir la siguiente matriz de coeficientes técnicos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 25/100 & 20/50 & 55/300 \\ 14/100 & 6/50 & 30/300 \\ 80/100 & 180/50 & 40/300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}40 & 0{,}183 \\ 0{,}14 & 0{,}12 & 0{,}100 \\ 0{,}80 & 3{,}60 & 0{,}133 \end{pmatrix}$$

Pulido y Fontela (1993) señalan que el análisis IO está profundamente ligado al concepto de los coeficientes técnicos puesto que una matriz $\boldsymbol{A}$ que se mantenga constante en el tiempo indicaría, hipotéticamente, la permanencia estructural del proceso productivo. Por otra parte, cambios en los coeficientes técnicos reflejarían cambios estructurales que, como se explicará más adelante, pueden ser un reflejo los efectos sustitución y fabricación (Stone, 1961).

2.2 Tablas Input-Output con Uso Final

En los ejemplos anteriores, se ha introducido la hipótesis simplificadora de que todo el output de la economía es utilizado como input por los diversos sectores, pero esto no sucede en la realidad. Una tabla ligeramente más compleja incluiría también información sobre los diversos usos que se le da a la producción de cada sector, no solo su función de actuar como bien intermedio sino también qué parte es consumida, cuál se destina a la formación de capital y cuál a las exportaciones, por ejemplo. Por el lado de los inputs, esta tabla puede incluir también información sobre las importaciones y el valor añadido generado por cada industria. Un ejemplo de tabla IO de este tipo podría ser el siguiente:

Tabla 3. Tabla IO con uso final, importaciones y valor añadido

Industria / Industria	Sectores			Uso final			Output total
	Agricultura	Industria	Servicios	Consumo Final	Formación de capital	Exportaciones	
Agricultura	26,78	43,7	111,59	73,44	19,25	25,24	300,00
Industria	78,17	90,47	72,33	121,43	85,28	52,34	500,00
Servicios	75,05	115,83	96,08	295,13	75,47	42,45	700,00
Importaciones	30,00	40,00	15,00	5,00	5,00	5,00	100,00
Valor añadido	90,00	210,00	405,00				705,00
Output	300,00	500,00	700,00	495,00	185,00	125,00	

Fuente: elaboración propia a partir de los datos de Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 27, Box 1.4, Copyright 2008 de European Communities

Si se analiza la primera fila, la información que se puede extraer en este caso es la siguiente: el output total del sector de la agricultura es de 300 unidades, de las cuales sólo 182,07 han sido utilizadas como input por los tres sectores de la economía (26,78 en el de la agricultura, 43,70 en el de la industria y 111,59 en el de los servicios). De las 117,93 unidades restantes, 73,4 han sido consumidas, 19,25 se han destinado a la formación de capital y se han exportado 25,24. Por otra parte, si se analiza la primera columna, puede apreciarse que el sector de la agricultura, aparte de los inputs obtenidos en la economía nacional (26,78 unidades de su propia producción, 78,17 unidades de productos manufacturados y 75,05 unidades del producto del sector servicios), ha utilizado en su proceso productivo 30,00 unidades de productos importados y su actividad ha generado un valor añadido de 90,00 unidades.

Adicionalmente, en la sección de "Uso Final", esta tabla muestra la utilización de un total de 15,00 unidades de productos importados que no intervienen en el proceso productivo: de ellas, 5 unidades han sido consumidas, 5 se han destinado a la formación de capital y otras 5 han sido exportadas. Finalmente, con la información que se presenta en este ejemplo, se puede calcular la suma del valor añadido generado por cada sector, representando ésta, en ausencia de impuestos y subvenciones, el PIB total de la economía (705,00).

Es evidente que las tablas IO, a pesar de su simplicidad, contienen una gran cantidad de información muy útil para el análisis económico. Sin embargo, existen tablas mucho más extensas que recogen los datos de decenas o cientos de sectores industriales. Estas tablas constituyen, según Nørlund (2008), el retrato más detallado posible de una economía. Por lo tanto, a pesar de que su proceso de elaboración es complejo y bastante costoso, la construcción de tablas IO resulta de gran interés para estados, regiones e incluso algunas empresas.

3. Construcción de Sistemas Estáticos

Utilizando los datos de las matrices IO, podemos construir un sistema de ecuaciones que establezca una relación entre el output total de un sector y los inputs intermedios. Este sistema conformaría el modelo de Leontief:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Zi} + \boldsymbol{f} \tag{2}$$

donde:

- $\boldsymbol{x}$ es el vector de output total por sector.
- $\boldsymbol{Zi}$ es el vector suma de coeficientes input o inputs intermedios por filas.
- $\boldsymbol{f}$ es el vector de uso final, también llamado de demanda final.

Sin embargo, el Modelo de Leontief suele expresarse utilizando la matriz de coeficientes técnicos $\boldsymbol{A}$ en lugar del vector suma $\boldsymbol{Zi}$. Una expresión equivalente a la ecuación (2) es entonces:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{f} \tag{3}$$

En el caso de una tabla con tres sectores, el desarrollo de la ecuación matricial anterior llevaría al siguiente sistema estático de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + f_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + f_2 \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + f_3 \end{cases} \tag{4}$$

Alternativamente, manteniendo la forma matricial, el modelo puede ser reorganizado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{f} \tag{5}$$

donde:

- $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad.
- $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ recibe el nombre de matriz inversa de Leontief y representa, para cada elemento de la fila i y columna j, la demanda total, directa e indirecta, atribuida a una industria i como consecuencia de una unidad de demanda final del producto de la industria j (Stone, 1961, p. 92).

Ahora bien, uno de los problemas que presenta el modelo de Leontief y el análisis de tablas IO es que, debido al elevado coste temporal que supone su elaboración, la información que éstas presentan está desactualizada desde el mismo momento de su publicación.

> A pesar de que su aplicación es simple, la construcción de una tabla input-output es una operación de gran complejidad y laboriosidad. (…) Dado el inevitable retardo entre la acumulación y la representación de datos para un año en particular, una tabla input-output siempre será un documento histórico. (…) La tabla para 1939 no se completó hasta 1944 (Leontief, 1986, p. 14-15).

Debido a esto, a menudo se utilizan métodos matemáticos para estimar los coeficientes de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{Z}$ de años para los que todavía no se disponen tablas oficiales. El objetivo de este trabajo es realizar una introducción a los métodos de proyección de matrices aplicados a las tablas IO y, posteriormente, mostrar su utilidad en un caso real aplicado a la economía de Galicia.

Parte 2. Métodos de Proyección de Tablas Input-Output

4. Ajuste Proporcional Iterativo (IPF)

El IPF es un algoritmo de proyección de matrices que realiza ajustes en una matriz base de manera repetida hasta alcanzar unos totales marginales por fila y columna conocidos (Lomax, 2019). Este ajuste fue propuesto originalmente por Demings y Stephan en 1940 y es frecuentemente utilizado en disciplinas como la demografía, la economía o las ciencias computacionales.

Partiendo de una matriz base $\boldsymbol{N}$, el método pretende estimar una matriz $\boldsymbol{M}^{\star}$, frecuentemente denominada matriz objetivo, de la cual tan sólo se conocen sus vectores suma por filas y columnas (es decir, sus vectores margen $m_i^{\star}$ y $m_j^{\star}$). En ese caso, se puede proyectar una matriz $\boldsymbol{M}'$ a partir de $\boldsymbol{N}$ tal que sus vectores margen por filas igualen a los del objetivo ($m_i^{'} = m_i^{\star}$) de la siguiente manera:

$$m_{ij}^{'} = n_{ij}(m_i^{\star}/n_i) \tag{6}$$

Es decir, las entradas de la matriz base $\boldsymbol{N}$ se ajustan en función de un coeficiente obtenido a partir de los valores del vector margen por filas de la matriz objetivo y el de la matriz base. Sin embargo, Demings y Stephan (1940) advierten que, tras esta operación, la condición de ajuste para las filas ($m_i^{'} = m_i^{\star}\ \forall i$) se cumple, pero, normalmente, la condición para las columnas no ($m_j^{'} \neq m_i^{\star}$). Debe por tanto realizarse un segundo ajuste, proyectando las entradas de una segunda matriz, $\boldsymbol{M}''$, de manera que $m_j^{''} = m_j^{\star}$ utilizando esta vez como matriz base la obtenida por la estimación anterior:

$$m_{ij}^{''} = m_{ij}^{'}\left(m_j^{\star}/m_j^{'}\right) \tag{7}$$

Tras esta segunda operación, se obtiene una matriz para la que $m_j^{''} = m_j^{\star}\ \forall j$. Este paso, sin embargo, puede generar un nuevo desajuste en las filas, de manera que los pasos anteriores deben repetirse hasta que se obtenga una matriz proyectada $\boldsymbol{M^p}$ para la que $m_i^{p} = m_i^{\star}\ \forall i$ y $m_j^{p} = m_j^{\star}\ \forall j$.

La forma general de un método IPF se puede expresar como:

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(k+1)} &= m_{ij}^{k+1}\left(m_i^{\star}/m_i^{k}\right) \\ m_{ij}^{(k+2)} &= m_{ij}^{k+1}\left(m_j^{\star}/m_j^{k+1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

siendo k el número de iteraciones realizadas.

5. IPF en Economía: el Método RAS

El IPF recibe diferentes nombres según la disciplina en la que se utilice, pero, en lo que respecta a la economía, se le denomina método RAS.

El método RAS fue inicialmente desarrollado por Richard Stone (1961) y fue expandido tanto por Stone y Brown (1962) como por Bacharach (1965 y 1970). Para aplicar esta técnica en la estimación de tablas IO, es necesario definir primero los dos vectores margen de una matriz de coeficientes input $\boldsymbol{Z}$:

- El vector margen por filas, que en economía se denota habitualmente como vector $\boldsymbol{u}$. Utilizando la ecuación (2), se puede definir $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Zi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}$.
- El vector margen por columnas, que en economía se denota habitualmente como vector $\boldsymbol{v}$. Se puede definir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{iZ}$.

Aplicar este método para proyectar tablas IO es posible gracias a que, a pesar de que obtener información sobre los inputs intermedios de cada industria es, como se ha mencionado anteriormente, un proceso con un elevado coste temporal, la información sobre el total de output por sector $\boldsymbol{x}$ y la recogida en los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es relativamente accesible o al menos relativamente fácil de estimar.

