TESIS DE DOCTORADO

ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA CON MÉTODOS PURAMENTE LAGRANGIANOS Y SEMI-LAGRANGIANOS DE PROBLEMAS DE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Pedro Fontán Muiños

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MÉTODOS MATEMÁTICOS Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2021

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

DECLARACIÓN DO AUTOR/A DA TESE

D./Dna. Pedro Fontán Muiños

Título da tese: ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA CON MÉTODOS PURAMENTE LAGRANGIANOS Y SEMI-LAGRANGIANOS DE PROBLEMAS DE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Presento a miña tese, seguindo o procedemento axeitado ao Regulamento, e declaro que:

1) A tese abarca os resultados da elaboración do meu traballo.
2) De ser o caso, na tese faise referencia ás colaboracións que tivo este traballo.
3) Confirmo que a tese non incorre en ningún tipo de plaxio doutros autores nin de traballos presentados por min para a obtención doutros títulos.
4) A tese é a versión definitiva presentada para a súa defensa e coincide a versión impresa coa presentada en formato electrónico

E comprométome a presentar o Compromiso Documental de Supervisión no caso de que o orixinal non estea na Escola.

En **Santiago**, 02 de August de 2021.

Sinatura electrónica

AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR/TITOR DA TESE

D./Dna. Marta Benítez García

En condición de: Co-directora

Título da tese: ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA CON MÉTODOS PURAMENTE LAGRANGIANOS Y SEMI-LAGRANGIANOS DE PROBLEMAS DE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

INFORMA:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D/Dna Pedro Fontán Muiños, baixo a miña dirección/titorización, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director/titor desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En **A Coruña a 3 de Agosto de 2021**

Sinatura electrónica

AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR/TITOR DA TESE

D./Dna. Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela

En condición de: Co-director

Título da tese: ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN NUMÉRICA CON MÉTODOS PURAMENTE LAGRANGIANOS Y SEMI-LAGRANGIANOS DE PROBLEMAS DE LA MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

INFORMA:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D/Dna Pedro Fontán Muiños, baixo a miña dirección/titorización, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director/titor desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En **Santiago de Compostela a 3 de agosto de 2021**

Sinatura electrónica

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mis directores de tesis, a la profesora Marta Benítez García y al profesor Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela , su tiempo, dedicación, trabajo y su infinita paciencia. Ha sido un privilegio poder trabajar bajo su tutela.

También me gustaría agradecer a la profesora Pilar Salgado y Branca García su ayuda y colaboración en el planteamiento y resolución de algunos de los problemas industriales contenidos en este trabajo.

Por último me gustaría mencionar a los profesores, colegas y compañeros que han participado en mi etapa formativa y profesional hasta la fecha. Las enseñanzas y experiencias acumuladas en este periodo son los elementos habilitantes que han permitido afrontar este trabajo.

Muchas gracias a todos.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. Objetivos 3

1.2. Estructura 3

I Métodos no Eulerianos para problemas de frontera libre **5**

Introducción **7**

2. Fundamentos de la mecánica de los medios continuos **9**

3. Problema de Cauchy escalar **15**

3.1. Formulaciones Eulerianas y no Eulerianas del problema 16

3.1.1. Formulación Euleriana 16

3.1.2. Formulación general no Euleriana 17

3.1.3. Formulación Lagrangiana 18

3.2. Resolución numérica 19

3.2.1. Discretización temporal: métodos de características 19

4. Problema de Cauchy vectorial **21**

4.1. Formulaciones Eulerianas y no Eulerianas del problema 21

4.1.1. Formulación Euleriana 22

4.1.2. Formulación general no Euleriana 22

4.1.3. Formulación Lagrangiana 24

4.2. Resolución numérica 24

5. Remallado y reinicialización **27**

5.1. Remallado 27

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

5.1.1. Frontera fija . . . 27
5.1.2. Frontera móvil . . . 28
5.2. Reinicialización . . . 30

II Aplicación a problemas de la mecánica del medio continuo 33

Introducción 35

6. Mecánica de fluidos. Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. 37
6.1. Formulaciones del problema . . . 38
6.1.1. Leyes constitutivas para un fluido Newtoniano incompresible . . . 38
6.1.2. Formulación Euleriana . . . 39
6.1.3. Formulación general no Euleriana . . . 40
6.1.4. Formulación Lagrangiana . . . 43
6.2. Resolución numérica . . . 43
6.2.1. Discretización temporal . . . 44
6.2.2. Discretización espacial . . . 51
6.3. Resultados numéricos . . . 58
6.3.1. Problema con solución analítica . . . 58
6.3.2. Cavidad con pared móvil . . . 63
6.3.3. Modos de oleaje en un recinto confinado . . . 68
6.3.4. Rotura de presa . . . 71
6.3.5. Flujo 2D alrededor de un cilindro . . . 73

7. Aplicación a un problema de multifísica: proceso industrial de electro recalcado 79
7.1. Modelización del problema . . . 79
7.1.1. Modelo térmico . . . 79
7.1.2. Modelo eléctrico en corriente continua . . . 83
7.1.3. Modelo mecánico . . . 85
7.2. Resolución numérica . . . 99
7.2.1. Discretización espacial . . . 100
7.2.2. Discretización temporal . . . 101
7.3. Resultados numéricos . . . 103

USC DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

7.3.1. Datos del problema térmico 104
7.3.2. Datos del problema eléctrico de corriente continua 105
7.3.3. Datos del problema mecánico 106
7.3.4. Resultados 109

III Conclusiones y trabajo futuro **113**

8. Conclusiones **115**

9. Trabajo futuro **117**

A. Apéndice **119**

A.1. Espacios funcionales 120
A.2. Espacios de elementos finitos 120
A.3. Sistema de coordenadas cilíndricas 124
A.4. Integradores temporales: métodos de Runge-Kutta 127

Bibliografía **132**

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 1

Introducción

Bajo la hipótesis de medios continuos, muchos fenómenos se modelan mediante ecuaciones de transporte escalares o vectoriales. Por ejemplo, las ecuaciones del movimiento en mecánica de sólidos y fluidos son casos particulares de ecuaciones de transporte vectoriales. Las ecuaciones del calor, de transporte de especies o de conservación de la masa son casos particulares de ecuaciones de transporte escalares. En el ámbito de la mecánica de fluidos estas ecuaciones suelen definirse en una configuración Euleriana, es decir, en vez de seguir la evolución de las magnitudes de interés asociadas a una *partícula fluida* se prefijan unos volúmenes de control y sobre ellos se identifican la evolución de estas magnitudes, teniendo en cuenta los aportes a través de los términos frontera y fuentes. En general esta descripción es adecuada cuando existe una región del espacio bien definida en la que se quiere conocer la evolución de los diferentes campos. Lo que sucede fuera de esta región no tiene interés en el estudio planteado y descripciones asociadas con las partículas fluidas necesitan tener en cuenta no solo las partículas fluidas contenidas en un instante dado en la región de interés, sino que deben tener en cuenta de alguna forma las partículas fluidas que en algún instante estén contenidas en esta región.

En el ámbito de la mecánica de sólidos deformables, las ecuaciones suelen definirse en la configuración Lagrangiana ya que en este caso la región de interés es el propio sólido y este se deforma, por tanto no existe una región definida a priori. En este caso el dominio computacional tiene las fronteras móviles cuyo movimiento es una incógnita propia del problema. En los casos en mecánica de fluidos en los que la frontera es móvil, por ejemplo en problemas de frontera libre o problemas de interacción fluido-estructura, emplear descripciones en configuraciones no Eulerianas (es decir, no actuales) permite abordar estos problemas de una manera natural.

Dentro de la categoría de problemas en mecánica de fluidos con frontera móvil se pueden incluir los problemas de interacción fluido-estructura (*FSI*), frontera libre o fluidos no miscibles. El problema de frontera libre puede considerarse como un caso particular del problema de fluidos no miscibles donde el comportamiento de todos los fluidos es despreciable salvo el de uno. Las estrategias de resolución de estos problemas pueden clasificarse en dos grupos, métodos de seguimiento de la interfaz (*interface-tracking*) y métodos de detección de la interfaz (*interface-capturing*) [1]. En los métodos de seguimiento de la interfaz existen fronteras de los elementos de la malla, que define el dominio computacional, que coinciden con la interfaz que separa a los dos subdominios. A medida que la interfaz se deforma, la malla ha de seguirla. En los métodos de detección de la interfaz el dominio computacional, y la malla que lo soporta, permanece constante durante toda la simulación. La interfaz entre los dos subdominios se determina mediante diferentes técnicas que permiten construir una función escalar marcador que identifica cada uno de los subdominios. Ejemplos de estas técnicas son *Mark-and-Cell* [2], *Volume of Fluid* [3] y *Level Set* [4].

USC DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las técnicas incluidas en la categoría de seguimiento de la interfaz, habitualmente, no permiten cambios topológicos en la interfaz pero suelen presentar una mayor precisión en la representación de la interfaz. Los métodos asociados con la detección de la interfaz poseen un coste computacional menor pues no requieren de remallado, permiten capturar cambios topológicos pero la representación de la interfaz es menos precisa.

Otra clasificación de los métodos, generalmente mas vinculada con los problemas FSI, es la indicada en [5], en la que se identifican dos categorías: métodos acoplados de malla conforme (*monolithic approach*) y métodos segregados (*partitioned approach*).

En los métodos acoplados de malla conforme los diferentes subdominios se resuelven a la vez utilizando las misma ecuaciones e incógnitas. El acople en la interfaz es natural sin necesidad de un tratamiento especial. Por contra requiere un desarrollo específico de los métodos de resolución y la reescritura de las ecuaciones en un modelo común. En el caso de los problemas FSI, partiendo de las ecuaciones del movimiento y particularizando en cada subdominio la ley constitutiva que define el tensor de tensiones de Cauchy, puede plantearse el problema de una manera unificada. En el Capítulo 4 se describe la ecuación del movimiento en configuraciones Eulerianas y no Eulerianas. En el Capítulo 6 se indica la ley constitutiva para fluidos newtonianos incompresibles y en el Capítulo 7 se definen leyes constitutivas para sólidos elásticos lineales y sólidos visco elasto plásticos.

En los métodos segregados cada subdominio se resuelve de forma individual, generalmente empleando estrategias tipo *Gauss-Seidel* y transfiriendo la información relevante entre un subproblema y otro. Esta transferencia de información requiere un tratamiento especial. Cada subproblema puede emplear su propia malla y método de resolución, que dificulta la transferencia de información asociada con las condiciones de contorno.

El método de las características es una técnica habitual empleada en la resolución numérica de problemas de convección-difusión donde el término convectivo es predominante frente al término difusivo[6]. La aplicación directa de estos métodos consiste en emplear una descripción Lagrangiana del problema resolviendo, en cada instante de tiempo, un problema definido en la configuración de referencia [7]. Para tiempos de simulación largos y grandes deformaciones se hace necesario actualizar la configuración de referencia cada cierto tiempo, implicando un remallado y cálculo de los campos de interés en los nuevos nodos de la malla. En estos métodos, el dominio computacional es un dominio conocido perteneciente a un instante del pasado ([8]). Esta característica permite el tratamiento de problemas de frontera móvil, incluyendo este método dentro de la categoría de *métodos de seguimiento de la interfaz*. En los casos en los que las fronteras del dominio computacional permanecen fijas, se han desarrollado variantes del método de las características, formulados en configuraciones Eulerianas, que reducen el coste computacional asociado con sucesivos remallados y recálculo de variables. El ejemplo mas destacado de estos métodos es el conocido como *método modificado de las características* [7], introducido en [9, 10]. La discretización temporal, en este caso, consiste en aproximar la derivada material evaluando el campo incógnita en el instante y posición actual (coincidiendo con uno de los nodos de la malla) y en un instante previo en la posición que ocuparía la partícula en ese instante. Habitualmente esa posición del instante previo no coincide con ningún nodo de la malla de tal manera que será necesario emplear alguna estrategia de interpolación. Cuando se emplea el método de los elementos finitos para la discretización espacial esta interpolación ya viene dada y el método se conoce como Lagrange-Galerkin.

En este trabajo se desarrollarán dos aplicaciones específicas. Por un lado se aplicarán las técnicas no Eulerianas a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles. La aportación fundamental en esta iniciativa será el empleo de integradores temporales de alto orden e incondicionalmente estables, así como el tratamiento automático de la reinicialización del problema y del

remallado del dominio computacional cuando sea necesario. La segunda aplicación será a un problema de corformado de piezas metálicas mediante la técnica del recalcado, un problema multifísico en el que se definirá el problema completo en una configuración no Euleriana y se resolverá empleando integradores temporales de alto orden y estables cuyo diseño permite obtener una estimación del error cometido y definir en cada iteración temporal el tamaño de paso de tiempo óptimo.

En la actualidad existen varias bibliotecas informáticas para el tratamiento y resolución de los diferentes aspectos involucrados en las técnicas propuestas. En el ámbito de la discretización espacial mediante el método de los elementos finitos se pueden citar algunos ejemplos de estas herramientas: [11], [12], [13], [14], [15]. En general estas herramientas permiten la discretización espacial automática mediante el método de los elementos finitos a partir de una formulación variacional, en algunos casos permiten el cálculo automático de las matrices jacobianas del problema empleadas en la resolución de problemas no lineales. En cuanto a la discretización temporal existen múltiples bibliotecas para la integración temporal de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y algebraico-diferenciales (ver, por ejemplo, [16] y [17]). Para la resolución de los sistemas lineales y no lineales obtenidos tras la discretización total del problema variacional podemos citar como ejemplos [18], [19] [20], y en el ámbito de generadores de mallas se puede consultar [21], [22] y [23]

Dada la disponibilidad de estas herramientas, y su carácter específico, en este trabajo se plantea la reutilización de algunas de estas bibliotecas como base para la implementación de los métodos propuestos. De esta manera, los avances en cada una de ellas podrá ser aprovechado en el código desarrollado.

1.1. Objetivos

Los principales objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Desarrollo y aplicación de métodos no Eulerianos en medios continuos para ecuaciones de transporte escalares y vectoriales. Se trata de obtener una formulación unificada para el tratamiento de ecuaciones de transporte vectoriales y escalares en una configuración no Euleriana, extendiendo la metodología aplicada en [24] y [8] a casos más generales.
- Desarrollo y aplicación de estrategias de remallado y reinicialización para métodos no Eulerianos.
- Aplicación de integradores temporales de alto orden con la opción de emplear paso de tiempo variable en formulaciones no Eulerianas.
- Implementación de los métodos descritos mediante el empleo de bibliotecas de software de carácter general disponibles.

1.2. Estructura

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

La tesis se estructura en dos grandes bloques.

En la primera parte se describen las estrategias para transformar problemas generales, de transporte escalar y vectorial dentro del marco de la teoría de medios continuos, definidos en una configuración Euleriana a otra no Euleriana arbitraria. Se comienza por un resumen de los principales conceptos de la mecánica de medios continuos (Capítulo 2). Posteriormente se abordan dos problemas generales de tipo *Cauchy*, uno escalar (Capítulo 3) y otro vectorial (Capítulo 4), representantes de unas familias de

problemas de transporte escalar y vectorial, describiendo las estrategias necesarias para su transformación desde una configuración Euleriana a otra no Euleriana general. Para cada uno de los problemas se indicará un caso particular de configuración no Euleriana, la Lagrangiana, por ser una configuración singular de aplicación general. Por último en el Capítulo 5 se abordará el problema del remallado y la reinicialización de las variables del problema en las situaciones en las que la malla del dominio computacional sufre deformaciones que producen elementos degenerados.

En la segunda parte de la tesis se aplicarán las técnicas desarrolladas en la primera parte a dos problemas particulares de la mecánica de medios continuos. El primer problema abordado es el de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido Newtoniano incompresible (Capítulo 6). En este capítulo se plantean los problemas que resultan de la transformación del problema original definido en una configuración Euleriana, a configuraciones no Eulerianas. Este problema es un caso particular de problema de Cauchy vectorial tratado en el Capítulo 4. Tras su transformación a una configuración no Euleriana, se proponen diferentes estrategias de discretización temporal empleando las fórmulas de Newmark. Según la elección de los valores de los parámetros que las definen se pueden obtener métodos de diferente orden. Los diferentes métodos considerados y los programas informáticos desarrollados son evaluados y validados utilizando ejemplos test numéricos habituales en dos dimensiones. Los códigos computacionales se desarrollan a partir de bibliotecas de propósito general. El contenido de este capítulo reproduce los resultados publicados en [25] y [26].

En el Capítulo 7 se plantea un problema derivado de la industria de conformado de piezas metálicas mediante la técnica de *electrorrecalcado*. Este problema involucra la resolución de diferentes fenómenos físicos. Requiere de tres modelos: mecánico para un sólido visco-elasto-plástico, electromagnético y térmico. Los tres problemas presentan un acople fuerte entre ellos: la mayor parte de los parámetros que definen el comportamiento del material son dependientes de la temperatura, el término fuente de la ecuación de transferencia de calor proviene del efecto Joule originado por las corrientes eléctricas que recorren la pieza y los modelos implicados dependen de la geometría de la pieza, que varía en el tiempo por la deformación que sufre la pieza. El problema completo se aborda en este capítulo incluyendo algunas simplificaciones. En concreto, el problema electromagnético se transforma en un problema eléctrico considerando que la corriente que se emplea es corriente continua. De este modo este problema pasa a ser un caso particular del problema de Cauchy escalar considerado en el Capítulo 3. El problema de transporte de calor también es un caso particular de este problema general de Cauchy escalar. En el caso del problema mecánico, éste es un caso particular del problema general de Cauchy vectorial considerado en el Capítulo 4 con una ley constitutiva para un sólido visco-elasto-plástico. Se obtiene una descripción del problema completo en una configuración Lagrangiana y se plantea su resolución de forma acoplada. Para la discretización temporal, en este caso, se opta por emplear integradores de tipo Runge-Kutta implícitos con mecanismos para el uso de pasos de tiempo variables. Esta característica es determinante para la resolución del problema, puesto que durante la simulación completa del proceso existen periodos en los que las variables propias del problema presentan cambios muy abruptos y se requieren tamaños de pasos temporales muy pequeños. Sin embargo, en otros periodos, los cambios son suaves y se pueden usar tamaños de pasos de tiempo más grandes, reduciendo de este modo el tiempo de cálculo necesario para la simulación.

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Parte I

Métodos no Eulerianos para problemas de frontera libre

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Introducción

En esta parte se describen las estrategias para la transformación de problemas generales, definidos en una configuración Euleriana, a una configuración de referencia general no Euleriana. Los problemas generales abordados serán dos problemas de transporte, uno escalar y otro vectorial, definidos dentro del marco de la teoría de medios continuos. Para obtener estas transformaciones se introducen en el Capítulo 2 los conceptos de la mecánica de medios continuos que posteriormente se emplearán en el tratamiento de los problemas generales. En los Capítulos 3 y 4 se abordarán los problemas de *Cauchy* escalar y vectorial, respectivamente. Finalmente, en el Capítulo 5, se describirá el problema de remallado y reinicialización que surge del empleo de métodos definidos en configuraciones no Eulerianas. Se propondrán estrategias para abordarlos. Estas estrategias permiten afrontar los problemas de frontera móvil de una manera natural.

Los elementos desarrollados en esta parte serán empleados en los problemas planteados en la segunda parte de la tesis.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 2

Fundamentos de la mecánica de los medios continuos

El objetivo de este capítulo es recordar los elementos fundamentales de la mecánica de los medios continuos. Para ello se han seguido casi siempre las notaciones del libro de Gurtin [27].

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) con frontera Lipschitziana Γ dividida en dos partes: $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^R$, con $\Gamma^D \cap \Gamma^R = \emptyset$. Sea $\mathsf{X} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ un *movimiento* en el sentido de Gurtin [27], es decir $\mathsf{X} \in \mathbf{C}^3(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathsf{X}(\cdot, t)$ es una función inyectiva tal que

$$\det \mathbf{F}(\mathsf{p}, t) > 0, \quad \forall (\mathsf{p}, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{F}(\cdot, t)$ es el *gradiente* del movimiento $\mathsf{X}(\cdot, t)$. Nótese que por la compacidad de $\bar{\Omega}$ y la continuidad de $\mathsf{X}(\cdot, t)$ se deduce que $\mathsf{X}(\bar{\Omega}, t)$ es una región cerrada para todo t. En general, esta condición no se verifica y debe ser añadida a las anteriores.

Para cualquier $\mathcal{A} \subset \bar{\Omega}$, se define $\mathcal{A}_t := \mathsf{X}(\mathcal{A}, t)$. En la práctica se considera un intervalo temporal acotado, $t \in [t_0, t_f]$, siendo t_0, t_f dos números no negativos. Se asume que $\mathsf{X}(\mathsf{p}, t_0) = \mathsf{p} \quad \forall \mathsf{p} \in \bar{\Omega}$, es más, en muchos casos se asumirá que el cuerpo se encuentra en reposo hasta el tiempo inicial ($\mathsf{X}(\mathsf{p}, t) = \mathsf{p} \quad \forall t \leq t_0 \quad \forall \mathsf{p} \in \bar{\Omega}$) y en esta situación la velocidad y la aceleración son nulas para $t < t_0$.

La *trayectoria* del movimiento se define como

$$\mathcal{T} := \{(\mathsf{x}, t) : \mathsf{x} \in \bar{\Omega}_t, t \in [t_0, t_f]\}. \tag{2.2}$$

Para cada t, se denota por $\mathsf{P}(\cdot, t) : \bar{\Omega}_t \to \bar{\Omega}$ a la inversa de la aplicación $\mathsf{X}(\cdot, t)$, es decir,

$$\mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x}, t), t) = \mathsf{x}, \quad \mathsf{P}(\mathsf{X}(\mathsf{p}, t), t) = \mathsf{p}, \quad \forall (\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}, \quad \forall (\mathsf{p}, t) \in \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]. \tag{2.3}$$

Esta aplicación $\mathsf{P} : \mathcal{T} \to \bar{\Omega}$, se denomina *aplicación de referencia* del movimiento X. Para un $(\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}$ dado, $\mathsf{P}(\mathsf{x}, t)$ es la posición inicial del punto que ocupa la posición x en el instante t. Dado un instante $t_0 \leq \tau \leq t_f$, se denota por $\mathsf{X}_\tau : \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^d$ al movimiento relativo a la configuración en el instante τ:

$$\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t) := \mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{y}, \tau), t), \quad \forall (\mathsf{y}, t) \in \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]. \tag{2.4}$$

Por tanto, $\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t)$ es la posición en el instante t del punto que ocupa la posición y en el instate τ. Nótese que se denotan por p los puntos en $\bar{\Omega}$, por y los puntos en $\bar{\Omega}_\tau$ y por x los puntos en $\bar{\Omega}_t$.

Se pueden definir los campos asociados con la configuración $\bar{\Omega}_\tau$, por ejemplo

$$\mathbf{F}_\tau := \operatorname{grad} \mathsf{X}_\tau, \qquad \text{en} \quad \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]. \tag{2.5}$$

A las funciones con dominio $\mathcal{T}$ se les llama *campos espaciales* o *Eulerianos* mientras que las funciones definidas en $\bar{\Omega} \times [t_0, t_f]$ se les llama *campos materiales* o *Lagrangianos*. Un campo espacial Ψ tambien se puede definir en $\bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]$:

$$\Psi_\tau(\mathsf{y}, t) := \Psi(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t), t), \quad \forall (\mathsf{y}, t) \in \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]. \tag{2.6}$$

Para $\tau = t_0$, Ψ_{t_0} es la *descripción material* o *Lagrangiana* de Ψ que se denota también como Ψ_m, es decir,

$$\Psi_m(\mathsf{p}, t) := \Psi(\mathsf{X}(\mathsf{p}, t), t), \quad \forall (\mathsf{p}, t) \in \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]. \tag{2.7}$$

Estas funciones se representan en la Figura 2.1.

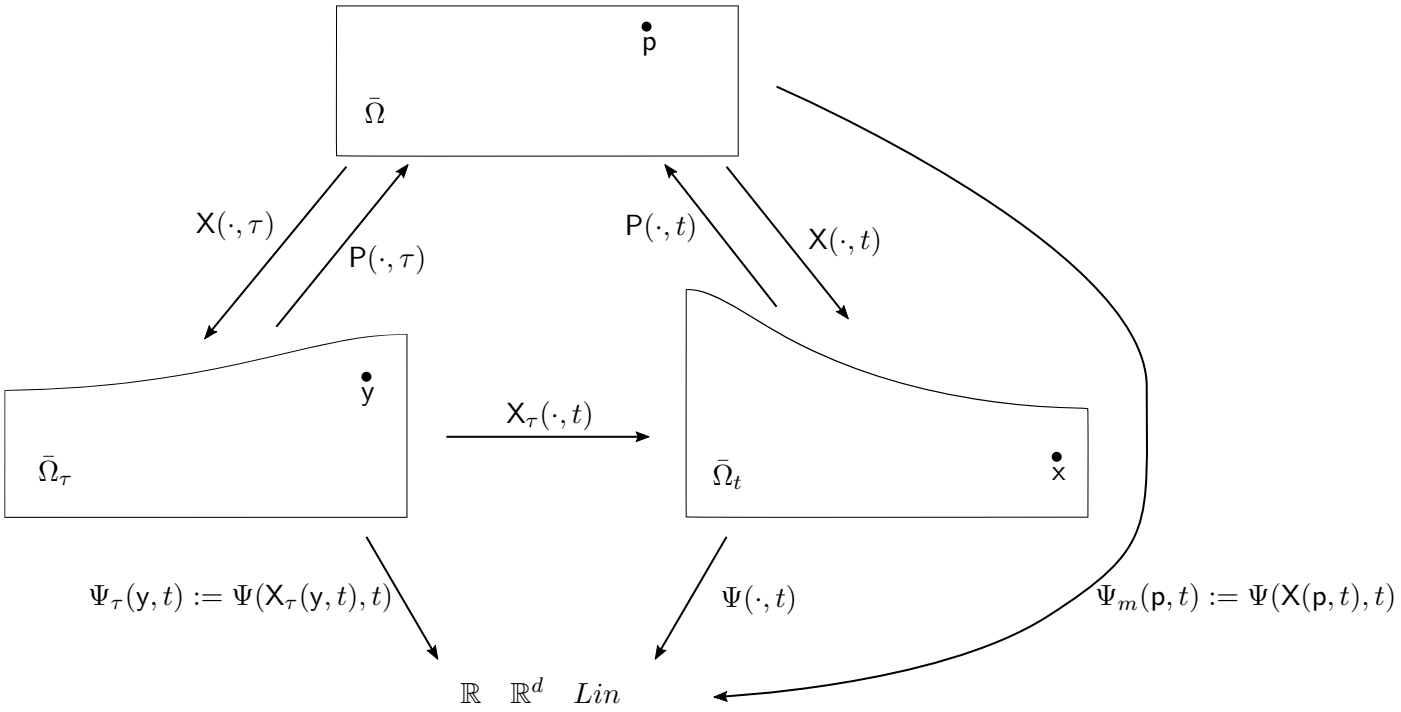


Figura 2.1: Transformaciones asociadas a las distintas configuraciones.

A continuación se introducen algunas definiciones y notaciones sobre campos espaciales y materiales que se emplearán a lo largo del documento.

- Sea Φ un campo material escalar, vectorial o tensorial regular. Se denota por $\dot{\Phi}$ a la derivada parcial con respecto al segundo argumento (t). Si Φ es un campo material escalar o vectorial regular, $\nabla\Phi$ denota el gradiente con respecto al primer argumento (p). El símbolo Div denota el operador divergencia para campos materiales regulares que toman valores en $\mathbb{R}^d$, es decir, $\operatorname{Div} \Phi = \operatorname{tr}(\nabla\Phi)$.

- Sea Ψ un campo espacial escalar, vectorial o tensorial regular. Por Ψ' se indica la derivada parcial con respecto al segundo argumento (t), es decir, $\Psi'(\mathsf{x}, t) := \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathsf{x}, t)$. Si Ψ es un campo espacial escalar o vectorial regular, se denota por $\operatorname{grad} \Psi$ el gradiente con respecto al primer argumento (x). El símbolo div denota el operador divergencia para campos espaciales regulares que toman valores en $\mathbb{R}^d$, es decir, $\operatorname{div} \Psi = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \Psi)$.

- Para campos escalares regulares definidos en $\bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]$ se considera la notación empleada para campos espaciales, concretamente,

$$\operatorname{grad} \Psi_\tau = \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial \mathsf{y}}, \quad \operatorname{div} \Psi_\tau = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \Psi_\tau), \quad \Psi'_\tau := \frac{\partial \Psi_\tau}{\partial t}. \tag{2.8}$$

- En algunas situaciones donde están involucrados distintos operadores previamente introducidos, se puede especificar la variable de diferenciación con objeto de clarificar las expresiones empleadas, por ejemplo, $\nabla_{\mathsf{p}}\Phi$, $\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\Psi$, $\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau$, $\operatorname{Div}_{\mathsf{p}}\Phi$, $\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\Psi$, $\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau$. De las notaciones anteriores, empleando la regla de la cadena se pueden obtener las siguientes igualdades:

$$\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau = (\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\Psi)_\tau \mathbf{F}_\tau \Rightarrow (\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\Psi)_\tau = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1}) = \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Psi_\tau, \tag{2.9}$$

para cualquier campo vectorial espacial regular Ψ que toma valores en $\mathbb{R}^d$.

- Si Ψ es un campo espacial escalar, vectorial o tensorial regular, $\dot{\Psi}$ denota la *derivada material* de Ψ con respecto al tiempo, es decir:

$$\dot{\Psi}(\mathsf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi(\mathsf{X}(\mathsf{p}, t), t))_{|\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}, \quad \forall (\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}. \tag{2.10}$$

  En particular, si Ψ es un campo escalar espacial regular se puede usar la regla de la cadena para obtener

$$\dot{\Psi} = \Psi' + \operatorname{grad} \Psi \cdot \mathbf{v}, \quad \text{en } \mathcal{T}. \tag{2.11}$$

  Análogamente, si $\mathbf{\Psi}$ es un campo vectorial espacial regular se verifica

$$\dot{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi}' + (\operatorname{grad} \mathbf{\Psi})\mathbf{v}, \quad \text{en } \mathcal{T}. \tag{2.12}$$

Se definen $\mathbf{u}$ el desplazamiento material, $\mathbf{v}$ la velocidad espacial y $\mathbf{a}$ la aceleración espacial, de la manera siguiente,

$$\mathbf{u}(\mathsf{p}, t) = \mathsf{X}(\mathsf{p}, t) - \mathsf{p}, \quad \mathbf{v}(\mathsf{x}, t) = \dot{\mathsf{X}}(\mathsf{p}, t)_{|\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}, \quad \mathbf{a}(\mathsf{x}, t) = \ddot{\mathsf{X}}(\mathsf{p}, t)_{|\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}, \tag{2.13}$$

para $(\mathsf{p}, t) \in \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]$ y $(\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}$. Con las notaciones anteriores se obtienen las siguientes igualdades

$$\mathbf{v}_\tau = \mathsf{X}'_\tau, \quad \mathbf{a}_\tau = \mathbf{v}'_\tau = \mathsf{X}''_\tau, \quad \text{en} \quad \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], \tag{2.14}$$

$$\mathbf{v}_m = \dot{\mathsf{X}} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a}_m = \dot{\mathbf{v}}_m = \ddot{\mathsf{X}} = \ddot{\mathbf{u}}, \quad \text{en} \quad \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]. \tag{2.15}$$

Además, $\mathbf{u}_\tau$ denota el campo de desplazamientos relativo a la configuración en el instante τ:

$$\mathbf{u}_\tau(\mathsf{y}, t) := \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t) - \mathsf{y}, \quad \forall (\mathsf{y}, t) \in \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f]. \tag{2.16}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Nótese que se verifican las siguientes igualdades

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{u}'_\tau, \quad \mathbf{a}_\tau = \mathbf{v}'_\tau = \mathbf{u}''_\tau. \tag{2.17}$$

Se indicarán ahora algunas igualdades y lemas que se emplearán en capítulos posteriores para obtener formulaciones de los problemas considerados en distintas configuraciones.

- Se tiene la siguiente relación entre el vector unitario normal a la frontera del dominio deforado en el instante t, Γ_t, y dirigido hacia el exterior de este, que será denotado por $\mathbf{n}(\cdot,t)$, y el vector unitario normal a la frontera del dominio deformado en el instante τ, Γ_τ, y dirigido hacia el exterior de este, que será denotado por $\mathbf{m}_\tau$:

$$\mathbf{n}(\mathsf{x},t)=\left.\frac{\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})}{|\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})|}\right|_{\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)}, \tag{2.18}$$

para $\mathsf{x}\in\Gamma_t$ y $t\in[t_0,t_f]$. Nótese que por (2.4) se tiene que $\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)=\mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x},t),\tau)$. En particular, tomando $\tau=t_0$ en (2.18), se tiene:

$$\mathbf{n}(\mathsf{x},t)=\left.\frac{\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p})}{|\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p})|}\right|_{\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}, \tag{2.19}$$

para $\mathsf{x}\in\Gamma_t$ y $t\in[t_0,t_f]$.

- Se introducen los siguientes lemas:

Lema 2.0.1. *Dado un campo escalar espacial suficientemente regular ψ, se verifica,*

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]d\mathsf{x}\\&=\int_{\Omega_\tau}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{y},t)\right]d\mathsf{y},\end{aligned} \tag{2.20}$$

siendo $\mathbf{A}$ un campo tensorial espacial con suficiente regularidad. En particular, si $\tau=t_0$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]d\mathsf{x}\\&=\int_{\Omega}\operatorname{Div}\left[\det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-1}(\mathsf{p},t)\mathbf{A}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\nabla_{\mathsf{p}}\psi_m(\mathsf{p},t)\right]d\mathsf{p}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Demostración. En primer lugar, aplicando el teorema de la divergencia, se tiene

$$\int_{\Omega_t}\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]d\mathsf{x}=\int_{\Gamma_t}\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t)dA_{\mathsf{x}}.$$

Aplicando ahora el cambio de variable $\mathsf{x}=\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t)$ y usando la regla de la cadena y el teorema de la divergencia se deduce el resultado. En efecto,

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_t}\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t)dA_{\mathsf{x}}\\&=\int_{\Gamma_\tau}\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t)\cdot\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})dA_{\mathsf{y}}\\&=\int_{\Gamma_\tau}\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{y},t)\cdot\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})dA_{\mathsf{y}}\\&=\int_{\Omega_\tau}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{y},t)\right]d\mathsf{y}.\end{aligned}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

□

Lema 2.0.2. *Dado un campo escalar espacial suficientemente regular ψ, se verifica,*

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]\\&=\ \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{y},t)\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\bigg|_{\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)=\mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x},t),\tau)},\end{aligned}\tag{2.22}$$

para $\mathsf{x}\in\Omega_t$ y $t\in[t_0,t_f]$, siendo $\mathbf{A}$ un campo tensorial espacial con suficiente regularidad. En particular, si $\tau=t_0$,

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]\\&=\ \operatorname{Div}\left[\det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-1}(\mathsf{p},t)\mathbf{A}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\nabla\psi_m(\mathsf{p},t)\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)}\bigg|_{\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Demostración. Procediendo de forma análoga a la demostración del resultado anterior, se deduce

$$\begin{aligned}&\int_{B(\mathsf{x}_0,\lambda)}\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]d\mathsf{x}\\&=\int_{\mathsf{X}_t(B(\mathsf{x}_0,\lambda),\tau)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\mathbf{A}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{y},t)\right]d\mathsf{y},\end{aligned}$$

para $\mathsf{x}_0\in\Omega_t$, $t\in[t_0,t_f]$ y $\lambda>0$. Recordemos que por definición $\mathsf{X}_t(B(\mathsf{x}_0,\lambda),\tau)=\mathsf{X}(\mathsf{P}(B(\mathsf{x}_0,\lambda),t),\tau)$. Aplicando el cambio de variable $\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)=\mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x},t),\tau)$, resulta

$$\begin{aligned}&\int_{B(\mathsf{x}_0,\lambda)}\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}_{\mathsf{x}}\psi(\mathsf{x},t)\right]d\mathsf{x}\\&=\int_{B(\mathsf{x}_0,\lambda)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau),t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau),t)\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau),t)\right.\\&\qquad\left.\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi_\tau(\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau),t)\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau),t)}d\mathsf{x},\end{aligned}$$

para $\mathsf{x}_0\in\Omega_t$, $t\in[t_0,t_f]$ y $\lambda>0$. Por último, utilizando el teorema de localización (ver [27] página 5) se obtiene el resultado. □

Lema 2.0.3. *Dado un campo tensorial espacial suficientemente regular $\mathbf{H}$, se verifica,*

$$\int_{\Omega_t}\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathsf{x},t)d\mathsf{x}=\int_{\Omega_\tau}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{H}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right]d\mathsf{y},\tag{2.24}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathsf{x},t)=\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{H}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\bigg|_{\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)=\mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x},t),\tau)},\tag{2.25}$$

para $\mathsf{x}\in\Omega_t$ y $t\in[t_0,t_f]$.

Demostración. El procedimiento para obtener estas igualdades es análogo al empleado para deducir (2.20) y (2.22). □

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 3

Problema de Cauchy escalar

Las ecuaciones de convección-difusión permiten modelar una variedad importante de problemas en el ámbito de la ingeniería y de las ciencias aplicadas. Reacciones químicas, transporte de especies, transporte de calor son algunos de los ejemplos de fenómenos que pueden ser modelados parcial o totalmente por este tipo de ecuaciones. En muchos de estos problemas el término difusivo es mucho menor que el término convectivo, provocando que un tratamiento numérico directo de las ecuaciones conlleve una inestabilidad catastrófica de la resolución. Se han planteado distintas alternativas para el tratamiento de estas dificultades, probablemente la más extendida sea introducir un esquema numérico que tenga en cuenta la dirección de propagación de la información a través de la velocidad de arrastre (es lo que se denomina *upwinding* en la bibliografía en inglés). Este tipo de tratamiento de las ecuaciones puede llevarse a cabo mediante el método de las características que está basado en la discretización temporal del término que incluye la derivada material. Estas estrategias fueron introducidas a comienzos de la década de 1980 combinadas con diferencias finitas o elementos finitos para la discretización espacial (ver [9], [10]). Cuando se emplea como método de discretización espacial el método de los elementos finitos también se suelen denominar métodos de Lagrange-Galerkin.

Para la aplicación del método de las características en una formulación Euleriana es necesaria una reconstrucción del desplazamiento para la determinación del valor del campo de interés en un instante previo recorriendo hacia atrás las curvas características. Si esta reconstrucción se realiza mediante la interpolación del campo de interés en el instante previo, el método se conoce como Semi-Lagrangiano. En cambio, si para determinar el valor del campo se emplea una formulación débil del problema, de tipo Galerkin, el método se conoce como Lagrange-Galerkin (véase, por ejemplo, [10, 28]). Por ejemplo, para el caso de la ecuación de convección $\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathsf{x},t) + \mathbf{v}(\mathsf{x},t)\cdot \operatorname{grad}\phi(\mathsf{x},t) = 0$, se tiene

$$\int_{\Omega_{t_{n+1}}} \phi^{n+1}(\mathsf{x})\psi(\mathsf{x})d\mathsf{x} = \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \phi^{n}(\mathsf{x}-\mathbf{v}^n(\mathsf{x})\delta t)\psi(\mathsf{x})d\mathsf{x}, \quad \forall\psi\in L^2(\Omega_{t_{n+1}}), \tag{3.1}$$

siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de arrastre (véase, por ejemplo, [29]). Si la velocidad de arrastre es constante, puede demostrarse la equivalencia de estos dos métodos, [29].

Clásicamente, los métodos de características se plantean en coordenadas espaciales o Eulerianas y se aplica el enfoque semi-Lagrangiano. En el ámbito de la meteorología, concretamente en la predicción numérica del tiempo (NWP por sus siglas en inglés, *Numerical Weather Prediction*), el concepto Semi-Lagrangiano mantiene la técnica de interpolación como método básico pero añade un matiz diferenciando un método puramente Lagrangiano de uno Semi-Lagrangiano. En el método puramente Lagrangiano la configuración de referencia es la misma en todos los pasos de tiempo y, por tanto, las partículas de referencia también. Esto puede provocar grandes distorsiones de la malla deformada, a medida que avanza

la simulación, reduciendo la precisión del método. En cambio, el método Semi-Lagrangiano actualiza la configuración de referencia cada cierto número fijo de pasos de tiempo. Cada vez que se actualiza se genera una nueva malla que identifica nuevas partículas; se consigue así disponer de una malla deformada con una mejor distribución de los nudos (ver por ejemplo [30]).

Los métodos llamados *puramente* Lagrangianos consisten en la discretización del problema tras escribirlo en coordenadas materiales o Lagrangianas.

Este capítulo es un resumen de las referencias [31], [24] con una adaptación de la notación y para un caso más general, en el que se planteará un problema de Cauchy de convección-difusión en un dominio acotado dependiente del tiempo. En primer lugar se presentarán las ecuaciones del problema en formulación fuerte y en coordenadas Eulerianas para después transformarlas a coordenadas no Eulerianas, donde la configuración Lagrangiana es un caso particular. Los problemas débiles o variacionales asociados serán indicados en cada una de las secciones. Por último, se mostrarán las técnicas de resolución numérica empleadas.

El objetivo de este capítulo es desarrollar las técnicas para transformar este tipo de problemas desde una configuración Euleriana a otra no Euleriana (general) para su posterior resolución numérica. Este tratamiento permitirá, en capítulos posteriores, abordar casos más complejos cuyo objetivo final es la resolución de problemas de la mecánica de fluidos y de otro tipo de problemas en los que se combinarán este tipo de ecuaciones.

3.1. Formulaciones Eulerianas y no Eulerianas del problema

En esta sección se desarrollarán las herramientas para el tratamiento de un problema de convección-difusión lineal, originalmente planteado en configuración Euleriana, con el fin de transformarlo en otros equivalentes en configuraciones no Eulerianas. El objetivo es introducir una formulación unificada del problema en la que sea posible obtener, a la vez, los métodos puramente Lagrangianos y los no Eulerianos en general.

3.1.1. Formulación Euleriana

Se considera el siguiente problema de valores inicial y de contorno:

Problema 3.1.1. *Problema fuerte escalar en configuración Euleriana.*

Encontrar una función $\phi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$c(\mathsf{x},t)\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathsf{x},t) + c(\mathsf{x},t)\mathbf{v}(\mathsf{x},t)\cdot \operatorname{grad}\phi(\mathsf{x},t) - \operatorname{div}\left[\mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}\phi(\mathsf{x},t)\right] = f(\mathsf{x},t), \tag{3.2a}$$

para $\mathsf{x} \in \Omega_t$ *y* $t \in [t_0, t_f]$*, sujeta a las condiciones de contorno*

$$\phi(\mathsf{x},t) = \phi_D(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^D, \tag{3.2b}$$

$$\alpha(\mathsf{x},t)\phi(\mathsf{x},t) + \mathbf{A}(\mathsf{x},t)\operatorname{grad}\phi(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = g(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^R, \tag{3.2c}$$

para $t \in [t_0, t_f]$*, y a la condición inicial,*

$$\phi(\mathsf{x},t_0) = \phi^0(\mathsf{x}), \quad \forall \mathsf{x} \in \bar{\Omega}. \tag{3.2d}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En las ecuaciones indicadas, $\mathbf{A} : \mathcal{T} \to \text{Sym}$ denota el campo tensorial de difusión, donde Sym es el espacio de los tensores[1] simétricos, $c : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\phi^0 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\phi_D(\cdot, t) : \Gamma_t^D \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ y $g(\cdot, t) : \Gamma_t^R \to \mathbb{R}$, son funciones escalares dadas, y $\mathbf{n}(\cdot, t)$ es el vector normal unitario a Γ_t y dirigido hacia el exterior del dominio.

3.1.2. Formulación general no Euleriana

A continuación se desarrollarán las expresiones necesarias para escribir el Problema 3.1.1 en una configuración no Euleriana, $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$, con $\tau \in [t_0, t_f]$.

A partir de la definición de derivada material (2.10), usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta las relaciones entre la velocidad y el movimiento dadas en (2.13) y (2.14), se obtienen las siguientes igualdades:

$$\dot{\phi}(\mathsf{x}, t) = \phi'(\mathsf{x}, t) + \operatorname{grad}_{\mathsf{x}} \phi(\mathsf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathsf{x}, t) = \phi'_\tau(\mathsf{y}, t)_{|\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)}, \quad \forall (\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}. \tag{3.3}$$

Para obtener una formulación fuerte del Problema 3.1.1 en coordenadas $(\mathsf{y}, t) \in \Omega_\tau \times [t_0, t_f]$ se realiza el cambio de variable $\mathsf{x} = \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t)$ y se aplican (2.18), (2.22) y (3.3). En concreto, se evalúa la ecuación (3.2a) en el punto $\mathsf{x} = \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t)$ y se utiliza la ecuación (3.3) para obtener:

$$c(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t), t)\phi'_\tau(\mathsf{y}, t) - \operatorname{div}_{\mathsf{x}} [\mathbf{A}(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t), t) \operatorname{grad}_{\mathsf{x}} \phi(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t), t)] = f(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t), t), \tag{3.4}$$

para $(\mathsf{y}, t) \in \Omega_\tau \times [t_0, t_f]$. En esta ecuación existen derivadas con respecto a la variable Euleriana x. Aplicando (2.22) al término de difusión de la ecuación (3.4), se obtiene

$$c_\tau(\mathsf{y}, t)\phi'_\tau(\mathsf{y}, t) - \operatorname{div}_{\mathsf{y}} \left[\det \mathbf{F}_\tau(\mathsf{y}, t) \mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y}, t) \mathbf{A}_\tau(\mathsf{y}, t) \mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y}, t) \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \phi_\tau(\mathsf{y}, t) \right] \frac{1}{\det \mathbf{F}_\tau(\mathsf{y}, t)} = f_\tau(\mathsf{y}, t). \tag{3.5}$$

para $(\mathsf{y}, t) \in \Omega_\tau \times [t_0, t_f]$.

Finalmente, se realiza el cambio de variable $\mathsf{x} = \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t)$ en (3.2b)-(3.2d) para conseguir las condiciones de contorno e iniciales para ϕ_τ :

$$\begin{aligned} \phi_\tau = (\phi_D)_\tau \quad &\text{en} \quad \Gamma_\tau^D \times [t_0, t_f], \\ |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \alpha_\tau \phi_\tau + \mathbf{A}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \phi_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| g_\tau \quad &\text{en} \quad \Gamma_\tau^R \times [t_0, t_f], \\ \phi_\tau(\cdot, t_0) = \phi^0(\mathsf{P}(\cdot, \tau)) \quad &\text{en} \quad \bar{\Omega}_\tau, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{m}_\tau$ es el vector normal unitario a Γ_τ y dirigido hacia el exterior del dominio. La segunda condición se obtiene usando (2.18) y aplicando la regla de la cadena.

Entonces, a partir de estos resultados se deduce la siguiente formulación no Euleriana del Problema 3.1.1:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Problema 3.1.2. *Problema fuerte escalar en configuración no Euleriana, $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$.*

Encontrar una función $\phi_\tau : \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ tal que

$$c_\tau \phi'_\tau - \operatorname{div}_{\mathsf{y}} \left[\det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} \mathbf{A}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \phi_\tau \right] \frac{1}{\det \mathbf{F}_\tau} = f_\tau, \tag{3.6a}$$

[1] En este trabajo fundamentalmente nos referiremos a los tensores de orden dos que serán identificados a endomorfismos de $\mathbb{R}^d$. El espacio de tensores se denotará por *Lin*.

en $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$, *sujeta a las condiciones de contorno*

$$\phi_\tau = (\phi_D)_\tau \quad en \quad \Gamma_\tau^D \times [t_0, t_f], \tag{3.6b}$$

$$|\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\alpha_\tau\phi_\tau + \mathbf{A}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\phi_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|g_\tau \quad en \quad \Gamma_\tau^R \times [t_0, t_f], \tag{3.6c}$$

y a la condición inicial

$$\phi_\tau(\cdot, t_0) = \phi^0(\mathsf{P}(\cdot, \tau)) \quad en \quad \bar{\Omega}_\tau. \tag{3.6d}$$

Para obtener una la formulación débil de este problema basta con multiplicar (3.6a) por $\det \mathbf{F}_\tau$ y por una función test $\psi \in H^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau)$, integrar en Ω_τ y aplicar la fórmula de Green adecuada junto con la condición de contorno (3.6c). De esta forma se deduce,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} c_\tau\phi'_\tau \det \mathbf{F}_\tau\psi d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-1}\mathbf{A}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\phi_\tau \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\psi d\mathsf{y} \\
&+ \int_{\Gamma_\tau^R} |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\alpha_\tau\phi_\tau \det \mathbf{F}_\tau\psi dA_{\mathsf{y}} \\
&= \int_{\Omega_\tau} f_\tau \det \mathbf{F}_\tau\psi d\mathsf{y} + \int_{\Gamma_\tau^R} |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|g_\tau \det \mathbf{F}_\tau\psi dA_{\mathsf{y}},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

para todo $\psi \in H^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau)$.

3.1.3. Formulación Lagrangiana

A partir del Problema 3.1.2, particularizándolo para el instante $\tau = t_0$, se obtiene la formulación fuerte del Problema 3.1.1 en la configuración de referencia $\Omega = \Omega_{t_0}$, en concreto,

Problema 3.1.3. *Problema fuerte escalar en configuración Lagrangiana.*

Encontrar una función $\phi_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$c_m\dot{\phi}_m - \operatorname{Div}\left[\det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_m\mathbf{F}^{-T}\nabla\phi_m\right]\frac{1}{\det \mathbf{F}} = f_m, \quad en \quad \Omega \times [t_0, t_f], \tag{3.8a}$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$\phi_m = (\phi_D)_m, \quad en \quad \Gamma^D \times [t_0, t_f], \tag{3.8b}$$

$$|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\alpha_m\phi_m + \mathbf{A}_m\mathbf{F}^{-T}\nabla\phi_m \cdot \mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0} = |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|g_m, \quad en \quad \Gamma^R \times [t_0, t_f], \tag{3.8c}$$

y a la condición inicial

$$\phi_m(\cdot, t_0) = \phi^0(\cdot) \quad en \quad \bar{\Omega}. \tag{3.8d}$$

Tomando $\tau = t_0$ en (3.7), se obtiene la siguiente formulación débil del Problema 3.1.3,

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega c_m\dot{\phi}_m \det \mathbf{F}\psi d\mathsf{p} + \int_\Omega \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}_m\mathbf{F}^{-T}\nabla\phi_m \cdot \nabla\psi d\mathsf{p} \\
&+ \int_{\Gamma^R} |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\alpha_m\phi_m \det \mathbf{F}\psi dA_{\mathsf{p}} \\
&= \int_\Omega f_m \det \mathbf{F}\psi d\mathsf{p} + \int_{\Gamma^R} |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|g_m \det \mathbf{F}\psi dA_{\mathsf{p}},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

para todo $\psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

3.2. Resolución numérica

En esta sección se indicarán algunas estrategias empleadas en la bibliografia para la resolución numérica de problemas derivados del Problema 3.1.2.

