



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# O grao topolóxico de Leray-Schauder e aplicacións ás ecuacións diferenciais

Manuel Álvarez Rodríguez

2021-2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# O grao topolóxico de Leray-Schauder e aplicacións ás ecuacións diferenciais

Manuel Álvarez Rodríguez

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Análise Matemática</b>
<b>Título: O grao topolóxico de Leray-Schauder e aplicacións ás ecuacións diferenciais</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>O grao topolóxico de Leray-Schauder, que xeneraliza a espazos normados a teoría do grao de Brouwer, é unha ferramenta moi útil en análise non lineal para probar a existencia de solución dunha ecuación dada.</p> <p>Partindo do caso de dimensión finita, presentarase esta teoría xunto coas súas propiedades máis relevantes. Logo, como consecuencia da mesma, probaranse algúns teoremas de punto fixo (Brouwer, Schauder, Schaefer...). Como unha aplicación, usarase a teoría no estudo de existencia de solución para ecuacións diferenciais ordinarias.</p>
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. Grao Topolóxico de Brouwer</b>	<b>1</b>
1.1. Resultados previos . . . . .	1
1.2. Definición do grao de Brouwer . . . . .	4
1.3. Propiedades do grao de Brouwer . . . . .	13
1.3.1. Resultados topolóxicos previos . . . . .	13
1.3.2. Cambios en $f$ e $b$ . . . . .	14
1.3.3. Cambios no dominio . . . . .	16
1.4. Teorema de punto fixo de Brouwer . . . . .	19
<b>2. Grao topolóxico de Leray-Schauder</b>	<b>23</b>
2.1. Introdución do grao para espazos de dimensión infinita . . . . .	23
2.2. Definición do grao de Leray-Schauder . . . . .	25
2.3. Propiedades do grao de Leray-Schauder . . . . .	28
2.4. Teoremas de punto fixo . . . . .	33
2.4.1. Teorema de punto fixo de Schauder . . . . .	33
2.4.2. Teorema de Schaeffer . . . . .	35

---

<b>3. Aplicacións da Teoría do grao ás ecuacións diferenciais</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>





## Resumo

Na primeira década do século XX comezan os primeiros estudos sobre o grao topolóxico, unha ferramenta de utilidade na topoloxía alxébrica e na análise funcional non linear. No presente traballo, desenvolvemos unha pormenorizada introdución á teoría do grao. Partindo de espazos de dimensión finita, definimos o grao de Brouwer para funcións continuamente diferenciables e, posteriormente, para funcións continuas. Presentamos as propiedades máis importantes do grao, que nos permiten, entre outras aplicacións, garantir a existencia de solución dunha ecuación dada. Partindo do grao, probamos teoremas clásicos como o de punto fixo de Brouwer ou o da bóla peluda.

En espazos de dimensión infinita, os resultados relativos ó grao de Brouwer non son certos, en xeral. Por este motivo, cómpre redefinir o grao, coa limitación de facelo para unha clase máis restritiva de funcións, as perturbacións compactas da identidade. Construimos, partindo do grao de Brouwer, o grao de Leray-Schauder. Destacamos algunhas das propiedades máis interesantes e xeneralizamos os teoremas de punto fixo para espazos de dimensión infinita.

Existen aplicacións da teoría do grao en moitos eidos das matemáticas. Facendo uso do Teorema de punto fixo de Schauder e das propiedades do grao, probamos a existencia de solución local dun problema de valor inicial e a conexidade do seu espazo de solucións.

## Abstract

In the first decade of the twentieth century began the first studies on the topological degree, a useful tool in algebraic topology and in nonlinear functional analysis. In the present project, we have developed a detailed introduction to the degree theory. Starting from finite dimensional

spaces, we define the Brouwer degree for continuously differentiable functions and subsequently for continuous functions. We present the most important properties of the degree, which allow us, among other applications, to ensure existence of solution of a given equation. Based on the degree, we prove several classic theorems such as the Brouwer fixed point or the one of the hairy ball.

In infinite dimensional spaces, the results relating to the Brouwer degree are not true, in general. Therefore it is necessary to redefine the degree, with the limitation of doing so for a more restrictive class of functions, the compact perturbations of the identity.

Using the Brouwer degree, we build the Leray-Schauder degree. We highlight some of the most interesting properties and we generalize the fixed point theorems for infinite dimensional spaces. Degree theory can be applied in many mathematical fields. We prove, using the Schauder fixed point theorem and the degree properties, the existence of local solutions of an initial value problem and the connection of its solution set.

# Introdución

O grao topolóxico é unha ferramenta analítica e topolóxica de utilidade en moitos eidos das matemáticas. Os seus inicios son froito das investigacións e dos avances matemáticos de principios do século XX, polo que non existe unha única autoría. Non obstante, destacamos o labor do matemático neerlandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer quen no artigo [3] publicado en xullo de 1911 dá a primeira definición explícita do grao, que nós coñecemos como grao de Brouwer, para funcións continuas en espazos de dimensión finita. No mesmo artigo, presenta algunha das propiedades básicas do grao e aplica estes resultados para probar o Teorema da bóla peluda. Ademais, enuncia e demostra o Teorema de punto fixo para funcións continuas definidas na bóla unidade de  $\mathbb{R}^n$  en si mesma. Cabe mencionar que este artigo é consecuencia dun anterior [2], no que o mesmo autor fai un uso implícito do grao para probar que os espazos  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  non son homeomorfos, sendo  $m < n$ .

Xa existían anteriormente outros métodos matemáticas similares, como o índice de Kronecker, presentado en 1869 por Leopold Kronecker. A súa fórmula defínese para un sistema de  $n + 1$  funcións reais continuamente diferenciables de  $n$  variables reais, baixo unhas hipóteses similares ás do grao. No 1910, Hadamard xeneraliza o índice de Kronecker para funcións continuas, obtendo así uns resultados semellantes ós que Brouwer presentaría un ano máis tarde. De feito, él mesmo menciona no seu artigo [3] a similitude en certos aspectos de ambas investigacións.

A construción do grao topolóxico xurde dunha motivación práctica. En particular, a necesidade de xeneralizar o Teorema de Bolzano para o caso  $n$  dimensional pode resolverse coa Teoría do grao. Con este propósito, no ano 1883 o matemático Henri Poincaré enuncia o seguinte teorema.

**Teorema** (Poincaré). *Sexa  $f = (f_1, \dots, f_n) \in [-a, a]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha funcións continua. Se  $(f_i)(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n) > 0$  e  $(f_i)(x_1, \dots, -a_i, \dots, x_n) < 0$ , para todo  $i \in 1, \dots, n$ . Entón, existen  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  tal que  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (0, \dots, 0)$ .*

Probará probará este teorema no 1883 coa axuda do índice de Kronecker. Non obstante, utiliza o índice sen explicar como o estende para funcións continuas. Pois o Teorema de Aproximi-

mación de Weierstrass (1885) foi enunciado con posterioridade. Ademais recordemos que non foi ata 1910 cando Hadamard, precisamente despois de estudar os traballos de Poincaré, demostra esta xeneralización.

O teorema de punto fixo de Brouwer é tamén unha versión do Teorema de Bolzano. De feito, no 1940 o matemático italiano Carlo Miranda proba que o Teorema de punto fixo de Brouwer e o resultado de Poincaré son equivalentes. Como veremos máis adiante, a partir das propiedades do grao de Brouwer pódese enunciar directamente unha xeneralización do Teorema de Bolzano. Recomendamos as referencias [9] e [4] para máis información sobre a evolución histórica do grao de Brouwer e a súa relación co Teorema de Bolzano, respectivamente.

No capítulo primeiro, faremos unha detallada introdución á Teoría do grao en espazos de dimensión finita. Comenzaremos definindo o grao para funcións continuamente diferenciables respecto a puntos nos que a derivada non se anula e a imaxe do mesmo non está na fronteira. A medida que enunciemos algún resultado máis técnico, iremos relaxando as hipóteses da definición. Presentaremos as propiedades máis importantes que permitirán e facilitarán a aplicación da Teoría do grao. Ademais, seguindo o contexto histórico, probaremos o Teorema da bóla peluda e o de punto fixo de Brouwer.

Os resultados do grao de Brouwer non son certos, en xeral, para espazos de dimensión infinita. Por iso, cómpre redefinir o grao para adaptalo á espazos de dimensión infinita para unha certa clase de funcións. Seguindo esta idea, o matemático Juliusz Schauder define unha clase de aplicacións non lineais en espazos de Banach, as perturbacións completamente continuas da identidade, que hoxe coñecemos como perturbacións compactas da identidade. Do ano 1927 ó 1932 fixo contribucións ó análise non linear aplicando coñecementos da topoloxía alxébrica [18]. Esta nova clase de función permítelle xeneralizar importantes resultados do grao de Brouwer a espazos de dimensión infinita.

No ano 1933, como consecuencia da invasión alemá, Schauder desprázase a París onde coñece a Jean Leray. Froito da colaboración de ambos matemáticos, desenvólvese a Teoría do grao para espazos de dimensión infinita. En particular, definen o grao de Leray-Schauder para perturbacións compactas da identidade aproximándoas por funcións de rango finito, para as cales poden calcular o grao de Brouwer. No ano 1943, descoñécese a data exacta, Juliusz Schauder foi asasinado pola Gestapo polo mero feito de ser xudeu [6, Páx. 34], deixando sen publicar aqueles resultados que deducira estando agochado dos Nazis.

No capítulo segundo, construiremos detalladamente o grao de Leray-Schauder en espazos normados de dimensión infinita e estudaremos algunha das propiedades máis importantes. Enunciaremos e probaremos algúns teoremas de punto fixo para espazos de dimensión infinita.

No último capítulo, analizaremos algunhas aplicacións do grao de Leray-Schauder ás ecuacións diferenciais. Partindo da ecuación integral probaremos a existencia de solución local dun problema de valor inicial facendo uso do Teorema de punto fixo de Schauder, nas súas diferentes versións, e das propiedades do grao. Por último, veremos que o conxunto de solucións do problema anterior é conexo e compacto.

Aínda que neste traballo só se introduce a Teoría do grao e se presenta algunha aplicación ás ecuacións diferencias, cabe mencionar que o grao topolóxico tamén se pode estender a outras clases de funcións (multiavaliadas, operadores descontinuos, etc.) e as súas aplicacións son moi variadas (álgebra, Teoría de xogos, análise complexo, Ecuacións de Navier-Stokes, etc.).



# Capítulo 1

## Grao Topolóxico de Brouwer

Imos comezar amosando algunhas definicións e resultados que cómpre recordar pois faremos moito uso dos mesmos ó longo do traballo. Dado que non son obxecto de estudo, non afondaremos moito nestes resultados e remitimos ó lector ós libros [5], [7] e [16], que son unha boa referencia dos apartados 1.1 e 1.3.1. Os resultados que se recollen nas seccións restantes deste primeiro capítulo pódense atopar principalmente nos libros [13] e [14]. Nestas fábase do grao de Brouwer, preséntanse algunhas definicións máis amplas do mesmo, analízanse as súas propiedades e tamén algunha aplicación máis directa, como o Teorema de punto fixo de Brouwer.

### 1.1. Resultados previos

Como xa comentamos, neste apartado preséntanse algúns termos procedentes do análise funcional e da topoloxía que en xeral son coñecidos. Ademais aclárase a notación que se utilizará e recóllense resultados máis específicos, que non son propios da teoría do grao, como o Teorema da Función Inversa 1.17, o Teorema de Sard 1.18 e o Teorema de Weierstrass 1.19.

**Definición 1.1.** Un **espazo linear**  $E$  sobre  $\mathbb{R}$  é un conxunto de elementos que satisfán as seguintes condicións:

1.  $(E, +)$  é un grupo abeliano.
2. Está definida unha operación  $\cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  verificando para  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in E$ ,
  - a)  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ ,
  - b)  $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ ,
  - c)  $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ ,

$$d) 1 \cdot x = x.$$

En xeral a definición de espazo vectorial e linear é a mesma aínda que non teñen a mesma interpretación xeométrica.

**Definición 1.2.** Sexa  $E$  un espazo linear real. Unha **norma** sobre  $E$  é unha aplicación  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica para  $x, y \in E$  e  $a \in \mathbb{R}$ :

1.  $\|x\| \geq 0$ ,
2.  $\|x\| = 0$  se e só se  $x = 0$ ,
3.  $\|ax\| = |a|\|x\|$ ,
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Un espazo linear dotado dunha norma,  $(E, \|\cdot\|)$ , chámase **espazo linear normado**.

*Notación 1.3.* Referirémonos a un espazo linear real soamente como espazo linear.

*Notación 1.4.* [13, Páx. 36] Sexa  $\Omega$  un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$  aberto e limitado. Referirémonos a  $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  como o espazo de funcións,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k$  veces diferenciables en  $\Omega$  tal que  $f$  e as súas derivadas de orden inferior a  $k + 1$  se poden estender de forma continua a  $\bar{\Omega}$ .

*Notación 1.5.* Sexa  $E$  un espazo linear de dimensión finita  $n$ . Utilizaremos para  $x \in E$  a seguinte norma,

$$\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

*Notación 1.6.* Sexa  $\Omega$  un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$  aberto e limitado. Sexa unha función  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ , denotaremos a súa norma como

$$\|f\| \equiv \|f\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

*Observación 1.7.* Todo espazo linear normado  $(E, \|\cdot\|)$  se pode considerar como espazo métrico baixo a métrica,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , inducida pola norma.

**Definición 1.8.** Dados dous conxuntos  $A$  e  $B$  nun espazo métrico  $(E, \rho)$ , defínese a **distancia entre os conxuntos**  $A$  e  $B$  como

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

**Definición 1.9.** Defínese o **produto interno** sobre un espazo linear  $E$  como unha aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumpre para  $x, y, z \in E$  e  $a \in \mathbb{R}$ :

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,
2.  $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$ ,
3.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  ,  $\langle x, x \rangle = 0$  se e só se  $x = 0$ .

*Observación 1.10.* A todo produto interno se asocia unha norma,  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Definición 1.11.** Sexa  $X$  un conxunto arbitrario e  $f$  unha función de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ . O **soporte** de  $f$ , denótase por  $\text{supp}(f)$  e defínese como:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}},$$

isto é, a clausura do conxunto de puntos para os cales a función non se anula.

**Definición 1.12.** Unha sucesión  $\{x_n\}$  nun espazo métrico  $X$  dise **sucesión de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Definición 1.13.** Un espazo métrico dise que é **completo** se toda sucesión de Cauchy no espazo é converxente.

**Definición 1.14.** Se un espazo linear normado é completo, entón dise que é un **espazo de Banach**.

**Definición 1.15.** Sexan  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^m$  dous espazos calquera. Unha aplicación  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  é un **homeomorfismo** se é continua, bixectiva e a súa inversa  $f^{-1}$  é tamén continua.