El método RAS, como IPF, se aplica a los elementos de la matriz de coeficientes técnicos $\boldsymbol{A}^0$ hasta que se obtiene una matriz proyectada $\boldsymbol{A^p}$, convertible en $\boldsymbol{Z^p}$, cuyos vectores $\boldsymbol{u}^p$ *y* $\boldsymbol{v}^p$ igualan a los del año objetivo $\boldsymbol{u}^\star$ *y* $\boldsymbol{v}^\star$. El método RAS se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A^p} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S} \tag{9}$$

donde:

- $\boldsymbol{A}^p$ es la matriz de coeficientes técnicos proyectada.
- $\boldsymbol{A}^0$ es la matriz de coeficientes técnicos del año base.
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz diagonal de coeficientes correctores para las filas.
- $\boldsymbol{S}$ es una matriz diagonal de coeficientes correctores para las columnas.

Como se puede apreciar, el IPF ha sido reescrito en economía como un producto matricial. Efectivamente, una manera de conseguir un ajuste homogéneo en las filas o columnas de una matriz es multiplicarla por otra que contenga los coeficientes correctores en su matriz principal y ceros en sus demás entradas. La utilización del método RAS para la proyección de tablas IO sigue los siguientes pasos:

1. Como paso previo, se suele realizar una primera estimación de la matriz $\boldsymbol{Z}^p$ utilizando la original, los vectores de producción total del año objetivo $\boldsymbol{x}^\star$ y del año base $\boldsymbol{x}^0$. Esta primera matriz estimada, denotada por $\boldsymbol{Z}'$, recibe a veces el nombre de matriz estimada con vieja tecnología. Sus elementos se definen de la siguiente manera:

$$z'_{ij} = z^0_{ij}\left(\frac{x^\star_j}{x^0_j}\right) \tag{10}$$

2. Se procede al ajuste de las filas de la matriz base $\boldsymbol{A}^0$. Para ello, es necesario calcular la matriz diagonal $\boldsymbol{R}(0)$:

$$\boldsymbol{R}(0) = \begin{pmatrix} r^0_1 & 0 & 0 \\ 0 & r^0_2 & 0 \\ 0 & 0 & r^0_3 \end{pmatrix}$$

donde cada elemento r^0_i es el coeficiente corrector para la fila i que recoge el factor entre paréntesis de la ecuación (6). En este primer paso, se calculan los r^0_i gracias a la información contenida en los vectores $\boldsymbol{u}$ del año objetivo y de la matriz $\boldsymbol{Z}'$ obtenida en el paso anterior:

$$r^0_i = \frac{u^\star_i}{u'_i} \tag{11}$$

Multiplicando $\boldsymbol{R}(0)$ por la matriz base $\boldsymbol{A}^0$ se obtiene una matriz ajustada, denotada por $\boldsymbol{A}^1$, que se puede convertir en $\boldsymbol{Z}^1$ utilizando la relación presentada en ecuación (1): $z^1_{ij} = a^1_{ij}x^\star_j$. En esta matriz $\boldsymbol{Z}^1$, se verifica que $u^1_i = u^\star_i\ \forall i$. Sin embargo, como se advierte en el apartado anterior, en la mayoría de los casos $v^1_j \neq v^\star_j$.

3. Para solucionar el desequilibrio en las columnas, se calcula a partir de $\boldsymbol{Z}^1$ la matriz diagonal de coeficientes correctores para las columnas, $\boldsymbol{S}(1)$:

$$\boldsymbol{S}(1) = \begin{pmatrix} s^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & s^1_2 & 0 \\ 0 & 0 & s^1_3 \end{pmatrix}$$

donde, de manera análoga a la del paso anterior, cada elemento s^1_j recoge el factor entre paréntesis de la ecuación (7):

$$s^1_j = \frac{v^\star_j}{v^1_j} \tag{12}$$

Al multiplicar $\boldsymbol{A}^1$ por $\boldsymbol{S}(1)$ se obtiene una nueva matriz $\boldsymbol{A}^2$ con la que se construye $\boldsymbol{Z}^2$, en la que $v_j^2 = v_j^\star \; \forall j$. Ahora bien, lo más habitual es que este segundo paso genere un nuevo desajuste en las filas, aunque más pequeño que el que existía antes de realizar el paso 2, es decir:

$$\left|u_i^2 - u_i^\star\right| < \left|u_i^{'} - u_i^\star\right| \; \forall i$$

4. Se repiten los pasos 2 y 3 hasta obtener una matriz $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{p}}$ para la cual se alcanza un valor arbitrario y pequeño de $\varepsilon > 0$ que verifica que:

$$\begin{gathered} \left|u_i^p - u_i^\star\right| < \varepsilon \; \forall i \\ \left|v_j^p - v_j^\star\right| < \varepsilon \; \forall j \end{gathered} \tag{13}$$

5.1 Ejemplo de Aplicación del Método RAS

A continuación, se presenta un ejemplo de aplicación del método RAS con datos extraídos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables (2008). En él, se presentan las tablas IO del año base, del año objetivo y la estimada con vieja tecnología:

Tabla 4. Tabla IO para un año base ($\boldsymbol{Z}^0$)

	Agricultura	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Demanda final**	**Output**
Agricultura	20,00	34,00	10,00	64,00	36,00	100,00
Industria	20,00	152,00	40,00	212,00	188,00	400,00
Servicios	10,00	72,00	20,00	102,00	98,00	200,00
Total	50,00	258,00	70,00	378,00	322,00	700,00
Valor añadido	50,00	142,00	130,00	322,00	0,00	322,00
Input	100,00	400,00	200,00	700,00	322,00	1022,00

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables, 2008, p. 450, Box 14.1, Tabla 1, Copyright 2008 de European Communities

Tabla 5. Tabla IO para el año objetivo ($\boldsymbol{Z}^{*}$)

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Demanda final	Output
Agricultura	19,16	33,38	10,14	62,68	32,10	94,78
Industria	18,32	158,16	43,16	217,84	195,02	412,86
Servicios	9,80	76,48	22,08	108,36	104,32	212,68
Total	47,28	268,02	73,58	388,88	331,44	720,32
Valor añadido	47,50	144,84	139,10	331,44	0,00	331,44
Input	94,78	412,86	212,68	720,32	331,44	1051,76

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables, 2008 p. 450, Box 14.1, Tabla 2, Copyright 2008 de European Communities

Tabla 6. Tabla IO proyectada con vieja tecnología ($\boldsymbol{Z}'$)

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Demanda final	Output
Agricultura	18,96	35,09	10,63	64,68	30,10	94,78
Industria	18,96	156,89	42,54	218,38	194,48	412,86
Servicios	9,48	74,31	21,27	105,06	107,62	212,68
Total	47,39	266,29	74,44	388,12	322,20	720,32
Valor añadido	47,39	146,57	138,24	322,20	-0,76	331,44
Input	94,78	412,86	212,68	720,32	331,44	1051,76

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 450, Box 14.1, Tabla 3, Copyright 2008 de European Communities

Estableciendo un valor de ε=0,005, el método RAS se aplica de la siguiente manera.

Primera iteración

Primeramente, se calculan los elementos de la matriz $\boldsymbol{R}(0)$ utilizando la fórmula (11):

Tabla 7. Cálculo de los coeficientes correctores por filas r_i^0

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Objetivo	$\boldsymbol{r_i^0}$
Agricultura	18,96	35,09	10,63	64,68	62,68	0,9690
Industria	18,96	156,89	42,54	218,38	217,84	0,9975
Servicios	9,48	74,31	21,27	105,06	108,36	1,0314

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 452, Box 14.2, Tabla 3, Copyright 2008 de European Communitie

y, después, se efectúa el ajuste por filas multiplicando $\boldsymbol{R}(0)$ por $\boldsymbol{A}^0$, construida esta última a partir de los datos de la tabla 4. El resultado es la matriz $\boldsymbol{A}^1$:

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}9690 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9975 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0314 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}085 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}38 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}18 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}1938 & 0{,}0824 & 0{,}0485 \\ 0{,}1995 & 0{,}3791 & 0{,}1995 \\ 0{,}1031 & 0{,}1857 & 0{,}1031 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^1$ puede utilizarse para obtener $\boldsymbol{Z}^1$ y comprobar que el ajuste se ha realizado correctamente:

Tabla 8. Tabla IO a partir de la matriz $\boldsymbol{Z}^1$

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Objetivo
Agricultura	18,37	34,01	10,30	62,68	62,68
Industria	18,91	156,50	42,43	217,84	217,84
Servicios	9,78	76,65	21,94	108,36	108,36

Fuente: elaboración propia

Efectivamente, $u_i^1 = u_i^\star \; \forall i$.

Habiendo concluido esta primera etapa del proceso, se pasa a realizar el ajuste por columnas. Deben calcularse entonces los elementos de la matriz $\boldsymbol{S}(1)$ utilizando la ecuación (12) y los datos de las tablas 8 y 5:

Tabla 9. Cálculo de los coeficientes correctores por columnas s_j^1

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	18,44	34,09	10,15
Industria	19,00	157,02	41,82
Servicios	9,82	76,91	21,62
Total	47,27	268,03	73,58
Objetivo	47,28	268,02	73,58
$\boldsymbol{s_j^1}$	1,0048	1,0032	0,9854

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 453, Box 14.2, Tabla 4, Copyright 2008 de European Communities

Multiplicando $\boldsymbol{A}^1$ por $\boldsymbol{S}(1)$ se obtiene la matriz ajustada por columnas $\boldsymbol{A}^2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,1938 & 0,0824 & 0,0485 \\ 0,1995 & 0,3791 & 0,1995 \\ 0,1031 & 0,1857 & 0,1031 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0048 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0032 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9854 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,1947 & 0,0826 & 0,0477 \\ 0,2005 & 0,3803 & 0,1966 \\ 0,1036 & 0,1863 & 0,1016 \end{pmatrix}$$

y, nuevamente, se puede comprobar que el ajuste se ha hecho correctamente construyendo la matriz $\boldsymbol{Z}^2$ a partir de $\boldsymbol{A}^2$:

Tabla 10. Tabla IO a partir de la matriz $\boldsymbol{Z}^2$

	Agricultura	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**
Agricultura	18,46	34,12	10,15	62,73	62,68
Industria	19,00	157,01	41,81	217,82	217,84
Servicios	9,82	76,90	21,62	108,33	108,36
Total	47,28	268,02	73,58		
Objetivo	47,28	268,02	73,58		

Fuente: elaboración propia

Para $\boldsymbol{Z}^2$, se verifica que $v_j^2 = v_j^\star \ \forall j$, pero ha aparecido un nuevo desajuste en las filas. Se puede comprobar también que este desajuste es más pequeño que el original:

$i{=}1$ $\quad |62,73 - 62,68| < |64 - 62,68| \Leftrightarrow 0,05 < 1,32$
$i{=}2$ $\quad |217,82 - 217,84| < |212 - 217,84| \Leftrightarrow 0,02 < 5,84$
$i{=}3$ $\quad |108.33 - 108,36| < |102 - 108,36| \Leftrightarrow 0.03 < 6,36$

Sin embargo, tras esta primera iteración, no se verifica la condición de parada porque:

$$\left|u_i^2 - u_i^\star\right| \nless \varepsilon = 0,005 \ \forall i$$

Es necesario, por tanto, realizar una segunda iteración.

