USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El valor de Shapley

David Bamio Martínez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El valor de Shapley

David Bamio Martínez

Xullo 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de coñecemento: Estatística e Investigación Operativa
Título: El valor de Shapley
Breve descrición do contido
Tras una introducción a la teoría de juegos, se estudiarán las propiedades más importantes del valor de Shapley, algunos procedimientos de cálculo (como las extensiones multilineares), variaciones (como el índice de Banzhaf-Coleman o el valor de Owen) y campos de aplicación como el diseño de tarifas o la medida del poder en una organización.

Índice general

Resumen

El valor de Shapley busca obtener un procedimiento justo para distribuir los beneficios (o costes) generados por un proyecto conjunto. Esta propuesta está basada en las contribuciones marginales de los agentes a dicho proyecto. En el presente trabajo mostramos que el valor de Shapley queda caracterizado de forma única por una serie de propiedades deseables y hallamos su fórmula explícita. Estudiamos algunas formas alternativas de cálculo del valor mediante extensiones multilineales de juegos, ya que su computación directa puede requerir la suma de un número elevado de términos. Estudiamos también otros valores relacionados, como son el índice de poder de Banzhaf-Coleman, el valor de Owen y el valor de Myerson. Finalmente, se muestran algunas aplicaciones del valor a problemas reales como el diseño de tarifas, repartición de ganancias o el pago a acreedores tras una quiebra.

Abstract

The Shapley value seeks to obtain a fair procedure to distribute the benefits (or costs) generated by a joint project. This proposal is based on the agents' marginal contributions to said project. In this work we show that the Shapley value is uniquely determined by a series of desirable properties and we find its explicit formula. We study some alternative ways of calculating the value using multilinear extensions of games, since computing it directly can require the sum of a very large number of terms. We also study other related values, such as the Banzhaf-Coleman power index, the Owen value and the Myerson value. Finally, we show some applications of the value to real problems such as designing a schedule of fees, sharing profits or paying creditors after a bankruptcy.

Introducción

La teoría de juegos es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los problemas de decisión interactivos. La publicación en 1944 de *Theory of Games and Economic Behavior* por John von Neumann y Oskar Morgenstern suele considerarse como el nacimiento de la teoría de juegos como área formal de las matemáticas. Desde el comienzo fue desarrollada como una herramienta para la comprensión de los fundamentos de la economía, al estudiar las dinámicas que se producen a la hora de tomar decisiones racionales en situaciones de conflicto de intereses en el mercado y el consumo. Gracias a la amplitud del concepto de juego, a lo largo de las décadas se han ido encontrando aplicaciones en una gran variedad de áreas del conocimiento tales como la biología, la psicología, la politología, la informática o la estrategia militar.

Llamamos juego a un problema de decisión interactivo. En cada juego se caracteriza el número de agentes decisores que participan en él y las estrategias que puede adoptar cada uno. El resultado del problema se determina a partir del conjunto de las decisiones de todos los jugadores, aportando un pago o utilidad a cada uno de ellos. En el enfoque clásico de la teoría de juegos, se presume que los jugadores son completamente racionales; es decir, saben qué estrategia otorga la mayor utilidad acorde a sus intereses en cada situación y actúan siempre con el objetivo de maximizar dicha utilidad.

Los problemas de decisión se pueden clasificar en dos grandes grupos: no cooperativos y cooperativos. En el primer caso, los jugadores no disponen de mecanismos para realizar acuerdos vinculantes previos al juego. El enfoque es, por tanto, estudiar las mejores estrategias para cada jugador sabiendo que los demás también utilizarán sus mejores estrategias. En el caso de los juegos cooperativos, los jugadores tienen la posibilidad de formar acuerdos vinculantes. El enfoque principal de estos problemas es determinar cómo deben repartirse los beneficios los miembros de las coaliciones formadas. Cuando tales beneficios pueden repartirse libremente entre ellos, se dice que estamos ante un juego cooperativo de utilidad transferible (de forma abreviada, un *juego TU*).

El valor de Shapley, nombrado en honor a Lloyd Shapley, que lo definió en 1953, se introduce como forma de asignar un reparto único de la utilidad generada por la cooperación entre varios jugadores. Ya que no todos los miembros necesariamente contribuyen lo mismo a la coalición, surge la necesidad de proponer una asignación de los beneficios que suponga un compromiso aceptable para todos los jugadores. Shapley introdujo su valor de forma axiomática: llamó valor a cualquier asignación de los beneficios de un juego y enunció una serie de propiedades que un valor debería cumplir. A continuación, demostró que tales propiedades caracterizan un único valor, para el que halló una expresión explícita.

Comenzaremos el primer capítulo con una serie de definiciones y ejemplos que servirán como introducción a los juegos TU. A continuación, se describirán las propiedades de Shapley (eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad) y se demostrará que caracterizan un único valor, para el que construiremos la forma explícita y comprobaremos que satisface las propiedades de Shapley.

En el segundo capítulo introduciremos el concepto extensión multilineal de un juego (abreviado EML), que resultará útil para simplificar la computación del valor de Shapley para casos donde el número de jugadores sea elevado. Para ello, mostraremos la forma de calcular el valor de Shapley de un juego a partir de su EML. El concepto de EML admite una interpretación probabilística que será la que permita simplificar la computación del valor de Shapley al aplicar algunos teoremas límite de la teoría de la probabilidad. Se estudiará esta interpretación y su aplicación al cálculo del valor, además de realizar un ejemplo práctico con la ayuda del lenguaje de programación R. Finalmente, se estudiará el comportamiento de las EML bajo la composición de juegos, que resulta a su vez en una composición de EMLs. Se verá que el valor de Shapley no admite la composición, aunque se calculará una fórmula útil para calcular el valor de Shapley de juegos compuestos.

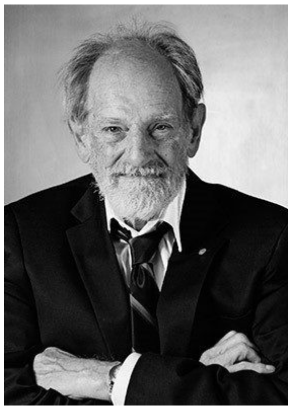
En el tercer capítulo se considerarán otros valores relacionados con el valor de Shapley. En primer lugar, se definirá el índice de poder de Banzhaf-Coleman, que tiene un objetivo similar al valor de Shapley. Se estudiará su relación con las EML y se verá que este índice sí admite la composición de juegos. En segundo lugar se estudiará el valor coalicional de Owen, que es una extensión del valor de Shapley para juegos TU con un sistema de uniones a priori. Probaremos que este valor también está caracterizado por una serie de propiedades deseables y lo calcularemos para un ejemplo práctico empleando un paquete de R. En tercer y último lugar, se estudiará el valor de Myerson, que es una aplicación directa del valor de Shapley para juegos TU con estructura de comunicación o juegos CO. Se definirá esta clase de juegos, caracterizados por un juego TU y un grafo que representa la estructura de comunicación establecida entre los jugadores. Relacionados con esta clase de juegos, también se definen los juegos TU con estructura de conferencia, que son una extensión de los juegos CO considerando hipergrafos en lugar de grafos; y los juegos TU con incompatibilidades, en los que se considera que el grafo representa una estructura de incomunicación. Se definirá un valor para cada una de estas clases de juegos, ambos íntimamente relacionados con el valor de Shapley.

En el cuarto capítulo se explicarán algunas de las aplicaciones del valor de Shapley que se han propuesto en la literatura para solucionar problemas reales. En primer lugar, se describirá el juego del aeropuerto, que modeliza el problema de diseñar un programa de tarifas para aviones que sufrague los costes de construir una pista de aterrizaje. Se busca que el programa de tarifas tenga en cuenta el hecho de que los aviones más grandes precisan una pista más grande y costosa. Se verá que el cálculo del valor de Shapley queda considerablemente simplificado para este problema. Se considerará también la solución que arroja el valor coalicional de Owen al considerar el sistema de uniones a priori establecido por las aerolíneas. En segundo lugar, se describirá el juego de pase a museos, que modeliza el problema de repartir los beneficios obtenidos por la venta de pases entre los museos participantes en el pase. Se calculará el valor de Shapley para este juego, que también resultará fácilmente computable. En tercer lugar, se considerarán los problemas de bancarrota, que describen una situación en la que varios agentes reclaman porciones de un bien mayores que el bien disponible. Cada problema de bancarrota tiene un juego asociado, para el cual se puede calcular el valor de Shapley.

Para el presente estudio se sigue principalmente el libro de Owen [16]. Se consultan también las publicaciones de van den Nouweland, Borm y Tijs [21], Casajus [6] y Bergantiños, Carreras y García-Jurado [5] en el tercer capítulo. En el último capítulo, se consultan los trabajos de Vázquez-Brage, van den Nouweland y García-Jurado [22], Ginsburg y Zang [9] y Saavedra-Nieves y Saavedra-Nieves [19].

Capítulo 1

El valor de Shapley: definición y algunos resultados



Lloyd S. Shapley en 2012

Lloyd Stowell Shapley (1923–2016) fue un matemático y economista estadounidense. Era estudiante en Harvard cuando fue reclutado en 1943 por el ejército de los EE. UU., y posteriormente recibió la condecoración Estrella de Bronce por desvelar un código secreto de la Unión Soviética. Después de trabajar durante un año en la RAND Corporation, volvió a la Universidad de Princeton, donde finalizó su doctorado en 1953. Su tesis y trabajos posdoctorales siguieron las ideas del economista y estadístico Francis Ysidro Edgeworth, introduciendo el valor de Shapley y otros conceptos de la teoría de juegos. Recibió el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel en 2012 junto con Alvin E. Roth por su trabajo en la teoría de las asignaciones estables y el diseño de mercado.

El valor de Shapley se define en el contexto de los juegos de utilidad transferible o *juegos TU*, por sus siglas en inglés. Comenzaremos, por tanto, fijando cierta terminología relacionada con estos juegos que necesitaremos más adelante.

1.1. Introducción a los juegos de utilidad transferible

Un juego se puede pensar como una secuencia de movimientos. En cada uno de ellos, uno de los jugadores decide su actuación entre distintas posibilidades. Al final del juego se asigna un pago a los jugadores que depende de las decisiones que todos ellos hayan tomado. Podemos, por tanto, describir un juego como una función que asigna un pago a cada “posición final” posible en el mismo. En el caso de los juegos TU, se pueden formar grupos de jugadores (que denominaremos *coaliciones*) que fuercen determinados repartos. Así pues, un juego TU puede ser definido mediante una función que asigna a cada coalición posible un número real que indica el pago asociado a dicha coalición.

Definición 1.1. Un *juego TU* es un par (N, v) donde N es el conjunto finito de jugadores y $v\colon 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que cumple que $v(\emptyset) = 0$.

La función v se denomina *función característica* del juego. Su dominio es el conjunto de todos los subconjuntos de N, que denotamos por 2^N. Dada una coalición $S \subset N$, $v(S)$ representa el pago asegurado por los jugadores de S, independientemente de las estrategias del resto de jugadores. Se denotará por $G(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con conjunto de jugadores N, y por n la cardinalidad de N. Por simplicidad, en general identificaremos (N, v) con su función característica v.

Ejemplo 1.2. (*Juego del guante*). Tres jugadores están dispuestos a repartirse los beneficios derivados de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante izquierdo, mientras que los jugadores 2 y 3 tienen un guante derecho cada uno. Supongamos que un par de guantes se puede vender por una unidad monetaria. Identificando dinero con utilidad, esta situación se puede modelizar como el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ y $v(12) = v(13) = v(N) = 1$.[1] $\triangleleft$

Veamos ahora una clase de juegos TU especialmente relevante.

Definición 1.3. Sea un juego $v \in G(N)$. Diremos que v es *superaditivo* si, para cualquier par de coaliciones disjuntas $S, T \subset N$, se tiene que $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Se denotará por $SG(N)$ el conjunto de los juegos TU de $G(N)$ que son superaditivos.

Nótese que en un juego superaditivo se generan verdaderos incentivos para la cooperación entre jugadores, ya que la unión de dos grupos disjuntos cualesquiera nunca provoca una disminución de los beneficios obtenidos por separado.

Consideremos ahora las siguientes definiciones:

Definición 1.4. Se dice que un juego $v \in G(N)$ es de *suma constante* si, para todo $S \subset N$,

$$v(S) + v(N \backslash S) = v(N).$$

[1]Por simplicidad, usaremos $v(1)$ para referirnos a $v(\{1\})$, $v(12)$ para $v(\{1, 2\})$, etc.

Definición 1.5. Se dice que un juego $v \in G(N)$ está en *normalización (0,1)* si

1. $v(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$,
2. $v(N) = 1$.

Definición 1.6. Se dice que un juego $v \in G(N)$ en normalización $(0,1)$ es *simple* si, para cada $S \subset N$, tenemos que $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$.

Esencialmente, un juego simple es aquel en el que cada coalición es, o bien ganadora (pago 1), o bien perdedora (pago 0), sin ningún término intermedio. Dentro de estos juegos, distinguimos los juegos de mayoría ponderada:

Definición 1.7. Sea $(p_1, p_2, ..., p_n)$ un vector no negativo, y sea q un número real que satisface

$$0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

El *juego de mayoría ponderada* $[q; p_1, p_2, ..., p_n]$ es el juego simple $v \in G(N)$ definido por

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{i \in S} p_i < q, \\ 1 & \text{si } \sum_{i \in S} p_i \geq q. \end{cases}$$

Ejemplo 1.8. Consideremos el Parlamento de Galicia formado tras las elecciones de septiembre de 2016, cuya composición, de un total de 75 diputados, fue la siguiente: PPdeG (Partido Popular de Galicia) con 41 diputados, PSdeG (Partido dos Socialistas de Galicia) con 14 diputados, EM (En Marea) con 14 diputados y BNG (Bloque Nacionalista Galego) con 6 diputados. Las mayoría de las decisiones del Parlamento, entre ellas la elección del Presidente de la Xunta, se toman por regla de mayoría simple. Así pues, el Parlamento de Galicia puede entenderse como un juego de mayoría ponderada $[q; p_1, p_2, p_3, p_4]$ donde $q = 38$ y los p_i representan el número de escaños de cada partido político (1=PPdeG, 2=PSdeG, 3=EM, 4=BNG). En este juego, $p_1 = 41 \geq q = 38$, por lo que $v(S) = 1$ para toda coalición S que contenga al jugador 1 y $v(S) = 0$ en otro caso. En particular, $v(1) = 1$, por lo que el jugador 1 ostenta todo el poder (se dice que el jugador 1 es un *dictador* para este juego) mientras que los demás no tienen ningún poder de decisión (son *jugadores nulos*, tal y como se definirán más adelante). $\triangleleft$

Definición 1.9. Sean $M_1, M_2, ..., M_n$ n conjuntos disjuntos y no vacíos; sean $w_1, w_2, ..., w_n$ juegos simples en normalización $(0,1)$, con conjuntos de jugadores $M_1, M_2, ..., M_n$, respectivamente; sea $v \in G(N)$ un juego no negativo. Entonces, la *composición* de $w_1, w_2, ..., w_n$ con v, denotada por

$$u = v[w_1, w_2, ..., w_n],$$

es el juego con conjunto de jugadores

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{n} M_j$$

y función característica

$$u(S) = v(\{j \mid w_j(S \cap M_j) = 1\}),$$

para $S \subset M^*$.