Non entramos máis en detalle nestes conceptos topolóxicos pois non serán necesarios para definir o grao, polo que se verán na sección 1.3.1. Continuamos con dous importantes teoremas do análise e unhas últimas definicións para dar paso á definición do grao.

**Corolario 1.16.** Sexa  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $x \in \Omega$ . A **matriz xacobiana** de  $f$  en  $x$  vén dada como

$$Df(x) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Se  $n = m$ , o determinante da matriz xacobiana,  $\det(Df(x))$ , denótase por  $J_f(x)$ .

*Demostración.* Véxase en [21, Páx.78] □

**Teorema 1.17** (da Función Inversa). *Sexan  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conxunto aberto e  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Dado  $a \in \Omega$  tal que  $f(a) = b$  e  $J_f(a) \neq 0$ , entón existen veciñanzas abertas de  $a$  e  $b$ ,  $\mathcal{U}_a$  e  $\mathcal{V}_b$ , tal que  $f : \mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{V}_b$  ten unha inversa  $f^{-1} : \mathcal{V}_b \rightarrow \mathcal{U}_a$  continuamente diferenciable.*

*Demostración.* Véxase en [22, Páx.35]. □

**Teorema 1.18** (de Sard). *Sexa  $\Omega$  un subconxunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  e  $S$  o conxunto  $\{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ . Entón  $f(S)$  ten medida de Lebesgue nula en  $\mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 1.19.** *(de Weierstrass) Sexa  $K$  un conxunto cerrado e limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in C(K, \mathbb{R}^n)$ . Entón existe unha sucesión de funcións  $f_n \in C^\infty(K, \mathbb{R}^n)$  que converxen uniformemente a  $f$ .*

**Definición 1.20.** Sexa  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  unha función diferenciable e  $x \in \Omega$ . Dise que  $x$  é un **punto crítico** se o rango de  $Df(x)$  é menor que  $m$ . Pola contra, se  $Df(x)$  alcanza o rango máximo,  $x$  é un **punto regular**.

**Definición 1.21.** Sexa  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ . Dise que  $y$  é un **valor crítico** se é imaxe dun punto crítico, isto é, se existe  $x \in \Omega$  tal que  $y = f(x)$  e o rango de  $Df(x)$  é menor que  $m$ . Noutro caso dise que  $y$  é un **valor regular**.

Se nos restrinximos a funcións  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , é sinxelo ver que un punto  $x$  é crítico se e só se  $J_f(x) = 0$ . Logo, facendo uso do Teorema de Sard 1.18 sabemos que o conxunto de valores críticos ten medida nula.

**Definición 1.22.** Definiremos a función **signo**,  $\text{sgn}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

## 1.2. Definición do grao de Brouwer

Neste apartado presentamos a definición de grao topolóxico para espazos de dimensión finita dada por Brouwer, unha caracterización da mesma e algunha definición máis xeral. Ademais veremos algún exemplo. Convén aclarar que, para facilitar a lectura, fixaremos a seguinte notación.

*Notación 1.23.* Sexa  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Fixamos, salvo que se indique o contrario, ó conxunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  como aberto e limitado, e denotaremos por  $S$  ó conxunto de puntos críticos de  $f$ .

**Definición 1.24.** Sexa  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $S$  o conxunto de punto críticos de  $f$  e  $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ . Defínese o **grao** de  $f$  en  $\Omega$  respecto a  $b$  como

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^{-1}(b) = \emptyset, \\ \sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sgn}(J_f(x)), & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Para ver que está ben definida a función do grao, debemos probar con anterioridade o seguinte resultado.

**Teorema 1.25.** *Se  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(S)$ , entón o conxunto  $f^{-1}(b) = \{x \in \bar{\Omega} : f(x) = b\}$  é finito.*

*Demostración.* Vexámolo por redución ó absurdo. Supoñamos que o conxunto  $f^{-1}(b) \subset \bar{\Omega}$  é infinito. Polo teorema de Heine-Borel, sabemos que  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, entón, pola condición de Bolzano-Weierstrass,  $f^{-1}(b)$  ten un punto de acumulación,  $\bar{x}$ . Logo existe unha sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(b)$  converxente a  $\bar{x}$  tal que  $x_k \neq x_l$ , para todo  $k \neq l$ . Por ser  $f$  diferenciable tense que, para un  $n$  suficientemente grande,

$$0 = f(x_n) - f(\bar{x}) = Df(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + (x_n - \bar{x})\varepsilon(x_n - \bar{x}), \quad (1.1)$$

onde  $\varepsilon$  é unha función real tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ . Ademais  $J_f(\bar{x}) \neq 0$ , pois  $\bar{x} \in f^{-1}(b)$  e  $b \notin f(S)$ . Polo tanto,

$$0 < \gamma := \inf\{\|Df(\bar{x})u\| : u \in \mathbb{R}^n, \|u\| = 1\}. \quad (1.2)$$

Por (1.1), sabemos que para un  $n$  suficientemente grande,

$$Df(\bar{x}) \left( \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right)$$

é tan pequeno como desexemos. En particular,

$$\left\| Df(\bar{x}) \left( \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right) \right\| < \frac{\gamma}{2}.$$

Polo tanto, tendo en conta (1.2), temos que

$$\gamma \leq \left\| Df(\bar{x}) \left( \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right) \right\| < \frac{\gamma}{2},$$

chegando a unha contradición. Logo  $f^{-1}(b)$  é finito como queriamos probar.  $\square$

Agora somos quen de ver que o grao está ben definido. Por ser  $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ ,  $Df(x)$  está definida para todo  $x \in f^{-1}(b)$  e  $J_f(x) \neq 0$ . Entón  $Df(x)$  é invertible e, polo Teorema da función inversa, existe un entorno de  $x$  para o cal  $f$  é invertible. Ademais, temos probado que  $f^{-1}(b)$  é finito e polo tanto a suma  $\sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sgn}(J_f(x))$  é finita.

**Exemplo 1.26.** (Normalización) Sexa  $Id : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  a función identidade. Tense que  $D_{Id}(x) = I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de orde  $n$ , logo  $J_{Id}(x) = 1^n = 1$  e  $\text{sgn}(J_{Id}(x)) = 1$  para todo  $x \in \Omega$ . Entón o grao de  $Id$  en  $\Omega$  respecto a  $b \in \mathbb{R}^n$  é

$$d(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \in \Omega, \\ 0 & \text{se } b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

xa que  $Id^{-1}(b) = b$  para  $b \in \Omega$ . De xeito análogo obtense que  $J_{-Id}(x) = (-1)^n$ , logo se  $n$  é par o grao é o mesmo que no caso anterior. Se  $n$  é impar o grao de  $-Id$  en  $\Omega$  respecto a  $b \in \mathbb{R}^n$  é

$$d(-Id, \Omega, b) = \begin{cases} -1 & \text{se } b \in \Omega, \\ 0 & \text{se } b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

**Exemplo 1.27.** Sexa  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $\Omega = (0, 2\pi)$ . O conxunto  $(0, 2\pi)$  é aberto e limitado en  $\mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$  e  $J_f(x) = f'(x) = \cos(x)$ . Vexamos os puntos onde o grao non está definido, isto é, calculamos  $f(S)$  e  $f(\partial\Omega) = f(\{0, 2\pi\})$ :

$$S = \{x \in (0, 2\pi) : \cos(x) = 0\} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\}, \quad f(S) = \{-1, 1\} \quad \text{e}$$

$$f(\partial\Omega) = f(\{0, 2\pi\}) = \{\text{sen}(0), \text{sen}(2\pi)\} = \{0\},$$

logo verificáanse as hipóteses da definición 1.24 para algún  $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . O grao de  $f$  en  $\Omega$  respecto  $b = 2$  é  $d(f, \Omega, 2) = 0$ , pois

$$f^{-1}(b) = \{x \in \Omega : \text{sen}(x) = 2\} = \emptyset.$$

Para  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$f^{-1}(b) = \left\{ x \in (0, 2\pi) : \text{sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

logo,

$$d\left(f, \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{sgn}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \text{sgn}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 1 - 1 = 0.$$

É lóxico preguntarnos se podemos modificar ou facer menos restritivas as hipóteses da definición 1.24. A resposta é afirmativa pero para elo cómpre dar unha caracterización do grao e algún resultado máis técnico que nos permitirán probalo.

**Proposición 1.28.** Sexa  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ , entón existe  $\varepsilon_o$  tal que,

$$d(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx, \quad (1.3)$$

para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ , onde  $\varphi_\varepsilon$  é unha función  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  cuxo soporte está contido na bóla  $B(0, \varepsilon)$  de centro 0 e radio  $\varepsilon$  e satisfai

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (1.4)$$

*Demostración.* Se  $f^{-1}(b) = \emptyset$ , eliximos  $\varepsilon_o < \rho(b, f(\bar{\Omega}))$ . Tense que para todo  $x \in \bar{\Omega}$ ,

$$|f(x) - b| \geq \rho(b, f(\bar{\Omega})) > \varepsilon_o > \varepsilon,$$

logo  $f^{-1}(b) \notin B(0, \varepsilon) \supseteq \text{supp}(\varphi_\varepsilon)$  e polo tanto  $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) = 0$  verificando (1.3) trivialmente.

Noutro caso, supoñamos que  $f^{-1}(b) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Sabemos, por ser  $b \notin f(S)$ , que  $J_f(x_i) \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Logo, aplicando o teorema da función inversa, existen veciñanzas  $\mathcal{U}_i$  de  $x_i$  disxuntas dous a dous e veciñanzas  $\mathcal{V}_i$  de  $b$  tal que  $f|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$  é un homeomorfismo. Ademais podemos garantir que  $J_f$  ten signo constante en  $\mathcal{U}_i$ . Escollamos  $\varepsilon_o > 0$  tal que

$$B(b, \varepsilon_o) \subset \bigcap_{i=1}^m \mathcal{V}_i \quad \text{e sexan} \quad W_i = f^{-1}(B(b, \varepsilon_o)) \cap \mathcal{U}_i. \quad (1.5)$$

Entón os conxuntos  $W_i$  son disxuntos dous a dous e  $J_f$  ten signo constante en cada un deles. Ademais, se  $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$  e  $x \notin \cup_{i=1}^m W_i$ , tense  $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) = 0$ . Isto é certo, xa que por hipótese  $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) = 0$  se  $f(x) - b \notin B(0, \varepsilon)$  e se  $x \notin \cup_{i=1}^m W_i$  entón  $f(x) - b \notin B(0, \varepsilon)$ . Vexamos esta implicación con detalle. Se  $f(x) - b \in B(0, \varepsilon)$  entón  $f(x) \in B(b, \varepsilon) \subset B(b, \varepsilon_o) \subset \cap_{i=1}^m \mathcal{V}_i$  logo  $f(x)$  está en  $B(b, \varepsilon) \cap \mathcal{V}_i$  e por ser  $f|_{\mathcal{U}_i}$  un homeomorfismo,  $x \in f^{-1}(B(b, \varepsilon_o)) \cap \mathcal{U}_i = W_i$ . Con todo isto, tense que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sgn}(J_f(x_i)) \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) |J_f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^m \text{sgn}(J_f(x_i)) \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) dy \\ &= d(f, \Omega, b), \end{aligned}$$

facendo na terceira igualdade un cambio de variable e usando a hipótese (1.4) na última igualdade concluimos a demostración.  $\square$

**Lema 1.29.** *Sexa  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n-1})$  e  $B_i = (\partial_1 g, \dots, \partial_{i-1} g, \dots, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_n g)$  onde*

$$\partial_i g = \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_i}, \frac{\partial g_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_i} \right)^t,$$

entón

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i B_i = 0.$$

*Demostración.* Fixamos  $1 \leq i \leq n$  e definimos

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \\ \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_n g) & \text{se } i < j, \\ \det(\partial_1 g, \dots, \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_n g) & \text{se } i > j. \end{cases}$$

Sabemos que se  $A(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$  entón

$$\partial_i \det(A(x)) = \det(\partial_i F_1, F_2, \dots, F_n) + \det(F_1, \partial_i F_2, \dots, F_n) + \dots + \det(F_1, F_2, \dots, \partial_i F_n).$$

Logo aplicando isto, temos que  $\partial_i B_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}$  e polo tanto  $\sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i B_i$  é o mesmo que  $\sum_{i,j=1}^n (-1)^i C_{ij}$ . Por ser  $g \in \mathcal{C}^2$ , facendo uso do Teorema de Schwarz,  $\partial_{ij} g = \partial_{ji} g$ , e pola propiedade dos determinantes ao traspoñer columnas, cúmprese o seguinte:

$$C_{ij} = (-1)^{j+i-1} C_{ji}.$$

Co anterior, facemos os seguintes cálculos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (-1)^i C_{ij} &= \sum_{i,j=1}^n (-1)^i (-1)^{j+i-1} C_{ji} = \sum_{i,j=1}^n ((-1)^2)^i (-1)^{j-1} C_{ji} = - \sum_{i,j=1}^n (-1)^j C_{ji} \\ &= - \sum_{i,j=1}^n (-1)^i C_{ij}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se obtén intercambiando os índices libres. Así, temos que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i B_i = \sum_{i,j=1}^n (-1)^i C_{ij} = 0,$$

como queríamos probar. □

**Lema 1.30.** *Sea  $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} M_{ji}$ , sendo  $M_{ji}$  o menor  $(j, i)$  complementario de  $J_f(x)$ . Entón para todo  $1 \leq j \leq n$ ,*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i A_{ij} = 0.$$

*Demostración.* Por hipótese temos que  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\partial_l f_k)_{k \neq j, l \neq i}$ . Logo, fixando  $j$  e aplicando o lema 1.29 a  $g = (f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_n)$  concluímos a demostración. □

*Observación 1.31.* Para  $n = 2$  o lema anterior afirma que  $\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{21} = \partial_1 A_{12} + \partial_2 A_{22} = 0$ , sendo

$$A = \begin{pmatrix} \partial_2 f_2 & -\partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_2 & \partial_1 f_1 \end{pmatrix}.$$

Isto é,  $\partial_1 \partial_2 f_2 = \partial_2 \partial_1 f_2$  e  $\partial_1 \partial_2 f_1 = \partial_2 \partial_1 f_1$ .

Agora xa estamos en condicións de presentar a seguinte proposición, que permite unha definición máis ampla do grao.