3.2.1. Discretización temporal: métodos de características

A partir de la formulación del Problema 3.1.2 se pueden obtener distintos métodos numéricos Lagrangianos y semi-Lagrangianos, dependiendo de la discretización temporal empleada y de la elección de τ. Para la aplicación de estos métodos es necesario utilizar el movimiento X_τ, cuya expresión analítica habitualmente es desconocida. Generalmente se conoce el campo espacial de velocidades $\mathbf{v}$ o en su defecto una aproximación. Nótese que, por definición, el movimiento X_τ es la solución del problema de valor inicial

$$\mathsf{X}'_\tau(\mathsf{y},t) = \mathbf{v}(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t) = \mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t), \tag{3.10a}$$
$$\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},\tau) = \mathsf{y}, \tag{3.10b}$$

que suponemos que existe y es única para cada $\mathsf{y} \in \Omega_\tau$.

Se denota el número de pasos temporales por N, el paso de tiempo por $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$, y los nodos de la malla temporal por $t_n = n\Delta t$, para $n = 0, 1/2, 1, ..., N$. En el mejor de los casos, solo se conoce una definición explícita del campo espacial de velocidades $\mathbf{v}$, en cuyo caso se puede plantear el problema (3.10) que, para distintas elecciones de τ y t, requiere distintas condiciones iniciales:

- Para una elección $\tau > t$, por ejemplo $\tau = t_{n+1}$, $t = t_n$:

  Este sería el caso planteado en [9], donde se aplica el método de Euler explícito para resolver de forma aproximada el problema de valor inicial (3.10):

  $$\mathsf{X}_{n+1}(\mathsf{y},t_n) = \mathsf{y} - \Delta t \mathbf{v}(\mathsf{y},t_{n+1}), \quad \forall \mathsf{y} \in \bar{\Omega}_{t_{n+1}}. \tag{3.11}$$

  La aplicación de este método se justifica en los casos en los que las fronteras son fijas o el campo de velocidades es un dato. En estos esquemas será necesario contemplar mecanismos para evitar que X_τ se salga fuera del dominio computacional, o se requiera que $\mathbf{v}$ sea evaluado fuera del dominio.

- Para una elección $\tau < t$, por ejemplo $\tau = t_0$, el problema de valor inicial (3.10) se transforma en el siguiente:

  $$\begin{cases} \dot{\mathsf{X}}(\mathsf{p},t) = \mathbf{v}(\mathsf{X}(\mathsf{p},t),t), \\ \mathsf{X}(\mathsf{p},t_0) = \mathsf{p}, \quad \forall \mathsf{p} \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{3.12}$$

  Si el campo de velocidades está definido mediante otra ecuación diferencial el dominio computacional $\Omega_{t_{n+1}}$ se desconoce en el instante t_n. Estos esquemas permiten plantear el problema en cada

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

instante en un dominio computacional conocido y, dependiendo del esquema de integración temporal empleado para resolver el problema (3.12), utilizar estrategias de alto orden para mejorar la precisión y permitir un aumento del tamaño del paso de tiempo.

Conocido el movimiento X_τ se puede obtener el gradiente de deformaciones a través de la igualdad $\mathbf{F}_\tau = \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathsf{X}_\tau$ o planteando el problema de valor inicial que verifica $\mathbf{F}_\tau$:

$$\begin{cases} \mathbf{F}'_\tau(\mathsf{y},t) = \mathbf{L}(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t)\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t) = \mathbf{L}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t), \\ \mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},\tau) = \mathbf{I}, \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $\mathbf{L}(\mathsf{x},t)$ es el campo tensorial espacial $\operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathsf{x},t)$.

Para la resolución numérica de los problemas de valor inicial (3.10), (3.12) y (3.13) se pueden utilizar distintos métodos como colocación, multipaso lineales o Runge-Kutta. En [24] se emplea un método de Runge-Kutta explícito de orden dos para obtener el movimiento y el gradiente de deformaciones.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Capítulo 4

Problema de Cauchy vectorial

Tal vez el ejemplo más importante de problema de Cauchy vectorial es el problema general de movimiento de un medio continuo.

Para caracterizar un medio concreto será necesario relacionar el tensor de tensiones con ciertas magnitudes cinemáticas mediante leyes constitutivas.

Las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles y de Navier-Lamé son casos particulares para fluidos Newtonianos incompresibles y sólidos elásticos lineales, respectivamente. En [32] se utilizan estos modelos para tratar problemas de interacción fluido-estructura.

Partiendo del problema de Cauchy vectorial para el movimiento en un dominio con diferentes tipos de materiales, particularizándolo en cada dominio mediante la ley constitutiva correspondiente y planteando los subproblemas en una configuración no Euleriana con el campo de desplazamientos como incógnita, es posible definir un problema acoplado de una manera natural, que maneja en todos los subdominios el mismo tipo de ecuaciones.

Al igual que ocurría en el caso escalar, el tratamiento del término convectivo y las fronteras libres presentan dificultades cuando se emplea una configuración Euleriana del problema vectorial. Sin embargo, si se plantean en configuraciones no Eulerianas, estos elementos se abordan de manera natural, facilitando su tratamiento.

En este capítulo se desarrollarán los cálculos para la transformación del problema de Cauchy para la ecuación general del movimiento de un medio continuo, desde configuraciones Eulerianas a configuraciones no Eulerianas, sin concretar ninguna ley constitutiva.

Más adelante se utilizarán los desarrollos de este capítulo para plantear problemas concretos que involucran el movimiento acoplado con otros fenómenos. En cada caso se definirán las leyes constitutivas necesarias para el correcto tratamiento de los fenómenos a modelar.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

4.1. Formulaciones Eulerianas y no Eulerianas del problema

En esta sección se introducirá la forma general Euleriana de la ecuación del movimiento, sin tener en cuenta leyes constitutivas que definan el tensor de tensiones, que será denotado por $\mathbf{T}$. Posteriormente se emplearán diferentes equivalencias para transformar el problema Euleriano en una familia de problemas no Eulerianos. Para estos problemas definidos en configuraciones no Eulerianas, se definirán también los

problemas variacionales asociados. El caso puramente Lagrangiano se tratará como un caso particular de la formulación no Euleriana general.

4.1.1. Formulación Euleriana

Se considera el siguiente problema de valor inicial-frontera:

Problema 4.1.1. *Problema fuerte vectorial en configuración Euleriana.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^d$ *y* $\mathbf{T} : \mathcal{T} \to Sym$ *tales que*

$$\rho(\mathsf{x},t)\dot{\mathbf{v}}(\mathsf{x},t) = \operatorname{div}\mathbf{T}(\mathsf{x},t) + \mathbf{b}(\mathsf{x},t), \tag{4.1a}$$

para $\mathsf{x} \in \Omega_t$ *y* $t \in [t_0, t_f]$*, sujetas a las condiciones de contorno*

$$\mathbf{v}(\mathsf{x},t) = \mathbf{v}_D(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^D, \tag{4.1b}$$
$$\mathbf{T}(\mathsf{x},t)\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = \mathbf{h}(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^R, \tag{4.1c}$$

para $t \in [t_0, t_f]$*, y a la condición inicial*

$$\mathbf{v}(\mathsf{x},t_0) = \mathbf{v}^0(\mathsf{x}) \quad \forall \mathsf{x} \in \bar{\Omega}_{t_0}. \tag{4.1d}$$

En estas ecuaciones $\mathbf{T} : \mathcal{T} \longrightarrow$ Sym representa el tensor de tensiones de Cauchy siendo Sym el espacio de los tensores simétricos, $\rho : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es la densidad de masa, $\mathbf{b} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}$ es el término fuente (una densidad volumétrica de fuerza), $\mathbf{h}(\cdot,t) : \Gamma_t^R \to \mathbb{R}^d$ es la densidad superficial de fuerza en la frontera Γ_t^R donde se da una condición de contorno de tipo Neumann, $\mathbf{v}_D(\cdot,t) : \Gamma_t^D \to \mathbb{R}^d$ es la condición Dirichlet impuesta sobre la velocidad y $\mathbf{v}^0 : \bar{\Omega}_{t_0} \to \mathbb{R}^d$ es la velocidad inicial.

Para completar la definición del problema es necesario definir el tensor de tensiones de Cauchy $\mathbf{T}$ mediante una ley constitutiva. Estas leyes constitutivas pueden añadir nuevas ecuaciones e incógnitas que serán incorporadas al problema original. En los Capítulos 6 y 7 se introducirán las leyes constitutivas consideradas para varios tipos de materiales: sólido elástico e isótropo, fluido Newtoniano y sólido visco-elasto-plástico.

4.1.2. Formulación general no Euleriana

A continuación se desarrollarán las expresiones necesarias para escribir el Problema 4.1.1 en una configuración no Euleriana $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$, con $\tau \in [t_0, t_f]$.

A partir de la definición de derivada material (2.10), usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta las relaciones entre la velocidad y el movimiento dadas en (2.13) y (2.14), se obtiene la siguiente igualdad:

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathsf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{v}_\tau}{\partial t}(\mathsf{y},t)_{|\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)} \equiv \mathbf{v}'_\tau(\mathsf{y},t)_{|\mathsf{y}=\mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau)}, \quad \forall (\mathsf{x},t) \in \mathcal{T}. \tag{4.2}$$

Se evalúa la ecuación (4.1a) en el punto $\mathsf{x} = \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t)$ y se utiliza la ecuación (4.2) para obtener

$$\rho(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t)\mathbf{v}'_\tau(\mathsf{y},t) = \operatorname{div}_{\mathsf{x}}\mathbf{T}(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t) + \mathbf{b}(\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t),t), \tag{4.3}$$

para $(\mathsf{y},t) \in \Omega_\tau \times [t_0,t_f]$. Utilizando ahora la igualdad (2.25), con $\mathbf{H} = \mathbf{T}$, se deduce la ecuación del movimiento en formulación no Euleriana:

$$\rho_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{v}'_\tau(\mathsf{y},t) = \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{T}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)} + \mathbf{b}_\tau(\mathsf{y},t), \tag{4.4}$$

para $(\mathsf{y},t) \in \Omega_\tau \times [t_0,t_f]$.

Se realiza el cambio de variable $\mathsf{x} = \mathsf{X}_\tau(\mathsf{y},t)$ en (4.1b)-(4.1d) para conseguir las condiciones de contorno e iniciales en la configuración de referencia intermedia,

$$\mathbf{v}_\tau = (\mathbf{v}_D)_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^D \times [t_0,t_f], \tag{4.5}$$
$$\mathbf{T}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\mathbf{h}_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^R \times [t_0,t_f], \tag{4.6}$$
$$\mathbf{v}_\tau(\cdot,t_0) = \mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,\tau)) \quad \text{en } \bar\Omega_\tau, \tag{4.7}$$

donde se ha utilizado (2.18). Entonces, a partir de estos resultados se deduce la siguiente formulación no Euleriana del Problema 4.1.1.

Problema 4.1.2. *Problema fuerte vectorial en configuración no Euleriana, $\Omega_\tau \times [t_0,t_f]$.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_\tau : \bar\Omega_\tau \times [t_0,t_f] \to \mathbb{R}^d$ y $\mathbf{T}_\tau : \bar\Omega_\tau \times [t_0,t_f] \to Sym$ tales que

$$\rho_\tau\mathbf{v}'_\tau = \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau\mathbf{T}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau} + \mathbf{b}_\tau. \tag{4.8a}$$

en $\Omega_\tau \times [t_0,t_f]$, sujetas a las condiciones de contorno

$$\mathbf{v}_\tau = (\mathbf{v}_D)_\tau, \quad \textit{en } \Gamma_\tau^D \times [t_0,t_f], \tag{4.8b}$$
$$\mathbf{T}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\mathbf{h}_\tau, \quad \textit{en } \Gamma_\tau^R \times [t_0,t_f], \tag{4.8c}$$

y a la condición inicial

$$\mathbf{v}_\tau(\cdot,t_0) = \mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,\tau)) \quad \textit{en } \bar\Omega_\tau. \tag{4.8d}$$

Para obtener una formulación débil del Problema 4.1.2 basta con multiplicar (4.8a) por $\det\mathbf{F}_\tau$ y por una función test $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau)$, integrar en Ω_τ y aplicar la fórmula de Green adecuada junto con la condición de contorno (4.8c). De esta forma se deduce,

$$\int_{\Omega_\tau}\det\mathbf{F}_\tau\rho_\tau\mathbf{v}'_\tau\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y} = \int_{\Gamma_\tau^R}\det\mathbf{F}_\tau|\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\mathbf{h}_\tau\cdot\mathbf{z}dA_{\mathsf{y}} - \int_{\Omega_\tau}\det\mathbf{F}_\tau\mathbf{T}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau}\det\mathbf{F}_\tau\mathbf{b}_\tau\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y}, \tag{4.9}$$

para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau)$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

4.1.3. Formulación Lagrangiana

A partir del Problema 4.1.2, particularizándolo para el instante $\tau = t_0$, se obtiene la formulación fuerte del Problema 4.1.1 en la configuración de referencia $\Omega = \Omega_{t_0}$. En concreto,

Problema 4.1.3. *Problema fuerte vectorial en configuración Lagrangiana.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^d$ *y* $\mathbf{T}_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to Sym$ *tales que*

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}}_m = \text{Div}\left[\det \mathbf{F}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}\right] + \det \mathbf{F}\mathbf{b}_m, \tag{4.10a}$$

en $\Omega \times [t_0, t_f]$*, sujetas a las condiciones de contorno*

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{v}_D)_m, \quad en\ \Gamma^D \times [t_0, t_f], \tag{4.10b}$$
$$\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0} = |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\mathbf{h}_m, \quad en\ \Gamma^R \times [t_0, t_f], \tag{4.10c}$$

y a la condición inicial

$$\mathbf{v}_m(\cdot, t_0) = \mathbf{v}^0 \quad en\ \bar{\Omega}. \tag{4.10d}$$

Nótese que se ha utilizado el principio de conservación de la masa en la forma siguiente (véase [27])

$$\rho_m(\mathsf{p}, t) \det \mathbf{F}(\mathsf{p}, t) = \rho_0(\mathsf{p}), \tag{4.11}$$

donde ρ_0 es la densidad en la configuración de referencia.

Tomando $\tau = t_0$ en (4.9) y utilizando el principio de conservación de la masa (4.11) se obtiene la siguiente formulación débil del Problema 4.1.3:

$$\int_\Omega \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{z} d\mathsf{p} = \int_{\Gamma^R} \det \mathbf{F}|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\mathbf{h}_m \cdot \mathbf{z} dA_\mathsf{p} - \int_\Omega \det \mathbf{F}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{z} d\mathsf{p} + \int_\Omega \det \mathbf{F}\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{z} d\mathsf{p}, \tag{4.12}$$

para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma^D}(\Omega)$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

4.2. Resolución numérica

Al contrario de lo que ocurría en el problema general escalar planteado en la Sección 3, ahora la velocidad no es un dato sino que es una incógnita del problema. De modo que el cálculo de X_τ, necesario para obtener $\mathbf{F}_\tau$ y realizar las transformaciones de los campos espaciales, no es independiente de la resolución del Problema 4.1.2.

En concreto, las relaciones entre $\mathbf{v}_\tau$, X_τ y $\mathbf{u}_\tau$ dadas en (2.14) y (2.17) permiten escribir el Problema 4.1.2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\rho_\tau \mathbf{v}_\tau' &= \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det \mathbf{F}_\tau \mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T}\right] \frac{1}{\det \mathbf{F}_\tau} + \mathbf{b}_\tau, \quad \text{en } \Omega_\tau \times [t_0, t_f], && (4.13a)\\
\mathbf{u}_\tau' &= \mathbf{v}_\tau, \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], && (4.13b)\\
\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t) &= \mathsf{y} + \mathbf{u}_\tau(\mathsf{y}, t), \quad \forall (\mathsf{y}, t) \in \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], && (4.13c)\\
\mathbf{F}_\tau &= \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathsf{X}_\tau, \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], && (4.13d)\\
\mathbf{v}_\tau &= (\mathbf{v}_D)_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^D \times [t_0, t_f], && (4.13e)\\
\mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau &= |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^R \times [t_0, t_f], && (4.13f)\\
\mathbf{u}_\tau(\cdot, \tau) &= \mathbf{0}, \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau, && (4.13g)\\
\mathbf{v}_\tau(\cdot, t_0) &= \mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot, \tau)), \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau. && (4.13h)
\end{aligned}$$

Nótese que se puede plantear este problema tomando como incógnita el desplazamiento en lugar de la velocidad. En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho_\tau \mathbf{u}_\tau'' &= \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det \mathbf{F}_\tau \mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T}\right] \frac{1}{\det \mathbf{F}_\tau} + \mathbf{b}_\tau, \quad \text{en } \Omega_\tau \times [t_0, t_f], && (4.14a)\\
\mathsf{X}_\tau(\mathsf{y}, t) &= \mathsf{y} + \mathbf{u}_\tau(\mathsf{y}, t), \quad \forall (\mathsf{y}, t) \in \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], && (4.14b)\\
\mathbf{F}_\tau &= \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathsf{X}_\tau, \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f], && (4.14c)\\
\mathbf{v}_\tau &= (\mathbf{v}_D)_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^D \times [t_0, t_f], && (4.14d)\\
\mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau &= |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \quad \text{en } \Gamma_\tau^R \times [t_0, t_f], && (4.14e)\\
\mathbf{u}_\tau(\cdot, \tau) &= \mathbf{0}, \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau, && (4.14f)\\
\mathbf{v}_\tau(\cdot, t_0) &= \mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot, \tau)), \quad \text{en } \bar{\Omega}_\tau. && (4.14g)
\end{aligned}$$

De esta manera, tras la discretización espacial, se obtiene un problema de valor inicial de segundo orden.

Estas formulaciones fuertes admiten, respectivamente, las siguientes formulaciones variacionales que son equivalentes a la dada en (4.9):

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \rho_\tau \mathbf{v}_\tau' \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} = \\
&\quad \int_{\Gamma_\tau^R} \det \mathbf{F}_\tau |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{z} dA_{\mathsf{y}} - \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau), && (4.15a)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_\tau} \mathbf{u}_\tau' \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\mathsf{y} = \int_{\Omega_\tau} \mathbf{v}_\tau \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\mathsf{y}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\tau) \tag{4.15b}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

y

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \rho_\tau \mathbf{u}_\tau'' \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} = \\
&\quad \int_{\Gamma_\tau^R} \det \mathbf{F}_\tau |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{z} dA_{\mathsf{y}} - \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{T}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau), && (4.16a)
\end{aligned}$$

con las correspondientes condiciones de contorno e iniciales, y definiciones dadas en (4.13e), (4.13g), (4.13h), (4.13c) y (4.13d). Nótese que, cuando la incógnita principal es el campo de desplazamientos en lugar de la velocidad, será necesario obtener las condiciones iniciales y de contorno para dicho campo a partir de las dadas para la velocidad.

Tras considerar una discretización espacial de estas formulaciones débiles mediante el método de los elementos finitos, se obtiene un problema implícito de valores iniciales del siguiente tipo:

$$\mathbf{f}_1(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'') - \mathbf{f}_2(t, \mathbf{y}) = 0.$$

Adicionalmente, las leyes constitutivas introducirán nuevas ecuaciones en forma de restricciones. Las leyes constitutivas que se consideran en este trabajo admiten la siguiente escritura:

$$G(\mathbf{T}_\tau, \mathbf{F}_\tau, \operatorname{grad} \mathbf{v}_\tau, \mathbf{w}_\tau) = 0, \tag{4.17}$$

con sus correspondientes incógnitas $\mathbf{w}_\tau$. En ese caso se obtendrá un problema semidiscretizado en espacio de valores iniciales, definido por un sistema de ecuaciones diferenciales y algebraicas (DAE por sus siglas en inglés, *Differential Algebraic Equations*).

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Capítulo 5

Remallado y reinicialización

Los métodos no Eulerianos que se han descrito en las secciones precedentes permiten resolver el problema planteado en configuraciones espaciales diferentes de la del instante que se pretende resolver. En estos métodos habitualmente se fija una configuración de referencia y se mantiene hasta un determinado instante o por un periodo constante de tiempo. En todo caso, cuando se considera el momento adecuado para cambiar la configuración de referencia y reinicializar el problema, si ese instante no coincide con el instante final de la simulación, será necesario desarrollar métodos para trasladar la información de una configuración a otra con objeto de poder continuar con la simulación.

En el caso de los métodos puramente Lagrangianos la decisión de cambiar de configuración de referencia está determinada por el valor del determinante del tensor de gradiente de deformaciones $\mathbf{F}_\tau$. Este tensor que está definido en (2.5) debe cumplir con la condición (2.1) para que el movimiento X_τ sea válido. Durante la simulación puede ocurrir que en un instante determinado se viole la condición (2.1) y entonces será necesario definir una nueva configuración de referencia previa a ese instante. Pueden existir otros criterios más estrictos que lleven a tomar esta decisión.

El cambio de configuración de referencia implica un remallado con complejidad variable, dependiendo de las características del problema que se está resolviendo. En la Sección 5.1 se incidirá en este tema.

Cuando se procede a un cambio de configuración de referencia es necesario convertir los campos asociados al problema, a la nueva configuración. Esta acción se denominará reinicialización de los campos y se detallará en la Sección 5.2.

5.1. Remallado

En esta sección se introduce el proceso de remallado distinguiendo entre el caso en el que el dominio del problema sea fijo o variable con el tiempo. En el segundo caso, la nueva configuración de referencia es habitualmente desconocida y se aproxima utilizando una aproximación del desplazamiento. Los campos aproximados se denotarán con el subíndice h.

USC
DE COMPOSTELA

5.1.1. Frontera fija

Cuando la frontera del dominio es fija se puede reutilizar la malla original en cada nuevo reinicio del método pues todas las configuraciones coinciden: $\Omega_t = \Omega_s \quad \forall s, t \in [t_0, t_f]$).

A pesar de esta circunstancia es posible que en algunos casos esté justificado el remallado del dominio:

- Malla adaptativa, refinada en las zonas con cambios bruscos de los campos que son incógnita.
- Reutilizar los vértices originales desplazados para evitar los errores de interpolación que se añaden en el proceso de reinicialización de los campos. Si se reutilizan los vértices desplazados, es conveniente llevar a cabo un cambio de conectividades para intentar mejorar la calidad de la malla. Esta mejora de la calidad de la malla a través de un nuevo esquema de conectividades, no siempre es posible.

5.1.2. Frontera móvil

Si el problema involucra alguna frontera libre, el cambio de configuración de referencia implica una deformación de la frontera del dominio original. Para obtener dicha frontera deformada se aplica una aproximación del movimiento $\mathsf{X}_{\tau,h}$ sobre la frontera original Γ_τ.

Por simplicidad, se asume que $\Omega_\tau \subset \mathbb{R}^2$ y que tiene una frontera poligonal. Se puede definir una familia de particiones de $\bar{\Omega}_\tau$ denotada por $\mathfrak{T}_{\tau,h}$ consistente en un conjunto de triángulos $\{K_i\}_i$ tal que

$$\bigcup_{K\in\mathfrak{T}_{\tau,h}} K = \bar{\Omega}_\tau, \tag{5.1}$$

$$|K| \leq h, \quad \forall K \in \mathfrak{T}_{\tau,h}, \tag{5.2}$$

donde $|K|$ representa el diámetro del triángulo K. Además, una arista es compartida, como máximo, por 2 triángulos. Los puntos de la triangulación se denominan *vértices*.

Sean dos instantes temporales $\tau_i, \tau_j \in [t_0, t_f]$ con $\tau_i < \tau_j$. Para obtener una aproximación del dominio deformado $\Omega_{\tau_j} = \mathsf{X}_{\tau_i}(\Omega_{\tau_i}, \tau_j)$, siendo conocidos el dominio Ω_{τ_i} o una aproximación de este y una aproximación de $\mathbf{u}_{\tau_i}(\cdot, \tau_j)$, se llevan a cabo las siguientes tareas:

- Se construye una nueva triangulación de $\bar{\Omega}_{\tau_i}$, denotada por $\mathfrak{T}^r_{\tau_i,h}$, cuyos vértices son los nudos que están en las aristas asociados al campo de desplazamientos $\mathbf{u}_{\tau_i,h}(\cdot, \tau_j)$, que es una función continua en $\bar{\Omega}_{\tau_i}$ y polinómica sobre cada elemento de la triangulación original $\mathfrak{T}_{\tau_i,h}$.
- Se aplica a cada vértice de $\mathfrak{T}^r_{\tau_i,h}$ el movimiento correspondiente al desplazamiento aproximado $\mathbf{u}_{\tau_i,h}(\cdot, \tau_j)$ y se obtiene la malla deformada $\tilde{\mathfrak{T}}^r_{\tau_j,h}$ y una aproximación del dominio $\bar{\Omega}_{\tau_j}$ como se ilustra en la Figura 5.1. En concreto, si denotamos por $\{\mathsf{y}_l^{h,\tau_i}\}_l$ y $\{\tilde{\mathsf{y}}_l^{h,\tau_j}\}_l$ los vértices de $\mathfrak{T}^r_{\tau_i,h}$ y $\tilde{\mathfrak{T}}^r_{\tau_j,h}$, respectivamente, se tiene

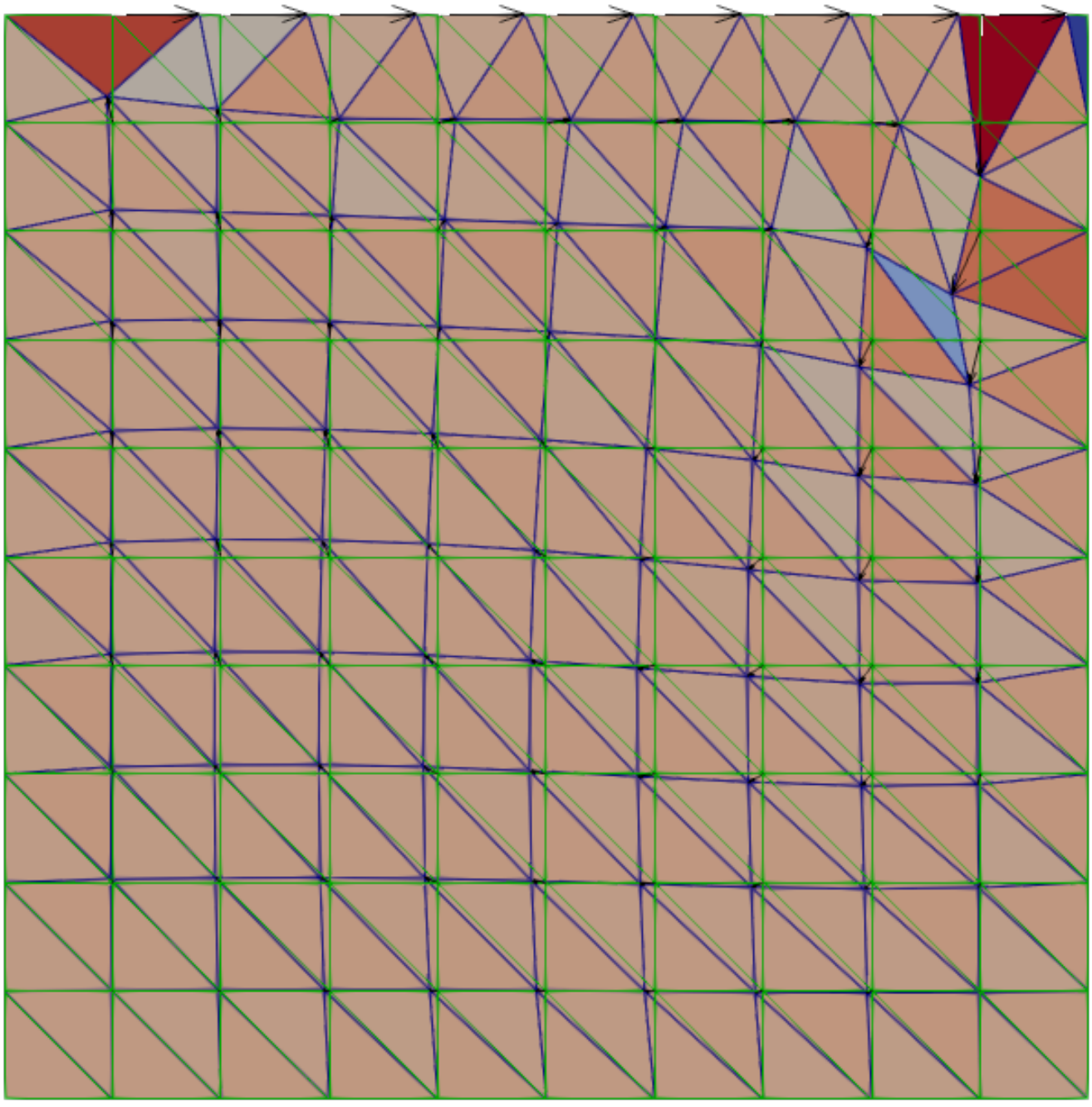
$$\tilde{\mathsf{y}}_l^{h,\tau_j} = \mathsf{y}_l^{h,\tau_i} + \mathbf{u}_{\tau_i,h}(\mathsf{y}_l^{h,\tau_i}, \tau_j), \quad \forall l, \tag{5.3}$$

$$\bar{\Omega}_{\tau_j} \sim \bar{\tilde{\Omega}}_{\tau_j} := \bigcup_{\tilde{K}\in\tilde{\mathfrak{T}}^r_{\tau_j,h}} \tilde{K}, \tag{5.4}$$

  donde los vértices de cada elemento de $\tilde{\mathfrak{T}}^r_{\tau_j,h}$ son vértices desplazados de un elemento de $\mathfrak{T}^r_{\tau_i,h}$.
- Utilizando como frontera aproximada de Ω_{τ_j} la frontera de $\tilde{\Omega}_{\tau_j}$, se construye una nueva triangulación de Ω_{τ_j}. La triangulación $\tilde{\mathfrak{T}}^r_{\tau_j,h}$ también es una triangulación de $\bar{\Omega}_{\tau_j}$ pero, en general, la calidad de esta malla no es buena.

Este procedimiento se ilustra en la Figura 5.2. En el caso tridimensional, el procedimiento es análogo.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

Figura 5.1: Malla original superpuesta a la malla deformada que se obtiene aplicando a cada vértice de la malla original el movimiento correspondiente al desplazamiento $\mathbf{u}_{t_i,h}(\cdot, t_j)$.

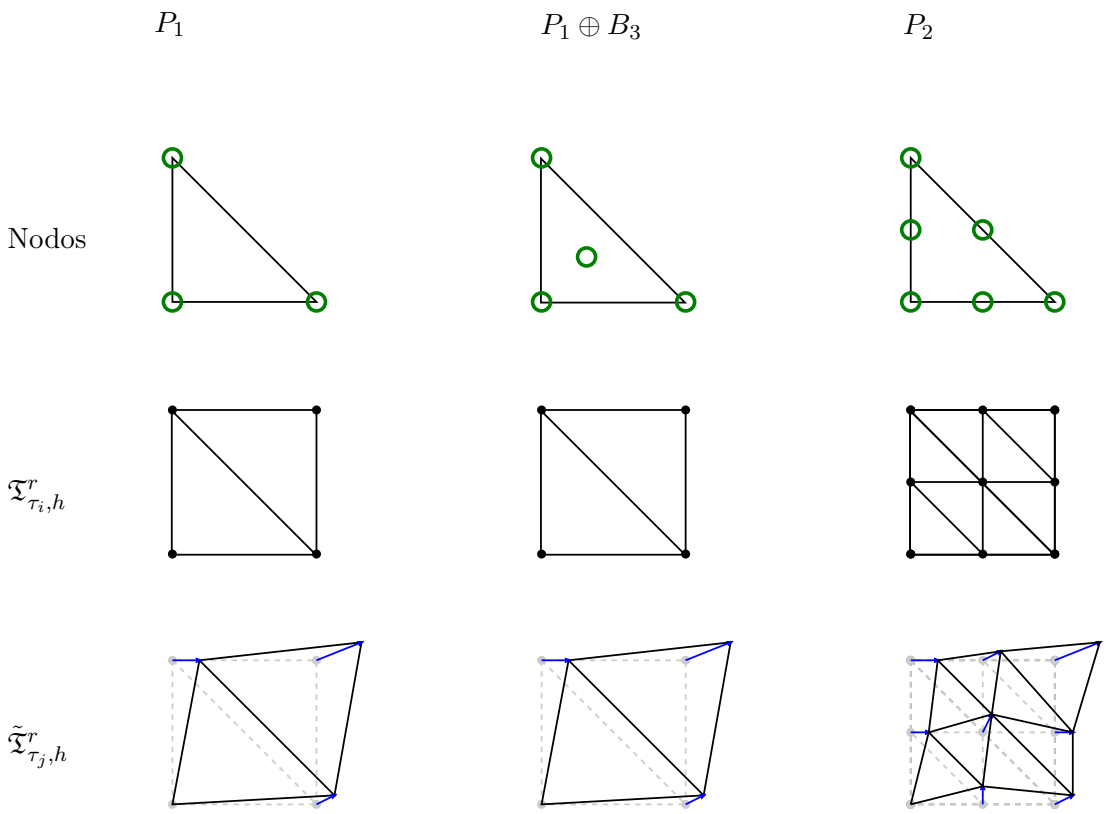


Figura 5.2: Dominio de partida y deformado, y malla deformada para diferentes espacios de elementos finitos asociados con el desplazamiento $\mathbf{u}_{\tau,h}$.

5.2. Reinicialización

Tras un cambio de configuración de referencia, es necesario fijar una nueva condición inicial para los campos que la requieran.

Sean dos instantes temporales $\tau_i, \tau_j \in [t_0, t_f]$ con $\tau_i < \tau_j$, y un campo espacial escalar o vectorial Ψ. Dado $\Psi_{\tau_i,h}(\cdot,\tau_j) \sim \Psi_{\tau_i}(\cdot,\tau_j)$ perteneciente a un espacio de elementos finitos sobre una malla de $\bar{\Omega}_{\tau_i}$ que será denotada por $\mathfrak{T}^{\psi}_{\tau_i,h}$, se puede obtener una aproximación de $\psi_{\tau_j}(\cdot,\tau_j) \equiv \psi(\cdot,\tau_j)$ si se dispone de una aproximación de $\mathbf{u}_{\tau_i}(\cdot,\tau_j)$. Se detalla a continuación el procedimiento empleado donde se tiene en cuenta que

$$\Psi(\mathsf{y} + \mathbf{u}_{\tau_i,h}(\mathsf{y},\tau_j),\tau_j) \simeq \Psi(\mathsf{X}_{\tau_i}(\mathsf{y},\tau_j),\tau_j) = \Psi_{\tau_i}(\mathsf{y},\tau_j), \quad \forall \mathsf{y} \in \bar{\Omega}_{\tau_i}. \tag{5.5}$$

Nótese que en general el dominio $\bar{\Omega}_{\tau_i}$ será desconocido para $\tau_i \neq t_0$, pero conoceremos una aproximación.

- Se construye una nueva triangulación de $\bar{\Omega}_{\tau_i}$, denotada por $\mathfrak{T}^{\Psi,r}_{\tau_i,h}$, cuyos vértices son los nudos que están en las aristas asociados al campo $\Psi_{\tau_i,h}(\cdot,\tau_j)$. A partir de esta malla y empleando el procedimiento dado en (5.3)-(5.4), se obtiene una aproximación del dominio $\bar{\Omega}_{\tau_j}$ y una triangulación de dicho conjunto que será denotada por $\tilde{\mathfrak{T}}^{\Psi,r}_{\tau_j,h}$.

- La aproximación de $\Psi(\cdot,\tau_j)$, que será denotada por $\Psi_h(\cdot,\tau_j)$, se define lineal a trozos sobre la malla $\tilde{\mathfrak{T}}^{\Psi,r}_{\tau_j,h}$. A cada uno de los grados de libertad de $\Psi_h(\cdot,\tau_j)$ se le asigna el valor del grado de libertad del que proviene, es decir,

$$\Psi_h(\mathsf{y}_l + \mathbf{u}_{\tau_i,h}(\mathsf{y}_l, \tau_j), \tau_j) = \Psi_{\tau_i,h}(\mathsf{y}_l, t_j), \quad \forall l, \tag{5.6}$$

donde $\{\mathsf{y}\}_l$ son los nudos sobre las aristas asociados al campo $\Psi_{\tau_i,h}(\cdot, \tau_j)$. Nótese que $\{\mathsf{y}_l + \mathbf{u}_{\tau_i,h}(\mathsf{y}_l, \tau_j)\}_l$ conforman los vértices de la malla $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\Psi,r}_{\tau_j,h}$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Parte II

Aplicación a problemas de la mecánica del medio continuo

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Introducción

En esta parte de la tesis se aplicarán las técnicas desarrolladas en la primera parte a dos problemas particulares de la mecánica de medios continuos.

El primer caso analizado es el problema del movimiento para un fluido Newtoniano incompresible (Capítulo 6). En este capítulo se plantean las formulaciones que resultan al escribir el problema original, definido en una configuración Euleriana, en configuraciones no Eulerianas. Este problema es un caso particular de problema de Cauchy vectorial considerado en el Capítulo 4. Tras su transformación a una configuración no Euleriana general, se proponen diferentes estrategias de discretización temporal empleando las fórmulas de Newmark. Según la elección de los valores de los parámetros que las definen se pueden obtener métodos de diferente orden. Estas discretizaciones temporales se combinan con métodos de elementos finitos. Los diferentes métodos considerados y los programas informáticos desarrollados son evaluados y validados utilizando ejemplos test numéricos habituales en dos dimensiones. Los ejemplos presentados incluyen problemas de frontera móvil. Los códigos computacionales se desarrollan a partir de bibliotecas de propósito general. El contenido de este capítulo reproduce los resultados publicados en [25] y [26].

En el Capítulo 7 se plantea un problema derivado de la industria de conformado de piezas metálicas mediante la técnica de *electrorrecalcado*. Este problema involucra diferentes fenómenos físicos. En concreto requiere de tres modelos: mecánico para un sólido visco-elasto-plástico, electromagnético y térmico. Los tres problemas presentan un acople fuerte entre ellos:

- Gran parte de los parámetros que definen el comportamiento de los materiales presentan una dependencia de la temperatura.
- El término fuente de la ecuación de transferencia de calor es debido al *efecto Joule* originado por las corrientes eléctricas que recorren la pieza.
- Todos los modelos implicados en el problema dependen de la geometría del dominio computacional, que varía en el tiempo por la deformación que sufre la pieza.

El problema completo se aborda en este capítulo donde se incluyen algunas simplificaciones. En concreto, el problema electromagnético se transforma en un problema eléctrico considerando que la corriente que se emplea es corriente continua. De este modo este problema pasa a ser un caso particular del problema de Cauchy escalar considerado en el Capítulo 3. En una de las fronteras del problema existe un contacto con un obstáculo. El problema del contacto unilateral es considerado en las formulaciones fuerte y débil del problema. Sin embargo, aunque se propone una técnica para su resolución, en el software implementado se reemplaza este contacto por una condición de Dirichlet de no penetración. El problema de transporte de calor también es un caso particular del problema general de Cauchy escalar. El problema mecánico es un caso particular del problema general de Cauchy vectorial considerado en el Capítulo 4 con una ley

USC DE COMPOSTELA

constitutiva para un sólido visco-elasto-plástico. Se obtiene una descripción del problema completo en una configuración Lagrangiana y se plantea su resolución de forma acoplada. Por la naturaleza del problema, se considera un caso de simetría cilíndrica como el considerado en el ejemplo numérico, permitiendo su resolución en una configuración 2D. Para la discretización temporal, en este caso, se opta por emplear integradores de tipo Runge-Kutta implícitos con mecanismos para el uso de pasos de tiempo variables. Esta característica es determinante para la resolución del problema, puesto que durante la simulación completa del proceso existen periodos en los que los cambios de las variables propias del problema son muy abruptos y requieren tamaños de pasos temporales muy pequeños. En otras situaciones los cambios son suaves pudiendo usar tamaños de pasos de tiempo más grandes, reduciendo el número total de pasos de tiempo.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 6

Mecánica de fluidos. Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles*

*Los resultados de este capítulo ya han sido publicados como:

Benítez M.[a], Bermúdez A.[b,c], Fontán P.[d] (2018) A Second-Order Linear Newmark Method for Lagrangian Navier-Stokes Equations. In: Doubova A., González-Burgos M., Guillén-González F., Marín Beltrán M. (eds) Recent Advances in PDEs: Analysis, Numerics and Control. SEMA SIMAI Springer Series, vol 17. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97613-6_3

Benítez, M.[a], Bermúdez, A.[b,c] and Fontán, P.[d] Non-Eulerian Newmark Methods: A Powerful Tool for Free-Boundary Continuum Mechanics Problems. *J Sci Comput* **83**, 44 (2020). https://doi.org/10.1007/s10915-020-01207-y

[a]Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, Centro de Investigación CITIC, Elviña s/n, 15071 A Coruña, Spain
[b]Departamento de Matemática Aplicada and Instituto de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela, c/ Lope Gómez de Marzoa s/n, 15782 Santiago de Compostela, Spain
[c]Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), Rúa Constantino Candeira s/n, 15782 Santiago de Compostela, Spain
[d]REPSOL Technology Lab, Autovía de Extremadura s/n, 28935 Móstoles, Madrid, Spain

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar una familia de métodos precisos y estables para la resolución numérica de problemas con frontera libre en el ámbito de la mecánica de fluidos. Los métodos y resultados de este capítulo han sido publicados en [25, 26].

La familia de métodos indicada hace uso de formulaciones no Eulerianas y de métodos de Newmark para la discretización temporal.

La resolución de problemas de la mecánica de fluidos incompresibles con fronteras móviles planteados en configuración Euleriana presenta dos principales dificultades: el tratamiento del término convectivo para altos números de *Reynolds* [33] y la modelización y seguimiento de la frontera móvil.

En el caso del término convectivo, es posible emplear diferentes técnicas para conseguir una formulación estable [33]. Una de ellas es emplear el método de las características [6] de tal manera que el término convectivo se incluye dentro de la derivada material con respecto al tiempo, como se indica en los Capítulos

3 y 4.

La descripción Lagrangiana, típicamente empleada en mecánica de sólidos, proporciona un tratamiento natural de problemas con dominios dependientes del tiempo tal y como son los problemas de frontera libre e interacción fluido-estructura. Inicialmente, el problema principal al emplear los métodos Lagrangianos en problemas de mecánica de fluidos residía en la dificultad del proceso de remallado necesario en estos métodos cuando se enfrentan a grandes deformaciones (ver [34, 35]). Como consecuencia del desarrollo de algoritmos de mallado eficientes que permiten estrategias adaptativas automáticas, los métodos puramente Lagrangianos han adquirido un importante interés en el ámbito de la mecánica de fluidos (ver por ejemplo [36, 37]).

En este capítulo se detallarán algunas técnicas para la resolución numérica de problemas en mecánica de fluidos con fronteras móviles mediante el uso de formulaciones no Eulerianas como las introducidas en los capítulos anteriores.

En concreto, se considerará un fluido viscoso, Newtoniano e incompresible en un dominio dependiente del tiempo que puede presentar grandes deformaciones. Los cambios topológicos en las interfaces, como pueden ser roturas de la interfaz, no se contemplarán en esta tesis. Este tipo de problemas aparecen de forma recurrente en el ámbito de la ingeniería, por ejemplo en problemas de frontera libre y problemas de interacción fluido-estructura.

En la primera parte del capítulo se recordarán las ecuaciones de Navier-Stokes en configuración Euleriana y, a continuación, se establecerá su formulación en configuración no Euleriana. Posteriormente se plantearán las discretizaciones temporales y espaciales mediante el método de Newmark y elementos finitos, respectivamente. Por último, se mostrarán resultados numéricos obtenidos mediante los distintos esquemas propuestos.

6.1. Formulaciones del problema

Las ecuaciones de Navier-Stokes pertenecen a la familia de ecuaciones vectoriales introducidas en el Capítulo 4. A partir de estas ecuaciones y utilizando la ley constitutiva de los fluidos Newtonianos incompresibles se consigue caracterizar la ley del movimiento para este tipo de fluidos. A continuación se indicará la ley constitutiva aplicada. Para un desarrollo más profundo se puede consultar [38].

6.1.1. Leyes constitutivas para un fluido Newtoniano incompresible

Para fluidos Newtonianos incompresibles el tensor de tensiones de Cauchy es de la siguiente forma:

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I} + \mu \left(\operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{v}^T \right), \quad \text{en } \mathcal{T}, \tag{6.1}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

donde $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ es la presión y $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ la viscosidad dinámica. Además, dado que el fluido es incompresible, es necesario añadir una restricción a la velocidad:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{en } \mathcal{T}. \tag{6.2}$$

Recordemos cómo aparece la condición (6.2). Un cuerpo Ω es incompresible si solo admite movimientos isocóricos, es decir, movimientos que conservan el volumen. Dada una región material $\mathcal{P}$ denotamos por $\mathcal{P}_t = \mathsf{X}(\mathcal{P}, t)$, su posición en el instante t. El movimiento X es isocórico si

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\mathcal{P}_t) = 0, \tag{6.3}$$

donde $\mathrm{Vol}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} d\mathsf{x}$ denota el volumen ocupado por los puntos materiales de $\mathcal{P}$ en el instante t. El teorema del transporte de Reynolds,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \phi(\mathsf{x},t)d\mathsf{x} = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\phi}(\mathsf{x},t) + \phi(\mathsf{x},t)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t))d\mathsf{x}, \tag{6.4}$$

permite evaluar la derivada temporal de $\mathrm{Vol}(\mathcal{P}_t)$, simplemente considerando $\phi = 1$ y tomando $\mathbf{v}(\mathsf{x},t)$ la velocidad espacial asociada al movimiento X:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\mathcal{P}_t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} d\mathsf{x} = \int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t)d\mathsf{x} = 0. \tag{6.5}$$

Como la igualdad anterior es válida para cualquier parte $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, entonces, por el teorema de localización, se deduce que un movimiento será isocórico si y solo si $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$. Además, teniendo en cuenta que se verifica (ver [27] página 27)

$$(\det \mathbf{F})^{\cdot} = \det \mathbf{F}\,\mathrm{tr}\left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\right),$$

y que $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m\mathbf{F}$ con $\mathbf{L} = \mathrm{grad}\,\mathbf{v}$, se tienen las siguientes equivalencias

$$\mathsf{X} \text{ es isocórico } \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\det \mathbf{F})^{\cdot} = 0. \tag{6.6}$$

Si un movimiento es isocórico, de la ecuación de conservación de la masa y de la ecuación (6.4) para $\phi = \rho$, se deduce

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathsf{x},t)d\mathsf{x} = \int_{\mathcal{P}_t} (\dot{\rho}(\mathsf{x},t) + \rho(\mathsf{x},t)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t))d\mathsf{x} = \int_{\mathcal{P}_t} \dot{\rho}(\mathsf{x},t)d\mathsf{x} = 0, \tag{6.7}$$

y, de nuevo por el teorema de localización, se deduce que $\dot{\rho}(\mathsf{x},t) = 0$ lo que significa que los puntos materiales conservan su densidad a lo largo del movimiento.

6.1.2. Formulación Euleriana

A partir del Problema 4.1.1, utilizando la ley constitutiva del tensor de Cauchy (6.1) y la restricción asociada con los movimientos isocóricos se define el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

Problema 6.1.1. *Problema fuerte de Navier-Stokes en configuración Euleriana.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^d$ *y* $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$\rho(\mathsf{x},t)\dot{\mathbf{v}}(\mathsf{x},t) + \mathrm{grad}\,\pi(\mathsf{x},t) - \mathrm{div}\,\{\mu(\mathsf{x},t)(\mathrm{grad}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t) + (\mathrm{grad}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t))^T\} = \mathbf{b}(\mathsf{x},t), \tag{6.8a}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathsf{x},t) = 0, \tag{6.8b}$$

para $\mathsf{x} \in \Omega_t$ *y* $t \in [t_0, t_f]$*, sujetas a las siguientes condiciones de contorno,*

$$\mathbf{v}(\mathsf{x},t) = \mathbf{v}_D(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^D, \tag{6.8c}$$

$$\left(-\pi(\mathsf{x},t)\mathbf{I} + \mu(\mathsf{x},t)(\operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathsf{x},t) + (\operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathsf{x},t))^T)\right)\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = \mathbf{h}(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^R, \tag{6.8d}$$

para $t \in [t_0, t_f]$*, y a la condición inicial*

$$\mathbf{v}(\mathsf{x},t_0) = \mathbf{v}^0(\mathsf{x}), \quad \forall \mathsf{x} \in \bar{\Omega}_{t_0}. \tag{6.8e}$$

6.1.3. Formulación general no Euleriana

Para poder escribir el problema en una configuración no Euleriana Ω_τ con $\tau \in [t_0, t_f]$, se parte del problema de Cauchy vectorial (4.8a)-(4.8d) y de la expresión de la ley constitutiva en una configuración no Euleriana. En concreto, utilizando la primera igualdad de (2.9) con $\Psi = \mathbf{v}$, se obtiene la formulación no Euleriana en $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$ de la ley constitutiva dada en (6.1):

$$\mathbf{T}_\tau = -\pi_\tau \mathbf{I} + \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau)^T\right). \tag{6.9}$$

Utilizando las igualdades (2.25) y (2.9) se tiene,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_{\mathsf{x}}\mathbf{T}(\mathsf{x},t) = \\
&-\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left(\pi_\tau(\mathsf{y},t)\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right) \\
&+\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\mu_\tau(\mathsf{y},t)\left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t) + \mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t))^T\right)\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right],
\end{aligned} \tag{6.10}$$

con $\mathsf{y} = \mathsf{X}_t(\mathsf{x},\tau) = \mathsf{X}(\mathsf{P}(\mathsf{x},t),\tau)$, $\mathsf{x} \in \Omega_t$, $\mathsf{y} \in \Omega_\tau$, donde $\mathsf{X}(\mathsf{p},t)$ es el movimiento asociado a la velocidad $\mathbf{v}(\mathsf{x},t)$ y verifica (2.13). De esta manera la ecuación (6.8a) se escribe en configuración no Euleriana $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$ como sigue

$$\begin{aligned}
&\rho_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{v}_\tau'(\mathsf{y},t) + \frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left(\pi_\tau(\mathsf{y},t)\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right) \\
&-\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\mu_\tau(\mathsf{y},t)\left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t) + \mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t))^T\right)\det\mathbf{F}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\right] = \\
&\mathbf{b}_\tau(\mathsf{y},t).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En el caso de la restricción asociada con la incompresibilidad (6.8b), utilizando (2.9) con $\Psi = \mathbf{v}$ se obtiene su forma no Euleriana,

$$\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t) \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t) = 0. \tag{6.12}$$

Nótese que en este trabajo se asume que $\mathsf{X}(\mathsf{p},t_0)=\mathsf{p}\ \forall \mathsf{p}\in\bar{\Omega}$, y por tanto $\det\mathbf{F}(\mathsf{p},t_0)=1\ \forall\mathsf{p}\in\bar{\Omega}$. Teniendo en cuenta esta condición inicial para $\det\mathbf{F}$ y la segunda equivalencia de (6.6), se deduce

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0\Leftrightarrow\det\mathbf{F}=1\Leftrightarrow\det\mathbf{F}_\tau=1. \tag{6.13}$$

Con el objetivo de desarrollar procedimientos que son válidos en general, estas formulaciones Lagrangiana y no Euleriana de la restricción de incompresibilidad no se tienen en consideración en las formulaciones Lagrangiana y no Euleriana del problema.