Heurísticamente, el juego compuesto u representa una división entre *comités* M_j. Los miembros de M_j eligen un representante mediante el juego w_j; luego, los n representantes juegan el juego v entre ellos.

Ejemplo 1.10. Consideremos en este caso el Colegio Electoral de los Estados Unidos. Cada uno de los 50 estados, además del Distrito de Columbia, tiene asignado un número de compromisarios que depende de la población del estado, siendo 3 el número mínimo. Tras la celebración de las elecciones, los candidatos presidencial y vicepresidencial que reciban la mayoría del voto popular en un estado obtienen la totalidad de los votos por parte de los compromisarios de dicho estado.[2] El número total de compromisarios en el Colegio Electoral es de 538, siendo necesaria una mayoría absoluta de 270 votos electorales para ser presidente. Sea entonces v el juego de mayoría ponderada de 51 jugadores $[270; 55, 38, ..., 3, 3]$, cuyos jugadores son los estados de los EE. UU. Para cada j, M_j representaría el conjunto de votantes del estado j; w_j sería un juego de mayoría simple (i. e., un juego donde gana la coalición con más miembros) con conjunto de jugadores M_j. Así pues, las elecciones presidenciales se pueden entender como un juego simple $u = v[w_1, w_2, ..., w_{51}]$ con conjunto de jugadores

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{51} M_j$$

que consiste en el número total de votantes en los EE. UU. En definitiva, cada w_j es el juego entre los M_j votantes del estado j, v es el juego del Colegio Electoral entre los 51 estados, y u es el juego entre todos los votantes de los EE. UU. Un conjunto $S \subset M^*$ es ganador (i. e., $u(S) = 1$) si contiene un subconjunto de la forma

$$S' = \bigcup_{j \in T} S_j,$$

donde $w_j(S_j) = 1$ para todo $j \in T$ y $v(T) = 1$, siendo T un subconjunto de los 51 estados y cada S_j un subconjunto de M_j. Esto es, un candidato gana si recibe la mayoría del

[2] En los estados de Maine y Nebraska se pueden repartir los votos electorales entre varios candidatos. Obviaremos esta particularidad para no distraer del foco del ejemplo.

voto popular ($w_j(S_j) = 1$) en estados que sumen un total de, como mínimo, 270 votos electorales ($v(T) = 1$). ◁

El objetivo principal de la teoría de juegos TU es proponer, para cada juego TU, una asignación o conjunto de asignaciones que pueda ser aceptado por todos los jugadores involucrados en el problema. Uno de los enfoques para alcanzar este objetivo está basado en la idea de *estabilidad*: se trata de buscar un conjunto de soluciones estable en el sentido de que los acuerdos que cabe esperar que un grupo de jugadores racionales realicen sea un elemento de dicho conjunto. Relacionado con esta idea, se define el siguiente concepto:

Definición 1.11. Sea $v \in G(N)$. Una *imputación* de v es un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface las dos condiciones siguientes:

1. $x_i \geq v(\{i\})$, para todo $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Se denotará por $I(v)$ el conjunto de imputaciones de v.

Así pues, una imputación es una división de $v(N)$ entre todos los jugadores de forma que ningún jugador reciba menos de lo que obtendría por sí mismo. Nótese que, si $v \in SG(N)$, entonces $I(v) \neq \emptyset$. Será deseable que la solución alcanzada sea una imputación, ya que sería una solución estable, en el sentido de que no deja insatisfecho a ningún jugador.

Un segundo enfoque para alcanzar soluciones aceptables por los jugadores está basado en la idea de *ecuanimidad*: se trata de proponer un reparto justo, en el sentido de que se asigne a cada jugador un pago que tenga en cuenta, de alguna manera, su contribución a las ganancias de cada coalición posible. El valor de Shapley surge en el contexto de la búsqueda de un reparto ecuánime.

1.2. Construcción axiomática del valor de Shapley

La aproximación de Shapley [20] es axiomática: su valor está caracterizado de forma única por una serie de propiedades que un reparto ecuánime debería cumplir. Antes de presentar tales propiedades, es necesario dar varias definiciones.

Definición 1.12. Llamamos *valor* a cualquier aplicación $f\colon G(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 1.13. Sea $v \in G(N)$ un juego TU.

1. Decimos que $i \in N$ es un *jugador nulo* de v si, para cada $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.

2. Dos jugadores $i, j \in N$ se denominan *simétricos* si, para cada coalición $S \subset N \backslash \{i, j\}$, se tiene que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Definición 1.14. (*Propiedades de Shapley*). Sea f un valor y consideremos las siguientes propiedades:

1. **Eficiencia:** f satisface la propiedad de eficiencia si, para todo $v \in G(N)$, se tiene que
$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N).$$
Es decir, f debe repartir $v(N)$ entre todos los jugadores.

2. **Jugador nulo:** f satisface la propiedad de jugador nulo si, para todo $v \in G(N)$ y para todo $i \in N$ jugador nulo de v, se tiene que $f_i(v) = 0$. Esto quiere decir que los jugadores nulos, ya que no generan beneficios para ninguna coalición, no deben recibir nada.

3. **Simetría:** f satisface la propiedad de simetría si, para todo $v \in G(N)$ y para todo par de jugadores $i, j \in N$ simétricos en v, se tiene que $f_i(v) = f_j(v)$. Es decir, dos jugadores que aportan los mismos beneficios deben recibir lo mismo.

4. **Aditividad:** f satisface la propiedad de aditividad si, para todo par de juegos $u, v \in G(N)$, se tiene que $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Cabe recordar que un juego es esencialmente una función de valor real, por lo que es posible hablar de la suma de dos o más juegos. La aditividad es básicamente un requerimiento técnico necesario para caracterizar el valor de Shapley de cualquier juego.

Estas son las propiedades de Shapley. Resulta un hecho notable que estas cuatro propiedades básicas sean suficientes para caracterizar un valor único para todos los juegos. Para demostrarlo, es necesario enunciar una serie de lemas previos.

Lema 1.15. *Sea Φ un valor que cumple las propiedades de Shapley. Para cada coalición no vacía $S \subset N$, definimos el juego $w_S \in G(N)$ por*
$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ S \subset T, \\ 0 & \text{si } \ S \not\subset T. \end{cases}$$
Entonces, si s es el número de jugadores en S,
$$\Phi_i(w_S) = \begin{cases} 1/s & \text{si } \ i \in S, \\ 0 & \text{si } \ i \notin S. \end{cases}$$

Demostración. Es fácil ver que todos los jugadores que no forman parte de S son jugadores nulos, por lo que $\Phi_i(w_S) = 0$ para todo $i \notin S$. Análogamente, todos los jugadores que forman parte de S son simétricos entre sí, y por lo tanto $\Phi_i(w_S) = \Phi_j(w_S)$ para todo $i, j \in S$. Como hay s jugadores en S y, por eficiencia, la suma de sus asignaciones es $w_S(N) = 1$, se sigue que $\Phi_i(w_S) = 1/s$ para todo $i \in S$. $\square$

Lema 1.16. *Sea $v \in G(N)$. Existen $2^n - 1$ números reales c_S, con $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, tales que*

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S,$$

donde w_S se define como en el Lema 1.15.

Demostración. Tengamos en cuenta que cada juego $v \in G(N)$ se puede ver como un vector real: $(v(S))_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$. Así pues, podemos pensar en $G(N)$ como un espacio vectorial $(2^n - 1)$-dimensional, con lo que la demostración del lema se reduce a probar que $W(N) = \{w_S \colon S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ es una base de dicho espacio vectorial. Hay $2^n - 1$ elementos en $W(N)$, por lo que es suficiente con ver que son vectores linealmente independientes. En efecto, sean $\alpha_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ y consideremos

$$\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w_S = 0.$$

Supongamos ahora que existe $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$ y asumamos, sin pérdida de generalidad, que no existe $\widetilde{T} \subsetneq T$ tal que $\alpha_{\widetilde{T}} \neq 0$. Tenemos ahora que

$$\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w_S(T) = \alpha_T,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $\alpha_S = 0$ para todo $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, con lo que queda probado que $W(N)$ es una base de $G(N)$. $\square$

Teorema 1.17. *Existe un único valor $\Phi \colon G(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad.*

Demostración. Por el Lema 1.15, la función Φ, que verifica las propiedades de Shapley, está definida de forma única para cada w_S. El Lema 1.16 nos dice que cualquier juego puede ser escrito como una combinación lineal de juegos w_S. Así pues, aplicando la propiedad de aditividad se prueba que Φ está definida de forma única para todo $v \in G(N)$. $\square$

Pasaremos ahora a construir la forma explícita de la función Φ para luego comprobar que efectivamente satisface las propiedades de Shapley. Sabemos por el Lema 1.16 que, para $S \neq \emptyset$,

$$v = \sum_{S \subset N} c_S w_S$$

y por tanto, dado $i \in N$,

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \sum_{S \subset N} c_S \Phi_i(w_S) \\ &= \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} c_S \cdot \frac{1}{s}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sea

$$c_S = \sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T), \tag{1.2}$$

donde t es el número de elementos en T, y probemos que los coeficientes c_S así definidos satisfacen el Lema 1.16. Si U es una coalición cualquiera y $S \neq \emptyset$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} c_S w_S(U) &= \sum_{S \subset U} c_S \\ &= \sum_{S \subset U} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) \\ &= \sum_{T \subset U} \left(\sum_{\substack{S \subset U \\ S \supset T}} (-1)^{s-t} \right) v(T). \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada valor de s entre t y u, habrá $\binom{u-t}{u-s}$ conjuntos S con s elementos tales que $T \subset S \subset U$. Por tanto, la suma comprendida entre paréntesis en la última expresión puede sustituirse por

$$\sum_{s=t}^{u} \binom{u-t}{u-s} (-1)^{s-t}.$$

Esta expresión es, de hecho, la expansión binomial de $(1-1)^{u-t}$. Por tanto, será cero de forma trivial para todo $t < u$, y de la expansión se deduce que será 1 para $t = u$. Así pues, obtenemos que

$$\sum_{\substack{S \subset N \\ S \neq \emptyset}} c_S w_S(U) = v(U)$$

para todo $U \subset N$, satisfaciendo así el Lema 1.16. Sustituyendo la expresión (1.2) en (1.1), tenemos que

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{1}{s}\left(\sum_{T\subset S}(-1)^{s-t}v(T)\right)$$

$$= \sum_{T\subset N}\left(\sum_{\substack{S\subset N\\ T\cup\{i\}\subset S}}(-1)^{s-t}\frac{1}{s}\cdot v(T)\right).$$

Denotemos

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S\subset N\\ T\cup\{i\}\subset S}}(-1)^{s-t}\frac{1}{s}.$$

Es fácil ver que, si $i \notin T'$ y $T = T' \cup \{i\}$, entonces $\gamma_i(T') = -\gamma_i(T)$; todos los términos de la expresión permanecen iguales salvo que $t = t' + 1$, por lo que se produce un cambio de signo. Esto significa que podemos expresar Φ_i de la siguiente forma:

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right].$$

Ahora bien, si $i \in T$, hay exactamente $\binom{n-t}{s-t}$ coaliciones S con s elementos tales que $T \subset S$. Así pues,

$$\gamma_i(T) = \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\frac{1}{s}$$

$$= \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\int_0^1 x^{s-1}dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{s=t}^{n}(-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}x^{s-1}dx$$

$$= \int_0^1 x^{t-1}\sum_{s=t}^{n}\binom{n-t}{s-t}(-1)^{s-t}x^{s-t}dx$$

$$= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx.$$

Notemos que esta integral es la función beta, que se define de la forma siguiente:

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Por tanto,

$$\gamma_i(T) = B(t, n-t+1) = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!},$$

y de este modo tenemos que

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right]. \tag{1.3}$$

Esta es la fórmula explícita del valor de Shapley. Ahora podemos probar que Φ satisface las propiedades de Shapley. Consideremos $v \in G(N)$.

Eficiencia:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\Phi_i(v) &= \sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T)-v(T\backslash\{i\})\right]\\
&= \sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T)-\sum_{i\in N}\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T\backslash\{i\})\\
&= \sum_{T\subset N} t\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T)-\sum_{\substack{T\subset N\\ T\neq N}}(n-t)\frac{t!(n-t-1)!}{n!}v(T)\\
&= v(N).
\end{aligned}$$

Jugador nulo: Si $i \in N$ es jugador nulo de v, entonces $v(T) = v(T\backslash\{i\})$ para todo $T \subset N$, y por tanto $\Phi_i(v) = 0$.

Simetría: Consideremos $i, j \in N$ simétricos en v.

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v)-\Phi_j(v) &= \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T)-v(T\backslash\{i\})\right]\\
&\quad -\sum_{\substack{T\subset N\\ j\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T)-v(T\backslash\{j\})\right]\\
&= \sum_{\substack{T\subset N\\ i,j\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T)-v(T\backslash\{i\})-v(T)+v(T\backslash\{j\})\right]\\
&= \sum_{\substack{T\subset N\\ i,j\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T\backslash\{j\})-v(T\backslash\{i\})\right]=0.
\end{aligned}$$

Nótese que, como i, j son simétricos en v, se tiene que $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para todo $S \subset N\backslash\{i, j\}$. Tomando $S = T\backslash\{i, j\}$, $v(S \cup \{j\}) = v(T\backslash\{i\})$ y $v(S \cup \{i\}) = v(T\backslash\{j\})$.

