



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Optimización con Restricciones

Manuel Vázquez Mourazos

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Optimización con Restricciones

Manuel Vázquez Mourazos

Julio, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática aplicada
Título: Optimización con restricciones
Title: Constrained optimization
Director: Jerónimo Rodríguez García
Breve descripción do contido
Este trabajo consistirá en el estudio de problemas de optimización con restricciones . Se estudiarán condiciones necesarias y condiciones suficientes para la existencia y unicidad de solución del problema dependiendo de las hipótesis sobre el funcional objetivo y las restricciones que definen el conjunto admisible. Se estudiarán también algunos métodos numéricos básicos para la resolución de este tipo de problemas.
Recomendacións
Haber cursado la asignatura “Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales”

“Puesto que el Universo es perfecto y fue creado por el Creador más sabio, nada ocurre en él sin que esté presente alguna ley de máximo o mínimo”.

L. Euler (s. XVIII)

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
Resumen	XIII
	XIII
Notación	XV
Introducción	XVII
1. Optimización sin restricciones	1
1.1. Conceptos generales	1
1.2. Condiciones de optimalidad con derivadas	2
1.3. Existencia y unicidad de solución	4
1.3.1. Funcionales coercitivos	4
1.3.2. Funcionales convexos	5
1.4. Funcionales cuadráticos	7
1.5. Métodos para la obtención del mínimo	8
1.5.1. Cálculo del paso	9
1.5.2. Método del gradiente	11
1.5.3. Método del gradiente conjugado	11
1.5.4. Método de Newton	12
1.5.5. Métodos Cuasi-Newton	13
2. Optimización con restricciones, teoría	15
2.1. Presentación del problema	15
2.2. Caracterización de óptimos	16
2.3. Multiplicadores de Lagrange	22

2.4.	Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz-John	24
2.5.	Aplicaciones a la programación cuadrática	32
2.5.1.	Condiciones de optimalidad	32
2.6.	Dualidad	34
2.6.1.	Dualidad en programación cuadrática	37
3.	Optimización con restricciones, métodos	39
3.1.	Métodos de penalización	39
3.1.1.	Penalización exterior	40
3.1.2.	Penalización interior	44
3.1.3.	Método del lagrangiano aumentado	47
3.2.	Métodos de direcciones factibles	53
3.2.1.	Método de Zoutendijk	55
3.2.2.	Método de los conjuntos activos	58
3.3.	Métodos SQP	62
3.3.1.	Método de Lagrange-Newton	62
3.3.2.	Método de Wilson-Han-Powell	64
3.4.	Problemas y ejecuciones	66
3.4.1.	Problema de la geodésica	66
3.4.2.	Problema de la bancarrota	68
3.4.3.	Conclusiones	69
	Anexos	71
	Anexo I: Pseudocódigos de optimización sin restricciones	73
	Anexo II: Pseudocódigos de optimización con restricciones	77
	Bibliografía	79
	Índice alfabético	81

Índice de figuras

1.	Importantes exponentes de la programación lineal en el siglo XX	XVIII
2.	Importantes exponentes de la programación no lineal en el siglo XX	XIX
1.1.	Regla de paso con CPG y CPP	11
2.1.	Condición necesaria de mínimo	17
2.2.	Direcciones factibles y linealizadas	19
2.3.	Condición suficiente de mínimo	21
2.4.	Condiciones KKT	29
3.1.	Penalización exterior	43
3.2.	Penalización interior	47
3.3.	Solución del problema de la geodésica	67

Índice de tablas

3.1. Ejecuciones del problema de la geodésica	67
3.2. Ejecuciones del problema de la bancarrota	68

Resumen

La optimización, se ha convertido en las últimas décadas, en una demanda constante en multitud de ramas del conocimiento. Es por ello, que su estudio desde el punto de vista matemático se ha visto incrementado en la última mitad del siglo pasado hasta la actualidad.

En este trabajo de fin de grado, se hace un estudio teórico-práctico de dichos problemas de optimización. En un primer lugar, se darán nociones básicas del caso mas sencillo posible, es decir, la optimización sin restricciones. Para después, comenzar a exponer los resultados más relevantes (desde un punto de vista teórico) de la optimización con restricciones.

Además, se aplicarán dichos conocimientos a la optimización cuadrática. Ésta, es un caso especial que suele causar especial interés por su sencillez en multitud de casos, y lo que no es menos importante, su utilización para resolver problemas más complejos.

Finalmente, se abordará el problema de optimización desde un punto de vista práctico. En este caso, se estudiarán diferentes métodos que muestran diversas formas de abordar el problema. Así pues, se aportarán de forma explícita los algoritmos que pueden ser implementados en cualquier lenguaje de programación (como MATLAB u otros) para obtener finalmente la solución deseada.

Abstract

The optimization, has become in the last decades, in a constant demand in multitude of branches of the knowledge. That is why its study, from the mathematical point of view, has been increased in the last half of the last century to the present.

In this final degree project, a theoretical-practical study of these optimization problems is made. In the first place, basic notions of the simplest possible case will be given, that is, the unconstrained optimization. Then, begin to expose the most relevant results (from a theoretical point of view) of the constrained optimization.

In addition, these knowledge will be applied to quadratic optimization. This is a special case that usually causes special interest because of its simplicity in many cases, and what is no less important, its use to solve more complex problems.

Finally, the optimization problem will be addressed from a practical point of view. In this case, different methods that show different ways of approaching the problem will be studied. Thus, the algorithms that can be implemented in any programming language (such as MATLAB or others) will be explicitly provided to finally obtain the desired solution.

Notación

Con el motivo de aclarar las posibles dudas que puedan surgir en la lectura del presente trabajo. A continuación se harán algunas aclaraciones con el fin de explicar la notación que se usará a lo largo del mismo:

1. Como se usará con gran frecuencia operaciones que involucran escalares, vectores y matrices, los vectores se escribirán con letra minúscula en negrita, mientras que para denotar a una matriz, se utilizarán letras mayúsculas en negrita. Por ejemplo, \mathbf{v} será un vector (y $\mathbf{0}$ sería el vector idénticamente nulo), \mathbf{M} una matriz, mientras que cualquier escalar se representará con letra normal.
2. Cuando se comparen dos vectores, se entiende que se comparan componente a componente. Es decir, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ significaría que todas las componentes del vector \mathbf{v} son positivas.
3. Como también se usarán sucesiones de vectores, para referirse al vector k -ésimo de una sucesión, se utilizará el superíndice (k) . Es decir, $\mathbf{v}^{(k)}$, denota el elemento k -ésimo de la sucesión $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por otra parte, la componente i -ésima de un vector \mathbf{v} , se denotará por el escalar v_i (así mismo, $v_i^{(k)}$ denotará el escalar correspondiente a la componente i -ésima del vector k -ésimo). Además, el escalar correspondiente a una posición (i, j) de una matriz cualquiera \mathbf{M} , se denotará por m_{ij} .
4. Los vectores que se considerarán en el trabajo serán columna, es decir, dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{n \times 1}$.
5. Dada una matriz $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n \times t}$, se denotará por \mathbf{m}_i el vector correspondiente a la fila i -ésima de la matriz \mathbf{M} . Éste será el único caso excepcional donde se considerarán vectores fila, dado que al corresponderse con la fila i -ésima, se entenderá que \mathbf{m}_i es un vector fila.
6. En los capítulos 2 y 3, se considera un problema genérico de optimización con restricciones al que se denotará por (\mathcal{Q}) . En el caso de que sólo se consideren restricciones

de igualdad, el problema genérico se denota por (\mathcal{Q}_{ig}) , mientras que, si sólo se consideran las restricciones de desigualdad, se denotarán por (\mathcal{Q}_{des}) . Con esta misma filosofía, siempre que se escriba el subíndice *ig* (resp. *des*) sólo se estarán a considerar restricciones de igualdad (resp. desigualdad).

7. En las restricciones que se utilizarán en los capítulos 2 y 3, se denotará por $\varphi(\mathbf{v})$ a las restricciones de desigualdad, y por $\phi(\mathbf{v})$ a las restricciones de igualdad. Así, también se denotará por $\Psi(\mathbf{v}) = (\varphi_1(\mathbf{v}), \dots, \varphi_m(\mathbf{v}))^\top$ al vector que contiene el valor de las restricciones de desigualdad (de forma análoga, $\Phi(\mathbf{v}) = (\phi_1(\mathbf{v}), \dots, \phi_p(\mathbf{v}))^\top$).

8. Teniendo en cuenta las funciones $\Psi(\mathbf{v})$ y $\Phi(\mathbf{v})$ de las que se ha hablado. Se denotará por $\Psi'(\mathbf{v})$ a la matriz que tiene por filas los gradientes de cada una de las restricciones de desigualdad (respectivamente $\Phi'(\mathbf{v})$ con las restricciones de igualdad).

De todas formas, a lo largo del trabajo se recordará la notación. Pero se ha considerado pertinente establecer estas bases para tener un punto de referencia en el caso de que surja alguna duda al respecto.

Introducción

Definida por la RAE como “la acción o efecto de buscar la mejor manera de realizar una actividad”, la optimización es una rama de la matemática aplicada que pretende hallar el elemento del dominio de una función (a la que comúnmente se denomina como funcional objetivo) que lo minimice o maximice. Éste, es un problema que ha sido tratado desde hace siglos, pero no ha sido hasta el siglo pasado, cuando más se ha estudiado y profundizado en su resolución.

Históricamente, su enfoque ha sido diverso a lo largo de la historia. En tiempos de antaño, importantes matemáticos como *Pierre de Fermat* (1601-1665) en su memoria *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (escrita sobre 1629 pero publicada en 1679 después de su muerte por su hijo Samuel), ya estableció reglas para el cálculo de máximos y mínimos. También *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) en su publicación *Mécanique Analytique* (1788-89), fue capaz de hallar fórmulas basadas en el cálculo que permitieron caracterizar los valores óptimos que optimizaban ciertos problemas de optimización. Otros, dieron solución a problemas clásicos que ya se enmarcaban dentro de este mismo contexto, como *Leonhard Euler* (1707-1783), con su famoso problema de los siete puentes de Königsberg.

Desde otro punto de vista, cabe resaltar las aportaciones de *Isaac Newton* (1642-1727) y *Johann Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), los cuales propusieron métodos iterativos que convergiesen a un óptimo.

Sin embargo, el máximo desarrollo de la optimización comenzó a producirse en el siglo pasado. Principalmente, a causa de las guerras acaecidas, los problemas de optimización empezaron a tener una gran relevancia para minimizar costes (en el transporte de soldados o víveres) o maximizando beneficios (procurando abordar el mayor objetivo posible que fuese menester conquistar). Además, fue entonces cuando se pasó a conocer la disciplina de la optimización con el nombre de *programación*, el cuál, se comenzó a utilizar debido al uso de este término por el ejército estadounidense para referirse a los problemas de logística que se deseaban abordar mediante el uso de esta disciplina.

Fue precisamente en ese momento, cuando se produjo el mayor desarrollamiento de la matemática aplicada, y en particular, de la optimización. Fundada en 1941, la *Oficina*

de Investigación Científica y Desarrollo (IOCD), fue el primer órgano organizador de los matemáticos contratados por las Fuerzas Armadas de los E.E.U.U para el desarrollo de las matemáticas requeridas por la II Guerra Mundial. Sin embargo, fue en 1943 cuando se creó el *Comité de Matemática Aplicada* (CMA), que siendo un órgano dentro de la IOCD, sirvió para aprovechar el financiamiento del gobierno (a causa del momento) para el desarrollo de la matemática aplicada.

En este contexto, en un primer lugar se desarrolló la programación lineal, que comprendía la resolución de problemas de optimización de una función lineal en un conjunto definido por restricciones afines. En este marco, el algoritmo más famoso es el Simplex, que fue desarrollado en 1947 por *George Bernard Dantzig* (1914-2005). El cual, ya llevaba estudiado el tema al menos desde 1941, fecha en la que fue contratado por las Fuerzas Armadas para llevar a cabo enormes planteamientos logísticos. Además, también cabe destacar la teoría de la dualidad que fue publicada en el mismo año (1947) por *John von Neumann* (1903-1957).

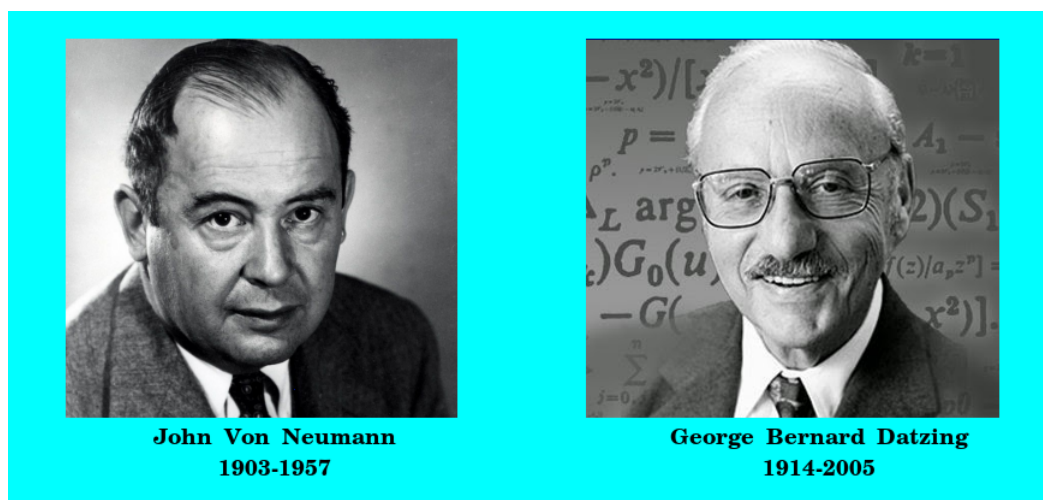


Figura 1: Importantes exponentes de la programación lineal en el siglo XX

De forma paralela, y también posterior a la II Guerra Mundial, a parte de continuar estudiando los problemas de programación lineal, también se amplió el estudio a la programación no lineal. La cual, procuraba dar solución a aquellos problemas donde no había linealidad en las funciones a optimizar ni en las restricciones que definían los conjuntos donde se optimizaban dichas funciones. Para ello, fue necesario generalizar conceptos ya conocidos a un caso más genérico.

En este marco, una de las aportaciones más importantes fueron las conocidas con-

diciones de Karush-Kuhn-Tucker (conocidas comúnmente como condiciones KKT), que generalizan las condiciones que había dado Lagrange en su día. Éstas, fueron publicadas por primera vez en el verano de 1950 de forma conjunta por *Harold William Kuhn* (1925-2014) y *Albert William Tucker* (1905-1995). Los cuales, utilizaron también en dicho año por primera vez el término de *programación no lineal* para referirse a esta disciplina. Sin embargo, se descubrió con posterioridad que *William Karush* (1917-1997) había demostrado el mismo resultado en su trabajo de fin de máster del año 1939. Por consiguiente, hoy en día se atribuye dicho descubrimiento a los tres en conjunto.

Además, íntimamente ligadas con las condiciones KKT, el matemático *Fritz John* (1910-1994) publicó en un artículo en 1948 un resultado similar al de las condiciones KKT. El cual, las generaliza a un marco más amplio y se conocen en honor a él, como las condiciones de Fritz-John.

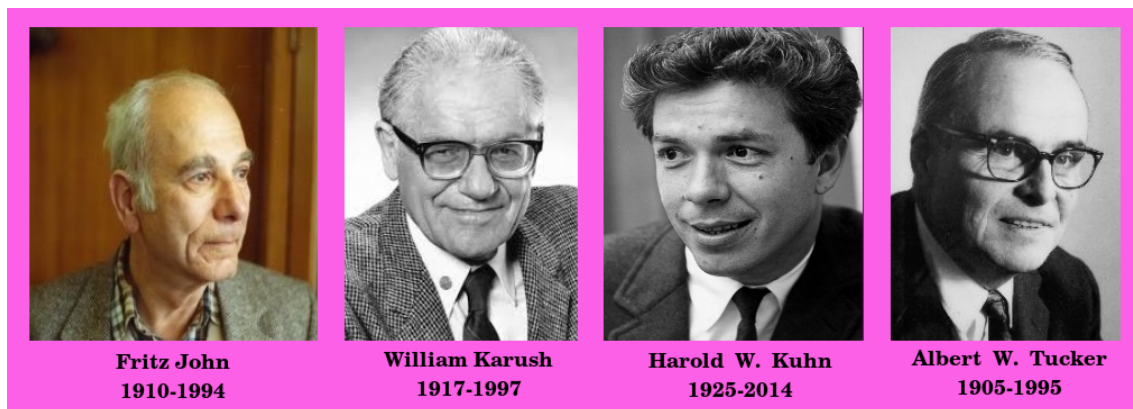


Figura 2: Importantes exponentes de la programación no lineal en el siglo XX

Desde que fueron publicadas, las condiciones KKT adquirieron gran fama y prestigio. Se podría decir, que fueron el primer paso hacia esta nueva rama del saber. Gracias a su reconocimiento, dentro del mundo matemático, se creó oficialmente en 1971 la primera revista que trató a la optimización como tema fundamental, *Mathematical Programming*. La cuál, precedió a una segunda bautizada con el nombre de *Mathematical Programming Society*.