Segunda iteración

Tabla 11. Cálculo de los coeficientes correctores por filas r_i^0, iteración 2

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Objetivo	r_i^0
Agricultura	18,24	33,55	9,99	61,78	62,68	0,9992
Industria	19,14	157,39	41,92	218,45	217,84	1,0001
Servicios	9,9	77,08	21,67	108,65	108,36	1,0002

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 453, Box 14.2, Iteración 2, Tabla 3, Copyright 2008 de European Communities

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}9992 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0001 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1947 & 0{,}0826 & 0{,}0477 \\ 0{,}2005 & 0{,}3803 & 0{,}1966 \\ 0{,}1036 & 0{,}1863 & 0{,}1016 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}1946 & 0{,}0826 & 0{,}0477 \\ 0{,}2005 & 0{,}3803 & 0{,}1966 \\ 0{,}1037 & 0{,}1863 & 0{,}1017 \end{pmatrix}$$

Tabla 12. Cálculo de los coeficientes correctores por columnas s_j^1, iteración 2

	Agricultura	Industria	Servicios
Agricultura	18,37	34,01	10,30
Industria	18,91	156,50	42,43
Servicios	9,78	76,65	21,94
Total	47,05	267,15	74,67
Objetivo	47,28	268,02	73,58
s_j^1	1,0002	1,0000	1,0000

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 454, Box 14.2, Iteración 2, Tabla 4, Copyright 2008 de European Communities

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}1946 & 0{,}0826 & 0{,}0477 \\ 0{,}2005 & 0{,}3803 & 0{,}1966 \\ 0{,}1037 & 0{,}1863 & 0{,}1017 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}0002 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0000 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}1946 & 0{,}0826 & 0{,}0477 \\ 0{,}2005 & 0{,}3803 & 0{,}1966 \\ 0{,}1037 & 0{,}1863 & 0{,}1017 \end{pmatrix}$$

Tabla 13. Tabla IO a partir de la matriz $\boldsymbol{Z}^2$, iteración 2

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Objetivo
Agricultura	18,45	34,09	10,15	62,68	62,68
Industria	19,01	157,02	41,81	217,84	217,84
Servicios	9,83	76,91	21,62	108,36	108,36
Total	47,28	268,02	73,58		
Objetivo	47,28	268,02	73,58		

Fuente: elaboración propia

Tras completar esta segunda iteración, se han igualado los totales por filas y columnas a los objetivos, de manera que sí se verifica la condición de parada:

$$\left|u_i^2 - u_i^\star\right| < \varepsilon = 0{,}005\ \forall i$$
$$\left|v_j^2 - v_j^\star\right| < \varepsilon = 0{,}005\ \forall j$$

Por tanto, se puede dar por concluida la proyección y se obtiene que $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{Z}^2$.

Tabla 14. Tabla IO proyectada para el año objetivo ($\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{p}}$)

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Demanda final	Output
Agricultura	18,45	34,09	10,15	62,68	32,10	94,78
Industria	19,01	157,02	41,81	217,84	195,02	412,86
Servicios	9,83	76,91	21,62	108,36	104,32	212,68
Total	47,28	268,02	73,58	388,12	331,44	720,32
Valor añadido	47,50	144,84	139,10	331,44	0,00	331,44
Input	94,78	412,86	212,68	720,32	331,44	1051,76

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 455, Box 14.2, Tabla 5, Copyright 2008 de European Communities

Tabla 15. Desviación de la tabla IO proyectada respecto a la real (en porcentaje)

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Demanda final	Output
Agricultura	-3,7	2,1	0,1	0,0	0,0	0,0
Industria	3,7	-0,7	1,1	0,0	0,0	0,0
Servicios	0,3	0,6	-2,1	0,0	0,0	0,0
Total	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Valor añadido	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Input	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output tables, 2008, p. 455, Box 14.2, Tabla 6, Copyright 2008 de European Communities

5.2 Modelo Estático de Proyección RAS

De la misma manera que se puede construir un sistema estático para una tabla IO real, se puede construir uno a partir de una tabla IO proyectada mediante el RAS. Dicho sistema recibe el nombre de modelo estático de proyección RAS y se expresa como:

$$\boldsymbol{x^p} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}^0\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{f^p} \tag{14}$$

donde:

- $\boldsymbol{x^p}$ es el vector de output total de la tabla proyectada.
- $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad.
- $\boldsymbol{R}$ es la matriz de coeficientes correctores para las filas.
- $\boldsymbol{A}^0$ es la matriz de coeficientes técnicos del año base.
- $\boldsymbol{S}$ es la matriz de coeficientes correctores para las columnas.
- $\boldsymbol{f^p}$ es el vector de demanda final de la tabla proyectada.

Es posible realizar un análisis de robustez de la estimación realizada con el RAS comparando los valores reales y proyectados de las matrices de coeficientes técnicos y las matrices de Leontief normal e inversa. Aplicando este análisis a la estimación anterior se obtiene:

Tabla 16. Desviación de los multiplicadores de output en porcentaje

	Real			Proyección		
$\boldsymbol{A}$	0,2022	0,0809	0,0477	0,1946	0,0826	0,0477
	0,1933	0,3831	0,1945	0,2005	0,3803	0,1966
	0,1034	0,1852	0,1038	0,1037	0,1863	0,1017
Leontief $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$	0,7978	-0,0809	-0,0477	0,8054	-0,0826	-0,0477
	-0,1933	0,6169	-0,1945	-0,2005	0,6197	-0,1966
	-0,1034	-0,1852	0,8962	-0,1037	-0,1863	0,8983
Inversa de Leontief $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$	1,3185	0,2074	0,1151	1,3085	0,2090	0,1152
	0,4932	1,8115	0,4193	0,5046	1,1808	0,4225
	0,2541	0,3984	1,2158	0,2557	0,3990	1,2141
Suma columnas	2,0658	2,4173	1,7503	2,0687	2,4160	1,7518
Error en los multiplicadores de output en porcentaje				0,1	-0,1	0,1

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Ouput Tables, 2008, p. 456, Box 14.3, Tabla 3, Copyright 2008 by European Communities

Puede apreciarse que los porcentajes de error recogidos en la última línea de la tabla son bajos, lo cual pone en evidencia la capacidad del método RAS para realizar buenas estimaciones.

5.3 Interpretación Económica del Método RAS

Como se indica en el apartado 1.2, Stone (1961) menciona que el aumento o disminución de los coeficientes técnicos es un reflejo de los efectos sustitución y fabricación de la economía, operando el primero en las filas y el segundo en las columnas de la matriz. En el contexto de las tablas IO, Pedreño (1984) define el efecto sustitución como aquel que refleja como el producto de un sector ha reemplazado o ha sido reemplazado por otro, mientras que el efecto fabricación se refiere a un cambio en el peso relativo de un input sobre el total de su sector. Considerando que estos efectos pueden ser una consecuencia del cambio tecnológico en los sistemas productivos, el método RAS parece tener una base económica lógica (Miller y Blair, 2009, p. 329).

Hay, sin embargo, economistas que argumentan que el RAS es un método puramente matemático y desprecian la interpretación anterior. Esto se debe a que consideran que el RAS no representa adecuadamente la manera en la que se distribuye el progreso técnico de una economía, debido a que realiza el ajuste por filas y columnas de manera homogénea:

> El método RAS es un algoritmo iterativo que ajusta las filas y las columnas de la tabla de transacciones interindustriales hacia arriba y hacia abajo repetidamente hasta que los totales de las filas y las columnas concuerdan con los vectores objetivo. Se ha demostrado que el RAS hará que los valores converjan, pero el resultado no se ajustará necesariamente al significado económico de la tabla de transacciones original (Wilcoxen, 1988, p. 1).

Esta visión tiene también cierto fundamento, puesto que se puede demostrar que, efectivamente, el método RAS deriva de un problema de optimización con restricciones consistente en obtener los coeficientes de una matriz $\boldsymbol{A^p}$ que difieran lo mínimo posible de los coeficientes de la matriz original, $\boldsymbol{A}^0$, pero ajustando sus totales por filas y columnas a unos vectores margen objetivo. Este problema se explica en el apartado siguiente.

5.4 El Problema de Optimización con Restricciones RAS

Siguiendo el procedimiento indicado por Miller y Blair (2009), se puede representar la distancia entre las entradas de la matriz proyectada $\boldsymbol{A^p}$ y las de la original $\boldsymbol{A}^0$ a través de la siguiente función D:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p} \, ln\left(\frac{a_{ij}^{p}}{a_{ij}^{0}}\right) \tag{15}$$

El método RAS puede expresarse entonces como el siguiente problema de minimización:

$$\min_{a_{ij}^p} D = \min_{a_{ij}^p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^p \, ln\left(\frac{a_{ij}^p}{a_{ij}^0}\right) \tag{16}$$

sujeto a las restricciones:

$$u_i^\star = u_i^p = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p$$

$$v_j^\star = v_j^p = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p$$

La función Lagrangiana para este problema es:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^p \, ln\left(\frac{a_{ij}^p}{a_{ij}^0}\right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p - u^\star{}_i\right) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p - v_j^\star\right) \tag{17}$$

y el sistema de ecuaciones de condiciones de primer orden queda entonces como:

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}^p} = 1 + \ln a_{ij}^p - \ln a_{ij}^0 - \lambda_i a_{ij}^p - \mu_j a_{ij}^p = 0$$

$$u_i^\star - \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p = 0 \tag{18}$$

$$v_j^\star - \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p = 0$$

Para probar la relación que existe entre el método iterativo y este problema de optimización debe desarrollarse la primera ecuación del sistema (18), despejando $\ln a_{ij}^p$:

$$\ln a_{ij}^p = \ln a_{ij}^0 - 1 + \lambda_i a_{ij}^p + \mu_j a_{ij}^p \iff$$

$$a_{ij}^p = a_{ij}^0 e^{-1+\lambda_i a_{ij}^p + \mu_j a_{ij}^p} \tag{19}$$

La expresión anterior puede ser reorganizada de la siguiente manera:

$$a_{ij}^{p} = e^{\lambda_i a_{ij}^{p} - (1/2)} a_{ij}^{0} e^{\mu_j a_{ij}^{p} - (1/2)} \tag{20}$$

Si se define $r_i = e^{\lambda_i a_{ij}^{p} - (1/2)}$ y $s_j = e^{\mu_j a_{ij}^{p} - (1/2)}$, la ecuación (20) puede reescribirse como:

$$a_{ij}^{p} = r_i a_{ij}^{0} s_j \tag{21}$$

Esta última relación indica que, para obtener los coeficientes técnicos proyectados a_{ij}^{p}, se multiplican los coeficientes técnicos base por dos coeficientes correctores, uno obtenido a partir de la restricción para las filas (r_i) y otro a partir de la restricción para las columnas (s_j).