Para obtener las condiciones de contorno e inicial, (6.8c)-(6.8e), en descripción no Euleriana se aplica (4.8b)-(4.8d) para el caso particular dado en (6.9), deduciéndose

$$\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t)=(\mathbf{v}_D)_\tau(\mathsf{y},t),\quad \forall(\mathsf{y},t)\in\Gamma_\tau^D\times[t_0,t_f], \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}&\left(-\pi_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{I}+\mu_\tau(\mathsf{y},t)\left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)+\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t))^T\right)\right)\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})\\&=|\mathbf{F}_\tau^{-T}(\mathsf{y},t)\mathbf{m}_\tau(\mathsf{y})|\mathbf{h}_\tau(\mathsf{y},t),\quad\forall(\mathsf{y},t)\in\Gamma_\tau^R\times[t_0,t_f],\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\mathbf{v}_\tau(\mathsf{y},t_0)=\mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\mathsf{y},\tau)),\quad\forall\mathsf{y}\in\bar{\Omega}_\tau, \tag{6.16}$$

siendo $\mathbf{m}_\tau$ el vector normal unitario a Γ_τ y dirigido hacia el exterior del dominio.

Finalmente el problema en configuración no Euleriana se puede escribir de la siguiente manera:

Problema 6.1.2. *Problema fuerte de Navier-Stokes en configuración no Euleriana, $\Omega_\tau\times[t_0,t_f]$.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_\tau:\bar{\Omega}_\tau\times[t_0,t_f]\to\mathbb{R}^d$ y $\pi_\tau:\bar{\Omega}_\tau\times[t_0,t_f]\to\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}&\rho_\tau\mathbf{v}_\tau'+\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left(\pi_\tau\det\mathbf{F}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\right)\\&-\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau}\operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\mu_\tau\left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-1}+\mathbf{F}_\tau^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau)^T\right)\det\mathbf{F}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-T}\right]=\mathbf{b}_\tau,\quad\text{en }\Omega_\tau\times[t_0,t_f],\end{aligned} \tag{6.17a}$$

$$\mathbf{F}_\tau^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau=0,\quad\text{en }\Omega_\tau\times[t_0,t_f], \tag{6.17b}$$

sujetas a las siguientes condiciones de contorno

$$\mathbf{v}_\tau=(\mathbf{v}_D)_\tau,\quad\text{en }\Gamma_\tau^D\times[t_0,t_f], \tag{6.17c}$$

$$\left(-\pi_\tau\mathbf{I}+\mu_\tau\left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau\mathbf{F}_\tau^{-1}+\mathbf{F}_\tau^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}_\tau)^T\right)\right)\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau=|\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\mathbf{h}_\tau,\quad\text{en }\Gamma_\tau^R\times[t_0,t_f], \tag{6.17d}$$

y a la condición inicial

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\mathbf{v}_\tau(\cdot,t_0)=\mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,\tau)),\quad\text{en }\bar{\Omega}_\tau. \tag{6.17e}$$

Para obtener la formulación variacional de este problema se procede de la siguiente manera:

- En primer lugar, se considera la ecuación (6.17a), se multiplica por $\det\mathbf{F}_\tau$ y por la función test $\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau)$ y se integra en Ω_τ:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \rho_\tau \mathbf{v}'_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&+ \int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_{\mathsf{y}} \left[\pi_\tau \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} - \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \right] \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&= \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y}.
\end{aligned}$$

- Se aplica la fórmula de Green adecuada y se utiliza la condición de contorno (6.17d) en la segunda integral de arriba obteniéndose,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \operatorname{div}_{\mathsf{y}} \left[\pi_\tau \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} - \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \right] \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&= \int_{\Gamma_\tau^N} \det \mathbf{F}_\tau \left(\pi_\tau \mathbf{I} - \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \right) \mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau \cdot \mathbf{z} dA_{\mathsf{y}} \\
&- \int_{\Omega_\tau} \pi_\tau \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau} \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&= - \int_{\Gamma_\tau^R} \det \mathbf{F}_\tau |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{z} dA_{\mathsf{y}} \\
&- \int_{\Omega_\tau} \pi_\tau \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} + \int_{\Omega_\tau} \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y}.
\end{aligned}$$

- Por último, se multiplica la ecuación (6.17b) por $\det \mathbf{F}_\tau$ y por la función test $q \in L^2(\Omega_\tau)$ y se integra en Ω_τ:

$$\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_\tau \mathbf{v}_\tau q d\mathsf{y} = 0.$$

Por tanto, se obtiene el siguiente problema variacional en configuración no Euleriana:

Problema 6.1.3. *Problema débil de Navier-Stokes en configuración no Euleriana, $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_\tau : [t_0, t_f] \to \mathbf{H}^1(\Omega_\tau)$ y $\pi_\tau : [t_0, t_f] \to L^2(\Omega_\tau)$ tales que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \rho_\tau \mathbf{v}'_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} - \int_{\Omega_\tau} \pi_\tau \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&+ \int_{\Omega_\tau} \mu_\tau \left(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} + \mathbf{F}_\tau^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau)^T \right) \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z} d\mathsf{y} \\
&= \int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{b}_\tau \cdot \mathbf{z} d\mathsf{y} + \int_{\Gamma_\tau^R} \det \mathbf{F}_\tau |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| \mathbf{h}_\tau \cdot \mathbf{z} dA_{\mathsf{y}}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma_\tau^D}(\Omega_\tau), \qquad (6.18a) \\
&\int_{\Omega_\tau} \det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}_\tau q d\mathsf{y} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\tau), \qquad (6.18b)
\end{aligned}$$

sujetas a la condición de contorno de Dirichlet (6.17c) *y a la condición inicial* (6.17e).

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

6.1.4. Formulación Lagrangiana

La formulación fuerte Lagrangiana o material del Problema 6.1.1 se obtiene particularizando el Problema 6.1.2 para el caso $\tau = t_0$, de modo que el dominio de referencia es $\Omega_{t_0} = \Omega$, y el cambio de variable aplicado $\mathsf{x} = \mathsf{X}(\mathsf{p}, t)$.

Problema 6.1.4. *Problema fuerte de Navier-Stokes en configuración Lagrangiana.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^d$ *y* $\pi_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{aligned} &\rho_m \dot{\mathbf{v}}_m + \frac{1}{\det \mathbf{F}} \operatorname{Div} \left(\pi_m \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T}\right) && \text{(6.19a)}\\ &- \frac{1}{\det \mathbf{F}} \operatorname{Div} \left[\mu_m \left(\nabla \mathbf{v}_m \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}(\nabla \mathbf{v}_m)^T\right) \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T}\right] = \mathbf{b}_m, \quad \text{en } \Omega \times [t_0, t_f],\\ &\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{v}_m = 0, \quad \text{en } \Omega \times [t_0, t_f], && \text{(6.19b)} \end{aligned}$$

sujetas a las siguientes condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_m = (\mathbf{v}_D)_m, \quad \text{en } \Gamma^D \times [t_0, t_f], && \text{(6.19c)}\\ &\left(-\pi_m \mathbf{I} + \mu_m \left(\nabla \mathbf{v}_m \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}(\nabla \mathbf{v}_m)^T\right)\right) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0} = |\mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0}| \mathbf{h}_m, \quad \text{en } \Gamma^R \times [t_0, t_f], && \text{(6.19d)} \end{aligned}$$

y a la condición inicial

$$\mathbf{v}_m(\cdot, t_0) = \mathbf{v}^0 \quad \text{en } \bar{\Omega}. \tag{6.19e}$$

La formulación débil del Problema 6.1.4 se obtiene particularizando, para el caso $\tau = t_0$, el procedimiento descrito para definir el Problema 6.1.3:

Problema 6.1.5. *Problema débil de Navier-Stokes en configuración Lagrangiana.*

Encontrar dos funciones $\mathbf{v}_m : [t_0, t_f] \to \mathbf{H}^1(\Omega)$ *y* $\pi_m : [t_0, t_f] \to L^2(\Omega)$ *tales que*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \det \mathbf{F} \rho_m \dot{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{z} d\mathsf{p} - \int_\Omega \pi_m \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{z} d\mathsf{p}\\ &+ \int_\Omega \mu_m \left(\nabla \mathbf{v}_m \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}(\nabla \mathbf{v}_m)^T\right) \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{z} d\mathsf{p}\\ &= \int_\Omega \det \mathbf{F} \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{z} d\mathsf{p} + \int_{\Gamma^R} \det \mathbf{F} |\mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0}| \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{z} dA_\mathsf{p}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma^D}(\Omega), && \text{(6.20a)}\\ &\int_\Omega \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \mathbf{v}_m q d\mathsf{p} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), && \text{(6.20b)} \end{aligned}$$

sujetas a la condición de contorno de Dirichlet (6.19c) *y a la condición inicial* (6.19e).

USC DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

6.2. Resolución numérica

En esta sección se aplicarán distintos esquemas de discretización temporal descritos en el Anexo A.4 a la resolución numérica del Problema 6.1.3.

6.2.1. Discretización temporal

La notación utilizada en esta parte es la considerada a lo largo del documento. Recordemos que N es el número de pasos de tiempo, $\Delta t = \dfrac{t_f - t_0}{N}$ es el tamaño del paso de tiempo y $t_n = t_0 + n\Delta t$ (para $n = 0, \ldots, N$) son los instantes de la discretización temporal. Para cualquier campo espacial o material φ, se introduce la notación,

$$\varphi^l := \varphi(\cdot, t_l),$$

y $\varphi^l_{\Delta t}$ denotará una aproximación de φ^l obtenida mediante una semi-discretización temporal.

Se considera la semi-discretización temporal del problema obtenida mediante la aplicación del método de Newmark [39] y que ha sido empleada en [25] para el Problema 6.1.5 y en [26] para el Problema 6.1.3. Este método pertenece a la familia de métodos de Runge-Kutta-Nyström y ha sido definido en el Anexo A.4 mediante la Tabla de Butcher (A.65).

A partir de la definición del método de Runge-Kutta-Nyström (A.58) y de la tabla de Butcher que define el método de Newmark (A.65), se pueden definir las siguientes relaciones para un campo $\boldsymbol{\psi}$ solución de la ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{f}\Big(t, \boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\Big) :$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^n_{\Delta t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left[(1-\gamma)\mathbf{k}_1^{n-1} + \gamma \mathbf{k}_2^{n-1}\right], \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{\psi}^n_{\Delta t} = \boldsymbol{\psi}^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t^2 \left[\frac{1-2\beta}{2}\mathbf{k}_1^{n-1} + \beta \mathbf{k}_2^{n-1}\right], \tag{6.22}$$

donde $\mathbf{k}_1^{n-1}$ y $\mathbf{k}_2^{n-1}$ se definen de la forma

$$\mathbf{k}_1^{n-1} = \mathbf{f}\Big(t_{n-1}, \boldsymbol{\psi}^{n-1}_{\Delta t}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t}\Big) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n-1}_{\Delta t}, \tag{6.23}$$

$$\mathbf{k}_2^{n-1} = \mathbf{f}\Big(t_n, \boldsymbol{\psi}^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t^2 \left[\frac{1-2\beta}{2}\mathbf{k}_1^{n-1} + \mathbf{k}_2^{n-1}\right], \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left[(1-\gamma)\mathbf{k}_1^{n-1} + \gamma \mathbf{k}_2^{n-1}\right]\Big). \tag{6.24}$$

Utilizando (6.21) y (6.22) en (6.24) resulta,

$$\mathbf{k}_2^{n-1} = \mathbf{f}\Big(t_n, \boldsymbol{\psi}^{n}_{\Delta t}, \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n}_{\Delta t}\Big) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n}_{\Delta t}. \tag{6.25}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Finalmente, gracias a las igualdades previas se llega a las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{\psi}^n_{\Delta t} = \boldsymbol{\psi}^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t^2 \left[\frac{1-2\beta}{2}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \beta \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n}_{\Delta t}\right], \tag{6.26}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^n_{\Delta t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \Delta t \left[(1-\gamma)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n-1}_{\Delta t} + \gamma \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n}_{\Delta t}\right]. \tag{6.27}$$

Estas expresiones también pueden obtenerse mediante el siguiente desarrollo de Taylor cuyas fórmulas se emplearán de manera explícita en la discretización de los problemas planteados:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^n =&\boldsymbol{\psi}^{n-1} + \Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1} + \Delta t^2 \left(\beta \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n-1}\right) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t^3) \left(\frac{1}{6} - \beta\right) + \mathcal{O}(\Delta t^4), \qquad (6.28)\\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^n =& \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right)^{n-1} + \Delta t \left(\gamma \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n} + (1-\gamma) \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)^{n-1}\right) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t^2) \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \qquad (6.29)\end{aligned}$$

Si se aplican estas fórmulas a $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}_\tau$ se obtienen las siguientes expresiones para el desplazamiento y la velocidad:

$$\mathbf{u}_\tau^n = \mathbf{u}_\tau^{n-1} + \Delta t \mathbf{v}_\tau^{n-1} + \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{a}_\tau^n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \mathbf{a}_\tau^{n-1}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \left(\frac{1}{6} - \beta\right) + \mathcal{O}(\Delta t^4), \qquad (6.30)$$

$$\mathbf{v}_\tau^n = \mathbf{v}_\tau^{n-1} + \Delta t \left(\gamma \mathbf{a}_\tau^n + (1-\gamma) \mathbf{a}_\tau^{n-1}\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \qquad (6.31)$$

A partir de (6.31), si $\gamma \neq 0$ se puede obtener la siguiente expresión para la aceleración $\mathbf{a}_\tau$:

$$\mathbf{a}_\tau^n = \frac{1}{\Delta t \gamma} (\mathbf{v}_\tau^n - \mathbf{v}_\tau^{n-1}) - \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \mathbf{a}_\tau^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t) \left(\frac{1}{2} - \gamma\right) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \qquad (6.32)$$

A continuación se puede plantear la semidiscretización temporal del Problema 6.1.3 mediante las fórmulas (6.30) y (6.31), y obtener el esquema general de Newmark en coordenadas no Eulerianas en el que se contempla la posibilidad de que τ pueda variar con n, (por simplicidad, se tomará siempre $\tau_0 = t_0$):

Problema 6.2.1. *Esquema general de Newmark para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas, $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^N$ con $\tau_n < t_n \ \forall n \geq 1$.*

Encontrar cuatro sucesiones de funciones, $\{\mathbf{a}_{\tau_n,\Delta t}^n\}_{n=0}^N$, $\{\mathbf{v}_{\tau_n,\Delta t}^n\}_{n=0}^N$, $\{\mathbf{u}_{\tau_n,\Delta t}^n\}_{n=0}^N$ y $\{\pi_{\tau_n,\Delta t}^n\}_{n=1}^N$, tales

que

$$\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y} - \int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}$$
$$+\int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\left[\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-1}+(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t})^T\right]\dots$$
$$\dots\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y} = \int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{b}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y}$$
$$+\int_{\Gamma^R_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}|(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\mathbf{m}_{\tau_n}|\mathbf{h}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}dA_{\mathsf{y}},\quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1_{\Gamma^D_{\tau_n}}(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.33a}$$

$$\int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}qd\mathsf{y}=0,\quad\forall q\in L^2(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.33b}$$

$$\int_{\Omega_{\tau_n}}\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}d\mathsf{y}=\int_{\Omega_{\tau_n}}\left[\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}+\Delta t\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}+\Delta t^2\left(\beta\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)\right]\tilde{\mathbf{u}}d\mathsf{y},\quad\forall\tilde{\mathbf{u}}\in\mathbf{H}^1(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.33c}$$

$$\int_{\Omega_{\tau_n}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}\tilde{\mathbf{v}}d\mathsf{y}=\int_{\Omega_{\tau_n}}\left[\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}+\Delta t\left(\gamma\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+(1-\gamma)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)\right]\tilde{\mathbf{v}}d\mathsf{y},\quad\forall\tilde{\mathbf{v}}\in\mathbf{H}^1(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.33d}$$

para $1\le n\le N$*, con las condiciones de contorno de Dirichlet e iniciales siguientes:*

$$\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}=\mathbf{v}^n_D\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t},\quad en\ \Gamma^D_{\tau_n},\quad\forall n\in\{1,\dots,N\}, \tag{6.33e}$$
$$\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{u}^0_{t_0}=\mathbf{u}^0=\mathbf{0},\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.33f}$$
$$\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{v}^0,\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.33g}$$
$$\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{a}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{a}^0,\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.33h}$$

y donde las aproximaciones del movimiento $\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *y del gradiente de deformaciones* $\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *se definen de la forma,*

$$\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}):=\mathsf{y}+\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}),\quad\mathsf{y}\in\Omega_{\tau_n}, \tag{6.33i}$$
$$\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}:=\mathbf{I}+\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t},\quad en\ \Omega_{\tau_n}, \tag{6.33j}$$

para $1\le n\le N$*.*

Observación 6.2.2. *Es posible escribir el problema utilizando únicamente las ecuaciones* (6.33a) *y* (6.33b) *con las condiciones* (6.33e)-(6.33h)*, y sustituyendo en estas y en* (6.33i)-(6.33j) *la velocidad y el desplazamiento* $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *por las aproximaciones que se obtienen de* (6.31) *y* (6.30)*, respectivamente. De esta manera el problema se limita a dos ecuaciones no lineales para las incógnitas* $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *y* $\pi^n_{\tau_n,\Delta t}$ *con condiciones de contorno de Dirichlet e iniciales. Para la resolución de estos problemas se va a emplear la plataforma de resolución de ecuaciones en derivadas parciales FEniCS [15], en la que el tratamiento de la composición de funciones para el cambio de variables espaciales se realiza a partir de una forma explícita del desplazamiento* $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}$*. Este tratamiento de la composición motiva el empleo de cuatro ecuaciones asociadas a los campos* $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}$*,* $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}$*,* $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *y* $\pi^n_{\tau_n,\Delta t}$*, en vez de la formulación con dos incógnitas.*

Esta sería la semidiscretización temporal general, mediante el método de Newmark, del problema débil 6.1.3. En general, de esta semidiscretización resulta un problema no lineal que, para cada paso temporal, implica la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales. Para el valor del parámetro $\beta = 0$, se obtiene un problema lineal. En particular, se pueden reescribir las ecuaciones mediante el empleo de la fórmula (6.32) en el Problema 6.1.3:

Problema 6.2.3. *Esquema de Newmark lineal para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas,* $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^{N}$ *con* $\tau_n < t_n \ \forall n \geq 1$.

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=0}^{N}$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=1}^{N}$ *tales que,*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t\gamma}(\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t} - \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}) - \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)\cdot \mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&- \int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+ \int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\left[\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-1} + (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t})^T\right]\ldots\\
&\ldots \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y} = \int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{b}^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot \mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+ \int_{\Gamma^R_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}|(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\mathbf{m}_{\tau_n}|\mathbf{h}^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot \mathbf{z}dA_{\mathsf{y}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma^D_{\tau_n}}(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.34a)\\
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}q d\mathsf{y} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.34b)
\end{aligned}$$

para $1 \leq n \leq N$*, con las condiciones de contorno de Dirichlet y las condiciones iniciales siguientes:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t} &= \mathbf{v}^n_D \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}, \quad \text{en } \Gamma^D_{\tau_n}, \quad \forall n \in \{1,\ldots,N\}, && (6.34c)\\
\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t} &= \mathbf{u}^0_{t_0,\Delta t} = \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \quad \text{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, && (6.34d)\\
\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t} &= \mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0)) = \mathbf{v}^0, \quad \text{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, && (6.34e)\\
\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t} &= \mathbf{a}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0)) = \mathbf{a}^0, \quad \text{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, && (6.34f)
\end{aligned}$$

donde las aproximaciones del desplazamiento, del movimiento y del gradiente de deformaciones en el instante t_n*, para* $1 \leq n \leq N$*, se obtienen mediante las siguientes fórmulas explícitas obtenidas al sustituir* $\beta = 0$ *en* (6.30)*:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t} &= \mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} + \Delta t\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} \quad \text{en } \Omega_{\tau_n}, && (6.34g)\\
\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}) &= \mathsf{y} + \mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}), \quad \mathsf{y} \in \Omega_{\tau_n}, && (6.34h)\\
\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t} &= \mathbf{I} + \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t} \quad \text{en } \Omega_{\tau_n}, && (6.34i)
\end{aligned}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

La actualización de la aproximación de la aceleración para el instante t_n*,* $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}$*, se obtiene aplicando la fórmula* (6.32)*:*

$$\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t} = \frac{1}{\Delta t\gamma}(\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t} - \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}) - \left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} \quad \text{en } \Omega_{\tau_n}. \qquad (6.34j)$$

Empleando las fórmulas de Newmark (6.30)-(6.32), se puede reescribir el problema anterior en función de la aceleración y la presión. En concreto,

Problema 6.2.4. *Esquema de Newmark lineal para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas, $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^{N}$ con $\tau_n < t_n$ $\forall n \geq 1$.*

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=0}^{N}$ y $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=1}^{N}$ tales que,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y} - \int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+\int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\Big[\left(\Delta t\left(\gamma\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+(1-\gamma)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)+\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-1}\ldots\\
&\cdots+(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\left(\Delta t\left(\gamma\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+(1-\gamma)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)+\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)^{T}\Big]\ldots\\
&\ldots\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}=\int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{b}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+\int_{\Gamma^R_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}|(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\mathbf{m}_{\tau_n}|\mathbf{h}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}dA_{\mathsf{y}}\quad\forall\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1_{\Gamma^D_{\tau_n}}(\Omega_{\tau_n}),
\end{aligned}\tag{6.35a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\left(\Delta t\left(\gamma\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+(1-\gamma)\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)+\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right)q d\mathsf{y}=0,\\
&\quad\forall q\in L^2(\Omega_{\tau_n}),
\end{aligned}\tag{6.35b}$$

para $1\leq n\leq N$, con las condiciones de contorno de Dirichlet y las condiciones iniciales siguientes:

$$\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}=\frac{1}{\Delta t\gamma}(\mathbf{v}^n_D\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}-\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t})-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t},\quad en\ \Gamma^D_{\tau_n},\quad\forall n\in\{1,\ldots,N\},\tag{6.35c}$$

$$\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{u}^0_{t_0,\Delta t}=\mathbf{u}^0=\mathbf{0},\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,\tag{6.35d}$$

$$\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{v}^0,\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,\tag{6.35e}$$

$$\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{a}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{a}^0,\quad en\ \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,\tag{6.35f}$$

donde las aproximaciones del desplazamiento, del movimiento y del gradiente de deformaciones en el instante t_n, para $1\leq n\leq N$, se obtienen mediante las fórmulas explícitas (6.34g)- (6.34i)*, y la actualización de la aproximación de la velocidad para el instante t_n, $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}$, se obtiene aplicando la fórmula* (6.31)*:*

$$\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}=\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}+\Delta t\left(\gamma\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}+(1-\gamma)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right),\quad en\ \Omega_{\tau_n}.\tag{6.35g}$$

Nótese que los Problemas 6.2.3 y 6.2.4 son totalmente equivalentes. El método de mayor orden de esta familia de métodos se obtiene eligiendo $\gamma=\frac{1}{2}$. En concreto, tomando $(\gamma,\beta)=(1/2,0)$ en (6.30)-(6.31), se deducen las siguientes fórmulas:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\mathbf{v}^n_\tau=\frac{\mathbf{u}^{n+1}_\tau-\mathbf{u}^{n-1}_\tau}{2\Delta t}+O(\Delta t^2),\tag{6.36}$$

$$\mathbf{a}^n_\tau=\frac{\mathbf{u}^{n+1}_\tau-2\mathbf{u}^n_\tau+\mathbf{u}^{n-1}_\tau}{\Delta t^2}+O(\Delta t^2).\tag{6.37}$$

Por tanto, para esta elección de los parámetros, $(\gamma,\beta)=(1/2,0)$, el método de Newmark para el problema de Navier-Stokes admite la siguiente formulación en función del desplazamiento y de la presión:

Problema 6.2.5. *Esquema de Newmark lineal de segundo orden para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas.*

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=0}^N$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=1}^N$ *tales que,*

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\frac{\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-2\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}+\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{\Delta t^2}\cdot \mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&-\int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+\int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n\circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\left[\frac{\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{2\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-1}\cdots\right.\\
&\left.\cdots+(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\left(\frac{\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{2\Delta t}\right)^T\right]\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&=\int_{\Omega_{\tau_n}}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}\mathbf{b}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}d\mathsf{y}\\
&+\int_{\Gamma^R_{\tau_n}}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}|(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\mathbf{m}_{\tau_n}|\mathbf{h}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}\cdot\mathbf{z}dA_{\mathsf{y}},\quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1_{\Gamma^D_{\tau_n}}(\Omega_{\tau_n}),
\end{aligned}
\tag{6.38a}
$$

$$
\int_{\Omega_{\tau_n}}\det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t})^{-T}\cdot\frac{\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{2\Delta t}q d\mathsf{y}=0,\quad \forall q\in L^2(\Omega_{\tau_n}),
\tag{6.38b}
$$

para $1\le n\le N$*, con las condiciones de contorno de Dirichlet y las condiciones iniciales siguientes:*

$$
\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}=2\Delta t\mathbf{v}^n_D\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}+\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t},\quad \text{en } \Gamma^D_{\tau_n},\quad \forall n\in\{1,\dots,N\},
\tag{6.38c}
$$

$$
\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{u}^0_{t_0,\Delta t}=\mathbf{u}^0=\mathbf{0},\quad \text{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,
\tag{6.38d}
$$

$$
\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{v}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{v}^0,\quad \text{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,
\tag{6.38e}
$$

$$
\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t}=\mathbf{a}^0(\mathsf{P}(\cdot,t_0))=\mathbf{a}^0,\quad \text{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,
\tag{6.38f}
$$

$$
\mathbf{u}^1_{\tau_0,\Delta t}=\Delta t\mathbf{v}^0+\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{a}^0,\quad \text{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega,
\tag{6.38g}
$$

$$
\tag{6.38h}
$$

donde las aproximaciones del movimiento y del gradiente de deformaciones en el instante t_n*, para* $1\le n\le N$*, se obtienen mediante las fórmulas explícitas* (6.34h) *y* (6.34i)*, respectivamente. Las aproximaciones de la velocidad y la aceleración se actualizan aplicando las fórmulas* (6.36) *y* (6.37)*, respectivamente:*

$$
\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}=\frac{\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{2\Delta t},
\tag{6.38i}
$$

$$
\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}=\frac{\mathbf{u}^{n+1}_{\tau_n,\Delta t}-2\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}+\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}}{\Delta t^2},
\tag{6.38j}
$$

para $1\le n\le N$*.*

Tras resolver el Problema 6.2.3 para el instante t_n, y conocida $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}$ mediante la ecuación (6.34j), es posible obtener una nueva actualización del desplazamiento $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}$ empleando la fórmula (6.30) para

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

un β cualquiera y utilizar esta aproximación en el instante siguiente. Este procedimiento define un nuevo esquema que se puede obtener modificando en el Problema 6.2.3 la actualización del desplazamiento:

Problema 6.2.6. *Esquema de Newmark lineal modificado para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas,* $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^N$ *con* $\tau_n < t_n \ \forall n \geq 1$.

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=0}^N$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t}\}_{n=1}^N$ *que satisfagan las ecuaciones, condiciones de contorno y condiciones iniciales* (6.34a)-(6.34f)*, donde las aproximaciones del movimiento y del gradiente de deformaciones se obtienen mediante las siguientes fórmulas explícitas:*

$$\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}) := \mathsf{y} + \mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}) + \Delta t \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}) + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}(\mathsf{y}), \quad \mathsf{y} \in \Omega_{\tau_n}, \tag{6.39a}$$

$$\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t} := \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t}, \qquad \text{en } \Omega_{\tau_n}, \tag{6.39b}$$

para $1 \leq n \leq N$*. El valor de* $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *se calcula como en* (6.34j) *y el de* $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t}$ *se actualiza con la fórmula* (6.30) *para un* β *cualquiera:*

$$\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t} = \mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} + \Delta t \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t} + \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\right) \qquad \text{en } \Omega_{\tau_n}, \tag{6.39c}$$

para $1 \leq n \leq N$.

Observación 6.2.7. *Empleando estas discretizaciones temporales se ve necesario obtener una aproximación de la aceleración en el instante inicial,* $\mathbf{a}^0$*. Para calcular la aceleración inicial se evalúa* (6.17a) *en el instante* $t = t_0$ *para* $\tau = t_0$ *y se deriva la ecuación* (6.17b) *con respecto al tiempo:*

$$\rho^0 \mathbf{a}^0 + \nabla \pi^0 = \operatorname{Div}\left(\mu^0\left(\nabla \mathbf{v}^0 + (\nabla \mathbf{v}^0)^T\right)\right) + \mathbf{b}^0, \tag{6.40}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{a}^0 = \nabla \mathbf{v}^0 \cdot (\nabla \mathbf{v}^0)^T, \tag{6.41}$$

donde $\mathbf{v}^0$ *es conocida y las incógnitas del problema son* $\mathbf{a}^0$ *y* π^0*. Para obtener estas ecuaciones se emplean las siguientes igualdades:*

$$\mathbf{F}^0_0 = \mathbf{I}, \tag{6.42}$$

$$(\mathbf{F}^{-T})^{\cdot} = -(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T_m \mathbf{F}^{-T} = -(\nabla \mathbf{v}_m \mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-T} = -\mathbf{F}^{-T}(\nabla \mathbf{v}_m)^T \mathbf{F}^{-T}. \tag{6.43}$$

Las ecuaciones (6.40) *y* (6.41) *definen un problema de tipo Darcy (ver [40]). Su formulación variacional se obtiene multiplicando la ecuación* (6.40) *por una función test* $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\Gamma^D}(\operatorname{div}, \Omega)$*, integrando en* Ω*, aplicando la fórmula de Green en el término de la presión y utilizando la condición de contorno de Neumann* (6.17d) *en el instante* $t = t_0$ *para* $\tau = t_0$*. Del mismo modo, se multiplica la ecuación* (6.41) *por una función test* $q \in L^2(\Omega)$ *y se integra en* Ω*:*

$$\int_\Omega \rho^0 \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{w} d\mathsf{p} - \int_\Omega \pi^0 \operatorname{Div} \mathbf{w} d\mathsf{p} = \int_\Omega \operatorname{Div}\left[\mu^0\left(\nabla \mathbf{v}^0 + (\nabla \mathbf{v}^0)^T\right)\right] \cdot \mathbf{w} d\mathsf{p}$$
$$- \int_{\Gamma^R} \left[\mu^0\left(\nabla \mathbf{v}^0 + (\nabla \mathbf{v}^0)^T\right)\mathbf{m}_{t_0} - \mathbf{h}^0\right] \cdot \mathbf{m}_{t_0} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{m}_{t_0} \, dA_{\mathsf{p}} + \int_\Omega \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{w} d\mathsf{p}, \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{\Gamma^D}(\operatorname{div}, \Omega), \tag{6.44a}$$

$$\int_\Omega \operatorname{Div} \mathbf{a}^0 q d\mathsf{p} = \int_\Omega \nabla \mathbf{v}^0 \cdot (\nabla \mathbf{v}^0)^T q d\mathsf{p}, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \tag{6.44b}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En las fronteras de tipo Dirichlet del problema se aplica la siguiente condición de contorno:

$$\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{m}_{t_0} = (\dot{\mathbf{v}}_D)^0 \cdot \mathbf{m}_{t_0}, \quad \text{en } \Gamma^D. \tag{6.44c}$$

Observación 6.2.8. *El método de Newmark para $(\gamma, \beta) = (1/2, 0)$ ha sido empleado en [8] para la semidicretización temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes, donde se utiliza la formulación en función del desplazamiento y de la presión dada en el Problema 6.2.5, pero aplicando una técnica distinta para obtener las condiciones iniciales y de contorno. Concretamente se plantea el problema en la configuración de referencia $\Omega_{t_0-\frac{\Delta t}{2}}$ y se emplean fórmulas de tercer orden para aproximar $\mathbf{u}^{\frac{1}{2}}$ y las condiciones de contorno.*

Nótese también que para $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/4)$ se obtiene el método de Crank-Nicholson.

6.2.2. Discretización espacial

En esta sección se aborda la discretización espacial del Problema 6.1.3 mediante el método de los elementos finitos. Esta técnica de discretización se aplica a los problemas semidiscretizados en tiempo 6.2.1, 6.2.3 y 6.2.6. Para un campo material o espacial φ, se denotará por $\varphi^l_{\Delta t,h}$ a una aproximación de φ^l obtenida mediante un esquema de discretización completo (espacial y temporal).

Sea Ω_τ un dominio acotado en $\mathbb{R}^d$ con frontera poligonal a trozos. Se considera una familia de particiones de $\bar{\Omega}_\tau$ denotada por $\mathcal{T}_{\tau,h}$ consistente en elementos simpliciales (triángulos en 2D, tetraedros en 3D) K, de diámetro $\leq h$. Se asume que estas particiones son compatibles con la división de la frontera de Ω_τ en Γ^D_τ y Γ^R_τ. Se propone una discretización espacial mediante el empleo de espacios de elementos finitos $\mathbf{X}^{p_1}_h(\Omega_\tau)$ para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, y $V^{p_2}_h(\Omega_\tau)$ para la presión, donde los números enteros positivos p_1 y p_2 representan el "orden de aproximación" en el siguiente sentido: Existen dos operadores de interpolación $\boldsymbol{\gamma}_{\tau,h} : (C^0(\bar{\Omega}_\tau))^d \to \mathbf{X}^{p_1}_h(\Omega_\tau)$ y $\zeta_{\tau,h} : C^0(\bar{\Omega}_\tau) \to V^{p_2}_h(\Omega_\tau)$ que satisfacen las siguientes propiedades:

$$||\boldsymbol{\gamma}_{\tau,h}(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\varphi}||_{s,\Omega_\tau} \leq Q_1 h^{r-s} ||\boldsymbol{\varphi}||_{r,\Omega_\tau}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (C^0(\bar{\Omega}_\tau))^d \cap \mathbf{H}^r(\Omega_\tau), \quad 0 \leq r \leq p_1 + 1, \tag{6.45}$$

$$||\zeta_{\tau,h}(\varphi) - \varphi||_{s,\Omega_\tau} \leq Q_2 h^{r-s} ||\varphi||_{r,\Omega_\tau}, \quad \forall \varphi \in C^0(\bar{\Omega}_\tau) \cap H^r(\Omega_\tau), \quad 0 \leq r \leq p_2 + 1, \tag{6.46}$$

donde $s = 0, 1$, Q_1 y Q_2 son dos constantes positivas independientes de h, $\mathbf{H}^0(\Omega_\tau) := (L^2(\Omega_\tau))^d$, $H^0(\Omega_\tau) := L^2(\Omega_\tau)$ y $||\cdot||_{r,\Omega_\tau}$ es la norma usual en $\mathbf{H}^r(\Omega_\tau)$ y $H^r(\Omega_\tau)$. Se define el siguiente espacio:

$$\mathbf{X}^{p_1}_{0h}(\Omega_\tau) = \left\{ \mathbf{z}_h \in \mathbf{X}^{p_1}_h(\Omega_\tau) : \mathbf{z}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma^D_\tau \right\}. \tag{6.47}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

Para obtener una discretización espacial de los Problemas 6.2.1, 6.2.3 y 6.2.6 se emplea el espacio $\mathbf{X}^{p_1}_h(\Omega_\tau)$ para aproximar el espacio funcional asociado al desplazamiento, la velocidad y la aceleración, y el espacio $V^{p_2}_h(\Omega_\tau)$ para aproximar el espacio funcional asociado a la presión. De esta manera la discretización completa del Problema 6.2.1 se define como sigue:

Problema 6.2.9. *Esquema general de Newmark-Galerkin para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas, $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^N$ con $\tau_n < t_n$ $\forall n \geq 1$.*

Encontrar cuatro sucesiones de funciones $\{\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=0}^N \in \prod_{n=0}^N \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n})$, $\{\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=0}^N \in \prod_{n=0}^N \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n})$, $\{\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=0}^N \in \prod_{n=0}^N \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n})$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=1}^N \in \prod_{n=1}^N V_h^{p_2}(\Omega_{\tau_n})$ *tales que,*

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \cdot \mathbf{z}_h d\mathsf{y} - \int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t,h} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z}_h d\mathsf{y} \\
&+ \int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \left[\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-1} + (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T} (\operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^T \right] \dots \\
&\dots \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{z}_h d\mathsf{y} \\
&= \int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \mathbf{b}^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \cdot \mathbf{z}_h d\mathsf{y} + \int_{\Gamma^R_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} |(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T} \mathbf{m}_{\tau_n}| \mathbf{h}^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \cdot \mathbf{z}_h dA_{\mathsf{y}}, \\
&\qquad \forall \mathbf{z}_h \in \mathbf{X}^{p_1}_{0h}(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.48a)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h} (\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T} \cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} q_h d\mathsf{y} = 0 \quad \forall q_h \in V_h^{p_2}(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.48b)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{\tau_n}} \mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \tilde{\mathbf{u}}_h d\mathsf{y} = \int_{\Omega_{\tau_n}} \left[\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} + \Delta t \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} + \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} \right) \right] \tilde{\mathbf{u}}_h d\mathsf{y} \\
&\qquad \forall \tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.48c)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_{\tau_n}} \mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} \tilde{\mathbf{v}}_h d\mathsf{y} = \int_{\Omega_{\tau_n}} \left[\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} + \Delta t \left(\gamma \mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} + (1-\gamma) \mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} \right) \right] \tilde{\mathbf{v}}_h d\mathsf{y} \quad \forall \tilde{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n}), \qquad (6.48d)$$

para $1 \le n \le N$*, con las condiciones de contorno de Dirichlet y las condiciones iniciales,*

$$\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_D \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}, \quad \textit{para todo nudo en } \Gamma^D_{\tau_n}, \qquad (6.48e)$$

$$\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \mathbf{0}, \quad \textit{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, \qquad (6.48f)$$

$$\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0), \quad \textit{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, \qquad (6.48g)$$

$$\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0), \quad \textit{en } \bar{\Omega}_{\tau_0} = \bar{\Omega}, \qquad (6.48h)$$

y donde las aproximaciones del movimiento $\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *y del gradiente de deformaciones* $\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *se definen de la forma,*

$$\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}) := \mathsf{y} + \mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}), \quad \mathsf{y} \in \Omega_{\tau_n}, \qquad (6.48i)$$

$$\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K} := \mathbf{I} + \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K}, \quad K \in \mathcal{T}_{\tau_n,h}, \qquad (6.48j)$$

para $1 \le n \le N$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

En el caso del Problema 6.2.3, su discretización completa es la siguiente:

Problema 6.2.10. *Esquema de Newmark-Galerkin lineal para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas,* $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^N$ *con* $\tau_n < t_n \ \forall n \ge 1$.

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=0}^N \in \prod_{n=0}^N \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n})$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=1}^N \in \prod_{n=1}^N V_h^{p_2}(\Omega_{\tau_n})$ *tales que*

$$\int_{\Omega_{\tau_n}} \det \mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\rho^n \circ \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\left(\frac{1}{\Delta t\gamma}(\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}-\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h})-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}\right)\cdot\mathbf{z}_h d\mathsf{y}$$
$$-\int_{\Omega_{\tau_n}} \pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T}\cdot \operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}_h d\mathsf{y}$$
$$+\int_{\Omega_{\tau_n}} \mu^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\left[\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t},h)^{-1}+(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T}(\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^T\right]\ldots$$
$$\ldots\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{z}_h d\mathsf{y}$$
$$=\int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\mathbf{b}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\cdot\mathbf{z}_h d\mathsf{y}$$
$$+\int_{\Gamma^R_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}|(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T}\mathbf{m}_{\tau_n}|\mathbf{h}^n\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\cdot\mathbf{z}_h dA_{\mathsf{y}},\quad \forall\mathbf{z}_h\in\mathbf{X}^{p_1}_{0h}(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.49a}$$
$$\int_{\Omega_{\tau_n}}\det\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h})^{-T}\cdot\operatorname{grad}_{\tau_n,\Delta t,h}\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}q_h d\mathsf{y}=0,\quad \forall q_h\in V^{p_2}_h(\Omega_{\tau_n}), \tag{6.49b}$$

para $1\le n\le N$*, con las condiciones de contorno de Dirichlet y las condiciones iniciales,*

$$\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}=\mathbf{v}^n_D\circ\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h},\quad \textit{para todo nudo en } \Gamma^D_{\tau_n}, \tag{6.49c}$$
$$\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t,h}=\mathbf{0},\quad \textit{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.49d}$$
$$\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t,h}=\boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0),\quad \textit{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.49e}$$
$$\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t,h}=\boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0),\quad \textit{en } \bar\Omega_{\tau_0}=\bar\Omega, \tag{6.49f}$$

y donde las aproximaciones del desplazamiento $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$*, del movimiento* $\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *y del gradiente de deformaciones* $\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *se definen de la forma,*

$$\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}=\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}+\Delta t\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}+\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}\quad \textit{en } \Omega_{\tau_n}, \tag{6.49g}$$
$$\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y})=\mathsf{y}+\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}),\quad \mathsf{y}\in\Omega_{\tau_n}, \tag{6.49h}$$
$$\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K}=\mathbf{I}+\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K},\quad K\in\mathcal{T}_{\tau_n,h}, \tag{6.49i}$$

para $1\le n\le N$*. La actualización de la aceleración para el instante* t_n *se obtiene mediante la fórmula* (6.34j)*:*

$$\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}=\frac{1}{\Delta t\gamma}(\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}-\mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h})-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t}\quad \textit{en } \Omega_{\tau_n}, \tag{6.49j}$$

siendo $1\le n\le N$*.*

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En el caso del Problema 6.2.6, su discretización completa se puede obtener modificando en el Problema 6.2.10 la actualización para $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$:

Problema 6.2.11. *Esquema de Newmark-Galerkin lineal modificado para el problema de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas,* $\{\Omega_{\tau_n} \times \{t_n\}\}_{n=0}^{N}$ *con* $\tau_n < t_n \ \forall n \geq 1$.

Encontrar dos sucesiones de funciones $\{\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=0}^{N} \in \prod_{n=0}^{N} \mathbf{X}_h^{p_1}(\Omega_{\tau_n})$ *y* $\{\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}\}_{n=1}^{N} \in \prod_{n=1}^{N} V_h^{p_2}(\Omega_{\tau_n})$ *que satisfagan las ecuaciones, condiciones de contorno y condiciones iniciales* (6.49a)-(6.49f)*, donde las aproximaciones del movimiento y del gradiente de deformaciones se definen de la forma,*

$$\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}) := \mathsf{y} + \mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}) + \Delta t \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}) + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h}(\mathsf{y}), \quad \mathsf{y} \in \Omega_{\tau_n}, \tag{6.50a}$$

$$\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K} := \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} \mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h|K}, \quad K \in \mathcal{T}_{\tau_n,h}. \tag{6.50b}$$

El valor de $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *se calcula como en* (6.49j) *y el de* $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ *se actualiza con la fórmula* (6.30) *para un* β *cualquiera:*

$$\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} + \Delta t \mathbf{v}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} + \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} \right), \quad \text{en } \Omega_{\tau_n}, \tag{6.50c}$$

para $1 \leq n \leq N$.

Para la resolución del Problema 6.2.9 en el caso de elegir $\tau_n = t_{n-1} \ \forall n$ (reinicialización en cada paso de tiempo), se siguen los pasos definidos en el Algoritmo 6.1. En el caso de elegir $\tau_n = t_0 \ \forall n$, método Lagrangiano, se siguen los pasos definidos en el Algoritmo 6.2.

Algoritmo 6.1 Resolución del Problema 6.2.9 para $\{\tau_n\}_{n=1}^{N} = \{t_{n-1}\}_{n=1}^{N}$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$ (obtenidas aplicando las ecuaciones (6.48f)-(6.48h) donde se tiene en cuenta que $\tau_0 = t_0$), unos valores para las constantes del método de Newmark β y γ y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^{n-1}_{t_{n-1},\Delta t,h} = \mathbf{0}$, para cada instante t_n, $n \in [1, N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema de ecuaciones (6.48a)-(6.48d), sujeto a la condición de contorno (6.48e) y a las igualdades (6.48i)-(6.48j), para obtener $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$, $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}$.
2. Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{\tau_{n+1}} = \bar{\Omega}_{t_n}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración en el instante $\tau_n = t_{n-1}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en el punto anterior $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$.
3. Reinicializar las variables $\mathbf{v}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$. Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_n,\Delta t,h} = \mathbf{0}$.

Algoritmo 6.2 Resolución del Problema 6.2.9 para $\tau_n = t_0 \ \forall n$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$, unos valores para las constantes del método de Newmark β y γ, y un valor de tolerancia $\varepsilon_F \in [0,1]$, para cada instante t_n, $n \in [1,N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema de ecuaciones (6.48a)-(6.48d), sujeto a la condición de contorno (6.48e) y a las igualdades (6.48i)-(6.48j), para obtener $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^n_{m,\Delta t,h}$, $\mathbf{a}^n_{m,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{m,\Delta t,h}$.
2. Si $min_{K\in\mathcal{T}_{t_0,h}} \det\left(\mathbf{F}^n_{\Delta t,h|K}\right) \leq \varepsilon_F$, interrumpir el bucle en pasos de tiempo para reinicializar el problema a la configuración de referencia $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ eligiendo $n_0 = n$:
   - Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración inicial $\bar{\Omega}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en el punto anterior $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$.
   - Reinicializar las variables $\mathbf{v}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{v}^{n_0}_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{a}^{n_0}_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^{n_0}_{\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ (calculados en el punto anterior). Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{0}$ y retomar el bucle en pasos de tiempo tomando $\tau_n = t_{n_0} \ \forall n > n_0$.

Para la resolución del Problema 6.2.10 en el caso de elegir $\tau_n = t_{n-1} \ \forall n$ (reinicialización en cada paso de tiempo) se siguen los pasos definidos en el Algoritmo 6.3. En el caso de elegir $\tau_n = t_0 \ \forall n$, método Lagrangiano, se siguen los pasos descritos en el Algoritmo 6.4.

Algoritmo 6.3 Resolución del Problema 6.2.10 para $\{\tau_n\}_{n=1}^N = \{t_{n-1}\}_{n=1}^N$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$ (donde se tiene en cuenta que $\tau_0 = t_0$), un valor para las constante del método de Newmark γ y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^{n-1}_{t_{n-1},\Delta t,h} = \mathbf{0}$, para cada instante t_n, $n \in [1,N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Obtener la aproximación $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ mediante la fórmula explícita (6.49g).
2. Resolver el sistema de ecuaciones (6.49a)-(6.49b), sujeto a la condición de contorno (6.49c) y a las igualdades (6.49h)-(6.49i), para obtener $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}$.
3. Obtener $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.49j).
4. Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{\tau_{n+1}} = \bar{\Omega}_{t_n}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración en el instante $\tau_n = t_{n-1}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en el primer punto $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$.
5. Reinicializar las variables $\mathbf{v}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$. Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_n,\Delta t,h} = \mathbf{0}$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Algoritmo 6.4 Resolución del Problema 6.2.10 para $\tau_n = t_0\ \forall n$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$, un valor para la constante del método de Newmark γ, y un valor de tolerancia $\varepsilon_F \in [0,1]$, para cada instante t_n, $n \in [1,N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Obtener la aproximación $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$ mediante la fórmula explícita (6.49g).
2. Resolver el sistema de ecuaciones (6.49a)-(6.49b), sujeto a la condición de contorno (6.49c) y a las igualdades (6.49h)-(6.49i), para obtener $\mathbf{v}^n_{m,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{m,\Delta t,h}$.
3. Obtener $\mathbf{a}^n_{m,\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.49j).
4. Si $min_{K\in\mathcal{T}_{t_0,h}} \det\left(\mathbf{F}^n_{\Delta t,h|K}\right) \leq \varepsilon_F$, interrumpir el bucle en pasos de tiempo para reinicializar el problema a la configuración de referencia $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ eligiendo $n_0 = n$:
   - Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración inicial $\bar{\Omega}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en el primer punto $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$.
   - Reinicializar las variables $\mathbf{v}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{v}^{n_0}_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{a}^{n_0}_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^{n_0}_{\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ (calculados en los pasos 1 y 2). Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{0}$ y retomar el bucle en pasos de tiempo tomando $\tau_n = t_{n_0}\ \forall n > n_0$.