**Proposición 1.32.** *Sexa  $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Dados  $b_i \in B(b, \rho_o)$ , sendo  $i = 1, 2$  e  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Se  $b_i \notin f(S)$ , entón*

$$d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_2).$$

*Demostración.* Posto que os  $b_i$  foron escollidos fóra de  $f(\partial\Omega)$  e por hipótese, o grao  $d(f, \Omega, b_i)$  está ben definido para  $i = 1, 2$ . Sexa  $\sigma > 0$  tal que

$$\sigma < \rho_o - |b - b_i|, \quad i = 1, 2.$$

Entón, pola caracterización do grao (proposición 1.28), existe  $\varepsilon < \sigma$  tal que

$$d(f, \Omega, b_i) = \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - b_i) J_f(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

baixo as hipóteses do mesmo. Logo

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon}(y - b_2) - \varphi_{\varepsilon}(y - b_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_{\varepsilon}(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \\ &= (b_1 - b_2) \int_0^1 \nabla \varphi_{\varepsilon}(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt = \operatorname{div}(w(y)), \end{aligned}$$

onde

$$w(y) = \left( \int_0^1 \varphi_{\varepsilon}(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \right) \cdot (b_1 - b_2).$$

Se  $y \in f(\partial\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |y - (1-t)b_1 - tb_2| &= |(y - b) + (1-t)(b - b_1) + t(b - b_2)| \\ &> \rho_o - (1-t)(\rho_o - \sigma) - t(\rho_o - \sigma) = \sigma > \varepsilon. \end{aligned}$$

Posto que  $\operatorname{supp}(\varphi_{\varepsilon})$  está contido na bóla  $B(0, \varepsilon)$ , tense que  $w(y) = 0$  para  $y \in f(\partial\Omega)$ . Definimos,

$$v_i(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) A_{ij}(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Polo anterior tense que  $v_i = 0$  en  $\partial\Omega$ . Ademais

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) A_{ij}(x) + \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x)$$

logo,

$$\operatorname{div}(v(x)) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x)) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) A_{ij}(x) \right) + \sum_{j=1}^n w_j(f(x)) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \right).$$

Polo Lema 1.30 sabemos que o segundo termo é nulo. Por outro lado, pola construción de  $A_{ij}$ , tense que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) A_{ij}(x) = \delta_{jk} J_f(x), \quad \text{sendo } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k, \end{cases}$$

logo,

$$\operatorname{div}(v(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_j}(f(x)) J_f(x) = \operatorname{div}(w(f(x))) J_f(x).$$

Con todo, séguese que

$$d(f, \Omega, b_1) - d(f, \Omega, b_2) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(w(f(x))) J_f(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) dx = 0,$$

por ser  $v$  nulo na fronteira de  $\Omega$ . □

Se dous valores son próximos, nas hipóteses anteriores, o valor do grao é o mesmo. Entón pódese pensar que, en certas condicións, todos os valores por ser uns próximos ós outros terán o mesmo grao. Esta condición como veremos máis adiante será estar na mesma compoñente conexas. Ademais esta proposición permítenos ampliar a definición do grao respecto a valores singulares. Pois polo Teorema de Sard 1.18 o conxunto de valores singulares ten medida nula, logo sempre existen valores regulares na bóla  $B(b, \rho_o)$ .

**Definición 1.33.** Sexan  $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Fixamos  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Defínese o **grao** de  $f$  en  $\Omega$  respecto a  $b$  como

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega, b'),$$

onde  $b'$  é calquera valor regular da bóla  $B(b, \rho_o/2)$ .

**Lema 1.34.** Sexan  $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $b \notin f(\partial\Omega)$  e  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Sexa  $b_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|b_1 - b| < \rho_o/2$ , entón

$$d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b).$$

*Demostración.* Por definición, eliximos un valor regular  $b_2 \in B(b, \rho_o/2)$ . Entón  $d(f, \Omega, b_2) = d(f, \Omega, b)$  e  $|b - b_2| < \rho_o/2$ . Do mesmo xeito, usando a desigualdade triangular, tense que

$$|b_1 - b_2| \leq |b_1 - b| + |b - b_2| < \rho_o/2 + \rho_o/2 = \rho_o.$$

Logo  $b_2 \in B(b_1, \rho_o)$  e, por definición,  $d(f, \Omega, b_2) = d(f, \Omega, b_1)$ . Entón, temos que

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega, b_2) = d(f, \Omega, b_1),$$

como queríamos probar. □

**Proposición 1.35.** *Sexan  $f, g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Entón existe  $\varepsilon = \varepsilon_{f,g,\Omega}$ , tal que para  $0 < |t| < \varepsilon$ ,*

$$d(f + tg, \Omega, b) = d(f, \Omega, b). \quad (1.6)$$

*Demostración.* Distinguímos os seguintes tres casos:

**Caso 1.** Se  $b \notin f(\bar{\Omega})$ , entón  $\tilde{\rho} = \rho(b, f(\bar{\Omega})) > 0$ . Fixamos  $\varepsilon = \tilde{\rho}/2\|g\|_\infty$ . Se  $|t| < \varepsilon$ , tense que  $\rho(b, (f + tg)(\bar{\Omega})) \geq \tilde{\rho}/2 > 0$  e polo tanto  $b \notin (f + tg)(S)$ . Logo (1.6) é certo para o caso trivial no que ambos termos da igualdade son cero.

**Caso 2.** Se  $b \notin f(S)$  e sexa  $f^{-1}(b) = \{x_1, \dots, x_m\}$  cumprindo que  $J_f(x_i) \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Definimos  $h(t, x) = f(x) + tg(x) - b$ . Para  $1 \leq i \leq m$ ,  $h(0, x_i) = 0$  e  $\frac{\partial h}{\partial x}(0, x_i) = Df(x_i)$ . Sabemos que  $Df(x_i)$  é invertible, logo, polo Teorema da función implícita existe unha veciñanza  $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$  de 0 en  $\mathbb{R}$ , veciñanzas  $\mathcal{U}_i$  de  $x_i$  en  $\Omega$  disxuntas dúas a dúas e existe tamén unha función  $\varphi_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \rightarrow \mathcal{U}_i$  diferenciable tal que as únicas solucións de  $h(t, x) = 0$  en  $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times \mathcal{U}_i$  veñen dadas por  $(t, \varphi_i(t))$ . Ademais, podemos asegurar que

$$\text{sgn}(J_{f+tg}(x)) = \text{sgn}(J_f(x_i))$$

en cada  $\mathcal{U}_i$ . Fixamos agora  $\varepsilon$  como o mínimo dos  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Agora a igualdade (1.6) séguese da definición para o caso dun valor regular.

**Caso 3.** Se  $b \in f(S)$  e sexa  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Escollamos  $b_1 \in B(b, \rho_o/3)$  tal que  $b_1$  sexa un valor regular e exista  $\varepsilon_o > 0$  tal que

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b), \quad 0 < |t| < \varepsilon_o. \quad (1.7)$$

Elixamos  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_o, \rho_o/3\|g\|_\infty\}$ . Entón  $b \notin (f + tg)(\partial\Omega)$  para  $|t| < \varepsilon$ , é máis, temos que  $\rho(b, (f + tg)(\partial\Omega)) \geq 2\rho_o/3$  e posto que  $b_1 \in B(b, \rho_o/3)$  obtemos a seguinte desigualdade:

$$|b - b_1| < \rho_o/3 \leq \frac{1}{2}\rho(b, f + tg(\partial\Omega)).$$

Grazas o Lema 1.34, cuxas hipóteses acabamos de verificar, tense que

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f + tg, \Omega, b),$$

e para rematar, usando a igualdade (1.7), obtemos que

$$d(f + tg, \Omega, b) = d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b),$$

como se quería probar. □

Este resultado permítenos definir o grao para funcións unicamente continuas. Sexa  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $b \notin f(\partial\Omega)$  e  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Polo Teorema de Weierstrass 1.19, sempre podemos encontrar unha función  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|g - f\|_\infty < \rho_o/2$ . Logo,  $b \notin g(\partial\Omega)$  e o

grao de  $g$  está ben definido. Se  $g_1$  e  $g_2$  son dúas funcións nestas condicións, fixamos  $\tilde{g} = g_1 - g_2$ . Tense que  $\|f - (g_2 + t\tilde{g})\|_\infty < \rho_o$  para todo  $0 < t < 1$ , e pola Proposición 1.35 a función  $d(t) = d(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b)$  é localmente constante, e por ser  $[0, 1]$  conexo, tamén o é no intervalo. Logo

$$d(g_1, \Omega, b) = d(g_2, \Omega, b).$$

Todo este razoamento nos leva á seguinte definición do grao de Brouwer para funcións continuas.

**Definición 1.36.** Sexa  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $b \notin f(\partial\Omega)$  e  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . O **grao** de  $f$  en  $\Omega$  respecto a  $b$  está dado por

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) \tag{1.8}$$

para calquera función  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f - g\|_\infty < \rho_o/2$ .

O seguinte resultado mostra que é suficiente con restrinxir o estudo do grao ó valor  $b = 0$ .

**Proposición 1.37.** Sexa  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Entón

$$d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0). \tag{1.9}$$

*Demostración.* Se  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega)) = \rho(0, (f - b)(\partial\Omega))$  e  $g$  é unha función de clase dúas tal que  $\|f - g\|_\infty$  entón

$$\|(g - b) - (f - b)\|_\infty = \|g - f\|_\infty < \rho_o/2 \tag{1.10}$$

e, por definición,

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) \text{ e } d(f - b, \Omega, 0) = d(g - b, \Omega, 0).$$

Se  $b$  é un valor crítico de  $g$ , entón podemos atopar un valor regular  $b_1$  de  $g$  verificando

$$|b - b_1| < \rho(b, g(\partial\Omega))/2$$

polo tanto

$$d(g - b_1, \Omega, 0) = d(g - b, \Omega, 0) \text{ e } d(g, \Omega, b_1) = d(g, \Omega, b).$$

Por ser  $b_1$  valor regular de  $g$ , é sinxelo ver que

$$d(g, \Omega, b_1) = d(g - b_1, \Omega, 0)$$

rematando a demostración. □

## 1.3. Propiedades do grao de Brouwer

Nesta sección próbanse as propiedades básicas do grao topolóxico de Brouwer, algunhas das cales xa intuíamos na sección anterior. Como consecuencia destas propiedades xorden algúns resultados interesantes que serán de utilidade para a súa aplicación non só ás ecuacións diferencias e á análise en xeral, senón tamén á álgebra, topoloxía ou á teoría de xogos.

A continuación introducimos algúns conceptos topolóxicos que serán necesarios para abordar varios resultados das seccións restantes deste capítulo.

### 1.3.1. Resultados topolóxicos previos

**Definición 1.38.** Sexan  $f, g \in C(X, Y)$ . Dicimos que  $f$  e  $g$  son **homótopas**,  $f \simeq g$ , se existe unha función continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , cumprindo

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \\ H(x, 1) = g(x), \end{cases} \quad \forall x \in X.$$

A aplicación  $H$  dise que é unha **homotopía**.

**Definición 1.39.** Sexan  $x, y \in X$ . Un **camiño** entre  $x$  e  $y$  é unha aplicación continua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\varphi(0) = x$  e  $\varphi(1) = y$ . Dise que  $X$  é **conexo por camiños** se dados dous puntos calquera  $x, y \in X$  existe un camiño  $\varphi$  en  $X$  que os une.

**Teorema 1.40.** *Dado  $x \in X$ , o maior conxunto conexo por camiños que o contén é a súa compoñente conexas por camiños.*

**Teorema 1.41.** *As compoñentes conexas por camiños dun espazo localmente conexo por camiños, son conxuntos abertos e pechados.*

*Demostración.* Pode verse en [17, Páx. 235]. □

**Lema 1.42.** *Sexa  $\Omega$  un conxunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Entón as compoñentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  coinciden coas compoñentes conexas por camiños.*

*Demostración.* Sabemos que nun conxunto localmente conexo por camiños as compoñentes conexas coinciden coas compoñentes conexas por camiños, logo basta probar que  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é localmente conexo por camiños.

Polo Teorema de Heine-Borel,  $\partial\Omega$  é compacto, logo  $f(\partial\Omega)$  é compacto por ser  $f$  continua ([19, Páx.189]). Facendo uso de novo do Teorema de Heine-Borel,  $f(\partial\Omega)$  é cerrado e limitado e

polo tanto  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é aberto. Por outra banda, todo espazo euclidiano é localmente conexo por camiños, en particular  $\mathbb{R}^n$ . Entón,  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é tamén localmente conexo por camiños por ser un subconxunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , como queriamos ver.  $\square$

### 1.3.2. Cambios en $f$ e $b$

**Teorema 1.43.** 1. (Continuidade respecto á función) Sexa  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Entón existe unha veciñanza  $\mathcal{U}$  de  $f$  en  $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$ ,

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

2. (Invariancia baixo homotopía) Sexa  $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . Entón  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é independente de  $t$ .
3. (Invariancia nas compoñentes conexas) O grao é constante, respecto a  $b$ , en cada compoñente conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ .

*Demostración.* 1. Definimos  $\mathcal{U} = \{g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|f - g\|_\infty < \rho_o/4\}$  onde  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$ . Se  $g \in \mathcal{U}$ , tense que, para todo  $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} 3\rho_o/4 = \rho_o - \rho_o/4 &\leq |b - f(x)| - \|f - g\|_\infty \leq |b - f(x)| - |f(x) - g(x)| \\ &\leq |b - g(x)| = \rho(b, g(x)). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Utilizando na última desigualdade o seguinte

$$|b - f(x)| = |b - g(x) + g(x) - f(x)| \leq |b - g(x)| + |f(x) - g(x)|.$$

Por (1.11) sabemos que  $\rho(b, g(\partial\Omega)) \geq 3\rho_o/4$ , polo tanto  $b \notin g(\partial\Omega)$  e o grao está ben definido. Sexa  $h \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f - h\|_\infty < \rho_o/8$ . Entón

$$\|g - h\| \leq \|g - f\| + \|f - h\| < \frac{3}{8}\rho_o \leq \frac{1}{2}\rho(b, g(\partial\Omega)).$$

Logo, pola Definición 1.36 do grao de  $g$  e  $f$ ,  $d(g, \Omega, b) = d(h, \Omega, b) = d(f, \Omega, b)$ .

2. Polo procedemento anterior,  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é localmente constante e polo tanto continua en  $[0, 1]$ . Ademais a súa imaxe son números enteiros, logo por ser continua é necesariamente constante en  $[0, 1]$ .
3. Sexa  $D$  unha compoñente conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , e  $b_1, b_2 \in D$ . Polo Lema 1.42,  $D$  é conexo por camiños. Entón existe un camiño  $\varphi \in C([0, 1], D)$  tal que  $\varphi(0) = b_1$  e  $\varphi(1) = b_2$ . Definimos a seguinte homotopía

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) := f(x) - \varphi(t). \end{aligned}$$

As funcións  $f$  e  $\varphi$  están ben definidas e son continuas polo que  $H$  tamén estará ben definida e será continua. Ademais  $H$  satisfai o seguinte:

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x) - \varphi(0) = f(x) - b_1, \\ H(x, 1) = f(x) - \varphi(1) = f(x) - b_2. \end{cases}$$

Logo  $H$  é unha homotopía entre  $f - b_1$  e  $f - b_2$ , isto é,  $H : f - b_1 \simeq f - b_2$ . Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, b_1) &= d(f - b_1, \Omega, 0) = d(H(\cdot, 0), \Omega, 0) = d(H(\cdot, 1), \Omega, 0) = d(f - b_2, \Omega, 0) \\ &= d(f, \Omega, b_2), \end{aligned}$$

usando a Proposición 1.37 na primeira e última igualdade, e na terceira aplicamos a propiedade de invariancia baixo homotopía. Comprobemos, por redución ó absurdo, que se verifican as hipóteses da propiedade anterior. Supoñamos que  $0 \in H(\partial\Omega \times [0, 1])$ , é dicir, que existen  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  tal que  $H(x, t) = 0$ . Entón

$$H(x, t) = f(x) - \varphi(t) = 0 \implies f(x) = \varphi(t) \quad (x \in \partial\Omega).$$

Polo tanto  $\varphi^* \cap f(\partial\Omega) \neq \emptyset$ , chegando a unha contradición, pois  $\varphi^* \subset D \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , sendo  $\varphi^* = \varphi([0, 1])$ . Posto que a compoñente conexas  $D$  e os puntos  $b_1$  e  $b_2$  foron elixidos arbitrariamente, rematamos a demostración.  $\square$

A continuación probamos un resultado que, a pesar de ser sinxelo, terá moita utilidade para a análise pois permite, a partir do grao, garantir a existencia de solución dunha ecuación dada. É máis, este razoamento inclúe funcións homótopas ou próximas á da ecuación, que se cadra polos métodos habituais non sería sinxelo estudar.