Finalmente, sustituyendo $z_{ij}^{p} = a_{ij}^{p} x^{\star}{}_j$ en la primera restricción del problema se obtiene la ecuación que permite calcular los r_i:

$$u_i^{\star} - \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^{p} = 0 \Leftrightarrow u_i^{\star} - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p} x^{\star}{}_j = 0 \Leftrightarrow u_i^{\star} - \sum_{j=1}^{m} r_i a_{ij}^{0} s_j x^{\star}{}_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_i^{\star} - r_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{0} s_j x^{\star}{}_j = 0 \Leftrightarrow r_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{0} s_j x^{\star}{}_j = u_i^{\star} \Leftrightarrow$$

$$r_i = \frac{u_i^{\star}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{0} s_j x^{\star}{}_j} \tag{22}$$

y, de manera análoga, se puede obtener la expresión que permite calcular los s_j sustituyendo $z_{ij}^{p} = a_{ij}^{p} x^{\star}{}_j$ en la segunda restricción:

$$s_j = \frac{v_j^{\star}}{\sum_{i=1}^{n} r_i a_{ij}^{0} x^{\star}{}_j} \tag{23}$$

Es decir, los coeficientes correctores r_i y s_j se obtienen de manera iterativa, utilizando las ecuaciones (22) y (23), de exactamente la misma manera que lo dispuesto en las fórmulas (11) y (12).

5.5 Alternativa al RAS: Introducción a los Métodos Estocásticos

El método RAS es uno de los más utilizados a la hora de realizar proyecciones de tablas IO, pero no es el único. Existen, por una parte, diversos métodos iterativos derivados del RAS que pueden resultar útiles en situaciones concretas, ya que no siempre se puede aplicar un mismo método en todos los casos (uno de ellos, el GRAS, se explica en el apartado 6). Sin embargo, existe también una alternativa a las técnicas de estimación iterativas: los métodos estocásticos.

Como se menciona en el apartado 5.3, una de las limitaciones del método RAS es la manera en la que éste representa la distribución del progreso técnico a través de la economía, debido a la manera en la que realiza el ajuste. Los métodos estocásticos, sin embargo, no realizan el ajuste en una matriz en base a coeficientes correctores homogéneos para filas o columnas, sino que lo hacen, como su nombre indica, siguiendo un método estocástico, elemento a elemento. Un ejemplo de este tipo de técnicas de proyección es el método de minimización de Kuroda, derivado de los algoritmos de Bacharach, desarrollado por Kuroda (1988) y utilizado extensivamente por Kuroda y Wilcoxen (1988).

El objetivo de este método es analizar la distancia entre una tabla IO proyectada $\boldsymbol{Z^p}$ y la original $\boldsymbol{Z}^0$ y minimizarla (Wilcoxen 1988). Además, debe respetarse que los vectores margen de $\boldsymbol{Z^p}$ igualen a unos vectores margen objetivo. El principio básico en este caso es, por tanto, el mismo que en el RAS, siendo la única diferencia que Kuroda utiliza una función objetivo diferente que permite realizar el ajuste estocásticamente. Para utilizar el método es necesario definir los siguientes elementos:

- Una matriz de datos iniciales $\boldsymbol{Z}^0$.
- Una matriz $\boldsymbol{K}$, que representa la proporción de cada elemento de $\boldsymbol{Z}^0$ sobre la suma de los elementos de su fila:

$$k_{ij} = \frac{z_{ij}^0}{\sum_{j=1}^{m} z_{ij}^0} = \frac{z_{ij}^0}{u_i^0} \tag{24}$$

- Una matriz $\boldsymbol{C}$, que representa la proporción de cada elemento de $\boldsymbol{Z}^0$sobre la suma de los elementos de su columna:

$$c_{ij} = \frac{z_{ij}^0}{\sum_{i=1}^{n} z_{ij}^0} = \frac{z_{ij}^0}{v_j^0} \tag{25}$$

- Los vectores margen objetivo por filas y columnas $\boldsymbol{u}^\star$ y $\boldsymbol{v}^\star$.
- Dos matrices diagonales, $\boldsymbol{W}$ y $\boldsymbol{B}$, de factores de ponderación de errores arbitrarios para las filas y las columnas respectivamente. De entre las múltiples posibilidades que existen para establecer los valores de estos factores, conviene mencionar las tres siguientes:
  1) Ponderación igualitaria a todos los errores: $w_i = b_j = 1 \; \forall \, i, j$

2) Ponderación propuesta por Wilcoxen: $w_i = u^{\star 2}_i/2$; $b_j = v^{\star 2}_j/2$. Esta opción permite simplificar el desarrollo del método, pero no garantiza que los valores proyectados sean positivos (ver Wilcoxen, 1988 para más detalles).
3) Ponderación propuesta por Kuroda: $w_i = 1/u^{\star 2}_i$; $b_j = 1/v^{\star 2}_j$. Aplicar el método con estas ponderaciones asegura en la mayoría de los casos (pero no todos) que los coeficientes proyectados sean positivos.

Dados estos elementos, se construye la función objetivo q que mide la distancia entre los elementos de la matriz $\boldsymbol{Z^p}$ y los de la original, recogidos en las matrices $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{C}$. El método de Kuroda consiste en resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{z_{ij}^p} q = \min_{z_{ij}^p} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{z_{ij}^p}{u^\star{}_i} - k_{ij}\right)^2 w_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{z_{ij}^p}{v^\star{}_j} - c_{ij}\right)^2 b_j \tag{26}$$

sujeto a las restricciones

$$u^\star{}_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p$$

$$v^{\star 2}_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p$$

5.6 Herramientas Informáticas para Aplicar el Método RAS

Como se menciona en el apartado 1, el análisis de las tablas IO y la aplicación de los métodos para estimarlas ha cambiado radicalmente en los últimos años gracias al desarrollo de diferentes herramientas informáticas. En cuanto a las que permiten aplicar el método RAS, en este trabajo se explicarán dos, Excel y R.

5.6.1 *RAS con Excel*

Excel es un programa de edición de hojas de cálculo desarrollado por Microsoft a finales de los 80. Éste es, probablemente, el programa más sencillo de utilizar a la hora de emplear el RAS debido a la sencillez de su interfaz y lo intuitivo que resulta construir en él tablas de datos y comandos automatizados (macros). En este ejemplo, se toman los datos de las tablas 4 y 5 presentadas en el apartado 5.1, obtenidas del Manual de Eurostat.

Para comenzar, se elabora en una primera hoja de cálculo de Excel la matriz $\boldsymbol{Z}^0$, incluyendo los vectores margen objetivo:

Tabla 17. $\boldsymbol{Z}^0$ en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**
Agricultura	20	34	10	64	62,68
Industria	20	152	40	212	217,84
Servicios	10	72	20	102	108,36
Total	50	258	70		
Objetivo	47,28	268,02	73,58		

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables, p. 452, Box 14.2, Table 1, Copyright 2008 by European Communities

En una segunda hoja de cálculo, se debe construir una tabla ampliada que incluya la diferencia entre los vectores margen base y objetivo y también los coeficientes correctores. Las entradas de inputs intermedios serán el resultado de multiplicar las entradas importadas de la primera hoja de cálculo por los coeficientes correctores r_i y s_j que correspondan. Es necesario proceder de esta manera para evitar errores por formulación circular al realizar el ajuste. Inicialmente, se introduce el valor 1 en los coeficientes multiplicativos para obtener la siguiente tabla:

Tabla 18. $\boldsymbol{Z}^0$ extendida en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**	**Diferencia**	**r**
Agricultura	20,00	34,00	10,00	64,00	62,68	1,32	1
Industria	20,00	152,00	40,00	212,00	217,84	-5,84	1
Servicios	10,00	72,00	20,00	102,00	108,36	-6,36	1
Total	50,00	258,00	70,00				
Objetivo	47,28	268,02	73,58				
Diferencia	2,72	-10,02	-3,58				
s	1	1	1				

Fuente: elaboración propia

En este momento, se puede aplicar el método RAS. Comenzando por el ajuste por filas, debe utilizarse la función "Buscar Objetivo" para calcular el coeficiente multiplicativo de la primera fila: la celda que debe marcarse como referencia es la celda "Diferencia" (en este caso, G2) y ajustar su valor a 0 cambiando el valor de la celda correspondiente a r_1 (H2). El resultado es el siguiente: Excel prueba aleatoriamente diversos valores para r_1, lo cual cambia también el valor de las entradas de la matriz de inputs intermedios. El proceso termina cuando el valor de la celda "Diferencia" sea 0, es decir, cuando $u_1 = u_1^*$. Esta acción puede ser grabada en una macro de nombre RAS_filas que, una vez creada, puede ser modificada con la opción "Ver Macros", de manera que aplique a todas las filas de la tabla (ver anexo 7.1.1). Una vez ejecutada, concluye el ajuste por filas.

Para realizar el segundo paso, se repite el proceso anterior, pero aplicado a las columnas. Se crea así una segunda macro que se llamará RAS_columnas (ver anexo 7.1.2). Su ejecución completa el ajuste por columnas, pero se genera un nuevo desequilibrio en las filas.

Es posible crear ahora una última macro, que se llamará simplemente RAS (ver anexo 7.1.3), que ejecute repetidamente las dos anteriores hasta alcanzar el número de iteraciones deseado. Una vez ejecutada, finaliza el método y obtenemos la tabla proyectada para el año objetivo.