Finalmente, con el enorme desarrollo de la informática y de las máquinas de cálculo en la última mitad del siglo pasado, se diseñaron muy diversos algoritmos que permitieron dar solución a los problemas de programación. La variedad en dichos algoritmos es muy diversa en función del enfoque que se le da al problema para hallar la solución. En una mayoría, muchos de ellos buscan calcular puntos cumpliendo las condiciones KKT y hacer un estudio

posterior para comprobar si son realmente solución. Por otro lado, otros intentan buscar el mínimo directamente teniendo en cuenta las características del conjunto donde se quiere minimizar, mientras que, también los hay que recurren a la resolución de subproblemas más sencillos que permitan crear un proceso iterativo que llegue a la solución.

Hogaño, la optimización esta presente en multitud de facetas de nuestra vida cotidiana. Las compañías aéreas, diseñan los vuelos con la intención de minimizar los costes y maximizar su beneficio. En la medicina, los tratamientos contra el cáncer, pasan por un proceso de optimización para minimizar su impacto nocivo en la salud de los pacientes. Los inversores procuran minimizar los riesgos en sus decisiones a la vez que garantizar una rentabilidad satisfactoria. Pero más allá, incluso la propia naturaleza está optimizando continuamente procurando un estado de mínima energía. Es el caso de los rayos de luz que siguen las trayectorias que minimizan la duración de su recorrido.

Todos estos problemas actuales, se visionan en una formulación matemática como problemas de optimización, de hecho, en [5, Cap. 12] se modelizan multitud de problemas en una formulación adaptada a la programación matemática. Pero calcular su solución, puede llegar a ser bastante complejo en ocasiones. Este trabajo, pretende dar respuesta a estos problemas tratando el caso en el que las funciones a minimizar y las restricciones, sean diferenciables.

Para empezar, el primer capítulo se dedica a la optimización sin restricciones. Éste es el caso más sencillo dentro de esta disciplina, la cuál desea hallar el valor óptimo del funcional objetivo en todo su dominio.

Para ello, se comienza presentando el problema y caracterizando sus óptimos. Como se ha dicho, en este trabajo se trata el caso donde todas las funciones que intervienen en el problema son diferenciables, y éste, será un hecho crucial para poder caracterizar los óptimos. Posteriormente, se aumentarán las hipótesis sobre los problemas a tratar para poder demostrar cuando éstos tienen solución y ésta es única. Para ello, se introducirá la definición de coercitividad y convexidad.

Una vez explicados estos conceptos, se introducirán los funcionales cuadráticos, los cuales son interesantes desde el punto de vista teórico, debido a que permiten aplicarles con sencillez las condiciones de optimalidad que se hayan visto con anterioridad.

Y para finalizar el capítulo, se presentarán diversos métodos, a través de los cuales, se podrá calcular el óptimo de forma exacta o numérica (aproximada). En este contexto, todos estos métodos están basados en un mismo algoritmo, y lo que se presentará son diferentes formas de abordar cada paso de dicho algoritmo. De esta forma, combinando las diferentes maneras de abordar los pasos, se tendrá una enorme familia de métodos.

El interés que subyace detrás de este capítulo inicial, son varios. Por un lado, el de

comenzar a manejar los conceptos básicos de la optimización, así como, resultados básicos que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo. Y por otra parte, el de conocer diferentes formas de resolver los problemas de optimización sin restricciones, ya que será imprescindible para resolver los problemas de optimización con restricciones.

Posteriormente, el segundo capítulo ya se introducirá de pleno en el mundo de la optimización con restricciones. En este caso, el objetivo sigue siendo el mismo, hallar el óptimo de un funcional objetivo. Sin embargo, se añade la peculiaridad de que no todos los valores de su dominio son admisibles. Esto quiere decir que sólo se desea optimizar dicho funcional en un subconjunto de su dominio. Este subconjunto, quedará determinado por una serie de funciones que se denominan restricciones, y nuevamente, sólo se tratará en este trabajo el caso en el que dichas restricciones sean diferenciables.

El hecho de la diferenciables, vuelve a ser muy interesante en este capítulo, ya que permite dar una variedad de condiciones necesarias y/o suficientes que permiten caracterizar los óptimos del problema. Y precisamente, será ese el primer objetivo del capítulo.

Luego, se introducirán los multiplicadores de Lagrange, que volverán a dar condiciones necesarias para óptimos en un caso especial de restricciones. De esta forma, se ampliarán dichas condiciones a un caso genérico incluyendo más tipos de restricciones al introducir los multiplicadores de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz-John.

Todos esos multiplicadores, permitirán aportar importantes resultados para seguir caracterizando los óptimos de los problemas que se tratan. Estos resultados, serán de vital importancia con posterioridad debido a que muchos métodos que se verán con posterioridad, se basarán en conseguir puntos que cumplan dichas condiciones (los cuales son candidatos a óptimo) y haciendo un estudio posterior, se determinaría si realmente son óptimos o no. En este sentido, también se aportarán condiciones suficientes bajo las cuales, las condiciones vistas aporten exactamente el óptimo del problema.

Finalmente y para terminar este segundo capítulo, se introducirán algunas nociones básicas sobre la teoría de la dualidad. Su interés erradica en la creación de un nuevo problema (al que se denominará como problema dual) con el objetivo de que éste sea más sencillo que el problema inicial (al que se conocerá como problema primal). De esta forma, se podrá establecer una relación entre las soluciones de ambos problemas para que en ocasiones fuese conveniente resolver el problema dual en vez del primal.

Todo esto, se aplicará también a la programación cuadrática. Este tipo especial de optimización, se basa en un funcional cuadrático (se definirá en los capítulos uno y dos) y un conjunto definido por restricciones afines. La particularidad de este tipo de problemas, permitirá aplicar los conceptos introducidos en el capítulo dos de forma sencilla y simple.

Sin embargo, es difícil que en la realidad, los problemas de optimización que se plantean,

se enmarquen dentro de este marco de problemas. Pero el interés mayoritario de estos, es debido a su utilización en algunos métodos de resolución de problemas genéricos, y es por ello, que se le hace un hueco en el trabajo.

Finalmente, todo concluye en el tercer y último capítulo dedicado en exclusividad a los métodos de resolución. Aquí será donde se empleen los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores para poder deducir todos los algoritmos que se planteen.

La primera sección se dedicará a los métodos de penalización. Se comenzará por la penalización exterior seguida de la penalización interior. Éstos, son los más intuitivos y abordan directamente el problemas penalizando aquellos puntos que no se encuentren dentro del conjunto admisible donde se desea optimizar el funcional objetivo. Así pues, estos métodos aportan como solución un óptimo calculado de forma numérica resolviendo una secuencia de problemas sin restricciones.

Sin embargo, en la práctica a veces resulta problemática la resolución de estos tipos de problemas, por lo que se introduce un nuevo método. Éste es el conocido como Lagrangiano aumentado, y se basa en las condiciones de optimalidad que aportan los multiplicadores de Lagrange y KKT. En este caso, el método es muy interesante debido a su buen funcionamiento en la práctica, pero en vez de converger a un óptimo, lo hace a un punto cumpliendo las condiciones KKT. Es por ello, que es necesario recurrir a los conceptos teóricos explicados en el capítulo dos para estudiar si el punto obtenido es realmente un óptimo.

A continuación, se dará otra visión de resolución hablando de métodos basados en direcciones factibles. En este caso, este tipo de métodos, buscan el óptimo mediante un proceso iterativo que produzca una sucesión de puntos del conjunto donde se desea optimizar el funcional.

Para ello, un primer método será el desarrollado por Zoutendijk, que debe recurrir a la programación lineal. Nótese, que no es extraño recurrir a la programación lineal, debido a la existencia de métodos que funcionan muy bien en la práctica como el método Símplex. En este trabajo, no se trata la programación lineal (dado que el objetivo es tratar la programación no lineal diferenciable), pero se aportarán referencias que se pueden consultar en las que se explica con detalle el método Símplex, así como, su deducción. Además, también se aportará otro método basado en direcciones factibles utilizado en la resolución de la programación cuadrática.

Finalmente, se dedicará la última sección a los métodos de tipo SQP (sequential quadratic programming) que como bien indica su nombre, se basan en la programación cuadrática. Y es que su metodología se basa en la resolución sucesiva de problemas de tipo cuadrático.

Por este hecho, se utiliza los conocimientos que se hayan introducido a lo largo del

trabajo sobre los problemas cuadráticos. Nuevamente, su convergencia aportará puntos cumpliendo las condiciones que derivan de los multiplicadores de Lagrange y KKT. Es por ello, que se debería hacer una reflexión posterior al igual que sucedía ya con otro tipo de métodos que convergían a estos tipos de puntos.

Por otra parte, también se han añadido dos Anexos que contienen pseudocódigos relativos a los algoritmos y métodos introducidos a lo largo del trabajo. Su interés es completar la información o aclarar dudas que podrían surgir en la lectura de los algoritmos. Sin embargo, si se desea consultar los códigos completos de los métodos introducidos, también se puede hacer en el archivo .zip que se adjunta con la entrega del trabajo. En él, se tienen los archivos .m que se hicieron con la programación en Matlab de todos los métodos que se introdujeron en el trabajo, y también, algunas ejecuciones de prueba que muestra su funcionalidad.

De esta forma, se pondría punto y final a este trabajo. Lo cierto, es que hay muchos más métodos de los que se podría hablar y basados en muchos más enfoques. Pues bien, el tema es enorme y la diversidad inmensa, por lo que se ha querido centrar el trabajo en aquellos algoritmos y técnicas que se suelen usar con mayor frecuencia dando una visión diversa y útil.

Por mi parte, espero que resulte satisfactoria y agradable la lectura del presente trabajo. Con él, deseo transmitir el primor de esta joven rama de las matemáticas que en su corta vida, tanto ha dado de sí y para la que se vislumbra un futuro prometedor lleno de investigación y nuevos descubrimientos. Es así, que sólo anhelo transmitir con su lectura, aunque sólo sea una pizca, la enorme pasión y curiosidad que la optimización ha suscitado en mi interior durante la realización de este trabajo de fin de grado.

Capítulo 1

Optimización sin restricciones

Antes de comenzar a estudiar la optimización con restricciones, se dedicará este primer capítulo al caso sin restricciones. Esto es debido a que posteriormente, se usaran varios métodos de este capítulo para la resolución de los problemas posteriores. Y además, también se introducirán conceptos y resultados que se tendrán en cuenta con frecuencia.

1.1. Conceptos generales

Primeramente, se definirá un problema genérico al que se denotará por (\mathcal{P}) . Para ello, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función a la que se denotará como *funcional objetivo*, el problema de optimización sin restricciones, consiste en hallar el elemento $\mathbf{u} \in \Omega$ que minimice el funcional objetivo, esto es:

$$\mathbf{u} \in \Omega : J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \Omega} J(\mathbf{v}) \quad (\mathcal{P})$$

Observación 1.1. Si en vez de minimizar, se pretende maximizar, teniendo en cuenta que $\max_{\mathbf{v} \in \Omega} J(\mathbf{v}) = -\min_{\mathbf{v} \in \Omega} (-J)(\mathbf{v})$, se llega a que ambos son problemas equivalentes. Por consiguiente, de ahora en adelante sólo se hará referencia al problema (\mathcal{P}) .

Definición 1.2. Un punto $\mathbf{u} \in \Omega$ se denominará *mínimo local (o relativo)* del funcional J si existe un $\varepsilon > 0$ tal que,

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in B(\mathbf{u}, \varepsilon) \subset \Omega \quad (1.1)$$

en el caso de que la desigualdad fuese estricta, se denominaría *mínimo local estricto*, esto es,

$$J(\mathbf{u}) < J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in B(\mathbf{u}, \varepsilon) \subset \Omega \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{u} \quad (1.2)$$

Definición 1.3. Un punto $\mathbf{u} \in \Omega$ que verifica 1.1 en todo el dominio Ω , entonces se denominará *mínimo global (o absoluto)*, esto es,

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega$$

Nuevamente, si la desigualdad es estricta (si se cumple 1.2 en todo Ω), se conocerá como *mínimo global estricto*, que en el caso de existir, éste es único.

1.2. Condiciones de optimalidad con derivadas

Llegados a este punto, se supondrá en esta sección que el funcional J es dos veces derivable, y se pretenderá dar respuesta a las condiciones que debe verificar un elemento $\mathbf{u} \in \Omega$ para que sea solución del problema (\mathcal{P}). Para ello, se introducen los siguientes resultados.

Teorema 1.4 (Condición necesaria de mínimo local con derivada primera). *Dado un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivable siendo Ω un abierto. Entonces, un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ será un mínimo relativo si el gradiente de J en dicho punto es nulo, es decir,*

$$\nabla J(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial J}{\partial v_1}(\mathbf{u}), \dots, \frac{\partial J}{\partial v_n}(\mathbf{u}) \right)^\top = \mathbf{0}$$

Demostración. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, para t suficientemente pequeño, como \mathbf{u} es un mínimo local, es obvio que, $J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u})$. Por otro lado, como J es derivable, existe el gradiente de J , entonces, dada una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ del espacio \mathbb{R}^n ,

$$[\nabla J(\mathbf{u})]_i = D_{\mathbf{e}_i} J = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{e}_i) - J(\mathbf{u})}{t}$$

ahora bien, como $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, tomando en particular $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{e}_i) - J(\mathbf{u})}{t} \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{e}_i) - J(\mathbf{u})}{t} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ya que $J(\mathbf{u} + t\mathbf{e}_i) \geq J(\mathbf{u})$ para $t > 0$ suficientemente pequeño, pero como J es derivable, tiene que existir dicho límite, por lo que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{e}_i) - J(\mathbf{u})}{t} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

de lo que se obtiene que $[\nabla J(\mathbf{u})]_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ y dado que todas las componentes son nulas, se concluye el resultado. \square

Teorema 1.5 (Condición necesaria de mínimo con derivada segunda). *Dado un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable con Ω abierto. Si $\mathbf{u} \in \Omega$ es un mínimo local del problema (\mathcal{P}), entonces se verifica:*

(1) $\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(2) *La matriz hessiana de J , $HJ(\mathbf{v})$ evaluada en \mathbf{u} , es semidefinida positiva, es decir, $\mathbf{v}^\top [HJ(\mathbf{u})] \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. El punto (1) ya se ha visto en 1.4. Ahora, para probar (2), se procede de una forma análoga.

Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, como \mathbf{u} es un mínimo relativo, para un $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, $J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u})$. Aplicando la fórmula de Taylor-Young, se puede desarrollar el valor de $J(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$ centrado en \mathbf{u} , obteniendo así,

$$J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = J(\mathbf{u}) + \nabla J(\mathbf{u})t\mathbf{v} + \frac{1}{2} (t\mathbf{v})^\top HJ(\mathbf{u})(t\mathbf{v}) + o(t^3)$$

pero debido a (1), se conoce que $\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, esto se traduce en,

$$J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{v}^\top HJ(\mathbf{u})\mathbf{v} + o(t^3)$$

y como $J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u})$, al dividir por t^2 y haciendo tender $t \rightarrow 0$,

$$0 \leq \frac{J(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - J(\mathbf{u})}{t^2} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top HJ(\mathbf{u})\mathbf{v} + \frac{o(t^3)}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top HJ(\mathbf{u})\mathbf{v}$$

y como el \mathbf{v} tomado es arbitrario, se obtiene el resultado. □

Este último teorema, aporta una condición necesaria de mínimo, pero no suficiente. Para ello, es necesario reforzar las hipótesis exigiendo que la hessiana en el mínimo sea definida positiva, tal y como se pretende en el siguiente teorema.

Teorema 1.6 (Condición suficiente de mínimo de segundo orden). *Dado un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable con Ω abierto. Si existe un elemento $\mathbf{u} \in \Omega$ verificando que:*

(1) $\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(2) *La hessiana del funcional evaluada en \mathbf{u} es definida positiva, es decir, $\mathbf{v}^\top HJ(\mathbf{u})\mathbf{v} > 0$ para todo $\mathbf{v} \in \Omega$.*

Entonces \mathbf{u} es un mínimo local del funcional J .

Demostración. Se puede ver en [10, pág. 12-13]. □

1.3. Existencia y unicidad de solución

Una vez planteado el problema y vistas algunas condiciones que cumplen los mínimos, se pretende estudiar condiciones de existencia y unicidad de solución dependiendo del tipo de funcional objetivo que se tenga.

