

materia

Elementos de probabilidade e estatística

unidade didáctica 1

Introdución ao Cálculo de Probabilidades

Alberto Rodríguez Casal

Estadística e Investigación Operativa
Facultade de Matemáticas

titulación

Grao en Matemáticas



VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA



unidade didáctica 1

Introdución ao Cálculo de Probabilidades

Alberto Rodríguez Casal

Estatística e Investigación Operativa
Facultade de Matemáticas



© Universidade de Santiago de Compostela, 2013



Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.g>

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Dep. Legal: C 54-2013
ISBN 978-84-9887-959-9

ADVERTENCIA LEGAL: reservados todos os dereitos. Queda prohibida a duplicación, total ou parcial desta obra, en calquera forma ou por calquera medio (elec-trónico, mecánico, gravación, fotocopia ou outros) sen consentimento expreso por escrito dos editores.

MATERIA: Elementos de Probabilidade e Estatística
TITULACIÓN: Graduado en Matemáticas

PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Estatística Descritiva

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIVARIANTE

Introdución á estatística descritiva. Tipos de datos e variables. Frecuencias. Medidas de localización, dispersión e forma. Ferramentas gráficas de análise descritivo dunha variable.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BIVARIANTE

Distribución conxunta de frecuencias. Táboas. Frecuencias marginais e condicionadas. Ferramentas gráficas para dúas variables. Dependencia lineal. Recta de regresión. Covarianza e correlación.

Unidade II. Introducción ao cálculo de probabilidades

Espazo de probabilidade. Sucesos. Probabilidade. Propiedades. Probabilidade condicionada. Teorema das probabilidades totais. Regra de Bayes.

Unidade III. Variable aleatoria

Función de distribución. Tipos de variables aleatorias: discretas e continuas. Función masa de probabilidade e función de densidade.

Características dunha variable aleatoria. Transformación de variables aleatorias.

Unidade IV. Principais modelos de probabilidade

MODELOS DISCRETOS

Uniforme, Bernouilli, Binomial, Poisson, Hiperxeométrica, Xeométrica e Binomial Negativa.

MODELOS CONTINUOS

Uniforme, Normal, Exponencial, Gamma e Beta. Relacións de interese entre as distribucións

PRESENTACIÓN

A unidade didáctica *Introdución ao cálculo de probabilidades* forma parte da materia, de 6 créditos ECTS, *Elementos de Probabilidade e Estatística*. É unha materia de primeiro curso do grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela. A materia, que forma parte do módulo de *Estatística e Probabilidade*, impártese no primeiro cuadrimestre do curso a estudantes que, maioritariamente, acceden á Universidade por primeira vez. A formación básica en contidos de probabilidade e estatística destes estudantes é, polo tanto, moi variable, dependendo fundamentalmente do itinerario que estes seguiran durante o bacharelato.

O curso consta de catro unidades didácticas. A *Introdución ao cálculo de probabilidades* é a segunda. Empezará despois de completar a correspondente ao análise exploratorio de datos ou estatística descritiva. O estudante ten así, neste momento algunha noción de análise de datos pero non lle foi presentada formalmente o estudo matemático do fenómenos aleatorios. Despois da introdución ao cálculo de probabilidades que se fai na unidade aquí desenvolvida, continúan dúas unidades didácticas máis (variables aleatorias e principais modelos de probabilidade) que farán uso dos conceptos introducidos na segunda unidade. Será, por tanto, fundamental que o estudante acade os obxectivos propostos nesta unidade didáctica para ter éxito nos obxectivos do resto de unidades didácticas. A continuación preséntase o programa xeral do curso, xunto coa localización da unidade *Introdución ao cálculo de probabilidades*:

UD1-Estatística Descritiva

UD2-Introdución ao cálculo de probabilidades

UD 3-Variables aleatorias

UD4-Principais modelos de probabilidades

A unidade de *Introdución ao cálculo de probabilidades* terá unha duración de once horas presenciais que se distribúen como segue: catro horas de docencia expositiva, catro horas de docencia interactiva en aula/seminario, dúas horas de docencia interactiva en aula de informática e unha hora para avaliación dos obxectivos da unidade didáctica acadados.

XUSTIFICACIÓN

Como se mencionou a materia de Elementos de Probabilidade e Estatística impártese no primeiro cuadrimestre do curso a estudantes cunha formación en contidos de probabilidade e estatística moi variable que depende fundamentalmente do seu itinerario durante o bacharelato. A materia conforma a parte introdutoria do módulo de *Estatística, probabilidade e investigación operativa*, e debería nivelar os coñecementos dos estudantes para posteriores materias do módulo. A materia ten carácter básico, e a unidade didáctica de *Introdución ao cálculo de probabilidades* é o primeiro contacto do estudante coa probabilidade dentro dos seus estudos universitarios no grao de Matemáticas.

A unidade didáctica é necesaria para introducir ideas fundamentais para o resto das unidades didácticas da materia, así como para as materias de *Probabilidade e Estatística e Inferencia Estatística* do módulo de *Estatística, probabilidade e investigación operativa* do grao de Matemáticas.