Aditividad: Consideremos $v, w \in G(N)$.

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v) + \Phi_i(w) &= \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right] \\
&+ \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[w(T) - w(T\backslash\{i\})\right] \\
&= \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T) + w(T) - v(T\backslash\{i\}) - w(T\backslash\{i\})\right] \\
&= \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[(v+w)(T) - (v+w)(T\backslash\{i\})\right] = \Phi_i(v+w).
\end{aligned}$$

Queda así comprobada la existencia del valor que postulaba el Teorema 1.17.

En el caso de que v sea un juego simple, el cálculo del valor de Shapley se simplifica especialmente. El término $v(T) - v(T\backslash\{i\})$ siempre tendrá valor 0 o 1, siendo 1 cuando T sea una coalición ganadora pero $T\backslash\{i\}$ no. Así pues, podemos escribir

$$\Phi_i(v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_i} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!},$$

donde $\mathcal{T}_i$ es el conjunto de todas las coaliciones ganadoras T tales que $T\backslash\{i\}$ es perdedora.

Ejemplo 1.18. Consideremos una empresa con cuatro accionistas que tienen 10, 20, 30 y 40 acciones de un total de 100, respectivamente. Para tomar una decisión es necesaria la aprobación de accionistas que sostengan una mayoría simple de las acciones. Podemos tratar esta situación como un juego de 4 personas en el que las coaliciones ganadoras son: $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ y $\{1,2,3,4\}$.

Para hallar Φ_1[3], notemos que la única coalición ganadora T tal que $T\backslash\{1\}$ es perdedora es $\{1,2,3\}$. Por tanto, $t = 3$ y

$$\Phi_1 = \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Las coaliciones ganadoras que se vuelven perdedoras si eliminamos al jugador 2 son $\{2,4\}$, $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,4\}$. Por tanto,

$$\Phi_2 = \frac{1!2!}{4!} + \frac{2!1!}{4!} + \frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{4}.$$

Del mismo modo, observamos que $\mathcal{T}_3 = \{\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\}\}$ y $\mathcal{T}_4 = \{\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$, obteniendo que $\Phi_3 = \frac{1}{4}$ y $\Phi_4 = \frac{5}{12}$.

[3]Cuando no haya posibilidad de ambigüedad, escribiremos Φ_i en lugar de $\Phi_i(v)$ para evitar una notación demasiado prolija.

Así pues, el valor de Shapley es el vector $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right)$. Comparándolo con el vector de la proporción de acciones, que sería $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$, se pueden sacar varias conclusiones.

En primer lugar, nótese que el valor es igual para los jugadores 2 y 3 a pesar de que este último tiene más acciones. Esto se debe a que los jugadores 2 y 3 son simétricos: ambos son capaces, por sí solos, de hacer ganadoras las mismas coaliciones que no incluyen a ninguno de ellos: $\{4\}$ y $\{1, 4\}$. Por tanto, el mayor número de acciones del jugador 3 no supone para él ningún poder de negociación añadido.

Es notorio también el hecho de que el poder del jugador 4 es mayor que su proporción de acciones, mientras que el poder del jugador 1 es menor. $\triangleleft$

Proposición 1.19. *Para todo $v \in SG(N)$, se tiene que $\Phi(v) \in I(v)$, es decir, el valor de Shapley de v es una imputación.*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que la suma de los coeficientes $\gamma_i(T)$ es igual a 1.

$$\sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \gamma_i(T) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} = 1.$$

Intuitivamente, esto tiene sentido ya que el numerador de $\gamma_i(T)$ es el número de permutaciones de N en las que i es precedido por los demás elementos de T. Haciendo la suma sobre todos los $T \subset N$ que contienen a i, se obtiene el número total de permutaciones posibles de N, que es también el denominador de $\gamma_i(T)$.

Ahora bien, como v es superaditivo, $v(T) - v(T \backslash \{i\}) \geq v(\{i\})$ para todo $i \in N$, y en consecuencia $\Phi_i(v) \geq v(\{i\})$. Teniendo en cuenta además que Φ es eficiente, tenemos que $\Phi(v) \in I(v)$. $\square$

Observación 1.20. Además del tratamiento axiomático, el valor de Shapley puede interpretarse heurísticamente de la siguiente forma: supongamos que los n jugadores acuerdan reunirse en un mismo lugar, y supongamos también que los distintos órdenes de llegada (permutaciones de los jugadores) son igualmente probables, esto es, $1/n!$ cada uno. Si a cada jugador i se le asigna como recompensa su contribución marginal a la coalición formada por los jugadores que llegaron antes que él (i. e., $v(T) - v(T \backslash \{i\})$), entonces $\Phi_i(v)$ es la recompensa esperada para el jugador i.

Ejemplo 1.21. Consideremos el juego del guante definido en el Ejemplo 1.2. La tabla siguiente recoge los vectores de contribuciones marginales de cada jugador para los distintos órdenes de llegada posibles:

Orden	1	2	3
123	0	1	0
132	0	0	1
213	1	0	0
231	1	0	0
312	1	0	0
321	1	0	0
Φ	$2/3$	$1/6$	$1/6$

La contribución marginal es 1 para el jugador que, a su llegada, aporte el guante que faltaba. Al promediar, se obtiene el valor de Shapley del juego: $\Phi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. $\triangleleft$

Capítulo 2

Extensiones multilineales

Uno de los principales problemas que presenta el valor de Shapley es que su computación involucra sumas de un número muy elevado de términos. Para facilitar la evaluación del valor, Owen [14] introduce el concepto de *extensión multilineal* de un juego.

2.1. Definición y relación con el valor de Shapley

Hemos visto que un juego con n jugadores no es más que una función de valor real v cuyo dominio es 2^N, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $N = \{1, ..., n\}$. Sin embargo, 2^N también puede interpretarse como el conjunto de vectores $(x_1, x_2, ..., x_n)$ cuyas componentes son 0 o 1. Así, $2^N = \{0, 1\}^N$ es el conjunto de los vértices del cubo unidad n-dimensional. La función característica v es, por tanto, una función real definida en los vértices del cubo. Parece razonable tratar de extenderla a todo el cubo:

$$[0, 1]^N = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid 0 \leq x_i \leq 1, \quad \forall i \in N\}.$$

Definición 2.1. Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. La *extensión multilineal* (EML) de v es la función real f de n variables definida por

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subset N} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) \right\} v(S) \tag{2.1}$$

para $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$.

Ejemplo 2.2. Consideremos de nuevo el juego del guante del Ejemplo 1.2. Son ganadoras las coaliciones $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$. Así pues, su extensión multilineal es

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (1 - x_3) + x_1 x_3 (1 - x_2) + x_1 x_2 x_3,$$

o, equivalentemente,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3.$$

$\triangleleft$

Para justificar el nombre de f, veamos que: (a) f es multilineal (i. e., lineal en cada x_i), (b) f coincide con v allá donde v está definida y (c) f es la única función con estas propiedades.

Es fácil ver que la función f es multilineal. Nótese que todos los términos $\prod_{i\in S} x_i$ y $\prod_{i\notin S}(1 - x_i)v(S)$ son lineales en cada variable. Al ser f la suma de todos estos términos, es también lineal en cada variable y por tanto multilineal.

Veamos ahora que f es una extensión de v. Para cada $S \subset N$, sea α^S el S-vértice del cubo n-dimensional, i. e.,

$$\alpha_i^S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Entonces,

$$f(\alpha^S) = \sum_{T\subset N} \left\{ \prod_{i\in T} \alpha_i^S \prod_{i\notin T}(1 - \alpha_i^S) \right\} v(T).$$

Nótese que, si $T \neq S$, el término entre llaves en la expresión anterior se anula. En efecto, si existe algún $i \in T\backslash S$, se tiene que $\alpha_i^S = 0$; si existe algún $i \in S\backslash T$, se tiene que $1 - \alpha_i^S = 0$. En cualquier caso, al menos uno de los factores es nulo y por tanto se anula todo el producto. Sin embargo, si $T = S$, el término entre llaves es igual a 1 y tenemos que

$$f(\alpha^S) = v(S), \tag{2.2}$$

con lo que f es, de hecho, una extensión de v.

Para mostrar la unicidad, recordemos en primer lugar que una función multilineal polinómica de n variables tiene la forma

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{T\subset N} C_T \prod_{i\in T} x_i,$$

es decir, depende de las 2^n constantes C_T. Sustituyendo α^S, se obtiene que

$$f(\alpha^S) = \sum_{T\subset S} C_T,$$

con lo que la condición (2.2) se puede convertir en

$$\sum_{T\subset S} C_T = v(S)$$

para todo $S \subset N$. Esto no es más que un sistema de 2^n ecuaciones lineales con 2^n incógnitas C_T. Sabemos que puede ser resuelto para cualquier $v(S)$, lo cual para un sistema lineal significa que la matriz de coeficientes correspondiente es no singular, por lo que el sistema tiene solución única. Así, se concluye que v tiene una única EML f, dada por la Definición 2.1.

Mostremos ahora la relación entre la EML de un juego y su valor de Shapley. Sea f_i la derivada parcial de f con respecto de la i-ésima variable, x_i.

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \prod_{\substack{j\in T\\ j\neq i}} x_j \prod_{j\notin T}(1-x_j)v(T) - \sum_{\substack{S\subset N\\ i\notin S}} \prod_{j\in S} x_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}}(1-x_j)v(S). \tag{2.3}$$

Sea $S = T\backslash\{i\}$ en la expresión anterior. Tenemos que

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \prod_{\substack{j\in T\\ j\neq i}} x_j \prod_{j\notin T}(1-x_j)\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right].$$

Tomemos, en particular, $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$, y sea t la cardinalidad de T. Entonces,

$$f_i(x, x, ..., x) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} x^{t-1}(1-x)^{n-t}\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right]. \tag{2.4}$$

Integrando, obtenemos

$$\int_0^1 f_i(x, x, ..., x)dx = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \left[\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx\right]\left[v(T) - v(T\backslash\{i\})\right],$$

es decir,

$$\int_0^1 f_i(x, x, ..., x)dx = \Phi_i(v). \tag{2.5}$$

Observación 2.3. Nótese que, si en (2.3) consideramos $T = S \cup \{i\}$, obtenemos que

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\notin S}} \prod_{j\in S} x_j \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq i}}(1-x_j)\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right]. \tag{2.6}$$

Fijando nuevamente $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$ y siendo s la cardinalidad de S, tenemos que

$$f_i(x, x, ..., x) = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\notin S}} x^{s}(1-x)^{n-s-1}\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right],$$

lo cual, tras integrar, proporciona otra fórmula habitual para el valor de Shapley:

$$\Phi_i(v) = \int_0^1 f_i(x, x, ..., x)dx = \sum_{\substack{S\subset N\\ i\notin S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v(S\cup\{i\} - v(S))\right].$$

Ejemplo 2.4. Consideremos nuevamente el juego del guante, del que obtuvimos la EML en el Ejemplo 2.2:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3.$$

Tenemos que

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3 - x_2x_3,$$

de modo que

$$f_1(x,x,x) = 2x - x^2,$$

e, integrando,

$$\Phi_1 = \int_0^1 f_1(x,x,...,x)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Del mismo modo,

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_1x_3,$$

$$f_2(x,x,x) = x - x^2,$$

de donde se obtiene que

$$\Phi_2 = \int_0^1 f_2(x,x,...,x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Por simetría, Φ_3 es también $\frac{1}{6}$. Así pues, hemos obtenido con este método el mismo valor de Shapley que en el Ejemplo 1.21. $\triangleleft$

2.2. Interpretación probabilística y aplicaciones

La EML de un juego v admite una interpretación probabilística. Sea $\mathfrak{S}$ una coalición formada de manera aleatoria y supongamos que el evento A_i definido por $\{i \in \mathfrak{S}\}$ tiene probabilidad x_i para $i = 1,...,n$, y que estas probabilidades son independientes. Entonces, para cada $S \subset N$ se tiene que

$$\text{Prob}\{\mathfrak{S} = S\} = \prod_{i\in S} x_i \prod_{i\notin S}(1-x_i),$$

y por tanto,

$$E[v(\mathfrak{S})] = f(x_1,...,x_n).$$

Heurísticamente, podemos decir que si cada jugador $i \in N$ tiene probabilidad x_i de unirse a la coalición, entonces la coalición $\mathfrak{S}$ puede esperar un pago de $f(x_1,...,x_n)$.

Teorema 2.5. *Sea v un juego de suma constante y f su EML. Entonces, para cualquier $(x_1, x_2, ..., x_n)$, se tiene que*

$$f(1-x_1, 1-x_2, ..., 1-x_n) = v(N) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Demostración. Empleando la interpretación probabilística de las EML, es fácil ver que la probabilidad de que se forme la coalición $N \backslash S$ dadas las probabilidades $1 - x_i$ es la misma que la probabilidad de que se forme la coalición S dadas las probabilidades x_i. Así pues, tenemos que

$$f(1-x_1, 1-x_2, ..., 1-x_n) = E[v(N \backslash \mathfrak{S})],$$

donde $\mathfrak{S}$ es la coalición aleatoria definida anteriormente. Entonces,

$$f(1-x_1, 1-x_2, ..., 1-x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n) = E[v(N \backslash \mathfrak{S}) + v(\mathfrak{S})].$$

Ahora bien, v es un juego de suma constante, por tanto $v(N \backslash S) + v(S) = v(N)$ para todo $S \subset N$. Con esto,

$$f(1-x_1, 1-x_2, ..., 1-x_n) + f(x_1, x_2, ..., x_n) = v(N),$$

como queríamos demostrar.

□

En la sección anterior obtuvimos el valor de Shapley integrando las derivadas parciales de f a lo largo de la diagonal principal $x_1 = x_2 = ... = x_n$ del cubo $[0, 1]^N$. Sin embargo, esta nueva evaluación contiene el mismo número de sumas que la fórmula original además de una integral, con lo que su computación no se ha simplificado en absoluto. No obstante, la interpretación probabilística de las EML nos permite aplicar algunos teoremas de la teoría de la probabilidad. En particular, será de especial utilidad el *teorema central del límite*, que establece que la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas puede aproximarse a una distribución normal para un n lo suficientemente grande.