Con este objetivo, se introducirá el concepto de coercitividad. Sin embargo, en primer lugar, se introduce el siguiente resultado que es el más obvio e intuitivo.

Teorema 1.7. *Dado un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, donde Ω es un conjunto acotado y cerrado. Entonces, existe al menos un elemento $\mathbf{u} \in \Omega$ solución de (\mathcal{P}) .*

Demostración. Al ser Ω acotado y cerrado, es compacto, y como toda función continua definida en un dominio compacto alcanza su máximo y mínimo, $J(\mathbf{v})$ tiene al menos un mínimo en \mathbf{u} . □

1.3.1. Funcionales coercitivos

Definición 1.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no acotado, y dado el funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que dicho funcional es coercitivo si,

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty} J(\mathbf{v}) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{d(\mathbf{v}, \partial\Omega) \rightarrow 0} J(\mathbf{v}) = +\infty$$

donde $d(\mathbf{v}, \partial\Omega)$ denota la distancia del elemento \mathbf{v} a la frontera de Ω .

Teorema 1.9. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no acotado, cerrado y no vacío. Si $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional continuo y coercitivo, entonces existe al menos un $\mathbf{u} \in \Omega$ solución de (\mathcal{P}) .*

Demostración. Se toma un $\mathbf{v}^{(0)} \in \Omega$ arbitrario, a partir del cuál, se define el siguiente conjunto,

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{v} \in \Omega : J(\mathbf{v}) \leq J(\mathbf{v}^{(0)}) \right\}$$

sobre el cuál se tiene,

- Es no vacío, ya que en particular $\mathbf{v}^{(0)} \in \mathcal{W}$.
- Es cerrado por ser intersección de dos conjuntos cerrados, que son Ω y la imagen inversa continua de un cerrado, es decir, $J^{-1}((-\infty, J(\mathbf{v}^{(0)})])$.
- Es acotado, pues si no lo fuese, tendría que existir una sucesión $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k \geq 0} \subset \mathcal{W}$ con $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}^{(k)}\| = +\infty$. Pero por otro lado, como J es coercitivo, para dicha sucesión se tendría que $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\mathbf{w}^{(k)}) = +\infty$, lo que es una contradicción con la definición del conjunto \mathcal{W} , pues dado $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathcal{W}$, $J(\mathbf{w}^{(k)}) \leq J(\mathbf{v}^{(0)}) < +\infty$.

Por consiguiente, \mathcal{W} es compacto y como J es continuo, aplicando 1.7, existe solución al problema,

$$\mathbf{u} \in \mathcal{W} : J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} J(\mathbf{w})$$

pero éste es equivalente al problema (\mathcal{P}) , dado que la solución de (\mathcal{P}) , está en \mathcal{W} . De lo que se deduce el resultado. \square

1.3.2. Funcionales convexos

La coercitividad que se ha introducido anteriormente, permite afirmar la existencia de solución del problema en el caso de las hipótesis del teorema 1.9. Sin embargo, la existencia puede ser múltiple, y por este motivo, se pretende ver ahora en que casos dicha solución es única. Para ello, se definirá el concepto de convexidad, entorno al cual, girarán los resultados de unicidad de solución.

Definición 1.10. Dado un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se dirá que es convexo, si dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Omega$, se cumple,

$$\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w} \in \Omega \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

es decir, el segmento que une dos puntos cualquiera del conjunto Ω , está contenido en Ω .

Definición 1.11. Dado un conjunto convexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es convexo si verifica,

$$J(\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w}) \leq \lambda J(\mathbf{v}) + (1 - \lambda) J(\mathbf{w}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

y en caso de que fuese estricta la desigualdad, se dirá que es estrictamente convexo.

Se verá ahora algunas caracterizaciones de los funcionales convexos. Esto sera útil para identificarlos y conocer diversas condiciones que verifican.

Teorema 1.12. *Los funcionales convexos verifican las siguientes propiedades:*

- (a) *La suma de funcionales convexos y estrictamente convexos, es convexa y estrictamente convexa respectivamente.*
- (b) *Si $J(\mathbf{v})$ es un funcional convexo (resp. estrictamente convexo) y $\alpha \in \mathbb{R}$ un número positivo, entonces $\alpha J(\mathbf{v})$ es convexo (resp. estrictamente convexo).*
- (c) *Si $J(\mathbf{v})$ es un funcional convexo (resp. estrictamente convexo) definido en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $G(y)$ es una función creciente (resp. estrictamente creciente) y convexa definida en el rango de $J(\mathbf{v})$, entonces la composición $G(J(\mathbf{v}))$ es convexa (resp. estrictamente convexa).*

Demostración. Se puede consultar en [21, pág. 56]. \square

Teorema 1.13. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Entonces se verifica:*

- (1) *J es convexo, si y sólo si, $J(\mathbf{w}) \geq J(\mathbf{v}) + (\nabla J(\mathbf{v}))^\top (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Omega$.*
- (2) *J es estrictamente convexo, si y sólo si, $J(\mathbf{w}) > J(\mathbf{v}) + (\nabla J(\mathbf{v}))^\top (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \Omega$.*

Demostración. Se puede ver en [15, págs. 42-43]. \square

Teorema 1.14. *Sea Ω un abierto convexo, con $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ clase 2 en Ω , se tiene,*

- (1) *J es convexo, si y sólo si, $HJ(\mathbf{v})$ es semidefinida positiva $\forall \mathbf{v} \in \Omega$.*
- (2) *Si $HJ(\mathbf{v})$ es definida positiva $\forall \mathbf{v} \in \Omega$, entonces, J es estrictamente convexo.*

Demostración. Se puede consultar en [15, págs. 43-44]. \square

Los resultados introducidos, son los que se utilizarán a lo largo del trabajo. Pero para mayor información acerca de los conjuntos y funcionales convexos, se puede consultar [4].

Teorema 1.15. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional convexo. Entonces si $\mathbf{u} \in \Omega$ es un mínimo local, se verifica:*

- (1) *\mathbf{u} es un mínimo global.*
- (2) *Si J es estrictamente convexo, \mathbf{u} es el único mínimo global.*

Demostración. Para probar (1), se demostrará por reducción al absurdo, por lo que se supondrá que existe $\bar{\mathbf{u}} \in \Omega$ tal que $J(\bar{\mathbf{u}}) < J(\mathbf{u})$, de modo que \mathbf{u} no es un mínimo global. Usando ahora que el funcional es convexo, se obtiene,

$$J(\lambda \bar{\mathbf{u}} + (1 - \lambda)\mathbf{u}) \leq \lambda J(\bar{\mathbf{u}}) + (1 - \lambda)J(\mathbf{u}) < \lambda J(\mathbf{u}) + (1 - \lambda)J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

de modo que al tomar λ suficientemente pequeño, se toman puntos tan próximos a \mathbf{u} como se quiera en los que el funcional J toma valores más pequeños que en \mathbf{u} , lo que contradice el hecho de que \mathbf{u} es mínimo local, de lo que se deduce el resultado.

Para probar (2), usando nuevamente la reducción al absurdo, se supondrá que existe $\bar{\mathbf{u}} \in \Omega - \{\mathbf{u}\}$ de modo que $J(\bar{\mathbf{u}}) = J(\mathbf{u})$. Y usando la hipótesis de convexidad del funcional,

$$J(\lambda \bar{\mathbf{u}} + (1 - \lambda)\mathbf{u}) < \lambda J(\bar{\mathbf{u}}) + (1 - \lambda)J(\mathbf{u}) = \lambda J(\mathbf{u}) + (1 - \lambda)J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

lo que contradice el hecho de que \mathbf{u} sea un mínimo global, luego el mínimo global es único. \square

Corolario 1.16. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, convexo no vacío y dado un funcional $J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, coercitivo y estrictamente convexo, entonces el problema (\mathcal{P}) tiene solución y ésta es única.*

1.4. Funcionales cuadráticos

A continuación, en esta sección, se estudiarán los funcionales cuadráticos, que debido a sus propiedades, permiten analizar de forma sencilla los conceptos introducidos en la sección anterior.

Definición 1.17. Sea $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, se dice que éste es cuadrático si está definido de la siguiente forma:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica y $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.18. Nótese que en la definición anterior, no es necesario que $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n$ sea simétrica. Pues bien, para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2} \mathbf{v}$, y dado que $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top$ es simétrica independientemente de que \mathbf{Q} lo sea, se puede definir el funcional cuadrático para matrices $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ generales como:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{4} \mathbf{v}^\top (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top) \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v}$$

Teorema 1.19. Sea $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional cuadrático, entonces se verifica:

- (1) $\nabla J(\mathbf{v}) = \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}$ y $HJ(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- (2) J es convexo, si y sólo si, \mathbf{Q} es semidefinida positiva.
- (3) J es estrictamente convexo, si y sólo si, \mathbf{Q} es definida positiva.

Demostración. (1) El funcional $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se escribe como:

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n v_j q_{ij} v_i - \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Derivando ahora respecto de la componente v_i y teniendo en cuenta que \mathbf{Q} es simétrica:

$$\frac{dJ}{dv_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n v_j q_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_{ji} v_j - c_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n v_j q_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n q_{ij} v_j - c_i = \sum_{j=1}^n v_j q_{ij} - c_i = (\mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c})_i$$

Por lo que, $\nabla J(\mathbf{v}) = \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}$. Y si se vuelve a derivar una segunda vez:

$$\frac{d^2 J}{dv_i dv_j} = q_{ij} \Rightarrow HJ(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}$$

(2) Por el teorema 1.13, se tiene:

$$J \text{ es convexo} \Leftrightarrow J(\mathbf{w}) - J(\mathbf{v}) - \nabla J(\mathbf{v})^\top (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$$

entonces, aplicando este hecho y haciendo un desarrollo de Taylor (que como $J(\mathbf{v})$ tiene grado dos, entonces el desarrollo de Taylor es exacto si se toma hasta la derivada segunda) se tiene,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= J(\mathbf{v}) + \nabla J(\mathbf{v})^\top (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{v})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \Rightarrow \\ \Rightarrow J(\mathbf{w}) - J(\mathbf{v}) - \nabla J(\mathbf{v})^\top (\mathbf{w} - \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{v})^\top \mathbf{Q} (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

lo cual sucede, si y sólo si, \mathbf{Q} es semidefinida positiva.

(3) Se procede de forma análoga al anterior, llegando a la desigualdad estricta (dado que el funcional es estrictamente convexo), por lo que se obtiene para \mathbf{Q} la definición de matriz definida positiva. \square

Observación 1.20. El resultado es análogo para matrices $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ teniendo en cuenta la observación 1.18, de la que se deduce que:

$$\nabla J(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2} \mathbf{v} - \mathbf{c} \qquad HJ(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2}$$

1.5. Métodos para la obtención del mínimo

Hechos los estudios anteriores, es conveniente introducir algunos algoritmos que nos permitan llegar a la obtención del mínimo que se busca. Para ello, la idea fundamental, es tomar un punto inicial $\mathbf{u}^{(0)}$ (próximo a la solución si es posible), y a partir de él, construir una sucesión que converja a la solución.

Para ello, se diseñará un algoritmo genérico basado en dos etapas. Una de ellas, será calcular una dirección $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, tal que $J(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}) < J(\mathbf{u}^{(k)})$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ (a la que se denominará *dirección de descenso*). La otra etapa, es calcular el valor α (al que se denominará como *paso*) que garantiza el descenso del valor del funcional. Con este motivo, se introduce el siguiente teorema que será de ayuda.

Teorema 1.21 (Condición suficiente de dirección de descenso). *Dado un funcional $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, entonces si existe una dirección $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla J(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} < 0$, entonces \mathbf{d} es una dirección de descenso para el punto \mathbf{u} .*

Demostración. Haciendo un desarrollo de Taylor centrado en \mathbf{u} , se obtiene que,

$$J(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{d}) = J(\mathbf{u}) + \alpha \nabla J(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} + o(\alpha) \Rightarrow \frac{J(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{d}) - J(\mathbf{u})}{\alpha} = \nabla J(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \quad (1.3)$$

por lo que teniendo en cuenta que \mathbf{d} es una dirección de descenso, se tiene que para un α suficientemente pequeño, $J(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{d}) < J(\mathbf{u})$, por lo que haciendo el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ en la expresión 1.3, se tiene que $\nabla J(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} < 0$. \square

Algoritmo 1.22 (Algoritmo genérico de descenso). *Se procede del siguiente modo:*

PASO 0: *Se proporciona el $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ para arrancar el algoritmo (si es posible, cerca de la solución que se denotará por \mathbf{u}), un valor de tolerancia δ y $k = 0$.*

PASO 1: *Se calcula una dirección de descenso $\mathbf{d}^{(k)}$, y un paso $\alpha_k \in (0, \infty)$ que garantiza descenso, es decir, $J(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}) < J(\mathbf{u}^{(k)})$. Y se actualiza $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$, $k = k + 1$.*

PASO 2: *Se comprueban los criterios de convergencia,*

$$\frac{\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}\|}{1 + \|\mathbf{u}^{(k+1)}\|} \leq \delta \quad \text{y} \quad \|\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)})\| < \delta$$

que de cumplirse se finaliza, y en caso contrario, se volvería al PASO 1.

Observación 1.23. Si se desea consultar un pseudocódigo de este algoritmo genérico, se puede ver un ejemplo en el Anexo I.

1.5.1. Cálculo del paso

Para calcular el paso α_k , es importante definir la función $j : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$j(\alpha) = J(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$$

El objetivo, es hallar un $\alpha_k \in [0, \infty)$ que cumpla que $j(\alpha_k) < j(0)$, por lo que se plantea un problema de minimización unidimensional. Para resolverlo, nótese que si J es suficientemente diferenciable, entonces,

$$\begin{aligned} j'(\alpha) &= \left(\mathbf{d}^{(k)}\right)^\top \nabla J(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) \Rightarrow j'(0) = \left(\mathbf{d}^{(k)}\right)^\top \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) < 0 \\ j''(\alpha) &= \left(\mathbf{d}^{(k)}\right)^\top HJ(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}) \left(\mathbf{d}^{(k)}\right) \end{aligned}$$

y usando estos cálculos, se pueden plantear diferentes situaciones, y a su vez distintas formas de cálculo del paso.

Paso óptimo:

El *paso óptimo*, se denota al paso exacto que da el óptimo. Éste vendrá caracterizado por $j'(\alpha) = 0$, y en algunos casos particulares, como los funcionales cuadráticos definidos por una matriz simétrica definida positiva, es posible calcularlo:

$$j'(\alpha) = \mathbf{d}^\top (\mathbf{Q}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{d}) - \mathbf{c}) = \mathbf{d}^\top \mathbf{Q} \mathbf{u} + \alpha \mathbf{d}^\top \mathbf{Q} \mathbf{d} - \mathbf{d}^\top \mathbf{c} \Rightarrow j'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\mathbf{d}^\top (\mathbf{Q} \mathbf{u} - \mathbf{c})}{\mathbf{d}^\top \mathbf{Q} \mathbf{d}}$$

Dicotomía

La situación anterior, no es nada común en la realidad. En su defecto, si se conoce un intervalo $(a, b) \subset (0, +\infty)$ en el que se encuentra el paso α_k . Una buena opción sería calcular la solución al problema $j'(\alpha) = 0$ mediante el método de dicotomía (o de Newton-Raphson si $j \in \mathcal{C}^2(a, b)$). Además, si no se conoce el intervalo (a, b) , éste se puede aproximar mediante algún procedimiento numérico. Para conocer detalles sobre su implementación, se puede consultar [7] o en [17, págs. 38-57], en el que se aportan dos versiones, una en la que se utiliza la derivada ($j'(\alpha)$) y otra en la que no es necesario evaluarla. De dichas versiones, se puede consultar sus pseudocódigos en el Anexo I.

Algoritmos de criterio de paso grande y pequeño

Uno de los algoritmos más empleados, se puede englobar dentro de una familia de métodos cuyo objetivo será elegir un paso que no sea ni demasiado pequeño (a lo que se conocerá como criterio de paso pequeño (CPP)), ni demasiado grande (a lo que se conocerá como criterio de paso grande (CPG)). Por tanto, se dirá que un paso es admisible (CPA) si no verifica CPP ni CPG. De este modo, toda esta familia de reglas, siguen el siguiente algoritmo genérico:

Algoritmo 1.24 (Regla general de CPP y CPG). *Se sigue el siguiente procedimiento:*

PASO 0: *Se aporta un intervalo inicial $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ de tal manera que α_{min} cumpla CPP y α_{max} cumpla CPG.*

PASO 1: *Se toma $\alpha = (\alpha_{min} + \alpha_{max})/2$ y se comprueba si α cumple CPP. En caso afirmativo, se actualiza $\alpha_{min} = \alpha$ y se vuelve al PASO 1, y en caso contrario, se pasa al paso*

PASO 2.