**Proposición 1.44.** *Sexan  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\bar{\Omega})$ , entón  $d(f, \Omega, b) = 0$ . Doutro xeito, se  $b \notin f(\partial\Omega)$  e  $d(f, \Omega, b) \neq 0$  entón existe  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = b$ .*

*Demostración.* Sexan  $\rho_o = \rho(b, f(\bar{\Omega}))$  e  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f - g\|_\infty < \rho_o/2$ , entón  $b \notin g(\bar{\Omega})$ . Logo  $b$  é un valor regular e por definición

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) = 0,$$

pois  $g^{-1}(b) = \emptyset$ .  $\square$

Nótese que a Proposición 1.44 se pode ver como unha xeneralización do Teorema de Bolzano. En particular, para o caso de unha dimensión tense que  $\Omega = (a, b)$  e

$$d(f, (a, b), 0) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(f(b)) - \text{sgn}(f(a))].$$

Para máis detalles sobre a relación entre ambos teorema, remitimos ó lector ó artigo [4].

**Corolario 1.45.** *Se  $d(f, \Omega, b) \neq 0$ , entón  $f(\Omega)$  é unha veciñanza de  $b$ .*

*Demostración.* Sexa  $C_b$  a compoñente conexa de  $b$  en  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Entón, para todo  $c \in C_b$  sabemos que  $d(f, \Omega, c) \neq 0$ . Logo, pola proposición anterior,  $C_b \subset f(\Omega)$ . Só queda probar que  $C_b$  é aberto. Sabemos que, polo Lema 1.42,  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é localmente conexo por camiños. Logo polo Teorema 1.41  $C_b$  é aberto.  $\square$

Veremos a continuación algún resultado que nos permitirá modificar o dominio da función á que estudamos o grao.

### 1.3.3. Cambios no dominio

**Teorema 1.46.** *1. (Aditividade) Sexan  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  e  $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$ , onde  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Entón*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

*2. (Descomposición do dominio) Sexan  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Se  $\{\Omega_j\}_{j \in J}$  é unha cobertura aberta de  $\Omega$  tal que  $\Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ . Entón*

$$d(f, \Omega, b) = \sum_{j \in J} d(f, \Omega_j, b).$$

*3. (Excisión) Sexa  $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ . Se  $K \subset \bar{\Omega}$  é un conxunto pechado e  $b \notin f(K)$ , entón*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega \setminus K, b).$$

*Demostración.* 1. Sexa  $g \in \mathcal{C}^2$  tal que  $\|f - g\|_\infty < \rho_o/2$ ,  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2))$ . Entón pola definición do grao,

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, b) &= d(g, \Omega, b), \\ d(f, \Omega_i, b) &= d(g, \Omega_i, b), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Fixamos  $B = B(b, \rho_o/2)$  que é conexo e está contido en  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial\Omega)$ . Está tamén contido en  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial\Omega_i)$  e polo tanto nas compoñentes conexas de  $b$  en  $\Omega_i$ , para  $i = 1, 2$ . O Teorema de Sard (1.18) garántenos a existencia dun valor regular  $c \in B$  que, pola invariancia nas compoñentes conexas, cumpre:

$$\begin{aligned} d(g, \Omega, b) &= d(g, \Omega, c), \\ d(g, \Omega_i, b) &= d(g, \Omega_i, c), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Logo por ser  $g$  de clase 2 e  $c$  un valor regular séguese da definición 1.24 que

$$d(g, \Omega, b) = d(g, \Omega_1, b) + d(g, \Omega_2, b),$$

e pola igualdade (1.12) concluimos a demostración.

2. Cómpre demostrar primeiramente que  $\partial\Omega_j \subset \partial\Omega$ . Por redución ó absurdo, supoñamos que existe un  $p \in \partial\Omega_j$  tal que  $p \notin \partial\Omega$ . Entón  $p \in \Omega$ , pois  $\partial\Omega_j \subset \bar{\Omega}_j \subset \bar{\Omega}$ . Logo existe un  $i \in J$ ,  $i \neq j$ , tal que  $p \in \Omega_i$ . Por ser a cobertura aberta, existe un entorno  $\mathcal{U}_p$  de  $p$  en  $\Omega_i$ . En particular, por ser os  $\Omega_k$  disxuntos,  $\mathcal{U}_p \cap \Omega_j = \emptyset$ . Chegando a unha contradición, pois  $p \in \partial\Omega_j$ .

Fixamos  $\rho_o = \rho(b, f(\partial\Omega))$  e escollemos unha función  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $b$  non é un valor crítico de  $g$  e  $\|f - g\|_\infty < \rho_o/2$ . Temos que  $\partial\Omega_j \subset \partial\Omega$ ,  $b \notin g(\partial\Omega_j)$  e

$$|f(x) - g(x)| < \rho(b, f(\partial\Omega_j))/2, \quad x \in \bar{\Omega}_j.$$

Logo, por definición,  $d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$  e  $d(f, \Omega_j, b) = d(g, \Omega_j, b)$ , para todo  $j \in J$ . Entón, tense que

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, b) &= d(g, \Omega, b) = \sum_{x \in g^{-1}(b)} \text{sgn}(J_g(x)) = \sum_{j \in J} \sum_{x \in g^{-1}(b) \cap \Omega_j} \text{sgn}(J_g(x)) = \sum_{j \in J} d(g, \Omega_j, b) \\ &= \sum_{j \in J} d(f, \Omega_j, b). \end{aligned}$$

3. É sinxelo probalo por definición, pero para elo necesitamos unha función  $\mathcal{C}^2$  e un valor regular suficientemente próximos ós orixinais. Escollemos unha función  $g \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$  e eliximos un valor regular  $c \notin g(K)$  suficientemente próximo a  $b$ , cuxas compoñentes conexas en  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial\Omega)$  e  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial(\Omega \setminus K))$  sexan as mesmas. Entón por definición

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, b) &= d(g, \Omega, c) = \sum_{x \in g^{-1}(c) \cap \Omega} \text{sgn}(J_g(x)) = \sum_{x \in g^{-1}(c) \cap \Omega \setminus K} \text{sgn}(J_g(x)) \\ &= d(g, \Omega \setminus K, c) = d(f, \Omega \setminus K, b). \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.47** (Dependencia dos valores fronteira). *Sexan  $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tales que  $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$  e  $b \notin f(\partial\Omega)$ , entón*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b).$$

*Demostración.* Definimos a función

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) := tf(x) + (1 - t)g(x). \end{aligned}$$

As funcións  $f$  e  $g$  están ben definidas e son continuas polo que  $H$  tamén estará ben definida e será continua. Ademais  $H$  satisfai o seguinte:

$$\begin{cases} H(\cdot, 0) = f, \\ H(\cdot, 1) = g, \\ H(x, t) = f(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo  $H$  é unha homotopía entre  $f$  e  $g$ , e  $b \notin f(\partial\Omega) = H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . Entón

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

pola invariancia baixo homotopía. □

**Corolario 1.48.** *Sexan  $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Se existe unha función  $H \in C(\partial\Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ ,  $H(\cdot, 0) = f|_{\partial\Omega}$  e  $H(\cdot, 1) = g|_{\partial\Omega}$ , entón*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b).$$

*Demostración.* Pode consultarse en [13, Páx. 49]. □

Este corolario mostra que non é necesaria a igualdade das funcións na fronteira para a existencia dunha homotopía que manteña invariante o grao, nin cómpre que as funcións sexan homótopas en todo o seu dominio. Pois basta que as funcións sexan homótopas na fronteira e que  $b$  non sexa imaxe deses puntos para estas funcións. En resumo, mentres  $b$  non se alcance ao longo da homotopía na fronteira, o grao está determinado pola clase de homotopía de funcións continuas definida na fronteira. O teorema seguinte é un resultado moi similar ó corolario anterior.

**Teorema 1.49** (de Poincaré-Bohl). *Sexan  $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Se  $b \notin [f(x), g(x)]$ , isto é, se  $b$  non está contido no segmento que une  $f(x)$  e  $g(x)$ , para todo  $x \in \partial\Omega$ , entón  $d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$ .*

*Demostración.* Basta tomar a homotopía  $H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$ ,  $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$ . Por hipótese,  $H(x, t) \neq b$  para todo  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$  e o resultado verificase pola invariancia baixo homotopía. □

## 1.4. Teorema de punto fixo de Brouwer

Neste apartado presentamos un dos máis famosos teoremas de punto fixo, demostrado en 1911 por Brouwer. En 1930, Schauder xeneraliza este resultado para espazos de Banach, como veremos na sección seguinte, e posteriormente Kakutani establece o teorema para funcións multívocas. En xeral, os teoremas de punto fixo son importantes en moitos eidos das matemáticas. De feito, o teorema de punto fixo de Brouwer ten demostracións moi diversas usando, entre outras, cohomoloxía [15], combinatoria [12], o teorema de Stoke ou a teoría do grao.

*Notación 1.50.* Denotaremos por  $B^n$  a bóla unidade en  $\mathbb{R}^n$  e por  $\mathbb{S}^{n-1}$  a esfera de radio 1 contida en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.51.** *Se  $n$  é impar as funcións  $Id$  e  $-Id$  non son homótopas en  $\mathbb{S}^{n-1}$ , é dicir, non existe unha aplicación  $H \in C(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1], \mathbb{S}^{n-1})$  tal que  $H(x, 0) = x$  e  $H(x, 1) = -x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Sexan  $-Id, Id \in C(\overline{B}^n, \mathbb{R}^n)$  e  $b \in B^n$ . Se existira unha homotopía de  $Id|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  a  $-Id|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  entón polo Corolario 1.48 teríamos que  $d(Id, B^n, b) = d(-Id, B^n, b)$ , chegando a unha contradición pois

$$d(Id, B^n, b) = 1 \neq -1 = d(-Id, B^n, b),$$

como xa calculamos no Exemplo 1.26. □

**Teorema 1.52** (da bóla peluda). *Se  $n$  é un número impar, non existe unha aplicación continua  $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi(x) \neq 0$  e  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Probémolo por redución ó absurdo. Supoñamos que existe unha aplicación  $\varphi$  nas condicións do enunciado. Definamos  $\psi(x) = \varphi(x)/\|\varphi(x)\|$ , que é continua pois  $\|\varphi(x)\| > 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $\varphi \in C(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ . Entón a función

$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) := \cos(\pi t)x + \text{sen}(\pi t)\psi(x) \end{aligned}$$

define unha homotopía entre  $Id$  e  $-Id$ , contradicindo a Proposición 1.51, xa que

$$\begin{cases} H(x, 0) = \cos(0)x + \text{sen}(0)\psi(x) = x, \\ H(x, 1) = \cos(\pi)x + \text{sen}(\pi)\psi(x) = -x, \end{cases}$$

e  $H(x, t) \in \mathbb{S}^{n-1}$  para todo  $(x, t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ . Para comprobar que  $H(x, t) \in \mathbb{S}^{n-1}$  basta ver que  $\|H(x, t)\| = 1$ . Para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $t \in [0, 1]$  temos que,

$$\begin{aligned} \|H(x, t)\|^2 &= \langle H(x, t), H(x, t) \rangle = \cos(\pi t)^2 \langle x, x \rangle + \text{sen}(\pi t)^2 \langle \psi(x), \psi(x) \rangle + 2 \langle \cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)\psi(x) \rangle \\ &= \cos(\pi t)^2 + \text{sen}(\pi t)^2 + 2 \frac{1}{\|\varphi(x)\|} \cos(\pi t) \text{sen}(\pi t) \langle x, \varphi(x) \rangle \\ &= 1 + 0 = 1, \end{aligned}$$

usando que  $\|x\| = 1$ ,  $\|\psi(x)\| = 1$  e a hipótese  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Logo como queríamos  $\|H(x, t)\| = 1$ , rematando a demostración.  $\square$

**Proposición 1.53.** *Non existen funcións continuas  $\varphi : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Por redución ó absurdo, supoñamos que existe unha función  $\varphi : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , tal que  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Logo, pola dependencia do grao nos valores fronteira, Teorema 1.47, temos que

$$0 = d(\varphi, B^n, 0) = d(\text{Id}, B^n, 0) = 1,$$

chegando así a unha contradición. A igualdade da esquerda séguese da definición do grao pois  $0 \notin \varphi(\bar{B}^n)$  e a igualdade dereita viuse no Exemplo 1.26.  $\square$

**Teorema 1.54** (de punto fixo de Brouwer). *Toda aplicación continua da bóla cerrada en si mesma ten un punto fixo. Isto é, dada unha aplicación continua  $f : \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$ , existe  $x \in \bar{B}^n$  tal que  $f(x) = x$ .*

*Demostración.* Vexámolo de novo por redución ó absurdo. Supoñamos  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in \bar{B}^n$ . Consideremos o segmento que vai de  $x$  a  $f(x)$ , que está ben definido e, fixada una orientación, denotamos por  $\varphi(x)$  o punto do segmento anterior que incide na esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Se demostramos que  $\varphi : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  é continua e  $\varphi|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}$  chegaremos a unha contradición pola Proposición 1.53. Fixado  $x \in \bar{B}^n$ , definimos a recta que vai de  $x$  a  $f(x)$  como

$$\varphi(t) = x + t(f(x) - x), \quad t \in \mathbb{R},$$

e fixamos unha orientación,  $t \geq 0$ . Queremos achar o  $t$  para o cal o segmento corta a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , isto é,  $\|\varphi(t)\| = \|x + t(f(x) - x)\| = 1$ , ou o que é o mesmo,  $1 = \|\varphi(t)\|^2 = \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle$ . Entón:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle &= \langle x, x \rangle + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + t^2\langle f(x) - x, f(x) - x \rangle \\ &= t^2\|f(x) - x\|^2 + 2t\langle x, f(x) - x \rangle + \|x\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Temos que  $\|x\| \leq 1$  e  $\|f(x)\| \leq 1$  pois  $x, f(x) \in \bar{B}^n$  e  $f(x) \neq x$  logo  $\|f(x) - x\| \neq 0$ . Entón temos unha ecuación de segundo grao, cuxas solucións son:

$$t(x) = \frac{-2\langle x, f(x) - x \rangle \pm \sqrt{(2\langle x, f(x) - x \rangle)^2 - 4\|f(x) - x\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{2\|f(x) - x\|^2}.$$

Polo tanto, se  $\|x\| < 1$  temos dúas solucións  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $t_1 < 0 < t_2$ . Escollemos  $t_2 > 0$  logo a solución é única e ademais continua respecto a  $x$ . Se  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\|x\|^2 = 1$  e polo tanto  $t(x) = 0$  e  $\varphi(x) = x$ . Con todo temos que

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{B}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\mapsto \varphi(x) = x + t(x)(f(x) - x) \end{aligned}$$

é unha función continua tal que  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , chegando a contradición.  $\square$

Como xa dixemos, existen moitas demostracións para este teorema. Presentamos a continuación unha delas, distinta á primeira, que se basea en propiedades do grao e non utiliza a Proposición 1.53.