Tabla 19. $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{p}}$ con Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**	**Diferencia**	**r**
Agricultura	18,45	34,09	10,15	62,68	62,68	0,00000000	0,99432628
Industria	19,01	157,02	41,81	217,84	217,84	0,00000000	1,02451303
Servicios	9,83	76,91	21,62	108,36	108,36	0,00079540	1,05944506
Total	47,28	268,02	73,58				
Objetivo	47,28	268,02	73,58				
Diferencia	0,00060596	0,00011474	0,00007471				
s	0,92759385	1,00830281	1,02034856				

Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, es conveniente mencionar que Excel como herramienta de proyección de tablas IO tiene sus limitaciones, siendo su poder computacional su mayor desventaja frente a otros programas informáticos. Por ello, la proyección de tablas complejas puede resultar lenta en Excel, por no mencionar que construir las macros manualmente para una tabla de grandes dimensiones sería extremadamente tedioso.

5.6.2 *Ras con R*

Si bien Excel puede ser la herramienta más sencilla para emplear el método RAS, tal vez R sea la más útil debido a las posibilidades que ofrece y su inmenso poder computacional. Esto permite proyectar las tablas IO complejas mucho más rápidamente que utilizando Excel.

R es un entorno y lenguaje de programación desarrollado por Robert Gentleman y Ross Ihaka en 1993 y es uno de los más utilizados en estadística y econometría. Cuenta con numerosos “paquetes”, creados por el equipo desarrollador de R (el *R Development Core Team*) o por los propios usuarios, los cuales, una vez instalados, permiten utilizar una amplia gama de funciones estadísticas, de creación de mapas, gráficos, etc. El número total de paquetes disponibles en el repositorio oficial de R (CRAN) es, a fecha de redacción de este trabajo, de 2.697, pero existen muchos otros fuera de él.

R permite la programación de métodos iterativos manualmente, por lo que podría escribirse un código “bucle” que aplicase el RAS a una matriz determinada. Sin embargo, en el CRAN existe un paquete diseñado para facilitar el análisis de modelos y tablas IO llamado “ioanalysis”. En él, existe una función llamada “ras” que permite aplicar el método directamente.

Para utilizar esta función, nuevamente aplicada a los datos de las tablas 4 y 5 obtenidos del Manual de Eurostat, es necesario crear en el entorno de trabajo de R los siguientes objetos (en el anexo 7.2 se incluye el código para crear los objetos y aplicar la función ras):

- Un objeto "io" de la clase InputOutput, construido con la función "as.inputoutput". Este objeto requiere a su vez la creación de al menos los tres objetos siguientes: el objeto Z, que será la matriz inicial $\boldsymbol{Z}^0$; el objeto RS_label, una matriz de tamaño nx2, en el que la primera fila representa los nombres de los sectores por columnas y, la segunda, los nombres de los sectores por filas y el objeto X, que será igual al vector $\boldsymbol{x}^0$.
- Un objeto x1, que será un vector igual al vector de output total por filas para el año objetivo ($\boldsymbol{x}^\star$).
- Un objeto u1, que será un vector igual al vector margen objetivo para las filas ($\boldsymbol{u}^\star$**).**
- Un objeto v1, que será un vector igual al vector margen objetivo para las columnas ($\boldsymbol{v}^\star$).

Además, la función permite modificar, si se desea, los siguientes argumentos:

- El argumento numérico "tol", que es el valor de ε, la variable que define el criterio de parada. Por defecto, éste es igual a 0,000001.
- El argumento numérico "maxiter", que será el número máximo de iteraciones que realizará el programa. Por defecto, éste es de 10.000 iteraciones.
- El elemento lógico "verbose" que, si es igual a "TRUE", hará que R muestre el resultado obtenido tras cada iteración. Por defecto, éste es igual a "FALSE".

Utilizando la función "ras" con estos objetos se obtiene la siguiente matriz de coeficientes técnicos proyectada:

$$\boldsymbol{A^p} = \begin{pmatrix} 0{,}1946238 & 0{,}08256535 & 0{,}04770374 \\ 0{,}2005318 & 0{,}38032056 & 0{,}19660733 \\ 0{,}1036838 & 0{,}18629298 & 0{,}10165471 \end{pmatrix}$$

A partir de la cual se puede construir $\boldsymbol{Z^p}$:

Tabla 20. $\boldsymbol{Z^p}$ con R.

	Agricultura	Industria	Servicios	Total	Objetivo
Agricultura	18,45	34,09	10,15	62,68	62,68
Industria	19,01	157,02	41,81	217,84	217,84
Servicios	9,83	76,91	21,62	108,36	108,36
Total	47,28	268,02	73,58		
Objetivo	47,28	268,02	73,58		

Fuente: elaboración propia

Si se representasen más cifras decimales en las entradas de la tabla se podría observar que las soluciones obtenidas con Excel y con R difieren ligeramente, pero, como puede apreciarse, ambos programas llegan aproximadamente a la misma solución.

5.7 Conclusión del Método RAS

En el apartado 4.2, se expone la capacidad que tiene el RAS para realizar buenas estimaciones. Esto ligado a la facilidad de su aplicación hace que sea un método bastante común en la estimación de tablas input-output. Sin embargo, presenta también una serie de inconvenientes.

Una de las limitaciones del método RAS, la manera en la que éste realiza el ajuste, es descrita por algunos economistas como una forma demasiado simplista de representar cómo el progreso técnico se transmite a través de la economía. Además, por esta misma razón, el ajuste puede no reflejar correctamente los efectos de sustitución: si se produce el reemplazamiento de un producto determinado, por ejemplo, de una determinada materia prima, el método distribuiría el efecto sustitución por todos los sectores de la economía, incluso en aquellos que no la utilizan en su proceso productivo (Pedreño, 1984).

Otra limitación del RAS es que el método no tiene en cuenta los signos de las entradas de la matriz base, lo cual puede, como se explica en el apartado siguiente, generar problemas en la estimación. Además, un elemento de la matriz base que sea igual a 0 mantendrá ese mismo valor a lo largo de las diferentes iteraciones. Esto puede resultar beneficioso porque mantiene los niveles de transacciones entre industrias no relacionadas a 0, pero también un inconveniente porque el RAS es incapaz de reflejar cambios estructurales que hagan aparecer nuevas relaciones.

Otro inconveniente sería uno asociado a la naturaleza de las tablas IO, y es que el RAS no tiene en cuenta las anomalías que pueden aparecer si alguno de los coeficientes de la matriz base o de los vectores objetivos son incorrectos (Allen et al., 1975). Este es un riesgo siempre presente ya que dichos vectores se construyen mediante encuestas. Factores como una muestra sesgada, errores cometidos por los investigadores o simplemente cierto desconocimiento de los encuestados sobre su proceso productivo puede hacer que parte de la información presentada no se corresponda con la realidad. Esta cuestión es importante, ya que una sola entrada equivocada provoca la proyección de tablas IO que, aunque repliquen la estructura de la matriz base, pueden presentar información que diste en gran medida de la existente en la economía.

Si bien la manera en la que el RAS realiza el ajuste es una de sus características básicas como IPF, sí que existen variaciones del método que solucionan algunas de sus otras limitaciones. A continuación, se presenta una de ellas, el GRAS.

6. Método GRAS

6.1 Introducción al Método GRAS

Anteriormente se ha comentado que una de las limitaciones del RAS es que no tiene en cuenta el signo de las entradas de la matriz a la hora de realizar estimaciones. Esto provoca que, en presencia de entradas negativas, este método lleve a una matriz estimada cuya estructura se aleja significativamente de la original (Junius y Oosterhaven, 2003).

Esto puede suceder de dos maneras diferentes dependiendo del ajuste que se realice. Si los coeficientes multiplicadores r_i y s_j son mayores que uno, por ejemplo, las entradas positivas de una fila o columna aumentarán para alcanzar el objetivo. Sin embargo, las entradas negativas de esa fila o columna también se volverán más grandes (más negativas), lo que provoca que las entradas positivas deban aumentar desproporcionadamente para compensar la mayor carga negativa sobre el total. Si los coeficientes multiplicadores son inferiores a uno, sucede lo contrario y las entradas positivas deben disminuir de manera desproporcionada para compensar el menor impacto de las entradas negativas sobre el total.

Una manera de afrontar este problema es aplicar el RAS a una matriz y vectores adaptados, que no incluyan las entradas negativas y añadirlas al final del proceso. Este método se compondría de los cuatro pasos siguientes:

1. Se descompone la matriz de coeficientes técnicos $\boldsymbol{A}^0$ en dos. Por un lado, la matriz $\boldsymbol{P}$, compuesta por las entradas positivas de la matriz $\boldsymbol{A}^0$ y ceros en las entradas correspondientes a valores negativos. Segundo, la matriz $\boldsymbol{N}$, compuesta por los valores absolutos de las entradas negativas de la matriz $\boldsymbol{A}^0$ y ceros en las demás. Se puede establecer entonces la siguiente relación: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}$.
2. Se construyen los siguientes vectores:
   - Un vector adaptado $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ de output total por filas tal que: $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{N}\boldsymbol{i}$, donde $\boldsymbol{u}^0$ es el vector margen de la tabla IO construida a partir de $\boldsymbol{A}^0$ y $\boldsymbol{N}\boldsymbol{i}$ el vector de totales por filas de la matriz $\boldsymbol{N}$.
   - Un vector adaptado $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ de inputs totales por columnas tal que: $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{N}$, donde $\boldsymbol{v}^0$ es el vector de totales por columnas de la matriz de coeficientes input construida a partir de $\boldsymbol{A}^0$ y $\boldsymbol{i}\boldsymbol{N}$ el vector de totales por columnas de la matriz $\boldsymbol{N}$.
3. Se aplica el método RAS sobre $\boldsymbol{P}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ y $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, obteniendo como resultado la matriz proyectada $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{p}}$.
4. Finalmente, la matriz proyectada $\boldsymbol{A}^p$ se obtiene de la siguiente manera: $\boldsymbol{A}^p = \widetilde{\boldsymbol{A}}^p - \boldsymbol{N}$.

Sin embargo, este método también presenta inconvenientes. En palabras de Junius y Oosterhaven (2003), esta solución es subóptima debido a la pérdida de información resultado de ignorar las entradas negativas. El GRAS es un método derivado del RAS desarrollado por Junius y Oosterhaven (2003) que sí tiene en cuenta el signo de las entradas de la matriz de coeficientes técnicos, permitiendo realizar estimaciones sin pérdida de información.