PASO 2: *Se comprueba si α cumple el CPG. En caso afirmativo, se actualiza $\alpha_{max} = \alpha$, y en caso contrario, α es admisible, por lo que se finaliza el algoritmo y se toma α como solución.*

Observación 1.25. En el PASO 1 del algoritmo 1.24, se toma como α de prueba el punto medio del intervalo. Pero en realidad, se podría generar un punto de prueba mediante cualquier otra metodología como la regla de la secante u otras. Por otra parte, en el PASO 0, en vez de aportar un intervalo cumpliendo dichas condiciones, se puede hacer un procedimiento previo para inicializar el algoritmo con la búsqueda numérica de un intervalo verificando las condiciones requeridas (se puede ver un pseudocódigo de esta inicialización en el Anexo I).

El procedimiento anterior, proporciona una gran variedad de reglas de cálculo del paso en función de los diferentes CPP y CPG que se podrían tomar. En este marco, las tres

reglas más conocidas y usadas, son las siguientes:

1. *Regla del Armijo*: No cuenta con CPP y se dice que un paso α es demasiado grande si $j(\alpha) > j(0) + \rho j'(0)\alpha$ para un valor de $\rho \in (0, 1/2)$.
2. *Regla de Goldstein*: Un paso α cumple CPP si $j(\alpha) < j(0) + m_2 j'(0)\alpha$, y verificará el CPG si $j(\alpha) > j(0) + m_1 j'(0)\alpha$, donde $m_1 \in (0, 1/2)$ y $m_2 \in (1/2, 1)$. Además, en la práctica se suele usar $m_2 = 1 - m_1$.
3. *Regla de Wolfe-Powell*: Un paso α cumple el CPP si $j'(\alpha) < m_2 j'(0)$, y verificará el CPG si $j(\alpha) > j(0) + m_1 j'(0)\alpha$, donde $0 < m_1 < m_2 < 1$.

En la figura, se muestra la idea que subyace detrás de todas estas reglas. Tomando como ejemplo el criterio de Goldstein, aquellos puntos que cumplan los criterios CPP (los que están por debajo de la línea CPP) y CPG (los que se encuentran por encima de la recta CPG), dejan de ser admisibles

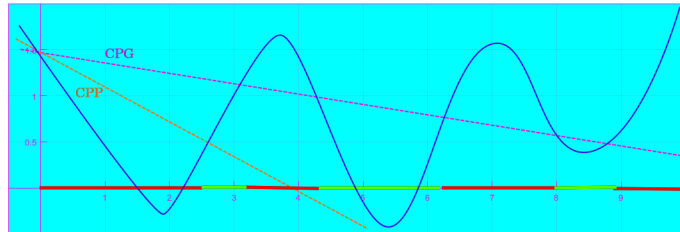


Figura 1.1: Regla de paso con CPG y CPP

y se muestran con una línea en rojo. Por el contrario, los puntos que están entre ambas rectas, son puntos admisibles y se representan con en una línea en verde.

1.5.2. Método del gradiente

Recibe este nombre el método que toma como dirección de descenso $\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$, y en base a esta dirección, se seguirá el algoritmo 1.22, tomando como paso α_k , el obtenido al usar alguna de las reglas descritas en el apartado 1.5.1.

En caso de poder calcular el α_k óptimo, el método recibirá el nombre de *gradiente con paso óptimo*. Método en el cuál, se utiliza la dirección de máximo descenso.

1.5.3. Método del gradiente conjugado

Éste método, mejora el visto en el apartado 1.5.2. Esencialmente, está pensado en un primer momento para funcionales cuadráticos. Su convergencia se produce en a lo sumo n iteraciones independientemente del punto inicial dado para arrancar el método, por lo que, no se puede considerar como tal un método iterativo.

Su fundamento, se basa en tomar direcciones conjugadas, es decir, tales que,

$$\left(\mathbf{d}^{(i)}\right)^{\top} \mathbf{Q} \left(\mathbf{d}^{(j)}\right) = 0 \quad \text{con } i \neq j \quad i, j \in \{0, 1, \dots\}$$

y explícitamente, el algoritmo vendría dado por:

Algoritmo 1.26 (Gradiente conjugado en funcionales cuadráticos). *Se sigue el siguiente procedimiento:*

PASO 0: Se toma un $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ de arranque, con su residuo dado por $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{c}$ y se toma como dirección de descenso $\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{r}^{(0)}$, $k = 0$.

PASO 1: Se calcula el paso que viene dado explícitamente por, $\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^\top \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{d}^{(k)})^\top \mathbf{Q}\mathbf{d}^{(k)}}$, con el

que se actualiza el iterante y se toma $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$. Luego, se actualiza $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{Q}\mathbf{d}^{(k)}$.

PASO 2: Si $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{0}$ se finaliza, y en caso contrario, se toma $\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}^{(k+1)}^\top \mathbf{r}^{(k+1)}}{\mathbf{r}^{(k)}^\top \mathbf{r}^{(k)}}$, con el que se actualiza la nueva dirección $\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_{k+1} \mathbf{d}^{(k)}$, se toma $k = k + 1$ y se vuelve al PASO 1.

Observación 1.27. Para consultar con detalle los aspectos que hay detrás de este algoritmo (deducción, convergencia, implementación, etc) se puede consultar [13, págs.102-120].

Este caso, es obviamente para el caso en el que el funcional objetivo es cuadrático. Por tanto, una cuestión interesante sería si esta metodología se podría ampliar al caso no cuadrático. La respuesta es positiva y se plantean dos propuestas:

1. *Fletcher-Reeves:* Partiendo de $\mathbf{d}^{(0)} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(0)})$, en cada k -iteración se toma:

$$\beta_k = \frac{\|\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla J(\mathbf{u}^{(k)})\|^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}^{(k+1)} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)}) + \beta_k \mathbf{d}^{(k)}$$

2. *Polak-Ribière:* Partiendo de $\mathbf{d}^{(0)} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(0)})$, en cada k -iteración se toma:

$$\beta_k = \frac{\|\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla J(\mathbf{u}^{(k)})\|^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}^{(k+1)} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)}) + \beta_k \mathbf{d}^{(k)}$$

Obviamente, en los dos casos anteriores, con dichas expresiones de la dirección de descenso, se procede usando el algoritmo 1.22, combinándolo con los vistos en 1.5.1 para calcular el paso.

1.5.4. Método de Newton

Otra forma de abordar el problema, sería calculando el $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ que cumpla que $\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, dado que se vio que esta condición es indispensable para ser mínimo (sin restricciones). Para ello, se utiliza el método de Newton-Raphson aplicado a la función $\nabla J(\mathbf{v})$,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(0)} \text{ dado} \\ \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} - (HJ(\mathbf{u}^{(k)}))^{-1} \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

la cual, se enmarca dentro del marco del algoritmo 1.22, tomando $\alpha_k = 1$ y $\mathbf{d}^{(k)} = - (HJ(\mathbf{u}^{(k)}))^{-1} \nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$. Por tanto, este método no garantiza descenso en todas sus iteraciones. Es más, la dirección $\mathbf{d}^{(k)}$ no tendría porque ser de descenso.

Por ello, se puede mejorar el método introduciendo alguna regla de cálculo de paso en vez de tomar paso fijo 1. Por otro lado, el coste computacional es demasiado elevado debido a tener que calcular la inversa de la matriz hessiana en cada iteración. De modo que para solventar esta situación, se puede proceder del siguiente modo,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(0)} \text{ dado} \\ HJ(\mathbf{u}^{(k)})\mathbf{w} = -\nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{w} \end{cases}$$

que se vuelve a enmarcar dentro del algoritmo 1.22 tomando $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{w}$ y $\alpha_k = 1$. Y nuevamente, se puede mejorar el método combinándolo con alguna de las reglas de cálculo de paso.

1.5.5. Métodos Cuasi-Newton

Sin embargo, en el método de Newton resulta costoso debido a tener que evaluar continuamente la Hessiana. Para resolver este problema, se introducen los métodos *Cuasi-Newton* que tienen el mismo fundamento que el visto en 1.5.4 con la peculiaridad de usar una aproximación de la hessiana del funcional.

Para esta aproximación, se toma una matriz de arranque \mathbf{H}_0 definida positiva y simétrica (la identidad o una aproximación mediante diferencias finitas), para luego calcular en cada iteración una actualización de dicha matriz mediante algunas de las reglas de actualización que se introducen a continuación,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)\top}}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)\top} \mathbf{H}_k}{\mathbf{y}^{(k)\top} \mathbf{H}_k \mathbf{y}^{(k)}} & \text{Actualización D.F.P} \\ \mathbf{H}_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)\top}}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}} \right) \mathbf{H}_k \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)\top}}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}} \right) + \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)\top}}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}} & \text{Actualización B.F.G.S} \end{cases}$$

donde $\mathbf{y}_k = \nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)}) - \nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$ y $\mathbf{s}_k = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}$. De esta forma, tomando como aproximación de la hessiana, la dada por la fórmula B.F.P o B.F.G.S en cada k -iteración, se definiría la dirección $\mathbf{d}^{(k)}$ como se vio en el apartado 1.5.4. Así pues, tomando dicha dirección y combinándola con una regla de cálculo de paso, se obtendría una gran variedad de métodos de Cuasi-Newton al aplicar el algoritmo 1.22.

Finalmente, una propiedad interesante que puede resultar útil en ocasiones es que bajo ciertas hipótesis, las actualizaciones de las inversas de la hessiana, pueden mantener el carácter de definidas positivas. El siguiente resultado lo muestra:

Teorema 1.28. *Si \mathbf{H}_k es definida positiva, $\nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)}) \neq \mathbf{0}$, y el paso α_k es elegido de tal forma que el iterante $\mathbf{u}^{(k+1)}$ verifica:*

$$\nabla J(\mathbf{u}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)} < \nabla J(\mathbf{u}^{(k+1)})^\top \mathbf{d}^{(k)}$$

(lo cual es equivalente a que $\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)} > 0$), entonces la matriz \mathbf{H}_{k+1} definida por un método B.F.P ó B.F.G.S, es definida positiva.

Demostración. Se puede consultar en [3, págs.60-61]. □

Por otro lado, en casos donde la dimensión del problema es muy elevada, resulta prohibitivo implementar este algoritmo. Esto es debido al elevado coste de operar y guardar matrices con dimensiones muy grandes. Por este motivo, en la práctica se opta por una versión de coste menor al usar la actualización B.F.G.S (ya que es la que mejores resultados aporta).

En dicha versión (donde se opta por un algoritmo recursivo), la dirección de descenso usando la actualización B.F.G.S, se obtiene almacenando únicamente un número m de los $\mathbf{s}^{(k)}$ e $\mathbf{y}^{(k)}$ calculados en las iteraciones anteriores. Así pues, considerando una k -iteración cualquiera, se podría tomar el siguiente algoritmo para obtener $\mathbf{d}^{(k)}$ (la dirección de descenso),

Algoritmo 1.29 (Cálculo de la dirección de descenso B.F.G.S). *Tomando de forma inicial $\mathbf{q} = \nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$, se procede como sigue:*

PASO 1: *Definiendo $\rho_k = \frac{1}{\mathbf{y}^{(k)\top} \mathbf{s}^{(k)}}$, se procede con un bucle en $i = k-1, \dots, k-m$, donde*

se toma $\gamma_i = \rho_i \mathbf{s}^{i\top} \mathbf{q}$, $\mathbf{q} = \mathbf{q} - \gamma_i \mathbf{y}^{(i)}$.

PASO 2: *Definiendo $\mathbf{H}_k^0 = \frac{\mathbf{s}^{(k-1)\top} \mathbf{y}^{(k-1)}}{\mathbf{y}^{(k-1)\top} \mathbf{y}^{(k-1)}} \mathbf{I}$ y tomando $\mathbf{r} = \mathbf{H}_k^0 \mathbf{q}$, se procede con un bucle en*

$i = k-m, \dots, k-1$, donde se toma $\beta = \rho_i \mathbf{y}^{(i)\top} \mathbf{r}$, con el que se actualiza $\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{s}^{(i)}(\gamma_i - \beta)$.

PASO 3: *Se concluye tomando como dirección de descenso $\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{r}$.*

Mediante esta forma, se suaviza el coste computacional en dimensiones muy elevadas. De hecho, se ha visto en la práctica que se obtienen resultados muy buenos para un valor m entre 3 y 20. En [13, págs.176-185] se pueden ver más detalles sobre esta forma de implementación de la fórmula B.F.G.S. denominada *B.F.G.S de memoria limitada*, y se puede consultar un pseudocódigo del método Cuasi-Newton con una fórmula B.F.G.S de coste reducido en el Anexo I.

Capítulo 2

Optimización con restricciones: Conceptos teóricos

En el anterior capítulo, se ha visto como se abordan los problemas de optimización relativos al problema (\mathcal{P}) . Pero este tipo de problemas sólo se presentan en situaciones muy idílicas que no suceden en la realidad.

Por consiguiente, se pretende a partir de ahora presentar un nuevo tipo de problema que englobe las peculiaridades que surgen en la realidad, y a partir de estos problemas, desarrollar nuevos métodos que nos permitan resolverlos ó en su lugar, reducirlos a problemas equivalentes del tipo (\mathcal{P}) para solucionarlos como en el capítulo anterior.

2.1. Presentación del problema

Con motivo de lo que se ha explicado, se presenta el siguiente problema de minimización con restricciones, al que se referirá de ahora en adelante como problema (\mathcal{Q}) :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \quad & J(\mathbf{v}) \\ \text{Sujeto a:} \quad & \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \phi_j(\mathbf{v}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{\mathcal{Q}}$$

Como se puede observar, en este nuevo problema no tiene porque ser solución el mínimo global de $J(\mathbf{v})$, ya que será solución del problema aquel valor que minimice el funcional cumpliendo las exigencias marcadas por las funciones φ_i y ϕ_j .

Estas funciones se conocen como restricciones y delimitan el conjunto donde se pretende minimizar el funcional objetivo, al que se denomina como *conjunto factible* ó *conjunto*

admisibile, y que se describe como sigue:

$$S = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ \phi_j(\mathbf{v}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

Definición 2.1. Se dice que $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es una solución óptima factible del problema (\mathcal{Q}) , si $\mathbf{u} \in S$ y además $J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in S} J(\mathbf{v})$.

Además, es importante tener en cuenta que muchos problemas con restricciones, se pueden expresar de la forma vista en (\mathcal{Q}) teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Si el problema es de maximización, cambiando de signo el funcional, se convierte el problema a uno equivalente en la forma descrita.
2. Si hay restricciones de desigualdad en sentido contrario, al multiplicarlas por -1, se convierten en restricciones de la forma planteada.
3. Si alguna de las restricciones es de la forma $\psi(\mathbf{v}) \leq b$ con $b \in \mathbb{R}$, se tiene una equivalente de la forma $\varphi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) - b \leq 0$. Lo mismo sucede con las restricciones de igualdad.

Finalmente, nótese que el conjunto S tal como esta definido, es cerrado. Por consiguiente, se pueden aplicar los resultados de existencia y unicidad vistos en 1.3. Sin embargo, la caracterización de sus óptimos es más compleja, y ésta se estudia en la siguiente sección.

2.2. Caracterización de óptimos

De manera análoga al caso sin restricciones (1.2), se caracterizarán los óptimos del problema estudiando las diferentes condiciones que deben cumplir estos. Con este motivo, se presentan las siguientes definiciones y teoremas que caracterizarán los óptimos del problema (\mathcal{Q}) .

Teorema 2.2. Dado el problema (\mathcal{Q}) en el que el conjunto admisible S es convexo y no vacío. Dado $\mathbf{u} \in S$ un mínimo relativo de J en S . Entonces, si J es derivable en \mathbf{u} ,

$$\langle \nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

Demostración. Dado $\mathbf{v} \in S$, como éste es convexo, por definición, se tiene que,

$$\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \lambda\mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{u} \in S \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

y a mayores,

$$D_{\mathbf{v}-\mathbf{u}}J(\mathbf{u}) = (\nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{J(\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{u})) - J(\mathbf{u})}{\lambda} \geq 0$$

ya que como se supone que \mathbf{u} es un mínimo local, para un λ suficientemente pequeño $J(\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \geq J(\mathbf{u})$. De modo que se concluye la propiedad. \square

En esta imagen, se puede visualizar el resultado del teorema. Pues bien, se muestran las curvas de nivel de un cierto funcional y el conjunto factible delimitado por una elipse. Se muestra el mínimo \mathbf{u} , del que parte $\nabla J(\mathbf{u})$ (en trazado más grueso). La línea discontinua, muestra la línea ortogonal al gradiente del funcional en el punto, y por tanto, cualquier dirección que quede por encima de la línea discontinua, formará un ángulo con el gradiente comprendido entre $[-90^\circ, 90^\circ]$, y por tanto, su producto escalar será positivo. Ahora bien, en las líneas más delgadas, muestran distintas direcciones factibles que cumplen esta propiedad. Pero es más, dado un punto del interior de la elipse, al unirlo con \mathbf{u} , sigue cumpliendo esta propiedad para cualquier $\mathbf{v} \in S$. De este modo, se puede ver como se cumple geoméricamente el resultado.