Consideremos nuevamente la ecuación (2.6). En ella, el coeficiente de $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ es

$$\prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq i}} (1 - x_j),$$

que podemos interpretar como la probabilidad de que $\mathfrak{S} = S$, donde $\mathfrak{S}$ es un subconjunto aleatorio de $N \backslash \{i\}$, cuya distribución viene dada por el hecho de que, para cada $j \neq i$,

$$\text{Prob}\{j \in \mathfrak{S}\} = x_j,$$

y todos los eventos $A_j : \{j \in \mathfrak{S}\}$ son independientes. Por tanto, podemos escribir que

$$f_i(\boldsymbol{x}) = E[v(\mathfrak{S} \cup \{i\}) - v(\mathfrak{S})]. \tag{2.7}$$

Supongamos ahora que v es un juego simple en normalización $(0, 1)$. Esto quiere decir que $v(\mathfrak{S} \cup \{i\}) - v(\mathfrak{S})$ es igual a 1 si $\mathfrak{S}$ pierde pero $\mathfrak{S} \cup \{i\}$ gana, y es 0 en cualquier otro caso. Así pues,

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \text{Prob}\{\mathfrak{S} \text{ pierde}, \mathfrak{S} \cup \{i\} \text{ gana}\}.$$

Supongamos, además, que v es un juego de mayoría ponderada representado por $[q; p_1, ..., p_n]$. Tenemos que

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \text{Prob}\{q - p_i \leq Y < q\},$$

donde Y es la variable aleatoria

$$Y = \sum_{j \in \mathfrak{S}} p_j,$$

o, equivalentemente,

$$Y = \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} Z_j$$

donde Z_j es una variable aleatoria igual a p_j si $j \in \mathfrak{S}$ e igual a 0 en caso contrario. Es fácil ver que Z_j tiene media $p_j x_j$ y varianza $p_j^2 x_j (1 - x_j)$. Como las variables Z_j son independientes, Y tiene media y varianza

$$\mu(Y) = \sum_{j \neq i} p_j x_j,$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_{j \neq i} p_j^2 x_j (1 - x_j).$$

La distribución de Y, que es la suma de $n-1$ variables aleatorias, en general no es fácil de obtener. Sin embargo, bajo ciertas condiciones (principalmente, que n sea lo suficientemente grande y ninguna variable Z_j tenga una varianza considerablemente mayor que las demás), podemos aplicar el teorema central del límite y aproximar Y por una variable aleatoria con distribución normal. Concluimos de este modo que $f_i(\boldsymbol{x})$ es aproximadamente igual a la probabilidad de que una variable aleatoria normal $\tilde{Y}$, con media $\mu(Y)$ y varianza $\sigma^2(Y)$, satisfaga

$$q - p_i - \frac{1}{2} \leq \tilde{Y} \leq q - \frac{1}{2},$$

donde el término $\frac{1}{2}$ se incluye como corrección de continuidad, al estar aproximando una variable aleatoria discreta con valores enteros por una variable continua. En el caso particular $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$, la media y la varianza toman la siguiente forma:

$$\mu(Y) = x \sum_{j \neq i} p_j,$$

$$\sigma^2(Y) = x(1-x)\sum_{j\neq i} p_j^2.$$

Así pues, podemos integrar numéricamente esta probabilidad para obtener una aproximación del valor de Shapley.

Ejemplo 2.6. Volvamos al juego del guante explicado en el Ejemplo 1.2, pero esta vez generalizado, para ilustrar la utilidad de la interpretación probabilística de las EML. Consideremos L y R dos conjuntos disjuntos de l y r elementos respectivamente, y sea $N = L \cup R$. Cada miembro de L tiene un guante izquierdo y cada miembro de R, uno derecho. El juego del guante v asociado a estos conjuntos viene definido por

$$v(S) = \text{mín}\{|S \cap R|, |S \cap L|\},$$

para todo $S \subset N$, ya que $v(S)$ es el número total de pares de guantes que se pueden formar con los miembros de S.

Asumamos ahora que $i \in R$ y consideremos la ecuación (2.7). Es fácil ver que, para $i \notin S$, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ será igual a 1 si $s_l > s_r$ y 0 en otro caso, donde $s_l = |S \cap L|$ y $s_r = |S \cap R|$. Por tanto,

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \text{Prob}\{s_l > s_r\},$$

donde, en este caso, $s_l = |\mathfrak{S} \cap L|$ y $s_r = |\mathfrak{S} \cap R|$.

Sea $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$; s_l es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de parámetros l y x (es decir, $s_l \sim \text{Bin}(l, x)$), mientras que s_r sigue una distribución $\text{Bin}(r-1, x)$. Asumiendo que l y r son grandes, podemos aplicar el teorema central del límite para aproximarlas por variables aleatorias con distribución normal con misma media y varianza. Su diferencia $Y = s_l - s_r$ tiene la media y varianza siguientes:

$$\mu(Y) = \mu(s_l) - \mu(s_r) = lx - (r-1)x = (l-r+1)x,$$

$$\sigma^2(Y) = \sigma^2(s_l) + \sigma^2(s_r) = lx(1-x) + (r-1)x(1-x) = (l+r-1)x(1-x).$$

Así pues, aplicando la corrección de continuidad, obtenemos la siguiente aproximación para los $i \in R$:

$$f_i(x, x, ..., x) \approx \text{Prob}\{Y \geq \tfrac{1}{2}\},$$

donde Y es una variable aleatoria normal con la media y varianza calculadas arriba. Para los $i \in L$, tan solo hay que intercambiar los parámetros r y l en dichas expresiones. Para calcular el valor de Shapley aplicamos la fórmula (2.5), integrando numéricamente para $0 \leq x \leq 1$.

La siguiente función creada con el lenguaje de programación R nos permite aproximar el valor de Shapley para el juego del guante generalizado:

```
guante<-function(r,l){

   fr<-function(x){
      media=(l-r+1)*x;
      desv_tip=sqrt((l+r-1)*x*(1-x));
      fi=1-pnorm(0.5,media,desv_tip);
      return(fi)
   }
   shapley_r=integrate(fr,0,1)$value
   print(paste("Valor de Shapley para jugadores de R=",shapley_r))

   fl<-function(x){
      media=(r-l+1)*x;
      desv_tip=sqrt((r+l-1)*x*(1-x));
      fi=1-pnorm(0.5,media,desv_tip);
      return(fi)
   }
   shapley_l=integrate(fl,0,1)$value
   print(paste("Valor de Shapley para jugadores de L=",shapley_l))
}
```

Evaluando para $r = 96$ y $l = 101$, por ejemplo, obtenemos que $\Phi_i = 0{,}66394$ para $i \in R$ y $\Phi_i = 0{,}32056$ para $i \in L$. Nótese que $0{,}66394 \cdot 96 + 0{,}32056 \cdot 101 \approx 96$, debido a la propiedad de eficiencia. Se puede apreciar que, a pesar de que el exceso de guantes izquierdos es relativamente pequeño, la ventaja que obtienen los miembros de R es bastante grande en comparación. $\triangleleft$

2.3. Extensiones multilineales de juegos compuestos

Consideramos, a continuación, el comportamiento de las EML bajo la composición de juegos. Para los juegos simples $w_1, w_2, ..., w_n$ en normalización $(0, 1)$ con conjuntos de jugadores $M_1, M_2, ..., M_n$ y el juego no negativo $v \in G(N)$, con $N = \{1, 2, ..., n\}$, se dio en la Definición 1.9 la fórmula

$$u(S) = v(\{j \mid w_j(S \cap M_j) = 1\}), \tag{2.8}$$

para $S \subset M^* = \bigcup_{j \in N} M_j$, que define el juego compuesto $u = v[w_1, ..., w_n]$. Consideremos, sin embargo, la fórmula

$$u(S) = \sum_{T \subset N} \prod_{j \in T} w_j(S_j) \prod_{j \notin T} [1 - w_j(S_j)] \, v(T), \tag{2.9}$$

o, equivalentemente,

$$u(S) = f(w_1(S_1), ..., w_n(S_n)), \tag{2.10}$$

donde $S_j = S \cap M_j$ y f es la EML de v. Si los juegos w_j son simples, vemos que

$$(w_1(S_1), w_2(S_2), ..., w_n(S_n)) = \alpha^T,$$

donde $T \subset N$ viene dado por $T = \{j \mid w_j(S_j) = 1\}$, y así,

$$u(S) = f(\alpha^T) = v(T).$$

De este modo, vemos que las fórmulas (2.8) y (2.9) coinciden para juegos simples. No obstante, la fórmula (2.9) es aplicable también a juegos no simples sujetos a las siguientes condiciones:

C1. $w_j(S) \geq 0$, para todo $S \subset M_j$,

C2. $w_j(M_j) = 1$, para todo $j \in N$.

Así pues, la fórmula (2.9) es una generalización de (2.8).

Sea g_j, con $j \in N$, la EML de w_j. Entonces, g_j es una función que lleva el cubo $[0,1]^{M_j}$ a los números reales. De hecho, por las condiciones C1 y C2, la imagen de g_j es el intervalo unidad $[0,1]$. El producto cartesiano $g = g_1 \times g_2 \times ... \times g_n$ es una función cuyo dominio es

$$[0,1]^{M_1} \times [0,1]^{M_2} \times ... \times [0,1]^{M_n} = [0,1]^{M^*}$$

y cuya imagen es $[0,1]^N$. La función g viene dada por

$$g(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x^1}), g_2(\boldsymbol{x^2}), ..., g_n(\boldsymbol{x^n})),$$

donde $\boldsymbol{x^j}$ es la restricción del vector $\boldsymbol{x}$ a los índices $i \in M_j$.

La EML de v, f, tiene como dominio $[0,1]^N$. Podemos, por tanto, formar la función compuesta

$$h(\boldsymbol{x}) = f(g_1(\boldsymbol{x^1}), g_2(\boldsymbol{x^2}), ..., g_n(\boldsymbol{x^n})),$$

definida en el cubo $[0,1]^{M^*}$. Veamos ahora que h es una función multilineal de las variables x_i, $i \in M^*$. Supongamos que $i \in M_j$. Por hipótesis, los conjuntos M_k son disjuntos, y por tanto los $g_k(\boldsymbol{x^k})$, para $k \neq j$, no dependen de x_i. Por consiguiente,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

o, denotando mediante subíndices la diferenciación parcial,

$$h_i(\boldsymbol{x}) = f_j(g(\boldsymbol{x}))(g_j)_i(\boldsymbol{x^j}).$$

Ahora bien, como g_j es multilineal, su derivada $(g_j)_i$ no depende de x_i. Por ser f también multilineal, su derivada f_j solo depende de los $g_k(\boldsymbol{x^k})$, $k \neq j$, así que no depende de x_i. Por tanto, $h_i(\boldsymbol{x})$ no depende de x_i y se concluye que h es lineal con respecto a x_i. Esto es cierto para todo $i \in M^*$, probando así que h es multilineal.

Al ser h multilineal, es la extensión de una función real definida en los vértices del cubo. De hecho, es la extensión del juego compuesto u:

Teorema 2.7. *Sea v un juego no negativo de $G(N)$, sean $w_1, w_2, ..., w_n$ unos juegos que cumplen las condiciones C1 y C2 y sea $u = v[w_1, ..., w_n]$. Sean $f, g_1, ..., g_n$ las EML de $v, w_1, ..., w_n$, respectivamente, y sea $h = f \circ g$. Entonces, h es la extensión multilineal de u.*

Demostración. Evaluando h en el S-vértice, α^S, del cubo $[0,1]^{M^*}$, tenemos que, para $S \subset M^*$,

$$h(\alpha^S) = f\left(g_1(\alpha^{S_1}), g_2(\alpha^{S_2}), ..., g_n(\alpha^{S_n})\right),$$

donde $S_j = S \cap M_j$ y α^{S_j} es la restricción de α^S a los índices $i \in M_j$. Sabemos por (2.2) que $g_j(\alpha^{S_j}) = w_j(S_j)$, y por tanto

$$h(\alpha^S) = f(w_1(S_1), w_2(S_2), ..., w_n(S_n)),$$

o, por (2.10),

$$h(\alpha^S) = u(S).$$

Hemos visto que h coincide con u en los vértices del cubo en los que ambas están definidas, probando así que h es la EML de u. □

Este teorema muestra que la composición de juegos se corresponde con la composición de sus EML. Ya que las EML están íntimamente relacionadas con el valor de Shapley, cabría esperar que dicho valor también admitiese la composición, es decir, que se cumpliese que $\Phi_i(u) = \Phi_i(w_j)\Phi_j(v)$, para $i \in M_j$. Sin embargo, en general, esto no es cierto. Recordemos que, para $i \in M_j$,

$$h_i(\boldsymbol{x}) = f_j(g(\boldsymbol{x}))(g_j)_i(\boldsymbol{x^j}).$$

Tomando $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$,

$$h_i(x, x, ..., x) = f_j(y(x))(g_j)_i(x, x, ..., x),$$

donde, para $k \in N$,

$$y_k(x) = g_k(x, x, ..., x). \tag{2.11}$$

Así,

$$\Phi_i(u) = \int_0^1 f_j(y(x))(g_j)_i(x, x, ..., x)dx, \tag{2.12}$$

donde

$$\Phi_j(v) = \int_0^1 f_j(x, x, ..., x)dx$$

y

$$\Phi_i(w_j) = \int_0^1 (g_j)_i(x, x, ..., x)dx.$$

Podemos observar dos razones por las que el valor de Shapley no admite, en general, la composición: en primer lugar, generalmente, $y(x)$ no es igual a $(x, x, ..., x)$; en segundo lugar, aun en caso de que $y_k(x) = x$ para todo $k \in N$, el producto de dos integrales no es, en general, igual a la integral del producto de sus integrandos.

En todo caso, la fórmula (2.12) nos permite calcular el valor de Shapley para juegos compuestos.

Ejemplo 2.8. El Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas consta de 15 miembros, 5 de los cuales son permanentes (EE. UU., Rusia, Reino Unido, Francia y China). Para aprobar una moción es necesaria la aprobación de todos los miembros permanentes, además de al menos 4 votos positivos de entre los 10 miembros no permanentes. Tenemos así un juego compuesto de 15 jugadores $u = v[w_1, w_2]$ donde w_1 es un juego simple de 5 jugadores en el que solo es ganadora la coalición total ($w_1(M_1) = 1$), w_2 es un juego simple de 10 jugadores en el que es ganadora cualquier coalición de cuatro jugadores o más, y v es un juego simple de dos jugadores en el que solo la coalición de ambos es ganadora.