6.2 Problema de Optimización con Restricciones GRAS

El objetivo del GRAS es, al igual que el del RAS, la proyección de una matriz, $\boldsymbol{Z}^p$, que se parezca lo más posible a la matriz base $\boldsymbol{Z}^0$ y que satisfaga que $\boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{u}^\star$ y $\boldsymbol{v}^p = \boldsymbol{v}^\star$.

El problema de optimización en este caso es muy similar al descrito para el RAS en el apartado 4.4, siendo la única diferencia que se introduce el valor absoluto de a_{ij}^p en el factor de la función objetivo fuera del logaritmo. El problema de minimización a resolver es, por tanto, el siguiente:

$$\min_{a_{ij}^p} D = \min_{a_{ij}^p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij}^p \right| ln \left(\frac{a_{ij}^p}{a_{ij}^0} \right) \tag{27}$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p$$

$$v_j^\star = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p$$

Para simplificar la resolución de este problema, es conveniente definir una variable l_{ij} tal que:

$$\begin{gathered} l_{ij} = \left(a_{ij}^p / a_{ij}^0 \right) > 0 \ si \ a_{ij}^0 \neq 0 \\ l_{ij} = 0 \ si \ a_{ij}^0 = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

o, lo que es lo mismo, $z_{ij} = \left| a_{ij} \right| l_{ij}$. El problema de minimización se transforma en:

$$\min_{l_{ij}} D = \min_{l_{ij}} D \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij}^0 \right| l_{ij} ln \left(l_{ij} \right) \tag{29}$$

sujeto a las restricciones

$$u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p$$

$$v_j^\star = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^p$$

La función lagrangiana de este problema es:

$$\begin{gathered} L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij}^0 \right| l_{ij} ln \left(l_{ij} \right) + \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^0 l_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(v_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0 l_{ij} \right) \end{gathered} \tag{30}$$

o, alternativamente escrita:

$$L = \sum_{(i,j)\in P} a_{ij}^{0} l_{ij} ln(l_{ij}) - \sum_{(i,j)\in N} a_{ij}^{0} l_{ij} ln(l_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{0} l_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(v_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{0} l_{ij} \right) \qquad (31)$$

donde:

- P es el set de pares de índices (i, j) para los cuales $a_{ij} \geq 0$.
- N es el set de pares de índices (i, j) para los cuales $a_{ij} < 0$.

La solución para el problema de optimización es la siguiente:

$$\begin{gathered} l_{ij} = e^{\lambda_i + \mu_i - 1} \; si \; a_{ij}^{0} > 0 \\ l_{ij} = e^{-\lambda_i - \mu_i - 1} \; si \; a_{ij}^{0} < 0 \\ l_{ij} = 0 \; si \; a_{ij}^{0} = 0 \end{gathered} \qquad (32)$$

Si ahora se define $r_i = e^{\lambda_i a_{ij}^{p} - (1/2)}$ y $s_j = e^{\mu_j a_{ij}^{p} - (1/2)}$, se puede reescribir la solución del problema como:

$$\begin{gathered} l_{ij} = r_i s_j \; si \; a_{ij}^{0} > 0 \\ l_{ij} = r_i^{-1} s_j^{-1} \; si \; a_{ij}^{0} < 0 \\ l_{ij} = 0 \; si \; a_{ij}^{0} = 0 \end{gathered} \qquad (33)$$

y, finalmente, sustituyendo esta solución en la ecuación (28), se obtiene la expresión que permite obtener los coeficientes técnicos proyectados a_{ij}^{p}:

$$\begin{gathered} a_{ij}^{p} = r_i s_j a_{ij}^{0} \; si \; a_{ij}^{0} \geq 0 \\ a_{ij}^{p} = r_i^{-1} s_j^{-1} a_{ij}^{0} \; si \; a_{ij}^{0} < 0 \end{gathered} \qquad (34)$$

La solución a este problema de optimización muestra que los coeficientes base a_{ij}^{0} son ajustados por r_i y s_j para obtener los coeficientes proyectados a_{ij}^{p}. La diferencia respecto al RAS es que, en el GRAS, el ajuste en las entradas negativas se realiza dividiendo por los coeficientes r_i y s_j que correspondan en lugar de multiplicando. Sustituir los valores de la ecuación (34) en las restricciones del problema demuestra que los valores de r_i y s_j se obtienen de manera iterativa. En el caso de la primera restricción, cuando $a_{ij}^0 \geq 0$:

$$u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p \Leftrightarrow u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^p x_j^\star \Leftrightarrow u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} r_i s_j a_{ij}^0 x_j^\star \Leftrightarrow u_i^\star = r_i \sum_{j=1}^{m} s_j a_{ij}^0 x_j^\star \Leftrightarrow$$

$$r_i = \frac{u_i^\star}{\sum_{j=1}^{m} s_j a_{ij}^0 x_j^\star} \quad si \quad a_{ij}^0 \geq 0 \tag{35}$$

En la primera restricción, si $a_{ij}^0 < 0$:

$$u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} z_{ij}^p \Leftrightarrow u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^p x_j^\star \Leftrightarrow u_i^\star = \sum_{j=1}^{m} r_i^{-1} s_j^{-1} a_{ij}^0 x_j^\star \Leftrightarrow$$

$$u_i^\star = r_i^{-1} \sum_{j=1}^{m} s_j^{-1} a_{ij}^0 x_j^\star \Leftrightarrow r_i^{-1} = \frac{u_i^\star}{\sum_{j=1}^{m} s_j^{-1} a_{ij}^0 x_j^\star}$$

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j^{-1} a_{ij}^0 x_j^\star}{u_i^\star} \quad si \quad a_{ij}^0 < 0 \tag{36}$$

De manera análoga para la segunda restricción, se obtienen las expresiones para s_j:

$$s_j = \frac{u_i^\star}{\sum_{j=1}^{m} r_i a_{ij}^0 x_j^\star} \quad si \ a_{ij}^0 \geq 0 \tag{37}$$

$$s_j = \frac{\sum_{j=1}^{m} r_i^{-1} a_{ij}^0 x_j^\star}{u_i^\star} \quad si \ a_{ij}^0 < 0 \tag{38}$$

6.3 Ejemplo de Aplicación del Método GRAS con Excel

A continuación, se presenta un ejemplo de la utilidad del método GRAS en Excel. Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado 4.5.1 de RAS con Excel, se construye la tabla $\boldsymbol{Z}^0$ y $\boldsymbol{Z}^0$ extendida, pero ahora incluyendo entradas negativas.

Tabla 21. $\boldsymbol{Z}^0$ con entradas negativas en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**
Agricultura	20	34	-10	44	62,68
Industria	20	152	40	212	217,84
Servicios	-10	72	20	82	108,36
Total	30	258	50		
Objetivo	47,28	268,02	73,58		

Fuente: elaboración propia

Tabla 22. $\boldsymbol{Z}^0$ con entradas negativas extendida en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**	**Diferencia**	**r**
Agricultura	20	34	-10	44	62,68	-18,68	1
Industria	20	152	40	212	217,84	-5,84	1
Servicios	-10	72	20	82	108,36	-26,63	1
Total	30	258	50				
Objetivo	47,28	268,02	73,58				
Diferencia	-17,28	-10,02	-23,58				
s	1	1	1				

Fuente: Elaboración propia

Se puede realizar una primera estimación utilizando la macro RAS creada en el apartado 4.5.1. El resultado es la siguiente tabla proyectada:

Tabla 23. $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{p}}$ con entradas negativas mediante RAS en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**	**Diferencia**	**r**
Agricultura	38,94	43,56	-19,82	62,68	62,68	0,000904	1,43856775
Industria	27,10	135,54	55,19	217,84	217,84	-0,000317	1,00123146
Servicios	-18,77	88,91	38,21	108,36	108,36	-0,000435	1,38651102
Total	47,28	268,02	73,58				
Objetivo	47,28	268,02	73,58				
Diferencia	0,00000000	-0,0007057	0,00085648				
s	1,35353041	0,89064473	1,37807863				

Fuente: Elaboración propia

En este caso, se puede apreciar el problema del que advierten Junius y Oosterhaven, y es que, a pesar de que se ha llegado a una solución, la estructura de la tabla proyectada difiere considerablemente de la original.

La solución a este problema, como ya se ha explicado, sería emplear el método GRAS. En Excel, se puede utilizar la función Si() para introducir una condición lógica sobre las entradas de la tabla de manera que se ajusten a la particularidad del GRAS: si la entrada es positiva, ésta es multiplicada por los coeficientes r_i y s_j que correspondan, mientras que, si es negativa, es dividida. Una vez establecida esta condición, se puede utilizar nuevamente la macro RAS, lo que lleva, esta vez sí, a una tabla IO proyectada con una estructura verosímil:

Tabla 24. $\boldsymbol{Z^p}$ con entradas negativas mediante GRAS en Excel

Celda A1	**Agricultura**	**Industria**	**Servicios**	**Total**	**Objetivo**	**Diferencia**	**r**
Agricultura	29,72	39,54	-6,58	62,68	62,68	0,000003	1,26625248
Industria	24,73	144,08	49,53	217,84	217,84	0,000000	1,03214303
Servicios	-6,67	84,40	30,63	108,36	108,36	0,000000	1,27649612
Total	47,28	268,02	73,58				
Objetivo	47,28	268,02	73,58				
Diferencia	-0,0009954	0,00050274	0,00049651				
s	1,17372013	0,91836263	1,19976243				

Fuente: elaboración propia

7. Anexo Parte 2. Códigos RAS

7.1 Cómo Construir la Macro RAS en Excel

Inicialmente, se construye la macro RAS_filas:

```
Sub filas()
' RAS_filas Macro
   Range("G2").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("H2")
End Sub
```

Posteriormente, se modifica manualmente la macro para que ésta se aplique a todas las filas de la tabla:

```
Sub RAS_filas()
' RAS_filas Macro
   Range("G2").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("H2")
   Range("G3").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("H3")
   Range("G4").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("H4")
End Sub
```

Ahora, se construye de manera análoga una macro para las columnas:

```
Sub RAS_columnas()
' RAS_columnas Macro
   Range("B7").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("B8")
   Range("C7").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("C8")
   Range("D7").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("D8")
End Sub
```

Por último, se construye la macro RAS que ejecuta repetidamente las dos anteriores:

```
Sub RAS()
' RAS Macro
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
   Application.Run "RAS_columnas"
   Application.Run "RAS_filas"
```

```
    Application.Run "RAS_columnas"
    Application.Run "RAS_filas"
    Application.Run "RAS_columnas"
    Application.Run "RAS_filas"
    Application.Run "RAS_columnas"
End Sub
```

7.2 Método RAS en R

```
library(ioanalysis)

#Primero, es necesario crear el objeto de clase "InputOutput" mediante la función as.inputoutput,

#Para ello, debe crearse la matriz IO base

Z_0<-matrix(c(20,20,10,34,152,72,10,40,20),nrow=3)

#Una matriz nx2 que contenga los nombres de los sectores

sectores<-
matrix(c("Agricultura","Manufacturas","Servicios","Agricultura","Manufacturas","Servicios"),ncol=2)

#y el vector de output total del año base

x_0<-c(100,400,200)

#Ahora, ya puede crearse el objeto "InputOutput"

io_0<-as.inputoutput(Z=Z_0,RS_label=Sectores,X=x_0

#Deben por último crearse los vectores margen objetivo y el vector de output total del año objetivo

x_1<-c(94.78,412.86,212.68)

u_1<-c(62.68,217.84,108.36)

v_1<-c(47.28,268.02,73.58)

#Ya puede utilizarse la función ras

ras(io=io_0,x1=x_1,u=u_1,v1=v_1)
```

Parte 3. Implementación Práctica

En esta última parte del trabajo se pretende aplicar los conocimientos teóricos presentados para realizar varias proyecciones de tablas IO reales. Más concretamente, en esta sección se trabaja con las tablas IO de la economía de Galicia para los años 2011, 2016 y 2018 elaboradas a partir de datos del Instituto Gallego de Estadística (IGE), las cuales me han sido facilitadas por el departamento de análisis y modelización económica de la Universidad de Santiago de Compostela.