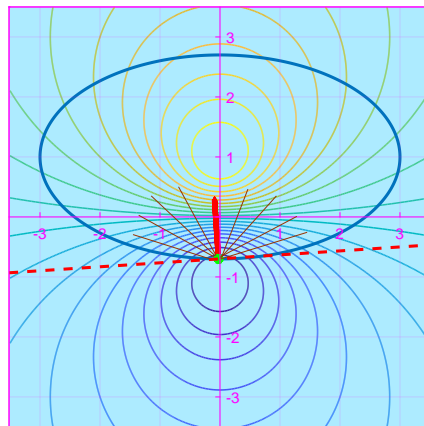


Figura 2.1: Condición necesaria de mínimo

Corolario 2.3. Dado el problema (Q) , si el conjunto admisible S es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n convexo. Entonces si $\mathbf{u} \in S$ es un mínimo local de J en S y J es derivable en \mathbf{u} , $\nabla J(\mathbf{u}) \perp S$, es decir,

$$\langle \nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

Demostración. Como S es un subespacio vectorial, si $\mathbf{v} \in S$, es obvio que $-\mathbf{v} \in S$, y por tanto se puede definir:

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \in S \quad \mathbf{w}^{(2)} = -\mathbf{v} + \mathbf{u} \in S$$

Aplicando el teorema anterior, se llega a,

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(\mathbf{v}), \mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{u} \rangle &= \langle \nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \geq 0 \\ \langle \nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{u} \rangle &= \langle \nabla J(\mathbf{u}), -\mathbf{v} \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

por lo que se obtiene el resultado. \square

Una vez vistos estos dos resultados, se pretende relajar las hipótesis introduciendo el concepto de dirección factible. A partir de este momento, se van a introducir diferentes definiciones y resultados que servirán para la demostración de teoremas en las siguientes secciones.

Definición 2.4. Dado un punto $\mathbf{v} \in S$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ no nulo, si existe un $\delta > 0$ de tal forma que $\mathbf{v} + t\mathbf{d} \in S \quad \forall t \in [0, \delta]$, entonces se dice que \mathbf{d} es una *dirección factible* de S en \mathbf{v} . Y además, el conjunto de dichas direcciones factibles se denotará como:

$$DF(\mathbf{v}, S) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{v} + t\mathbf{d} \in S \quad \forall t \in [0, \delta]\}$$

Definición 2.5. Dado el punto $\mathbf{v} \in S$, se define el conjunto de restricciones activas de \mathbf{v} como sigue:

$$I(\mathbf{v}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : \varphi_i(\mathbf{v}) = 0\}$$

Definición 2.6. Sea $\mathbf{v} \in S$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ no nulo, verificando que,

$$\begin{cases} \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0 & i \in I(\mathbf{v}) \\ \mathbf{d}^\top \nabla \phi_j(\mathbf{v}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases}$$

entonces \mathbf{d} es una *dirección factible linealizada* de S en \mathbf{v} . El conjunto de dichas direcciones, se denotará por $DFL(\mathbf{v}, S)$.

Definición 2.7. Dado $\mathbf{v} \in S$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$. Si existen sucesiones $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$ y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ de tal forma que $\mathbf{v} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)} \in S \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, se dice que \mathbf{d} es una *dirección factible secuencial* de S en \mathbf{v} . El conjunto de dichas direcciones, se denota por $DFS(\mathbf{v}, S)$.

Lema 2.8. Dado $\mathbf{v} \in S$. Si todas las restricciones son diferenciables en \mathbf{v} , entonces se tiene:

$$DF(\mathbf{v}, S) \subseteq DFS(\mathbf{v}, S) \subseteq DFL(\mathbf{v}, S)$$

Demostración. Para cualquier $\mathbf{d} \in DF(\mathbf{v}, S)$, se obtiene de su definición la existencia de un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{v} + t\mathbf{d} \in S$ para todo $t \in [0, \delta]$. De modo que tomando $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}$ y $\delta_k = \delta/2^k$, se obtienen sucesiones las sucesiones $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$ y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. De modo que $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{v}, S)$, y como el \mathbf{d} tomado es arbitrario, entonces se concluye el resultado:

$$DF(\mathbf{v}, S) \subseteq DFS(\mathbf{v}, S)$$

Ahora bien, se toma un $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{v}, S)$, si $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S)$ dado que su producto escalar con cualquier vector es nulo. Se asume entonces que $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ y usando la definición vista en 2.7, se tiene la existencia de sucesiones $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$ y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ tales que $\mathbf{v} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)} \in S$, es decir,

$$0 = \phi_j(\mathbf{v} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}) = \delta_k \mathbf{d}^{(k)\top} \nabla \phi_j(\mathbf{v}) + o(\|\delta_k \mathbf{d}^{(k)}\|) \quad j = 1, \dots, p$$

$$0 \geq \varphi_i(\mathbf{v} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}) = \delta_k \mathbf{d}^{(k)\top} \nabla \varphi_i(\mathbf{v}) + o(\|\delta_k \mathbf{d}^{(k)}\|) \quad i \in I(\mathbf{v})$$

y dividiendo estas dos ecuaciones por δ_k , al hacer tender $k \rightarrow \infty$, se obtiene la condiciones de la definición 2.6, luego $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S)$. Pero como el \mathbf{d} es arbitrario, se concluye el resultado. \square

Se puede hacer un inciso en este momento para interpretar estos conceptos introducidos. Se ha comenzado hablando de direcciones factibles, lo cual es bastante intuitivo. Pues bien, dado un punto, al moverse desde dicho punto en un entorno de la dirección factible, siempre se permanece en el conjunto admisible. Por tanto, dado un punto \mathbf{v} del interior del conjunto S , cualquier dirección será factible, ya que como $\mathbf{v} \in \text{Int}(S)$, existe una bola $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{v}, \delta) \subset S$. Luego, tiene sentido hablar de direcciones factibles cuando se considera un punto de la frontera del conjunto S , ya que nos indicará las direcciones, a través de las cuales, se permanece en S .

Sin embargo, el concepto de dirección factible lineal ya no es tan intuitivo. Al analizar la definición 2.6, se aprecia como las condiciones se imponen sobre los puntos de la frontera de S , pues dichas condiciones se establecen teniendo en cuenta las restricciones activas y de igualdad. Lo cuál es lógico, pues si un punto $\mathbf{v} \in \text{Int}(S)$ se razonó que toda dirección $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es factible y por el lema anterior, entonces $DFL(\mathbf{v}, S) = \mathbb{R}^n$ en dicho caso. Considerando entonces un punto $\mathbf{v} \in \partial S$, una interpretación de la definición 2.6 se podría obtener teniendo en cuenta el concepto de producto escalar que,

$$\begin{cases} \langle \mathbf{d}, \nabla \varphi_i(\mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{d}\| \|\nabla \varphi_i(\mathbf{v})\| \cos(\angle(\mathbf{d}, \nabla \varphi_i(\mathbf{v}))) \leq 0 & i \in I(\mathbf{v}) \\ \langle \mathbf{d}, \nabla \phi_j(\mathbf{v}) \rangle = \|\mathbf{d}\| \|\nabla \phi_j(\mathbf{v})\| \cos(\angle(\mathbf{d}, \nabla \phi_j(\mathbf{v}))) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases}$$

es decir, el ángulo que forma la dirección $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S)$ con el gradiente de las restricciones de desigualdad activas en el punto \mathbf{v} , está comprendido en el intervalo $[90^\circ, 270^\circ]$. Mientras que considerando las restricciones de igualdad, dichas direcciones, deberán estar en la misma dirección que el gradiente de las restricciones $\phi_j(\mathbf{v})$.

Para visualizar el contenido mostrado por el lema previo, se podría considerar la restricción de desigualdad dada por la curva *lemniscata*, cuya expresión es la siguiente:

$$\varphi(\mathbf{v}) = (v_1^2 + v_2^2)^2 - 2(v_1^2 - v_2^2)$$

En la imagen siguiente se muestra el gráfico de la curva. Considerando el origen, el conjunto de líneas finas que apuntan hacia el interior de la curva, muestran las direcciones factibles en $\mathbf{0}$, ya que al avanzar en dichas direcciones, se permanece en S . Sin embargo, operando en la función $\varphi(\mathbf{v})$, se obtiene que $\nabla \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de modo que cualquier dirección $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ será dirección factible linealizada. Entonces, las dos direcciones representadas en tono más grueso ($\mathbf{d}^{(1)} = (1, 0)^\top$

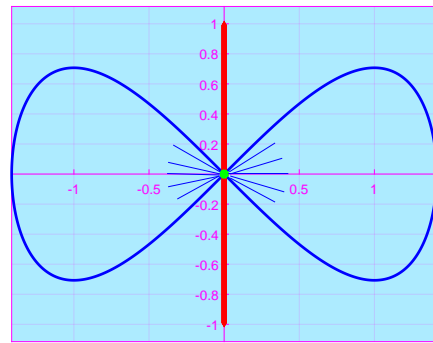


Figura 2.2: Direcciones factibles y linealizadas

y $\mathbf{d}^{(2)} = (0, -1)^\top$ pertenecen a $DFL(\mathbf{v}, S)$, sin embargo, no son direcciones factibles dado que no existe ningún entorno en el cual al avanzar a través de ellas, se permanezca en S .

Por otro lado, las direcciones factibles secuenciales, permiten introducir direcciones en casos donde no existen direcciones factibles. Es el caso por ejemplo, de una curva no lineal en el plano. Pues bien, el conjunto definido por la restricción de igualdad $\phi(\mathbf{v}) = v_1 - v^2$, no permite direcciones factibles en ningún punto, pero al mismo tiempo, la dirección correspondiente a la tangente en un punto de la curva, es claramente una dirección factible secuencial.

Una vez vistos estos conceptos y el lema 2.8 que establece una relación entre los conjuntos de direcciones factibles introducidos. Ahora se pasa a ver diferentes caracterizaciones de mínimo con ayuda de estos conjuntos.

Teorema 2.9. *Sea $\mathbf{u} \in S$ un mínimo local del problema (\mathcal{Q}) . Entonces si el funcional objetivo y las restricciones son diferenciables en \mathbf{u} , entonces se tiene que $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) \geq 0$ para todo $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{u}, S)$.*

Demostración. Para cualquier $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{v}, S)$, teniendo en cuenta su definición, $\mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)} \rightarrow \mathbf{u}$ y al ser \mathbf{u} un mínimo local, entonces para k suficientemente grande,

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}) = J(\mathbf{u}) + \delta_k \mathbf{d}^{(k)\top} \nabla J(\mathbf{u}) + (\delta_k^2)$$

lo que implica que $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) \geq 0$ y como \mathbf{d} es arbitrario, entonces se obtiene el resultado. \square

Teorema 2.10. *Dado $\mathbf{u} \in S$. Si el funcional objetivo y las restricciones del problema (\mathcal{Q}) son diferenciables en \mathbf{u} , y se verifica,*

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{d} \in DFS(\mathbf{u}, S)$$

siendo \mathbf{d} no nulo, entonces \mathbf{u} es un mínimo local estricto del problema (\mathcal{Q}) .

Demostración. Se supone que \mathbf{u} no es mínimo, entonces existe una sucesión $\{\mathbf{u}^{(k)}\} \rightarrow \mathbf{u}$ de tal forma que,

$$J(\mathbf{u}^{(k)}) \leq J(\mathbf{u}) \tag{2.1}$$

y además, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que,

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d} \tag{2.2}$$

tomando $\mathbf{d}^{(k)} = (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2$ y $\delta_k = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2$, con la definición de DFS, se tiene que $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{u}, S)$. Usando ahora 2.1 y 2.2 y que $J(\mathbf{u}^{(k)}) = J(\mathbf{u}) + (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u})^\top \nabla J(\mathbf{u}) +$

$o(\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2)$ para luego dividir por $\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|_2$ y luego hacer tender $k \rightarrow +\infty$, se obtiene,

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) \leq 0$$

lo cual es una contradicción, lo que prueba el resultado. \square

Corolario 2.11. *Sea $\mathbf{u} \in S$. Si el funcional objetivo y las restricciones del problema (Q) son diferenciables en \mathbf{u} . Si se cumple que,*

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{d} \in DFL(\mathbf{u}, S)$$

entonces \mathbf{u} es un mínimo local del problema (Q).

Lo que estos dos últimos resultados aportan, es una condición suficiente de mínimo. Para ilustrarla de forma gráfica, se puede considerar el ejemplo de la siguiente imagen donde se muestran las curvas de nivel de un cierto funcional y el conjunto admisible delimitado por una poligonal.

Como se trata de un polígono, se puede observar que $DF(\mathbf{v}, S) = DFL(\mathbf{v}, S)$. De este modo, al considerar el mínimo representado (el punto inferior), todas las direcciones factibles forman un ángulo menor de 90° respecto del gradiente evaluado en el punto (representado por la dirección más gruesa), por lo que se cumplen los dos resultados anteriores.

Sin embargo, en el punto superior (máximo del funcional en el polígono), estas condiciones no se dan ya que se observa claramente como en todas las direcciones posibles, el ángulo formado con el gradiente es mayor que 90° y en consecuencia no se cumple la hipótesis de los resultados anteriores.

Ahora bien, estas condiciones son suficientes pero no necesarias. De hecho, si el mínimo se alcanza en el interior del conjunto admisible, todas las direcciones sería factibles y por tanto $DFL(\mathbf{u}, S) = \mathbb{R}^n$, por lo que no se estaría en las hipótesis anteriores a pesar de ser un mínimo.

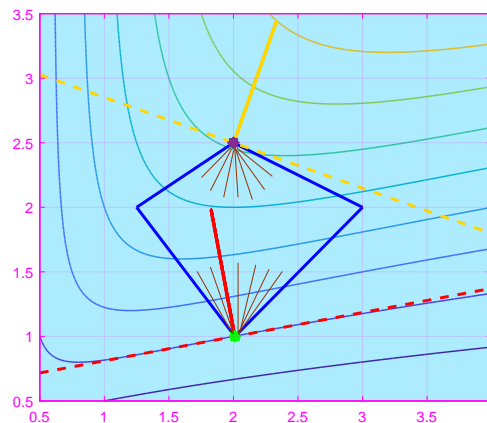


Figura 2.3: Condición suficiente de mínimo

2.3. Multiplicadores de Lagrange

En esta sección, se considerará un caso particular del problema (\mathcal{Q}) , en el que se tiene el problema de minimización de un funcional objetivo $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sujeto a restricciones de tipo igualdad, por lo que no se tienen restricciones de tipo desigualdad. A este caso, se denotará como problema (\mathcal{Q}_{ig}) , y se verá que existe la posibilidad de su resolución mediante un sistema de ecuaciones no lineales.

Para ello, se comienza introduciendo la notación pertinente. En primer lugar, a partir de las funciones que definen las restricciones, se define la función $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, que viene dada por,

$$\Phi(\mathbf{v}) = (\phi_1(\mathbf{v}), \phi_2(\mathbf{v}), \dots, \phi_p(\mathbf{v}))^\top$$

de modo que el conjunto factible se puede definir de la siguiente manera:

$$S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Definición 2.12. Un punto $\mathbf{u} \in S$ es regular para las restricciones $\{\phi_j(\mathbf{v})\}_{j=1}^p$ si los vectores gradientes $\nabla\phi_1(\mathbf{u}), \dots, \nabla\phi_p(\mathbf{u})$ son linealmente independientes.

Observación 2.13. La definición anterior, no se puede dar si $p > n$.

Teorema 2.14. Dado un punto regular $\mathbf{u} \in S$, el espacio tangente a S en dicho punto es:

$$T(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \Phi'(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

donde $\Phi'(\mathbf{u})$ se corresponde con:

$$\Phi'(\mathbf{u}) = (\nabla\phi_1(\mathbf{u}) | \dots | \nabla\phi_p(\mathbf{u}))^\top$$

Demostración. Se puede consultar en [16, pág. 302]. □

Lema 2.15. Dado $\mathbf{u} \in S$ un punto regular, supóngase que dicho \mathbf{u} es un mínimo de J en S , y que J es derivable en \mathbf{u} . Entonces, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, que verifique $\Phi'(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ también se tiene que $\langle \nabla J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0$.