Para la resolución del Problema 6.2.11, en el caso de $\tau_n = t_{n-1}\ \forall n$ (reinicialización en cada paso de tiempo), se emplea el Algoritmo 6.5 que es una modificación del Algoritmo 6.3 obtenida considerando una nueva actualización de $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$. Para resolver la descripción Lagrangiana de este problema, es decir, el que se obtiene tomando $\tau_n = t_0\ \forall n$ en el Problema 6.2.11, se emplea el Algoritmo 6.6.

Algoritmo 6.5 Resolución del Problema 6.2.11 para $\{\tau_n\}_{n=1}^N = \{t_{n-1}\}_{n=1}^N$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{\tau_0,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$ (donde se tiene en cuenta que $\tau_0 = t_0$), unos valores para las constantes del método de Newmark β y γ y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^{n-1}_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^{n-1}_{t_{n-1},\Delta t,h} = \mathbf{0}$, para cada instante t_n, $n \in [1,N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Obtener las aproximaciones $\mathsf{X}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ y $\mathbf{F}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ mediante las fórmulas explícitas (6.50a)-(6.50b).
2. Resolver el sistema de ecuaciones (6.49a)-(6.49b), sujeto a las condición de contorno (6.49c), para obtener $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{\tau_n,\Delta t,h}$.
3. Obtener $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.49j).
4. Actualizar el desplazamiento $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.50c), empleando el parámetro β.
5. Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{\tau_{n+1}} = \bar{\Omega}_{t_n}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración en el instante $\tau_n = t_{n-1}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en el punto anterior $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$.
6. Reinicializar las variables $\mathbf{v}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{v}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h} = \mathbf{a}^n_{t_{n-1},\Delta t,h}$. Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^n_{\tau_{n+1},\Delta t,h} = \mathbf{u}^n_{t_n,\Delta t,h} = \mathbf{0}$.

Algoritmo 6.6 Resolución del Problema 6.2.11 para $\tau_n = t_0\ \forall n$

Dadas las condiciones iniciales $\mathbf{u}^0_{\Delta t,h} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{v}^0)$ y $\mathbf{a}^0_{m,\Delta t,h} = \boldsymbol{\gamma}_{t_0,h}(\mathbf{a}^0)$, unos valores para las constantes del método de Newmark β y γ, y un valor de tolerancia $\varepsilon_F \in [0,1]$, para cada instante t_n, $n \in [1,N]$ se realizan los siguientes pasos:

1. Obtener las aproximaciones $\mathsf{X}^n_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{F}^n_{\Delta t,h}$ mediante las fórmulas explícitas (6.50a)-(6.50b).
2. Resolver el sistema de ecuaciones (6.49a)-(6.49b), sujeto a la condición de contorno (6.49c), para obtener $\mathbf{v}^n_{m,\Delta t,h}$ y $\pi^n_{m,\Delta t,h}$.
3. Obtener $\mathbf{a}^n_{m,\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.49j).
4. Actualizar el desplazamiento $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$ mediante la fórmula (6.50c), empleando el parámetro β.
5. Si $min_{K\in\mathcal{T}_{t_0,h}} \det\left(\mathbf{F}^n_{\Delta t,h|K}\right) \leq \varepsilon_F$, interrumpir el bucle en pasos de tiempo para reinicializar el problema a la configuración de referencia $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ eligiendo $n_0 = n$:
   - Actualizar el dominio computacional $\bar{\Omega}_{t_{n_0}}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.1 donde se parte de la configuración inicial $\bar{\Omega}$ y para lo que se requiere el desplazamiento aproximado calculado en punto anterior $\mathbf{u}^n_{\Delta t,h}$.
   - Reinicializar las variables $\mathbf{v}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{v}^{n_0}_{\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{a}^{n_0}_{\Delta t,h}$ aplicando el procedimiento descrito en la Sección 5.2 para lo que se requieren los campos aproximados $\mathbf{u}^{n_0}_{\Delta t,h}$, $\mathbf{v}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ y $\mathbf{a}^{n_0}_{m,\Delta t,h}$ (calculados en los pasos 4, 2 y 3, respectivamente). Por último, tener en cuenta que $\mathbf{u}^{n_0}_{t_{n_0},\Delta t,h} = \mathbf{0}$ y retomar el bucle en pasos de tiempo tomando $\tau_n = t_{n_0}\ \forall n > n_0$.

Observación 6.2.12. *La resolución del problema de Darcy* (6.44) *requiere emplear una combinación inf-sup estable de los espacios de elementos finitos utilizados para representar las incógnitas* $\mathbf{a}^0$ *y* π^0 *(ver [40]), como por ejemplo la combinación de elementos de Raviart-Thomas para* $\mathbf{a}^0$ *y de tipo* L^2 *para* π^0. *Otra alternativa es añadir términos de estabilización a la formulación variacional* (6.44) *que permitan emplear cualquier combinación de espacios de elementos finitos (ver [41]). Esta estrategia permite elegir un espacio de elementos finitos para* $\mathbf{a}^0$ *que facilite la posterior asignación de los grados de libertad del espacio a* $\mathbf{a}^n_{\tau_n,\Delta t,h}$. *La formulación variacional estabilizada empleada para resolver el problema* (6.44) *es la descrita en [41], es decir,*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho^0\mathbf{a}^0\cdot\mathbf{w}d\mathsf{p} - \int_\Omega \pi^0\,\mathrm{Div}\,\mathbf{w}d\mathsf{p} - \int_\Omega k_1\left(\nabla\pi^0+\rho^0\mathbf{a}^0\right)\cdot\rho^0\mathbf{w}d\mathsf{p} + \int_\Omega k_2\,\mathrm{Div}\,\mathbf{a}^0\cdot\,\mathrm{Div}\,\mathbf{w}d\mathsf{p} = \\
&\int_\Omega \mathrm{Div}\,\left[\mu^0\left(\nabla\mathbf{v}^0+(\nabla\mathbf{v}^0)^T\right)\right]\cdot\mathbf{w}d\mathsf{p} - \int_{\Gamma^R}\left[\mu^0\left(\nabla\mathbf{v}^0+(\nabla\mathbf{v}^0)^T\right)\mathbf{m}_{t_0}-\mathbf{h}^0\right]\mathbf{m}_{t_0}\cdot\mathbf{w}dA_\mathsf{p} + \int_\Omega \mathbf{b}^0\cdot\mathbf{w}d\mathsf{p} \\
&-\int_\Omega k_1\left[\mathbf{b}^0+\mathrm{Div}\,\left(\mu^0\left(\nabla\mathbf{v}^0+(\nabla\mathbf{v}^0)^T\right)\right)\right]\cdot\rho^0\mathbf{w}d\mathsf{p} + \int_\Omega k_2\nabla\mathbf{v}^0\cdot(\nabla\mathbf{v}^0)^T\,\mathrm{Div}\,\mathbf{w}d\mathsf{p}, \qquad \forall\mathbf{w}\in\mathbf{H}_{\Gamma^D}(\,\mathrm{div}\,,\Omega),
\end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathrm{Div}\,\mathbf{a}^0 q d\mathsf{p} + \int_\Omega k_1(\nabla\pi^0+\rho^0\mathbf{a}^0)\cdot\nabla q d\mathsf{p} = \\
&\int_\Omega \nabla\mathbf{v}^0\cdot(\nabla\mathbf{v}^0)^T q d\mathsf{p} + \int_\Omega k_1\left[\mathbf{b}^0+\,\mathrm{Div}\,\left(\mu^0\left(\nabla\mathbf{v}^0+(\nabla\mathbf{v}^0)^T\right)\right)\right]\cdot\nabla q d\mathsf{p}, \quad \forall q\in L^2(\Omega),
\end{aligned} \tag{6.52}$$

siendo k_1 *y* k_2 *dos factores de estabilización que se fijan a los valores* $k_1 = \frac{1}{2\rho^0}$ *y* $k_2 = 1$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

6.3. Resultados numéricos

En esta sección se evaluarán las características de los métodos numéricos descritos en la sección anterior mediante test numéricos habituales en dos dimensiones.

En todos los test, para la discretización espacial se empleará una combinación estable de espacios de elementos finitos continuos sobre mallas triangulares; en concreto se emplearán los elementos *MINI* [42] (lineal a trozos continuo más la burbuja para la velocidad/aceleración/desplazamiento, y lineal a trozos continuo para la presión) .

Para la implementación de estos métodos se emplea como base la plataforma para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales FEniCS [15], que permite una representación directa de las formulaciones variacionales mediante el lenguaje UFL (Unified Form Language) [43]. Con esta representación se pueden obtener de manera analítica las derivadas parciales de la formulación variacional con respecto a las incógnitas del problema, habilitando la resolución de problemas no lineales mediante representaciones explícitas de las matrices Jacobianas. Para la resolución de los sistemas lineales y no lineales se emplea, de forma explícita, el paquete PETSc [44]. Las mallas triangulares iniciales se han generado con Gmsh [21] y para el remallado y la reinicialización del método se ha programado una biblioteca en Fortran y Python, que hace uso de la interfaz meshpy [22] para la generación de mallas triangulares.

6.3.1. Problema con solución analítica

En este ejemplo se pretende evaluar los órdenes de convergencia de los distintos esquemas propuestos, mediante un problema cuyo dominio espacial es $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, $t_0 = 0$ y $t_f = 1$. Se utiliza una viscosidad dinámica $\mu = 0.1$ y una densidad $\rho = 1$. Se ajustan las funciones $\mathbf{b}$, g, $\mathbf{v}_D$ y $\mathbf{v}^0$ de tal manera que la solución exacta del problema sea,

$$\mathbf{u}(p_1,p_2,t) = [t^3e^t, t^3e^t\cos(p_1-1)], \quad (p_1,p_2,t)\in\bar{\Omega}\times[t_0,t_f], \tag{6.53}$$
$$\mathbf{v}(x_1,x_2,t) = [(3t^2+t^3)e^t, (3t^2+t^3)e^t\cos(x_1-t^3e^t-1)], \quad (x_1,x_2,t)\in\mathcal{T}, \tag{6.54}$$
$$\mathbf{a}(x_1,x_2,t) = [(6t+6t^2+t^3)e^t, (6t+6t^2+t^3)e^t\cos(x_1-t^3e^t-1)], \quad (x_1,x_2,t)\in\mathcal{T}, \tag{6.55}$$
$$\pi(x_1,x_2,t) = e^t\sin(x_1-t^3e^t-1), \quad (x_1,x_2,t)\in\mathcal{T}. \tag{6.56}$$

Este problema se ha resuelto empleando las estrategias no Eulerianas definidas en los Algoritmos 6.2, 6.4 y 6.6, para distintas combinaciones de los parámetros (γ,β).

En este ejemplo se calculan los errores para el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la presión en la norma $l^\infty(L^2_h(\Omega))$ que se define como $||\hat{\mathbf{w}}||_{l^\infty(L^2_h(\Omega))} := \max_{n=1}^{N} ||\mathbf{w}^n||_{L^2_h(\Omega)}$, siendo $L^2_h(\Omega)$ la aproximación de la norma $L^2(\Omega)$ mediante fórmulas de cuadratura sobre los vértices de la malla.

En las Figuras 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se muestran los errores asociados con el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la presión frente al número de pasos de tiempo (en escala logarítmica) utilizando una malla espacial fija de 201×201 vértices. La elección de los parámetros de Newmark $(\gamma,\beta) = (1/2, 1/6)$ es la que proporciona los mejores órdenes de convergencia, acorde con los órdenes que se obtienen de los desarrollos de Taylor (6.30) y (6.31).

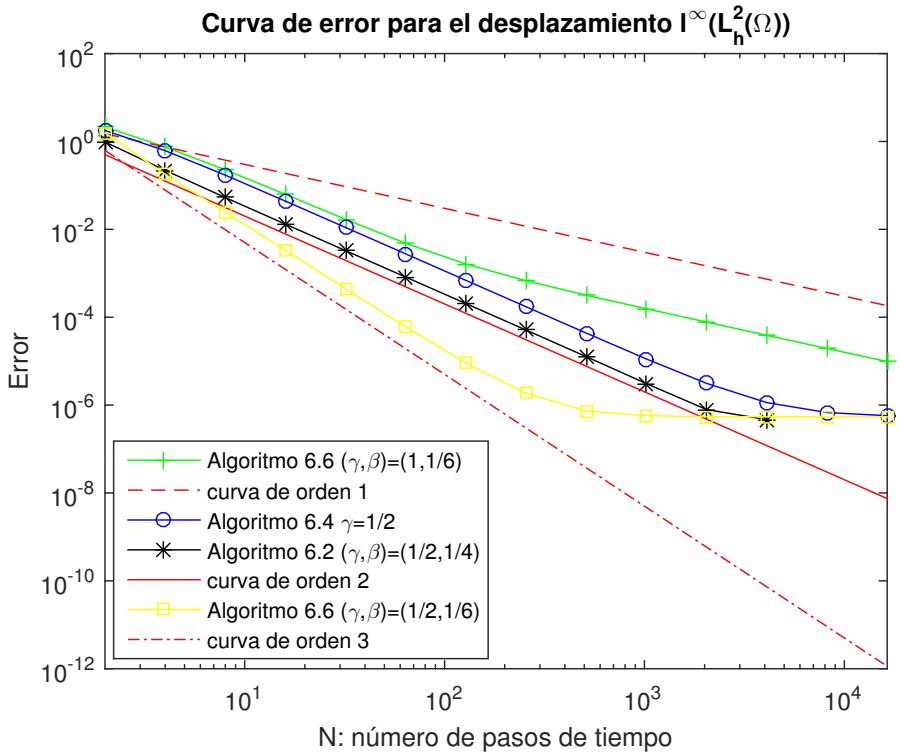
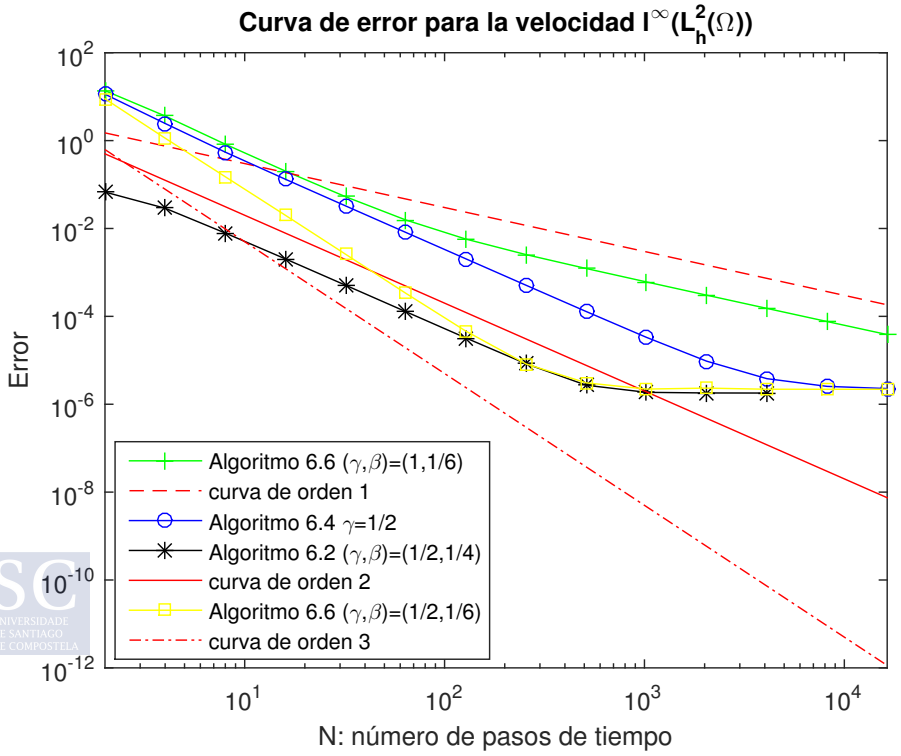


Figura 6.1: Problema con solución analítica: Orden de convergencia temporal para el desplazamiento considerando una malla espacial de 201×201 vértices.



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Figura 6.2: Problema con solución analítica: Orden de convergencia temporal para la velocidad considerando una malla espacial de 201×201 vértices.

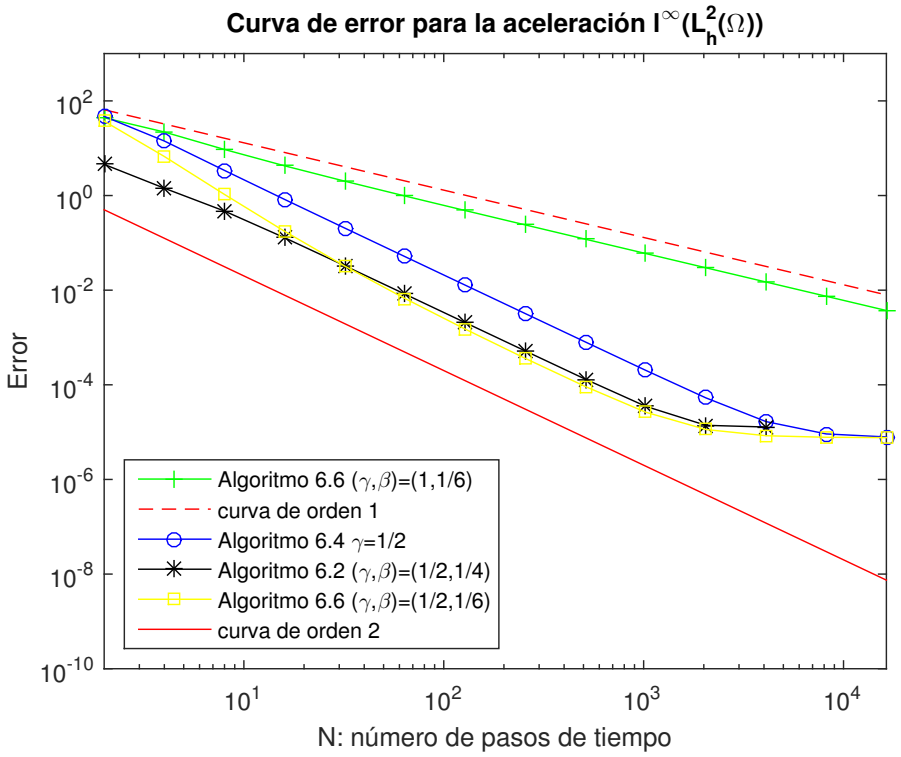


Figura 6.3: Problema con solución analítica: Orden de convergencia temporal para la aceleración considerando una malla espacial de 201×201 vértices.

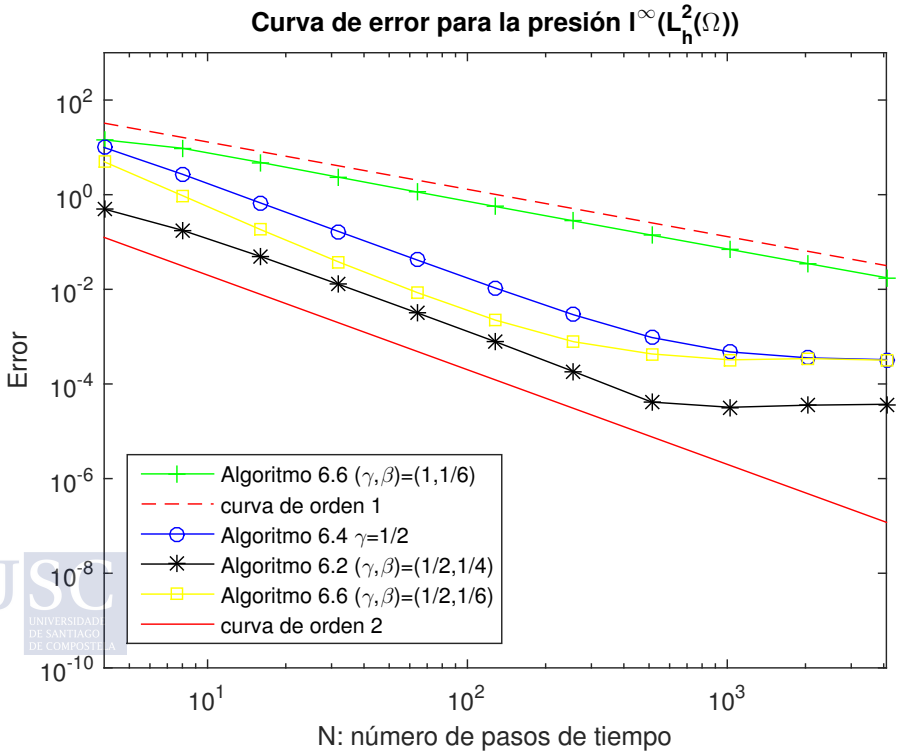


Figura 6.4: Problema con solución analítica: Orden de convergencia temporal para la presión considerando una malla espacial de 201×201 vértices.

En las Figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 se muestran los errores asociados con el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la presión frente al número de grados de libertad en cada dirección espacial principal para un paso de tiempo fijo $\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$. El orden de convergencia espacial observado es igual a dos para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración e igual a uno para la presión.

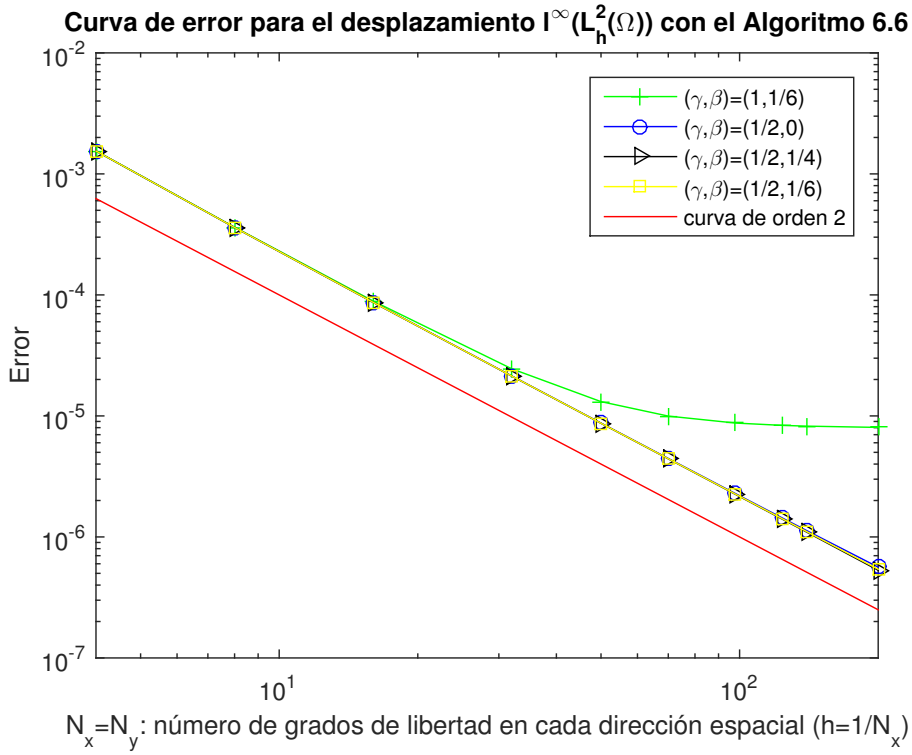


Figura 6.5: Problema con solución analítica: Orden de convergencia espacial para el desplazamiento considerando un paso temporal fijo $\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

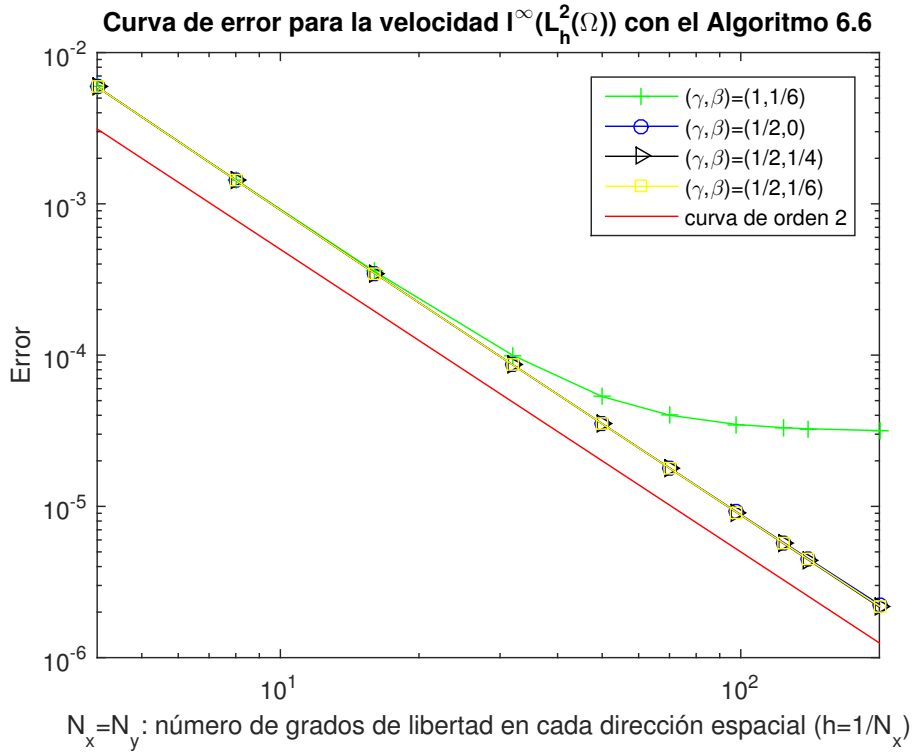


Figura 6.6: Problema con solución analítica: Orden de convergencia espacial para la velocidad considerando un paso temporal fijo $\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

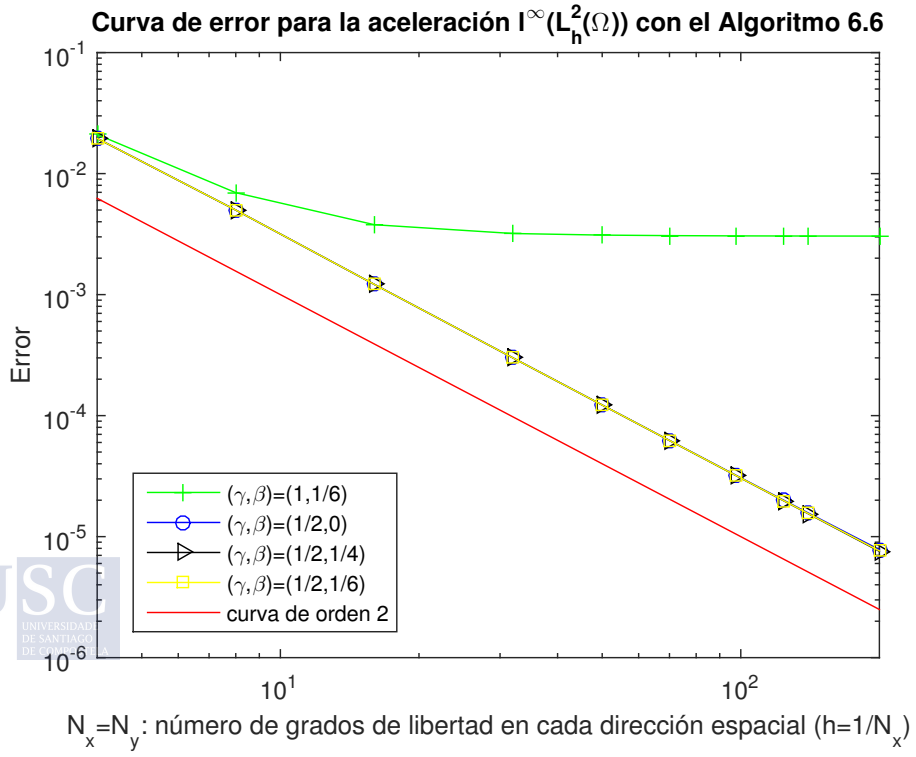


Figura 6.7: Problema con solución analítica: Orden de convergencia espacial para la aceleración considerando un paso temporal fijo $\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 10^4}$.

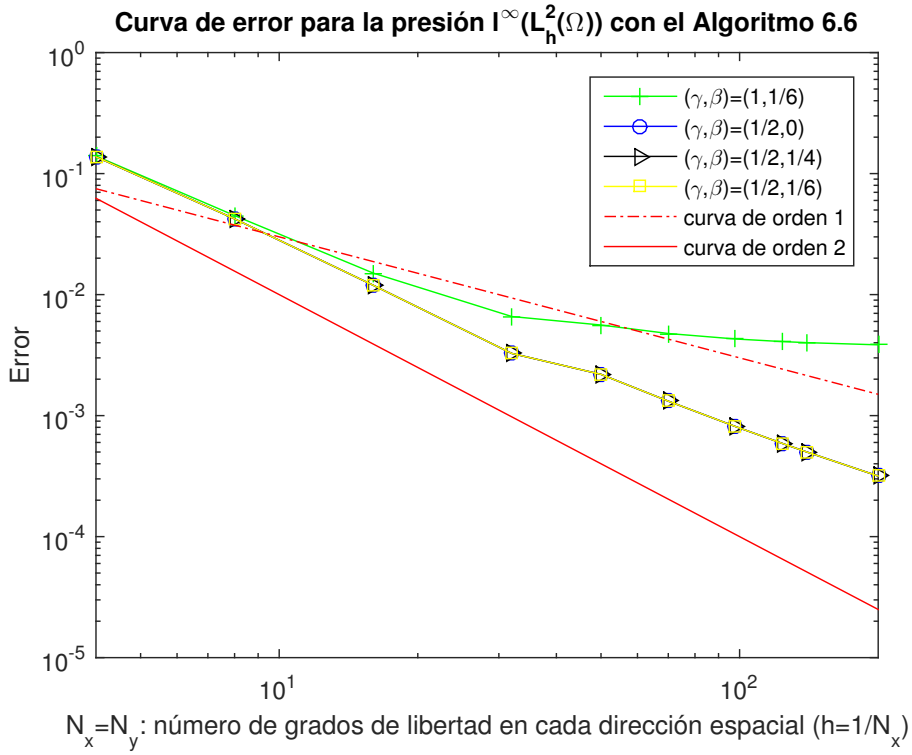


Figura 6.8: Problema con solución analítica: Orden de convergencia espacial para la presión considerando un paso temporal fijo $\Delta t = \frac{1}{2\cdot 10^4}$.

En este ejemplo también se ha comprobado numéricamente que los métodos propuestos conservan el volumen. Utilizando una malla espacial de 25 vértices, $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/6)$ con el Algoritmo 6.6 y $\Delta t = 0.25$ el error de la medida del área en el instante final $t_f = 1$ es $1.11 \cdot 10^{-16}$ y el error de la medida de área en norma l^∞ es de $2.22 \cdot 10^{-16}$.

Además, en este ejemplo concreto, se comprueba que para una misma elección de los parámetros (γ, β) el Algoritmo 6.6 se ejecuta en un tercio del tiempo de cálculo del Algoritmo 6.2 sin aparente penalización en los órdenes de convergencia.

6.3.2. Cavidad con pared móvil

El problema de la cavidad con pared móvil (*lid driven cavity*) es un problema ampliamente estudiado en la literatura y están disponibles soluciones estacionarias estables para números de Reynolds inferiores a ciertos valores críticos (ver [45, 46]). Para valores superiores al crítico, aparecen bifurcaciones en el flujo de tal modo que el régimen se vuelve no estacionario (ver [47, 48]).

El problema adimensionalizado se define en la cavidad cuadrada $\Omega = [0, 1]^2$ con los lados inferior horizontal y los dos laterales fijos y el lado superior horizontal móvil con una velocidad de 1 hacia el lado derecho. El problema se resuelve para números de Reynolds de 1000 y 5000 utilizando el Algoritmo 6.5 con los parámetros $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/6)$. El método se reinicializa, siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 5.2, en cada paso de tiempo y se avanza en tiempo hasta que se alcanza una solución estacionaria.

En la Figura 6.9 se representa la velocidad horizontal sobre el eje medio vertical de la cavidad y la velocidad vertical sobre el eje medio horizontal para Reynolds 1000. En la Figura 6.10 se representa la

velocidad horizontal sobre el eje medio vertical de la cavidad y la velocidad vertical sobre el eje medio horizontal para Reynolds 5000. Los resultados se comparan con las soluciones dadas en [46]. Además, se incluyen los resultados numéricos obtenidos con otros métodos de características, en concreto con un método no Euleriano propuesto en [8] que utiliza las fórmulas (6.36)-(6.37) para la discretización temporal, y con el método clásico Euleriano.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

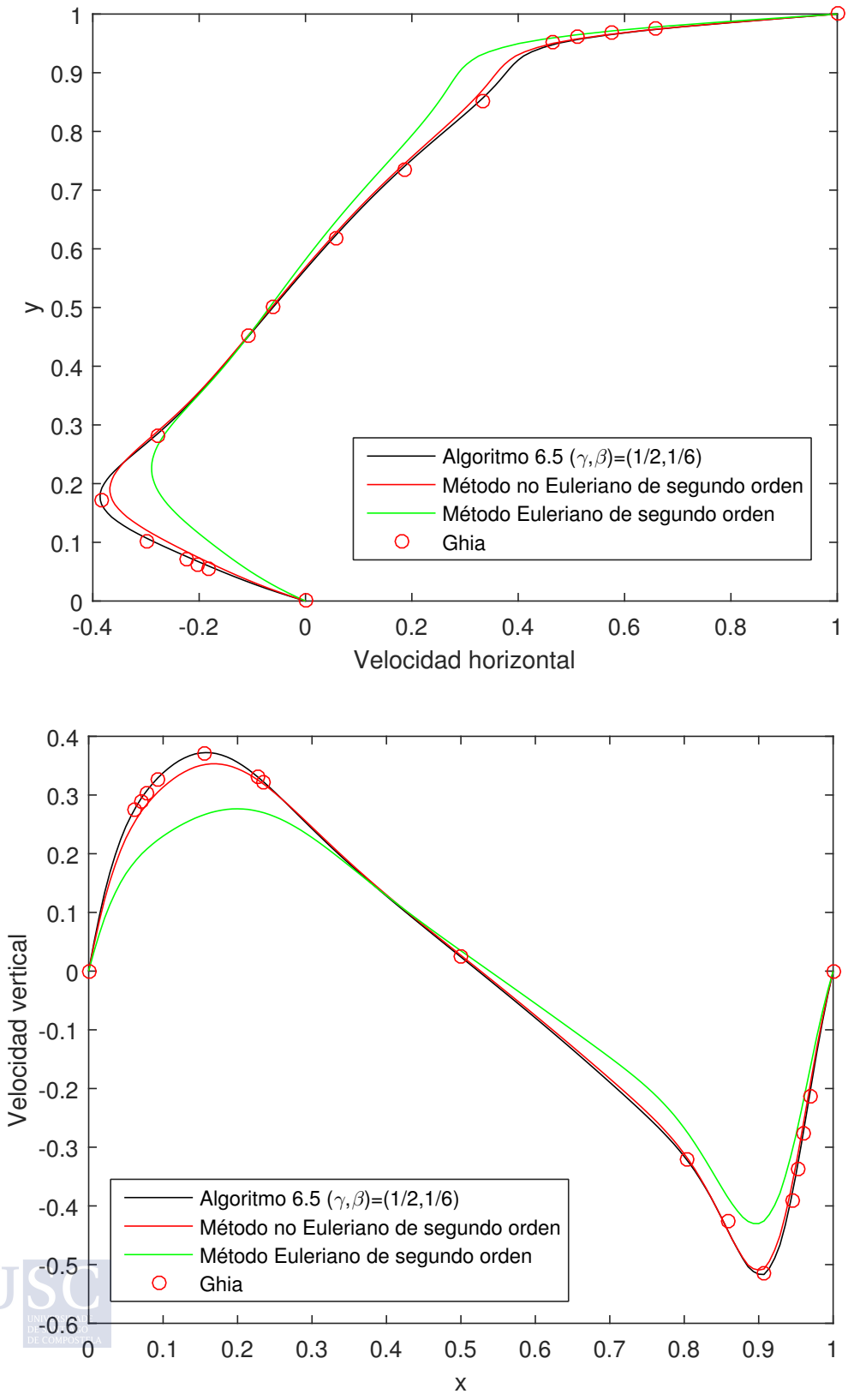


Figura 6.9: Problema de la cavidad con una pared móvil: velocidad horizontal sobre el eje medio vertical de la cavidad y velocidad vertical sobre el eje medio horizontal de la cavidad para un Reynolds de 1000 empleando una malla espacial de 99×99 vértices.

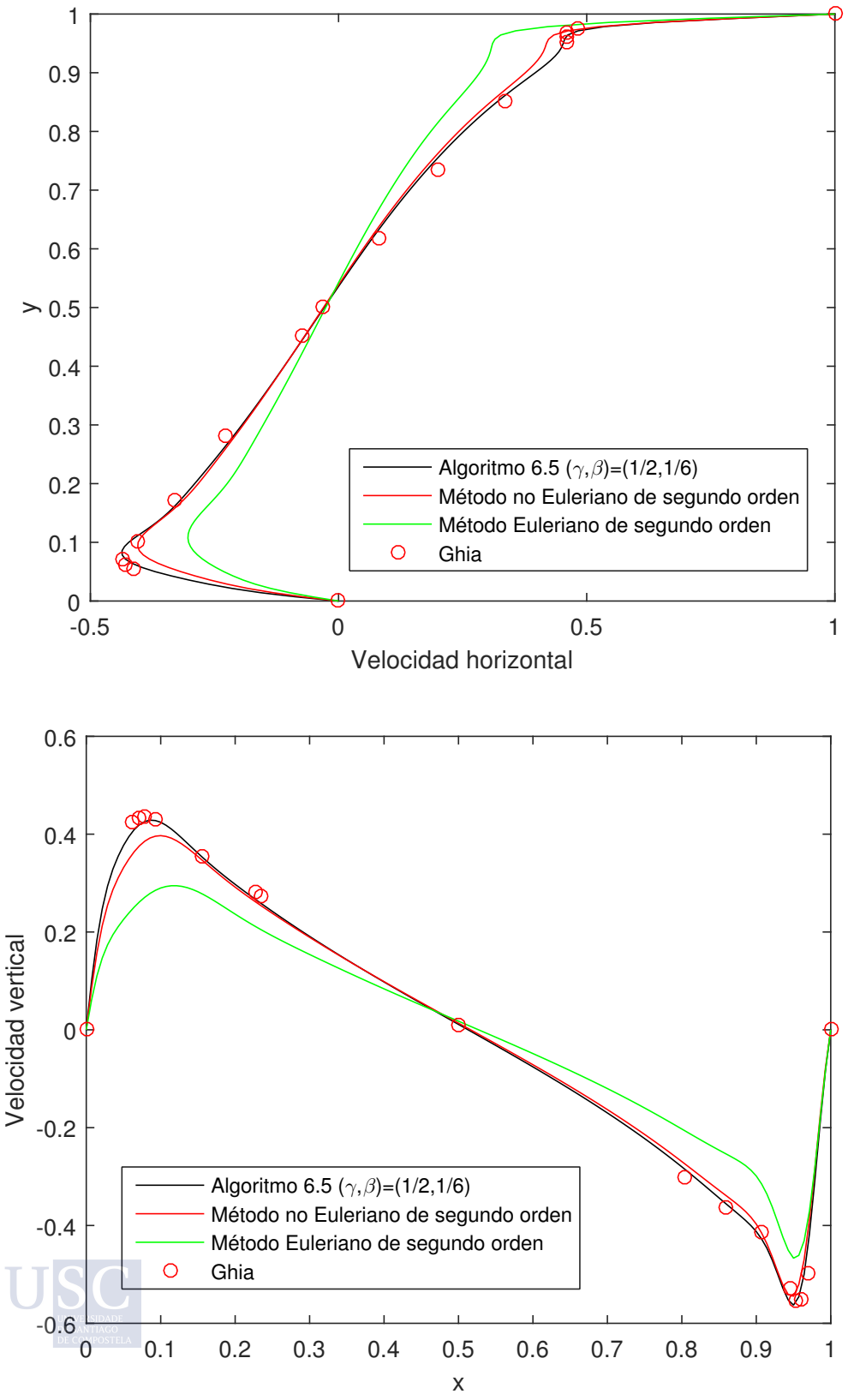
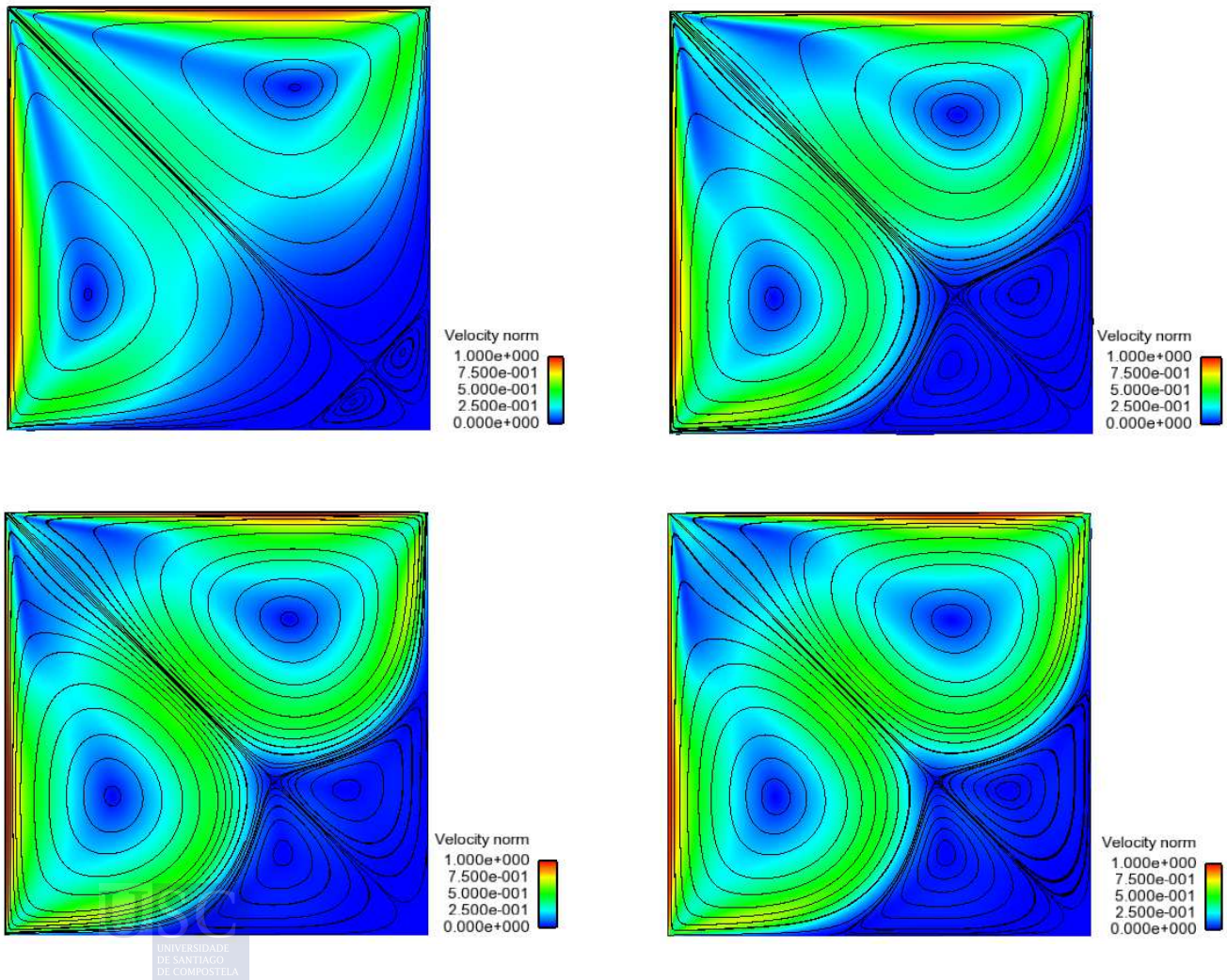


Figura 6.10: Problema de la cavidad con una pared móvil: velocidad horizontal sobre el eje medio vertical de la cavidad y velocidad vertical sobre el eje medio horizontal de la cavidad para un Reynolds de 5000 empleando una malla espacial de 201×201 vértices.

Se observa que la precisión de los resultados depende del paso de tiempo seleccionado. Es de destacar que el método definido por el Algoritmo 6.5 es más estable y menos sensible al tamaño del paso de tiempo que el resto de métodos.

El problema de la cavidad con una pared móvil ha sido extendido al caso de dos paredes móviles por varios autores (por ejemplo [49-51]). En este caso se plantea el mismo problema que el anterior fijando dos paredes móviles, el lado superior horizontal y el lado vertical izquierdo en las que se impone una velocidad de magnitud unidad tangente a las paredes y signo positivo en la primera y negativo en la segunda. Se realizan simulaciones para distintos valores de Reynolds ($Re = 100$, $Re = 500$, $Re = 1000$, $Re = 1071$, y $Re = 2000$). Para un número de Reynolds crítico de 1073 se produce una bifurcación en la que se pasa de soluciones estacionarias simétricas respecto a una diagonal del recinto a soluciones estacionarias no simétricas. El problema se resuelve empleando el Algoritmo 6.5 reinicializando en cada paso de tiempo y empleando la configuración de párametros del método Newmark $(\gamma, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Se utiliza una malla de 201×201 vértices y un tamaño de paso de tiempo de $\Delta t = 0.0049$. Para valores de Reynolds inferiores al valor crítico 1073 se obtienen las soluciones simétricas referidas en la bibliografía (ver Figura 6.11).



USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Figura 6.11: Problema de cavidad con dos paredes móviles: Líneas de corriente correspondientes a $Re = 100$ y $Re = 500$ en la fila superior y $Re = 1000$ y $Re = 1071$ en la fila inferior.

Para un valor de Reynolds superior al valor crítico, utilizando diferentes condiciones iniciales se obtienen distintas soluciones estacionarias (ver Figura 6.12).

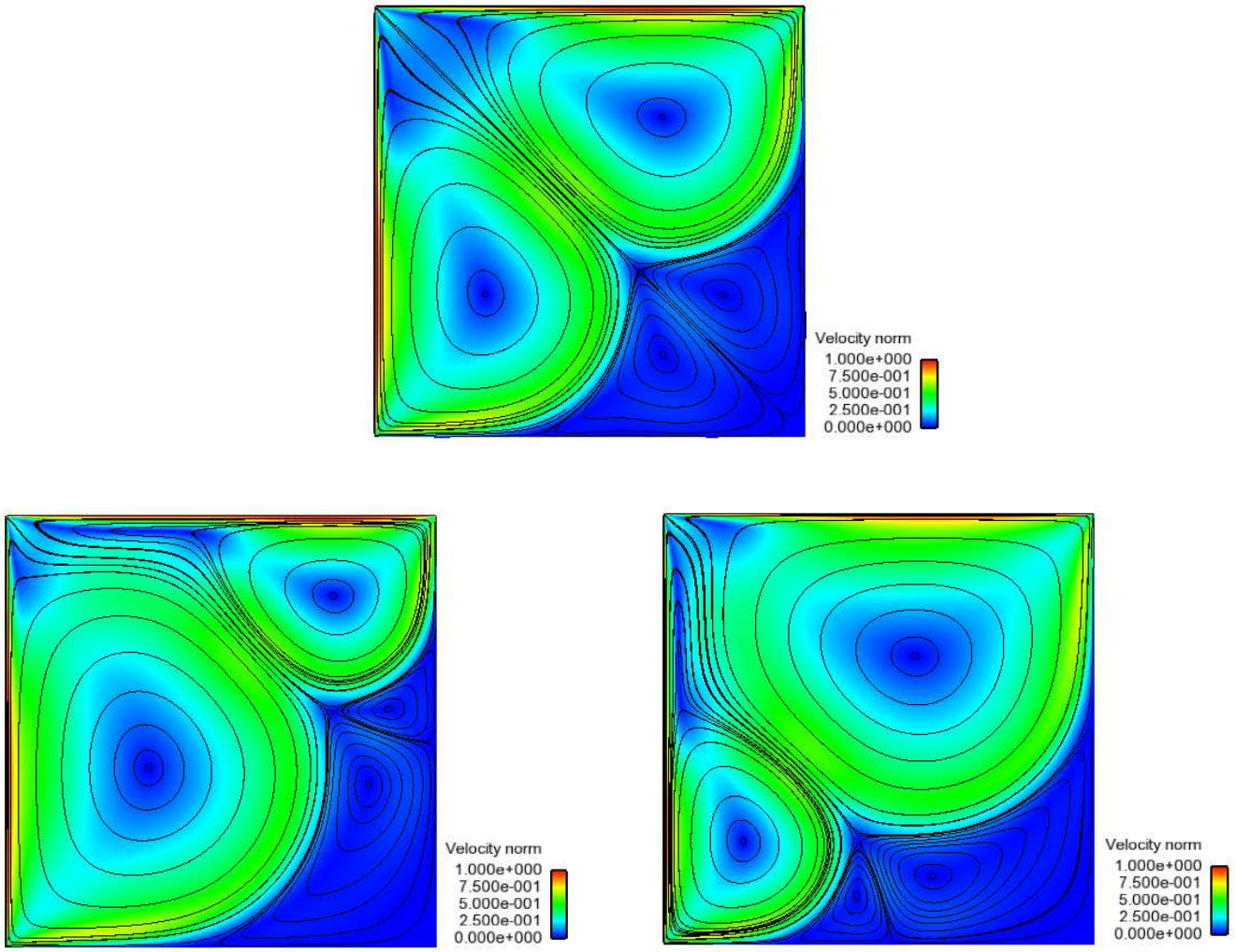


Figura 6.12: Problema de cavidad con dos paredes móviles: Líneas de corriente correspondientes a $Re = 2000$ para diferentes condiciones iniciales.

6.3.3. Modos de oleaje en un recinto confinado

Este ejemplo se ha elegido para mostrar las capacidades del esquema (incondicionalmente estable y con precisión óptima) en problemas de chapoteo (*sloshing*) de gran amplitud. El análisis de los modos de oleaje en un recinto confinado (*sloshing waves*) ha sido estudiado en varios artículos. Por ejemplo, en [52, 53] se trata este problema empleando una descripción Lagrangian-Euleriana arbitraria (ALE). En [8] se emplea un esquema lineal Lagrangiano. Estos esquemas lineales limitan en gran medida el tamaño del paso de tiempo que se puede emplear en problemas con grandes amplitudes de onda. Por esta razón se ha utilizado el esquema no lineal definido por el Algoritmo 6.2, seleccionando la combinación A-estable definida por los parámetros $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/4)$.