OBXECTIVOS

Os obxectivos específicos da unidade didáctica, que están aliñados cos xerais da materia, son:

- [O1] Coñecer os fundamentos do cálculo de probabilidades
- [O2] Entender e utilizar o concepto de probabilidade condicionada
- [O3] Ser capaz de formular en termos de probabilidades enunciados e problemas
- [O4] Resolver problemas que requiran o cálculo de probabilidades
- [O5] Utilizar o ordenador para simular fenómenos aleatorios

CONTIDOS

Os contidos da unidade didáctica deben permitir acadar os obxectivos da mesma. Dentro destes obxectivos está o primeiro, que no é outro que coñecer os fundamentos do cálculo de probabilidades. Para iso, empezaremos facendo unha introdución histórica do cálculo de probabilidades, abordando as distintas nocións de probabilidade que se teñen probado ao longo da historia. Falarase dos distintos métodos de asignación de probabilidades como son a regra de Laplace, a asignación subxectiva e a aproximación baseada no límite de frecuencias relativas. Discutirase as vantaxes e limitacións de cada unha das regras de asignación directa, para chegar a conclusión da necesidade de ter unha teoría máis flexible que permita á análise de fenómenos aleatorios complexos.

Despois da introdución histórica presentárase formalmente a definición axiomática de probabilidade debida a Kolmogorov. Dado a que está baseada en axiomas, non é construtiva, evitando dicir cómo se calcula a probabilidade. A probabilidade, ao contrario de cómo se fixo historicamente, defínese entón a través das súas propiedades. Esta forma de proceder da moita flexibilidade ao cálculo de probabilidades permitindo abordar situación moi diversas dentro da mesma teoría. Dentro do obxectivo [O1] trátase de que o alumno coñeza as distintas solucións ao problema de asignación de probabilidade, e valore a solución axiomática. Para ver a potencia dos axiomas, analizaranse as consecuencias dos mesmos, presentando as propiedades da probabilidade que se derivan da definición. Faremos uso da teoría de conxuntos, que será revisada brevemente. Deduciremos fórmulas para a probabilidade da unión, tanto disxunta como no caso xeral. Como consecuencias destas fórmulas analizaremos, como contido transversal, experimentos aleatorios que se repiten indefinidamente. Esta análise require coñecementos de cálculo de series de números reais, que estarán sendo estudadas na materia do primeiro cuadrimestre *Introdución á análise matemática*.

A hora de presentar a definición de probabilidade condicionada, intentarase que o alumno entenda que o concepto de probabilidade non pode ser separado do concepto de información. Por exemplo, a resposta a pregunta “*cal é a probabilidade de que mañá chova?*”, no pode desligarse do contexto: onde se pregunta, en qué época do ano, ... Utilizarase as frecuencias relativas, presentadas na primeira unidade didáctica, para definir formalmente a probabilidade condicionada. Veremos que este concepto é útil para analizar experimentos aleatorios que evolucionan no tempo (ver [O3]).

Un concepto moi ligado co de probabilidade condicionada é o de independencia. Esta noción xa foi abordada, informalmente, na primeira unidade didáctica, na análise de táboas de continxencia, ao traballar o

8 - U.D. II: INTRODUCCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

concepto de asociación estadística entre un par de variables medidas conxuntamente. Trátase aquí de formalizar estas ideas usando a definición da probabilidade condicionada. Mostrarase a utilidade desta idea de independencia na resolución de problemas de cálculo de probabilidades propios dos xogos de azar, onde se realiza o mesmo experimento aleatorio de forma repetida (ver [O3] e [O4]).

Finalmente, dentro dos contidos teóricos, probaremos tres teoremas fundamentais no cálculo de probabilidades como son a Regra do produto, o Teorema das probabilidades totais e o Teorema de Bayes. Presentaranse na orde aquí utilizada. En primeiro lugar trataremos a regra do produto para só dous sucesos xa que é consecuencia directa da definición de probabilidade condicionada. Posteriormente trataremos o caso máis xeral de máis de dous sucesos dependentes que acontecen consecutivamente. Presentaremos exemplos que permitan comprender a utilidade práctica de esta regra (ver [O4]). Seguiremos un esquema similar no Teorema das probabilidades totais e na Regra de Bayes, facendo fincapé nas súas aplicacións prácticas. No caso da Regra de Bayes, tamén se reflexionará sobre as repercusións de tipo conceptual que ten, xa que permite cuantificar a probabilidade de eventos que aconteceron antes do evento final observado.

Tamén se presentarán aos alumnos as ferramentas que ten o software estatístico R para analizar experimentos aleatorios (ver [O5]). En concreto, veremos as funcións de R que permiten simular o sorteo dun número ao azar dentro dun conxunto dado. Ademais, estudaremos cómo conseguir que R repita un conxunto de tarefas mediante o uso bucles. Coa axuda destas ferramentas farase unha introdución á simulación de experimentos aleatorios.