Dichas tablas son de dimensión 108x108. Cada fila/columna representa una rama de actividad diferente y están ordenadas en función del sector al que pertenecen: las primeras corresponden al sector primario; posteriormente, se encuentran las correspondientes al sector industrial y, por último, las del sector servicios. Las estimaciones se efectuarán en R y el método utilizado será el RAS.

8. Proyección para el 2016

La primera proyección que se ha realizado ha sido la de la tabla de 2016 utilizando la del 2011 como base.

Con el propósito de evaluar la robustez de la estimación, se ha definido un término de error e igual a la desviación de los coeficientes técnicos estimados en el año objetivo respecto a los reales ($e_{ij} = a_{ij}^{p} - a_{ij}^{\star}$). Además, se han definido varios niveles de error en función de su valor:

- Nivel 0. Se considera que la estimación ha sido buena si $|e_{ij}| \leq 0{,}0015$.
- Nivel 1. Corresponde a las estimaciones para las que $0{,}0015 < |e_{ij}| \leq 0{,}01$.
- Nivel 2. Corresponde a las estimaciones para las que $0{,}01 < |e_{ij}| \leq 0{,}02$.
- Nivel 3. Corresponde a las estimaciones para las que $0{,}02 < |e_{ij}| \leq 0{,}03$.
- Nivel 4. Corresponde a las estimaciones para las que $0{,}03 < |e_{ij}| \leq 0{,}04$.
- Nivel 5. Corresponde a las estimaciones para las que $0{,}04 < |e_{ij}| \leq 0{,}05$.
- Nivel 6. Corresponde a las estimaciones para las que $|e_{ij}| \geq 0{,}05$.

En el anexo 11.1 se presenta la tabla 108x108 de los errores cometidos en la proyección, representando los positivos en azul y los negativos en rojo. La intensidad del color de cada celda depende de su valor, correspondiendo los colores más intensos a los niveles de error más elevados. Las celdas con buenas estimaciones, es decir, con errores en el nivel 0, aparecen en blanco.

Analizando dicha tabla se puede observar que el nivel de error más común es el 0, es decir, que el método generalmente proporciona buenas estimaciones. Además, la mayoría de los errores cometidos son pequeños. Sin embargo, debe destacarse que se aprecia una concentración importante de errores en las celdas de la diagonal principal y en las filas comprendidas entre la 55 y la 95, las cuales se corresponden con la mayoría de las industrias del sector servicios. A pesar de esto, parece haber un mayor nivel de precisión en las estimaciones de las últimas filas de tabla (servicios de seguridad, defensa, educación, sanidad…).

Merece la pena comentar, de todas maneras, que el periodo temporal que transcurre entre el año base y el año objetivo en este caso es bastante elevado. Esto supone un lastre para la precisión de la proyección, ya que los cambios en la estructura del proceso productivo de una economía se ven reflejados, como se menciona en el apartado 1.3, por cambios en la estructura de la matriz de coeficientes técnicos y éstos aparecen con mayor frecuencia cuando el horizonte temporal es extenso.

9. Proyecciones para el 2018

Si lo que se ha mencionado al final del apartado previo es cierto, la precisión de una proyección de la tabla del año 2018 utilizando la del 2011 como base debería ser menor a la del caso anterior porque el horizonte temporal es más grande. Nuevamente, se ha construido una tabla de dimensión 108x108 que representa las desviaciones de los coeficientes proyectados respecto a los reales (ver anexo 11.2).

Efectivamente, al estudiar dicha tabla se aprecia inmediatamente que la cantidad de errores cometidos ha aumentado y también que los errores son más intensos. Además, se observa que, en ambos casos, los errores parecen concentrarse en las mismas regiones de la tabla. Parece entonces que se estima con menor exactitud la parte de la producción que cada sector utiliza en su propio proceso productivo y la manera en la que la actividad del sector servicios se distribuye por la economía gallega.

Ahora bien, se ha realizado una segunda proyección de la tabla del año 2018 utilizando la del 2016 como base. El periodo que transcurre entre el año base y el objetivo es de tan solo dos años, el más pequeño de los tres ejemplos que se presentan en esta sección. Por esta razón, cabría esperar que la precisión de esta estimación fuese más alta que la de las demás.

Para comprobar si esto se cumple, se ha construido, una vez más, la tabla de errores cometidos en la proyección (ver anexo 11.3). Su estudio revela que, efectivamente, los errores son mucho menos numerosos y también de magnitudes menores.

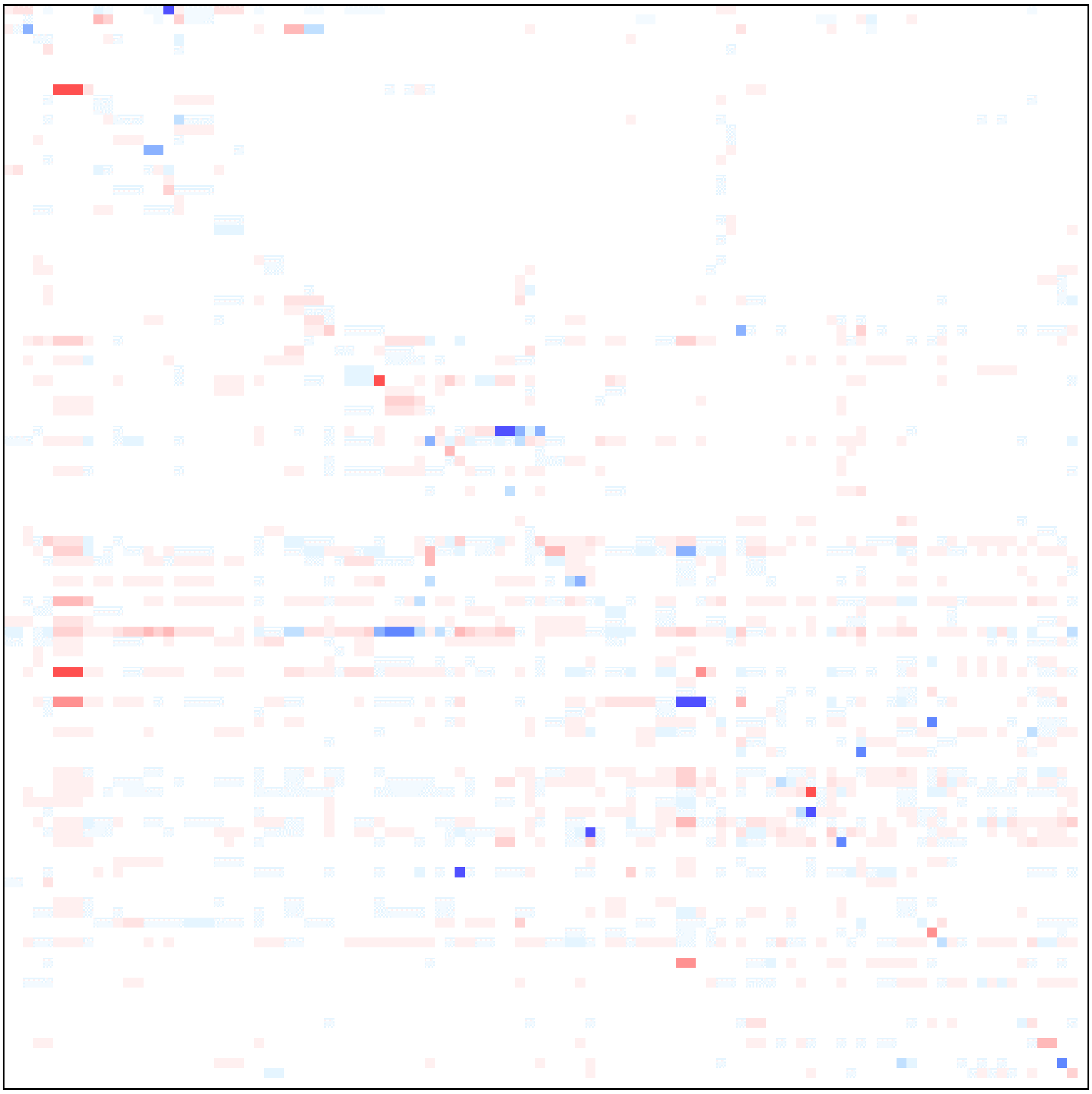
10. Conclusión

En este trabajo, se ha mencionado el interés que tienen el modelo de Leontief y las tablas IO para el análisis económico. Debido a esto y al elevado coste temporal que supone la elaboración de dichas tablas, ejercicios de estimación como el que se presenta en esta última sección son muy habituales.

También se ha realizado una introducción a los métodos de proyección de matrices aplicados a las tablas IO, prestando particular atención al RAS. Sin embargo, es importante tener en cuenta tanto sus limitaciones como sus alternativas. Otros métodos iterativos como el GRAS o los métodos estocásticos pueden resultar más o menos precisos que el RAS según la situación particular en la que nos encontremos y sus diferentes características pueden resultar más o menos atractivas a la hora de dar una interpretación económica a los resultados. Por ello, es de vital importancia para un investigador conocer las distintas técnicas y sus peculiaridades, para así poder seleccionar la más adecuada en cada momento.