El dominio empleado es un tanque rectangular de 0.8 metros de ancho y la profundidad inicial del líquido es de 0.3 metros. Se considera un fluido incompresible de densidad $\rho = 1000 kg/m^3$ y una viscosidad $\mu = 0.001 kg/(m \cdot s)$. Inicialmente el fluido se encuentra en reposo y es excitado mediante una aceleración

horizontal sinusoidal y la aceleración vertical de la gravedad:

$$\mathbf{b}(\mathsf{x}, t) = \rho(A \cdot g \cdot \sin(\omega t), -g),$$

donde A es una constante arbitraria que gobierna la amplitud de la excitación, g es la aceleración de la gravedad y ω es la frecuencia de la excitación. En este ejemplo, $A = 0.01$, $g = 9.8m/s^2$ y $\omega = 5.642rad/s$. Se considera una condición de contorno de deslizamiento en las fronteras verticales y en la frontera inferior horizontal, y una condición de Neumann nula en la frontera horizontal superior (frontera libre). El problema se resuelve utilizando el Algoritmo 6.2 con la combinación de parámetros $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/4)$. Para la discretización espacial se emplea una malla de 20×20 vértices. En la Figura 6.13 se muestra, para diferentes pasos de tiempo, el desplazamiento vertical de los vértices situados en las esquinas superiores a lo largo del tiempo. En estas simulaciones no ha sido necesario aplicar la estrategia de reinicialización y remallado. Los resultados obtenidos son semejantes a los publicados en [8, 52, 53]. Cabe destacar que, para pasos de tiempo grandes, el método propuesto es estable aunque la precisión en instantes temporales alejados del instante inicial no es buena.

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

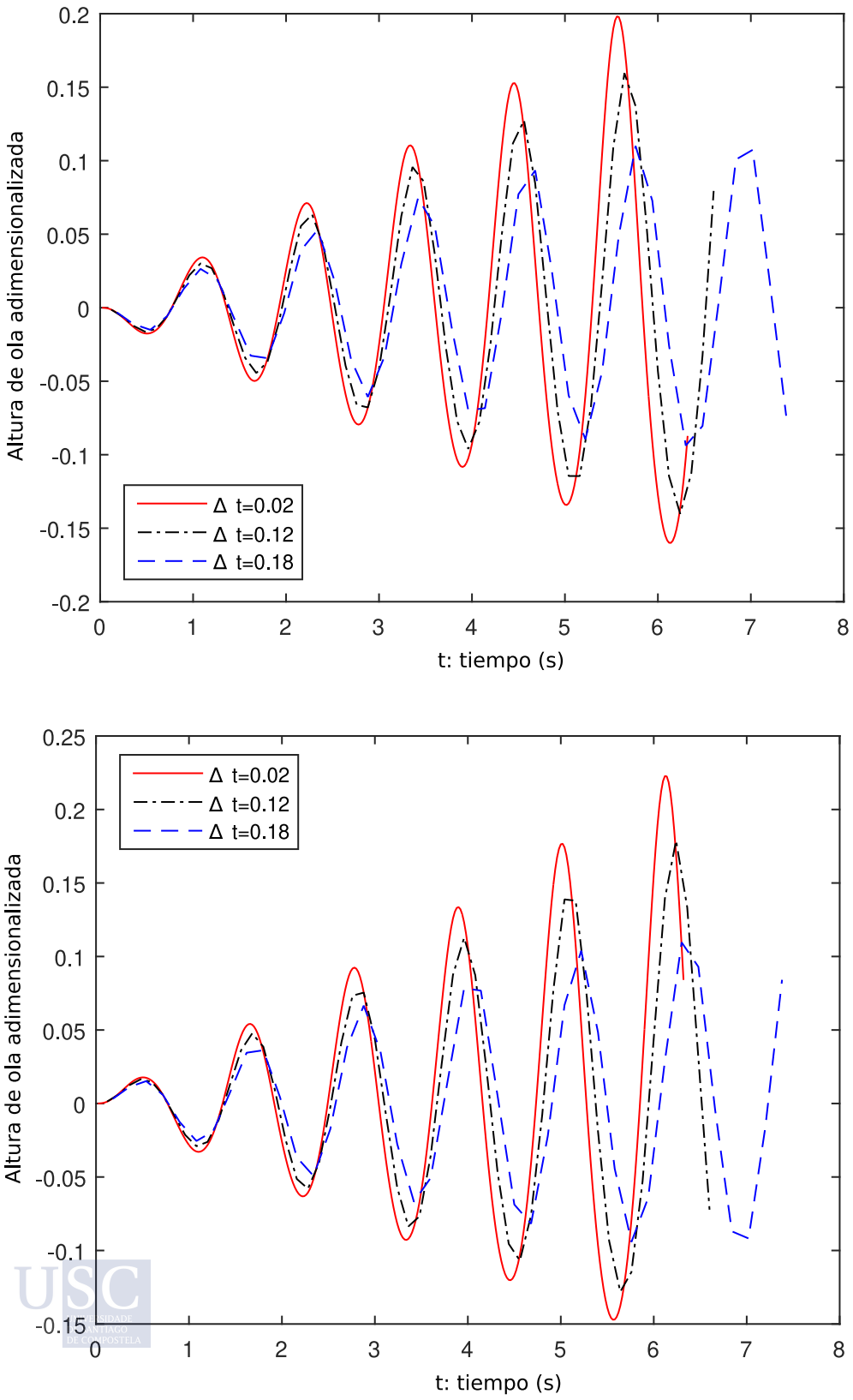


Figura 6.13: Problema de modos de oleaje: altura de la ola adimensionalizada en las paredes izquierda (gráfica superior) y derecha (gráfica inferior) frente al tiempo para una malla espacial de 20×20 vértices.

Para poder simular periodos de tiempo más largos es necesario aplicar la estrategia de remallado y reinicialización varias veces, tal como indica el Algoritmo 6.2. En las Figuras 6.14 y 6.15 se muestran los resultados obtenidos con esta estrategia. En particular, en la Figura 6.15, se muestra una captura de una configuración del dominio junto con los vectores que representan la velocidad sobre las isoregiones del campo de presiones.

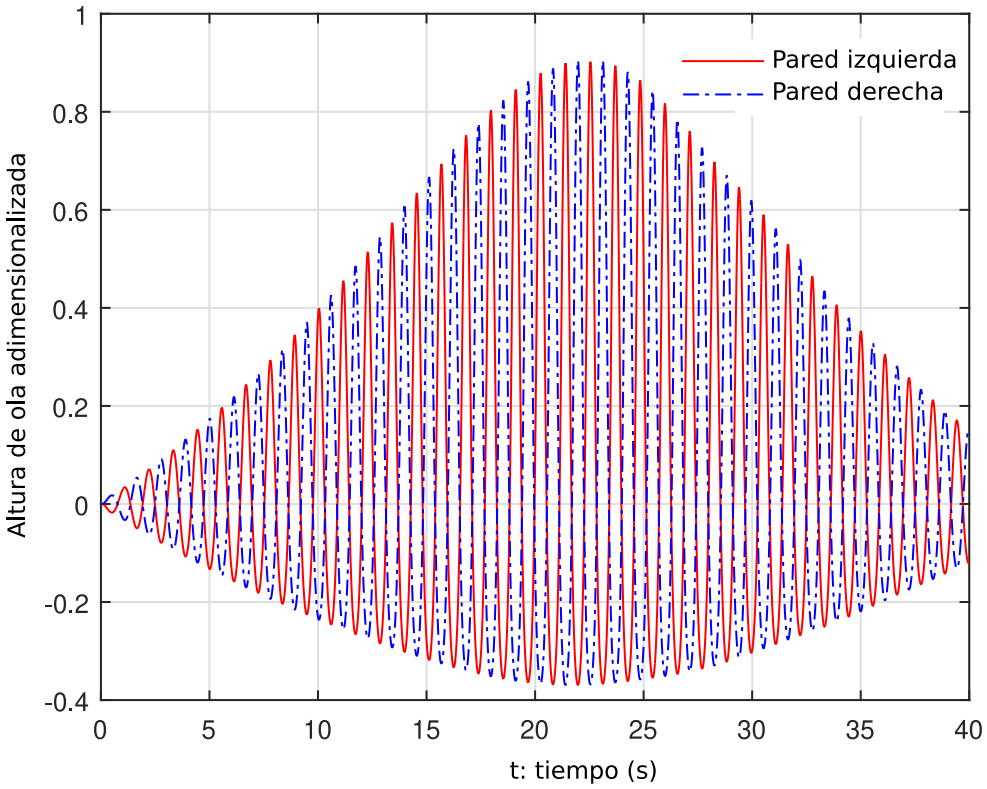


Figura 6.14: Problema de modos de oleaje: altura de la ola adimensionalizada en las paredes izquierda y derecha frente al tiempo para $\Delta t = 0.02$ y una malla espacial de 20×20 vértices.

6.3.4. Rotura de presa

USC DE COMPOSTELA

En este ejemplo se considera el colapso de una columna de agua en dos dimensiones. Este problema se emplea a menudo como caso test para problemas con frontera libre, pues las condiciones de contorno y la configuración inicial son muy simples (ver Figura 6.16). Se impone una condición de deslizamiento en la pared vertical izquierda y en la horizontal inferior y condición Neumann nula (frontera libre) en las fronteras horizontal superior y vertical derecha. El ancho de la columna de agua es $L = 3.5cm$ y la altura $H = 7cm$. La aceleración de la gravedad es $g = 980cm/s^2$, la densidad $\rho = 1g/cm^3$ y la viscosidad $\nu = 0.01cm^2/s$.

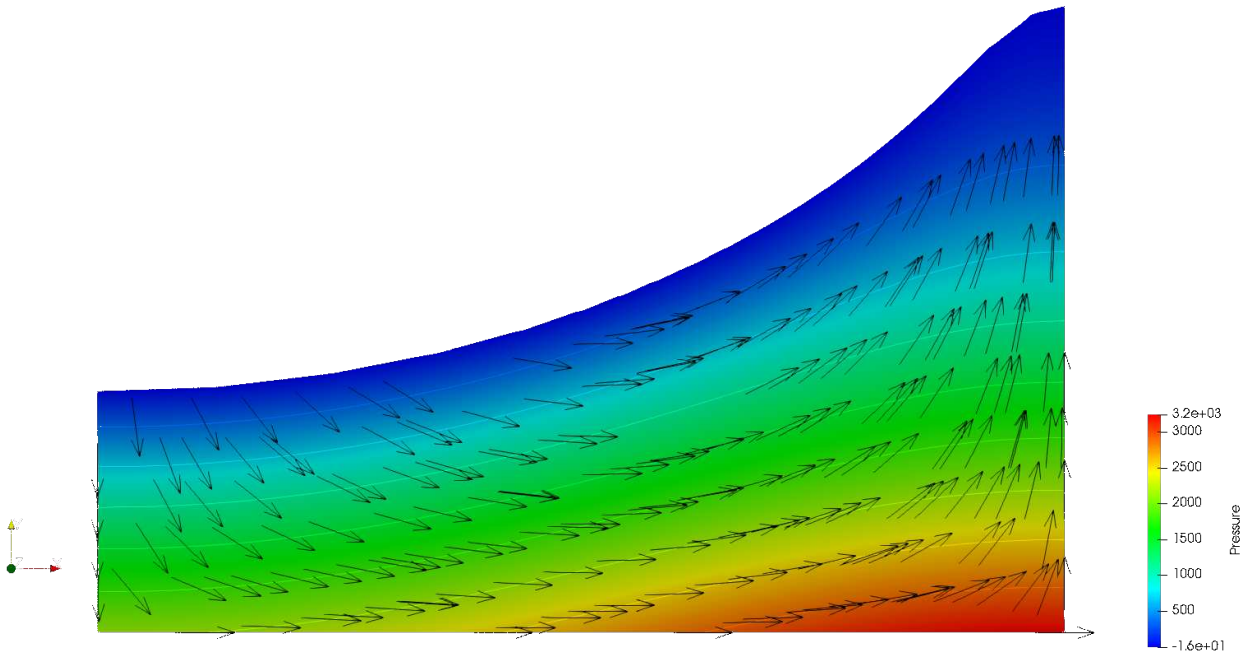
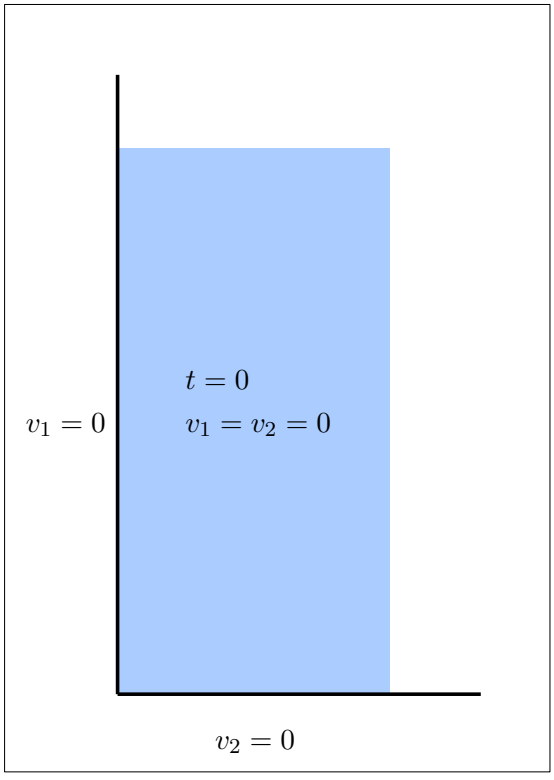


Figura 6.15: Problema de modos de oleaje: Solución calculada en el instante $t = 16.24$ s. Las flechas indican el campo de velocidades.



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Figura 6.16: Problema de la rotura de presa: condiciones iniciales y de contorno.

El problema se resuelve empleando el Algoritmo 6.4 y los parámetros $(\gamma, \beta) = (1/2, 0)$ sin reinicialización con una malla espacial de 20×20 vértices y un paso de tiempo $\Delta t = 0.01s$. En la Figura 6.17 se representa la posición horizontal del nodo asociado con la esquina inferior derecha de la configuración inicial frente al tiempo. Estos resultados se comparan con los resultados numéricos obtenidos en [35, 54-56] y con los resultados experimentales recogidos en [3, 57]. En estos resultados se distinguen dos grupos de curvas, cada uno de ellos asociado con uno de los resultados experimentales [3, 57]. Los resultados obtenidos con el Algoritmo 6.4 se asemejan a los datos experimentales de [3].

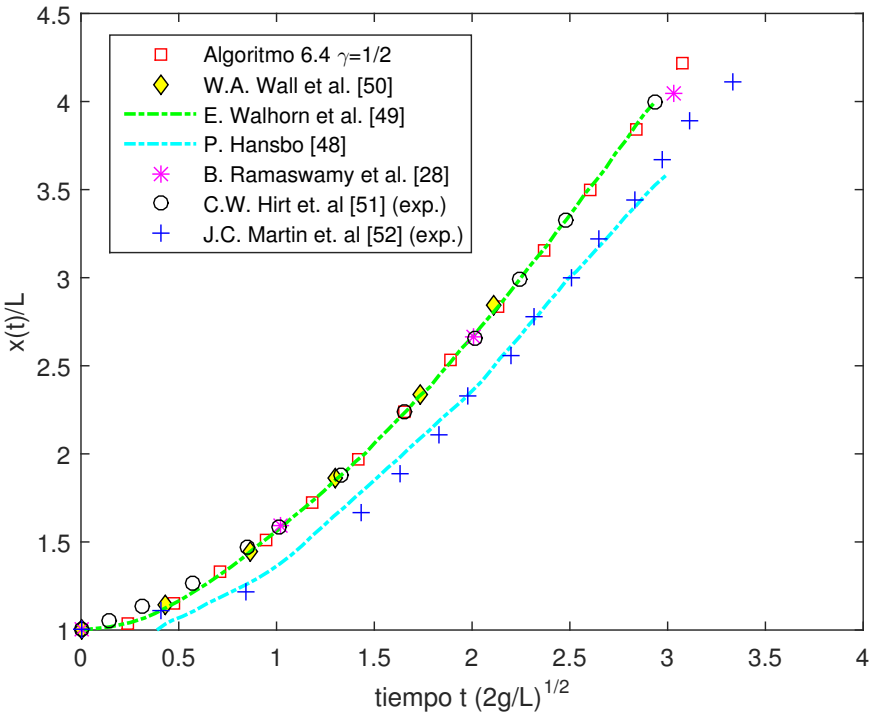


Figura 6.17: Problema de la rotura de presa: Desplazamiento horizontal del nodo inferior derecho.

En la Figura 6.18 se representan tres configuraciones deformadas del dominio y el campo de presiones asociados con tres instantes temporales.

En este ejemplo también se ha comprobado numéricamente que el esquema conserva el volumen con una convergencia de segundo orden en tiempo. En la Figura 6.19 se representa la norma l^∞ del error del área frente al número de pasos de tiempo para una malla espacial fija.

6.3.5. Flujo 2D alrededor de un cilindro

En este ejemplo se considera el flujo alrededor de un cilindro infinito. El problema se modela en una configuración 2D donde el cilindro es un círculo y el dominio computacional es un rectángulo en el que en su centro se ha eliminado el círculo. Este ejemplo se utiliza habitualmente para validar métodos para la resolución de los problemas en mecánica de fluidos. El campo de velocidades que se obtiene es simétrico para valores moderados del número de Reynolds. A medida que el número de Reynolds empieza a aumentar, típicamente en el entorno de $Re = 90$ el flujo empieza a separarse detrás del cilindro provocando el desprendimiento de vórtices. Se considera un fluido incompresible, una longitud del dominio computacional de 20 metros y una altura de 0,5 metros. El radio del cilindro es de 0,1 metros y se sitúa

en el centro del rectángulo. Se imponen condiciones Dirichlet de velocidad vertical nula y horizontal constante igual a la unidad en las fronteras horizontales del dominio, y condiciones periódicas en las fronteras verticales. Se fija el valor de la densidad a $\rho = 1kg/m^3$ y variando el valor de la viscosidad se consigue el cambio del número de Reynolds para cada ensayo. Para la resolución de este problema se emplea el Algoritmo 6.4 reinicializando cuando la deformación provoca una degeneración en el dominio computacional deformado.

Para valores de viscosidad $\mu = 1.0$ y $\mu = 0.01$ se obtienen soluciones estables simétricas (ver Figura 6.20).

Para un valor de $\mu = 0.001$ los desprendimientos de vórtices a los dos lados del cilindro son notorios y la solución ya no es estacionaria. En la Figura 6.21 se muestra la solución del problema para un valor de $\mu = 0.001$ y cuatro instantes diferentes.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

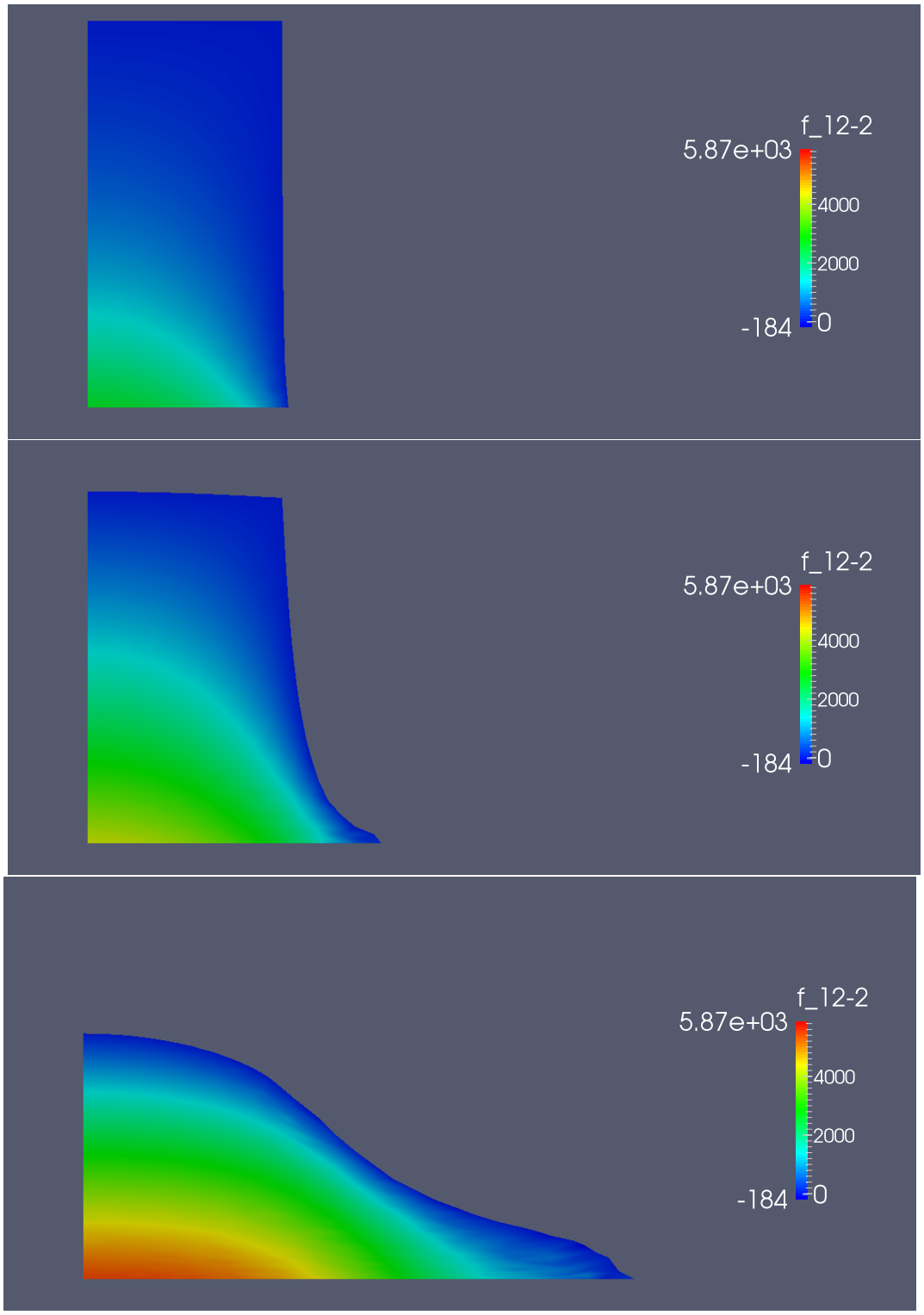


Figura 6.18: Problema de la rotura de presa: Campo de presiones y dominio deformado calculado en los instantes $t = 0.01$, $t = 0.04$ y $t = 0.09$.

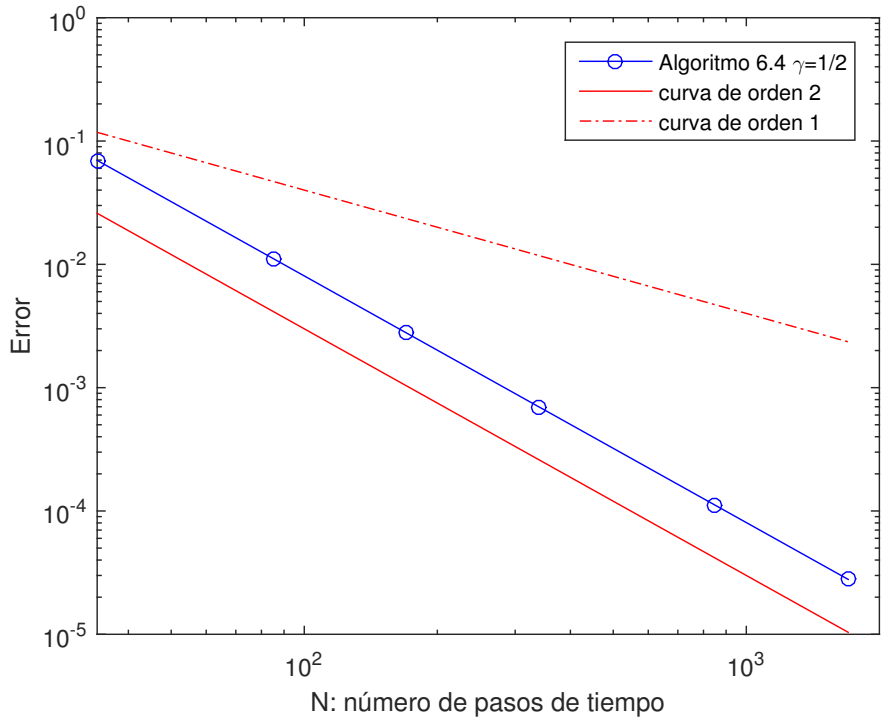


Figura 6.19: Problema de la rotura de presa: error del área medido con la norma l^∞ frente al número de pasos de tiempo.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

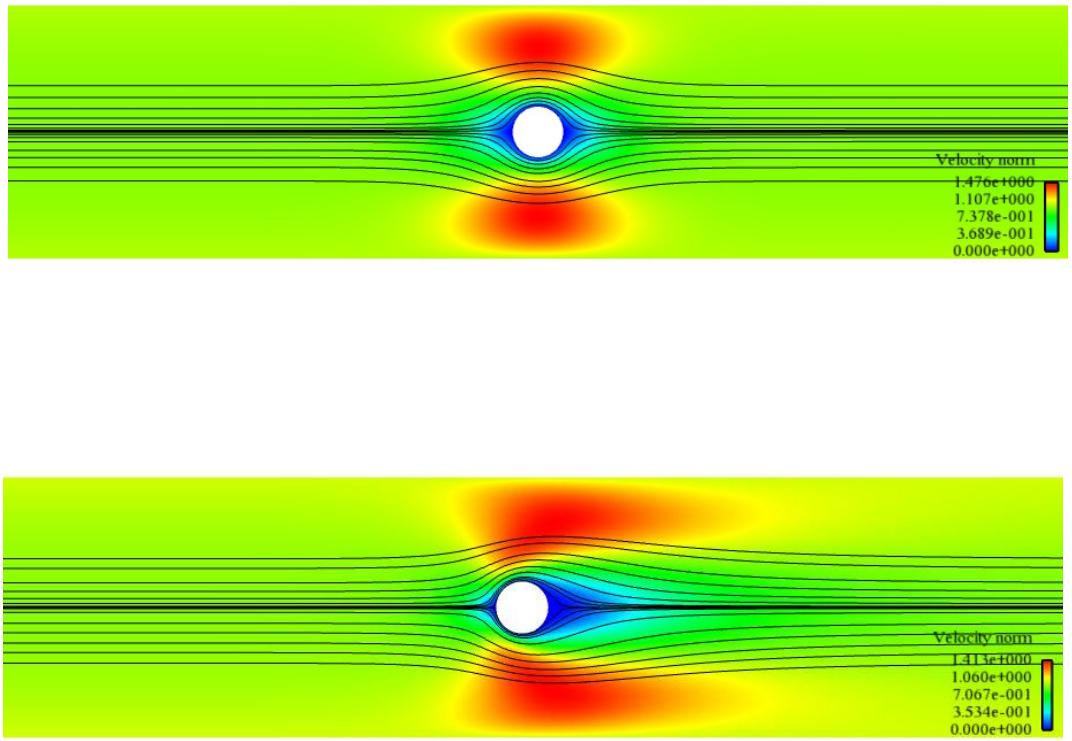


Figura 6.20: Problema del flujo alrededor de un cilindro: líneas de corriente para valores de viscosidad de $\mu = 1.0$ (superior) y $\mu = 0.01$ (inferior) obtenidas con una malla espacial de 38910 vértices y $\Delta t = 0.001$.

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

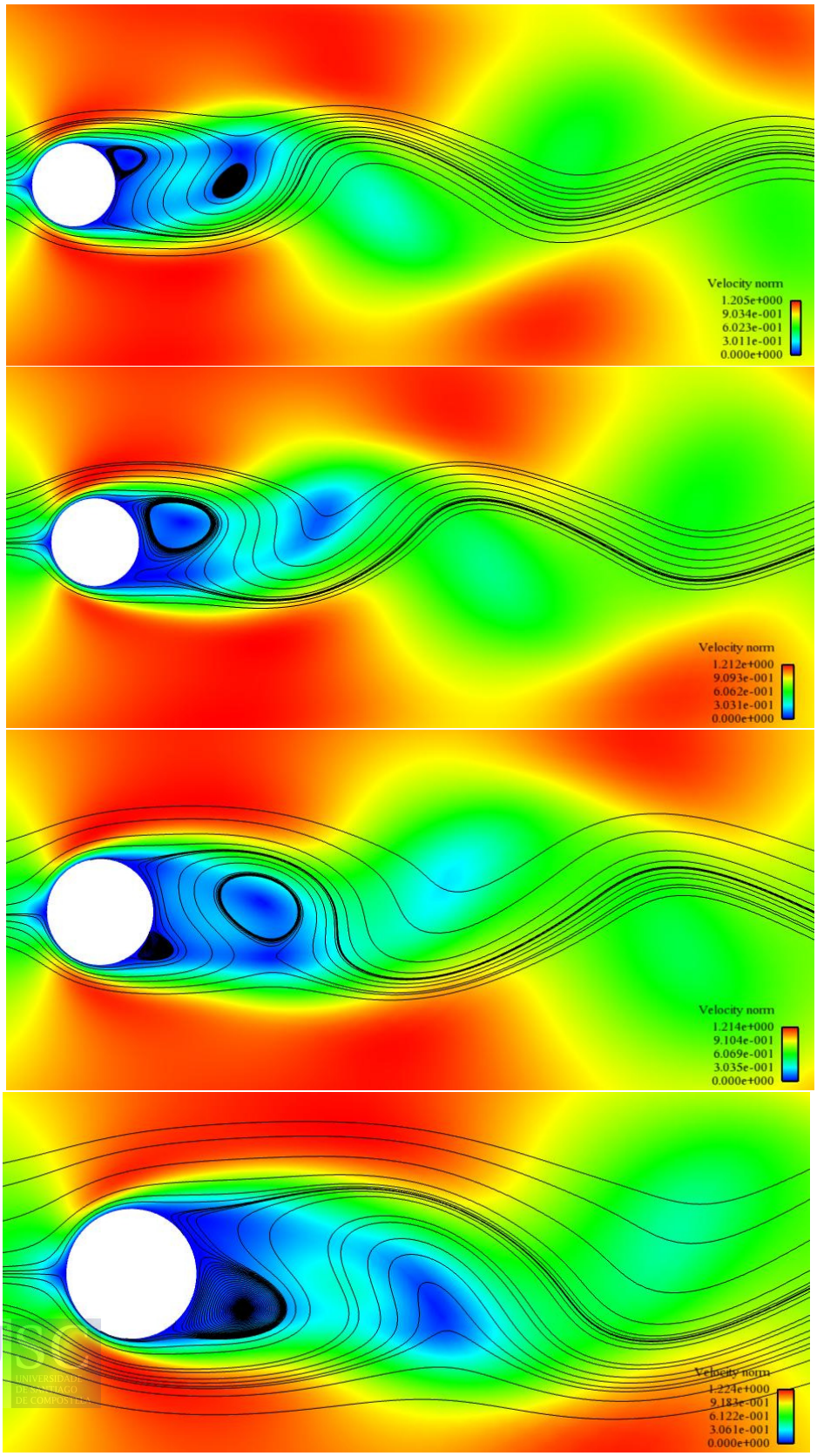


Figura 6.21: Problema del flujo alrededor de un cilindro: líneas de corriente para el valor de la viscosidad de $\mu = 0.001$ y cuatro instantes temporales diferentes obtenidas con una malla espacial de 38910 vértices y $\Delta t = 0.0001$.

Capítulo 7

Aplicación a un problema de multifísica: proceso industrial de electrorrecalcado

El proceso de electro-recalcado permite hacer una primera deformación de un extremo de una barra cilíndrica para facilitar su posterior forja. Esta preforma se consigue a través de la variación de las propiedades mecánicas de la barra, mediante el calentamiento de uno de los extremos de la misma al paso de una corriente eléctrica (efecto Joule). El calentamiento de la pieza se sincroniza con un empotramiento de la misma sobre una pieza rígida, el denominado yunque.

En el proceso de electro-recalcado libre intervienen un par de elementos fundamentales: dos yunques (uno a cada extremo de la barra) un juego de mordazas, que juegan el papel de abrazaderas, a través de las cuales llega la corriente eléctrica al sistema y la barra. En la Figura 7.1 se presenta un esquema del procedimiento cuyas fases se mencionan a continuación.

1. Inicialmente se posiciona la barra entre los yunques, que actúan de tope, y la mordaza más próxima a uno de los extremos.

2. Una corriente eléctrica circula entre las mordazas (3) y el yunque (4) calentando la pieza. La resistencia eléctrica produce un calentamiento en la barra conductora (efecto Joule) y reduce su resistencia mecánica al recalcado a medida que aumenta su temperatura.

3. El proceso de recalcado se inicia cuando el empujador hidráulico, situado en el extremo opuesto a la mordaza, vence la resistencia mecánica de la barra. Como consecuencia se forma una "bola" en un extremo de la barra, que generalmente se denomina "cebolla".

7.1. Modelización del problema

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

En esta sección se introducen los modelos térmico, eléctrico y mecánico implicados en el proceso de electro-recalcado.

7.1.1. Modelo térmico

Consideramos la siguiente ecuación de la energía dada en coordenadas espaciales:

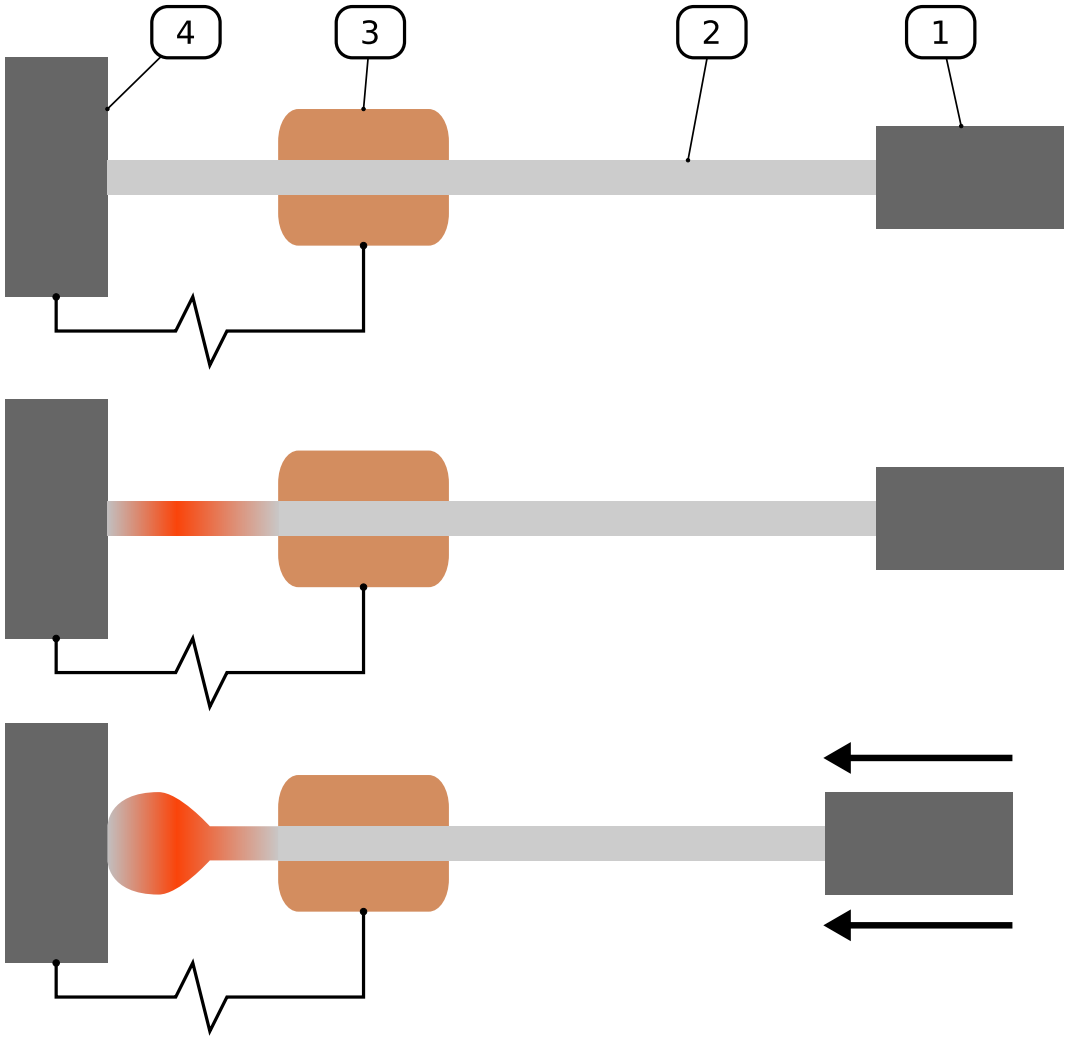


Figura 7.1: Componentes principales del sistema de electrorrecalcado: 1: yunque, 2: barra, 3: mordazas/abrazaderas de sujeción, 4: yunque. Fases del procedimiento.

$$\rho(\mathsf{x},t)\check{c}(\Theta(\mathsf{x},t))\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t}(\mathsf{x},t)+\mathbf{v}(\mathsf{x},t)\cdot\operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\right)=\operatorname{div}\left(\check{k}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\right)+Q(\mathsf{x},t),\quad\forall(\mathsf{x},t)\in\mathcal{T},\tag{7.1}$$

donde $\Theta:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ es el campo de temperatura, $\rho:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ es la densidad, $\check{c}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función de respuesta asociada al calor específico (función de la temperatura), $\check{k}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función de respuesta asociada a la conductividad térmica (función de la temperatura) y $Q:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ es el término fuente que representa el efecto Joule que se obtiene a partir del modelo eléctrico. Además, suponemos que la temperatura es conocida en el instante inicial y en la frontera Dirichlet Γ^{D} a lo largo del tiempo del proceso, y que el flujo de calor admite la siguiente expresión en una parte de la frontera que denotamos por Γ^{R} (considerando transferencia de calor por convección y radiación):

$$-\check{k}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}=\alpha(\mathsf{x},t)\left(\Theta(\mathsf{x},t)-T_{\infty}(\mathsf{x},t)\right)+\epsilon(\mathsf{x},t)\sigma_0\left(\Theta^4(\mathsf{x},t)-T_{\infty}^4(\mathsf{x},t)\right),\tag{7.2}$$

para $\mathsf{x} \in \Gamma_t^R$ y $t \in [t_0, t_f]$, y donde α es el coeficiente de transferencia de calor por convección, $\mathbf{n}(\cdot, t)$ es el vector normal unitario dirigido hacia el exterior del dominio en Γ_t^R, T_∞ es la temperatura externa, ϵ es la emisividad y σ_0 es la constante de Stefan-Boltzmann. Además, en una parte de la frontera de Γ^R se tiene una condición de Neumann nula ($\alpha = 0$, $\epsilon = 0$) y en otra parte se tiene únicamente convección ($\epsilon = 0$).

Por tanto, consideramos el siguiente problema.

Problema 7.1.1. *Problema térmico fuerte en configuración Euleriana.*

Encontrar una función $\Theta : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\rho(\mathsf{x},t)\check{c}(\Theta(\mathsf{x},t))\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t}(\mathsf{x},t) + \mathbf{v}(\mathsf{x},t)\cdot \operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\right) = \operatorname{div}\left(\check{k}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\right) + Q(\mathsf{x},t), \tag{7.3a}$$

para $\mathsf{x} \in \Omega_t$ *y* $t \in [t_0, t_f]$*, sujeta a las condiciones de contorno*

$$\Theta(\mathsf{x},t) = \Theta_D(\mathsf{x},t) \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^{\mathrm{D}}, \tag{7.3b}$$

$$-\check{k}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad}\Theta(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = \alpha(\mathsf{x},t)\left(\Theta(\mathsf{x},t) - T_\infty(\mathsf{x},t)\right) + \epsilon(\mathsf{x},t)\sigma_0\left(\Theta^4(\mathsf{x},t) - T_\infty^4(\mathsf{x},t)\right), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma_t^R, \tag{7.3c}$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$*, y a la condición inicial*

$$\Theta(\mathsf{p}, t_0) = \Theta_0(\mathsf{p}), \quad \forall \mathsf{p} \in \bar{\Omega}. \tag{7.3d}$$

Obsérvese que el Problema 7.1.1 es un caso particular del Problema 3.1.1 de modo que su formulación general no Euleriana es el correspondiente caso particular del Problema 3.1.2:

Problema 7.1.2. *Problema térmico fuerte en configuración no Euleriana,* $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$.

Encontrar una función $\Theta_\tau : \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\rho_\tau \check{c}(\Theta_\tau)\Theta'_\tau = \operatorname{div}_{\mathsf{y}}\left[\det\mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1}\check{k}(\Theta_\tau)\mathbf{F}_\tau^{-T}\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Theta_\tau\right]\frac{1}{\det\mathbf{F}_\tau} + Q_\tau, \tag{7.4a}$$

para $(\mathsf{y}, t) \in \Omega_\tau \times [t_0, t_f]$*, sujeta a las condiciones de contorno*

$$\Theta_\tau = (\Theta_D)_\tau \quad \textit{en} \quad \Gamma_\tau^{\mathrm{D}} \times [t_0, t_f], \tag{7.4b}$$

$$-\check{k}(\Theta_\tau)\mathbf{F}_\tau^{-T}\operatorname{grad}_{\mathsf{y}}\Theta_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_\tau|\left[\alpha_\tau\left(\Theta_\tau - T_{\infty,\tau}\right) + \epsilon_\tau\sigma_0\left(\Theta_\tau^4 - T_{\infty,\tau}^4\right)\right] \quad \textit{en} \quad \Gamma_\tau^R \times [t_0, t_f], \tag{7.4c}$$

y a la condición inicial

$$\Theta_\tau(\cdot, t_0) = \Theta_0(\mathsf{P}(\cdot, \tau)) \quad \textit{en} \quad \bar{\Omega}_\tau. \tag{7.4d}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

Para la configuración Lagrangiana (caso en el que $\tau = t_0$), utilizando el principio de conservación de la masa (4.11) se obtiene el siguiente problema:

Problema 7.1.3. *Problema térmico fuerte en configuración Lagrangiana.*

Encontrar una función $\Theta_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\rho_0 \check{c}(\Theta_m)\dot{\Theta}_m = \text{Div}\left[\det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\check{k}(\Theta_m)\mathbf{F}^{-T}\nabla\Theta_m\right] + \det \mathbf{F} Q_m, \tag{7.5a}$$

para $(\mathsf{p}, t) \in \Omega \times [t_0, t_f]$*, sujeta a las condiciones de contorno*

$$\Theta_m = (\Theta_D)_m \quad en \quad \Gamma^{\mathrm{D}} \times [t_0, t_f], \tag{7.5b}$$

$$-\check{k}(\Theta_m)\mathbf{F}^{-T}\nabla\Theta_m \cdot \mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0} = |\mathbf{F}_\tau^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\left[\alpha_m\left(\Theta_m - T_{\infty,m}\right) + \epsilon_m\sigma_0\left(\Theta_m^4 - T_{\infty,m}^4\right)\right] \quad en \quad \Gamma^R \times [t_0, t_f], \tag{7.5c}$$

y a la condición inicial

$$\Theta_m(\cdot, t_0) = \Theta_0(\cdot) \quad en \quad \bar{\Omega}. \tag{7.5d}$$

Para este Problema 7.1.3 se considera la correspondiente formulación débil que se obtiene de (3.9):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho_0 \check{c}(\Theta_m)\dot{\Theta}_m\tilde{\Theta}d\mathsf{p} + \int_\Omega \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\check{k}(\Theta_m)\mathbf{F}^{-T}\nabla\Theta_m \cdot \nabla\tilde{\Theta}d\mathsf{p} \\
&+ \int_{\Gamma^R} |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}|\left[\alpha_m\left(\Theta_m - T_{\infty,m}\right) + \epsilon_m\sigma_0\left(\Theta_m^4 - T_{\infty,m}^4\right)\right] \det \mathbf{F}\tilde{\Theta}dA_{\mathsf{p}} \\
&= \int_\Omega Q_m \det \mathbf{F}\tilde{\Theta}d\mathsf{p}, \quad \forall\tilde{\Theta} \in H^1_{\Gamma^{\mathrm{D}}}(\Omega).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Se considera ahora el caso de simetría cilíndrica. En el sistema de coordenadas cilíndricas (véase A.3) la temperatura es una función de la forma

$$\Theta_m(\mathsf{p}, t) = \Theta_m(r\cos\theta, r\sin\theta, \mathsf{p}_3, t) = \hat{\Theta}_m(r, \mathsf{p}_3, t). \tag{7.7}$$

y la formulación débil (7.6), considerando funciones test de esta misma forma, se reescribe como sigue:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho}_0 \check{c}(\hat{\Theta}_m)\dot{\hat{\Theta}}_m\tilde{\Theta}rdrd\mathsf{p}_3 + \int_{\hat{\Omega}} \det \hat{\tilde{\mathbf{F}}}\left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\hat{\tilde{\mathbf{F}}}^{-1}\check{k}(\hat{\Theta}_m)\hat{\tilde{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\nabla}\hat{\Theta}_m \cdot \hat{\nabla}\tilde{\Theta}rdrd\mathsf{p}_3 \\
&+ \int_{\hat{\Gamma}^R} |\hat{\tilde{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\left[\alpha_m\left(\hat{\Theta}_m - \hat{T}_{\infty,m}\right) + \epsilon_m\sigma_0\left(\hat{\Theta}_m^4 - \hat{T}_{\infty,m}^4\right)\right] \det \hat{\tilde{\mathbf{F}}}\left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\tilde{\Theta}rdl(r, \mathsf{p}_3) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \hat{Q}_m \det \hat{\tilde{\mathbf{F}}}\left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\tilde{\Theta}rdrd\mathsf{p}_3, \quad \forall\tilde{\Theta} \in H^1_{\hat{\Gamma}^{\mathrm{D}}}(\hat{\Omega}).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

7.1.2. Modelo eléctrico en corriente continua

Consideramos ahora el siguiente problema eléctrico en corriente continua escrito en configuración Euleriana:

$$\operatorname{div}\,(\check{\sigma}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad} V(\mathsf{x},t)) = 0, \quad \forall(\mathsf{x},t)\in\mathcal{T}, \tag{7.9}$$

con las correspondientes condiciones de contorno,

$$V(\mathsf{x},t) = V_D(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x}\in\Gamma_t^{\mathrm{D}},\ \forall t\in(t_0,t_f), \tag{7.10}$$
$$-\check{\sigma}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad} V(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = g(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x}\in\Gamma_t^{R},\ \forall t\in(t_0,t_f), \tag{7.11}$$

donde

- $V:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ es un potencial eléctrico escalar[1],
- $\check{\sigma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función que proporciona la conductividad eléctrica a partir de la temperatura Θ,
- $g:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ es un campo escalar que identifica la componente normal del vector densidad de corriente[2]a través de la frontera Γ_t^R,
- $\mathbf{n}(\cdot,t)$ es el vector normal unitario dirigido hacia el exterior del dominio en Γ_t.

Se define entonces el siguiente problema:

Problema 7.1.4. *Problema eléctrico fuerte de corriente continua en configuración Euleriana.*

Encontrar una función $V:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{div}\,(\check{\sigma}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad} V(\mathsf{x},t)) = 0, \tag{7.12a}$$

para $\mathsf{x}\in\Omega_t$ y $t\in[t_0,t_f]$, sujeta a las condiciones de contorno

$$V(\mathsf{x},t) = V_D(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x}\in\Gamma_t^{\mathrm{D}}, \tag{7.12b}$$
$$-\check{\sigma}(\Theta(\mathsf{x},t))\operatorname{grad} V(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = g(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x}\in\Gamma_t^{R}, \tag{7.12c}$$

para todo $t\in[t_0,t_f]$.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Obsérvese que el Problema 7.1.4 es un caso particular del Problema 3.1.1, donde no hay derivada material con respecto al tiempo y el término fuente es nulo, de modo que su transformación a una formulación general no Euleriana se obtiene a partir del Problema 3.1.2, particularizándolo para este caso, en concreto,

[1] V es tal que $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$, siendo $\mathbf{E}$ el campo eléctrico.
[2] $g = \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}$ donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente, $\mathbf{J} = \check{\sigma}\circ\Theta\mathbf{E}$.

Problema 7.1.5. *Problema eléctrico fuerte de corriente continua en configuración no Euleriana,* $\Omega_\tau \times [t_0, t_f]$.