METODOLOXÍA E ACTIVIDADES PROPOSTAS

A metodoloxía docente prevista nesta unidade didáctica pretende acadar os obxectivos da mesma fomentando a actividade intelectual por parte dos estudantes así como a participación e o pensamento reflexivo dos mesmos.

Co propósito de que o estudante acade os obxectivos marcados na unidade planifícanse unha serie de actividades presenciais. Teremos tanto sesións expositivas como interactivas (de resolución de problemas e en aula de informática). A continuación detállanse a dinámica destas sesións e as actividades propostas nelas.

Sesións expositivas (catro horas):

Nas sesións de docencia expositiva (catro sesións dunha hora) explicaranse os conceptos teóricos da unidade, utilizando presentacións multimedia xunto co uso do encerado. O material multimedia será facilitado ao alumnado previamente mediante o uso do campus virtual da universidade. Ademais de contar os principais resultados teóricos nas sesións expositivas, tamén se resolverán exercicios tipo que servirán de base para que o estudante sexa capaz de resolver, de forma autónoma, os distintos exercicios propostos no boletín de exercicios. Fomentarase, na medida do posible, a participación dos estudantes, facendo cuestións abertas na aula, e reservando tempo para que estes poidan acadar por eles mesmos a resolución dos problemas propostos.

Sesións interactivas en aula/seminario (catro horas):

As sesións interactivas en aula/seminario estarán baseadas na resolución dun boletín de exercicios, que será entregado aos estudantes coa suficiente antelación mediante o campus virtual da universidade. Os problemas serán resoltos tanto polos estudantes coma polo profesor, en función da complexidade do exercicio. As sesións serán dunha hora e empezarán preguntando o profesor aos estudantes qué exercicios non souberon resolver. No caso de non existir peticións será o profesor o que propondrá un exercicio, que será resolto na aula, tanto individualmente coma en grupo. Despois dun tempo, o exercicio proposto resolverase no encerado.

Sesións interactivas en aula de informática (dúas horas):

As sesións de aula de informática tamén están planificadas como sesións dunha hora. As aulas de informática da facultade de matemáticas contan aproximadamente con vinte postos, polo que é esperable que os estudantes poidan utilizar o seus propio ordenador. Utilizarase en todo momento o software estatístico R, que xa estará previamente instalado nos ordenadores. Para desenvolver estas sesións utilizarase guións de prácticas, que contarán tanto coa descrición das funcións básicas a utilizar en cada unha das sesións, como exemplos e exercicios que os alumnos deben copiar/resolver por si mesmos, e con axuda do profesor. O profesor

intentará resolver individualmente as cuestión que xurdan durante a sesión. No caso que un problema ou cuestión sexa común a moitos estudantes, o profesor utilizará o proxector para resolver colectivamente a cuestión. Pasado un tempo suficiente despois de rematada a sesión (entre unha ou dúas semanas), o profesor subirá ao campus virtual da materia un ficheiro coas solucións aos exercicios de cada guión.

Sesión de avaliación (unha hora):

Dedicarase unha sesión dunha hora, en aula interactiva, para avaliar os resultados acadados. Se lles entregará na aula unha serie de problemas que os estudantes deberán resolver durante a sesión. Para a resolución poderán todo o material que teñan na aula.

AVALIACIÓN

Os obxectivos da unidade didáctica serán avaliados da seguinte forma:

Avaliación do obxectivo [O1]: O coñecemento dos fundamentos do cálculo de probabilidades será avaliado no exame final, mediante cuestións curtas de tipo teórico que esixan madurez conceptual ao estudante.

Avaliación dos obxectivo [O2] e [O4]: A avaliación deste obxectivo farase no exame e na sesión de avaliación contemplada na unidade didáctica. Os enunciados dos problemas serán de tal forma que sexa necesario manexar o concepto de probabilidade condicionada para a súa resolución.

Avaliación do obxectivo [O3]: No exame, nas cuestións curtas, pedirase ao estudante que interprete en termos de probabilidades un enunciado.

Avaliación do obxectivo [O5]: Este obxectivo avaliarase no exame final, sobre un código de R, que estudante deberá comentar e corrixir.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

D. FREEDMAN et al. (2001), *Statistics*. Norton, 2001

D. PEÑA (2001), *Fundamentos de Estadística*, Ciencias Sociales Alianza Editorial.

H. TIJMS (2007), *Understanding Probability*, Cambridge University Press

Bibliografía complementaria

L. COCKING, W. SMITH (2001), *Á Estadística en caricaturas!*. Publicado pola SGAPEIO.

J. VERZANI (2005), *Using R for Introductory Statistics*, Chapman and Hall

Recursos web

GRINSTEAD y SNELL, *Introduction to Probability*, AMS, Segunda Edición.

Este libro pódese descargar gratuitamente dende a dirección

http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf



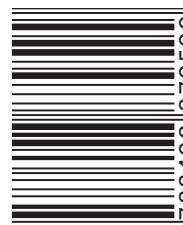
Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade



Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro



SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA



9 788498 879599