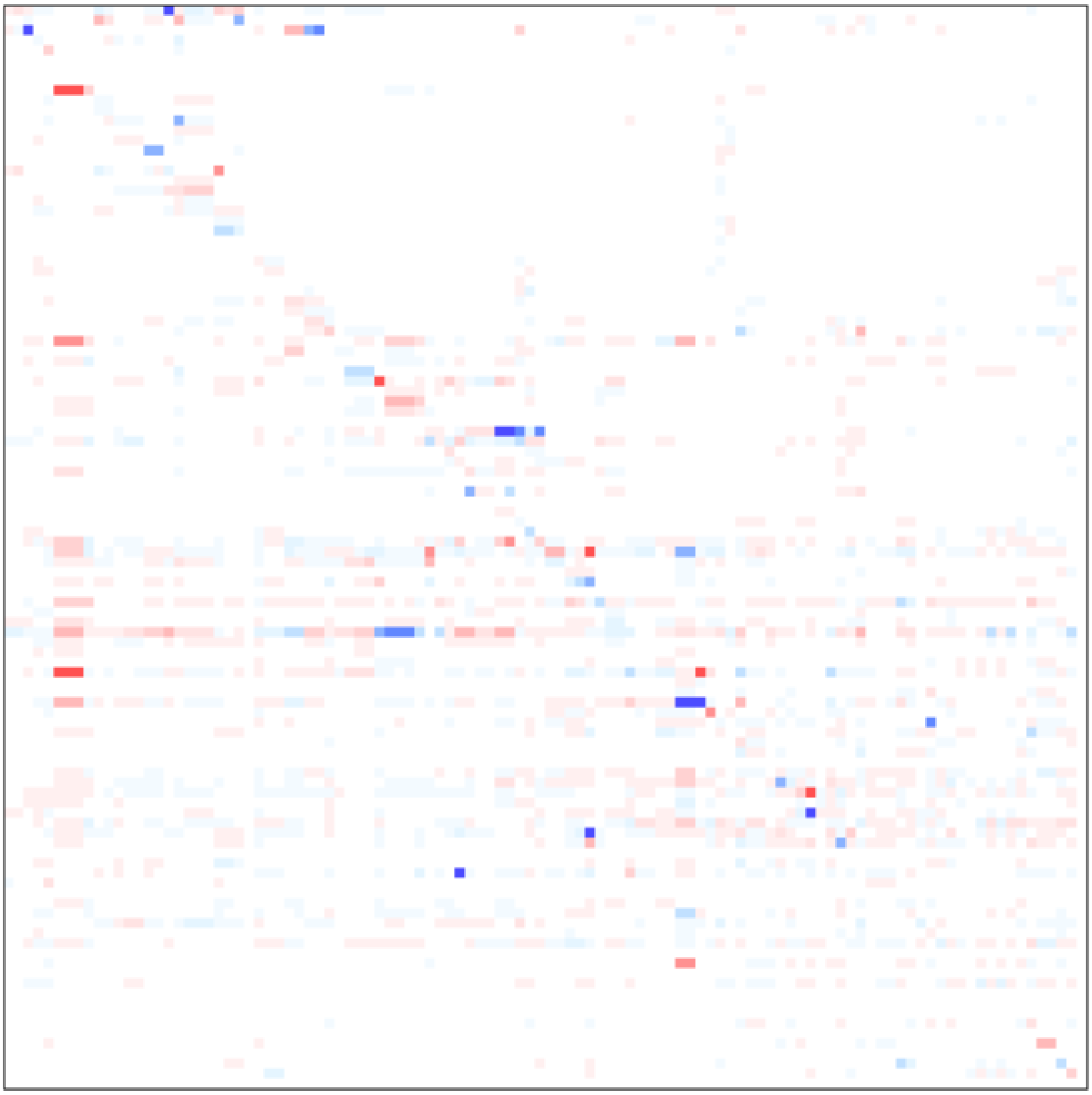
11. Anexo Parte 3. Tablas de Errores en la Proyección

11.1 Error en la Proyección para el 2016 (base 2011)



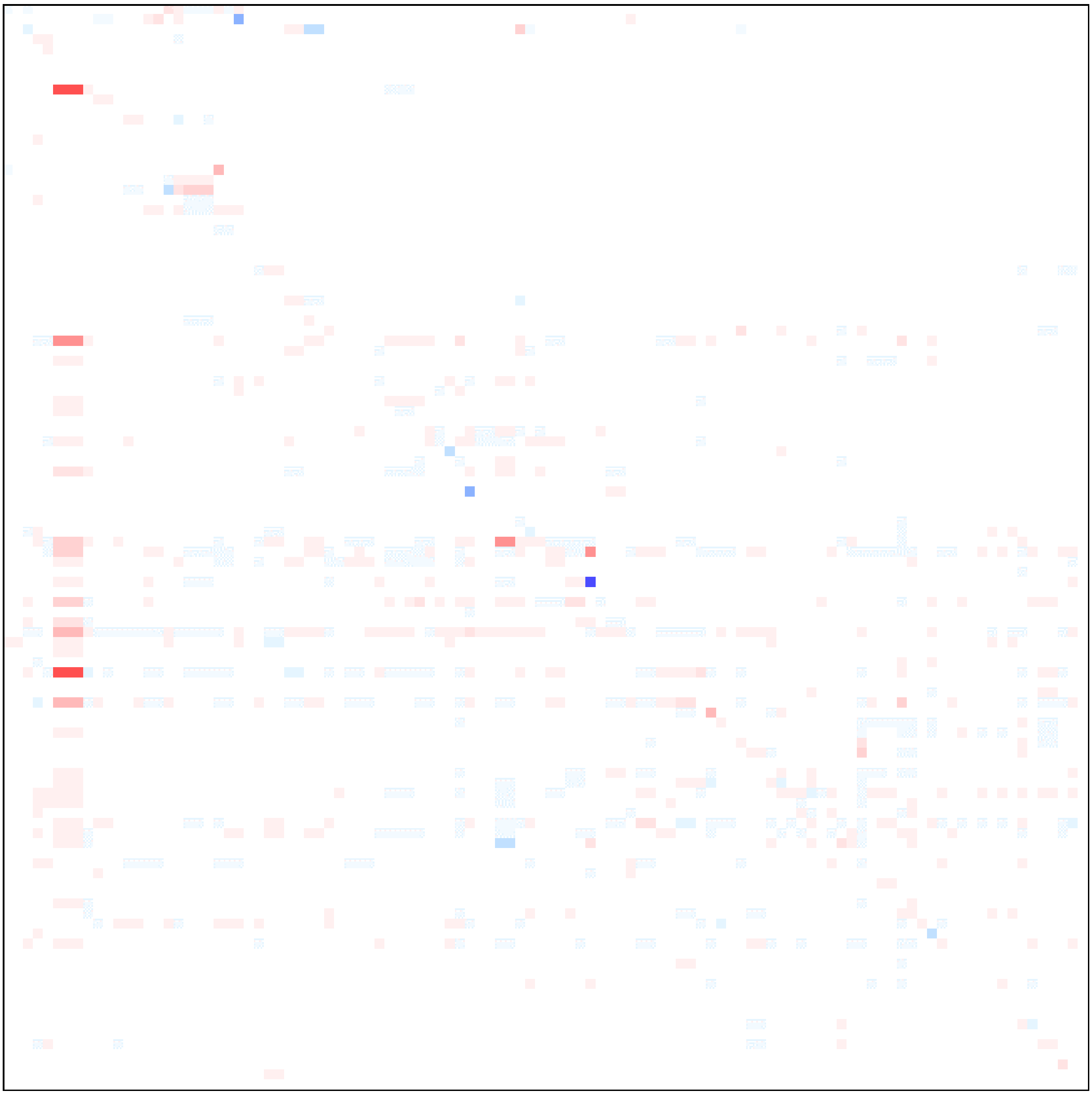
Fuente: elaboración propia

11.2 Error en la Proyección para el 2018 (base 2011)



Fuente: elaboración propia

11.3 Error en la Proyección para el 2018 (base 2016)



Fuente: elaboración propia

Bibliografía

Allen, R., Gossling, W., Armstrong, A., Barker, T., Fisher, H. y Lecomber, R. (1975). *Estimating and Projecting Input-Output Coeficients* (pp.43-52). WVU Repository.

Bacharach, M. (1979). *Biproportional Matrixes and Input Output Change*. Cambridge University Press.

Cheng, D. y Daniels, P. (2017). *Input-Ouput Analysis*. MPRA Archive.

De la Torre, F. (2023). *Expanding hybrid approaches to construct (inter)regional input-output models* (pp. 37-39) [Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela]. Repositorio Miverva.

Deming, W. y Stephan, F. (1940), *On a Least Squares Adjustment of a Sampled Frequency Table When the Expected Marginal Totals are Known*. Project Euclid.

Eurostat. (2008). *Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Ouput Tables* (pp. 447-476).

Junius, T. y Oosterhaven, J. (2002). *The Solution of Updating or Regionalizing a Matrix with both Positive and Negative Entries*. Research Gate.

Lomax, N. (2019). *What is… Iterative Proportional Fitting?* Research Gate.

Leontief, W. (1986). *Input Output-Economics*. Oxford University Press.

Miller, R. y Blair, P. (2009). *Input-Ouput Analysis* (pp. 313-336). Cambridge University Press.

Pedreño, A. (1984). *Algunas reflexiones en torno al método RAS como técnica de ajuste de la matriz de flujos intersectoriales*. Revista de Economía y Empresa de la Universidad de Alicante, 2(1), 51-68.

Pulido, A. y Fontela, E. (1993). *Análisis input-output: modelos, datos y aplicaciones*. Pirámide.

Stone, R. (1961). *Input-output and national accounts* (Paris: OEEC).

Tarancón, M. (2003). *Técnicas de Análisis Económico Input-Output* (pp. 13-48, 215-223). Research Gate.

Tarancón, M. y del Río, P. (2004). *Cambio Tecnológico y Emisiones de CO_2: Análisis Input-Output y Análisis de Sensibilidad mediante Programación Lineal*. Research Gate.

Wilcoxen, P. (1989). *Kuroda's Method for Constructing Consistent Input-Output Data Sets*.

Xie, Y., Ji, L., Zhang, B. y Huang, G. (2018). *Evolution of the Scientific Literature on Input-Output Analysis: A Bibliometric Analysis of 1990-2017*. MDPI.