Encontrar una función $V_\tau : \bar{\Omega}_\tau \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\operatorname{div}_{\mathsf{y}} \left[\det \mathbf{F}_\tau \mathbf{F}_\tau^{-1} \check{\sigma}(\Theta_\tau) \mathbf{F}_\tau^{-T} \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} V_\tau \right] = 0, \tag{7.13a}$$

para $(\mathsf{y}, t) \in \Omega_\tau \times [t_0, t_f]$, *sujeta a las condiciones de contorno,*

$$V_\tau = (V_D)_\tau, \quad en \quad \Gamma_\tau^{\mathrm{D}} \times [t_0, t_f], \tag{7.13b}$$

$$-\check{\sigma}(\Theta_\tau) \mathbf{F}_\tau^{-T} \operatorname{grad}_{\mathsf{y}} V_\tau \cdot \mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau = |\mathbf{F}_\tau^{-T} \mathbf{m}_\tau| g_\tau, \quad en \quad \Gamma_\tau^{R} \times [t_0, t_f]. \tag{7.13c}$$

Para la configuración Lagrangiana (caso $\tau = t_0$) se obtiene el siguiente problema:

Problema 7.1.6. *Problema eléctrico fuerte de corriente continua en configuración Lagrangiana.*

Encontrar una función $V_m : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\operatorname{Div} \left[\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \check{\sigma}(\Theta_m) \mathbf{F}^{-T} \nabla V_m \right] = 0, \tag{7.14a}$$

en $\Omega \times [t_0, t_f]$, *sujeta a las condiciones de contorno*

$$V_m = (V_D)_m \quad en \quad \Gamma^{\mathrm{D}} \times [t_0, t_f], \tag{7.14b}$$

$$-\check{\sigma}(\Theta_m) \mathbf{F}^{-T} \nabla V_m \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0} = |\mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0}| g_m \quad en \quad \Gamma^{R} \times [t_0, t_f]. \tag{7.14c}$$

Para este problema se considera la correspondiente formulación débil que se obtiene de (3.9):

$$\int_\Omega \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \check{\sigma}(\Theta_m) \mathbf{F}^{-T} \nabla V_m \cdot \nabla \tilde{V} d\mathsf{p} + \int_{\Gamma^R} |\mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0}| g_m \det \mathbf{F} \tilde{V} dA_{\mathsf{p}} = 0, \quad \forall \tilde{V} \in H^1_{\Gamma^{\mathrm{D}}}(\Omega). \tag{7.15}$$

Se considera ahora el caso de simetría cilíndrica. En el sistema de coordenadas cilíndricas (véase A.3) el potencial es una función de la forma

$$V_m(\mathsf{p}, t) = V_m(r\cos\theta, r\sin\theta, \mathsf{p}_3, t) = \hat{V}_m(r, \mathsf{p}_3, t), \tag{7.16}$$

USC UNIVERSIDADE DE COMPOSTELA

y la formulación débil (7.15), considerando funciones test de esta misma forma, se reescribe como sigue:

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{\Omega}} \det \hat{\hat{\mathbf{F}}} \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right) \hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-1} \check{\sigma}(\hat{\Theta}_m) \hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T} \hat{\nabla} \hat{V}_m \cdot \hat{\nabla} \tilde{V} r dr d\mathsf{p}_3 \\ &+ \int_{\hat{\Gamma}^R} |\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T} \hat{\mathbf{m}}_{t_0}| \hat{g}_m \det \hat{\hat{\mathbf{F}}} \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right) \tilde{V} r dl(r, \mathsf{p}_3) = 0, \quad \forall \tilde{V} \in H^1_{\hat{\Gamma}^{\mathrm{D}}}(\hat{\Omega}). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Observación 7.1.7. *El término fuente en el problema térmico $Q(\mathsf{x},t)$ es debido al efecto Joule:*

$$Q(\mathsf{x},t) = \mathbf{J}(\mathsf{x},t)\cdot\mathbf{E}(\mathsf{x},t), \tag{7.18}$$

y los términos de esta expresión pueden darse en función del potencial eléctrico

$$Q(\mathsf{x},t) = \check{\sigma}\circ\Theta(\mathsf{x},t)\,\mathrm{grad}\,V(\mathsf{x},t)\cdot\,\mathrm{grad}\,V(\mathsf{x},t). \tag{7.19}$$

Utilizando la regla de la cadena se obtiene la misma expresión del término fuente en una configuración no Euleriana

$$Q_\tau(\mathsf{y},t) = \check{\sigma}\circ\Theta_\tau(\mathsf{y},t)\,\mathrm{grad}_{\,\mathsf{y}}V_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t)\cdot\,\mathrm{grad}_{\,\mathsf{y}}V_\tau(\mathsf{y},t)\mathbf{F}_\tau^{-1}(\mathsf{y},t), \tag{7.20}$$

y en el caso de una configuración Lagrangiana:

$$Q_m(\mathsf{p},t) = \check{\sigma}\circ\Theta_m(\mathsf{p},t)\nabla V_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-1}(\mathsf{p},t)\cdot\nabla V_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-1}(\mathsf{p},t), \tag{7.21}$$

y si se considera ahora la simetría cilíndrica (véase A.3)

$$\hat{Q}_m(r,\mathsf{p}_3,t) = \check{\sigma}\circ\hat{\Theta}_m(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\nabla}\hat{V}_m(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-1}(r,\mathsf{p}_3,t)\cdot\hat{\nabla}\hat{V}_m(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-1}(r,\mathsf{p}_3,t). \tag{7.22}$$

7.1.3. Modelo mecánico

Se plantea a continuación la parte mecánica del problema de electrorrecalcado. Para ello, partiendo del Problema 4.1.1 del movimiento, se considerará una ley constitutiva viscoplástica bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y elasticidad lineal isótropa.

A continuación, se describirán los distintos elementos que componen esta ley constitutiva de una forma simplificada. Para una descripción con mayor detalle puede consultarse, por ejemplo, [58].

Cinemática

En esta sección nos remitimos a los conceptos de la mecánica de los medios continuos introducidos en el Capítulo 2. Se considera un movimiento X y se denota su gradiente por $\mathbf{F}$. El determinante del gradiente de deformaciones relaciona el volumen de una región infinitesimal en la configuración deformada con el volumen en la configuración de referencia. Cuando $\det\mathbf{F} = 1$ la deformación es isocórica.

Por otra parte, $\mathbf{F}$ admite una descomposición polar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}; \qquad \mathbf{V} = \mathbf{RUR}^T, \tag{7.23}$$

donde $\mathbf{R}$ es el tensor ortogonal local de rotación y donde los tensores simétricos definidos positivos $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son, respectivamente, los tensores derecho e izquierdo de estiramiento.

Se definen los tensores de deformación de Cauchy-Green derecho e izquierdo de la forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \tag{7.24}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \tag{7.25}$$

Otro tensor importante es el de Green-Lagrange (también llamado de Green-Saint Venant)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}).$$

La medida de la deformación local de un cuerpo establece la tensión. En un movimiento, las deformaciones provocan cambios en las distancias entre dos puntos. Las traslaciones y rotaciones, al no alterar las distancias, no producen tensiones.

Dejando por un momento el rigor matemático damos una explicación sencilla sobre el significado de estos tensores: como la distancia infinitesimal entre dos puntos en la configuración deformada viene dada por $dx = \mathbf{F}dp$, se puede cuantificar el estiramiento, de la siguiente manera:

$$\|dx\|^2 = \mathbf{F}dp \cdot \mathbf{F}dp = \mathbf{F}^T\mathbf{F}dp \cdot dp = \mathbf{U}^2\|dp\|^2 = \mathbf{C}\|dp\|^2. \tag{7.26}$$

Por otra parte, como $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$ se tiene

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u}, \tag{7.27}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + \nabla\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u})^T, \tag{7.28}$$
$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u}). \tag{7.29}$$

Si las deformaciones son infinitesimales se pueden despreciar los términos de segundo orden, $(\nabla\mathbf{u})^T\nabla\mathbf{u} \approx \nabla\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u})^T \approx \mathbf{0}$, y se obtienen la siguientes aproximaciones:

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{B} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T, \tag{7.30}$$
$$\mathbf{G} \approx \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right). \tag{7.31}$$

siendo $\mathbf{E}$ el llamado tensor de deformaciones infinitesimales.

En este caso, la medida de la deformación adquiere la forma $\|dx\|^2 = (\mathbf{I} + 2\mathbf{E})\|dp\|^2 + o(\nabla\mathbf{u})$.

El vector de tensiones de Cauchy $\mathbf{s}(\mathsf{x}, t, \mathbf{n})$ es un campo espacial dependiente de la normal $\mathbf{n}$ a la superficie considerada en el punto x. Puede definirse a través del tensor de tensiones de Cauchy: $\mathbf{s}(\mathsf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathsf{x}, t)\mathbf{n}$. El tensor de tensiones de Cauchy es un campo tensorial simétrico que se define en la configuración Euleriana (es decir, en la deformada) a partir del cual pueden definirse otros tensores de tensiones en configuración Lagrangiana:

- Primer tensor de Piola-Kirchhoff: $\mathbf{S} = \det \mathbf{F}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}$.
- Segundo tensor de Piola-Kirchhoff: $\mathbf{P} = \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}$.
- Tensor de tensiones de Kirchhoff: $\boldsymbol{\tau} = \det \mathbf{F}\mathbf{T}_m$.

Nótese que $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$ y $\boldsymbol{\tau}$ son tensores simétricos, mientras que el primer tensor de Piola-Kirchoff $\mathbf{S}$ no lo es en general.

El campo espacial $\mathbf{L}$ definido como

$$\mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{v}, \tag{7.32}$$

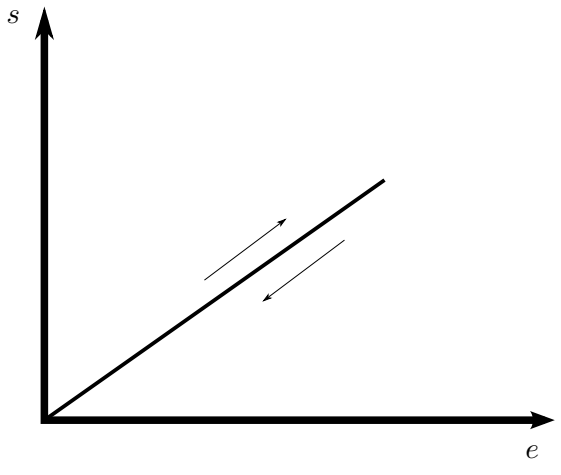
se conoce como el gradiente de la velocidad. Su parte simétrica

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T),$$

se denomina tensor de la tasa de deformación (*strain rate tensor*).

Elasticidad lineal

A nivel fenomenológico un sólido elástico se caracteriza por una serie de comportamientos claramente definidos. Un sólido elástico se deforma de manera reversible, es decir, al retirar las cargas el sólido recupera su forma original. La deformación del sólido depende únicamente del esfuerzo al que está sometido, y no de la velocidad de la carga ni de la historia. En el caso de elasticidad lineal, la tensión es una función lineal de la deformación. Este comportamiento se puede observar en un ensayo de tensión uniaxial representado en la Figura 7.2, donde una pieza cilíndrica de sección inicial A_0 y longitud inicial L_0 es sometida a una fuerza axial P que provoca una deformación tal que la longitud final es L y la sección final es A. Después, se deja de aplicar la fuerza axial y la pieza recupera su forma inicial. Los ejes representan $s = \frac{P}{A_0}$ y $e = \frac{L}{L_0} - 1$.



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Figura 7.2: Ensayo de tensión uniaxial para un material elástico lineal.

El tensor de tensiones de Cauchy $\mathbf{T}$ para un cuerpo elástico admite la siguiente expresión:

$$\mathbf{T}(\mathsf{x}, t) = \check{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathsf{p}, t), \mathsf{p})_{|\mathsf{p}=\mathsf{P}(\mathsf{x},t)}, \quad \forall (\mathsf{x}, t) \in \mathcal{T}, \tag{7.33}$$

y en consecuencia

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t)=\check{\mathbf{S}}(\mathbf{F}(\mathsf{p},t),\mathsf{p}),\quad \mathbf{P}(\mathsf{p},t)=\check{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathsf{p},t),\mathsf{p}),\quad \forall(\mathsf{p},t)\in\bar{\Omega}\times[t_0,t_f]. \tag{7.34}$$

Dado $\mathsf{p}\in\bar{\Omega}$, se introduce el tensor de elasticidad en el punto material p como la aplicación lineal $\mathcal{C}(\mathsf{p}):\mathrm{Lin}\longrightarrow\mathrm{Lin}$, definida por

$$\mathcal{C}(\mathsf{p})=D_{\mathbf{F}}\check{\mathbf{S}}(\mathbf{I},\mathsf{p}). \tag{7.35}$$

Lema 7.1.1. *En ausencia de tensiones residuales, es decir, si* $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{I},\mathsf{p})=\mathbf{0}$ *se tiene*

$$\mathcal{C}(\mathsf{p})=D_{\mathbf{F}}\check{\mathbf{T}}(\mathbf{I},\mathsf{p})=D_{\mathbf{F}}\check{\mathbf{P}}(\mathbf{I},\mathsf{p}). \tag{7.36}$$

Demostración. La demostración de la primera igualdad se puede consultar en [27] (pág. 194) y de forma análoga se demuestra la segunda igualdad. Concretamente, en primer lugar derivamos la siguiente ecuación con respecto a $\mathbf{F}$:

$$\check{\mathbf{S}}(\mathbf{F},\mathsf{p})=\mathbf{F}\check{\mathbf{P}}(\mathbf{F},\mathsf{p}), \tag{7.37}$$

y obtenemos

$$D_{\mathbf{F}}\check{\mathbf{S}}(\mathbf{F},\mathsf{p})[\mathbf{H}]=\mathbf{H}\check{\mathbf{P}}(\mathbf{F},\mathsf{p})+\mathbf{F}D_{\mathbf{F}}\check{\mathbf{P}}(\mathbf{F},\mathsf{p})[\mathbf{H}],\quad \forall\mathbf{H}\in\mathrm{Lin}, \tag{7.38}$$

donde hemos utilizado la regla del producto. Finalmente el resultado se deduce evaluando esta expresión en $\mathbf{F}=\mathbf{I}$ y teniendo en cuenta que las tensiones residuales son nulas. □

Nótese que las ecuaciones constitutivas para cuerpos elásticos dadas en (7.33)-(7.34) se pueden linealizar despreciando los términos $o(\nabla\mathbf{u})$ en los siguientes desarrollos de Taylor:

$$\mathbf{T}_m(\mathsf{p},t)=\check{\mathbf{T}}(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t),\mathsf{p})=\check{\mathbf{T}}(\mathbf{I},\mathsf{p})+\mathcal{C}(\mathsf{p})[\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t))=\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{E}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)), \tag{7.39}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t)=\check{\mathbf{S}}(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t),\mathsf{p})=\check{\mathbf{S}}(\mathbf{I},\mathsf{p})+\mathcal{C}(\mathsf{p})[\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t))=\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{E}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)), \tag{7.40}$$

$$\mathbf{P}(\mathsf{p},t)=\check{\mathbf{P}}(\mathbf{I}+\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t),\mathsf{p})=\check{\mathbf{P}}(\mathbf{I},\mathsf{p})+\mathcal{C}(\mathsf{p})[\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t))=\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{E}(\mathsf{p},t)]+o(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)), \tag{7.41}$$

para $(\mathsf{p},t)\bar{\Omega}\times[t_0,t_f]$, donde se ha asumido que las tensiones residuales son nulas. En las ecuaciones anteriores se ha utilizado el Lema 7.1.1 y que $\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{W}]=\mathbf{0}$, $\forall\,\mathbf{W}\in$ Skw donde Skw representa el espacio de los tensores antisimétricos (ver [27], pág. 195). Entonces, en ausencia de tensiones residuales y asumiendo que los términos $o(\nabla\mathbf{u})$ pueden ser despreciados, se obtienen las siguientes aproximaciones:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\mathbf{T}_m(\mathsf{p},t)\simeq\mathbf{S}(\mathsf{p},t)\simeq\mathbf{P}(\mathsf{p},t)\simeq\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{E}(\mathsf{p},t)],\quad \forall(\mathsf{p},t)\in\bar{\Omega}\times[t_0,t_f]. \tag{7.42}$$

Para el caso de un material isótropo el tensor de elasticidad tiene la siguiente expresión (ver [27], pág. 196)

$$\mathcal{C}(\mathsf{p})[\mathbf{H}] = 2\mu(\mathsf{p})\mathbf{H} + \lambda(\mathsf{p})(\operatorname{tr}\mathbf{H})\mathbf{I}, \tag{7.43}$$

para $\mathbf{H} \in \mathrm{Sym}$, y donde μ y λ son campos materiales con valores escalares que se denominan coeficientes de Lamé del material. Entonces, en las situaciones en las que los términos $o(\nabla\mathbf{u})$ pueden ser despreciados y el material es elástico e isótropo, podemos expresar el tensor $\mathbf{S}$ en función de $\mathbf{E}$, o viceversa, como sigue:

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{E})\mathbf{I}, \tag{7.44}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{S} - \frac{\lambda}{2\mu + d\lambda}(\operatorname{tr}\mathbf{S})\mathbf{I}\right), \tag{7.45}$$

y además se verifica (recordemos que d es la dimensión espacial)

$$\operatorname{tr}\mathbf{S} = (2\mu + d\lambda)\operatorname{tr}\mathbf{E}. \tag{7.46}$$

Nótese que esta igualdad se escribe en función del módulo de compresibilidad $K = \frac{1}{d}(2\mu + d\lambda)$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{tr}\mathbf{S} = d \cdot K(\operatorname{tr}\mathbf{E}). \tag{7.47}$$

En algunas ocasiones es conveniente descomponer el tensor $\mathbf{S}$ en partes esférica y desviatoria e introducir una nueva variable π asociada a la parte esférica que se puede interpretar como la presión hidrostática a la que está sometida el cuerpo. En concreto,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{d}(\operatorname{tr}\mathbf{S})\mathbf{I} = \mathbf{S}^{\mathrm{d}} - \pi\mathbf{I}, \tag{7.48}$$

siendo $\pi = -\frac{1}{d}(\operatorname{tr}\mathbf{S})$ y donde el superíndice d denota la parte desviatoria del tensor correspondiente. Empleando estas notaciones, es inmediato comprobar que se verifica la siguiente equivalencia (nótese que $\operatorname{tr}\mathbf{E} = \operatorname{Div}\mathbf{u}$):

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E}^{\mathrm{d}} - \pi\mathbf{I}, \\ \operatorname{Div}\mathbf{u} = -\dfrac{\pi}{K}. \end{cases} \tag{7.49}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Elastoplasticidad para pequeñas deformaciones

Los materiales elastoplásticos son aquellos que tras ser sometidos a determinadas cargas presentan deformaciones permanentes (plásticas) cuando se retiran todas las cargas aplicadas. Estos materiales, entre otros los metales, presentan una serie de características que pueden ser identificadas en un ensayo de tensión uniaxial (ver [38]). Típicamente, estos ensayos uniaxiales sobre metales dúctiles presentan una curva tensión-deformación como la que se aprecia en la Figura 7.3, en la cual se representa el ensayo en el que una pieza cilíndrica de sección inicial A_0 y longitud inicial L_0 es sometida a una fuerza P. Los

ejes representan $s = \frac{P}{A_0}$ y $e = \frac{L}{L_0} - 1$. En su deformación, el material transita por los puntos O, A y B; en ese punto se retira la fuerza, retornando la pieza a la situación C, obteniéndose como resultado una deformación permanente e^{p}. Si se repite el ensayo, el punto de partida es C y si en el ensayo no se supera el punto B, al retirar la fuerza la pieza retorna al punto C. Este ensayo muestra que existe un dominio elástico definido por la *tensión de fluencia*, que si no se supera, las deformaciones son reversibles. Si se supera la *tensión de fluencia* se alcanza un régimen plástico de deformaciones permanentes que provocan, a su vez, una evolución de la tensión de fluencia que se denomina *endurecimiento*. En el ejemplo las tensiones de fluencia están indicadas por los puntos A y B.

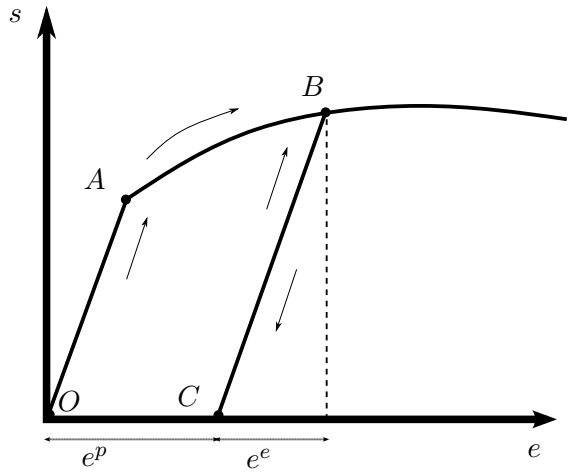


Figura 7.3: Ensayo de tensión uniaxial para material elástoplástico.

El fenómeno descrito en este ensayo puede modelizarse matemáticamente para obtener un conjunto de ecuaciones para el caso uniaxial. En el caso de pequeñas deformaciones se considera una descomposición aditiva de la deformacion infinitesimal uniaxial

$$\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{e}} + \varepsilon^{\mathrm{p}}, \tag{7.50}$$

donde ε^{e} representa la parte elástica de la deformación infinitesimal uniaxial y ε^{p} la parte plástica o irreversible. Considerando el modelo de elasticidad lineal para la parte elástica, la tensión uniaxial σ puede expresarse como

$$\sigma = E\varepsilon^{e}, \tag{7.51}$$

para un parámetro E llamado módulo de elasticidad de Young. El comportamiento del material vendrá determinado por el régimen en que se encuentra en cada momento, ya sea elástico o plástico y la característica que define la frontera entre los dos es la tensión de fluencia σ_y. Se define ahora un criterio de fluencia en base a una función de fluencia que permite determinar el régimen del material. Así, la función de fluencia

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y, \tag{7.52}$$

permite caracterizar el dominio elástico como

$$\mathcal{E} = \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0\}. \tag{7.53}$$

Además, la tensión máxima admisible es la tensión de fluencia de manera que siempre se verifica la desigualdad

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0. \tag{7.54}$$

En el dominio elástico solo se puede producir deformación elástica y, por tanto,

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0, \\ \neq 0 & \text{si } \Phi(\sigma, \sigma_y) = 0, \end{cases} \tag{7.55}$$

de modo que se puede considerar la siguiente ecuación para definir la evolución temporal de la deformación plástica (regla del flujo plástico)

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}\ \mathrm{sign}(\sigma), \tag{7.56}$$

donde $\dot{\gamma}$ se denomina *multiplicador plástico* y toma valores no negativos. Además, satisface la condición de complementariedad $\Phi(\sigma, \sigma_y)\dot{\gamma} = 0$, asociada con la condición (7.55). El último elemento necesario para definir el comportamiento elastoplástico es una ley de endurecimiento de modo que la tensión de fluencia σ_y no sea una constante sino una función de la deformación plástica acumulada

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}(s)| ds.$$

El desarrollo de este modelo junto con la generalización a dos y tres dimensiones pueden consultarse en [58, Cap. 6]).

Elasto-visco-plasticidad para pequeñas deformaciones

El comportamiento elasto-visco-plástico se puede observar en materiales como metales sometidos a altas temperaturas. Se caracteriza por un comportamiento similar a la elastoplasticidad pero dependiente de la velocidad de la deformación. En un ensayo uniaxial con velocidad de deformación constante, para diferentes velocidades de deformación se pueden observar las curvas tensión-deformación de la Figura 7.4. Cada uno de los ensayos se realiza con una nueva pieza y una velocidad de deformación diferente. Puede observarse que cada curva del ensayo tiene un comportamiento equivalente a la curva obtenida para materiales elastoplásticos.

La modelización de este comportamiento es similar a la de la elastoplasticidad, compartiendo los mismo elementos e introduciendo una nueva ecuación para definir la evolución temporal de la deformación plástica. En este caso, la expresión toma la siguiente forma

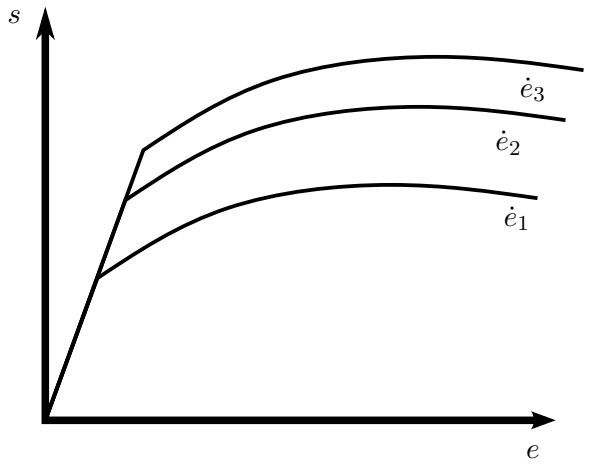


Figura 7.4: Ensayo uniaxial con velocidad de deformación constante para un material elasto-visco-plástico.

$$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \dot{\gamma}(\sigma, \sigma_y)\ \mathrm{sign}\ (\sigma), \tag{7.57}$$

y el multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ puede ser definido de varias formas. A modo de ejemplo, se reproduce a continuación el modelo empleado en [58]

$$\dot{\gamma}(\sigma, \sigma_y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}\left[\left(\dfrac{|\sigma|}{\sigma_y}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} - 1\right] & \Phi(\sigma, \sigma_y) \geq 0, \\ 0 & \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0, \end{cases} \tag{7.58}$$

donde las constantes del material son ν, parámetro relacionado con las viscosidad, y el parámetro adimensional ϵ. Estos parámetros pueden depender de la temperatura.

Este modelo, al igual que en el caso de la elastoplasticidad, puede generalizarse al caso multidimensional, cuya definición puede consultarse en [58, Cap. 11].

Elasto-visco-plasticidad: modelo aditivo de Anand para pequeñas deformaciones

A continuación se introduce un modelo elasto-visco-plástico que se obtiene asumiendo pequeñas deformaciones, considerando una descomposición aditiva del tensor de deformaciones en parte elástica y plástica, y utilizando el modelo de Anand para describir el comportamiento plástico del material [59]. Nótese que en estas circunstancias, el tensor de tensiones no corresponde a la totalidad del tensor de deformaciones sino solo a una parte elástica. En concreto, se tiene

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{e}} + \mathbf{E}^{\mathrm{p}},$$

donde el primer sumando representa el tensor de las deformaciones elásticas y el segundo el tensor de las deformaciones plásticas, ambos en su versión infinitesimal. Se considera la siguiente ley constitutiva:

$$\mathbf{S}(\mathsf{p}, t) = \mathcal{C}(\mathsf{p})\left(\mathbf{E}^{\mathrm{e}}(\mathsf{p}, t)\right) = \mathcal{C}(\mathsf{p})\left(\mathbf{E}(\mathsf{p}, t) - \mathbf{E}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p}, t)\right), \quad \forall (\mathsf{p}, t) \in \bar{\Omega} \times [t_0, t_f], \tag{7.59}$$

siendo $\mathcal{C}(\mathsf{p})$ el tensor de elasticidad dado en (7.43) y donde la evolución temporal del tensor de deformaciones plásticas $\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}}$ se modela como sigue:

$$\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t) = \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t)}{q(\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t))}\right), \tag{7.60}$$

$$\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t) = A\exp\left(-\frac{Q}{R\cdot\Theta_m(\mathsf{p},t)}\right)\left[\sinh\left(\xi\frac{q(\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t))}{s(\mathsf{p},t)}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{7.61}$$

$$\dot{s}(\mathsf{p},t) = \left\{h_0\left|1-\frac{s(\mathsf{p},t)}{s^*(\mathsf{p},t)}\right|^a \operatorname{sign}\left(1-\frac{s(\mathsf{p},t)}{s^*(\mathsf{p},t)}\right)\right\}\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t), \tag{7.62}$$

$$s^*(\mathsf{p},t) = \widetilde{s}\left[\frac{\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\cdot\Theta_m(\mathsf{p},t)}\right)\right]^n, \tag{7.63}$$

para $(\mathsf{p},t)\in\bar{\Omega}\times[t_0,t_f]$, siendo $q:\mathrm{Lin}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ la aplicación definida por

$$q(\mathbf{H}) = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}, \quad \forall\mathbf{H}\in\mathrm{Lin}. \tag{7.64}$$

De este modo, para modelar la evolución temporal del tensor de deformaciones plásticas, se añade una única variable interna $s(\mathsf{p},t)$. Nótese que, a partir de (7.60) y asumiendo que el tensor de deformaciones plásticas en el instante inicial tiene traza nula, se deduce que dicho tensor tienen traza nula en todo instante de tiempo y para todo punto material (ya que $\operatorname{tr}\mathbf{S}^{\mathrm{d}}=0$). Utilizando esta propiedad y que el tensor de elasticidad tiene la forma dada en (7.43), se deduce

$$\mathbf{S} = 2\mu\left(\mathbf{E}-\mathbf{E}^{\mathrm{p}}\right)+\lambda\operatorname{Div}\mathbf{u}\mathbf{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{S} = 2\mu\left(\mathbf{E}^{\mathrm{d}}-\mathbf{E}^{\mathrm{p}}\right)-\pi\mathbf{I}, \\ \operatorname{Div}\mathbf{u} = -\dfrac{\pi}{K}, \end{cases} \tag{7.65}$$

$$\mathbf{S}^{\mathrm{d}} = 2\mu(\mathbf{E}^{\mathrm{d}}-\mathbf{E}^{\mathrm{p}}). \tag{7.66}$$

Incorporando esta ley constitutiva a la ecuación del movimiento en configuración Lagrangiana definida en el Problema 4.1.3 se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\rho_0(p)\ddot{\mathbf{u}}(\mathsf{p},t) - \operatorname{Div}\left(\mathbf{S}(\mathsf{p},t)\right) = \det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)\mathbf{b}_m(\mathsf{p},t), \tag{7.67}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t) = 2\mu(\mathsf{p})\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)+\nabla\mathbf{u}^T(\mathsf{p},t)\right)-\mathbf{E}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)\right]+\lambda(\mathsf{p})\operatorname{Div}\mathbf{u}(\mathsf{p},t)\mathbf{I}, \tag{7.68}$$

USC DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

o equivalentemente,

$$\rho_0(\mathsf{p})\ddot{\mathbf{u}}(\mathsf{p},t) - \operatorname{Div}\left(\mathbf{S}(\mathsf{p},t)\right) = \det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)\mathbf{b}_m(\mathsf{p},t), \tag{7.69}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t) = 2\mu(\mathsf{p})\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t)+\nabla\mathbf{u}^T(\mathsf{p},t)\right)-\mathbf{E}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)\right]-\left(1-\frac{2\mu(\mathsf{p})}{d\cdot K(\mathsf{p})}\right)\pi(\mathsf{p},t)\mathbf{I}, \tag{7.70}$$

$$\operatorname{Div}\mathbf{u}(\mathsf{p},t) = -\frac{\pi(\mathsf{p},t)}{K(\mathsf{p})}, \tag{7.71}$$

siendo $(\mathsf{p},t) \in \Omega \times (t_0,t_f)$, y donde la evolución temporal del tensor de deformaciones plástico $\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}}$ se modela a través de las ecuaciones (7.60)-(7.63). En las ecuaciones anteriores se ha tenido en cuenta que $\dot{\mathbf{v}}_m = \ddot{\mathbf{u}}$ y que $\mathbf{S} = \det \mathbf{F}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}$.

Con respecto a las condiciones de contorno, además de las de Dirichlet (desplazamiento impuesto) y de Neumann (fuerza impuesta), en el problema de electrorrecalcado es necesario considerar las correspondientes al contacto con un obstáculo rígido (el yunque), llamadas condiciones de contacto unilateral sin fricción. Supongamos que este obstáculo ocupa un subconjunto abierto C en $\mathbb{R}^d$. Entonces las condiciones de contorno de Dirichlet, de Neumann y de contacto unilateral se escriben de la forma,

$$\mathbf{u}(\mathsf{p},t) = \mathbf{u}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t), \quad \forall \mathsf{p} \in \Gamma^D, \tag{7.72}$$
$$\mathbf{T}(\mathsf{x},t)\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = \mathbf{h}(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma^R_t, \tag{7.73}$$
$$\mathsf{x} \notin \mathsf{C}, \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma^C_t, \tag{7.74}$$
$$\mathbf{T}(\mathsf{x},t)\mathbf{n}(\mathsf{x},t) = -\tilde{\zeta}(\mathsf{x},t)\mathbf{n}(\mathsf{x},t), \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma^C_t, \tag{7.75}$$
$$\tilde{\zeta}(\mathsf{x},t) \geq 0, \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma^C_t, \tag{7.76}$$
$$\tilde{\zeta}(\mathsf{x},t) = 0, \quad \text{si } \mathsf{x} \notin \partial\mathsf{C}, \quad \forall \mathsf{x} \in \Gamma^C_t, \tag{7.77}$$

para $t \in [t_0,t_f]$, siendo $\tilde{\zeta} : \bigcup_{t\in[t_0,t_f]} \Gamma^C_t \times \{t\} \to \mathbb{R}$ y Γ^C_t la parte de la frontera del cuerpo susceptible de entrar en contacto con la frontera del obstáculo C.

Nótese que salvo la condición de Dirichlet, las demás están escritas para la configuración Euleriana. Estas condiciones de contorno admiten un tratamiento semejante a las condiciones del Problema 4.1.3 para obtener la siguientes expresiones en configuración Lagrangiana:

$$\mathbf{u}(\mathsf{p},t) = \mathbf{u}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t), \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^D \times [t_0,t_f], \tag{7.78}$$
$$\mathbf{T}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t) = |\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t)|\mathbf{h}_m(\mathsf{p},t), \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^R \times [t_0,t_f], \tag{7.79}$$
$$\mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \mathsf{C}, \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.80}$$
$$\mathbf{T}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t) = -\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t), \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.81}$$
$$\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) \geq 0, \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.82}$$
$$\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) = 0, \quad \text{si } \mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \partial\mathsf{C}, \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.83}$$

con $\tilde{\zeta}_m : \Gamma^C \times [t_0,t_f] \to \mathbb{R}$.

Las condiciones (7.80)-(7.83), asociadas con el contacto unilateral, se justifican en [60].

Finalmente se obtiene el siguiente problema fuerte en coordenadas Lagrangianas:

Problema 7.1.8. *Problema fuerte mecánico elasto-visco-plástico en configuración Lagrangiana.*

Encontrar tres funciones $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $\mathbf{E}^{\mathrm{p}} : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to Lin$ *y* $s : \bar{\Omega} \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$\rho_0(\mathsf{p})\ddot{\mathbf{u}}(\mathsf{p},t) - \operatorname{Div}(\mathbf{S}(\mathsf{p},t)) = \det \mathbf{F}(\mathsf{p},t)\mathbf{b}_m(\mathsf{p},t), \tag{7.84a}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t) = 2\mu(\mathsf{p})\left[\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u}(\mathsf{p},t) + \nabla\mathbf{u}^T(\mathsf{p},t)\right) - \mathbf{E}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)\right] + \lambda(\mathsf{p})\operatorname{Div}\mathbf{u}(\mathsf{p},t)\mathbf{I}, \tag{7.84b}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t) = \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)\left(\frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t)}{q(\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t))}\right), \tag{7.84c}$$

$$\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t) = A\exp\left(-\frac{Q}{R\cdot\Theta_m(\mathsf{p},t)}\right)\left[\sinh\left(\xi\frac{q(\mathbf{S}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t))}{s(\mathsf{p},t)}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{7.84d}$$

$$\dot{s}(\mathsf{p},t) = \left\{h_0\left|1 - \frac{s(\mathsf{p},t)}{s^*(\mathsf{p},t)}\right|^a \operatorname{sign}\left(1 - \frac{s(\mathsf{p},t)}{s^*(\mathsf{p},t)}\right)\right\}\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t), \tag{7.84e}$$

$$s^*(\mathsf{p},t) = \widetilde{s}(\mathsf{p},t)\left[\frac{\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}(\mathsf{p},t)}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\cdot\Theta_m(\mathsf{p},t)}\right)\right]^n, \tag{7.84f}$$

para $(\mathsf{p},t) \in \Omega \times [t_0, t_f]$*, sujetas a las condiciones de contorno*

$$\mathbf{u}(\mathsf{p},t) = \mathbf{u}^{\mathrm{d}}(\mathsf{p},t), \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^D \times [t_0,t_f], \tag{7.84g}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t) = \det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)|\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t)|\mathbf{h}_m(\mathsf{p},t), \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^R \times [t_0,t_f], \tag{7.84h}$$

$$\mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \mathsf{C}, \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.84i}$$

$$\mathbf{S}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t) = -\det\mathbf{F}(\mathsf{p},t)\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t)\mathbf{F}^{-T}(\mathsf{p},t)\mathbf{m}_{t_0}(\mathsf{p},t), \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.84j}$$

$$\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) \geq 0, \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.84k}$$

$$\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) = 0 \quad \text{si } \mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \partial\mathsf{C}, \quad \forall(\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0,t_f], \tag{7.84l}$$

y a las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(\cdot,t_0) = \mathbf{0} \quad en\ \bar{\Omega}, \tag{7.84m}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\cdot,t_0) = \mathbf{v}^0 \quad en\ \bar{\Omega}, \tag{7.84n}$$

$$\mathbf{E}^p(\cdot,t_0) = \mathbf{0} \quad en\ \bar{\Omega}, \tag{7.84ñ}$$

$$s(\cdot,t_0) = s^0 \quad en\ \bar{\Omega}. \tag{7.84o}$$

Nótese que se ha utilizado el principio de conservación de la masa (4.11).

Para obtener una formulación débil del problema considerado usamos el espacio $\mathbf{H}^1(\Omega)$ para el desplazamiento y el espacio $L^2(\Omega)$ para las funciones restantes. En concreto, multiplicamos escalarmente la ecuación del movimiento en configuración Lagrangiana por una función test $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma^{\mathrm{D}}}(\Omega)$, integramos en Ω, aplicamos una fórmula de Green adecuada y las condiciones de contorno (7.84h) y (7.84j). Además, multiplicamos escalarmente la ecuación (7.84c) (respectivamente, (7.84e)) por una función test $\mathbf{H} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ (respectivamente, $w \in L^2(\Omega)$).

De esta manera, se deduce la siguiente formulación débil:

$$\int_\Omega \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{z}\, d\mathsf{p} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)\cdot(\nabla \mathbf{z} + \nabla \mathbf{z}^T)\, d\mathsf{p} - 2\int_\Omega \mu \mathbf{E}^{\mathrm{p}} \cdot \nabla \mathbf{z}\, d\mathsf{p}$$
$$+ \int_\Omega \lambda \operatorname{Div} \mathbf{u} \operatorname{Div} \mathbf{z}\, d\mathsf{p} + \int_{\Gamma^C} \det \mathbf{F} \tilde{\zeta}_m \mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}_{t_0} \cdot \mathbf{z}\, dA_{\mathsf{p}}$$
$$= \int_\Omega \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{z} \det \mathbf{F}\, d\mathsf{p} + \int_{\Gamma^R} |\mathbf{F}^{-T}\mathbf{m}_{t_0}| \det \mathbf{F} \mathbf{h}_m \cdot \mathbf{z}\, dA_{\mathsf{p}}, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1_{\Gamma^{\mathrm{D}}}(\Omega), \tag{7.85a}$$

$$\int_\Omega \dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{H}\, d\mathsf{p} = 3\int_\Omega \frac{\mu \cdot \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}}{q(2\mu(\mathbf{E}^{\mathrm{d}} - \mathbf{E}^{\mathrm{p}}))}(\mathbf{E}^{\mathrm{d}} - \mathbf{E}^{\mathrm{p}}) \cdot \mathbf{H}\, d\mathsf{p}, \quad \forall \mathbf{H} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \tag{7.85b}$$

$$\int_\Omega \dot{s} w\, d\mathsf{p} = \int_\Omega \left\{ h_0 \left| 1 - \frac{s}{s^*} \right|^a \operatorname{sign}\left(1 - \frac{s}{s^*}\right) \right\} \dot{\epsilon}^{\mathrm{p}} w\, d\mathsf{p}, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \tag{7.85c}$$

siendo

$$\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}} = A \exp\left(-\frac{Q}{R\Theta_m}\right)\left[\sinh\left(\xi \frac{q(2\mu(\mathbf{E}^{\mathrm{d}} - \mathbf{E}^{\mathrm{p}}))}{s}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{7.85d}$$

$$s^* = \widetilde{s}\left[\frac{\dot{\epsilon}^{\mathrm{p}}}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\Theta_m}\right)\right]^n, \tag{7.85e}$$

$$\tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) \geq 0, \quad \text{con } \tilde{\zeta}_m(\mathsf{p},t) = 0 \quad \text{si } \mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \partial\mathsf{C}, \quad \mathsf{X}(\mathsf{p},t) \notin \mathsf{C}, \quad \forall (\mathsf{p},t) \in \Gamma^C \times [t_0, t_f]. \tag{7.85f}$$

Nótese que estos cálculos son formales, es decir, hemos asumido regularidad suficiente de las funciones involucradas (recordamos que d es la dimensión del espacio, en este caso $d = 3$).

Formulaciones con simetría cilíndrica

A continuación, utilizando las propiedades descritas en la Sección A.3, se obtiene la formulación del problema en el sistema de coordenadas cilíndrico para el caso particular considerado de simetría. En primer lugar, obtenemos la ecuación del movimiento:

$$\hat{\rho}_0(r,\mathsf{p}_3)\left(\ddot{\hat{u}}_1(r,\mathsf{p}_3,t)\mathbf{e}_r(\theta) + \ddot{\hat{u}}_2(r,\mathsf{p}_3,t)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\right) -$$
$$\left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{S}_{11}(r,\mathsf{p}_3,t)) + r\frac{\partial}{\partial \mathsf{p}_3}(\hat{S}_{12}(r,\mathsf{p}_3,t)) - \hat{S}_{\theta\theta}(r,\mathsf{p}_3,t)\right]\mathbf{e}_r(\theta)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{S}_{21}(r,\mathsf{p}_3,t)) + r\frac{\partial}{\partial \mathsf{p}_3}(\hat{S}_{22}(r,\mathsf{p}_3,t))\right]\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1(r,\mathsf{p}_3,t)\right)\det \hat{\mathbf{F}}(r,\mathsf{p}_3,t)\left(\hat{\mathbf{b}}_{m,1}(r,\mathsf{p}_3,t)\mathbf{e}_r(\theta) + \hat{\mathbf{b}}_{m,2}(r,\mathsf{p}_3,t)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\right), \tag{7.86}$$

para $(r,\mathsf{p}_3,t) \in \hat{\Omega} \times [t_0,t_f]$, $\theta \in [0,2\pi)$ y siendo

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}}(r,\mathsf{p}_3,t) := \sum_{i,j=1}^{2} \hat{S}_{ij}(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = 2\hat{\mu}(r,\mathsf{p}_3)\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}(r,\mathsf{p}_3,t) + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^T(r,\mathsf{p}_3,t)\right) - \hat{\hat{\mathbf{E}}}^{\mathrm{p}}(r,\mathsf{p}_3,t)\right]$$
$$+ \hat{\lambda}(r,\mathsf{p}_3)\left(\hat{\operatorname{Div}}\,\hat{\mathbf{u}}(r,\mathsf{p}_3,t) + \frac{1}{r}\hat{u}_1(r,\mathsf{p}_3,t)\right)\mathbf{I}, \tag{7.87}$$

$$\hat{S}_{\theta\theta}(r,\mathsf{p}_3,t) = 2\hat{\mu}(r,\mathsf{p}_3)\left[\frac{1}{r}\hat{u}_1(r,\mathsf{p}_3,t) - \hat{E}^{\mathrm{p}}_{\theta\theta}(r,\mathsf{p}_3,t)\right] + \hat{\lambda}(r,\mathsf{p}_3)\left(\hat{\operatorname{Div}}\,\hat{\mathbf{u}}(r,\mathsf{p}_3,t) + \frac{1}{r}\hat{u}_1(r,\mathsf{p}_3,t)\right). \tag{7.88}$$

UDC UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Con las notaciones indicadas en la Sección A.3, la ecuacion (7.86) se reescribe de la forma (problema vectorial bidimensional en coordenadas r, p_3)

$$\hat{\rho}_0(r,\mathsf{p}_3)\ddot{\hat{\mathbf{u}}}(r,\mathsf{p}_3,t) - \left(\hat{\mathrm{Div}}\,\hat{\hat{\mathbf{S}}}(r,\mathsf{p}_3,t) + \frac{1}{r}\left[\hat{S}_{11}(r,\mathsf{p}_3,t) - \hat{S}_{\theta\theta}(r,\mathsf{p}_3,t)\right]\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{r}\hat{S}_{21}(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\mathbf{e}}_2\right) = \left(1+\frac{1}{r}\hat{u}_1(r,\mathsf{p}_3,t)\right)\det\hat{\hat{\mathbf{F}}}(r,\mathsf{p}_3,t)\hat{\mathbf{b}}_m(r,\mathsf{p}_3,t), \tag{7.89}$$

para $(r,\mathsf{p}_3,t)\in\hat{\Omega}\times[t_0,t_f]$. A continuación, se escriben las ecuaciones que modelan la evolución temporal del tensor de deformaciones plásticas en coordenadas cilíndricas :

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}}^{\mathrm{p}} = \dot{\hat{\epsilon}}^{\mathrm{p}}\left(\frac{3}{2}\frac{\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}}}{q(\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}})}\right), \tag{7.90}$$

$$\dot{\hat{\epsilon}}^{\mathrm{p}} = A\exp\left(-\frac{Q}{R\cdot\hat{\Theta}_m}\right)\left[\sinh\left(\xi\frac{q(\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}})}{\hat{s}}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{7.91}$$

$$\dot{\hat{s}} = \left\{h_0\left|1-\frac{\hat{s}}{\hat{s}^*}\right|^a \mathrm{sign}\left(1-\frac{\hat{s}}{\hat{s}^*}\right)\right\}\dot{\hat{\epsilon}}^{\mathrm{p}}, \tag{7.92}$$

$$\hat{s}^* = \widetilde{s}\left[\frac{\dot{\hat{\epsilon}}^{\mathrm{p}}}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\cdot\hat{\Theta}_m}\right)\right]^n. \tag{7.93}$$

En el marco de la simetría cilíndrica, podemos considerar ahora el movimiento plano en el plano meridiano definido por el campo de desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}(r,\mathsf{p}_3,t)$. El obstáculo asociado al problema es el conjunto abierto C. Suponemos que este obstáculo es un cuerpo de revolución, así que está definido por una sección meridional que se puede definir, a su vez, de la forma

$$\hat{\mathsf{C}} = \{(r,\mathsf{p}_3)\in\mathbb{R}^2 : r>0,\ M(r,\mathsf{p}_3)<0\},$$

para cierta función M. Los movimientos cinemáticamente admisibles no penetran el obstáculo, es decir, $\mathsf{X}\notin\mathsf{C}$ lo que implica $M\left(\hat{\mathsf{X}}(r,\mathsf{p}_3,t)\right)\geq 0$ para todo $(r,\mathsf{p}_3,t)\in\bar{\hat{\Omega}}\times[t_0,t_f]$.

Por último, escribimos las condiciones de contorno en coordenadas cilíndricas

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{d}}, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^{\mathrm{D}}\times[t_0,t_f], \tag{7.94}$$

$$\hat{u}_1 = 0, \quad \text{en } \hat{\Lambda}\times[t_0,t_f], \tag{7.95}$$

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \hat{\Lambda}\times[t_0,t_f], \tag{7.96}$$

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = \det\hat{\hat{\mathbf{F}}}\left(1+\frac{1}{r}\hat{u}_1\right)|\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\hat{\mathbf{h}}_m, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^R\times[t_0,t_f], \tag{7.97}$$

$$\hat{\mathsf{X}}\notin\hat{\mathsf{C}}, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C\times[t_0,t_f], \tag{7.98}$$

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = -\det\hat{\hat{\mathbf{F}}}\left(1+\frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\hat{\zeta}_m\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C\times[t_0,t_f], \tag{7.99}$$

$$\hat{\zeta}_m \geq 0, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C\times[t_0,t_f], \tag{7.100}$$

$$\hat{\zeta}_m = 0, \quad \text{si } \hat{\mathsf{X}}\notin\partial\hat{\mathsf{C}}, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C\times[t_0,t_f], \tag{7.101}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

siendo $\hat{\zeta}_m : \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$. Introduciendo ahora la función M que define el obstáculo obtenemos la siguiente escritura de las condiciones de contacto unilateral:

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = -\det\hat{\hat{\mathbf{F}}}\left(1+\frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\hat{\zeta}_m\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f], \tag{7.102}$$

$$\hat{\zeta}_m \geq 0, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f], \tag{7.103}$$

$$M \circ \hat{\mathsf{X}} \geq 0, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f], \tag{7.104}$$

$$\hat{\zeta}_m \cdot (M \circ \hat{\mathsf{X}}) = 0, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f]. \tag{7.105}$$

Para el tratamiento numérico de las condiciones (7.103)-(7.105) utilizaremos las propiedades de las funciones NCP (por sus siglas en inglés, *nonlinear complementary problem*) (ver por ejemplo [61]) .