*Demostración.* Supoñamos que  $f(x) \neq x$  para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , pois doutro xeito o enunciado é trivialmente certo. Definimos a homotopía  $H(x, t) := x - tf(x)$  para  $(x, t) \in \bar{B}^n \times [0, 1]$ . Se  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $0 \leq t < 1$ ,  $tf(x) \in \bar{B}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$  logo  $H(x, t) \neq 0$ . Se  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  e  $t = 1$ ,  $H(x, 1) = x - f(x) \neq 0$ . Entón, estamos en condicións de aplicar a propiedade de invariancia baixo homotopía como segue:

$$d(\text{Id} - f, B^n, 0) = d(H(\cdot, 1), B^n, 0) = d(H(\cdot, 0), B^n, 0) = d(\text{Id}, B^n, 0) = 1.$$

Polo Proposición 1.44 existe un  $x \in B^n$  tal que  $(\text{Id} - f)(x) = 0$ , ou o que é mesmo,  $f(x) = x$ .  $\square$

É sinxelo comprobar que o Teorema de punto fixo de Brouwer é certo para funcións  $f \in C(\bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ , onde  $\bar{\Omega}$  é calquera conxunto homeomorfo á bóla pechada. Para velo, bastaría reducirnos ó caso anterior tomando a función  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ , sendo  $h$  o homeomorfismo de  $\bar{\Omega}$  en  $\bar{B}^n$ .

**Corolario 1.55.** *Sexa  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conxunto compacto e convexo e sexa  $f : K \rightarrow K$  unha función continua, entón  $f$  ten un punto fixo.*

*Demostración.* Por ser  $K$  compacto existe un  $R > 0$  tal que  $K \subset \bar{B}(0, R)$ . Polo Teorema de proxección de Hilbert [5, Páx. 139], existe unha función continua  $P_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$  tal que, dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $P_K(x)$  é o único punto tal que

$$\|x - P_K(x)\| = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

Definimos

$$\begin{aligned} g : \bar{B}(0, R) &\longrightarrow K \subset \bar{B}(0, R) \\ x &\mapsto g(x) = f(P_K(x)), \end{aligned}$$

que é continua. Posto que  $\bar{B}(0, R)$  é homeomorfa a  $\bar{B}^n$  podemos usar o Teorema de punto fixo 1.54. Entón  $g$  ten un punto fixo  $x_o \in \bar{B}(0, R)$ , é dicir, existe  $x_o \in \bar{B}(0, R)$  tal que  $x_o = g(x_o) = f(P_K(x_o)) \in K$ . Como  $x_o \in K$ , temos que  $P_K(x_o) = x_o$  e  $x_o = f(P_K(x_o)) = f(x_o)$ . Polo tanto  $x_o$  é un punto fixo de  $f$  como queríamos probar.  $\square$



## Capítulo 2

# Grao topolóxico de Leray-Schauder

### 2.1. Introducción do grao para espazos de dimensión infinita

Introducimos o concepto de grao topolóxico para espazos de dimensión infinita. Para elo traballaremos con espazos lineais normados de dimensión infinita, aínda que os mesmos resultados se poderían estender axeitadamente a espazos localmente convexos, como se pode ver en [11, Páx. 315]. Os resultados vistos sobre o grao de Brouwer non son certos, en xeral, para funcións soamente continuas definidas nun espazo de dimensión infinita como exemplifica Jean Leray en 1936 e pode consultarse en [10, Páx. 172]. A raíz deste problema, xurde a necesidade de redefinir o grao para espazos de dimensión infinita coa limitación, como veremos, de facelo para unha clase máis restritiva de funcións.

A notación que usaremos é semellante á do capítulo anterior. Sexa  $(X, \|\cdot\|)$  un espazo linear normado e  $\Omega$  un conxunto aberto e limitado de  $X$ . Cómpre definir o grao para unha certa clase de funcións de xeito que  $d(f, \Omega, b)$  sexa un número enteiro e se garantan as tres propiedades básicas seguintes:

1. (Normalización)  $d(Id, \Omega, b) = 1$  para todo  $b \in \Omega$ ,
2. (Aditividade) Sexan  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  e  $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$ , sendo  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Entón

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

3. (Invariancia baixo homotopía) Se  $H$  é unha homotopía tal que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ , entón  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é independente de  $t$ .

En particular, se consideramos a clase de funcións continuas  $C(\bar{\Omega}, X)$  sendo  $X$  un espazo de

dimensión finita pódese probar que existe e é único o grao que satisfai as tres propiedades básicas. No primeiro capítulo do libro [8] pode verse unha demostración detallada deste resultado.

*Observación 2.1.* Nótese que todos os resultados desta sección son válidos en particular para espazos de Banach.

**Definición 2.2.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos lineais normados. A aplicación  $T : X \rightarrow Y$  é **compacta** se é continua e para todo subconxunto  $A \subset X$  limitado entón  $T(A)$  é relativamente compacto, isto é,  $\overline{T(A)}$  é compacto.

**Definición 2.3.** Sexa  $X$  un espazo linear normado e  $A$  un subconxunto de  $X$ . Dise que  $A$  é de **dimensión finita** se  $A$  está contido nun subespazo de dimensión finita de  $X$ .

**Definición 2.4.** Sexan  $X, Y$  dous espazos lineais normados e sexa  $T : X \rightarrow Y$ . Dise que  $T$  é de **rango finito** se a imaxe,  $T(X)$ , é de dimensión finita.

**Lema 2.5.** Sexan  $X, Y$  dous espazos normados e sexa  $T : X \rightarrow Y$  continua. Se  $T$  é de rango finito entón  $T$  é unha aplicación compacta.

**Teorema 2.6.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos lineais normados,  $M$  un subconxunto limitado de  $X$  e  $T : X \rightarrow Y$  unha aplicación compacta. Dado  $\varepsilon > 0$  existe unha aplicación continua  $T_\varepsilon : M \rightarrow Y$  de rango finito tal que

$$\|T(x) - T_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$$

para todo  $x \in M$ .

*Demostración.* Por ser  $M$  limitado e  $T$  compacta,  $\overline{T(M)}$  é compacto, logo para toda cobertura de  $\overline{T(M)}$  existe unha subcobertura finita da mesma. En particular, dado  $\varepsilon > 0$  existen  $b_i \in \overline{T(M)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que

$$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^n B(b_i, \varepsilon).$$

Definimos as funcións

$$\begin{aligned} m_i(\cdot, \varepsilon) : M &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto m_i(x, \varepsilon) := \max\{0, \varepsilon - \|T(x) - b_i\|\}, \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , que son continuas. Definimos tamén as funcións

$$\begin{aligned} \theta_i(\cdot, \varepsilon) : M &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \theta_i(x, \varepsilon) := \frac{m_i(x, \varepsilon)}{\sum_{j=1}^n m_j(x, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Estas funcións están ben definidas e son continuas. Para ver que están ben definidas vexamos que  $\sum_{j=1}^n m_j(x, \varepsilon) > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Dado  $x \in M$  existe un  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $T(x) \in B(b_j, \varepsilon)$ , logo  $\|T(x) - b_j\| < \varepsilon$  e polo tanto

$$\sum_{k=1}^n m_k(x, \varepsilon) \geq m_j(x, \varepsilon) > 0.$$

Por último, definimos

$$T_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) \cdot b_i.$$

Ademais sabemos que

$$\sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i(x, \varepsilon)}{\sum_{j=1}^n m_j(x, \varepsilon)} = 1.$$

Entón, temos que

$$\begin{aligned} \|T(x) - T_\varepsilon(x)\| &= \left\| T(x) - \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) b_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) T(x) - \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) b_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) [T(x) - b_i] \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\theta_i(x, \varepsilon) [T(x) - b_i]\| \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) \|T(x) - b_i\| \\ &< \varepsilon \sum_{i=1}^n \theta_i(x, \varepsilon) = \varepsilon, \end{aligned}$$

usando na última desigualdade que  $\|T(x) - b_j\| < \varepsilon$ , temos rematado a demostración.  $\square$

**Definición 2.7.** Sexan  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación compacta e  $Id$  a aplicación identidade. Dise que  $\varphi := Id - T$  é unha **perturbación compacta da identidade**.

## 2.2. Definición do grao de Leray-Schauder

Estamos xa en condicións de definir o grao topolóxico para espazos de dimensión infinita e achegar as súas propiedades básicas. Para elo, centrarémonos principalmente na información recollida nos libros [10], [13] e [14].

A idea fundamental desta sección é calcular o grao de funcións da forma  $Id - T$ , sendo  $T$  unha aplicación compacta, a partir de funcións continuas de rango finito que estean tan próximas a ela como nos queiramos e cuxa existencia xa garantimos no Teorema 2.6. Antes de dar unha definición axeitada do grao para espazos de dimensión infinita, necesitaremos algún resultado previo pois, entre outras cuestións, polo de agora só traballamos con funcións cuxo dominio e imaxe estaban contidos en espazos da mesma dimensión.

**Lema 2.8.** *As perturbacións compactas da identidade son aplicacións pechadas e propias, isto é, levan conxuntos pechados en pechados e a imaxe recíproca dos conxuntos compactos é compacta.*

*Demostración.* Pode verse en [13, Páx. 71]. □

**Lema 2.9.** *Sexan  $X$  un espazo métrico,  $\Omega$  un subconxunto aberto e limitado de  $X$  e  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación compacta. Se  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ , entón  $\rho(b, (Id - T)(\partial\Omega)) > 0$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $\partial\Omega$  é pechado logo, polo Lema 2.8,  $(Id - T)(\partial\Omega)$  é un conxunto pechado. Entón, a demostración séguese da regularidade dos espazos métricos, isto é, da existencia de abertos  $U, V \subset X$  tal que  $(Id - T)(\partial\Omega) \subset U$ ,  $b \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . □

*Notación 2.10.* Sexa  $X$  un espazo linear e  $A$  un subconxunto de  $X$ . Denotaremos por  $\text{span}(A)$  o menor subespazo de  $X$  que contén ó conxunto  $A$ . Recordemos que  $\text{span}(A)$  se define como a intersección de tódolos subespazos que conteñen ó conxunto  $A$ .

**Lema 2.11.** *Sexan  $\Omega$  un subconxunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $T \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ , onde  $m < n$ . Se  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$  entón*

$$d(I - T, \Omega, b) = d(I - T|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

*Demostración.* Primeiramente, mergullamos  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  identificando as  $n - m$  últimas coordenadas co cero, en particular  $b = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  e  $T(x) = (T_1(x), \dots, T_m(x), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

Supoñamos que  $T \in C^1$  e  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$  sen perda de xeneralidade. Se  $x \in (Id - T)^{-1}(b)$  entón  $x - T(x) = b$  logo  $x = T(x) + b$  e polo tanto  $x \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  xa que  $T(x), b \in \mathbb{R}^m$ . Temos que  $(Id - T)^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^m$  e

$$D(Id - T)(x) = \left( \begin{array}{c|c} D(Id - T)|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}(x) & 0 \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right),$$

logo

$$J_{(Id - T)}(x) = J_{(Id - T)|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}}(x),$$

e polo tanto

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b),$$

como queiramos probar. □

*Observación 2.12.* Co fin de axilizar a lectura obvios no caso de dimensións finitas, como fixemos na demostración anterior, a necesidade de aproximar unha función por outra de clase 1 para aplicar correctamente resultados previos.

O anterior resultado é tamén válido se consideramos un subespazo de dimensión finita  $F$  tal que  $T(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ ; é dicir,

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

sendo  $F$  un subespazo nas condicións anteriores. A igualdade anterior é certa pois podemos identificar  $F$  con  $\mathbb{R}^p$ , sendo  $p$  a dimensión de  $F$ , a través dun cambio de base e, por ser o grao invariante, aplicar o Lema 2.11. Ademais, este razoamento é independente do subespazo escollido, sempre e cando conteña a  $T(\bar{\Omega})$  e a  $b$ .

Vexamos con máis detalle á independencia do grao respecto a base fixada. Sexa  $F$  un espazo de dimensión  $p$  finita e  $x \in F$ . Dadas dúas bases calquera, o elemento  $x$  pódese expresar como  $x_{(1)} \in \mathbb{R}^p$  ou  $x_{(2)} \in \mathbb{R}^p$  en función da base tomada. Ademais, existe unha matriz invertible  $M$  asociada á aplicación linear de cambio de base tal que  $Mx_{(2)} = x_{(1)}$ . Retomando o caso que nos ocupa, sexan  $\Omega \subset F$  aberto e limitado,  $b \in F$  e  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, F)$ , consideremos  $\varphi_{(i)} \in C(\bar{\Omega}_{(i)}, \mathbb{R}^p)$  sendo  $i \in \{1, 2\}$  dependendo da base escollida, entón

$$\varphi_{(2)}(x_{(2)}) = M^{-1}\varphi_{(1)}(Mx_{(2)}). \quad (2.1)$$

Se  $\varphi$  é continuamente diferenciable séguese da igualdade (2.1) que  $J_\varphi(x)$  é independente da base escollida e polo tanto, pola Definición 1.24, o grao tamén o é; e dicir,

$$d(\varphi_{(1)}, \Omega_1, b_{(1)}) = d(\varphi_{(2)}, \Omega_2, b_{(2)}),$$

sendo  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$  e  $b_{(i)}$ , para  $i \in \{1, 2\}$ ,  $b$  expresado en función da base.

Estas conclusións permítenos dar un paso máis cara ó grao de Leray-Schauder.

**Definición 2.13.** Sexan  $X$  un espazo linear normado,  $\Omega$  un subconxunto aberto e limitado de  $X$  e  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación de rango finito. Se  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$  defínese o grao de  $Id - T$  en  $\Omega$  respecto a  $b$  como

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T|_{\Omega \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde  $F$  é un subespazo de  $X$  de dimensión finita tal que  $T(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ .

*Notación 2.14.* Fixaremos, salvo que se indique o contrario:  $X$  un espazo linear normado,  $\Omega$  un subconxunto aberto e limitado de  $X$  e  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación compacta.

**Definición 2.15.** Sexan  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ ,  $\rho_o = \rho(b, (Id - T)(\partial\Omega))$  e  $\hat{T} : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación de rango finito tal que  $\|T(x) - \hat{T}(x)\| < \rho_o/2$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Defínese o **grao de Leray-Schauder** de  $Id - T$  en  $\Omega$  respecto a  $b$  como

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - \hat{T}, \Omega, b).$$

Comprobemos que a definición anterior está ben feita e é independente da elección de  $\hat{T}$ . Polo Lema 2.9 temos que  $\rho_o > 0$  e polo Teorema 2.6 para  $\varepsilon = \rho_o/2$  temos garantida a existencia dunha aplicación  $\hat{T}$  nas condicións da definición. Ademais cúmprese que

$$\|(Id - T)(x) - (Id - \hat{T})(x)\| = \|T(x) - \hat{T}(x)\| < \rho_o/2,$$

para todo  $x \in \partial\Omega$  e polo tanto

$$\rho(b, (Id - \hat{T})) \geq \rho_o/2 > 0,$$

co cal  $b \notin (Id - \hat{T})(\partial\Omega)$  e  $d(Id - \hat{T}, \bar{\Omega}, b)$  está ben definido, de acordo coa Definición 1.24. Verifiquemos a independencia da escolla de  $\hat{T}$  da seguinte maneira. Sexan  $T_1$  e  $T_2$  aplicacións de rango finito tales que  $\|T(x) - T_i(x)\| < \rho_o/2$  para todo  $i \in \{1, 2\}$  e todo  $x \in \bar{\Omega}$ . Sexa  $F_i$  un subespazo finito contendo a  $T_i(\bar{\Omega})$  e a  $b$ , para  $i = 1, 2$ , e  $F$  un subespazo de dimensión finita tal que  $\text{span}(F_1, F_2) \subset F$ , entón

$$d(Id - T_i, \Omega, b) = d(Id - T_i|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b), \quad (2.2)$$

para  $i = 1, 2$ . Por outra banda,  $Id - T_1$  e  $Id - T_2$  son homótopas a través da homotopía

$$H(x, t) = t(Id - T_1)(x) + (1 - t)(Id - T_2)(x)$$

e  $\|b - H(x, t)\| \geq \rho_o/2$  logo, polo Teorema 1.43, tense que

$$d(Id - T_1, \Omega, b) = d(Id - T_2, \Omega, b). \quad (2.3)$$

A partir das igualdades (2.2) e (2.3) concluimos que

$$d(Id - T_1|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = d(Id - T_2|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

e polo tanto o grao de  $Id - T$  é independente da escolla de  $\hat{T}$ .

*Observación 2.16.* A definición anterior pode estenderse a conxuntos  $\Omega$  non limitados baixo a condición de ser finitamente limitados, isto é,  $\Omega \subset X$  tal que  $\Omega \cap V$  é limitado para todo  $V \subset X$  subespazo de dimensión finita, [14, Páx. 59].

### 2.3. Propiedades do grao de Leray-Schauder

Como veremos, o grao de Leray-Schauder satisfai case a totalidade das propiedades que cumpre o grao de Brouwer, en particular as tres propiedades básicas que mencionabamos ó comezo da sección 2.1.

*Notación 2.17.* Denotaremos por  $K(\bar{\Omega}, X)$  o conxunto de aplicacións compactas de  $\bar{\Omega}$  en  $X$ , sendo  $X$  un espazo linear normado e  $\Omega \subset X$  aberto e limitado.

**Proposición 2.18.** (*Normalización*) Se  $b \in \Omega$  entón  $d(\text{Id}, \Omega, b) = 1$ ; se  $b \notin \Omega$ ,  $d(\text{Id}, \Omega, b) = 0$ .

*Demostración.* Basta con tomar  $\hat{T} = T = 0$  e  $F$  un subespazo de dimensión finita que conteña a  $b$  e  $T(\bar{\Omega})$ , a demostración séguese da correspondente propiedade para o caso do grao de Brouwer.  $\square$

Nótese que na proba anterior, é suficiente con tomar ó espazo unidimensional que conteña o punto  $b$  e o  $0$ .

**Proposición 2.19.** Sexa  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$ ,  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$  e  $p \in X$ , entón

$$d(\text{Id} - T, \Omega, b) = d(\text{Id} - T - p, \Omega, b - p).$$

*Demostración.* Sexa  $\hat{T} : \bar{\Omega} \rightarrow X$  unha aplicación de rango finito tal que  $\|T(x) - \hat{T}(x)\| < \rho_o/2$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$  e sexa  $F$  un subespazo de dimensión finita tal que  $T(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $p, b \in F$ ; entón por definición, temos que

$$d(\text{Id} - \hat{T}, \Omega, b) = d(\text{Id} - T, \Omega, b). \quad (2.4)$$

Ademais

$$\|(\hat{T} + p)(x) - (T + p)(x)\| < \rho(b - p, (Id - T - p)(\partial\Omega)),$$

$\hat{T}(\bar{\Omega}) + p \subset F$  e  $b - p \in F$ , por ser  $F$  un subespazo contendo a  $b$ ,  $p$  e  $\hat{T}(\bar{\Omega})$ . Temos entón, de novo por definición, que

$$d(\text{Id} - \hat{T} - p, \Omega, b - p) = d(\text{Id} - T - p, \Omega, b - p). \quad (2.5)$$

Xuntado as igualdades (2.4) e (2.5) temos que

$$d(\text{Id} - T, \Omega, p) = d(\text{Id} - \hat{T}, \Omega, b) = d(\text{Id} - \hat{T} - p, \Omega, b - p) = d(\text{Id} - T - p, \Omega, b - p),$$

onde a igualdade segunda se obtén da Proposición 1.37.  $\square$

**Teorema 2.20.** 1. (*Continuidade respecto á función*) Sexan  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$  e  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ .

Entón existe unha veciñanza  $\mathcal{U}$  de  $T$  en  $K(\bar{\Omega}, X)$  tal que para todo  $S \in \mathcal{U}$  se ten que  $b \notin (Id - S)(\partial\Omega)$  e

$$d(\text{Id} - T, \Omega, b) = d(\text{Id} - S, \Omega, b).$$

2. (*Invariancia baixo homotopía*) Sexa  $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], X)$  tal que  $H(x, t) = x - S(x, t)$ , sendo  $S \in K(\bar{\Omega} \times [0, 1], X)$ . Se  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ , entón  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é independente de  $t$ .

3. (*Invariancia nas compoñentes conexas*) O grao é constante, respecto a  $b$ , en cada compoñente conexa de  $X \setminus (Id - T)(\partial\Omega)$ .

4. (Aditividade) Sexan  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  e  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega_1) \cup (Id - T)(\partial\Omega_2)$ , onde  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$  e  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Entón

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T, \Omega_1, b) + d(Id - T, \Omega_2, b).$$

*Demostración.* 1. Definimos a seguinte norma,

$$\|S - T\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|S(x) - T(x)\|.$$

Sexa  $\rho_o = \rho(b, (Id - T)(\partial\Omega)) > 0$  e  $\mathcal{U}$  un entorno de  $T$  en  $K(\bar{\Omega}, X)$  definido como

$$\mathcal{U} = \{S \in K(\bar{\Omega}, X) : \|S - T\|_\infty < \rho_o/2\}.$$

Sexa  $S \in \mathcal{U}$  arbitrario, entón  $\rho(b, (Id - S)(\partial\Omega)) \geq \rho_o/2 > 0$  xa que

$$\begin{aligned} \rho_o &\leq \|b - (Id - T)(x)\| \leq \|b - (Id - S)(x)\| + \|S(x) - T(x)\| \\ &\leq \|b - (Id - S)(x)\| + \rho_o/2, \end{aligned}$$

para todo  $x \in \partial\Omega$ . Sexan  $T_1$  e  $S_1$  aplicacións de rango finito tal que

$$\|T - T_1\|_\infty < \rho_o/4 \text{ e } \|S - S_1\|_\infty < \rho_o/4,$$

e sexa  $F$  un subespazo de  $X$  de dimensión finita tal que  $T_1(\bar{\Omega}) \cup S_1(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ . Entón, por definición,

$$\begin{cases} d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T_1, \Omega, b) \text{ e} \\ d(Id - S, \Omega, b) = d(Id - S_1, \Omega, b). \end{cases} \quad (2.6)$$

Se probamos que  $Id - T_1$  e  $Id - S_1$  son homótopas, teremos rematado a demostración pois bastará aplicar a invariancia baixo homotopía para o grao de Brouwer obtendo do sistema (2.6) a devandita igualdade,

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T_1, \Omega, b) = d(Id - S_1, \Omega, b) = d(Id - S, \Omega, b).$$

Definimos a homotopía

$$H(x, s) = s(Id - T_1)(x) + (1 - s)(Id - S_1)(x),$$

para  $x \in \Omega \cap F$  e  $s \in [0, 1]$ . Entón  $\|H(x, t) - b\| > 0$  para todo  $x \in \partial(\Omega \cap F)$  e todo  $s \in (0, 1)$  xa que

$$\begin{aligned} \|b - (Id - T)(x)\| &= \|b - H(x, s) + s(Id - T_1)(x) + (1 - s)(Id - S_1)(x) - s(Id - T)(x) \\ &\quad - (1 - s)(Id - T)(x) - (1 - s)(Id - S)(x) + (1 - s)(Id - S)(x)\| \\ &\leq \|H(x, s) - b\| + s\|T(x) - T_1(x)\| + (1 - s)\|S(x) - S_1(x)\| \\ &\quad + (1 - s)\|S(x) - T(x)\| \\ &\leq \|H(x, s) - b\| + s\rho_o/4 + (1 - s)\rho_o/4 + (1 - s)\rho_o/2, \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\|H(x, s) - b\| \geq \rho_o - \rho_o \frac{s}{4} - \rho_o \frac{1-s}{4} - \rho_o \frac{1-s}{2} = \frac{1+2s}{4} \rho_o > \frac{\rho_o}{4} > 0,$$

para todo  $x \in \partial(\Omega \cap F)$  e  $s \in (0, 1)$ . Logo  $b \notin H(\partial(\Omega \cap F) \times [0, 1])$ , verificando así as hipóteses da invariancia baixo homotopía 1.43.

2. Pola propiedade 1,  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é localmente constante e polo tanto continua no conxunto conexo  $[0, 1]$ . Ademais a súa imaxe son números enteiros, logo por ser continua é necesariamente constante en  $[0, 1]$ .
3. Pola Proposición 2.19 temos que,

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T - b, \Omega, 0).$$

Definamos a función  $f(b) = d(Id - T - b, \Omega, 0)$ ,  $f : X \setminus (Id - T)(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ , pola propiedade 1,  $f$  é continua e, por ser a súa imaxe enteira, é constante nas compoñentes conexas de  $X \setminus (Id - T)(\partial\Omega)$ . Logo  $d(Id - T, \Omega, b)$  é invariante respecto a  $b$  nas compoñentes conexas de  $X \setminus (Id - T)(\partial\Omega)$ .

4. Sexan  $\hat{T}$  unha aplicación de rango finito nas hipóteses da Definición do grao de Leray-Schauder 2.15 e  $F$  un subespazo de rango finito tal que  $\hat{T}(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ . Entón temos que

$$\begin{aligned} d(Id - T, \Omega, b) &= d(Id - \hat{T}|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) \\ &= d(Id - \hat{T}|_{\bar{\Omega}_1 \cap F}, \Omega_1 \cap F, b) + d(Id - \hat{T}|_{\bar{\Omega}_2 \cap F}, \Omega_2 \cap F, b) \\ &= d(Id - T, \Omega_1, b) + d(Id - T, \Omega_2, b), \end{aligned}$$

aplicando na segunda igualdade a aditividade do grao de Brouwer. □

**Proposición 2.21.** (*Excisión*) Sexa  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$  e  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ . Se  $M \subset \Omega$  é un conxunto pechado e  $b \notin (Id - T)(M)$ , entón

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T, \Omega \setminus M, b).$$

*Demostración.* Polo Lema 2.8,  $(Id - T)(M)$  é un conxunto pechado. Sexa

$$\rho_1 = \min\{\rho(b, (Id - T)(M)), \rho(b, (Id - T)(\partial\Omega))\} > 0.$$

Escollamos unha aplicación de rango finito  $\hat{T}$  tal que  $\|T - \hat{T}\|_\infty < \rho_1/2$  e un subespazo  $F$  de rango finito tal que  $\hat{T}(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ . Entón, pola definición do grao e aplicando o Teorema 1.46 temos que

$$\begin{aligned} d(Id - T, \Omega, b) &= d(Id - \hat{T}, \Omega, b) = d(Id - \hat{T}|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = d(Id - \hat{T}|_{\bar{\Omega} \cap F}, (\Omega \setminus M) \cap F, b) \\ &= d(Id - \hat{T}, \Omega \setminus M, b) = d(Id - T, \Omega \setminus M, b), \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

**Proposición 2.22.** (*Dependencia dos valores fronteira*) Sexan  $T, S \in K(\bar{\Omega}, X)$  tales que  $S(x) = T(x)$  para todo  $x \in \partial\Omega$ . Se  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$  entón

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - S, \Omega, b).$$

*Demostración.* Definimos a homotopía  $H(x, t) = t(Id - T)(x) + (1 - t)(Id - S)(x)$  para  $x \in \bar{\Omega}$  e  $t \in [0, 1]$ .  $H(x, \cdot) = (Id - T)(x)$  para todo  $x \in \partial\Omega$  logo  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . En virtude do Teorema 2.20 temos que

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - S, \Omega, b),$$

por ser  $Id - T$  e  $Id - S$  homótopas. □

**Proposición 2.23.** Sexa  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$  e  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ . Se  $d(Id - T, \Omega, b) \neq 0$ , entón existe  $x \in \Omega$  tal que  $(Id - T)(x) = b$ .