Para w_1, tenemos la extensión multilineal

$$g_1(x_1, ..., x_5) = x_1x_2x_3x_4x_5,$$

y por tanto

$$y_1(t) = t^5.$$

Obtengamos directamente para w_2 la derivada parcial $(g_2)_i$ para los puntos $\boldsymbol{x} = (x, x, ..., x)$ empleando la fórmula (2.4). Tenemos, para todo $i \in M_2 = \{1, 2, ..., 10\}$,

$$(g_2)_i(x, x, ..., x) = \sum_{T \in \mathcal{T}_i} x^{t-1}(1-x)^{10-t},$$

donde $\mathcal{T}_i$ es el conjunto de todas las coaliciones $T \subset M_2$ tales que T gana pero $T\backslash\{i\}$ pierde y t es la cardinalidad de T. Esto es, $\mathcal{T}_i$ es el conjunto de coaliciones de exactamente 4 jugadores que contienen al jugador i. Hay $\binom{9}{3} = 84$ elementos en $\mathcal{T}_i$, todos ellos con $t = 4$, por lo que

$$(g_2)_i(x, x, ..., x) = 84x^3(1-x)^6.$$

Finalmente, v tiene la extensión

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2.$$

Empleando la fórmula (2.12) tenemos que, para todo $i \in M_2$,

$$\begin{aligned}
\Phi_i(u) &= \int_0^1 f_2(y(x))(g_2)_i(x, x, ..., x)dx \\
&= \int_0^1 y_1(x)(g_2)_i(x, x, ..., x)dx \\
&= \int_0^1 x^5 84 x^3 (1-x)^6 dx \\
&= 84 \int_0^1 x^8 (1-x)^6 dx \\
&= 84 \cdot B(9,7) = 84 \frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145}.
\end{aligned}$$

Ya que la suma del valor de Shapley de todos los jugadores de u, por eficiencia, debe valer 1 y en M_2 hay 10 jugadores, queda un total de $1 - 40/2145 = 2105/2145$ para los jugadores de M_1. Es claro que los 5 jugadores de M_1 son simétricos, así que cada uno recibe una quinta parte del total, es decir 421/2145. Así pues, el juego u tiene el siguiente valor de Shapley:

$$\Phi_i(u) = \begin{cases} 421/2145 = 0{,}19627 & \text{si } i \text{ es un miembro permanente,} \\ 4/2145 = 0{,}00186 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es evidente, por tanto, que los miembros permanentes ostentan prácticamente todo el poder del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas. ◁

Capítulo 3

Otros valores relacionados con el valor de Shapley

A lo largo del último medio siglo se han definido en teoría de juegos muchos otros valores. En este capítulo se describirán algunos de ellos y se analizará su relación con el valor de Shapley.

3.1. El índice de poder de Banzhaf-Coleman

Fue introducido en 1946 por Lionel Penrose [17] y redefinido en décadas posteriores por John F. Banzhaf [4] y James S. Coleman [7]. El concepto de *índice de poder* se aplica a un valor cuando se emplea en el contexto de los juegos simples, los cuales a menudo modelizan problemas de votación.

Definición 3.1. Sea v un juego simple en normalización $(0,1)$. Un conjunto $S \subset N$ se denomina *swing* para el jugador $i \in S$ si se cumple que $v(S) = 1$ y $v(S \backslash \{i\}) = 0$.

Definición 3.2. Sea θ_i el número de *swings* para el jugador $i \in N$. Se define el *índice de Banzhaf-Coleman normalizado* como

$$\beta_i(v) = \frac{\theta_i}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j}.$$

Es decir, el índice de poder para el jugador i es la fracción de todos los *swings* existentes que el jugador i puede realizar.

Ejemplo 3.3. Sea v el juego de los cuatro accionistas del Ejemplo 1.18. Nótese que el conjunto $\mathcal{T}_i$, definido como el conjunto de todas las coaliciones ganadoras T tales que $T \backslash \{i\}$ es perdedora, es el conjunto de *swings*; es decir, $\theta_i = |\mathcal{T}_i|$. Así pues, obtenemos los valores $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_3 = 3$ y $\theta_4 = 5$, y el índice de poder de Banzhaf-Coleman normalizado para este juego es

$$\beta(v) = \left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{12}\right).$$

En este caso, el índice coincide con el valor de Shapley. Esto no ocurre así en general. $\triangleleft$

Consideremos ahora la siguiente expresión de θ_i:

$$\theta_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} [v(S) - v(S \backslash \{i\})].$$

Nótese que, si v es un juego simple, $v(S) - v(S \backslash \{i\})$ será 0 excepto cuando S sea un *swing* para el jugador i, en cuyo caso será 1. Por tanto, esta expresión es coherente con la definición original de θ_i, siendo además aplicable para cualquier juego TU no necesariamente simple. Consideremos ahora

$$\psi(v) = 2^{1-n}\theta(v),$$

o, equivalentemente,

$$\psi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S) - v(S \backslash \{i\})].$$

Esta es la expresión del índice de poder de Banzhaf-Coleman para un juego TU cualquiera. Al compararla con la fórmula del valor de Shapley (1.3), se puede ver que existe una cierta relación entre ellas: ambas dan medias ponderadas de las contribuciones marginales $v(S) - v(S \backslash \{i\})$ del jugador i a las posibles coaliciones. La diferencia reside en los coeficientes ponderantes utilizados: en el caso del valor de Shapley, estos varían según el tamaño de S; para el índice, todos ellos son iguales.

Considerando la expresión (2.4), es fácil ver que

$$\psi_i(v) = f_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right), \tag{3.1}$$

donde f es la EML de v y f_i es su derivada parcial i-ésima.

Ejemplo 3.4. En el Ejemplo 2.2 obtuvimos la EML para el juego del guante de tres jugadores:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi_1 = f_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \\
\psi_2 = f_2\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}, \\
\psi_3 = f_3\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Nótese que en este juego el índice de poder de Banzhaf-Coleman es distinto al valor de Shapley, obtenido en el Ejemplo 1.21. $\triangleleft$

De manera análoga a como se hizo con el valor de Shapley, se puede probar que el índice de Banzhaf-Coleman cumple las propiedades de jugador nulo y simetría. Consideremos ahora las siguientes propiedades relacionadas con la composición de juegos que, en general, el valor de Shapley no cumplía:

Teorema 3.5. *Sean $w_1, w_2, ..., w_n$ juegos con conjunto de jugadores $M_1, M_2, ..., M_n$, respectivamente, que satisfacen $w_j \geq 0$, $w_j(M_j) = 1$ para todo $j = 1, ..., n$; sea v un juego no negativo con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$, y consideremos el juego compuesto*

$$u = v[w_1, w_2, ..., w_n].$$

Entonces, para cada $j \in N$, existe una constante $\lambda_j \geq 0$ tal que, si $i \in M_j$, entonces

$$\psi_i(u) = \lambda_j \psi_i(w_j).$$

Esto es, los miembros de M_j tienen un poder en u proporcional al que tienen en w_j.

Demostración. Sean $f, g_1, ..., g_n$ y h las EML de $v, w_1, ..., w_n$ y u, respectivamente. Tenemos que

$$h_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right) = f_j\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)(g_j)_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right),$$

donde, igual que en (2.11),

$$y_k(t) = g_k(t, t, ..., t).$$

Por (3.1) tenemos que

$$\psi_i(u) = f_j\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\psi_i(w_j).$$

Al ser v no negativo, todas las derivadas parciales de f son no negativas. Así pues, denotando $\lambda_j = f_j(y(\frac{1}{2}))$, el teorema queda probado. □

Teorema 3.6. *Sean $u, v, w_1, ..., w_n$ como en el Teorema 3.5 y asumamos, además, que todos los w_j son juegos de suma constante. Entonces, si $i \in M_j$, se tiene que*

$$\psi_i(u) = \psi_j(v)\psi_i(w_j).$$

Demostración. En el Teorema 3.5 se probó que

$$\psi_i(u) = \lambda_j \psi_i(w_j),$$

donde

$$\lambda_j = f_j\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

Cada w_k es un juego de suma constante, así que por el Teorema 2.5 se tiene que

$$g_k\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} w_k(M_k).$$

Ahora bien, $w_k(M_k) = 1$ por hipótesis, así que $g_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) = y_k(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, para todo $k \in N$. Por tanto,

$$\lambda_j = f_j\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right) = \psi_j(v),$$

y tenemos, por el Teorema 3.5, que

$$\psi_i(u) = \psi_j(v)\psi_i(w_j).$$

□

Ejemplo 3.7. Sea $u = v[w_1, w_2]$ el juego del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas expuesto en el Ejemplo 2.8. Para $i \in M_1$, por el Teorema 3.6,

$$\psi_i(u) = \psi_1(v)\psi_i(w_1),$$

es decir,

$$\psi_i(u) = f_1\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)(g_1)_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right).$$

Tenemos que

$$f_1\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = y_2\left(\tfrac{1}{2}\right),$$
$$(g_1)_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Recordemos que $y_2\left(\frac{1}{2}\right) = g_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$, donde g_2 es la EML de w_2, un juego simple de 10 jugadores en el que ganan las coaliciones de 4 o más jugadores. Viendo la ecuación (2.1) que define la EML de un juego, se puede concluir que g_2 tiene tantos sumandos como coaliciones ganadoras (i.e., $w_2(S) = 1$) existan en w_2, y todos estos sumandos valdrán $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$. El número de coaliciones ganadoras es

$$\sum_{s=4}^{10} \binom{10}{s} = 848,$$

y por tanto $y_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$. Así pues, para los jugadores de M_1,

$$\psi_i(u) = \frac{53}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{53}{1024}.$$

Para $i \in M_2$,

$$\psi_i(u) = f_2\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)(g_2)_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right).$$

Tenemos que

$$f_2\left(y\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = y_1(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},$$
$$(g_2)_i\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}\right) = 84 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 = \frac{84}{512} = \frac{21}{128}.$$

Por tanto,

$$\psi_i(u) = \frac{21}{128} \cdot \frac{1}{32} = \frac{21}{4096}.$$

En definitiva,

$$\psi_i(u) = \begin{cases} 53/1024 = 0{,}05176 & \text{si } i \text{ es un miembro permanente,} \\ 21/4096 = 0{,}00513 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El índice de poder de Banzhaf-Coleman de los miembros permanentes es unas diez veces mayor que el de los otros miembros. Esto se puede comparar con el valor de Shapley del juego, que otorgaba mucho más poder relativo a los miembros permanentes, con un ratio de aproximadamente 100 a 1. ◁

3.2. El valor coalicional de Owen

Fue introducido por Guillermo Owen [15] como una extensión del valor de Shapley. Tanto el valor de Shapley como el índice de poder de Banzhaf-Coleman dependen únicamente de la función característica del juego; esto es útil para saber, en abstracto, la recompensa que un jugador individual puede esperar obtener en un juego. Sin embargo, frecuentemente existe información adicional teniendo en cuenta la identidad de los jugadores. En muchos casos habrá coaliciones que, si bien no son seguras, sí son muy probables, mientras que otras serán prácticamente imposibles dadas las relaciones previas entre los jugadores.

Para modelizar estas situaciones, consideramos la partición del conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ en un sistema de *uniones a priori*

$$\boldsymbol{T} = \{T_1, ..., T_m\}$$

donde todas las coaliciones (o uniones) T_k son disjuntas entre sí, y su unión es N.

Podemos pensar estas uniones como acuerdos previos entre los jugadores. Una unión puede ser, por ejemplo, un partido político o una empresa. Los miembros de cada unión (i. e., los diputados de cada partido o los propietarios, gerentes y empleados de cada empresa) acuerdan cooperar, si bien no están de ningún modo forzados a hacerlo. Los miembros de cada unión tienen la posibilidad de amenazar con desertar, y esta amenaza debe ser tenida en cuenta por los demás miembros. Nos encontramos así con un proceso en dos partes: por un lado, las uniones negocian entre ellas para determinar cuánto recibe cada una; por el otro, los miembros de cada unión negocian entre ellos para determinar cómo se divide la recompensa obtenida.

Definición 3.8. Dada la partición $\boldsymbol{T}$ y el juego $v \in G(N)$, se define el *juego cociente* $u = v/\boldsymbol{T}$, con $M = \{1, 2, ..., m\}$ como conjunto de jugadores, por

$$u(H) = v\left(\bigcup_{h \in H} T_h\right),$$

para $H \subset M$.

En la práctica, este es el juego que juegan las empresas; el jugador h es, en este juego, la empresa T_h en el juego original. En ese caso, $u(\{h\})$ es la recompensa que la empresa T_h puede obtener en el juego v actuando como una coalición, mientras que $u(H)$ es la recompensa que todas las empresas T_h, $h \in H$, pueden obtener en v actuando juntas.

Ejemplo 3.9. Sea v el juego de los cuatro accionistas del Ejemplo 1.18, en el que los jugadores tienen 10, 20, 30 y 40 acciones, respectivamente. Supongamos que los jugadores 1 y 2 deciden colaborar (por ejemplo, porque se casan). En este caso, $\boldsymbol{T} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ y $u = v/\boldsymbol{T}$ sería el juego de 3 jugadores entre las uniones a priori que conforman $\boldsymbol{T}$ y que poseen 30, 30 y 40 acciones, respectivamente. Es fácil ver que $u(H) = 1$ si H tiene al menos dos miembros, y $u(H) = 0$ en caso contrario. $\triangleleft$

Ejemplo 3.10. Sea v un juego de mayoría ponderada $[q; p_1, ..., p_n]$, y sea $\boldsymbol{T}$ la partición $\{T_1, ..., T_m\}$. Entonces, el juego cociente u es el juego de mayoría ponderada caracterizado por $[q; p(T_1), ..., p(T_m)]$, donde $p(S)$ no es más que la suma $\sum_{i \in S} p_i$. Esta clase de juegos podría modelizar un parlamento de n miembros, donde $p_i = 1$ para todo $i \in N$, dividido en m partidos $T_1, ..., T_m$ con una disciplina de voto considerablemente fuerte. $\triangleleft$

Consideremos ahora la siguiente sucesión de definiciones y lemas:

Definición 3.11. Diremos que dos uniones distintas $T_i, T_j \in \boldsymbol{T}$ son *simétricas* en $v \in G(N)$ si i y j son jugadores simétricos en el juego cociente $v/\boldsymbol{T}$.