Las funciones NCP se definen como aquellas que verifican las condiciones

$$\phi_{NCP}(a, b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a \cdot b = 0. \tag{7.106}$$

Algunos ejemplos de funciones NCP son los siguientes:

$$\phi_{min}(a, b) = min(a, b), \tag{7.107}$$

$$\phi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7.108}$$

Nótese que las condiciones (7.103)-(7.105) se traducen en

$$\phi_{NCP}(\hat{\zeta}_m, M \circ \hat{\mathsf{X}}) = 0, \quad \text{en } \hat{\Gamma}^C \times [t_0, t_f]. \tag{7.109}$$

Para obtener una formulación débil del problema en coordenadas cilíndricas podemos proceder de dos maneras: partir del problema fuerte en coordenadas cilíndricas y obtener una formulación débil de dicho problema, o partir de la formulación débil en coordenadas Lagrangianas e introducir el cambio de variable a coordenadas cilíndricas en dicha formulación. Vamos a considerar el primer procedimiento. En concreto, multiplicamos escalarmente (7.89) por una función test $\hat{\mathbf{z}}$ del espacio

$$\mathbf{H}^1_{\hat{\Gamma}^D,\hat{\Lambda}}(\hat{\Omega}) = \{\hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{H}^1_{\hat{\Gamma}^D}(\hat{\Omega}) : \ \hat{z}_1 = 0 \text{ en } \hat{\Lambda}\},$$

integramos en $\hat{\Omega}$, aplicamos la fórmula de Green adecuada y las condiciones de contorno (7.96), (7.97) y (7.102). Ánalogamente obtenemos las formulaciones débiles de (7.90) y (7.92). Por último, multiplicamos (7.109) por una función test $\hat{\mu} \in L^2(\hat{\Gamma}^C)$ e integramos en $\hat{\Gamma}^C$. De esta manera, se obtiene la siguiente formulación variacional:

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho}_0 \ddot{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \hat{\mathbf{z}}\, dr d\mathsf{p}_3 + \int_{\hat{\Omega}} \hat{\hat{\mathbf{S}}} \cdot \hat{\nabla}\hat{\mathbf{z}}\, dr d\mathsf{p}_3 + \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{r}\left((\hat{S}_{11} - \hat{S}_{\theta\theta})\hat{z}_1 + \hat{S}_{21}\hat{z}_2\right) dr d\mathsf{p}_3$$
$$+ \int_{\hat{\Gamma}^C} \det \hat{\hat{\mathbf{F}}} \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right) \hat{\zeta}_m \hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T} \hat{\mathbf{m}}_{t_0} \cdot \hat{\mathbf{z}}\, d\hat{l} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\mathbf{b}}_m \cdot \hat{\mathbf{z}} \det \hat{\hat{\mathbf{F}}} \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right) dr d\mathsf{p}_3$$
$$+ \int_{\hat{\Gamma}^R} |\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T} \hat{\mathbf{m}}_{t_0}| \det \hat{\hat{\mathbf{F}}} \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right) \hat{\mathbf{h}}_m \cdot \hat{\mathbf{z}}\, d\hat{l}, \quad \forall \hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{H}^1_{\hat{\Gamma}_{D,\hat{\lambda}}}(\hat{\Omega}), \tag{7.110a}$$

$$\int_{\hat{\Gamma}^C} \phi_{NCP}(\hat{\zeta}_m, M \circ \hat{\mathsf{X}})\hat{\mu}\, d\hat{l} = 0, \quad \forall \hat{\mu} \in L^2(\hat{\Gamma}^C), \tag{7.110b}$$

$$\int_{\hat{\Omega}} \dot{\hat{\mathbf{E}}}^{\mathrm{p}} \cdot \hat{\mathbf{H}}\, dr d\mathsf{p}_3 = \frac{3}{2} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\epsilon}^{\mathrm{p}} \frac{\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}}}{q(\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}})} \cdot \hat{\mathbf{H}}\, dr d\mathsf{p}_3, \tag{7.110c}$$

$$\int_{\hat{\Omega}} \dot{\hat{s}}\hat{w}\, dr d\mathsf{p}_3 = \int_{\hat{\Omega}} \left\{ h_0 \left| 1 - \frac{\hat{s}}{\hat{s^*}} \right|^a \operatorname{sign}\left(1 - \frac{\hat{s}}{\hat{s^*}}\right) \right\} \hat{\epsilon}^{\mathrm{p}} \hat{w}\, dr d\mathsf{p}_3, \quad \forall \hat{w} \in L^2(\hat{\Omega}), \tag{7.110d}$$

siendo $[\hat{\mathbf{H}}] \in \mathbb{L}^2(\hat{\Omega})$ de la forma dada en (A.28) y

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}} = 2\hat{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^T\right) - \hat{\hat{\mathbf{E}}}^{\mathrm{p}}\right] + \hat{\lambda}\left(\hat{\mathrm{Div}}\,\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\mathbf{I},$$
$$\hat{S}_{\theta\theta} = 2\hat{\mu}\left[\frac{1}{r}\hat{u}_1 - \hat{E}^{\mathrm{p}}_{\theta\theta}\right] + \hat{\lambda}\left(\hat{\mathrm{Div}}\,\hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right),$$
$$\hat{\epsilon}^{\mathrm{p}} = A \exp\left(-\frac{Q}{R\hat{\Theta}_m}\right)\left[\sinh\left(\xi \frac{q(\hat{\mathbf{S}}^{\mathrm{d}})}{\hat{s}}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{7.110e}$$
$$\hat{s^*} = \widetilde{s}\left[\frac{\hat{\epsilon}^{\mathrm{p}}}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\hat{\Theta}_m}\right)\right]^n. \tag{7.110f}$$

7.2. Resolución numérica

Se procede a continuación a plantear una estrategia de resolución numérica de los tres problemas variacionales acoplados dados en coordenadas cilíndricas (7.8) (7.17) y (7.110). Estos tres problemas presentan una dependencia fuerte mutua dado que las propiedades de los materiales involucradas en los tres problemas tienen una dependencia con la temperatura. Además, el término fuente asociado con el problema térmico (7.8) está vinculado con el problema eléctrico (7.17) mediante el efecto Joule (Observación 7.1.7). A su vez, el campo potencial eléctrico se ve afectado por las deformaciones que sufre el dominio computacional a medida que avanza la resolución. Por ello se plantea la resolución acoplada de los tres problemas y dada la complejidad del problema resultante se plantean algunas simplificaciones. La principal es el tratamiento del obstáculo y sus condiciones de contorno asociadas. Para la resolución del problema completo, incluyendo el contacto unilateral, sería necesario emplear técnicas especiales, como las técnicas tipo *semismooth Newton* [61] que se han descrito previamente. Para facilitar la resolución del problema se sustituyen las condiciones de contacto unilateral por una condición de Dirichlet de no penetración, impuesta sobre el campo de desplazamientos, en las fronteras en contacto con el obstáculo. Este tratamiento simplifica en gran medida la estrategia de resolución del problema pero añade ciertas limitaciones en cuanto al obstáculo a tratar. Solo se pueden contemplar contactos en fronteras en las que inicialmente existía contacto.

Se plantea la semidiscretización espacial empleando el método de los elementos finitos y métodos Runge-Kutta para la semidiscretización temporal. Para el empleo de estos últimos métodos se añadirá

una nueva ecuación al problema que relaciona la derivada temporal del desplazamiento con la velocidad, para que el problema solo incluya derivadas primeras temporales (ver Anexo A.4).

7.2.1. Discretización espacial

En esta sección se aborda la semidiscretización espacial de los problemas (7.8), (7.17) y (7.110) mediante el método de los elementos finitos.

Sea $\hat{\Omega}$ un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera poligonal a trozos. Se considera una familia de particiones de $\bar{\hat{\Omega}}$ denotada por $\mathcal{T}_h$ consistente en elementos simpliciales (triángulos) K, de diámetro $\leq h$. Se asume que estas particiones son compatibles con la división de la frontera de $\hat{\Omega}$ en $\hat{\Gamma}^D$ y $\hat{\Gamma}^R$. Esta división de las fronteras es diferente para cada uno de los subproblemas, así ${}^T\hat{\Gamma}^D$, ${}^E\hat{\Gamma}^D$ y ${}^M\hat{\Gamma}^D$ corresponden a las fronteras Dirichlet de los subproblemas térmico, eléctrico y mecánico respectivamente y ${}^T\hat{\Gamma}^R$, ${}^E\hat{\Gamma}^R$ y ${}^M\hat{\Gamma}^R$ a las fronteras Robin. Se propone una discretización espacial mediante el empleo de espacios de elementos finitos $\mathbf{X}_h^{p_1}(\hat{\Omega})$ para el desplazamiento $\hat{\mathbf{u}}$ y la velocidad $\hat{\mathbf{v}}$, $\mathcal{V}_h^{p_2}(\hat{\Omega})$ para la temperatura $\hat{\Theta}$, potencial eléctrico $\hat{V}$ y la resistencia a la deformación $\hat{s}$ y $\mathcal{X}_h^{p_3}(\hat{\Omega})$ para el tensor de deformaciones plásticas $\hat{\mathbf{E}}^p$, donde los números enteros positivos p_1, p_2 y p_3 representan el "orden de aproximación" en el siguiente sentido: Existen tres operadores de interpolación $\boldsymbol{\gamma}_h : \mathbf{C}^0(\bar{\hat{\Omega}}) \to \mathbf{X}_h^{p_1}(\hat{\Omega})$, $\zeta_h : C^0(\bar{\hat{\Omega}}) \to \mathcal{V}_h^{p_2}(\hat{\Omega})$ y $\boldsymbol{\xi}_h : \mathbb{C}^0(\bar{\hat{\Omega}}) \to \mathcal{X}_h^{p_3}(\hat{\Omega})$ que satisfacen las siguientes propiedades:

$$||\boldsymbol{\gamma}_h(\boldsymbol{\varphi}) - \boldsymbol{\varphi}||_{s,\hat{\Omega}} \leq Q_1 h^{r-s} ||\boldsymbol{\varphi}||_{r,\hat{\Omega}}, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^0(\bar{\hat{\Omega}}) \cap \mathbf{H}^r(\hat{\Omega}), \quad 0 \leq r \leq p_1 + 1, \tag{7.111}$$

$$||\zeta_h(\varphi) - \varphi||_{s,\hat{\Omega}} \leq Q_2 h^{r-s} ||\varphi||_{r,\hat{\Omega}}, \quad \forall \varphi \in C^0(\bar{\hat{\Omega}}) \cap H^r(\hat{\Omega}), \quad 0 \leq r \leq p_2 + 1, \tag{7.112}$$

$$||\boldsymbol{\xi}_h(\boldsymbol{M}) - \boldsymbol{M}||_{s,\hat{\Omega}} \leq Q_3 h^{r-s} ||\boldsymbol{M}||_{r,\hat{\Omega}}, \quad \forall \boldsymbol{M} \in \mathbb{C}^0(\bar{\hat{\Omega}}) \cap \mathbb{H}^r(\hat{\Omega}), \quad 0 \leq r \leq p_3 + 1, \tag{7.113}$$

donde $s = 0, 1$, Q_1, Q_2 y Q_3 son tres constantes positivas independientes de h, $\mathbf{H}^0(\hat{\Omega}) := \mathbf{L}^2(\hat{\Omega})$, $H^0(\hat{\Omega}) := L^2(\hat{\Omega})$, $\mathbb{H}^0(\hat{\Omega}) := \mathbb{L}^2(\hat{\Omega})$ y $||\cdot||_{r,\hat{\Omega}}$ es la norma usual en $\mathbf{H}^r(\hat{\Omega})$, $H^r(\hat{\Omega})$ y $\mathbb{H}^r(\hat{\Omega})$. Se definen los siguientes espacios:

$$\mathbf{X}_{0h}^{p_1}(\hat{\Omega}) = \left\{ \hat{\mathbf{z}}_h \in \mathbf{X}_h^{p_1}(\hat{\Omega}) : \hat{\mathbf{z}}_h = \mathbf{0} \text{ en } {}^M\hat{\Gamma}^D \right\},$$
$${}^i\mathcal{V}_{0h}^{p_2}(\hat{\Omega}) = \left\{ \hat{z}_h \in \mathcal{V}_h^{p_2}(\hat{\Omega}) : \hat{z}_h = 0 \text{ en } {}^i\hat{\Gamma}^D \right\},$$
$$\forall i \in \{T, E\}.$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Para obtener una discretización espacial de los Problemas 7.8, 7.17 y 7.110 se emplean los espacios: $\mathbf{X}_h^{p_1}(\hat{\Omega})$ para aproximar el espacio funcional asociado al desplazamiento $\hat{\mathbf{u}}$ y a la velocidad $\hat{\mathbf{v}}$, $\mathcal{V}_h^{p_2}(\hat{\Omega})$ para el asociado a la temperatura $\hat{\Theta}$, el potencial eléctrico $\hat{V}$ y la resistencia a la deformación $\hat{s}$ y $\mathcal{X}_h^{p_3}(\hat{\Omega})$ para el asociado al tensor de deformaciones plásticas $\hat{\mathbf{E}}^p$. De esta manera la discretización completa del problema acoplado se define como:

$$\int_{\hat\Omega}\hat\rho_0\check c(\hat\Theta_{m,h})\dot{\hat\Theta}_{m,h}\tilde\Theta_h r\,dr\,d\mathsf{p}_3+\int_{\hat\Omega}\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\hat{\mathbf{F}}_h^{-1}\check k(\hat\Theta_{m,h})\hat{\mathbf{F}}_h^{-T}\hat\nabla\hat\Theta_{m,h}\cdot\hat\nabla\tilde\Theta_h r\,dr\,d\mathsf{p}_3$$
$$+\int_{T_{\hat\Gamma^R}}|\hat{\mathbf{F}}_h^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\left[\alpha_m\left(\hat\Theta_{m,h}-\hat T_{\infty,m}\right)+\epsilon_m\sigma_0\left(\hat\Theta_m^4-\hat T_{\infty,m}^4\right)\right]\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\tilde\Theta_h r\,d\hat l$$
$$=\int_{\hat\Omega}\hat Q_m\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\tilde\Theta_h r\,dr\,d\mathsf{p}_3,\quad\forall\tilde\Theta_h\in{}^T\mathcal{V}_{0h}^1(\hat\Omega),\tag{7.114a}$$

$$\int_{\hat\Omega}\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\hat{\mathbf{F}}_h^{-1}\check\sigma(\hat\Theta_{m,h})\hat{\mathbf{F}}_h^{-T}\hat\nabla\hat V_{m,h}\cdot\hat\nabla\tilde V_h r\,dr\,d\mathsf{p}_3$$
$$+\int_{E_{\hat\Gamma^R}}|\hat{\mathbf{F}}_h^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\hat g_m\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\tilde V_h r\,dl(r,\mathsf{p}_3)=0,\quad\forall\tilde V_h\in{}^E\mathcal{V}_{0h}^1(\hat\Omega),\tag{7.114b}$$

$$\int_{\hat\Omega}\hat\rho_0\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_h\cdot\hat{\mathbf{z}}_h\,dr\,d\mathsf{p}_3+\int_{\hat\Omega}\hat{\mathbf{S}}_h\cdot\hat\nabla\hat{\mathbf{z}}_h\,dr\,d\mathsf{p}_3+\int_{\hat\Omega}\frac{1}{r}\left((\hat S_{11h}-\hat S_{\theta\theta h})\hat z_{1h}+\hat S_{21h}\hat z_{2h}\right)dr\,d\mathsf{p}_3$$
$$=\int_{\hat\Omega}\hat{\mathbf{b}}_m\cdot\hat{\mathbf{z}}_h\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)dr\,d\mathsf{p}_3$$
$$+\int_{M_{\hat\Gamma^R}}|\hat{\mathbf{F}}_h^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\det\hat{\mathbf{F}}_h\left(1+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\hat{\mathbf{h}}_m\cdot\hat{\mathbf{z}}_h\,d\hat l,\quad\forall\hat{\mathbf{z}}_h\in\mathbf{X}_{0h}^1(\hat\Omega),\tag{7.114c}$$

$$\int_{\hat\Omega}\dot{\hat{\mathbf{E}}}_h^{\mathrm{p}}\cdot\hat{\mathbf{H}}_h\,dr\,d\mathsf{p}_3=\frac{3}{2}\int_{\hat\Omega}\hat{\dot\epsilon}_h^{\mathrm{p}}\frac{\hat{\mathbf{S}}_h^{\mathrm{d}}}{q(\hat{\mathbf{S}}_h^{\mathrm{d}})}\cdot\hat{\mathbf{H}}_h\,dr\,d\mathsf{p}_3,\ \forall\hat{\mathbf{H}}_h\in\mathcal{X}_h^0(\hat\Omega),\tag{7.114d}$$

$$\int_{\hat\Omega}\dot{\hat s}_h\hat w_h\,dr\,d\mathsf{p}_3=\int_{\hat\Omega}\left\{h_0\left|1-\frac{\hat s_h}{\hat s_h^*}\right|^a\operatorname{sign}\left(1-\frac{\hat s_h}{\hat s_h^*}\right)\right\}\hat{\dot\epsilon}_h^{\mathrm{p}}\hat w_h\,dr\,d\mathsf{p}_3,\quad\forall\hat w_h\in\mathcal{V}_h^0(\hat\Omega),\tag{7.114e}$$

siendo

$$\hat{\mathbf{S}}_h=2\hat\mu\left[\frac{1}{2}\left(\hat\nabla\hat{\mathbf{u}}_h+\hat\nabla\hat{\mathbf{u}}_h^T\right)-\hat{\mathbf{E}}_h^{\mathrm{p}}\right]+\hat\lambda\left(\hat{\mathrm{Div}}\,\hat{\mathbf{u}}_h+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right)\mathbf{I},$$
$$\hat S_{\theta\theta h}=2\hat\mu\left[\frac{1}{r}\hat u_{1h}-\hat E_{\theta\theta h}^{\mathrm{p}}\right]+\hat\lambda\left(\hat{\mathrm{Div}}\,\hat{\mathbf{u}}_h+\frac{1}{r}\hat u_{1h}\right),\tag{7.114f}$$

$$\hat{\dot\epsilon}_h^{\mathrm{p}}=A\exp\left(-\frac{Q}{R\hat\Theta_{m,h}}\right)\left[\sinh\left(\xi\frac{q(\hat{\mathbf{S}}_h^{\mathrm{d}})}{\hat s_h}\right)\right]^{\frac{1}{m}},\tag{7.114g}$$

$$\hat{s_h^*}=\widetilde{s}\left[\frac{\hat{\dot\epsilon}_h^{\mathrm{p}}}{A}\exp\left(\frac{Q}{R\hat\Theta_{m,h}}\right)\right]^n.\tag{7.114h}$$

Nótese que en esta semidiscretización ya se ha sustituido el contacto unilateral por una condición de Dirichlet de no penetración.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

7.2.2. Discretización temporal

El problema semidiscretizado espacialmente mediante un método de elementos finitos constituye un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAE) que se puede resolver con integradores apropiados para este tipo de sistemas.

Resolución numérica con integradores Runge-Kutta implícitos.

El problema 7.114 se puede representar mediante el siguiente sistema de DAEs:

$$\tilde{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{y}}_d, \hat{\mathbf{y}}_a)\dot{\hat{\mathbf{y}}}_d = \tilde{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{y}}_d, \hat{\mathbf{y}}_a, t), \tag{7.115a}$$

$$0 = \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{y}}_d, \hat{\mathbf{y}}_a), \tag{7.115b}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_d(\cdot, t) = \bar{\mathbf{y}}_d(\cdot, t), \text{ en } \hat{\Gamma}^D, \tag{7.115c}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_a(\cdot, t) = \bar{\mathbf{y}}_a(\cdot, t), \text{ en } \hat{\Gamma}^D, \tag{7.115d}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_d(\cdot, t_0) = \mathbf{y}_d^0, \text{ en } \bar{\hat{\Omega}}, \tag{7.115e}$$

siendo $\tilde{\mathbf{M}}$ una matriz no singular. Si se introduce la notación

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_d \\ \hat{\mathbf{y}}_a \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_d \\ \bar{\mathbf{y}}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.116}$$

el problema se puede reescribir de una forma más compacta:

$$\mathbf{M}(\hat{\mathbf{y}})\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{y}}, t), \tag{7.117a}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\cdot, t) = \bar{\mathbf{y}}(\cdot, t), \text{ en } \hat{\Gamma}^D, \tag{7.117b}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_d(\cdot, t_0) = \mathbf{y}_d^0, \text{ en } \bar{\hat{\Omega}}. \tag{7.117c}$$

Para la resolución de estos problemas acoplados se empleará un método de Runge-Kutta como los descritos en el Anexo A.4, en concreto se utilizarán los métodos implícitos definidos en la herramienta PETSc. La biblioteca PETSc [20, 44, 62] incluye un módulo de integración temporal denominado *time stepping ode solver* [16] que permite la resolución numérica de ODEs y DAEs mediante distintos esquemas numéricos (Runge-Kutta, Rosembrock-Wanner, BDF).

Para la resolución del problema tipo (7.117) se emplea la familia de esquemas denominada *ARKIMEX*, constituida por métodos de Runge-Kutta aditivos donde es posible separar el problema en dos partes, una tratada de manera implícita y otra explícita. En el caso de DAEs se emplea únicamente la estrategia implícita que conlleva el empleo de métodos DIRK.

En concreto, para el problema (7.117), para cada instante t_n conocido $\hat{\mathbf{y}}^{n-1} \approx \hat{\mathbf{y}}(\cdot, t_{n-1})$, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para cada etapa $i \in [1, s]$ del método:

$$\check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}_{n,i}, \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}, t_{n-1} + c_i\Delta t) = \mathbf{M}(\mathbf{Y}_{n,i})\dot{\mathbf{Y}}_{n,i} - \mathbf{f}(\mathbf{Y}_{n,i}, t_{n-1} + c_i\Delta t) = 0, \tag{7.118a}$$

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{y}}^{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\dot{\mathbf{Y}}_{n,j}, \tag{7.118b}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n,i} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{Y}_{n,i} - \mathbf{Z}), \tag{7.118c}$$

cuya matriz jacobiana puede obtenerse empleando la regla de la cadena:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}_{n,i}}(\check{\mathbf{f}}(\mathbf{Y}_{n,i}, \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}(\mathbf{Y}_{n,i}), \cdot)) = \frac{\partial \check{\mathbf{f}}}{\partial \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}}(\mathbf{Y}_{n,i}, \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}(\mathbf{Y}_{n,i}), \cdot)\frac{\partial \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}}{\partial \mathbf{Y}_{n,i}} + \frac{\partial \check{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{Y}_{n,i}}(\mathbf{Y}_{n,i}, \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}(\mathbf{Y}_{n,i}), \cdot), \quad (7.119)$$

donde $\frac{\partial \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}}{\partial \mathbf{Y}_{n,i}}$ es una función constante, con todas las componentes iguales, que depende del propio método de discretización temporal. Este parámetro lo proporciona el módulo de PETSc. De esta manera, para resolver el problema será necesario definir dos funciones:

- $\check{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$,
- $\frac{\partial \check{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, b)$, donde b es el escalar asociado a $\frac{\partial \dot{\mathbf{Y}}_{n,i}}{\partial \mathbf{Y}_{n,i}}$ y proporcionado por el método.

En el módulo se incluyen estrategias de variación del tamaño del paso de tiempo basadas en estimaciones del error local (ver Anexo A.4).

7.3. Resultados numéricos

En este capítulo se va a considerar un problema de conformado de piezas metálicas mediante el proceso de electrorrecalcado. Para este caso se asumirán ciertas simplificaciones que faciliten el tratamiento del problema.

Se empleará la formulación variacional semidiscretizada en espacio (7.114). Se emplearán elementos $\mathfrak{L}_1^1 \oplus B_3$ (lineal a trozos continuo más la burbuja) para cada componente del desplazamiento y de la velocidad, $\mathfrak{L}_0^1$ (constante por elemento) para cada componente del tensor de deformaciones plásticas y $\mathfrak{L}_1^1$ (lineal a trozos continuo) para los campos de resistencia a la deformación, temperatura y potencial eléctrico.

Para la programación del problema semidiscreto en espacio se emplea la plataforma FEniCS [15] que permite la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante elementos finitos. Utilizando el lenguaje UFL (Unified Form Language) [43] se implementa la formulación variacional, de tal manera que se emplea una función vectorial no lineal equivalente a $\check{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ definida en la Subsección 7.2.2. Esta representación también permite calcular las derivadas asociadas a la resolución de la integración temporal ($\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}$). Para la integración temporal se ha empleado un esquema de orden 3, el indicado con la etiqueta 3 dentro de los métodos *ARKIMEX* definidos en PETSc [44]. Este es un método *DIRK* de orden 3 con un esquema encajado de orden 2 para el empleo del paso de tiempo variable. En el Apéndice A.4 se detallan estos procedimientos.

Se considera la barra cilíndrica metálica de 1.33 metros de longitud y 0.02875 metros de radio. Al emplear la simetría cilíndrica el dominio computacional se reduce a un rectángulo de 1.33 metros de alto y 0.02875 metros de ancho. La malla empleada es una malla de triángulos generada con el programa *Gmsh* [21] compuesta por 709 triángulos.En este dominio se resolverán de manera acoplada los tres subproblemas indicados (térmico, eléctrico y mecánico). Se consideran las fronteras indicadas en la Figura 7.5 donde el vértice inferior izquierdo se sitúa en el origen de coordenadas. La frontera 2 comienza en un vértice situado en las coordenadas $\mathsf{p}_3 = 0.16$, $r = 0.02875$ y tiene una longitud de 0.08 metros. En cada subproblema se aplicarán las condiciones de contorno adecuadas que se indicarán a continuación.

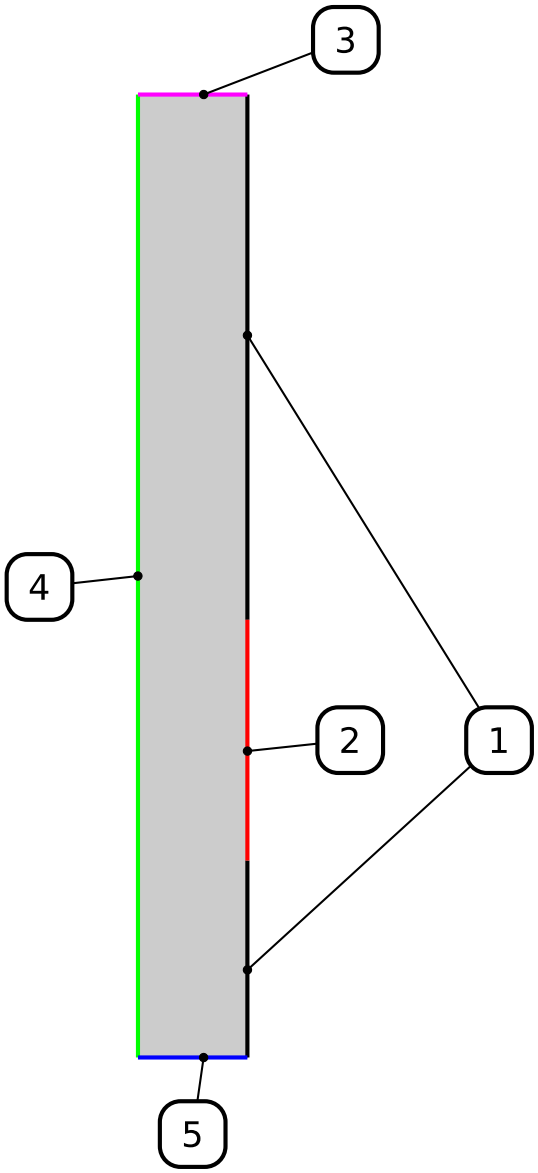


Figura 7.5: Fronteras consideradas en el ejemplo de proceso de electrorrecalcado.

7.3.1. Datos del problema térmico

Se consideran las siguientes expresiones para las propiedades térmicas dependientes de la temperatura, donde la función que proporciona el calor específico $\check{c}\,[\frac{J}{kgK}]$ se ha obtenido de [63] y la de la conductividad térmica $\check{k}\,[\frac{W}{mK}]$ de [64],

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\begin{aligned}\check{c}(\hat{\Theta}_h) =& 3.15\hat{\Theta}_h - 1.68\cdot 10^3\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^2 + 1.55\cdot 10^3\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^3 \\ & - 684\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^4 + 152\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^5 - 16.5\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^6 \\ & + 0.699\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^7 - 506 + \frac{892e^{-199\left(0.001\hat{\Theta}_h - 1\right)^2}}{\pi^{0.5}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{k}(\hat{\Theta}_h) =& 0.0464\hat{\Theta}_h - 10.2\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^2 \\ &+ 2.25\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^3 - 0.155\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^4 + 21.3.\end{aligned}$$

En las fronteras 1, 2 y 3 se impone la siguiente condición de contorno Robin:

$$-\check{k}(\hat{\Theta}_m)\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\nabla}\hat{\Theta}_m \cdot \hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = |\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|\left(\alpha\left(\hat{\Theta}_m - \hat{T}_{\infty,m}\right) + \epsilon\sigma_0\left(\hat{\Theta}_m^4 - \hat{T}_{\infty,m}^4\right)\right),$$

donde se considera una temperatura ambiente $T_{\infty,m} = 303\,[K]$, un coeficiente de transferencia térmica $\alpha = 20\,[\frac{WK}{m^2}]$, una emisividad $\epsilon = 0.9$ y la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma_0 = 5.669 \cdot 10^{-8}\,[\frac{W}{m^2K^4}]$.

En la frontera 5 se considera la siguiente condición Robin de contacto con resistencia entre la barra y el yunque:

$$-\check{k}(\hat{\Theta}_m)\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\nabla}\hat{\Theta}_m \cdot \hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0} = |\hat{\hat{\mathbf{F}}}^{-T}\hat{\mathbf{m}}_{t_0}|5 \cdot 10^3\left(\hat{\Theta}_m - 573\right).$$

En la frontera 4 se considera una condición de Neumann nula.

Como condición inicial para la temperatura se utiliza $\Theta_0 = 293\,K$.

7.3.2. Datos del problema eléctrico de corriente continua

Se considera la siguiente expresión para la función que proporciona la conductividad eléctrica $\check{\sigma}\,[\frac{1}{\text{Ohm}\ m}]$ del material a partir de la temperatura:

$$\check{\sigma}(\hat{\Theta}_h) = \frac{1}{1.08 \cdot 10^{-9}\hat{\Theta}_h - 3.23 \cdot 10^{-8}\left(0.00366\hat{\Theta}_h - 1\right)^2 - 9.44 \cdot 10^{-8}}.$$

En cuanto a las condiciones de contorno, se considera una condición Dirichlet $\hat{V} = 0$ en la frontera 5. En la frontera 2 se considera una corriente entrante dependiente del tiempo en Amperios:

$$I(t) = \begin{cases} 50.62 \cdot 10^3, & \text{si } t \in [0, 19), \\ 35 \cdot 10^3, & \text{si } t \in [19, 50), \\ 20 \cdot 10^3, & \text{si } t \in [50, 60), \\ 20 \cdot 10^3, & \text{si } t \in [60, 70), \\ 30 \cdot 10^3, & \text{si } t \in [70, 80), \\ 25 \cdot 10^3, & \text{si } t \geq 80, \end{cases}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

y como consecuencia, la componente normal de la densidad de corriente será:

$$g(\mathsf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi R_0 l_2} I(t),$$

donde R_0 es el radio del cilindro (0.02875 metros) y l_2 la longitud de la frontera 2 (0.08 metros). En el resto de fronteras se considera condición de Neumann nula.

7.3.3. Datos del problema mecánico

Para el modelo mecánico se consideran los siguientes parámetros del material:

- Se utiliza una densidad homogénea $\rho(\mathsf{x}, t) = 7799\,[\frac{kg}{m^3}]$.
- Para los parámetros asociados con la elasticidad lineal se utilizan las Tablas 7.1 y 7.2 que identifican, respectivamente, el valor del *módulo de Young* E y del *coeficiente de Poisson* ν con la temperatura, dado que estos parámetros son dependientes de esta magnitud. En la literatura es habitual encontrar estas tablas para estos parámetros de elasticidad. Se utilizará una interpolación lineal para construir los valores de los parámetros en temperaturas no incluidas en las tablas. Para obtener los coeficientes de Lamé utilizados en la formulación del problema se emplean las siguientes igualdades:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

- Los parámetros asociados al modelo de elasto-visco-plasticidad se indican en la Tabla 7.3 y han sido obtenidos de [59].

En cuanto a las condiciones de contorno, se imponen condiciones de Dirichlet nulas en la componente normal del desplazamiento en las fronteras 4 y 5. La condición en la frontera 4 viene determinada por la simetría cilíndrica y la condición en la frontera 5 es una forma simplificada de modelar el contacto sin rozamiento. Sobre la frontera 3 se aplica una fuerza normal dependiente del tiempo:

$$F_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0, 55), \\ \frac{t-55}{5} \cdot 10^5, & \text{si } t \in [55, 60), \\ 10^5, & \text{si } t \geq 60, \end{cases}$$

de tal manera que la función asociada con la condición de contorno Neumann en la frontera 3 será

$$\hat{\mathbf{h}}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F_3}{\pi R_0^2} \end{bmatrix},$$

donde R_0 es el radio de la pieza cilíndrica (0.02875 metros). En las fronteras 1 y 2 se aplican las condicones Neumann nulas.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO

Se emplean las siguientes condiciones iniciales:

$$\hat{\mathbf{u}}(\cdot, 0) = \mathsf{0} \text{ en } \hat{\Omega},$$
$$\hat{\mathbf{E}}^p(\cdot, 0) = \mathsf{0} \text{ en } \hat{\Omega},$$
$$\hat{s}(\cdot, 0) = 43 \cdot 10^6 \text{ en } \hat{\Omega}.$$

Temperatura $\Theta\,[^oC]$	Módulo de Young $E\,[Pa]$
-200	$2.17 \cdot 10^{11}$
-100	$2.17 \cdot 10^{11}$
-50	$2.15 \cdot 10^{11}$
-25	$2.14 \cdot 10^{11}$
0	$2.14 \cdot 10^{11}$
20	$2.12 \cdot 10^{11}$
50	$2.10 \cdot 10^{11}$
100	$2.07 \cdot 10^{11}$
150	$2.03 \cdot 10^{11}$
200	$1.99 \cdot 10^{11}$
250	$1.96 \cdot 10^{11}$
300	$1.92 \cdot 10^{11}$
350	$1.88 \cdot 10^{11}$
400	$1.84 \cdot 10^{11}$
450	$1.79 \cdot 10^{11}$
500	$1.75 \cdot 10^{11}$
550	$1.70 \cdot 10^{11}$
600	$1.64 \cdot 10^{11}$
650	$1.55 \cdot 10^{11}$
1000	$43 \cdot 10^{9}$
1250	$20 \cdot 10^{9}$
1400	$15 \cdot 10^{9}$
1500	$15 \cdot 10^{9}$

Tabla 7.1: Módulo de Young a diferentes temperaturas para el acero (valores extraídos de [59]).

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Temperatura $\Theta\,[^oC]$	coeficiente de Poisson ν
-200	0.282
-100	0.282
-50	0.283
-25	0.284
0	0.284
20	0.285
50	0.286
100	0.287
150	0.288
200	0.289
250	0.291
300	0.293
350	0.295
400	0.297
450	0.299
500	0.302
550	0.306
600	0.311
650	0.318
700	0.318

Tabla 7.2: Coeficiente de Poisson a diferentes temperaturas para el acero.

A	10^8
$\frac{Q}{R}\,[K]$	32514
ξ	1.15
$h_0\,[Pa]$	$13.29 \cdot 10^8$
$\tilde{s}\,[Pa]$	$1.476 \cdot 10^8$
m	0.147
a	1
n	0.06869

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Tabla 7.3: Parámetros del modelo elasto-visco-plástico para el acero extraídos de [59].

7.3.4. Resultados

En la Figura 7.6 se muestra el dominio computacional original y una vista de detalle, centrada en la zona de interés, que se empleará para representar los diferentes campos. También se indica el nodo que se empleará como punto de medida, pues es el nodo que sufre mayor deformación en la dirección radial.

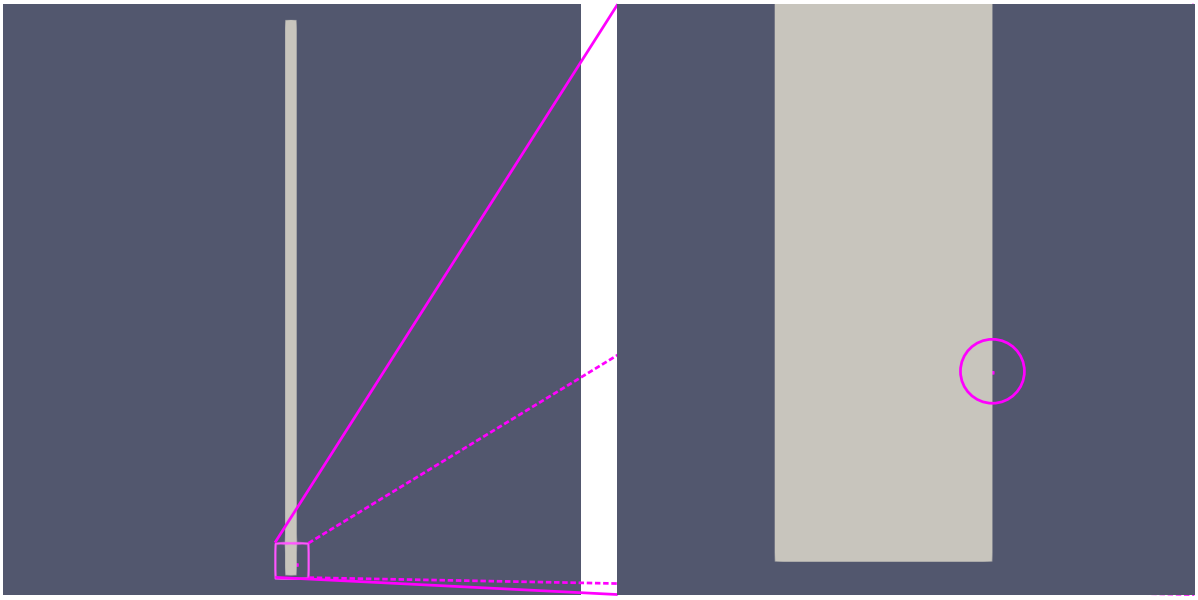


Figura 7.6: Dominio computacional y vista en detalle.

En la Figura 7.7 se muestra la evolución temporal del campo de temperaturas sobre el dominio deformado. Cada una de las imágenes se corresponde con un instante temporal (0, 19, 50, 70, 80, 84.42 segundos) ordenados de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

En la Figura 7.8 se muestra la evolución temporal de la magnitud del tensor de deformaciones plásticas $\mathbf{E}^p$ en los instantes temporales 83, 84, 84.2, 84.3, 84.4 y 84.42.

En la Figura 7.9 se puede observar el cambio de la magnitud del efecto Joule a causa del aumento de la sección transversal del cilindro en la zona de máxima deformación radial. En los instantes representados en la figura la corriente aplicada es constante pero la densidad de corriente varía al modificarse el área de la sección. Este efecto se puede apreciar también en la Figura 7.10 donde se representa la evolución temporal del efecto Joule y el desplazamiento en la dirección r medidos en el nodo de referencia. Claramente se observa un descenso del valor del efecto Joule cuando se incrementa el desplazamiento. En la parte inferior del gráfico se incluye la evolución temporal de la fuerza y corriente aplicadas como referencia. Los cambios en el efecto Joule en el tramo comprendido entre 0 y 19 segundos son debidos al cambio de temperatura y su efecto en la conductividad eléctrica. Además, se observa un cambio brusco del desplazamiento a partir del instante 80, que se acelera en el entorno del segundo 84. Debido a estos cambios tan repentinos de las magnitudes resulta conveniente el empleo de un método de integración temporal con estrategias robustas de selección de paso de tiempo como el considerado en este trabajo. En este problema concreto, en los instantes iniciales es posible emplear pasos de tiempo del tamaño de 5 segundos, pero en las etapas finales los pasos han de ser del orden de 10^{-3} segundos.

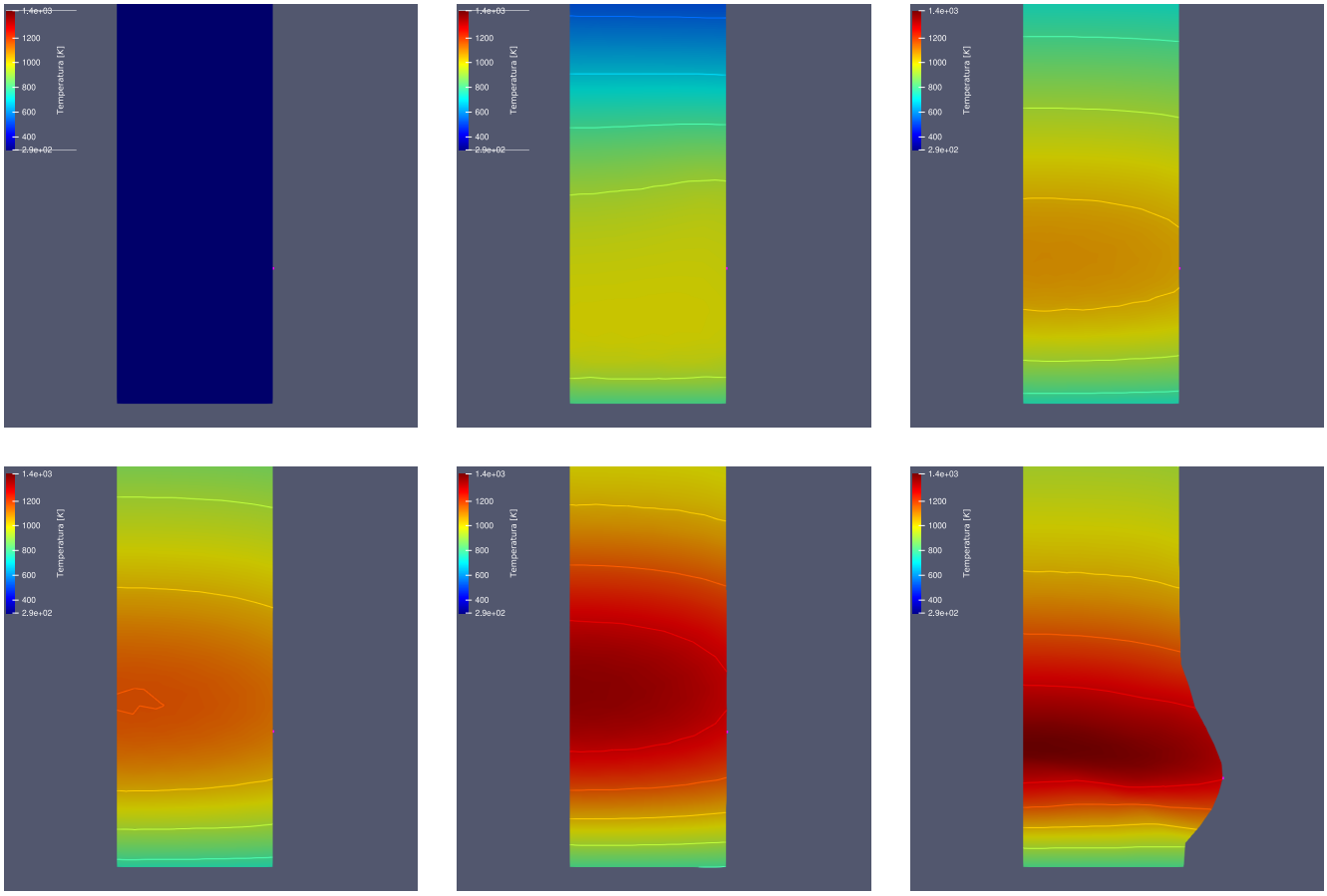


Figura 7.7: Evolución temporal de la temperatura Θ sobre dominio deformado. Instantes temporales en la fila superior: 0, 19 y 50 segundos. Instantes temporales en la fila inferior: 70, 80 y 84.42 segundos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

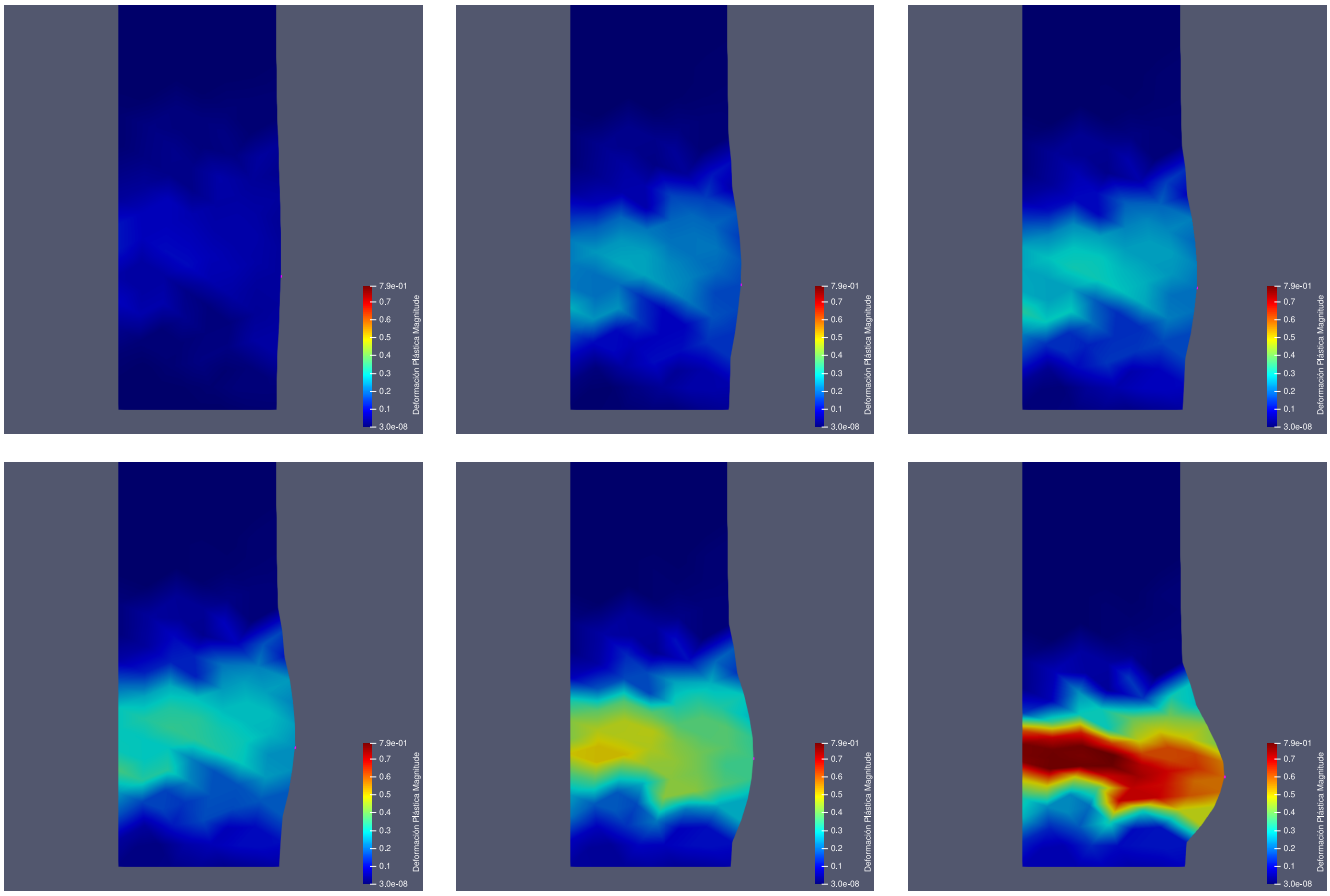


Figura 7.8: Evolución temporal de la magnitud del tensor de deformaciones plásticas $\mathbf{E}^p$ sobre dominio deformado. Instantes temporales en la fila superior: 83, 84 y 84.2 segundos. Instantes temporales en la fila inferior: 84.3, 84.4 y 84.42 segundos.

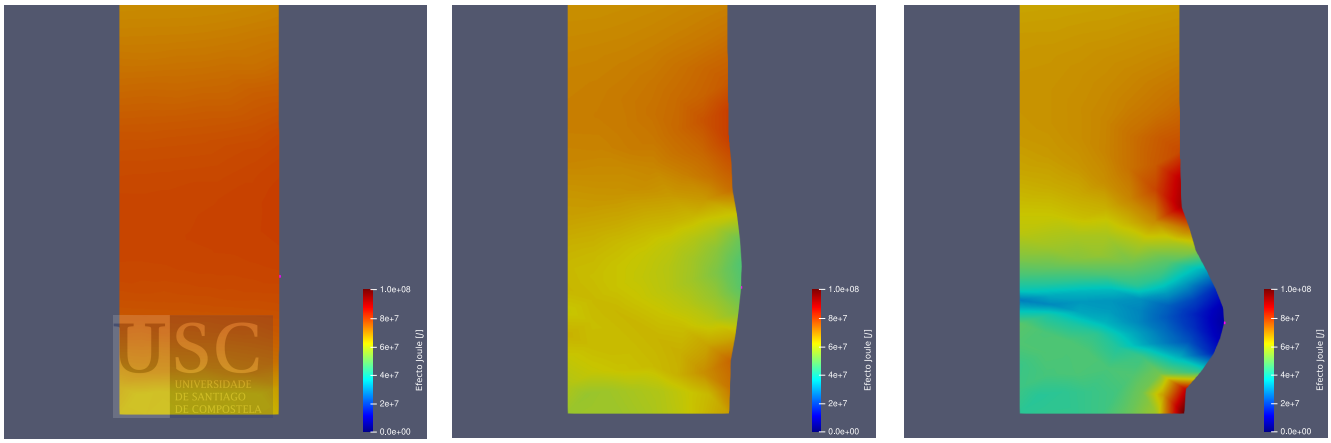


Figura 7.9: Evolución temporal del efecto Joule sobre dominio deformado. Instantes temporales: 80, 84 y 84.42 segundos.

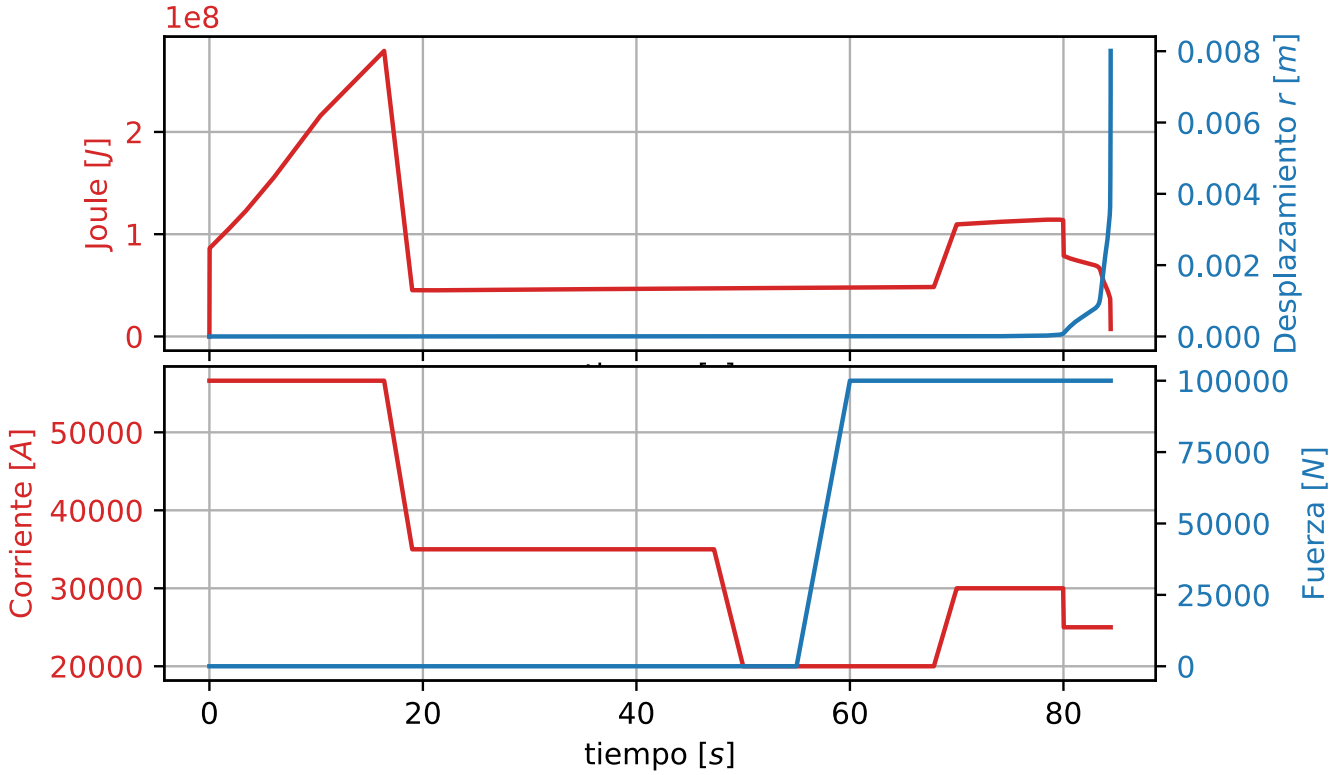


Figura 7.10: Evolución temporal del efecto Joule y el desplazamiento en la dirección radial medidos en el nodo de referencia. Se incluye corriente y fuerzas aplicadas.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Parte III

Conclusiones y trabajo futuro

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 8

Conclusiones

Se han desarrollado formulaciones unificadas para el tratamiento de problemas de Cauchy de convección-difusión (escalares y vectoriales) en configuraciones no Eulerianas con las que es posible obtener a la vez métodos puramente Lagrangianos y semi-Lagrangianos. Estas formulaciones se han aplicado a dos casos concretos: las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles (Capítulo 6) y un problema de conformado de piezas metálicas, en particular, en los modelos térmico, eléctrico y mecánico para un sólido visco-elasto-plástico (Capítulo 7).