*Demostración.* Para todo  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > 1/\rho_o$  existe unha aplicación de rango finito  $T_n$  tal que

$$\|T - T_n\|_\infty < \frac{1}{n}, \quad (2.7)$$

e un  $F_n$  un subespazo de dimensión finita tal que  $T_n(\bar{\Omega}) \subset F_n$  e  $b \in F_n$ . Pola definición do grao

$$d(Id - T, \Omega, b) = d(Id - T_n, \Omega \cap F_n, b).$$

Logo, por hipótese,  $d(Id - T_n, \Omega \cap F_n, b) \neq 0$ . En virtude da Proposición 1.44 existen  $x_n \in \Omega \cap F_n$  tal que

$$(Id - T_n)(x_n) = b. \quad (2.8)$$

Por ser  $\Omega \cap F_n$  limitado e  $T$  compacta, existe  $y \in X$  límite dunha subsucesión que denotaremos  $T(x_n)$ , onde  $x_n \in \Omega \cap F_n$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Da igualdade (2.8) dedúcese que o límite da subsucesión  $x_n$  coincide co límite da subsucesión  $b + T_n(x_n)$ , e este a súa vez, grazas a (2.7), ten o mesmo límite que a subsucesión  $b + T(x_n)$  que xa sabemos é  $b + y$ . Logo  $b + y$  é o límite de  $x_n$  cando  $n$  tende a infinito. Pola continuidade de  $T$  temos que

$$(Id - T)(y + b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id - T)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - T(x_n) = b. \quad (2.9)$$

Polo tanto,  $y + b$  é solución da ecuación  $(Id - T)(x) = b$ . Vexamos que  $y + b \in \Omega$ . Por ser  $y + b$  límite da subsucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ ,  $y + b \in \bar{\Omega}$ . Supoñamos que  $y + b \in \partial\Omega$ , entón de (2.9) dedúcese que  $b \in (Id - T)(\partial\Omega)$ . Chegando así a unha contradición, pois por hipótese  $b \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ , logo  $y + b \in \Omega$ . □

## 2.4. Teoremas de punto fixo

### 2.4.1. Teorema de punto fixo de Schauder

Para espazos de dimensión infinita, o Teorema de punto fixo de Brouwer 1.54 non é certo, xa que a bóla unidade dun espazo normado de dimensión infinita non é compacta, [10, Páx. 203]. Non obstante o Corolario 1.48 si é certo para espazos de dimensión infinita, e foi enunciado por Juliusz Schauder en 1930. Vexamos un contraexemplo para o Teorema de punto fixo de Brouwer nun espazo de dimensión infinita.

**Exemplo 2.24.** Sexa  $H = l^2$  o espazo de sucesións con cadrado sumable, isto é, tal que

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

para todo  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$ . Sexa

$$\bar{B} = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$$

a bóla pechada de raio un no espazo  $H$  e definamos a función

$$\begin{aligned} T : \bar{B} &\longrightarrow \bar{B} \\ x &\mapsto T(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots), \end{aligned}$$

que é continua. Tense que

$$\|T(x)\|^2 = (\sqrt{1 - \|x\|^2})^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots = 1 - \|x\| + \|x\| = 1,$$

logo  $\|T(x)\| = 1$  para todo  $x \in \bar{B}$ . Se existira un  $x \in \bar{B}$  tal que  $T(x) = x$  teríase que  $\|x\| = \|T(x)\| = 1$  pero entón,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \|x\|} = x_1 \implies x_1 = 0, \\ x_1 = x_2 \implies x_2 = 0, \\ x_2 = x_3 \implies x_3 = 0, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{array} \right. .$$

Polo tanto  $x = 0$  chegando a unha contradición. Logo  $T$  é unha aplicación continua da bóla pechada en si mesma sen puntos fixos.

**Definición 2.25.** Sexa  $X$  un espazo normado e  $K$  un subconxunto de  $X$ . Defínese a **envoltura convexa** de  $K$  como

$$\text{co } K = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ onde } \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ e } x_i \in K \text{ para } 0 \leq i \leq n \right\}.$$

**Definición 2.26.** Defínese a **envoltura convexa cerrada** de  $K$  como o conxunto convexo e pechado máis pequeno que o contén, e denótase por  $\overline{\text{co}}K$ .

**Lema 2.27.** *Sexa  $X$  un espazo normado. Se  $K \subset X$  é compacto, entón  $\overline{\text{co}}K$  é compacto.*

*Demostración.* Véxase [1, Páx. 174]. □

**Teorema 2.28** (de punto fixo de Schauder). *Sexan  $X$  un espazo normado e  $K \subset X$  un conxunto compacto e convexo. Se  $T : K \rightarrow K$  é unha aplicación continua entón,  $T$  ten un punto fixo, non necesariamente único.*

*Demostración.* Por ser  $T$  continua e  $K$  compacto,  $T$  é compacta pois a clausura dun conxunto é sempre pechada e todo pechado nun compacto é compacto. Ademais por ser  $K$  compacto,  $K$  é pechado e limitado. Estamos en condicións de aplicar o Teorema 2.6. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe unha aplicación de rango finito  $T_\varepsilon : K \rightarrow K$  nas condicións do Teorema 2.6. En base á demostración do mesmo Teorema, sabemos que  $T_\varepsilon(K) \subset \text{span}(\{v_1, \dots, v_n\}) \subset K$  e  $T_\varepsilon(x)$  é unha combinación convexa de  $v_1, \dots, v_n$  logo  $T_\varepsilon(x) \in K_\varepsilon$ , sendo  $K_\varepsilon := \overline{\text{co}}(\{v_1, \dots, v_n\})$ .

Polo Lema 2.27,  $K_\varepsilon$  é un conxunto compacto e convexo e  $K_\varepsilon \subset K$  por ser  $K$  cerrado e convexo, logo  $T_\varepsilon(K_\varepsilon) \subset T_\varepsilon(K)$ . Polo tanto  $T_\varepsilon : K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$  é unha aplicación continua e  $K_\varepsilon$  é un subconxunto compacto e convexo dun espazo de dimensión finita. En virtude do Corolario 1.55, cuxas hipóteses acabamos de verificar, existe  $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$  punto fixo de  $T_\varepsilon$ . Por ser  $K$  compacto, existe unha subsucesión  $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$  de puntos fixos converxentes a  $x_o \in K$  cando  $\varepsilon$  tende a 0. Vexamos que  $x_o$  é un punto fixo de  $T$ . Temos que

$$0 \leq \|T(x_o) - x_o\| \leq \|T(x_o) - T(x_\varepsilon)\| + \|T(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x_o\|, \quad (2.10)$$

e sabemos que o primeiro e terceiro termo do lado dereito da desigualdade se anulan por paso o límite, o terceiro por ser  $x_o$  límite da subsucesión  $x_\varepsilon$  e o primeiro séguese do mesmo razoamento en base a continuidade da función, é dicir, por ser  $T(x_o)$  o límite de  $T(x_\varepsilon)$ . Ademais,

$$0 \leq \|T(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|T(x_\varepsilon) - T_\varepsilon(x_\varepsilon)\| < \varepsilon,$$

onde a desigualdade da dereita se segue de  $\|T - T_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ . Con todo, tomando límites en (2.10) se ten que  $\|T(x_o) - x_o\| = 0$ , logo  $T(x_o) = x_o$ . Polo tanto,  $x_o \in K$  é un punto fixo de  $T$ . □

Presentamos un enunciado alternativo ó Teorema de punto fixo de Schauder. Nótese que aínda sendo os resultados equivalentes, a variación nas hipóteses dos mesmos resulta de utilidade para a súa aplicación práctica.

**Teorema 2.29.** *Sexa  $X$  un espazo normado e  $K \subset X$  cerrado, limitado e convexo. Se  $T : K \rightarrow K$  é compacta, entón  $T$  ten un punto fixo, non necesariamente único.*

*Demostración.* Por ser  $T$  compacta e  $K$  limitado,  $\overline{T(K)}$  é compacto. Polo tanto, en virtude do Lema 2.27, a súa envoltura convexa pechada  $\hat{K}$  é compacta. Ademais  $\hat{K} \subset K$  xa que  $\overline{T(K)} \subset K$  e  $K$  é cerrado e convexo, e polo tanto  $T(\hat{K}) \subset T(K) \subset \hat{K}$ . Entón a aplicación  $T|_{\hat{K}} : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$  é continua e o Teorema 2.28 garante a existencia dun punto fixo de  $T|_{\hat{K}}$  en  $\hat{K}$ , logo  $T$  ten un punto fixo en  $K$ .  $\square$

**Corolario 2.30.** *Sexan  $X$  un espazo normado e  $K \subset X$  compacto e convexo. Se  $D$  é un conxunto homeomorfo a  $K$  e  $T : D \rightarrow D$  é compacta, entón  $T$  ten un punto fixo en  $D$ .*

*Demostración.* Sexa  $h$  un homeomorfismo entre  $K$  e  $D$  e definamos  $\hat{T} := h^{-1} \circ T \circ h$ , entón  $\hat{T} : K \rightarrow K$  é unha aplicación compacta. O Teorema 2.28 garante a existencia dun punto fixo de  $\hat{T}$  en  $K$ , isto é, existe  $x \in K$  tal que  $x = \hat{T}(x) = h^{-1}(T(h(x)))$ . Polo tanto  $y = h(x) = T(h(x)) = T(y)$  e  $y \in h(K) = D$ . Logo,  $T$  ten un punto fixo en  $D$ .  $\square$

**Definición 2.31.** Dise que un conxunto  $K \subset X$  satisfai a **propiedade de punto fixo** se toda función continua de  $K$  en si mesma ten un punto fixo.

**Corolario 2.32.** *Todo subconxunto compacto e convexo dun espazo normado satisfai a propiedade de punto fixo.*

*Demostración.* Sexa  $K \subset X$  compacto e convexo. Para toda función  $T : S \rightarrow S$  continua o Teorema de punto fixo de Schauder 2.28 asegúranos a existencia dun punto fixo en  $S$ .  $\square$

Os resultados anteriores son certos en particular para espazos de Banach.

### 2.4.2. Teorema de Schaeffer

**Teorema 2.33** (Schaeffer). *Sexa  $T : X \rightarrow X$  unha aplicación compacta. Definamos*

$$S = \{x \in X : x = \lambda T(x), \text{ sendo } 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

*Se existe  $R > 0$  tal que  $\|x\| < R$  para todo  $x \in S$ , entón  $T$  ten un punto fixo en  $B(0, R)$ .*

*Demostración.* Definamos a homotopía

$$\begin{aligned} H : \overline{B(0, R)} \times [0, 1] &\longrightarrow \overline{B(0, R)} \\ (x, \lambda) &\mapsto H(x, \lambda) := x - \lambda T(x). \end{aligned}$$

Por hipótese, se  $x \notin B(0, R)$  temos que  $x - \lambda T(x) \neq 0$  para todo  $\lambda$  no intervalo  $[0, 1]$ . Logo  $0 \notin H(\partial B(0, R) \times [0, 1])$ . Polo Teorema 2.20 temos que

$$d(I - T, B(0, R), 0) = d(I, B(0, R), 0) = 1, \quad (2.11)$$

onde a segunda igualdade se obtén da Proposición 2.18 xa que  $0 \in B(0, R)$ . En base á Proposición 2.23, da igualdade (2.11) dedúcese a existencia dun  $x \in B(0, R)$  tal que  $(I - T)(x) = 0$ . Logo  $T$  ten un punto fixo en  $B(0, R)$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Aplicacións da Teoría do grao ás ecuacións diferenciais

Existen diversas aplicacións do grao de Leray-Schauder ás ecuacións diferenciais. No presente traballo estudaremos a existencia de solución dun problema de valor inicial e probaremos que o seu espazo de solucións é conexo. Para elo traballaremos coa ecuación integral, pois a partir da mesma definiremos unha función compacta á que poder aplicarlle a teoría de punto fixo. Utilizaremos fundamentalmente as referencias [10] e [13] para ilustrar estes resultados.

Dados  $a, c \in \mathbb{R}$  tales que  $a < c$  e  $f : [a, c] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función continua, consideremos o seguinte problema de valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sabemos ademais que atopar solucións ó problema de Cauchy é equivalente a facelo para a ecuación integral asociada,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Definimos  $X \equiv C([a, c], \mathbb{R})$  que é un espazo de Banach coa norma

$$\|y\|_\infty = \max \{|y(t)| : a \leq t \leq c\}.$$

Dado  $R > 0$ , sexan

$$M > \sup \{|f(t, u)| : t \in [a, c], u \in [-R, R]\} \quad \text{e} \quad b := a + \min \left\{ c - a, \frac{R}{M} \right\}.$$

**Definición 3.1.** Dise que unha familia de funcións  $S \subset X$  é **equicontinua** no intervalo  $[a, c]$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in S$  e  $t, t' \in [a, c]$ , se ten  $|y(t) - y(t')| < \varepsilon$  sempre que  $|t - t'| < \delta$ .

**Definición 3.2.** Unha familia de funcións  $S \subset X$  é uniformemente limitada se existe  $M > 0$  tal que  $|y(t)| \leq M$  para todo  $y \in S$  e todo  $t \in [a, c]$ .

**Teorema 3.3** (de Arzelà-Ascoli). *Sexa  $S \subset X$  unha familia de funcións continuas. Se  $S$  é uniformemente limitada e equicontinua entón  $S$  é un conxunto relativamente compacto en  $X$ .*

*Demostración.* Véxase [5, Páx. 15]. □

**Lema 3.4.** *Sexa  $\Omega = B(0, R)$  a bóla aberta de radio  $R$  e centrada na orixe en  $X$ . Sexa  $T$  unha función definida como*

$$\begin{aligned} T: \bar{\Omega} &\longrightarrow X \\ y &\mapsto T(y)(t) = \int_a^t f(s, y(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

*Entón  $T$  é unha aplicación compacta.*

*Demostración.* Comprobaremos en primeiro lugar a continuidade de  $T$  e despois, a partir dos resultados previos, probaremos que  $T(\bar{\Omega})$  é relativamente compacto. Sexa  $\varepsilon > 0$  dado. Pola continuidade de  $f$  e a compacidade de  $[a, c] \times [-R, R]$  dedúcese que  $f|_{[a, c] \times [-R, R]}$  é uniformemente continua. Logo existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(s, u) - f(s, v)| < \frac{\varepsilon}{c - a}, \quad (3.3)$$

para todo  $s \in [a, c]$  e  $u, v \in [-R, R]$ ,  $|u - v| < \delta$ . Entón temos que

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(y)(t)| &= \left| \int_a^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right| \leq \int_a^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &< \int_a^t \frac{\varepsilon}{c - a} ds \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $x, y \in \bar{\Omega}$ ,  $\|x - y\|_\infty < \delta$  e todo  $t \in [a, c]$ . Logo  $\|T(x) - T(y)\|_\infty < \varepsilon$ , probando así a continuidade de  $T$  en  $\bar{\Omega}$ . Por outra banda, para todo  $t \in [a, c]$  e  $x \in \bar{\Omega}$ , temos que  $|x(t)| \leq R$  e

$$|T(x)(t)| = \left| \int_a^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \int_a^t M ds = M(t - a) \leq M(c - a),$$

logo  $T(\bar{\Omega})$  é uniformemente limitada. Ademais, dados  $t, t' \in [a, c]$  e  $x \in \bar{\Omega}$  tense que

$$|T(x)(t) - T(x)(t')| = \left| \int_a^t f(s, x(s)) ds - \int_a^{t'} f(s, x(s)) ds \right| = \left| \int_{t'}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t - t'|,$$

e polo tanto  $T(\bar{\Omega})$  é equicontinua. En virtude do Teorema de Arzelà-Ascoli 3.3,  $T(\bar{\Omega})$  é relativamente compacto, como queríamos probar. □

**Teorema 3.5** (Existencia). *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(a) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

definido para  $t \in (a, b)$  ten polo menos unha solución  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ .

*Demostración.* Para todo  $t \in [a, b] \subset [a, c]$  e  $x \in \bar{\Omega}$ , temos que  $|x(t)| \leq R$  e

$$|T(x)(t)| = \left| \int_a^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \int_a^t M ds = M(t - a) \leq M(b - a) \leq \frac{R}{M} M = R,$$

logo  $T(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ . Entón  $T \in K(\bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ . Polo Teorema de punto fixo 2.29, existe  $x \in \bar{\Omega} \subset X$  tal que  $x = T(x)$ , é dicir,

$$x(t) = \int_a^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Ademais, por ser  $f$  continua en  $[a, b]$  tense que  $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ . Para rematar, por ser  $x$  solución da ecuación integral,  $x$  é solución do problema de valor inicial.  $\square$

Este teorema garante a existencia de solución local pero esta pode non ser global. Ilustramos este razoamento cun contraexemplo.

**Exemplo 3.6.** Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Claramente,  $f(t, x) = x^2 + 1$ , logo  $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Achamos a solución de (3.5),

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int dt \implies \arctan(x) = t + C, \quad C \in \mathbb{R} \implies x(t) = \tan(t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se impoñemos as condicións iniciais obtemos,

$$x(0) = \tan(C) = 0 \implies C = 0.$$

Comprobemos que  $x(t) = \tan(t)$  sexa solución de 3.5,

$$x'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}{\cos^2(t)} = x(t)^2 + 1,$$

Logo  $x$  é solución de (3.5), mais só localmente. Pois  $\tan(t)$  non esta definida nos puntos

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N} \right\},$$

e polo tanto  $x(t)$  non pode ser unha solución global.

O Teorema 3.5 tampouco garante a unicidade de solución do problema de Cauchy. Presentamos un exemplo dun PVI nas hipóteses do Teorema 3.5 con máis dunha solución.

**Exemplo 3.7.** Consideremos o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} x' &= \sqrt[3]{x^2}, \\ x(0) &= 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Temos que  $f(t, x) = \sqrt[3]{x^2}$ , logo  $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . A función constante 0 é solución trivial de (3.6). Se  $x \neq 0$ , calculemos outra solución distinta,

$$\int \frac{dx}{x^{-3/2}} = \int dt \implies 3\sqrt[3]{x} = t + C, \quad C \in \mathbb{R} \implies x(t) = \left(\frac{t+C}{3}\right)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se impoñemos as condicións iniciais obtemos,

$$x(0) = \left(\frac{C}{3}\right)^3 = 0 \implies C = 0.$$

Comprobemos que  $x(t) = (t/3)^3$  é solución de (3.6),

$$x'(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^2 = \left(\left(\frac{t}{3}\right)^3\right)^{2/3} = \sqrt[3]{x(t)^2}.$$

Logo  $x$  é unha solución de (3.6) distinta da trivial.

Veremos agora que para todo instante  $t \in [a, b]$  o conxunto de puntos  $x(t)$  para toda solución  $x$  do problema de valor inicial é conexo. Polo tanto, se temos dúas solucións distintas do mesmo PVI, teremos entón infinitas solucións.

**Teorema 3.8** (Krasnoselsk'i-Perov). *Sexan  $X$  un espazo de Banach,  $\Omega \subset X$  aberto e limitado e  $T \in K(\bar{\Omega}, X)$  tal que  $0 \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ . Supoñamos que son certas as seguintes condicións:*

1. *Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $T_\varepsilon \in K(\bar{\Omega}, X)$  tal que  $\|T - T_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ .*
2. *Se  $\|b\| < \varepsilon$  entón a ecuación  $x - T_\varepsilon(x) = b$  admite como moito unha solución en  $\bar{\Omega}$ .*
3.  *$d(Id - T, \Omega, 0) \neq 0$ .*

*Entón o conxunto de solucións  $S \equiv \{y \in \bar{\Omega} : T(y) = y\}$  é compacto e conexo.*

*Demostración.* Por ser  $d(Id - T, \bar{\Omega}, 0) \neq 0$  grazas á Proposición 2.23 sabemos que o conxunto de solución é non baleiro. Por ser  $Id - T$  propia (Lema 2.8),  $S = \{y \in \bar{\Omega} : (Id - T)(y) = 0\}$  é compacto. Probemos por redución ó absurdo a conxidade. Supoñamos que  $S$  é non conexo, entón  $S$  é unión de dous compactos disxuntos non baleiros. Logo, existen abertos non baleiros  $\mathcal{U}$

e  $\mathcal{V}$  tales que  $\bar{\mathcal{U}} \cap \bar{\mathcal{V}} = \emptyset$ ,  $S \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ ,  $S \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  e  $S \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ . Polo tanto, existe unha solución  $x \in S \cap \mathcal{U}$ , e dicir,  $T(x) = x$ . Dado  $\varepsilon > 0$  e unha aplicación  $T_\varepsilon$  nas condicións das hipóteses, definimos

$$\varphi_\varepsilon(y) = (y - T_\varepsilon(y)) - (x - T_\varepsilon(x)),$$

para  $y \in \bar{\mathcal{V}}$ . Definimos agora a homotopía  $H \in C(\bar{\mathcal{V}} \times [0, 1], X)$  como segue

$$H(y, t) = t\varphi_\varepsilon(y) + (1 - t)(Id - T)(y).$$

Sabemos que  $0 \notin (Id - T)(\partial\mathcal{V})$ , pois  $S \cap \partial\mathcal{V} = \emptyset$ , e  $(Id - T)$  é pechada, grazas o Lema 2.8, logo existe  $\alpha > 0$  tal que  $\inf_{y \in \partial\mathcal{V}} \|(Id - T)(y)\| \geq \alpha$ . Entón,

$$\begin{aligned} \|H(y, t)\| &\geq \|(Id - T)(y)\| - \|T(y) - T_\varepsilon(y)\| - \|x - T_\varepsilon(x)\| \\ &= \|(Id - T)(y)\| - \|T(y) - T_\varepsilon(y)\| - \|T(x) - T_\varepsilon(x)\| \\ &> \alpha - \varepsilon - \varepsilon \\ &> 0, \end{aligned}$$

para todo  $y \in \partial\mathcal{V}$  escollendo  $\varepsilon < \alpha/2$ . Polo tanto  $0 \notin H(\partial\mathcal{V} \times [0, 1])$  e  $d(H(\cdot, t), \mathcal{V}, 0)$  está ben definido e é independente de  $t$ . Aplicando a propiedade de invariancia baixo homotopía para o grao de Leray-Schauder temos que

$$d(Id - T, \mathcal{V}, 0) = d(\varphi_\varepsilon, \mathcal{V}, 0).$$

Probemos que a ecuación  $\varphi_\varepsilon(y) = 0$  non ten solución en  $\mathcal{V}$ . Por redución ó absurdo, sexa  $y \in \mathcal{V}$  unha solución, entón

$$y - T_\varepsilon(y) = x - T_\varepsilon(x).$$

Fixemos  $b = x - T_\varepsilon(x)$ , tal que

$$\|b\| = \|x - T_\varepsilon(x)\| = \|T(x) - T_\varepsilon(x)\| < \varepsilon.$$

Entón, por definición,  $x \in \mathcal{U}$  e  $y \in \mathcal{V}$  son solución de  $u - T_\varepsilon(u) = b$  chegando así a unha contradición pois por hipótese a solución é única e  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ . Logo

$$d(Id - T, \mathcal{V}, 0) = d(\varphi_\varepsilon, \mathcal{V}, 0) = 0.$$

De maneira análoga obtemos  $d(Id - T, \mathcal{U}, 0) = 0$ . Basta aplicar as propiedades de excisión e aditividade para chegar a contradición,

$$d(Id - T, \Omega, 0) = d(Id - T, \mathcal{U} \cup \mathcal{V}, 0) = d(Id - T, \mathcal{U}, 0) + d(Id - T, \mathcal{V}, 0) = 0.$$

Logo o conxunto de solución  $S$  é conexo. □

**Lema 3.9** (Gronwall). *Sexa  $I$  un intervalo da recta real contendo o 0 e  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  unha función tal que*

$$0 \leq z(t) \leq A + B \int_0^t z(s) ds,$$

para todo  $t \in I$ , sendo  $A$  e  $B$  constantes non negativas. Entón

$$z(t) \leq Ae^{Bt}.$$

*Demostración.* Pode verse en [20, Páx. 290]. □

Se consideramos o caso particular do conxunto de solucións do problema de valor inicial (3.4), probaremos que se satisfán as hipóteses do Teorema 3.8.

1. Por ser  $f|_{[a,b] \times [-R,R]}$  continua nun compacto de  $\mathbb{R}^2$ , en virtude do Teorema de Weierstrass, existe unha función  $f_\varepsilon \in C^1([a, b] \times [-R, R], \mathbb{R})$  tal que

$$|f(t, u) - f_\varepsilon(t, u)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para todo  $t \in [a, b]$  e  $|u| \leq R$ . Se definimos a función

$$T_\varepsilon(x)(t) = \int_a^t f_\varepsilon(s, x(s)) ds,$$

sabemos polo Lema 3.4 que  $T_\varepsilon \in K(\bar{\Omega}, X)$ . Ademais, para todo  $t \in [a, b]$  e  $x \in \bar{\Omega}$ , temos que

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T_\varepsilon(x)(t)| &\leq \left| \int_a^t [f(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, x(s))] ds \right| \leq \int_a^t |f(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, x(s))| ds \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} (t-a) \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

logo,  $\|T - T_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$ .

2. Sexa  $b \in X$ . Se  $x$  e  $y$  son solucións de  $u = T_\varepsilon(u) + b$ , entón

$$x(t) - y(t) = \int_0^t [f_\varepsilon(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, y(s))] ds,$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Por ser a función  $g(s) = f_\varepsilon(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, y(s))$  continuamente diferenciable no compacto  $[a, b]$  dedúcese, a partir do Teorema do valor medio, o carácter Lipschitziano de  $g$ . Logo existe  $K > 0$  tal que

$$|f_\varepsilon(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, y(s))| < K|x(s) - y(s)|,$$

para todo  $s \in [a, b]$ . Entón,

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_0^t |f_\varepsilon(s, x(s)) - f_\varepsilon(s, y(s))| ds < K \int_0^t |x(s) - y(s)| ds,$$

para todo  $t \in [a, b]$ . En virtude do Lema 3.9 para  $z(t) = |x(t) - y(t)|$ ,  $A = 0$  e  $B = K$  temos que  $z(t) \leq 0$ . Polo tanto,  $x(t) = y(t)$  para todo  $t \in [a, c]$  e a solución de  $u = T_\varepsilon(u) + b$  é única.

3. O Teorema 3.5, garante a existencia de solución do PVI, logo existe unha solución da ecuación integral. Ademais, para todo  $t \in [a, b]$  e  $x$  solución do PVI tal que  $|x(t)| \leq R$  temos que

$$|x(t)| = |T(x)(t)| = \left| \int_a^t f(s, x(s)) ds \right| < \int_a^t M ds = M(t - a) \leq M(b - a) \leq \frac{R}{M} M = R,$$

logo  $0 \notin (Id - T)(\partial B(0, R))$ . Por outro lado, un razoamento análogo ó da demostración do Teorema de Schaeffer 2.33 permite concluír que

$$d(Id - T, \Omega, 0) = 1 \neq 0.$$

Estas conclusións permítenos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 3.10** (Kneser-Hukuhara). *Nas hipóteses do Teorema 3.5, o conxunto de solucións*

$$K_t \equiv \{x(t) : x \text{ é solución de (3.4)}\}$$

*é conexo en  $\mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Sexa  $S$  o conxunto de solucións da ecuación integral  $x - T(x) = 0$  en  $X$ , sendo

$$T(x)(t) = \int_a^t f(s, x(s)) ds.$$

Definimos a función avaliación,

$$\begin{aligned} ev_t : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto ev_t(y) := y(t). \end{aligned}$$

Entón  $K_t = ev_t(S)$ . Da conexidade de  $S$  en  $X$ , garantida polo Teorema 3.8, e a continuidade de  $ev_t$  dedúcese a conexidade de  $K_t$ .  $\square$



# Bibliografía

- [1] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide*, 2nd ed., Berlin: Springer, 2006 (Inglés).
- [2] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.*, Math. Ann. **70** (1911), 161–165 (Alemán).
- [3] ———, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115 (Alemán).
- [4] A. Cañada and S. Villegas, *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. **7** (2004), no. 1, 101–121 (Castellano).
- [5] C. Clason, *Introduction to functional analysis*, Cham: Birkhäuser, 2020 (Inglés).
- [6] J. Czyż, *Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff's ideas*, Singapore: World Scientific, 1994 (Inglés).
- [7] M. M. Day, *Normed linear spaces. 3rd ed.*, vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1973 (Inglés).
- [8] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985 (Inglés).
- [9] G. Dinca and J. Mawhin, *Brouwer degree. The core of nonlinear analysis*, Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl., vol. 95, Cham: Birkhäuser, 2021 (Inglés).
- [10] I. Fonseca and W. Gangbo, *Degree theory in analysis and applications*, Oxf. Lect. Ser. Math. Appl., vol. 2, Oxford: Clarendon Press, 1995 (Inglés).
- [11] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Monogr. Math., New York, NY: Springer, 2003 (Inglés).
- [12] N. Ivanov, *Sperner's lemma, the Brouwer fixed-point theorem, and cohomology*, (2009) (Inglés).
- [13] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis. A first course*, vol. 28, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2011 (Inglés).

- 
- [14] N. G. Lloyd, *Degree theory*, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 1978 (Inglés).
- [15] I. Madsen and J. Tornehave, *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997 (Inglés).
- [16] X. M. Masa Vázquez, *Topoloxía xeral. Introducción aos espazos euclidianos, métricos e topolóxicos*, Santiago de Compostela: Univ. de Santiago de Compostela, 1999 (Galego).
- [17] ———, *Curso de topoloxía: dos números reais ao grupo de Poincaré*, Manuais universitarios, Universidade de Santiago de Compostela, 2019 (Galego).
- [18] J. Mawhin, *Leray-Schauder degree: A half century of extensions and applications*, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **14** (1999), no. 2, 195–228 (Inglés).
- [19] J. R. Munkres, *Topology.*, 2nd ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000 (Inglés).
- [20] Otto Plaat, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Reverté, 2021 (Castellano).
- [21] G. Rodríguez, *Diferenciación de funciones de varias variables reales*, vol. 4, Universidade de Santiago de Compostela, 2003 (Castellano).
- [22] M. Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Mathematics Monograph Series. New York-Amsterdam, 1965 (Inglés).