Definición 3.12. Un conjunto $S \subset N$ se dice que es un *soporte* para el juego $v \in G(N)$ si, para todo $T \subset N$, $v(T) = v(S \cap T)$.

Intuitivamente, esto significa que cualquier jugador que no pertenezca a un conjunto soporte es un jugador nulo.

Definición 3.13. Dado un conjunto $S \subset N$ y una partición $\boldsymbol{T}$ de N, definimos el conjunto

$$S/\boldsymbol{T} = \{j \in M \mid S \cap T_j \neq \emptyset\}.$$

Lema 3.14. *Sea S un soporte para el juego v. Entonces, $S/\boldsymbol{T}$ es un soporte del juego $u = v/\boldsymbol{T}$.*

Demostración. Sea $S^* = \bigcup\{T_j \mid S \cap T_j \neq \emptyset\}$. Es claro que $S \subset S^*$ y, por ser S soporte, también lo será S^*.

Sea $H \subset M$ y sea $K = \bigcup_{j\in H} T_j$. Por ser S^* soporte, $v(K) = v(K \cap S^*)$, y por tanto $u(H) = v(K) = v(K \cap S^*) = u(H \cap S/\boldsymbol{T})$. Así pues, $S/\boldsymbol{T}$ es un soporte de u. □

Lema 3.15. *Sea w_S el juego de unanimidad con el conjunto soporte S, tal y como se definió en el Lema 1.15. Entonces, el juego cociente $w_S/\boldsymbol{T}$ es el mismo que el juego de unanimidad $w_{S/\boldsymbol{T}}$.*

Buscamos un valor modificado, que será una aplicación que vaya del espacio de todos los pares $(v; \boldsymbol{T})$, donde $v \in G(N)$ y $\boldsymbol{T}$ es una partición de N, a $\mathbb{R}^n$. Denotaremos dicha aplicación por Ω. Igual que se hizo con el valor de Shapley, caracterizaremos Ω de manera axiomática.

Definición 3.16. El valor coalicional de Owen, Ω, satisface:

O1. Si K es un soporte, entonces

$$\sum_{i\in K} \Omega_i(v; \boldsymbol{T}) = v(K).$$

O2. Si $i, j \in T_k \in \boldsymbol{T}$ son jugadores simétricos en v, entonces

$$\Omega_i(v; \boldsymbol{T}) = \Omega_j(v; \boldsymbol{T}).$$

O3. Si $T_j, T_k \in \boldsymbol{T}$ son uniones simétricas en v, entonces

$$\sum_{i\in T_j} \Omega_i(v; \boldsymbol{T}) = \sum_{i\in T_k} \Omega_i(v; \boldsymbol{T}).$$

O4. Para dos juegos cualesquiera v y w, y una partición cualquiera $\boldsymbol{T}$,

$$\Omega(v + w; \boldsymbol{T}) = \Omega(v; T) + \Omega(w; \boldsymbol{T}).$$

Para entenderlos mejor, podemos comparar algunos de estos axiomas a las propiedades de Shapley que servían como sistema axiomático para caracterizar el valor de Shapley. El axioma O1 es equivalente a las propiedades de eficiencia y jugador nulo definidas sobre juegos con un sistema de uniones a priori. Los axiomas O2 y O3 son axiomas de simetría: O2 establece que el valor recompensará igual a jugadores iguales dentro de una misma unión a priori y O3 determina que dos uniones que se comportan de igual forma en el juego cociente reciben el mismo pago. Nótese que O2 no determina el pago de dos jugadores simétricos pertenecientes a distintas uniones: dos empleados equivalentes recibirán salarios distintos si uno trabaja para una empresa con grandes beneficios y otro trabaja para un pequeño negocio con dificultades. Finalmente, el axioma O4 es análogo a la propiedad de aditividad, con la restricción de que se mantenga la estructura de coaliciones a través de los distintos juegos.

Igual que con el valor de Shapley, podemos dar un teorema de existencia y unicidad:

Teorema 3.17. *Existe una única aplicación que satisface los axiomas O1-O4 de 3.16. Esta aplicación viene dada, para $i \in T_j \in \boldsymbol{T}$, por*

$$\Omega_i(v; \boldsymbol{T}) = \sum_{\substack{H \subset M \\ j \in H}} \sum_{\substack{S \subset T_j \\ i \notin S}} \frac{h!(m-h-1)!s!(t_j-s-1)!}{m!t_j!}[v(Q \cup S \cup \{i\}) - v(Q \cup S)], \tag{3.2}$$

donde h, s y t_j son las cardinalidades de H, S y T_j, respectivamente, y $Q = \bigcup_{k \in H} T_k$.

Demostración. La prueba de la unicidad, igual que para el valor de Shapley, está basada en los juegos de unanimidad w_S, $S \subset N$, los cuales, como se vio en el Lema 1.16, forman una base de $G(N)$ como espacio vectorial.

Para el juego w_S, S es un soporte. Así pues, por el axioma O1,

$$\sum_{i \in S} \Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = w_S(S) = 1$$

y, como todos los jugadores que no forman parte de S son jugadores nulos, $\Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = 0$ para todo $i \notin S$.

Sean j y k dos elementos de $S/\boldsymbol{T}$. Por el Lema 3.15, $w_S/\boldsymbol{T} = w_{S/\boldsymbol{T}}$, y por ser j y k simétricos en $w_{S/\boldsymbol{T}}$, T_j y T_k son coaliciones simétricas en w_S. Del axioma O3 se sigue que

$$\sum_{i \in T_j} \Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = \sum_{i \in T_k} \Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}).$$

Sea $h(S)$ la cardinalidad de $S/\boldsymbol{T}$, i. e. el número de $j \in M$ tales que $S \cap T_j \neq \emptyset$. Ya que todos los T_j con $j \in S/\boldsymbol{T}$ reciben el mismo pago y todos juntos reciben un pago 1, tenemos que

$$\sum_{i \in T_j} \Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = 1/h(S), \qquad \text{para } j \in S/\boldsymbol{T}.$$

Sean i y l dos elementos de $S \cap T_j$, para algún j. En particular, $i, l \in S$ y por tanto son jugadores simétricos en w_S. Por tanto, por el axioma O2, $\Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = \Omega_l(w_S; \boldsymbol{T})$.

Sea ahora s_j el número de elementos de $S \cap T_j$. Como todos los jugadores de $S \cap T_j$ reciben el mismo pago por ser simétricos, y todos juntos reciben $1/h(S)$, obtenemos que

$$\Omega_i(w_S; \boldsymbol{T}) = \begin{cases} 1/(s_j h(S)) & \text{si } \ i \in S \cap T_j, \ T_j \in \boldsymbol{T}, \\ 0 & \text{si } \ i \notin S. \end{cases}$$

Así pues, hemos visto que los axiomas O1-O3 caracterizan un único valor para los juegos de unanimidad w_S. Como estos juegos forman una base de $G(N)$, por el axioma O4 se deduce que hay a lo sumo un único valor en el espacio de todos los pares $(v, \boldsymbol{T})$.

Para probar la existencia, basta con comprobar que el valor dado por la ecuación (3.2) satisface los axiomas O1-O4. $\square$

Ejemplo 3.18. Sea v el juego de los cuatro accionistas y $u = v/\boldsymbol{T}$ el juego cociente con uniones a priori descritos en el Ejemplo 3.9. Para calcular su valor de Owen emplearemos el paquete `GameTheoryAllocation` de R descrito en Saavedra-Nieves [18]. Recordemos que la función característica de v se define de la forma siguiente:

$$\begin{array}{llll} v(1) = 0 & v(12) = 0 & v(123) = 1 & v(1234) = 1 \\ v(2) = 0 & v(13) = 0 & v(124) = 1 & \\ v(3) = 0 & v(14) = 0 & v(134) = 1 & \\ v(4) = 0 & v(23) = 0 & v(234) = 1 & \\ & v(24) = 1 & & \\ & v(34) = 1 & & \end{array}$$

Teniendo esto en cuenta, ejecutamos la siguiente secuencia de comandos:

```
> install.packages("GameTheoryAllocation")
> library(GameTheoryAllocation)
> f_caract=c(rep(0,8),rep(1,7))
> union=list(c(1,2),c(3),c(4))
> Owen_value(f_caract,union,game="profit")
```

El valor de Owen obtenido es $\Omega(v; \boldsymbol{T}) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Resulta interesante compararlo con el valor de Shapley del juego sin uniones a priori obtenido en el Ejemplo 1.18, que es $\Phi(v) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right)$. La unión de los jugadores 1 y 2 hace que el jugador 4 pierda algo de valor en favor del jugador 3. Esto se debe a que en el juego cociente u los tres jugadores son simétricos, pues la colaboración entre dos de ellos otorga la mayoría. En esta situación, el mayor número de acciones del jugador 4 no le otorga ningún poder negociador adicional. $\triangleleft$

3.3. El valor de Myerson y otros valores relacionados

El valor de Myerson fue introducido por Roger B. Myerson [12] en 1977 como una aplicación directa del valor de Shapley para los *juegos TU con estructura de comunicación*. Para entender esta clase de juegos es necesario definir previamente algunos conceptos:

Definición 3.19. Un *grafo no dirigido* es un par (N, Γ) en el que N es un conjunto de *nodos* y Γ es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de N, es decir, $\Gamma \subset \{\{i, j\} \subset N \mid i \neq j\}$. Los elementos de Γ se llaman *aristas.* Denotaremos por $\Gamma(N)$ el conjunto de todos los grafos no dirigidos definidos sobre N, y en general nos referiremos a los elementos de esta clase por su conjunto de aristas Γ.

Definición 3.20. Dado un grafo $\Gamma \in \Gamma(N)$ y un conjunto $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$, el *subgrafo* de Γ en S es el grafo $(S, \Gamma|_S)$ con $\Gamma|_S = \{\{i, j\} \in \Gamma \mid i, j \in S\}$.

Definición 3.21. Sea $\Gamma \in \Gamma(N)$. Una secuencia de k nodos distintos $(i_1, ..., i_k)$ es un *camino* en $\Gamma|_S$ si $\{i_l, i_{l+1}\} \in \Gamma_S$ para $l = 1, ..., k-1$. Dos nodos $i, j \in N$ están conectados en $\Gamma|_S$ si existe un camino $(i_1, ..., i_k)$ en $\Gamma|_S$ con $i_1 = i$ y $i_k = j$. Un subgrafo $\Gamma|_S$ es *conexo* si todo par de nodos en S está conectado por un camino.

Definición 3.22. Un conjunto $K \subset S$ es un *componente* de $\Gamma|_S$ si K es un subconjunto conexo maximal de S, es decir, K es conexo y para cada $i \in S \backslash K$ el conjunto $K \cup \{i\}$ no es conexo en Γ. El conjunto de componentes de $\Gamma|_S$ constituye una partición de S y se denota por S/Γ.

En el contexto de los juegos TU, el conjunto de nodos N es el conjunto de jugadores y el grafo representa en este caso una estructura de comunicación establecida entre los jugadores. Se considerará que los jugadores de la coalición S se pueden comunicar entre ellos si S es conexo en Γ (i.e., $\Gamma|_S$ es conexo). Un *juego TU con estructura de comunicación* o *juego CO* con conjunto de jugadores N viene dado por la tripla (N, v, Γ), donde $(N, v) \in G(N)$ y $\Gamma \in \Gamma(N)$. Denotaremos el conjunto de juegos CO con conjunto de jugadores N por $GCO(N)$.

Para un juego CO (N, v, Γ), asumimos que los jugadores de la coalición $S \subset N$ solo pueden cooperar si pueden comunicarse entre ellos, es decir, si $\Gamma|_S$ es conexo.

Definición 3.23. Dado $(N, v, \Gamma) \in GCO(N)$, el *juego restringido (de Myerson)*, $v^\Gamma \in G(N)$, está definido por

$$v^\Gamma(S) = \sum_{T \in S/\Gamma} v(T),$$

para todo $S \subset N$.

Definición 3.24. El *valor de Myerson* para un juego CO, denotado por μ, es el valor de Shapley de su juego restringido,

$$\mu(N, v, \Gamma) = \Phi(v^\Gamma).$$

Así pues, el valor de Myerson de un juego CO es el valor de Shapley de un juego TU obtenido a partir del juego original teniendo en cuenta las restricciones comunicativas inducidas por el grafo.

Ejemplo 3.25. Consideremos el juego de guantes de cuatro jugadores $v \in G(N)$ con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ en el que el jugador 1 tiene un guante izquierdo mientras los jugadores 2, 3 y 4 tienen un guante derecho cada uno. La función característica de este juego está definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll}
v(1) = 0 & v(12) = 1 & v(123) = 1 & v(1234) = 1 \\
v(2) = 0 & v(13) = 1 & v(124) = 1 & \\
v(3) = 0 & v(14) = 1 & v(134) = 1 & \\
v(4) = 0 & v(23) = 0 & v(234) = 0 & \\
 & v(24) = 0 & & \\
 & v(34) = 0 & &
\end{array}$$

El valor de Shapley de este juego es $\Phi(v) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$. Sin embargo, consideremos que existen unas restricciones comunicativas inducidas por el grafo $\Gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$, por ejemplo porque solo estos jugadores se conocen entre sí. Nótese que, a pesar de que los jugadores 1 y 4 no se conocen, pueden comunicarse a través del jugador 2, que es un conocido común. El juego restringido de Myerson asociado a este grafo, v^Γ, es el siguiente:

$$\begin{array}{llll}
v^\Gamma(1) = 0 & v^\Gamma(12) = 1 & v^\Gamma(123) = 1 & v^\Gamma(1234) = 1 \\
v^\Gamma(2) = 0 & v^\Gamma(13) = 0 & v^\Gamma(124) = 1 & \\
v^\Gamma(3) = 0 & v^\Gamma(14) = 0 & v^\Gamma(134) = 0 & \\
v^\Gamma(4) = 0 & v^\Gamma(23) = 0 & v^\Gamma(234) = 0 & \\
 & v^\Gamma(24) = 0 & & \\
 & v^\Gamma(34) = 0 & &
\end{array}$$

El valor de Myerson del juego original, (N, v, Γ), es el valor de Shapley de v^Γ. En el juego restringido, los jugadores 3 y 4 son nulos, mientras que los jugadores 1 y 2 son simétricos. Por tanto, $\Phi(v^\Gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) = \mu(N, v, \Gamma)$.