En el Capítulo 6 se ha aplicado un esquema de integración temporal de tipo Newmark [39] a la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes en configuraciones no Eulerianas. Esta discretización temporal requiere el desarrollo de una estrategia para la inicialización de las variables, que consiste en la resolución de un problema de tipo Darcy. Los distintos métodos desarrollados se han evaluado mediante la resolución de diferentes tests de los que se dispone de solución analítica, numérica o de datos experimentales. Las estrategias de remallado y reinicialización, descritas en el Capítulo 5, también se han testeado en algunos de estos ejemplos. El resultado de este trabajo se incluye en dos publicaciones ([25] y [26]).

En el caso del problema de electrorrecalcado (Capítulo 7) las ecuaciones del movimiento se han acoplado a ecuaciones de transporte escalar para definir el problema multifísico en diferentes configuraciones. Para la resolución de este problema, se ha considerado una formulación puramente Lagrangiana en la que se han empleado estrategias de integración temporal del tipo Runge-Kutta implícitas, permitiendo mayor flexibilidad para elegir el orden de integración del método y habilitar estrategias adaptativas de elección del paso de tiempo.

Para la implementación y programación de los diferentes métodos se han empleado herramientas y bibliotecas de código abierto vinculadas con el cálculo científico, que han permitido una implementación ágil y el poder contar con algoritmos de alto rendimiento y ampliamente testeados. En concreto, la utilización del conjunto de herramientas PETSc [20] permite seleccionar de manera inmediata diferentes estrategias para la resolución de sistemas lineales y no lineales, e integradores temporales.

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Capítulo 9

Trabajo futuro

Se identifican posibles líneas de desarrollo de los métodos y aplicaciones introducidos en este trabajo:

- Desarrollo y aplicación de nuevas estrategias de reconstrucción de las fronteras deformadas que mejoren el proceso de remallado y reinicialización (ver, por ejemplo, [65]). Actualmente una de las estrategias de remallado que se aplica consiste en desplazar los vértices de la frontera utilizando el campo de deformaciones para obtener la frontera deformada y el dominio computacional deformado, y generar una malla de dicho dominio. En este proceso de deformación de las fronteras es posible que los vértices desplazados tiendan a presentar una distribución no homogénea, pudiendo incluso colapsar.

- Aplicación de métodos de Runge-Kutta de alto orden y estrategias adaptativas de elección del paso de tiempo al problema de Navier-Stokes considerado en el Capítulo 6. Cabe destacar que los métodos de discretización temporal de Newmark aplicados al problema de Navier-Stokes se han mostrado muy eficientes, permitiendo desarrollar métodos lineales de alto orden. Sin embargo, teniendo en cuenta el desempeño observado de los métodos Runge-Kutta encajados (ver Anexo A.4) en la resolución del problema de electrorrecalcado (Capítulo 7), se plantea la opción de aplicar esta metodología al problema de Navier-Stokes y realizar análisis comparativos entre los diferentes métodos. Además, en algunos problemas es posible que el empleo de un paso de tiempo fijo no sea una estrategia factible de resolución, en términos de coste computacional.

- Implementación informática en el problema de electrorrecalcado del contacto unilateral sin rozamiento con un obstáculo rígido a través de técnicas del tipo *semismooth Newton*. Nótese que este problema ha sido rigurosamente planteado pero el problema de contacto no ha sido incluido en el algoritmo de resolución para faciliar su resolución.

- Simulación del proceso de conformado de piezas metálicas considerado en el Capítulo 7 pero en régimen de corriente alterna. En este caso el problema eléctrico 7.1.5 se sustituye por un problema electromagnético cuya solución se emplea para la obtención de la fuente de calor en el modelo térmico. Nótese que dicha fuente de calor es debida al efecto Joule y su expresión depende del tipo de corriente suministrada al sistema (continua o alterna).

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Apéndice A

Apéndice

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

A.1. Espacios funcionales

Sea $\mathcal{A}$ un dominio acotado en $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Se denotarán los espacios de Lebesgue por $L^r(\mathcal{A})$ y los espacios de Sobolev por $W^{m,r}(\mathcal{A})$, siendo $r = 1, 2, ..., \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. En concreto,

$$L^r(\mathcal{A}) := \left\{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible}, \int_{\mathcal{A}} |\varphi|^r < \infty,\ 1 \leq r < \infty\right\}, \tag{A.1}$$

$$L^\infty(\mathcal{A}) := \{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible}, \ |\varphi| \leq K \text{ casi por doquier en } \mathcal{A}\}, \tag{A.2}$$

$$W^{m,r}(\mathcal{A}) := \left\{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible}, \partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi \in L^r(\mathcal{A}),\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^d,\ |\boldsymbol{\beta}| \leq m,\ 1 \leq r \leq \infty\right\}, \tag{A.3}$$

siendo $|\boldsymbol{\beta}| := |(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_d)| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_d$ y $\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi$ la derivada parcial

$$\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\beta}|}\varphi}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_d^{\beta_d}}.$$

Para $r = 2$, se tienen los espacios de Hilbert $H^m(\mathcal{A}) = W^{m,2}(\mathcal{A})$. Además, se denota por $H^1_{\Gamma^P}(\mathcal{A})$ el subespacio cerrado de $H^1(\mathcal{A})$ definido por

$$H^1_{\Gamma^P}(\mathcal{A}) := \left\{\varphi \in H^1(\mathcal{A}),\ \varphi|_{\Gamma^P} = 0\right\}, \tag{A.4}$$

siendo Γ^P una parte de la frontera de $\mathcal{A}$ con medida no nula. Cuando las aplicaciones tengan como conjunto de llegada el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, escribiremos los espacios en negrita, es decir, $\mathbf{L}^r(\mathcal{A})$, $\mathbf{W}^{m,r}(\mathcal{A})$, $\mathbf{H}^m(\mathcal{A})$ y $\mathbf{H}^1_{\Gamma^P}(\mathcal{A})$.

Análogamente, cuando las aplicaciones tengan como conjunto de llegada el espacio Lin, escribiremos, $\mathbb{L}^r(\mathcal{A})$, $\mathbb{W}^{m,r}(\mathcal{A})$ y $\mathbb{H}^m(\mathcal{A})$.

A.2. Espacios de elementos finitos

En esta sección se fijará la notación y se definirán algunos conceptos relativos a la aproximación de espacios de funciones mediante espacios de elementos finitos. Este apartado corresponde a un resumen de [40, Cap. 2], adaptando partes de la notación. Para un estudio más riguroso se puede consultar esa referencia.

En esta primera parte de esta sección se concretan algunos espacios introducidos en la sección anterior y se complementan algunos aspectos.

Primeramente, en el espacio de funciones $L^2(\mathcal{A})$ de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$L^2(\mathcal{A}) := \left\{v : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ medible}, \int_{\mathcal{A}} v^2 dx < \infty\right\}, \tag{A.5}$$

se define la norma

$$\|v\|_{\mathcal{A}} := \left(\int_{\mathcal{A}} v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{A.6}$$

que deriva del producto escalar

$$(u,v)_{\mathcal{A}} := \int_{\mathcal{A}} u(x)v(x)dx. \tag{A.7}$$

Análogamente, en el espacio de Sobolev

$$H^m(\mathcal{A}) := \left\{ v : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \text{ medible},\ \partial_{\boldsymbol{\beta}} v \in L^2(\mathcal{A}),\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}^d,\ |\boldsymbol{\beta}| \leq m \right\}, \tag{A.8}$$

se considera la norma

$$\|v\|_{m,\mathcal{A}} := \left(\sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} \int_{\mathcal{A}} |\partial_{\boldsymbol{\beta}} v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{A.9}$$

asociada con el producto escalar

$$(u,v)_{m,\mathcal{A}} := \sum_{|\boldsymbol{\beta}|\leq m} \int_{\mathcal{A}} \partial_{\boldsymbol{\beta}} u\, \partial_{\boldsymbol{\beta}} v dx. \tag{A.10}$$

Los espacios anteriores son espacios de Hilbert con los productos escalares definidos.

Para $v \in H^1(\mathcal{A})$, si $\partial\mathcal{A}$ es suficientemente regular (por ejemplo Lipschitziana), es posible definir la traza $\gamma v = v|_{\partial\mathcal{A}}$. Entonces se puede definir el subespacio cerrado de $H^1(\mathcal{A})$,

$$H_0^1(\mathcal{A}) := \left\{ v \in H^1(\mathcal{A}),\ v|_{\partial\mathcal{A}} = 0 \right\}. \tag{A.11}$$

y, análogamente,

$$H_{\Gamma^P}^1(\mathcal{A}) := \left\{ v \in H^1(\mathcal{A}),\ v|_{\Gamma^P} = 0 \right\}, \tag{A.12}$$

siendo $\Gamma^P \subset \partial\mathcal{A}$.

Sea $\mathfrak{T}_h(\overline{\mathcal{A}}) = \{K_R\}_{R=1}^m$ una partición de $\overline{\mathcal{A}}$ en una familia de subdominios: $\overline{\mathcal{A}} = \bigcup_{R=1}^m K_R$. K_R se denomina elemento y en este trabajo será un triángulo (para $d = 2$) o un tetraedro (para $d = 3$).

Se denotan por e_i las aristas/caras de cada elemento y por

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$e_{ij} = \partial K_i \cap \partial K_j, \tag{A.13}$$

la interfaz entre los elementos K_i y K_j.

Dada una partición del dominio $\mathcal{A}$ en elementos poligonales o poliédricos, una aproximación conforme de $H^1(\mathcal{A})$ es un espacio de funciones continuas con un número finito de grados de libertad (DOF por sus siglas en inglés, *Degrees Of Freedom*). Para obtener un subespacio de dimensión finita habitualmente

se emplean funciones polinómicas a trozos sobre los elementos de la partición. La continuidad en $\mathcal{A}$ se garantiza con una correcta elección de la posición de los grados de libertad.

Se denota por $P_k(K)$ el espacio de los polinomios de grado $\leq k$ sobre el elemento K. Además, se introducen los siguientes espacios:

$$R_k(\partial K) := \left\{\phi \in L^2(\partial K),\ \phi|_{e_i} \in P_k(e_i)\ \forall e_i\right\}, \tag{A.14}$$
$$T_k(\partial K) := \left\{\phi \in R_k(\partial K) \cap C^0(\partial K)\right\}. \tag{A.15}$$

Elemento de referencia. Sea $\hat{K} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Se denota por $\partial\hat{K}$ su frontera. Sea F_K una transformación regular (al menos C^1) de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ en $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ tal que $K = F_K(\hat{K})$. Cuando F_K es afín, se tiene $F_K(\hat{x}) = x_K + B_K\hat{x}$. Si $\hat{v}$ es una función definida en $\hat{K}$, entonces

$$v := \hat{v} \circ F_K^{-1}, \tag{A.16}$$

es una función definida sobre K. El elemento $\hat{K}$ se denomina *elemento de referencia*. Un elemento se dice afín si F_K es afín.

Elemento finito. Un elemento finito se define mediante 3 características:

- La geometría: el elemento de referencia $\hat{K}$ y el cambio de variable $F_K(\hat{x})$.
- El espacio de polinomios definidos sobre $\hat{K}$: $\hat{P}$.
- Un conjunto de *grados de libertad*: $\hat{\Sigma}$. Concretamente, un conjunto de formas lineales $\{l_i\}_{1\leq i\leq \dim\hat{P}}$ y tales que $l_i : \hat{P} \to \mathbb{R}$.

Para elementos finitos Lagrangianos, el conjunto de grados de libertad $\hat{\Sigma}$ se define mediante un conjunto $\{\hat{a}_i\}_{1\leq i\leq \dim\hat{P}}$ de puntos de $\hat{K}$:

$$l_i(\hat{p}) = \hat{p}(\hat{a}_i), \quad 1 \leq i \leq \dim\hat{P}. \tag{A.17}$$

A los puntos $\hat{a}_i$ se les denomina *nodos*. Estos elementos finitos permiten aproximar los espacios de Sobolev de orden uno.

Coordenadas baricéntricas. Sea K un elemento simplicial (es decir, un triángulo para d=2 o un tetraedro para d=3). Sean x^i $(1 \leq i \leq n_v)$, sus vértices. Existe un conjunto de funciones lineales sobre K, $\lambda_i^K(\mathsf{x}),\ 1 \leq i \leq n_v$, llamadas coordenadas baricéntricas tales que

$$\lambda_i^K(\mathsf{x}^j) = \delta_{ij}, \quad \sum_i \lambda_i^K(\mathsf{x}) = 1. \tag{A.18}$$

Las coordenadas baricéntricas λ_i^K son las funciones de base del elemento afín $P_1(K)$. Para el elemento finito de grado dos, las funciones de base asociadas con los vértices x^i son

$$\lambda_i^K(2\lambda_i^K - 1),$$

y para los nodos situados en el punto medio de la arista que une x^i con x^j,

$$4\lambda_i^K\lambda_j^K.$$

Se pueden definir ahora aproximaciones del espacio $H^1(\mathcal{A})$. Sea $S_k(K)$ un subespacio de $P_k(K)$. Para la partición $\mathfrak{T}_h(\mathcal{A})$ se define

$$\mathfrak{L}^1(S_k, \mathfrak{T}_h) := \left\{ v \in H^1(\mathcal{A}),\ v|_K \in S_k(K) \right\}, \tag{A.19}$$

se puede construir una notación más compacta si no existe ambigüedad

$$\mathfrak{L}_k^1 = \mathfrak{L}(P_k, \mathfrak{T}_h). \tag{A.20}$$

Así, por ejemplo, se representarán por $\mathfrak{L}_1^1$ las aproximaciones del espacio $H^1(\mathcal{A})$ mediante polinomios de grado menor o igual que 1.

Función burbuja. Las funciones *burbuja*, definidas sobre el elemento K, son aquellas que se anulan en ∂K y su función base se puede definir mediante las coordenadas baricéntricas:

$$b_d^K = (d+1)^{d+1} \prod_{i=1}^{d+1} \lambda_i^K, \quad \text{en } \mathbb{R}^{\mathrm{d}}. \tag{A.21}$$

Dado un subespacio $S_k(K) \subset H_0^1(K)$ se puede usar la notación ya definida para denotar el espacio asociado a la función burbuja:

$$B(S_k) = \mathfrak{L}^1(S_k, \mathfrak{T}_h), \tag{A.22}$$

y, cuando no exista ambigüedad se puede emplear la siguiente notación:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$B_k = B(P_k \cap H_0^1). \tag{A.23}$$

A.3. Sistema de coordenadas cilíndricas

Se considera un caso con simetría cilíndrica. En particular, el recinto inicial que ocupa el cuerpo, Ω, se obtiene al revolucionar alrededor de un eje la región del plano limitada por una curva, $\hat{\Gamma}$, y dicho eje que la corta en dos puntos. Dicha región se denotará por $\hat{\Omega}$. Suponiendo que el eje de revolución es el correspondiente a la tercera coordenada cartesiana, p_3, se tiene

$$\Omega = \{(r, \theta, \mathsf{p}_3) : \theta \in [0, 2\pi),\ (r, \mathsf{p}_3) \in \hat{\Omega}\},$$

y

$$\Gamma := \partial\Omega = \{(r, \theta, \mathsf{p}_3) :\ \theta \in [0, 2\pi),\ (r, \mathsf{p}_3) \in \hat{\Gamma}\}.$$

El conjunto $\hat{\Omega}$ se denomina sección meridional de Ω. Nótese que la frontera de $\hat{\Omega}$ tiene dos partes bien diferenciadas:

$$\partial\hat{\Omega} = \hat{\Lambda} \cup \hat{\Gamma},$$

siendo

$$\hat{\Lambda} := \{(r, \mathsf{p}_3) \in \partial\hat{\Omega} :\ r = 0\}.$$

Además, las fronteras Γ^D, Γ^R y Γ^C también se obtienen al revolucionar unas curvas contenidas en $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}^D$, $\hat{\Gamma}^R$ y $\hat{\Gamma}^C$ alrededor del eje, respectivamente. En adelante, denotamos por $\mathbf{e}_r(\theta)$, $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ y $\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}$ los vectores de la *base física* del sistema de coordenadas cilíndrico, es decir,

$$\mathbf{e}_r(\theta) = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} = \mathbf{e}_3,$$

siendo $\mathbf{e}_i$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces, se verifica

$$\mathbf{m}_{t_0} = m_r\mathbf{e}_r + m_{\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}, \quad \hat{\mathbf{m}}_{t_0} = m_r\hat{\mathbf{e}}_1 + m_{\mathsf{p}_3}\hat{\mathbf{e}}_2,$$

siendo $\hat{\mathbf{m}}_{t_0}$ el vector normal unitario exterior a $\hat{\Gamma}$ y $\hat{\mathbf{e}}_i$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Además, si ϕ (escalar), $\boldsymbol{\vartheta}$ (vectorial) y $\boldsymbol{\Psi}$ (tensorial) son campos materiales con simetría de revolución, se definen

$$\hat{\phi}(r, \mathsf{p}_3, t) := \phi(r\cos\theta, r\sin\theta, \mathsf{p}_3, t), \tag{A.24}$$

$$\hat{\vartheta}_1(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_r(\theta) + \hat{\vartheta}_2(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} := \boldsymbol{\vartheta}(r\cos\theta, r\sin\theta, \mathsf{p}_3, t), \tag{A.25}$$

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(r, \mathsf{p}_3, t) := \hat{\vartheta}_1(r, \mathsf{p}_3, t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\vartheta}_2(r, \mathsf{p}_3, t)\hat{\mathbf{e}}_2,$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Psi}}(r, \theta, \mathsf{p}_3, t) = \hat{\Psi}_{11}(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_r(\theta) \otimes \mathbf{e}_r(\theta) + \hat{\Psi}_{12}(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_r(\theta) \otimes \mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \\ + \hat{\Psi}_{21}(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \otimes \mathbf{e}_r(\theta) + \hat{\Psi}_{22}(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \otimes \mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \\ + \hat{\Psi}_{\theta\theta}(r, \mathsf{p}_3, t)\mathbf{e}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{e}_\theta(\theta) := \boldsymbol{\Psi}(r\cos\theta, r\sin\theta, \mathsf{p}_3, t),\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}(r, \mathsf{p}_3, t) := \sum_{i,j=1}^{2} \hat{\Psi}_{ij}(r, \mathsf{p}_3, t)\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j. \tag{A.27}$$

USC UNIVERSIDADE DE CANTABRIA

Por tanto, la matriz de coordenadas del tensor $\hat{\mathbf{\Psi}}(r,\theta,\mathsf{p}_3,t)$ es

$$\left[\hat{\mathbf{\Psi}}(r,\mathsf{p}_3,t)\right] = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{11}(r,\mathsf{p}_3,t) & 0 & \hat{\Psi}_{12}(r,\mathsf{p}_3,t) \\ 0 & \hat{\Psi}_{\theta\theta}(r,\mathsf{p}_3,t) & 0 \\ \hat{\Psi}_{21}(r,\mathsf{p}_3,t) & 0 & \hat{\Psi}_{22}(r,\mathsf{p}_3,t) \end{pmatrix}. \tag{A.28}$$

Conviene recordar que si $\mathbf{w}$ es un campo vectorial y $\mathbf{W}$ es un campo tensorial se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{w} &= \frac{\partial w_r}{\partial r}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}w_\theta\right]\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w_r}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \\
&+ \frac{\partial w_\theta}{\partial r}\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}w_r\right]\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w_\theta}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \\
&+ \frac{\partial w_{\mathsf{p}_3}}{\partial r}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial w_{\mathsf{p}_3}}{\partial\theta}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w_{\mathsf{p}_3}}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}, && \text{(A.29)}\\
\operatorname{Div}\mathbf{w} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial w_{\mathsf{p}_3}}{\partial\mathsf{p}_3}, && \text{(A.30)}\\
\operatorname{Div}\mathbf{W} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rW_{rr}) + \frac{\partial W_{r\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial W_{r\mathsf{p}_3}}{\partial\mathsf{p}_3} - W_{\theta\theta}\right]\mathbf{e}_r && \text{(A.31)}\\
&+ \left[\frac{\partial W_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial W_{\theta\mathsf{p}_3}}{\partial\mathsf{p}_3} + \frac{1}{r}W_{r\theta} + \frac{1}{r}W_{\theta r}\right]\mathbf{e}_\theta && \text{(A.32)}\\
&+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rW_{\mathsf{p}_3 r}) + \frac{\partial W_{\mathsf{p}_3\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial W_{\mathsf{p}_3\mathsf{p}_3}}{\partial\mathsf{p}_3}\right]\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}. && \text{(A.33)}
\end{aligned}$$

En particular, si $\boldsymbol{\vartheta}$ y $\mathbf{\Psi}$ son campos de la forma dada en (A.25) y (A.27), respectivamente,

$$\begin{aligned}
\nabla\boldsymbol{\vartheta} &= \frac{\partial\hat{\vartheta}_1}{\partial r}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r + \frac{\partial\hat{\vartheta}_1}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} + \frac{1}{r}\hat{\vartheta}_1\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\hat{\vartheta}_2}{\partial r}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_r + \frac{\partial\hat{\vartheta}_2}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} \\
\operatorname{Div}\boldsymbol{\vartheta} &= \operatorname{tr}(\nabla\boldsymbol{\vartheta}) = \hat{\operatorname{Div}}\,\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r}\hat{\vartheta}_1, && \text{(A.34)}\\
\operatorname{Div}\mathbf{\Psi} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{\Psi}_{11}) + r\frac{\partial\hat{\Psi}_{12}}{\partial\mathsf{p}_3} - \hat{\Psi}_{\theta\theta}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{\Psi}_{21}) + r\frac{\partial\hat{\Psi}_{22}}{\partial\mathsf{p}_3}\right]\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} && \text{(A.35)}\\
&= \left[(\hat{\operatorname{Div}}\,\hat{\hat{\mathbf{\Psi}}})_1 + \frac{1}{r}\hat{\Psi}_{11} - \frac{1}{r}\hat{\Psi}_{\theta\theta}\right]\mathbf{e}_r + \left[(\hat{\operatorname{Div}}\,\hat{\hat{\mathbf{\Psi}}})_2 + \frac{1}{r}\hat{\Psi}_{21}\right]\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}, && \text{(A.36)}
\end{aligned}$$

y, por tanto, si $\mathbf{u}$ es de la forma dada en (A.25), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} &= \Big(1 + \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial r}\Big)\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r + \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial\mathsf{p}_3}\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3} + \Big(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\Big)\mathbf{e}_\theta\otimes\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial r}\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_r \\
&+ \Big(1 + \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial\mathsf{p}_3}\Big)\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3}\otimes\mathbf{e}_{\mathsf{p}_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\mathbf{F} &= \left(1 + \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial r}\right)\left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\left(1 + \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial\mathsf{p}_3}\right) - \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial\mathsf{p}_3}\left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\frac{\partial\hat{u}_2}{\partial r} \\
&= \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\det(\mathbf{I} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}) = \left(1 + \frac{1}{r}\hat{u}_1\right)\det\hat{\hat{\mathbf{F}}}.
\end{aligned}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

En coordenadas,

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\partial \hat{u}_1}{\partial r} & 0 & \dfrac{\partial \hat{u}_1}{\partial \mathsf{p}_3} \\ 0 & 1+\dfrac{1}{r}\hat{u}_1 & 0 \\ \dfrac{\partial \hat{u}_2}{\partial r} & 0 & 1+\dfrac{\partial \hat{u}_2}{\partial \mathsf{p}_3} \end{pmatrix}.$$

En las ecuaciones, $\hat{\nabla}$ (respectivamente, $\hat{\mathrm{Div}}$) representa el operador gradiente (respectivamente, divergencia) con respecto a las coordenadas "cartesianas" r y p_3. Además, se observa que $\hat{\mathbf{F}} := \mathbf{I} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}$. Nótese que si $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\vartheta}$ son de la forma dada en (A.25), se verifica

$$\nabla\boldsymbol{\psi} \cdot \nabla\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\nabla}\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{r^2}\hat{\psi}_1\hat{\vartheta}_1.$$

Además, si ϕ (escalar) y $\boldsymbol{\vartheta}$ (vectorial) son dos campos materiales que verifican, respectivamente, (A.24) y (A.25), entonces

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi \, d\mathsf{p} &= 2\pi \int_{\hat{\Omega}} r\hat{\phi} \, dr d\mathsf{p}_3, \\ \int_{\Gamma^P} \phi \, dA_{\mathsf{p}} &= 2\pi \int_{\hat{\Gamma}^P} r\hat{\phi} \, d\hat{l}, \\ \int_{\Gamma^P} \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{m}_{t_0} \, dA_{\mathsf{p}} &= 2\pi \int_{\hat{\Gamma}^P} r\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_{t_0} \, d\hat{l}, \end{aligned}$$

siendo

$$\Gamma^P = \{(r, \theta, \mathsf{p}_3) : \ \theta \in [0, 2\pi), \ (r, \mathsf{p}_3) \in \hat{\Gamma}^P\},$$

con $\hat{\Gamma}^P \subset \hat{\Gamma}$. Conviene recordar que si $\{(r(s), \mathsf{p}_3(s)) : \ s \in [0,1]\}$ es una parametrización de la curva $\hat{\Gamma}^P$, se tiene

$$\int_{\hat{\Gamma}^P} r\hat{\phi} \, d\hat{l} = \int_0^1 r(s)\hat{\phi}(r(s), \mathsf{p}_3(s)) \sqrt{(r'(s))^2 + (\mathsf{p}_3{}'(s))^2} \, ds. \tag{A.37}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

A.4. Integradores temporales: métodos de Runge-Kutta

A continuación se introducirán los métodos de Runge-Kutta, que son métodos muy adecuados para la resolución de los problemas estudiados en este trabajo. La introducción descrita a continuación es un extracto de los trabajos [66, 67].

Sea el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{A.38a}$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0. \tag{A.38b}$$

Fijando un paso de tiempo Δt se definen $t_n = t_0 + n\Delta t$ e $\mathbf{y}^n \approx \mathbf{y}(t_n)$, la solución aproximada de $\mathbf{y}(t)$ en el instante t_n.

Sean b_i, a_{ij} (para $i, j = 1, ..., s$) números reales y $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$. El esquema discreto

$$\mathbf{k}_i^n = \mathbf{f}(t_n + c_i\Delta t, \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{k}_j^n), \quad i = 1, ..., s, \tag{A.39}$$

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i^n, \tag{A.40}$$

aplicado a la resolución numérica del problema (A.38) se denomina método de Runge-Kutta de s etapas. En particular se distinguen los siguientes casos:

- Si $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$ el método se denota de forma abreviada por sus siglas en inglés: ERK (*Explicit Runge-Kutta*).
- Si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y al menos un $a_{ii} \neq 0$ el método se llama DIRK, *Diagonal Implicit Runge-Kutta*.
- Si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ y $a_{ii} = \gamma \quad \forall i$ el método se llama SDIRK, *Singly Diagonal Implicit Runge-Kutta*.
- En todos los demás casos el método se llama IRK, *Implicit Runge-Kutta*.

Un método de Runge-Kutta es de orden p si para problemas suficientemente regulares se verifica

$$||\mathbf{y}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{y}^1|| \leq K\Delta t^{p+1}, \tag{A.41}$$

siendo K una constante independiente de Δt.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Estos métodos se suelen expresar mediante el siguiente tipo de tablas, llamadas de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \tag{A.42}$$

El paso de tiempo, Δt, es un parámetro que puede ser constante o variable con el instante de tiempo. En problemas complejos, donde los tiempos característicos cambian a lo largo de la integración temporal, es interesante utilizar pasos de tiempo variables para aprovechar las diferentes características del problema y emplear un número inferior de pasos de tiempo para alcanzar un mismo instante final. Algunas de las estrategias utilizadas para determinar el valor del paso de tiempo en un paso de tiempo dado requieren una estimación del error local que se está cometiendo. A partir de dos soluciones aproximadas dadas para el mismo instante de tiempo y obtenidas mediante métodos de distinto orden, $\mathbf{y}^{n+1}$ e $\tilde{\mathbf{y}}^{n+1}$, se puede estimar el error local ($e(\Delta t)$) como sigue:

$$||\mathbf{y}^{n+1} - \tilde{\mathbf{y}}^{n+1}|| \approx e(\Delta t). \tag{A.43}$$

Con la estimación considerada del error local y fijando un valor umbral del error deseado en cada componente, sc_i, a partir de una tolerancia absoluta, $Atol_i$, y una relativa, $Rtol_i$, se puede definir una estrategia de ajuste del paso de tiempo para conseguir que el siguiente error relativo sea menor o igual que uno:

$$err = \sqrt{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\mathrm{y}_i^{n+1} - \tilde{\mathrm{y}}_i^{n+1}}{sc_i}\right)^2}, \tag{A.44}$$

siendo

$$sc_i = Atol_i + \text{máx}(|\mathrm{y}_i^n|, |\mathrm{y}_i^{n+1}|)Rtol_i, \quad 1 \leq i \leq d. \tag{A.45}$$

En concreto, si para una determinada iteración se cumple que $err \leq 1$, se procede con la iteración del siguiente paso temporal utilizando un nuevo paso de tiempo calculado de la siguiente manera:

$$\Delta t_{new} = \Delta t \left(\frac{1}{err}\right)^{\frac{1}{q+1}}, \tag{A.46}$$

siendo q el menor de los órdenes de los métodos empleados para obtener las soluciones aproximadas $\mathbf{y}^{n+1}$ e $\tilde{\mathbf{y}}^{n+1}$. Si por el contrario $err > 1$, la actual iteración se rechaza y se vuelve a calcular con Δt_{new}. Para evitar que se rechacen excesivas iteraciones se añaden limitadores a la expresión (A.46):

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\Delta t_{new} = \Delta t \cdot \text{mín}\left(\lambda_{max}, \text{máx}\left(\lambda_{min}, \lambda \cdot \left(\frac{1}{err}\right)^{\frac{1}{q+1}}\right)\right), \tag{A.47}$$

donde λ, λ_{max} y λ_{min} son constantes que limitan el cambio de Δt_{new} con respecto a Δt.

Para obtener las dos aproximaciones de la solución, $\mathbf{y}^{n+1}$ e $\tilde{\mathbf{y}}^{n+1}$, una de las estrategias más eficientes es la de emplear dos métodos de Runge-Kutta encajados, es decir, utilizar métodos que compartan a_{ij} y c_i y solo varíen en b_i. De este modo el cálculo de las distintas etapas es común y el cálculo de la segunda

predicción solo añade un pequeño coste computacional. Estos métodos se conocen como *Embedded Runge-Kutta* y se suelen representar mediante tablas como la siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \\ & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_s \end{array} \tag{A.48}$$

Se considera ahora la siguiente DAE (*differential algebraic equation*) semi-explícita

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{A.49a}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_f], \tag{A.49b}$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \tag{A.49c}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0) = 0. \tag{A.49d}$$

Si se aplica un método de Runge-Kutta a este problema se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{Y}_i^n = \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{f}(t_n + c_j \Delta t, \mathbf{Y}_j^n, \mathbf{Z}_j^n), \tag{A.50}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}_i^n, \mathbf{Z}_i^n) = 0, \tag{A.51}$$
$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{f}(t_n + c_i \Delta t, \mathbf{Y}_i^n, \mathbf{Z}_i^n), \tag{A.52}$$
$$\mathbf{z}^{n+1} = \left(1 - \sum_{i,j=1}^{s} b_i \omega_{ij}\right) \mathbf{z}^n + \sum_{i,j=1}^{s} b_i \omega_{ij} \mathbf{Z}_j^n, \tag{A.53}$$

donde $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz invertible y ω_{ij} denotan los elementos de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$. En este desarrollo $\mathbf{y}^{n+1}$ y $\mathbf{z}^{n+1}$ no tienen por qué satisfacer la ecuación $\mathbf{g}(\mathbf{y}^{n+1}, \mathbf{z}^{n+1}) = 0$. Si $b_j = a_{sj}\ \forall j$ entonces $\mathbf{Y}_s^n = \mathbf{y}^{n+1}$ y $\mathbf{Z}_s^n = \mathbf{z}^{n+1}$, las ecuaciones (A.52) y (A.53) no son necesarias y se cumple $\mathbf{g}(\mathbf{y}^{n+1}, \mathbf{z}^{n+1}) = 0$. Los métodos que cumplen con la condición $b_j = a_{sj}\ \forall j$ se conocen como *stiffly accurate* y son los más indicados para la resolución de DAEs.

La función de estabilidad $R(z)$ de un método es la relación entre dos pasos consecutivos de la solución numérica del problema que en inglés se conoce como *Dahlquist test equation*:

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\dot{y} = \lambda y, \tag{A.54a}$$
$$y(t_0) = 1, \tag{A.54b}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $z = \Delta t \lambda$. Algunos ejemplos de funciones de estabilidad son

- Euler explícito:

$$y^1 = y^0 + \Delta t\lambda y^0 = y^0(\Delta t\lambda + 1) \Rightarrow R(\Delta t\lambda) = \Delta t\lambda + 1 \Rightarrow R(z) = z + 1.$$

- Euler implícito:

$$y^1 = y^0 + \Delta t\lambda y^1 = \frac{y^0}{1 - \Delta t\lambda} \Rightarrow R(\Delta t\lambda) = \frac{1}{1 - \Delta t\lambda} \Rightarrow R(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

El conjunto

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |R(z)| \leq 1\} \tag{A.55}$$

es el dominio de estabilidad del método. Si $\Delta t\lambda \in S$ entonces y_m permanece acotado cuando $m \to \infty$.

Un método cuyo dominio de estabilidad contiene al semiplano complejo negativo $\mathbb{C}^-$, es decir

$$S \supset \mathbb{C}^- = \{z; \mathrm{Re}z \leq 0\} \tag{A.56}$$

se llama *A-estable*. Si, además, $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ entonces se dice que es *L-estable*.

A continuación se introducirán algunos métodos específicos para el tratamiento de problemas de segundo orden y su relación con los métodos de Runge-Kutta.

Sea el problema diferencial de segundo orden:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \tag{A.57a}$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \tag{A.57b}$$
$$\dot{\mathbf{y}}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}^0. \tag{A.57c}$$

Sean b_i, $\bar{b}_i$, a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$ y c_i (para $i, j = 1, ..., s$) números reales. El método:

$$\mathbf{k}_i^n = \mathbf{f}(t_n + c_i\Delta t, \mathbf{y}^n + c_i\Delta t\dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t^2 \sum_{j=1}^{s} \bar{a}_{ij}\mathbf{k}_j^n, \dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{k}_j^n), \quad i = 1, ..., s, \tag{A.58a}$$

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t\dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t^2 \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i\mathbf{k}_i^n, \tag{A.58b}$$

$$\dot{\mathbf{y}}^{n+1} = \dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t \sum_{i=1}^{s} b_i\mathbf{k}_i^n, \tag{A.58c}$$

aplicado al problema (A.57) se denomina método de Runge-Kutta-Nyström (RKN) de s etapas.

Si $\bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}a_{kj}$ y $\bar{b}_i = \sum_{j=1}^{s} b_j a_{ji}$ entonces también es un método de Runge-Kutta y se aplica de la siguiente manera:

- Se transforma el problema (A.57) en

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{z}(t), \tag{A.59a}$$
$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{A.59b}$$
$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \tag{A.59c}$$
$$\mathbf{z}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}^0. \tag{A.59d}$$

- Se aplica el método de Runge-Kutta al problema (A.59)

$$\mathbf{k}_{y,i}^n = \mathbf{z}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{k}_{z,j}^n, \tag{A.60}$$

$$\mathbf{k}_{z,i}^n = \mathbf{f}\big(t_n + c_i \Delta t, \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{k}_{y,j}^n, \mathbf{z}^n + \Delta t \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \mathbf{k}_{z,j}^n\big), \tag{A.61}$$

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_{y,i}^n, \tag{A.62}$$

$$\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{z}^n + \Delta t \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_{z,i}^n. \tag{A.63}$$

Los métodos RKN se representan mediante tablas de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} c_1 & \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1s} & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & \bar{a}_{s1} & \cdots & \bar{a}_{ss} & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & \bar{b}_1 & \cdots & \bar{b}_s & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \tag{A.64}$$

El método de Newmark [39] es un método RKN de 2 etapas cuya tabla de Butcher es:

$$\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-2\beta}{2} & \beta & 1-\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1-2\beta}{2} & \beta & 1-\gamma & \gamma \end{array} \tag{A.65}$$

Si $\beta = \frac{1}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ entonces también es un método RK:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \tag{A.66}$$

que coincide con el método de Crank-Nicholson o la regla del trapecio implícita. En este caso el método es A-estable pues a pesar de que $b_i = a_{si} \quad \forall i$, la matriz $\mathbf{A}$ es singular[1].

[1] Si un IRK A-estable es stiffly accurate y la matriz $\mathbf{A}$ no es singular, entonces es L-estable [67] pag. 45

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Bibliografía

1. Tezduyar, T. E. Interface-tracking and interface-capturing techniques for finite element computation of moving boundaries and interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195.** Incompressible CFD, 2983-3000. ISSN: 0045-7825 (2006).
2. Harlow, F. H. y Welch, J. E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids* **8,** 2182 (1965).
3. Hirt, C. W. y Nichols, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics* **39,** 201-225 (1981).
4. Osher, S. y Sethian, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* **79,** 12-49 (nov. de 1988).
5. Hou, G., Wang, J. y Layton, A. Numerical Methods for Fluid-Structure Interaction — A Review. *Communications in Computational Physics* **12,** 337-377 (ago. de 2012).
6. Ewing, R. y Wang, H. A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* **128,** 423-445 (2001).
7. Allievi, A. y Bermejo, R. Finite element modified method of characteristics for the Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **32,** 439-463 (2000).
8. Benítez, M. y Bermúdez, A. Pure Lagrangian and semi-Lagrangian finite element methods for the numerical solution of Navier–Stokes equations. *Applied Numerical Mathematics* **95,** 62-81 (2015).
9. Douglas, J. y Russell, T. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM J. Numer. Anal.* **19,** 871-885 (1982).
10. Pironneau, O. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations. *Numer. Math.* **38,** 309-332 (1982).
11. Renard, Y. y Poulios, K. GetFEM: Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **47,** 1-31 (2020).
12. Hecht, F. New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.* **20,** 251-265. ISSN: 1570-2820 (2012).
13. Kirk, B. S., Peterson, J. W., Stogner, R. H. y Carey, G. F. `libMesh`: A C++ Library for Parallel Adaptive Mesh Refinement/Coarsening Simulations. *Engineering with Computers* **22.** `https://doi.org/10.1007/s00366-006-0049-3`, 237-254 (2006).
14. Rathgeber, F. *y col.* Firedrake: automating the finite element method by composing abstractions. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **43,** 1-27 (2016).
15. Alnæs, M. S. *y col.* The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software* **3.** doi:`10.11588/ans.2015.100.20553` (2015).

USC DE COMPOSTELA

16. Abhyankar, S. *y col.* Petsc/ts: A modern scalable ode/dae solver library. *arXiv preprint arXiv:1806.01437* (2018).

17. Hindmarsh, A. C. *y col.* SUNDIALS: Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **31,** 363-396 (2005).

18. Guennebaud, G., Jacob, B. *y col. Eigen v3* http://eigen.tuxfamily.org. 2010.

19. Davis, T. A. Algorithm 832: UMFPACK V4. 3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **30,** 196-199 (2004).

20. Balay, S. *y col. PETSc Web page* `https://www.mcs.anl.gov/petsc`. 2019. `https://www.mcs.anl.gov/petsc`.

21. Geuzaine, C. y Remacle, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering* **79,** 1309-1331 (2009).

22. Klöckner, A. *meshpy: 2D/3D simplicial mesh generator interface for Python (Triangle, TetGen, gmsh)* `https://github.com/inducer/meshpy`. 2020.

23. Dapogny, C., Dobrzynski, C. y Frey, P. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. *Journal of Computational Physics* **262,** 358-378. ISSN: 0021-9991 (2014).

24. Benitez, M. y Bermudez, A. Pure Lagrangian and semi-Lagrangian finite element methods for the numerical solution of convection-diffusion problems. *International Journal of Numerical Analysis & Modeling* **11** (2014).

25. Benítez, M., Bermúdez, A. y Fontán, P. en *Recent Advances in PDEs: Analysis, Numerics and Control* 33-59 (Springer, 2018).

26. Benítez, M., Bermúdez, A. y Fontán, P. Non-Eulerian Newmark Methods: A Powerful Tool for Free-Boundary Continuum Mechanics Problems. *Journal of Scientific Computing* **83** (2020).

27. Gurtin, M. An Introduction to Continuum Mechanics. *Mathematics in Science and Engineering* **158** (Academic Press, San Diego, 1981).

28. Süli, E. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.* **53,** 459-483 (1988).

29. Ferretti, R. Equivalence of semi-Lagrangian and Lagrange-Galerkin schemes under constant advection speed. *Journal of Computational Mathematics,* 461-473 (2010).

30. Staniforth, A. y Côté, J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—A review. *Monthly weather review* **119,** 2206-2223 (1991).

31. Benítez, M. y Bermúdez, A. Numerical analysis of a second order pure Lagrange–Galerkin method for convection-diffusion problems. Part I: Time discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **50,** 858-882 (2012).

32. Benítez, M. y Bermúdez, A. Second-Order Pure Lagrange–Galerkin Methods for Fluid-Structure Interaction Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing* **37,** B744-B777 (2015).

33. Oñate, E. y Manzan, M. Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems. *Developments in Heat Transfer* **7,** 71-118 (2000).

34. Hirt, C., Cook, J. y Butler, T. A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface. *Journal of Computational Physics* **5,** 103-124 (1970).

35. Ramaswamy, B. y Kawahara, M. Lagrangian finite element analysis applied to viscous free surface fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **7,** 953-984 (1987).

36. Idelsohn, S. R., Oñate, E. y Pin, F. D. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering* **61,** 964-989 (2004).

37. Radovitzky, R. y Ortiz, M. Lagrangian finite element analysis of newtonian fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **43,** 607-619 (1998).

38. Gurtin, M. E., Fried, E. y Anand, L. *The mechanics and thermodynamics of continua* (Cambridge University Press, 2010).

39. Newmark, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division* **85,** 67-94 (1959).

40. Boffi, D., Brezzi, F., Fortin, M. *y col. Mixed finite element methods and applications* (Springer, 2013).

41. Barrios, T. P., Cascón, J. M. y González, M. A posteriori error analysis of an augmented mixed finite element method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **283,** 909-922 (2015).

42. Arnold, D. N., Brezzi, F. y Fortin, M. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo* **21,** 337-344 (1984).

43. Alnæs, M. S., Logg, A., Ølgaard, K. B., Rognes, M. E. y Wells, G. N. Unified form language: A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **40,** 1-37 (2014).

44. Balay, S. *y col. PETSc Users Manual* inf. téc. ANL-95/11 - Revision 3.14 (Argonne National Laboratory, 2020). `https://www.mcs.anl.gov/petsc`.

45. Erturk, E., Corke, T. C. y Gökçöl, C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *International journal for Numerical Methods in fluids* **48,** 747-774 (2005).

46. Ghia, U., Ghia, K. N. y Shin, C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics* **48,** 387-411 (1982).

47. Fortin, A., Jardak, M., Gervais, J. y Pierre, R. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24,** 1185-1210 (1997).

48. Gervais, J., Lemelin, D. y Pierre, R. Some experiments with stability analysis of discrete incompressible flows in the lid-driven cavity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **24,** 477-492 (1997).

49. Kuhlmann, H., Wanschura, M. y Rath, H. Flow in two-sided lid-driven cavities: non-uniqueness, instabilities, and cellular structures. *Journal of Fluid Mechanics* **336,** 267-299 (1997).

50. Perumal, D. A. y Dass, A. K. Multiplicity of steady solutions in two-dimensional lid-driven cavity flows by lattice Boltzmann method. *Computers & Mathematics with Applications* **61,** 3711-3721 (2011).

51. Wahba, E. Multiplicity of states for two-sided and four-sided lid driven cavity flows. *Computers & Fluids* **38,** 247-253 (2009).

52. Huerta, A. y Liu, W. K. Viscous flow with large free surface motion. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **69,** 277-324 (1988).

53. Souli, M. y Zolesio, J. Arbitrary Lagrangian–Eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **191,** 451-466 (2001).

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

54. Hansbo, P. The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **99,** 171-186 (1992).

55. Walhorn, E., Kölke, A., Hübner, B. y Dinkler, D. Fluid–structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. *Computers & structures* **83,** 2100-2111 (2005).

56. Wall, W. A., Genkinger, S. y Ramm, E. A strong coupling partitioned approach for fluid–structure interaction with free surfaces. *Computers & Fluids* **36,** 169-183 (2007).

57. Martin, J. C. *y col.* Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **244,** 312-324 (1952).

58. De Souza Neto, E. A., Peric, D. y Owen, D. R. *Computational methods for plasticity: theory and applications* (John Wiley & Sons, 2011).

59. Koric, S. y Thomas, B. G. Thermo-mechanical models of steel solidification based on two elastic visco-plastic constitutive laws. *journal of materials processing technology* **197,** 408-418 (2008).

60. Ciarlet, P. G. y Nečas, J. Unilateral problems in nonlinear, three-dimensional elasticity. *Archive for rational mechanics and analysis* **87,** 319-338 (1985).

61. Yang, H. y Cai, X.-C. Parallel two-grid semismooth Newton-Krylov-Schwarz method for nonlinear complementarity problems. *Journal of Scientific Computing* **47,** 258-280 (2011).

62. Balay, S., Gropp, W. D., McInnes, L. C. y Smith, B. F. *Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries* en *Modern Software Tools in Scientific Computing* (eds. Arge, E., Bruaset, A. M. y Langtangen, H. P.) (Birkhäuser Press, 1997), 163-202.

63. Serendisnky, F. *Peformance analysis and optimization of the plate-rolling process* en *Mathematical Process Models in Iron and Steelmaking* (Amsterdam, 1973).

64. Krzyzanowski, M. y Beynon, J. Finite element model of steel oxide failure during tensile testing under hot rolling conditions. *Materials science and technology* **15,** 1191-1198 (1999).

65. Marchandise, E., Remacle, J.-F. y Geuzaine, C. Optimal parametrizations for surface remeshing. *Engineering with Computers* **30,** 383-402 (2014).

66. Hairer, E., Nørsett, S. y Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* ISBN: 9783540566700 (Springer Berlin Heidelberg, 2008).

67. Hairer, E. y Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems* ISBN: 9783642052217 (Springer Berlin Heidelberg, 2010).

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Los resultados del Capítulo 6 ya han sido publicados como:

Benítez M.[a], Bermúdez A.[b,c], Fontán P.[d] (2018) A Second-Order Linear Newmark Method for Lagrangian Navier-Stokes Equations. In: Doubova A., González-Burgos M., Guillén-González F., Marín Beltrán M. (eds) Recent Advances in PDEs: Analysis, Numerics and Control. SEMA SIMAI Springer Series, vol 17. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97613-6_3

Contribución específica en la publicación Formulaciones del problema, desarrollo e implementación del código para la resolución numérica de los problemas, ensayos numéricos.

Índices de calidad Esta publicación presenta un índice CiteScore de 1.0, índice SNIP de 0.777 e índice SJR de 0.191, métricas calculadas por Scopus para el año 2020. Se sitúa en el cuartil 4 (Q4) en la categoría de *Applied Mathematics* en el año 2020 calculado por Scimago: `https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=21100834919&tip=sid&clean=0`

Autorización de la revista La publicación *SEMA SIMAI Springer Series* perteneciente a la editorial Springer Nature, permite la reutilización del artículo por parte del autor como parte de su tesis:
`https://www.springer.com/gp/rights-permissions/obtaining-permissions/882`

Benítez, M.[a], Bermúdez, A.[b,c] and Fontán, P.[d] Non-Eulerian Newmark Methods: A Powerful Tool for Free-Boundary Continuum Mechanics Problems. *J Sci Comput* **83**, 44 (2020). https://doi.org/10.1007/s10915-020-01207-y

Contribución específica en la publicación Formulaciones del problema, desarrollo e implementación del código para la resolución numérica de los problemas, ensayos numéricos.

Índices de calidad Esta publicación presenta un índice CiteScore de 4.1, índice SNIP de 1.488 e índice SJR de 1.53, métricas calculadas por Scopus para el año 2020. Se sitúa en el cuartil 1 (Q1) en la categoría de *Applied Mathematics* en el año 2020 calculado por Scimago: `https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=23490&tip=sid&clean=0`

Autorización de la revista La publicación *Journal of Scientific Computing* perteneciente a la editorial Springer Nature, permite la reutilización del artículo por parte del autor como parte de su tesis:
`https://www.springer.com/gp/rights-permissions/obtaining-permissions/882`

[a]Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña, Centro de Investigación CITIC, Elviña s/n, 15071 A Coruña, Spain
[b]Departamento de Matemática Aplicada and Instituto de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela, c/ Lope Gómez de Marzoa s/n, 15782 Santiago de Compostela, Spain
[c]Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), Rúa Constantino Candeira s/n, 15782 Santiago de Compostela, Spain
[d]REPSOL Technology Lab, Autovía de Extremadura s/n, 28935 Móstoles, Madrid, Spain