Demostración. Se puede ver en [16, pág. 304]. □

Teorema 2.16. Considerando el problema (\mathcal{Q}_{ig}) donde el funcional y las restricciones son diferenciables, si dado $\mathbf{u} \in S$ un punto regular, éste es un mínimo del funcional J en S . Entonces, existen p números λ_i , que se conocerán como multiplicadores de Lagrange asociados a \mathbf{u} , definidos de forma única, tales que:

$$\nabla J(\mathbf{u}) + \lambda_1 \nabla\phi_1(\mathbf{u}) + \dots + \lambda_p \nabla\phi_p(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Demostración. Si $\nabla J(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, entonces la propiedad es obvia tomando $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Entonces, suponiendo que $\nabla J(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, haciendo uso del lema anterior, si $\mathbf{v} \in \ker(\Phi'(\mathbf{u}))$, entonces $\mathbf{v} \in \ker(\nabla J(\mathbf{u})^\top)$, por lo que, $\ker(\Phi'(\mathbf{u})) \subseteq \ker(\nabla J(\mathbf{u})^\top)$. De este modo, tomando el espacio ortogonal, se tiene el contenido contrario, es decir, $\ker(\nabla J(\mathbf{u})^\top)^\perp \subseteq \ker(\Phi'(\mathbf{u}))^\perp$. Ahora bien, es obvio que $\nabla J(\mathbf{u})^\top \in \ker(\nabla J(\mathbf{u})^\top)^\perp$, por lo que, $\nabla J(\mathbf{u})^\top \in \ker(\Phi'(\mathbf{u}))^\perp = \text{Im}(\Phi'(\mathbf{u}))$, y entonces, existen coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tales que,

$$\nabla J(\mathbf{u}) = \lambda_1 \nabla \phi_1(\mathbf{u}) + \dots + \lambda_p \nabla \phi_p(\mathbf{u})$$

lo cual es evidente que es equivalente a la tesis del teorema. \square

Ésta, no es la única demostración posible del teorema. Pues existen múltiples versiones para llegar a obtener el mismo resultado. Por ejemplo, en [1, págs. 150-152] se da una demostración haciendo uso del Teorema de la función implícita.

Por otra parte, la condición necesaria obtenida, permite obtener un método para la resolución del problema (\mathcal{Q}_{ig}) mediante la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales generalmente. Para ello, se toman como incógnitas ($\lambda_i \ 1 \leq i \leq p$) y \mathbf{u} .

Ahora bien, como $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de n componentes, en total se tienen $n + p$ incógnitas. Las cuales, quedarán determinadas por las ecuaciones de las restricciones y la condición de Lagrange, es decir,

$$\begin{cases} \nabla J(\mathbf{u}) + \Phi'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo $\boldsymbol{\lambda}$ el vector que tiene por componentes a los multiplicadores de Lagrange. Escribiendo dicho sistema de una forma más visual, quedaría:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_1} J(\mathbf{u}) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial v_1} \phi_1(\mathbf{u}) + \dots + \lambda_p \frac{\partial}{\partial v_1} \phi_p(\mathbf{u}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v_n} J(\mathbf{u}) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial v_n} \phi_1(\mathbf{u}) + \dots + \lambda_p \frac{\partial}{\partial v_n} \phi_p(\mathbf{u}) = 0 \\ \phi_1(\mathbf{u}) = 0 \\ \vdots \\ \phi_p(\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Observación 2.17. Si se toma el Lagrangiano asociado al problema, que se define de la siguiente forma,

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = J(\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v})^\top \boldsymbol{\xi} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$$

el sistema 2.3, se puede reescribir en forma compacta como:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla J(\mathbf{u}) + \Phi'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

De modo que resolver el sistema de ecuaciones planteado, es equivalente a obtener un punto crítico asociado al problema.

Sin embargo, la resolución del sistema no aporta exactamente la solución al problema de minimización. Esto es debido a que la condición aportada por el teorema es necesaria pero no suficiente. Por ello, una vez obtenidos los valores de $\boldsymbol{\lambda}$ y \mathbf{u} que verifican las ecuaciones, es necesario evaluar en un entorno de \mathbf{u} el funcional para determinar el tipo de punto crítico que se ha obtenido.

Teorema 2.18 (Condición suficiente de Lagrange). *Se considera el problema (Q_{ig}) , bajo las hipótesis de derivabilidad del funcional objetivo y de las restricciones. Entonces, suponiendo que $\mathbf{u} \in S$ es un punto verificando la condición de Lagrange con multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, verificando que,*

$$\mathbf{d}^\top H\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{d} > 0 \text{ para todo } \mathbf{d} \neq \mathbf{0} \text{ con } \Phi(\mathbf{u})'\mathbf{d} = 0$$

entonces \mathbf{u} es un mínimo local estricto del problema (Q_{ig}) .

Demostración. Se puede consultar en [10, pág 272-273]. □

Este teorema, aporta un caso en el que la condición de Lagrange es suficiente, y por tanto, bajo dichas hipótesis, no habría que comprobar si la solución obtenida es mínimo o no. Por otra parte, los multiplicadores de Lagrange aquí introducidos, tienen diversas aplicaciones en distintas ramas del conocimiento. Por ejemplo, la física o la economía son claros ejemplos de ello, y se puede ver en [9] o [20].

2.4. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz-John

En esta sección, se verá una generalización de la condición de Lagrange vista en 2.16, al caso que incluye restricciones de desigualdad. Para ello, se hace uso de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y posteriormente de las condiciones de Fritz-John que se definen a continuación.

Definición 2.19. Considerando el problema (\mathcal{Q}) , se define su función Lagrangiano asociada, $\mathcal{L}(v, \nu, \xi) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) = J(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^m \nu_i \varphi_i(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \xi_j \phi_j(\mathbf{v})$$

Definición 2.20. Dado el problema (\mathcal{Q}) , se supone que el funcional objetivo y las restricciones son derivables. Entonces, se dice que un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de Karush-Kuhn-Tucker para el problema (\mathcal{Q}) , si y sólo si, existen multiplicadores de Lagrange y de Karush-Kuhn-Tucker (a los que se denotará por las letras griegas $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respectivamente) verificando las *condición!de KKT* (KKT) que son las siguientes:

1.- Condición estacionaria:

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla J(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

2.- Condición de factibilidad

$$\begin{cases} \varphi_i(\mathbf{u}) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ \phi_j(\mathbf{u}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (2.5)$$

3.- Condición de holgura:

$$\begin{cases} \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}) = 0 & i = 1, \dots, m \\ \mu_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (2.6)$$

Para calcular ahora los puntos que cumplen las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), se puede proceder en dos pasos. El primero, es la resolución de un sistema de ecuaciones (no lineal generalmente), y que se corresponden con la imposición de la condición estacionaria, de factibilidad para las restricciones de igualdad y la de holgura:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_k} J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial}{\partial v_k} \phi_j(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial}{\partial v_k} \varphi_i(\mathbf{v}) = 0 & k = 1, \dots, n \\ \phi_j(\mathbf{v}) = 0 & j = 1, \dots, p \\ \mu_i \varphi_i(\mathbf{v}) = 0 & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Nótese que se trata de un sistema de $(n + m + p)$ ecuaciones y $(n + m + p)$ incógnitas. Estas serían, las n componentes de \mathbf{u} , los p multiplicadores de Lagrange y los m multiplicadores KKT. Una vez resuelto, el segundo paso sería ver cuáles de las soluciones obtenidas son puntos de KKT. Para ello, hay que comprobar que son puntos factibles, es decir, comprobar que cumplen las restricciones de desigualdad, y finalmente, que todos los multiplicadores KKT son positivos.

Llegados a este punto, se está en condiciones de probar que todo mínimo del problema (\mathcal{Q}) , verifica las condiciones KKT. Para ello, se introduce la siguiente versión del Lema de Farkas-Mirkonski que será de utilidad en su demostración.

Lema 2.21 (Lema de Farkas-Mirkonski). *Considerando el problema (\mathcal{Q}) y un punto factible $\mathbf{u} \in S$, el conjunto,*

$$\mathcal{Z} = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} \mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) < 0 & \\ \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ \mathbf{d}^\top \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

es vacío, si y sólo si, existen multiplicadores de Lagrange y de KKT verificando la condición estacionaria en \mathbf{u} .

Demostración. Se puede ver en [15, págs. 53-54,391] y en [12, pág. 313-314]. \square

Teorema 2.22 (Karush-Kuhn-Tucker). *Sea \mathbf{u} un mínimo local del problema (\mathcal{Q}) . Si se cumple la siguiente condición, a la que se denominará como condición de cualificación,*

$$DFS(\mathbf{u}, S) = DFL(\mathbf{u}, S) \quad (2.7)$$

entonces existen multiplicadores de Lagrange y de KKT verificando las condiciones KKT.

Demostración. Dado que \mathbf{u} es un mínimo local del problema, éste verifica las condiciones de factibilidad, es decir, 2.5. Ahora bien, sea $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{u}, S)$, por el teorema 2.9, se tiene que $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) \geq 0$. Pero aplicando la condición 2.7, $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{u}, S)$, y así el sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) < 0 & \\ \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) \leq 0 & i \in I(\mathbf{u}) \\ \mathbf{d}^\top \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

no tiene solución y por tanto el conjunto \mathcal{Z} definido en el lema de Farkas-Mirkonski es vacío, y por tanto, se obtiene que existen multiplicadores de Lagrange y de KKT ($\mu_i \geq 0$) verificando que,

$$\nabla J(\mathbf{u}) + \sum_{i \in I(\mathbf{u})} \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = 0$$

por lo que tomando $\mu_i = 0 \quad i \notin I(\mathbf{u})$, se obtiene la condición estacionaria y de holgura. De modo que se obtiene el resultado. \square

Esta demostración que se acaba de hacer, no es única. De hecho, existen muy diversas formas de demostrar el Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, por ejemplo, se puede consultar

[2] para ver otro tipo de demostración donde se utiliza el Teorema de Weierstrass. Por otro lado, la demostración mostrada en este trabajo, requiere de la condición de cualificación 2.7, pero ésta no es única. De hecho, puede ser substituida por otras equivalentes. Con este objetivo, se introduce el siguiente teorema.

Teorema 2.23. *Sea $\mathbf{v} \in S$ un punto admisible. Si los vectores $\nabla\phi_j(\mathbf{v})$ con $j = 1, \dots, p$ y $\nabla\varphi_i(\mathbf{v})$ con $i \in I(\mathbf{v})$ son linealmente independientes, entonces la condición de cualificación 2.7 se cumple, es decir, $DFS(\mathbf{v}, S) = DFL(\mathbf{v}, S)$.*

Demostración. Se puede consultar en [15, pág 394-396]. □

Observación 2.24. Existe una gran variedad de condiciones de cualificación que sirven de utilidad para probar el teorema 2.22, para ello, ver [14, sec. 6.3].

Hasta el momento, se han introducido los multiplicadores KKT, pero también se podría hablar de los multiplicadores de Fritz-John. Éstos, se podrían considerar una generalización de los anteriores, pero que en algunos casos resultan de utilidad.

Definición 2.25. Dado el problema (\mathcal{Q}) , suponiendo que tanto el funcional como las restricciones son derivables. Entonces, se dice que un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ verifica las condiciones de Fritz-John (ó es un punto de Fritz-John), si y sólo si, existen multiplicadores de Lagrange $(\boldsymbol{\lambda})$ y de Fritz-John $(\eta_0, \boldsymbol{\eta})$ tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 \nabla J(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \eta_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = 0 \\ \varphi_i(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \phi_j(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, p \\ \eta_i \varphi_i(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \\ \eta_0, \eta_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \text{ y además } (\eta_0, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) \neq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Como se puede observar, éstas son las mismas condiciones KKT, salvo que en este caso, $\nabla J(\mathbf{u})$ está multiplicado por un elemento $\eta_0 \geq 0$. Por tanto, si $\eta_0 > 0$, al dividir la primera ecuación de las condiciones de Fritz-John por η_0 , se obtienen las condiciones KKT. Por tanto, la única diferencia existirá cuando $\eta_0 = 0$. A continuación, se aporta un resultado similar al visto en el teorema 2.22 para las condiciones de Fritz-John.

Teorema 2.26 (Condición necesaria de Fritz-John). *Dado el problema (\mathcal{Q}) , suponiendo que tanto el funcional objetivo como las restricciones sean diferenciables. Si $\mathbf{u} \in S$ es un mínimo local del problema (\mathcal{Q}) , entonces existen multiplicadores de Lagrange y de Fritz-John, cumpliendo las condiciones de Fritz-John.*

Demostración. Si los vectores $\nabla\phi_j(\mathbf{u})$ con $j = 1, \dots, m$ y $\nabla\varphi_i(\mathbf{u})$ con $i \in I(\mathbf{u})$ son linealmente dependientes, entonces existen elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ y η_i con $i \in I(\mathbf{u})$, tales

que $\sum_{i \in I(\mathbf{u})} \eta_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{u}) = 0$, siendo alguno de ellos distintos de cero. Por tanto, tomando $\eta_0 = \eta_i = 0$ con $i \notin I(\mathbf{u})$, se obtienen inmediatamente las condiciones de Fritz-John.

Si se supone ahora que los vectores $\nabla \phi_j(\mathbf{u})$ con $j = 1, \dots, m$ y $\nabla \varphi_i(\mathbf{u})$ con $i \in I(\mathbf{u})$ son linealmente independientes, aplicando el teorema 2.23, se obtiene la condición de cualificación 2.7, y por tanto, se está en condiciones del teorema 2.22. Por consiguiente, se cumplen las condiciones KKT, luego, tomando $\eta_0 = 1$ y $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}$, se obtienen también las condiciones de Fritz-John. \square

Entonces, un punto cumpliendo las condiciones de Fritz-John, es un candidato a mínimo (al igual que sucedía con los puntos KKT). Este hecho, se usará posteriormente en el último capítulo dado que algún método numérico permitirá obtener un punto de Fritz-John. Sin embargo, cuando $\eta_0 = 0$, las condiciones que nos aporta el teorema 2.26, no dependen del $\nabla J(\mathbf{u})$, lo que no aporta información sobre el funcional objetivo en el mínimo. Por este motivo, es poco interesante la condición de Fritz-John, y a partir de ahora, se estudiarán los puntos KKT en los que si se ve involucrado $\nabla J(\mathbf{u})$.

Continuando pues con el estudio de los puntos KKT, en el teorema 2.22, se proporciona una condición necesaria de mínimo. Pues cualquier mínimo cumple las condiciones KKT, sin embargo, ésta no es suficiente en general. Para poder introducir condiciones suficientes, es necesario reforzar las hipótesis sobre el problema. Con este motivo, se introduce la siguiente definición necesaria para introducir una condición suficiente KKT.

Definición 2.27. Dado el problema de optimización (\mathcal{Q}) , se dirá que éste es convexo si el funcional objetivo y el conjunto admisible son convexos. Además, se representará a este tipo especial de optimización como problema (\mathcal{QC}) .

Observación 2.28. En el caso del problema (\mathcal{QC}) , se supondrá que las restricciones $\varphi_i(\mathbf{v})$ son convexas y las $\phi_j(\mathbf{v})$ lineales. Estas suposiciones, derivan del hecho de que al ser de estos modos concretos, el conjunto factible que generan es convexo.

Teorema 2.29 (Condición suficiente de Karush-Kuhn-Tucker). *Dado un problema de optimización convexa (\mathcal{QC}) , se tiene que dado un punto admisible $\mathbf{u} \in S$, para el cual existen multiplicadores de Lagrange y KKT ($\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respectivamente). Entonces dicho punto es un mínimo del problema (\mathcal{QC}) .*

Demostración. Se considera un punto $\mathbf{u} \in S$ verificando las condiciones KKT, sean $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ sus multiplicadores de Lagrange y KKT asociados. La función $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ es convexa para cualquiera \mathbf{v} . Entonces, usando las propiedades de las funciones convexas 1.13, y las

condiciones KKT, se tiene que para cualquier punto factible \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) &\geq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})^\top \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ &= J(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \phi_j(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

pero como \mathbf{v} es un punto factible y $\mu_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$, entonces se deduce que,

$$\left. \begin{array}{l} \mu_i \varphi_i(\mathbf{v}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda_j \phi_j(\mathbf{v}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \leq J(\mathbf{v})$$

por lo que usando 2.8 se obtiene que $J(\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u})$, y por consiguiente, \mathbf{u} es un mínimo. \square

Vistos estos resultados, la interpretación geométrica que se puede hacer de ellos y de las condiciones KKT, se muestra en la siguiente gráfica. En ella, se presentan dos restricciones de desigualdad que delimitan un conjunto factible. En discontinuo, se presentan los gradientes de las funciones en el punto $(1, 1)$ que se supone el mínimo en el conjunto para un cierto funcional.

De este modo, suponiendo que se está en las hipótesis del teorema 2.22, el gradiente del funcional en el mínimo tiene una dependencia lineal respecto de los gradientes de las restricciones activas. Ahora bien, como las dos restricciones son activas y los multiplicadores KKT son positivos, el conjunto de líneas finas representa el cono de los posibles valores que puede tomar $-\nabla J(1, 1)$.