En esta situación, el jugador 3 se vuelve nulo al no conocer a nadie que pueda proporcionarle un guante izquierdo. El hecho de que el jugador 4 pueda comunicarse con el jugador 2 no le supone ningún beneficio directo, ya que ambos poseen guantes derechos y por tanto su coalición no genera ninguna utilidad. Además, aunque puede comunicarse con el jugador 1, ha de hacerlo a través del jugador 2, que también tiene interés en el guante izquierdo del jugador 1. Por tanto, la inclusión del jugador 4 no genera tampoco ninguna utilidad a la coalición $\{1, 2\}$ formada previamente. De este modo, solo los jugadores 1 y 2 pueden generar utilidad, teniendo ambos el mismo poder. $\triangleleft$

El concepto de grafo admite una generalización. Dado un conjunto base N, un *hipergrafo* es un par (N, H) donde $H \subset \{h \subset N \mid |h| > 1\}$. Los elementos de H se llaman *hiperaristas* y pueden relacionar cualquier cantidad de elementos de N, a diferencia de los grafos, donde $|h| = 2$. El conjunto de hiperaristas de $i \in N$ se denota por $H_i = \{h \in H \mid i \in h\}$. La restricción de H a $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ se denota por $H|_S = \{h \in H \mid h \subset S\}$. Un hipergrafo, de manera análoga a lo que ocurre con un grafo, da lugar a una partición del conjunto base (o de cualquier subconjunto de este) en componentes conexas maximales; para un hipergrafo (N, H), se denota por N/H el conjunto de sus componentes.

De manera análoga a como se definieron los juegos CO, un *juego TU con estructura de conferencia* o *juego CF* con conjunto de jugadores N viene dado por la tripla (N, v, H), donde (N, H) es un hipergrafo y $v \in G(N)$. Se denotará por $GCF(N)$ el conjunto de juegos CF con conjunto de jugadores N.

El valor de Myerson puede ser extendido a juegos CF de la siguiente manera (van den Nouweland, Borm y Tijs [21]):

$$\mu(N, v, H) = \Phi(v^H),$$

donde

$$v^H(S) = \sum_{T \in S/H} v(T),$$

para todo $S \subset N$, siendo S/H la partición de S en componentes conexas maximales inducida por H.

Como alternativa al valor de Myerson, Meessen [11] definió el *valor de posición* para juegos CO, extendido a situaciones de juegos CF con hipergrafos no cíclicos en van den Nouweland, Borm y Tijs [21]. Casajus [6] ofrece una caracterización del valor, expresándolo en términos del valor de Myerson: mientras que este enfatiza el rol de los jugadores, el valor de posición se centra en las aristas (o hiperaristas) que los unen. Este enfoque es el que se describe a continuación:

Definición 3.26. Dado un juego $(N, v, H) \in GCF(N)$, se define el *juego de hiperaristas* (H, v^N) por

$$v^N(F) = \sum_{S \in N/F} v(S),$$

para todo $F \subset H$, siendo N/F la partición de N en componentes conexas maximales inducida por F.

Definición 3.27. El *valor de posición* del juego $(N, v, H) \in GCF(N)$ viene dado por

$$\pi_i(N, v, H) = \sum_{h \in H_i} \frac{1}{|h|} \Phi_h(H, v^N).$$

De este modo, el juego de hiperaristas evalúa la importancia de cada subconjunto de hiperaristas en el juego original y el valor de posición reparte a partes iguales el valor de Shapley de cada hiperarista entre los jugadores involucrados en ella.

Consideremos ahora la situación opuesta a la descrita por los juegos CO: dado un grafo $\Gamma \in \Gamma(N)$, diremos que dos jugadores $i, j \in N$ son incompatibles si $\{i, j\} \in \Gamma$, es decir, si están unidos por una arista. Un *juego TU con incompatibilidades* es una tripla (N, v, Γ), donde $(N, v) \in G(N)$ y $\Gamma \in \Gamma(N)$, considerando esta interpretación alternativa del grafo: en estos juegos, las aristas el grafo representarán la imposibilidad de dos jugadores para comunicarse entre sí y, por tanto, formar coaliciones. Denotaremos por $GI(N)$ el conjunto de juegos TU con incompatibilidades con conjunto de jugadores N. El objetivo es obtener una variación del valor de Shapley útil para estas situaciones.

Definición 3.28. Dado un grafo $\Gamma \in \Gamma(N)$, decimos que una coalición $S \subset N$ es Γ-*admisible* si y solo si $\{i, j\} \notin \Gamma$ para todo $i, j \in S$. Se denotará por $P(S, \Gamma)$ el conjunto de todas las particiones de S cuyas clases son Γ-admisibles.

Definición 3.29. Dado un grafo $\Gamma \in \Gamma(N)$, se define su *grafo dual* como

$$\Gamma^* = \{\{i, j\} \subset N \mid i \neq j, \{i, j\} \notin \Gamma\}.$$

Bergantiños, Carreras y García-Jurado [5] introducen un valor eficiente y justo definido en $GI(N)$. Nuevamente, se definen varias propiedades deseables (en este caso, adaptando las ideas que habían sido introducidas en Myerson [12] al contexto de los juegos con incompatibilidades) y se demuestra que determinan un único valor $f\colon GI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 3.30. Sea f un valor en $GI(N)$ y consideremos las siguientes propiedades deseables:

1. **Eficiencia en componentes:** f satisface la propiedad de eficiencia en componentes si, para todo $(N, v, \Gamma) \in GI(N)$, se tiene que

$$\sum_{i \in S} f_i(N, v, \Gamma) = \max_{P \in P(S,\Gamma)} \sum_{T \in P} v(T),$$

para todo $S \in N/\Gamma^*$. Nótese que N/Γ^* particiona N de forma que, si i y j forman parte de distintas clases de la partición, entonces son incompatibles. Estas clases $S \in N/\Gamma^*$ están formadas por jugadores compatibles que pueden negociar y formar coaliciones admisibles; la propiedad de eficiencia en componentes asegura que los jugadores formarán estas coaliciones de la mejor forma para ellos, es decir, la suma de los pagos obtenidos por los jugadores en cada $S \in N/\Gamma^*$ es la mayor posible.

2. **Justicia:** f satisface la propiedad de justicia si, para todo $(N, v, \Gamma) \in GI(N)$, se tiene que

$$f_i(N, v, \Gamma) - f_i(N, v, \Gamma \cup \{i, j\}) = f_j(N, v, \Gamma) - f_j(N, v, \Gamma \cup \{i, j\}),$$

para todo $\{i, j\} \in \Gamma^*$. Esta propiedad refleja la simetría de la relación binaria que subyace al grafo: si dos jugadores se vuelven compatibles, ambos ganan o pierden lo mismo.

3. **Estabilidad:** f satisface la propiedad de estabilidad si, para todo $(N, v, \Gamma) \in GI(N)$, se tiene que

$$f_i(N, v, \Gamma) \geq f_i(N, v, \Gamma \cup \{i, j\}),$$
$$f_j(N, v, \Gamma) \geq f_j(N, v, \Gamma \cup \{i, j\}),$$

para todo $\{i, j\} \in \Gamma^*$. Esta propiedad significa que, para cualquier jugador, ser incompatible con otros solo puede perjudicarle.

A continuación, se define la restricción de un juego con incompatibilidades a un juego TU general. Bajo esta definición subyace la misma idea que en la propiedad de eficiencia en componentes antes descrita. Los jugadores de una coalición S forman subcoaliciones Γ-admisibles (que son las únicas posibles) que maximizan la suma de los pagos para los jugadores de S.

Definición 3.31. Dado un juego $(N, v, \Gamma) \in GI(N)$, el *juego restringido* v^Γ se define de la siguiente manera:

$$v^\Gamma(S) = \max_{P \in P(S, \Gamma)} \sum_{U \in P} v(U),$$

para todo $S \subset N$.

Bergantiños, Carreras y García-Jurado [5] usan esta definición de juego restringido y las propiedades mencionadas arriba para proponer y caracterizar su valor para juegos con incompatibilidades

Teorema 3.32. *Existe un único valor f definido en $GI(N)$ que satisfaga las propiedades de eficiencia en componentes y justicia para todo $(N, v, \Gamma) \in GI(N)$. Este valor viene dado por*

$$f(N, v, \Gamma) = \Phi(v^\Gamma).$$

Además, este valor satisface la propiedad de estabilidad y, para todo juego TU $v \in G(N)$, $f(N, v, \emptyset) = \Phi(v)$, donde el grafo $\emptyset$ representa una situación sin incompatibilidades.

Capítulo 4

Aplicaciones

El valor de Shapley y sus variaciones se han aplicado en diversidad de problemas: asignación de tasas de aterrizaje a aerolíneas en aeropuertos (Vázquez-Brage, van den Nouweland y García-Jurado [22]), reparto de beneficios de pases a museos (Ginsburgh y Zang [9]) o problemas de bancarrota aplicables al reparto de cuotas lácteas (Saavedra-Nieves y Saavedra-Nieves [19]), por ejemplo. En los años más recientes también se han propuesto aplicaciones directas del valor de Shapley o variaciones de este en el contexto del *machine learning* (Aas, Jullum y Løland [1]; Ghorbani y Zou [8]).

En este capítulo se explicarán con más detalle algunas de estas aplicaciones.

4.1. El juego del aeropuerto

Este juego fue introducido por Littlechild y Owen [10] como aplicación de la teoría de juegos al problema de asignar los costes de un aeropuerto entre los aviones que lo utilizan y que necesitan pistas de aterrizaje de distintas longitudes.

Generalmente, los gastos de un aeropuerto se dividen en dos partes: un gasto variable que es proporcional al número de aviones que lo utilizan y un *coste de capital* fijo, que debe amortizarse durante un cierto período de tiempo. Asignar los gastos variables no suele suponer un problema, ya que son pagados directamente por los aviones al usar el aeropuerto; el problema reside en la asignación de los costes de capital (por ejemplo, la construcción de una pista de aterrizaje o de una terminal) a los distintos tipos de aviones.

Los costes de capital del aeropuerto dependen, esencialmente, del avión más grande que vaya a utilizarlo. La longitud (y por tanto el coste) de la pista de aterrizaje será proporcional al tamaño del avión más grande que la vaya a utilizar; una vez la pista es construida, no son necesarios más gastos de capital hasta que solicite su uso un avión más grande. El objetivo será diseñar un programa de tarifas justo que sufrague estos costes.

Podemos dividir los aviones en m tipos distintos. El coste de una pista de aterrizaje acondicionada para los aviones del tipo j, con $j \in \{1, ..., m\}$, es C_j. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$0 = C_0 < C_1 < C_2 < ... < C_{m-1} < C_m.$$

Sea N_j el conjunto de movimientos (aterrizajes y despegues) realizados por los aviones del tipo j, y sea n_j el número de movimientos realizados por aviones de este tipo. Entonces,

$$N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j$$

es el conjunto de todos los movimientos, y para $S \subset N$ podemos escribir

$$j(S) = \max\{j \in \{1, ..., m\} \mid S \cap N_j \neq \emptyset\}.$$

$j(S)$ denota el tipo de avión más grande de entre aquellos cuyos movimientos forman parte del conjunto S. De este modo, es claro que el coste de una pista acondicionada para recibir todos los movimientos del conjunto S es

$$c(S) = C_{j(S)},$$

mientras que

$$c(\emptyset) = 0.$$

Así pues, podemos tratar esta estructura de costes como un juego TU con conjunto de jugadores N y función característica $v(S) = -c(S)$, para todo $S \subset N$.

Una imputación de v será un vector $\boldsymbol{x}$ que satisfaga

1. $x_i \geq -c(\{i\}) = -C_j, \quad \text{si} \quad i \in N_j,$

2. $\sum_{i \in N} x_i = -c(N) = -C_m.$

El vector $-\boldsymbol{x} = (-x_1, ..., -x_m)$ es un posible plan de tarifas, ya que recauda justo lo suficiente para recuperar los costes de capital del aeropuerto. En la Proposición 1.19 vimos que, en juegos superaditivos como es este, el valor de Shapley es una imputación, así que es un buen candidato para determinar un plan de tarifas justo.

Para computar el valor de Shapley, denotemos

$$R_k = \bigcup_{j=k}^{m} N_j, \quad r_k = \sum_{j=k}^{m} n_j,$$

y consideremos las m funciones características $v_1, v_2, ..., v_m$ definidas para todo $S \subset N$ por

$$v_k(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \cap R_k = \emptyset, \\ C_{k-1} - C_k & \text{si} \quad S \cap R_k \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nótese que, si $k \leq j(S)$, entonces $S \cap R_k \neq \emptyset$; mientras que, si $k > j(S)$, entonces $S \cap R_k = \emptyset$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} v_k(S) &= \sum_{k=1}^{j(S)} (C_{k-1} - C_k) \\ &= C_0 - C_{j(S)} = -c(S), \end{aligned}$$

con lo cual

$$v = \sum_{k=1}^{m} v_k$$

y, por la propiedad de aditividad,

$$\Phi(v) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(v_k).$$

Es fácil ver que R_k es un soporte de v_k, por lo que todos los $i \notin R_k$ son jugadores nulos. Además, todos los elementos de R_k son jugadores simétricos entre sí en v_k. Por tanto,

$$\Phi_i(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \notin R_k, \\ (C_{k-1} - C_k)/r_k & \text{si} \quad i \in R_k. \end{cases}$$

Ahora bien, si $i \in N_j$, entonces $i \in R_k$ para todo $k \leq j$; así pues, tenemos que

$$\Phi_i(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{C_{k-1} - C_k}{r_k}, \qquad i \in N_j$$

y el programa de tarifas dado por el valor de Shapley es simplemente el opuesto de esto, es decir

$$\Phi_i(c) = \sum_{k=1}^{j} \frac{C_k - C_{k-1}}{r_k}, \qquad i \in N_j.$$

Esta solución tiene la interpretación siguiente: el coste de construir la primera parte de la pista de aterrizaje, es decir C_1, es incurrido por todos los tipos de aviones y dividido a partes iguales entre todos los movimientos en el aeropuerto. Luego, el coste de la segunda parte de la pista, es decir $C_2 - C_1$, es incurrido por todos los tipos de aviones excepto por los del primer tipo y dividido a partes iguales entre todos los movimientos realizados por aviones del tipo $2, 3, ..., m$. Continuando de este modo, el coste total de la pista C_m es distribuido entre todos los movimientos del aeropuerto.