Lo cual, es lógico desde el punto de vista intuitivo, dado que $-\nabla J(1, 1)$ es la dirección de máximo descenso en dicho punto, y si ésta fuese factible, el $(1, 1)$ no podría ser mínimo local. De este modo, se tiene una información relativa sobre la dirección de máximo descenso en el mínimo, y a partir de ella, de todas las posibles direcciones de descenso.

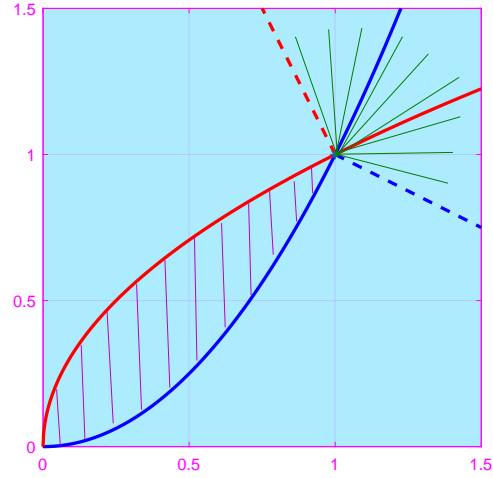


Figura 2.4: Condiciones KKT

Por otro lado, hasta el momento sólo se han visto condiciones de primer orden que caracterizan los mínimos. Sin embargo, las condiciones KKT nos van a permitir ampliar la información vista hasta el momento, dando condiciones de segundo orden.

Definición 2.30. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ verificando las condiciones de KKT, si existen sucesiones $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$ y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ tales que $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)} \in S$, verificando,

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{v}^{(k)}) \leq 0 \quad i \in I(\mathbf{v}) \setminus I_+(\mathbf{v}) & \quad \text{y} \quad \phi_j(\mathbf{v}^{(k)}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \\ \varphi_i(\mathbf{v}^{(k)}) = 0 \quad i \in I_+(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

donde $I_+(\mathbf{v}) = \{i : i \in I(\mathbf{v}) \text{ tales que } \mu_i > 0\}$. Entonces se dice que \mathbf{d} es una *dirección de restricción secuencial nula*, y al conjunto de dichas restricciones se denota por $S(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \subseteq DFS(\mathbf{v}, S)$.

Definición 2.31. Dado un punto $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ verificando las condiciones KKT (con multiplicadores de Lagrange y KKT $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ respectivamente), si $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S)$ y $\mu_i \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall i \in I(\mathbf{v})$, entonces \mathbf{d} es una *dirección de restricción nula linealizada*. Al conjunto de dichas restricciones se denota por $G(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, y se puede escribir como:

$$G(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S) \\ \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{v}) = 0 \quad i \in I_+(\mathbf{v}) \end{array} \right\} \subseteq DFL(\mathbf{v}, S)$$

Teorema 2.32 (Condición necesaria de segundo orden). *Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un mínimo local del problema (Q). Si se cumple la condición de cualificación 2.7, se tiene,*

$$\mathbf{d}^\top H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d} \geq 0 \quad \forall \mathbf{d} \in S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$$

donde $H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ denota la hessiana del Lagrangiano respecto de \mathbf{v} evaluada en $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$.

Demostración. Para cualquier $\mathbf{d} \in S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, si $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ el resultado es obvio, por lo que se supone $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Tomando las sucesiones $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$ y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ en la forma de la definición 2.30, se tiene que $\sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(\mathbf{u}^{(k)}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \phi_j(\mathbf{u}^{(k)}) = 0$, por lo que, usando este hecho y las condiciones de KKT (pues \mathbf{u} es un punto KKT por el teorema 2.22), se llega a:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}^{(k)}) &= J(\mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}) = \mathcal{L}(\mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) + \delta_k \mathbf{d}^{(k)\top} \nabla_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_k^2 \mathbf{d}^{(k)\top} H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d}^{(k)} + o(\delta_k^2) = J(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \delta_k^2 \mathbf{d}^{(k)\top} H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d}^{(k)} + o(\delta_k^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pero como \mathbf{u} es un mínimo local estricto, para un k suficientemente grande, se tiene que $J(\mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)}) \geq J(\mathbf{u})$. De modo que, usando este hecho, 2.9 y aplicando límites, se llega a,

$$\mathbf{d}^\top H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d} \geq 0$$

como se quería demostrar. \square

Observación 2.33. Si se tiene que $S(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, entonces se tendría de forma evidente que $\mathbf{d}^\top H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d} \geq 0$ para todo $\mathbf{d} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$.

Teorema 2.34 (Condición suficiente de segundo orden). *Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un punto cumpliendo las condiciones de KKT para el problema (Q). Si se verifica que,*

$$\mathbf{d}^\top H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d} > 0 \quad \forall \mathbf{d} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$$

entonces \mathbf{u} es un mínimo local estricto del problema.

Demostración. Se supone que \mathbf{u} no es mínimo, por lo que existe una sucesión de elementos factibles $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u}$ tales que $J(\mathbf{u}^{(k)}) \leq J(\mathbf{u})$. Y sin pérdida de generalidad, se puede asumir que,

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}\|} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{d}$$

por lo que aplicando el razonamiento de la demostración del teorema 2.10, se obtiene que $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) \leq 0$. Usando ahora las condiciones KKT,

$$\nabla J(\mathbf{u}) = - \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{u})$$

que al multiplicar por \mathbf{d} , si se tiene en cuenta que $\mathbf{d} \in DFS(\mathbf{u}, S) \subseteq DFL(\mathbf{u}, S)$, entonces,

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) = - \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \mathbf{d}^\top \nabla \phi_j(\mathbf{u}) \geq 0$$

de modo que se obtuvieron las dos desigualdades, y por tanto $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) = 0$, lo que implica que $\sum_{i \in I(\mathbf{u})} \mu_i \mathbf{d}^\top \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = 0$, y por consiguiente, $\mathbf{d} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que $J(\mathbf{u}^{(k)}) \leq J(\mathbf{u})$, se puede hacer el siguiente desarrollo,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2} \delta_k^2 \mathbf{d}^{(k)\top} H \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d}^{(k)} + o(\delta_k^2)$$

por lo que al dividir por δ_k^2 y tomar límites, se llega a que $\mathbf{d}^\top H \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{d} \leq 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis, y por consiguiente se obtiene el resultado. \square

Este último resultado, establece una condición suficiente similar a la que se introdujo en el corolario 2.11, con la peculiaridad de que se hace uso de la Hessiana del Lagrangiano. Pues bien, las condiciones KKT casi implican que $\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{u}) > 0$ salvo en las direcciones de restricción nula linealizadas. Por este motivo, se requiere una condición de segundo orden en ellas.

2.5. Aplicaciones a la programación cuadrática

Una vez vista la teoría anterior, un caso sencillo en el que los que se pueden aplicar los resultados introducidos, es el de la programación cuadrática. Este tipo de problemas, se denotarán por (\mathcal{QP}) del inglés *quadratic programming*, y se define como,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J_{QP}(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} \end{aligned} \quad (\mathcal{QP})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{f} \end{aligned}$$

donde $J_{QP}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v}$, siendo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriz simétrica, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_{p \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^p$.

Observación 2.35. Recuérdese que no es estrictamente necesario que \mathbf{Q} sea simétrica por lo visto en 1.18.

Si se analiza el problema, se puede comenzar por el estudio del conjunto admisible. Pues bien, si se toman $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$, veremos que $t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{w} \in S$ para todo $t \in [0, 1]$. Para ello, se verá que se cumplen las restricciones, dado que,

$$\mathbf{A}(t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{w}) - \mathbf{b} = t\mathbf{A}\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{b} \leq t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{E}(t\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{w}) - \mathbf{f} = t\mathbf{E}\mathbf{v} + (1-t)\mathbf{E}\mathbf{w} - \mathbf{f} = t\mathbf{f} + (1-t)\mathbf{f} - \mathbf{f} = 0$$

de lo que se concluye la convexidad de S . Además, si se estudia el funcional objetivo, al que se denotará por $J_{QP}(\mathbf{v})$, se ha visto en la sección 1.4 que $\nabla J_{QP}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}\mathbf{v} - \mathbf{c}$ y $HJ_{QP}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Y además, el funcional $J_{QP}(\mathbf{v})$ será convexo, si y sólo si, \mathbf{Q} es semidefinida positiva y será estrictamente convexo, si y sólo si, \mathbf{Q} es definida positiva.

Por tanto, se puede concluir que en el caso de que la matriz \mathbf{Q} sea semidefinida positiva, se está ante un problema convexo.

2.5.1. Condiciones de optimalidad

Una vez introducido el problema, se intentará emplear la teoría vista, para aplicarlos al problema cuadrático. Con este motivo, se comienza haciendo un análisis de las definiciones 2.4, 2.7 y 2.6. Entonces, teniendo en cuenta la definición del conjunto admisible para el problema cuadrático, se tiene que,

$$DFL(\mathbf{v}, S) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \mathbf{E}\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_i \mathbf{d} \leq 0 \end{array} \quad i \in I(\mathbf{v}) \right\}$$

donde \mathbf{a}_i denota la fila i -ésima de la matriz A , y $I(\mathbf{v}) \subseteq \{1, \dots, m\}$ denota el conjunto de índices correspondientes a las restricciones de desigualdad activas en el punto \mathbf{v} . Teniendo esto en cuenta, se puede introducir la siguiente relación.

Lema 2.36. *Al considerar el problema cuadrático (\mathcal{QP}) y un punto $\mathbf{v} \in S$. Se cumple:*

$$DF(\mathbf{v}, S) = DFS(\mathbf{v}, S) = DFL(\mathbf{v}, S)$$

Demostración. Se considera una dirección $\mathbf{d} \in DFL(\mathbf{v}, S)$, entonces se verá que $\mathbf{d} \in DF(\mathbf{v}, S)$. Para ello, se considera $\mathbf{w} = \mathbf{v} + t\mathbf{d}$ y se verá que $\mathbf{w} \in S$ para algún $t > 0$. Teniendo en cuenta la definición de $DFL(\mathbf{v}, S)$, se tiene:

$$\mathbf{E}\mathbf{w} = \mathbf{E}\mathbf{v} + t\mathbf{E}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad \forall t > 0$$

$$\mathbf{a}_i\mathbf{w} = \mathbf{a}_i\mathbf{u} + t\mathbf{a}_i\mathbf{d} = b_i + t\mathbf{a}_i\mathbf{d} \leq b_i \quad \forall i \in I(\mathbf{v}) \quad \forall t > 0$$

Por lo que falta verificar si \mathbf{w} cumple las restricciones no activas para algún $t > 0$. Para $i \notin I(\mathbf{v})$, $\mathbf{a}_i\mathbf{u} < b_i$, y por tanto:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{w} = \mathbf{a}_i\mathbf{u} + t\mathbf{a}_i\mathbf{d} \leq b_i \Leftrightarrow t \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{u}}{\mathbf{a}_i\mathbf{d}} \quad \forall i \notin I(\mathbf{v})$$

De modo que, tomando $\delta = \min_{i \notin I(\mathbf{v})} \left\{ \frac{b_i - \mathbf{a}_i\mathbf{u}}{\mathbf{a}_i\mathbf{d}} \right\}$, se tiene que $\mathbf{w} \in S$ para todo $t \in [0, \delta]$ y por tanto $\mathbf{d} \in DF(\mathbf{v}, S)$. Ahora bien, teniendo esto en cuenta y usando el lema 2.8, se concluye la relación $DF(\mathbf{v}, S) = DFS(\mathbf{v}, S) = DFL(\mathbf{v}, S)$. \square

Este resultado que puede parecer meramente curioso o anecdótico, permite concluir que $DFS(\mathbf{v}, S) = DFL(\mathbf{v}, S)$, que es precisamente la condición de cualificación 2.7 y que permite demostrar los teoremas 2.22 y 2.32. Por consiguiente, esto permite introducir los siguientes resultados.

Teorema 2.37 (Condición necesaria de mínimo). *Sea \mathbf{u} un mínimo local del problema (\mathcal{QP}), entonces existen multiplicadores de Lagrange ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$) y KKT ($\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$) verificando:*

$$\left(\begin{array}{l} \text{Condiciones de KKT} \\ \text{para el problema } \mathcal{QP} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{c} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu} + \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}) = 0 \\ \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el lema 2.36, se tiene que se cumple la condición de cualificación del teorema 2.22 y en consecuencia el resultado. \square

Ahora bien, por otra parte, la definición vista en 2.31, se puede reescribir como,

$$G(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E}\mathbf{d} = \mathbf{0} & \\ \mathbf{d} \neq \mathbf{0} : \mathbf{a}_i \mathbf{d} \leq 0 & \forall i \in I(\mathbf{v}) \setminus I_+(\mathbf{v}) \\ \mathbf{a}_i \mathbf{d} = 0 & \forall i \in I_+(\mathbf{v}) \end{array} \right\}$$

que permite concluir el siguiente resultado que aporta, a diferencia del caso genérico, una condición necesaria y suficiente.

Teorema 2.38 (Condición necesaria y suficiente). *Sea \mathbf{u} un punto factible del problema (\mathcal{QP}) , entonces \mathbf{u} es un mínimo local del problema, si y sólo si, $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ es un punto cumpliendo las condiciones KKT y $\mathbf{d}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d} \geq 0, \forall \mathbf{d} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$*

Demostración. Para probar la condición necesaria, se toma \mathbf{u} un mínimo local del problema (\mathcal{QP}) , aplicando el teorema 2.37, se tiene la existencia de los multiplicadores de Lagrange $(\boldsymbol{\lambda})$ y KKT $(\boldsymbol{\mu})$ asociados al problema. Tomando una dirección no nula $\mathbf{d} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, es evidente que para un $t > 0$ suficientemente pequeño, $\mathbf{u} + t\mathbf{d} \in S$ (pues por 2.36 la dirección es factible). Entonces, como \mathbf{u} es mínimo y debido a la definición de \mathbf{d} , se tiene que,

$$\begin{aligned} J_{QP}(\mathbf{u}) &\leq J_{QP}(\mathbf{u} + t\mathbf{d}) = J_{QP}(\mathbf{u}) + t \mathbf{d}^\top (\mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d} = \\ &= J_{QP}(\mathbf{u}) - t \mathbf{d}^\top (\mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu} + \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d} = J_{QP}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d} \geq 0 \end{aligned}$$

para un t suficientemente pequeño, y como el \mathbf{d} tomado es arbitrario, se obtiene la propiedad.

Para probar ahora la suficiencia, se supone que \mathbf{u} no es mínimo del problema, por lo que debe existir una sucesión de $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u} + \delta_k \mathbf{d}^{(k)} \in S$ tal que $J_{QP}(\mathbf{u}^{(k)}) < J_{QP}(\mathbf{u})$ donde $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ y $\{\mathbf{d}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\mathbf{d}}$. Con el argumento de la demostración del teorema 2.34, se tiene que $\tilde{\mathbf{d}} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$. Así pues, del hecho de que $J_{QP}(\mathbf{u}^{(k)}) < J_{QP}(\mathbf{u})$ y de las condiciones KKT, se tiene,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) > \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2}\delta_k^2 \mathbf{d}^{(k)\top} \mathbf{Q}\mathbf{d}^{(k)} + o(\delta_k^2)$$

que al dividir por δ_k^2 y tomando el límite, se obtiene que $\tilde{\mathbf{d}}^\top \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{d}} < 0$, pero como $\tilde{\mathbf{d}} \in G(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$, lo que se obtiene es una contradicción con la hipótesis, lo que concluye la demostración. \square

2.6. Dualidad

Ahora, en esta sección se pasará a considerar otro caso particular del problema (\mathcal{Q}) , en el que se tiene el problema únicamente con restricciones de desigualdad. A este problema

en el que se omiten las restricciones de igualdad, se denotará como problema (\mathcal{Q}_{des}). Éste es interesante dado que permitirá la construcción de un problema denominado dual con unas condiciones más sencillas para su resolución en algunos casos.

Para ello, teniendo en cuenta la definición 2.19, se tiene que para el problema (\mathcal{Q}_{des}), su Lagrangiano asociado viene dado por,

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) = J(\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^m \nu_i \varphi_i(\mathbf{v})$$

a partir de la cual, se puede introducir las siguientes definiciones.

Definición 2.39. Dado el problema (\mathcal{Q}_{des}) se denomina su función dual, a la función $h : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que se define como,

$$h(\boldsymbol{\nu}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$$

y cuyo dominio D , es el conjunto de valores del vector $\boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{0}$, para los cuales existe dicho mínimo, es decir,

$$D = \left\{ \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^m : \exists \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) \right\}$$

Definición 2.40. Dado el problema (\mathcal{Q}_{des}), se denomina *problema dual* (al que se denotará como problema (\mathcal{QD})) asociado al *problema primal* (\mathcal{Q}_{des}) a:

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n} && h(\boldsymbol{\nu}) \\ \text{Sujeto a:} &&& (\mathcal{QD}) \\ &&& \boldsymbol{\nu} \in D \end{aligned}$$

A continuación, se introducirán diferentes teoremas que caracterizarán ciertas propiedades de interés del problema dual.