En la práctica, los aviones no son unidades aisladas que operan por su cuenta, sino que están organizados en aerolíneas. Las aerolíneas grandes tienen más capacidad de negociar descuentos u otro tipo de ventajas en sus tarifas de uso. En Vázquez-Brage, van den Nouweland y García-Jurado [22] se propone una solución que tenga en cuenta el papel de las aerolíneas como uniones a priori, empleando para ello el valor coalicional de Owen.

Supongamos que hay A aerolíneas. Podemos definir el sistema de uniones a priori $\boldsymbol{T} = \{T_1, ..., T_A\}$ que constituye una partición de N, el conjunto de movimientos totales, donde T_a denota el conjunto de movimientos realizados por aviones de la compañía a. De este modo, el par $(c; \boldsymbol{T})$, donde c es el juego de coste definido más arriba, modeliza el problema. Sea $R_k^a = R_k \cap T_a$ el conjunto de movimientos realizados por aviones de la aerolínea a y del tipo k o superior; sea $\mathcal{A}_k = \{a \in \{1, 2, ..., A\} \mid R_k^a \neq \emptyset\}$ el conjunto de aerolíneas que poseen aviones del tipo k o superior que realicen movimientos en el aeropuerto; y sean r_k^a y α_k sus respectivas cardinalidades. El valor de Owen asociado a este problema es el siguiente

$$\Omega_i(c; \boldsymbol{T}) = \sum_{k=1}^{j} \frac{C_k - C_{k-1}}{\alpha_k \cdot r_k^a}, \qquad i \in T_a \cap N_j.$$

El resultado tiene la siguiente interpretación: el coste de la primera parte de la pista, C_1, es incurrido por todos los aviones y dividido a partes iguales entre las aerolíneas. En cada aerolínea, su coste asignado es dividido a partes iguales entre todos los aviones. A continuación, el coste de la segunda parte de la pista, $C_2 - C_1$, es incurrido por todos los aviones menos los del primer tipo y dividido a partes iguales entre todas las aerolíneas que poseen aviones de tipo 2 o superior. A su vez, cada aerolínea divide su coste asignado a partes iguales entre todos sus aviones de tipo 2 o superior.

Puede resultar extraño que, al dividir las cuotas empleando el valor de Owen, la tasa total pagada por una aerolínea solo depende del tipo de aviones de la aerolínea que realizan movimientos en el aeropuerto y no del número de aviones que posee. En primer lugar, al calcular las tarifas de este modo, resulta que una compañía que realice muchos movimientos en el aeropuerto puede distribuir las tarifas entre más movimientos (aumenta r_k^a). Como resultado, la *tarifa por movimiento* será inferior para compañías que utilicen el aeropuerto intensivamente que para las que lo usen esporádicamente. En segundo lugar, debemos notar que la tarifa que estamos tratando se corresponde tan solo al coste de capital fijo ocasionado por la construcción de la pista; los costes variables asociados con las salidas y llegadas de aviones constituyen su propia tarifa computada de forma independiente. Esto hace que la tarifa total pagada por una aerolínea sea mayor cuando decide realizar más movimientos en el aeropuerto.

4.2. El juego del pase a museos

Los pases a museos dan a los visitantes acceso ilimitado a los museos participantes durante un período limitado de tiempo. El problema que surge radica en repartir los beneficios obtenidos por la venta de pases entre los museos participantes. Esta misma formulación del problema se puede aplicar en otros contextos, como por ejemplo el de un proveedor de servicios *on-line* que ofrece una suscripción de pago que permite descargar archivos de manera ilimitada (aplicaciones, música, vídeos, etc.) durante un período de tiempo. Para modelizar el problema, asumimos que los datos detallados acerca del uso de cada pase o suscripción vendidos están disponibles.

Consideremos que $N = \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto de museos que deciden vender a un precio P un pase que permite visitar todos los museos de N durante un tiempo limitado. Sean $K \subset N$ un subconjunto de N, $M = \{1, ..., m\}$ el conjunto de clientes que han comprado el pase y $K_j \subset N$ el conjunto de museos visitados por el cliente $j \in M$. Para cada subconjunto de museos $K \subset N$, denotamos por $v(K)$ el número de clientes que solo han visitado museos de K. Esto es,

$$v(K) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset K}} 1. \tag{4.1}$$

Nótese que $v(N) = m$ es el número total de compradores del pase. Suponemos que cada cliente $j \in M$ tiene unas preferencias predeterminadas acerca de qué museos quiere visitar, y que estas son independientes de los museos potencialmente incluidos en el pase. Por tanto, cada cliente decide qué grupo de museos $K_j \subset N$ va a visitar antes de comprar el pase.

Una manera de repartir las ganancias obtenidas podría ser hacerlo proporcionalmente al número de visitas recibidas por el museo $i \in N$ entre todas las visitas de los miembros de M. Sin embargo, esto no tendría en cuenta el hecho de que muchos clientes comprarán el pase principalmente para visitar uno o varios museos concretos, pero también aprovechan para visitar otros museos incluidos en el pase que no habrían visitado de otro modo. Así pues, el poder real del museo i puede ser distinto al número de visitas recibidas. Por ejemplo, en una repartición proporcional, los beneficios derivados de la venta de un pase adicional utilizado para visitar únicamente un museo sería dividido entre todos los museos participantes. Esto es contraintuitivo, ya que cabría esperar que estos beneficios adicionales fuesen a parar al museo que ofreció los servicios; de otro modo, este museo podría verse desincentivado a participar en el pase.

Si podemos averiguar el número de pases vendidos que pueden ser atribuidos al museo $i \in N$ y lo denotamos por Φ_i, entonces podríamos asignar a ese museo la cantidad $\Phi_i \cdot P$. Considerando el juego $v \in G(N)$ con la función característica dada por (4.1), la contribución real del jugador $i \in N$ a $v(N)$ viene dada por el valor de Shapley.

El juego considerado no es más que una suma de juegos de unanimidad w_{K_j}, con

$$w_{K_j}(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; K_j \subset S, \\ 0 & \text{si } \; K_j \not\subset S. \end{cases}$$

Como se vio en el Lema 1.15, su valor de Shapley es $1/k_j$ para los $i \in K_j$ y 0 en otro caso, siendo $k_j = |K_j|$. La función característica del juego del pase de museos (4.1) es equivalente a

$$v(K) = \sum_{j \in M} w_{K_j}(K),$$

para todo $K \subset N$. Por el axioma de aditividad, su valor de Shapley será

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{j \in M \\ i \in K_j}} \frac{1}{k_j}, \qquad i \in N.$$

De este modo, queda considerablemente simplificada la complejidad computacional del valor de Shapley para casos en los que el número de museos incluidos en el pase fuese elevado. La interpretación de la regla de asignación obtenida es sencilla: el beneficio de cada pase vendido se divide a partes iguales entre los museos visitados por el comprador del pase. Esta asignación satisface la propiedad intuitiva de que los beneficios generados por la venta de pases adicionales sean asignados únicamente a los museos que han recibido visitas por parte de los compradores de dichos pases. Si el visitante $m+1$ tan solo visita el museo i, entonces $k_{m+1} = 1$ y Φ_i aumenta en una unidad, es decir, el museo i recibe íntegramente el importe del pase.

4.3. El problema de bancarrota

Un *problema de bancarrota* es una situación en la cual varios agentes reclaman porciones de un bien mayores que el bien disponible. Toman su nombre de un problema común en Economía como es la quiebra de una empresa con varios acreedores que reclaman una cantidad de dinero mayor que el valor de los bienes de la empresa. Estos problemas fueron introducidos por O'Neill [13], y desde entonces han encontrado múltiples aplicaciones en ámbitos como la economía, la agricultura o la gestión sanitaria.

Formalmente, un problema de bancarrota con n demandantes viene dado por una tripla (N, c, E), donde $N = \{1, ..., n\}$, $E \in \mathbb{R}^+$ y $c \in \mathbb{R}^n$ son tales que, para cada agente $i \in N$, $c_i \geq 0$ con

$$0 \leq E \leq \sum_{j \in N} c_j.$$

Por E (de su nombre en inglés, *estate*) denotamos la cantidad total de *bienes* que han de repartirse, y cada c_i representa la *reclamación* o *demanda* del agente $i \in N$. Denotaremos por $B(N)$ el conjunto de problemas de bancarrota con conjunto de demandantes N.

Todo problema de bancarrota puede expresarse en forma de juego TU. El *juego de bancarrota* asociado a un problema $(N, c, E) \in B(N)$ dado es un juego $v \in G(N)$ cuya función característica viene dada para todo $S \subset N$ por

$$v(S) = \text{máx}\left\{0, E - \sum_{i \notin S} c_i\right\}.$$

Esto es, para cada $S \subset N$, $v(S)$ representa la cantidad de bienes que quedan cuando $N \backslash S$ han recibido sus demandas.

Una procedimiento heurístico para repartir los bienes es el siguiente: supongamos que los agentes realizan sus reclamaciones en un orden de llegada, y cuando cada agente llega recibe el mínimo entre su demanda y la cantidad restante de bienes. Si asumimos que los órdenes de llegada son equiprobables, esta regla de asignación no es más que el valor de Shapley del juego de bancarrota asociado al problema, que en este contexto se denomina *regla de llegadas aleatorias*.

Ejemplo 4.1. Uno de los problema de bancarrota que podemos encontrar en la literatura es uno recogido por el Talmud, conocido habitualmente como el *problema de las tres esposas*. El Talmud recoge el problema de un hombre que muera habiendo dejado la promesa escrita a sus tres esposas de una herencia de 100, 200 y 300 monedas, respectivamente. Sin embargo, el valor de sus propiedades en el momento de su muerte es tan solo de 200 monedas. La solución que propone el Talmud es el reparto $(50, 75, 75)$. Este reparto fue estudiado en Aumann y Maschler [3] y es conocido como la "regla del Talmud": en caso de que los bienes a repartir sean una cantidad menor o igual que la mitad de la suma de las demandas, esta regla propone repartir los bienes a partes iguales de modo que nadie recibe más de la mitad de su demanda. Veamos, además, la solución que arroja el valor de Shapley a este problema.

Tenemos un problema de bancarrota (N, c, E) donde $N = \{1, 2, 3\}$, $c = (100, 200, 300)$ y $E = 200$. El juego de bancarrota asociado es el juego $v \in G(N)$ definido de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lll} v(1)=0 & v(12)=0 & v(123)=200 \\ v(2)=0 & v(13)=0 & \\ v(3)=0 & v(23)=100 & \end{array}$$

Podemos calcular el valor de Shapley mediante el procedimiento de orden de llegada explicado en la Observación 1.20 de la siguiente manera:

Orden	1	2	3
123	0	0	200
132	0	200	0
213	0	0	200
231	100	0	100
312	0	200	0
321	100	100	0
Φ	$\frac{100}{3}$	$\frac{250}{3}$	$\frac{250}{3}$

Al promediar las contribuciones marginales de cada jugador para todos los órdenes de llegada posibles, se obtiene el valor de Shapley: $\Phi(v) = \left(\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3}\right)$.

$\triangleleft$

Capítulo 5

Conclusiones

Como conclusión del trabajo realizado se puede extraer que el valor de Shapley proporciona resultados matemáticos significativos así como respuestas y soluciones a una extensa variedad de problemas de la vida real.

Una referencia reciente que profundiza tanto en aspectos teóricos del valor de Shapley como en aplicaciones a diferentes problemas relacionados con muy diversas áreas es Algaba, Fragnelli y Sánchez Soriano [2].

Bibliografía

[1] Aas, K., Jullum, M. y Løland, A. (2019). *Explaining individual predictions when features are dependent: More accurate approximations to Shapley values.* arXiv:1903.10464.

[2] Algaba, E., Fragnelli, V. y Sánchez-Soriano, J. (2019). *Handbook of the Shapley Value.* CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton.

[3] Aumann, R. y Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, **36**(2), 195–213.

[4] Banzhaf, J. F. (1965). Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, **19**(2), 317–343.

[5] Bergantiños, G., Carreras, F. y García-Jurado, I. (1993). Cooperation when some players are incompatible, *ZOR – Methods and Models of Operations Research*, **38**(2), 187–201.

[6] Casajus, A. (2007). The position value is the Myerson value, in a sense. *International Journal of Game Theory*, **36**(1), 47–55.

[7] Coleman, J. S. (1971). Control of collectivities and the power of a collectivity to act. En B. Lieberman (Ed.), *Social Choice*, Gordon and Breach, 269–300.

[8] Ghorbani, A. y Zou, J. (2019). *Data Shapley: Equitable Valuation of Data for Machine Learning.* arXiv:1904.02868.

[9] Ginsburgh, V. y Zang, I. (2003). The museum pass game and its value. *Games and Economic Behavior*, **43**(2), 322–325.

[10] Littlechild S. C. y Owen, G. (1973). A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, **20**(3), 370–372.

[11] Meessen, R. (1988). *Communication games.* Tesis de Máster, Department of Mathematics, University of Nijmegen, Nijmegen.

[12] Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, **2**(3), 225–229.

[13] O'Neil, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, **2**(4), 345–371.

[14] Owen, G. (1972). Multilinear extensions of games. *Management Science*, **18**(5–2), 64–79.

[15] Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. En R. Henn, O. Moeschlin (Eds.), *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer Verlag, 76–88.

[16] Owen, G. (1995). *Game Theory.* 3ª ed., Academic Press, New York.

[17] Penrose, L. (1946). The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, **109**(1), 53–57.

[18] Saavedra-Nieves, A. (2016). *Package 'GameTheoryAllocation'*. R package, versión 2.15.0, `http://cran.r-project.org/web/packages/GameTheoryAllocation/GameTheoryAllocation.pdf`.

[19] Saavedra-Nieves, A. y Saavedra-Nieves, P. (2020). On systems of quotas from bankruptcy perspective: the sampling estimation of the random arrival rule. *European Journal of Operational Research*, **285**(2), 655–669.

[20] Shapley, L. S. (1953). A value for n-person games. En H. Kuhn, A. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, Princeton University Press, 307–317.

[21] van den Nouweland, A., Borm, P. y Tijs, S. (1992). Allocation rules for hypergraph communication situations. *International Journal of Game Theory*, **20**(3), 255–268.

[22] Vázquez-Brage, M., van den Nouweland, A. y García-Jurado, I. (1997). Owen's coalitional value and aircraft landing fees. *Mathematical Social Sciences*, **34**(3), 273–286.