Teorema 2.41. *La función dual h del problema (\mathcal{Q}_{des}), es cóncava en cualquier subconjunto convexo \bar{D} de su dominio de definición D .*

Demostración. Sea \bar{D} un subconjunto convexo de D , $\boldsymbol{\nu}^{(1)}, \boldsymbol{\nu}^{(2)} \in \bar{D}$ y sea $\alpha \in [0, 1]$ cualquiera. Se tiene,

$$\begin{aligned} h\left(\alpha \boldsymbol{\nu}^{(1)} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\nu}^{(2)}\right) &= \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}\left(\mathbf{v}, \alpha \boldsymbol{\nu}^{(1)} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\nu}^{(2)}\right) = \\ &= \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \left(\alpha \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}^{(1)}) + (1 - \alpha) \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}^{(2)})\right) \geq \alpha \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}^{(1)}) + (1 - \alpha) \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}^{(2)}) = \\ &= \alpha h(\boldsymbol{\nu}^{(1)}) + (1 - \alpha) h(\boldsymbol{\nu}^{(2)}) \end{aligned}$$

Este desarrollo, es debido a la linealidad de la función $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu})$ respecto de la variable $\boldsymbol{\nu}$. \square

Teorema 2.42. *Para cualquier valor factible $\boldsymbol{\nu} \in D$ de la función dual y cualquier $\mathbf{v} \in S$ admisible para el problema primal, se verifica:*

$$h(\boldsymbol{\nu}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in D \quad y \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

Demostración. Teniendo en cuenta la definición de función dual y de mínimo de una función, se tiene que:

$$h(\boldsymbol{\nu}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\nu}^\top \Psi(\mathbf{v}) \leq J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\nu}^\top \Psi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S \quad (2.10)$$

Tomando un $\boldsymbol{\nu} \in D$ arbitrario, como $\boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{0}$ y dado $\mathbf{v} \in S$, es obvio que $\Psi(\mathbf{v}) \leq \mathbf{0}$, por lo que $\Psi(\mathbf{v})^\top \boldsymbol{\nu} \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$. Así, teniendo en cuenta este hecho y lo visto en 2.10:

$$h(\boldsymbol{\nu}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in D \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

□

Corolario 2.43. *Si existe un elemento factible $\mathbf{u} \in S$ para el problema primal y otro elemento factible $\boldsymbol{\mu}$ para el problema dual, tal que $J(\mathbf{u}) = h(\boldsymbol{\mu})$. Entonces, \mathbf{u} y $\boldsymbol{\mu}$ son soluciones de los problemas primal y dual respectivamente.*

Demostración. Supóngase que \mathbf{u} no es solución óptima de $J(\mathbf{v})$, es decir, existe un \mathbf{u}' factible tal que $J(\mathbf{u}') < J(\mathbf{u})$. Pero por hipótesis, $J(\mathbf{u}) = h(\boldsymbol{\mu})$, por lo que se deduce que $J(\mathbf{u}') < h(\boldsymbol{\mu})$. Ahora bien, aplicando el teorema anterior, $h(\boldsymbol{\mu}) \leq J(\mathbf{u})$ para todo $\boldsymbol{\mu} \in D$, por lo que en particular $h(\boldsymbol{\mu}) \leq J(\mathbf{u})$, lo cual es una contradicción con que $J(\mathbf{u}') < h(\boldsymbol{\mu})$. Y haciendo el mismo razonamiento, se obtiene el mismo resultado para el problema dual. □

De este corolario, se obtiene una relación entre los problemas primal y dual. Sin embargo, no se visualiza un método clarividente de resolución usando la dualidad. Por este motivo, si se refuerzan las hipótesis sobre el problema (\mathcal{Q}_{des}) haciendo que éste sea convexo, se pueden obtener los siguientes resultados de mayor utilidad.

Teorema 2.44. *Sea $\mathbf{u} \in S$ una solución al problema (\mathcal{Q}_{des}) donde las funciones $J(\mathbf{v})$ y $\varphi_i(\mathbf{v})$ son convexas y diferenciables en \mathbf{u} . Entonces, el vector $\boldsymbol{\mu}$ que contiene los multiplicadores KKT para el punto \mathbf{u} , es solución del problema dual.*

Demostración. Como $\boldsymbol{\mu}$ contiene los multiplicadores KKT para el problema (\mathcal{Q}_{des}) en \mathbf{u} , $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$. Así, como las restricciones y el funcional objetivo son funciones convexas y los multiplicadores positivos, usando 1.12 se obtiene que $\mathcal{L}(\cdot, \boldsymbol{\mu})$ es convexa y diferenciable. De este modo, aplicando 1.13, se tiene que,

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})^\top \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

donde la última igualdad se obtiene al considerar la condición estacionaria de punto KKT. Además, teniendo en cuenta la condición de holgura 2.6, se concluye que:

$$h(\boldsymbol{\mu}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\mu}^\top \Psi(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u})$$

De esta forma, y teniendo en cuenta el teorema 2.42, se deduce inmediatamente que $h(\boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{u})$ y que $\boldsymbol{\mu}$ es solución del problema dual. \square

Teorema 2.45. *Se considera el problema (\mathcal{Q}_{des}) donde el funcional y las restricciones son convexas y diferenciables, y se denota por \mathbf{u} a la solución de (\mathcal{Q}_{des}) . Además, se supone que $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ resuelve el problema dual y $\tilde{\mathbf{u}} = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$ siendo $\mathcal{L}(\cdot, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$ una función estrictamente convexa. Entonces $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ (que es la única solución al problema (\mathcal{Q}_{des})) y $J(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$.*

Demostración. Por contradicción, se supone que $\mathbf{u} \neq \tilde{\mathbf{u}}$. Del teorema 2.29, se obtiene la existencia de los multiplicadores KKT $\boldsymbol{\mu}$. Entonces, del teorema 2.44, se tiene que $\boldsymbol{\mu}$ resuelve el problema dual, por lo que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = h(\boldsymbol{\mu}) = h(\tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$$

De lo que se obtiene que $\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = 0$, y como $\mathcal{L}(\cdot, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$ es estrictamente convexa, aplicando 1.13 se llega a que,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) > (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})^\top \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) > \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})$$

por lo que en particular, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^\top \Psi(\mathbf{u}) > \boldsymbol{\mu}^\top \Psi(\mathbf{u}) = 0$ (usando la condición 2.6). Pero como $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \geq \mathbf{0}$, entonces $\Psi(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0}$, por lo que se llega a una contradicción. \square

Así pues, tras ver los anteriores resultados, la dualidad permite dar otra visión sobre la resolución del problema (\mathcal{Q}_{des}) cuando éste es convexo. Si se puede construir su problema dual (\mathcal{QC}) , se podría optar por resolver este problema dual (normalmente más sencillo) y tras substituir su solución en la función Lagrangiano, al minimizar sin restricciones esta última, se obtendría la solución del problema original.

2.6.1. Dualidad en programación cuadrática

Finalmente, se aplicará la dualidad a la programación cuadrática. Pues bien, en el caso de un problema con únicamente restricciones de desigualdad, al que se denotará como (\mathcal{QP}_{des}) , la dualidad puede jugar un importante papel. De hecho, en el caso donde la matriz \mathbf{Q} que determina el funcional es definida positiva, la dualidad resulta especialmente provechosa. Por ello, se supondrán esas hipótesis a lo largo de esta sub-sección para desarrollar el problema dual en dicho caso.

De la forma en que se definió la función dual en 2.39, se tiene que ésta viene determinada por,

$$h(\boldsymbol{\nu}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}) \right\} \quad (2.11)$$

pero como se ha supuesto que \mathbf{Q} es definida positiva, para un $\boldsymbol{\mu}$ cualquiera, la función $1/2 \mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b})$ es estrictamente convexa. Además, su mínimo \mathbf{u} se puede calcular de forma exacta y vendrá determinado por:

$$\mathbf{Q} \mathbf{u} + \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{c} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\mu}) \quad (2.12)$$

De modo que, substituyendo el valor obtenido en 2.12 en la función dual 2.11, se obtiene que la función dual es,

$$h(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{d} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{D} = -\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^\top$ y $\mathbf{d} = \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{c})$. De modo que el problema dual vendría dado por,

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^m} \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{D} \boldsymbol{\nu} - \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{c}^\top \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \nu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (QPD)$$

cuya resolución, resulta relativamente más sencilla que la del problema original, y para la cuál, hay algoritmos específicos de resolución, que se pueden consultar en [11, págs. 196-207].

Capítulo 3

Optimización con restricciones: Métodos de resolución

Hasta ahora, se ha dado respuesta a diferentes cuestiones sobre el problema de optimización con restricciones del tipo (\mathcal{Q}) . Esto permite conocer las diferentes propiedades que tienen en función de los tipos de funcionales y restricciones.

Pero como el objetivo final es poder resolverlos, llegados a este punto, se estudiarán diferentes algoritmos que nos permitan obtener una solución. A continuación, se describirán métodos numéricos que dependiendo del tipo de problema, aportarán distintas visiones para su resolución final.

3.1. Métodos de penalización

Un primer método, son los conocidos como métodos de penalización. Hay distintos tipos dentro de esta familia de algoritmos, pero una característica común que los define. Ésta consiste en reducir el problema con restricciones de tipo (\mathcal{Q}) , a uno sin restricciones del tipo (\mathcal{P}) para resolverlo como se vio en el primer capítulo.

Para ello, su idea principal consiste en construir un nuevo funcional objetivo de tal manera que si toma un elemento fuera del conjunto admisible, éste penalice esa elección aumentando el valor que toma el funcional. De ahí proviene el nombre de *penalización*, pues se penaliza la toma de un punto no factible, y dependiendo del tipo de penalización, se pueden diferenciar los distintos tipos de métodos que se presentan a continuación.

3.1.1. Penalización exterior

Este primer método, reside en la creación de una sucesión de subproblemas del tipo (\mathcal{P}) , de tal manera que la sucesión formada por las soluciones de los subproblemas, converja a la solución del problema (\mathcal{Q}) .

Con este motivo, se crea una función $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denominada *función de penalización* caracterizada por,

$$\begin{cases} P(\mathbf{v}) > 0 & \text{si } \mathbf{v} \notin S \\ P(\mathbf{v}) = 0 & \text{si } \mathbf{v} \in S \end{cases}$$

y en base a esta función, se define una sucesión de problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ del siguiente modo:

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} P(\mathbf{v}) \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Por lo que dada una sucesión de elementos $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ positivos convergentes a cero, se obtiene una sucesión $\{\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de soluciones de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. La cual, convergerá a un elemento \mathbf{u} , siendo éste solución de (\mathcal{Q}) . Para comenzar, se verán algunas propiedades de las funciones de penalización y las soluciones $\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}$.

Lema 3.1. *Dado $0 < 1/\varepsilon_1 < 1/\varepsilon_2$, se tienen las siguientes propiedades:*

- (1) $J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \leq J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)})$
- (2) $J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \leq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)})$
- (3) $P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \geq P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)})$

Demostración. Aplicando la definición de solución del problema $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, se tiene que:

$$J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \leq J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) \leq J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) \leq J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \quad (3.1)$$

Por tanto, ya se ha obtenido (1). Ahora, de 3.1, se deduce que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - \left[J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) - J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \right] = \frac{1}{\varepsilon_1} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - \frac{1}{\varepsilon_2} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - \\ &\left[\frac{1}{\varepsilon_1} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) - \frac{1}{\varepsilon_2} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \right] = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \left(P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \right) \end{aligned}$$

de lo que se obtiene (3). Y usando ahora (3) y lo visto en 3.1, se tiene,

$$J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \leq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) + \frac{1}{\varepsilon_1} \left(P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) - P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)}) \right) < J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)})$$

lo que demuestra (2) y finaliza la demostración. \square

Lema 3.2. *Sea \mathbf{u} la solución del problema (\mathcal{Q}) considerado. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$J(\mathbf{u}) \geq J_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}) \geq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)})$$

Demostración. El resultado es inmediato considerando el siguiente desarrollo:

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon_k} P(\mathbf{u}) \geq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}) + \frac{1}{\varepsilon_k} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}) \geq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)})$$

□

Lema 3.3. *Se considera el problema (Q) y $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ la solución al problema (\mathcal{P}_ε). Entonces, tomando $\delta = P(\mathbf{u}^{(\varepsilon)})$, se tiene que $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ también es solución del problema:*

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\text{mín}} && J(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} && \\ & && P(\mathbf{v}) \leq \delta \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demostración. Para cualquier \mathbf{v} que satisfaga la condición $P(\mathbf{v}) \leq \delta$, se tiene que,

$$\begin{aligned} 0 & \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(P(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - P(\mathbf{v}) \right) = J_\varepsilon(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J_\varepsilon(\mathbf{v}) + J(\mathbf{v}) = \\ & = \left[J_\varepsilon(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J_\varepsilon(\mathbf{v}) \right] + J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \leq J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \Rightarrow J(\mathbf{v}) \geq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \end{aligned}$$

obteniendo así la definición de mínimo y concluyendo así la demostración. □

Llegados a este punto, se está en condiciones de deducir el algoritmo del método. Entonces, al considerar el problema (Q), teniendo en cuenta como se define la función de penalización, éste se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\text{mín}} && J(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} && \\ & && P(\mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora bien, tomando δ lo suficientemente pequeño, el problema 3.2 será una aproximación del problema original (Q). Así, la idea básica de este método, se basa en que según se reduce el parámetro de penalización ε_k en cada iteración, se reduce el valor de $P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)})$ como se vio en el lema 3.1. Por este motivo, si se fija un valor de la tolerancia δ para aproximar el problema (Q) mediante 3.2, se puede establecer el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.4 (Penalización exterior). *Se sigue el siguiente procedimiento:*

PASO 0: *Se toma $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ y $k = 0$.*

PASO 1: *Se calcula $\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}$, solución de (\mathcal{P}_ε).*

PASO 2: *Si la penalización $P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) < \delta$, entonces se finaliza. En caso contrario, se toma $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/10$, $k = k + 1$ y se vuelve al PASO 1.*

Observación 3.5. La actualización del valor ε , no tiene porque ser la marcada en el algoritmo. Ésta puede variar en función de nuestros intereses, haciendo que la sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ decrezca con mayor o menor rapidez. Además, en la resolución de los subproblema $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, se tendrá que usar algún método de los vistos en el primer capítulo. Pero en ellos, se debe aportar un iterante inicial, pero en este caso, sería un buen iterante inicial la solución $\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}$ calculada en la iteración anterior.

Por otro lado, nótese que la función de penalización debe ser elegida de tal forma que el funcional $J_\varepsilon(\mathbf{v})$ tenga mínimo finito, ya que si no es así, el algoritmo diverge. Esta situación, se puede dar en casos donde el funcional objetivo decrezca según $\|\mathbf{v}\| \rightarrow +\infty$ y la función de penalización no crezca con la misma rapidez que decrece $J(\mathbf{v})$.

Ahora bien, una cuestión importante es el estudio de la convergencia del método. Para ello se introduce el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Se considera el problema (\mathcal{Q}) con un funcional continuo. Entonces, cualquier punto límite de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ generada por el algoritmo 3.4 es solución del problema original (\mathcal{Q}) .*

Demostración. Se supone que $\{\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}\}$ es una subsucesión convergente con límite \mathbf{u} . Entonces, por la continuidad del funcional J , se tiene que:

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) = J(\mathbf{u}) \quad (3.4)$$

Denotando por J^* el valor del funcional en la solución del problema (\mathcal{Q}) , y teniendo en cuenta los lemas 3.1 y 3.2, la sucesión $\{J_{\varepsilon_{k'}}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})})\}$ es creciente, y está limitada superiormente por J^* . Entonces,

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} J_{\varepsilon_{k'}}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) = q \leq J^* \quad (3.5)$$

de manera que, extrayendo 3.4 de la ecuación 3.5, se tiene que,

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon_{k'}} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) = q - J(\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

y como $P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) \geq 0$ y $1/\varepsilon_{k'} \rightarrow +\infty$, por 3.6, implica que:

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) = 0$$

Usando ahora la continuidad de $P(\mathbf{v})$, implica que $P(\mathbf{u}) = 0$, por lo que \mathbf{u} es un punto admisible para el problema. Además, por el lema 3.2, $J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) \leq J^*$ y se tiene:

$$J(\mathbf{u}) = \lim_{k' \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k'})}) \leq J^*$$

Por consiguiente, \mathbf{u} es una solución óptima factible del problema original (\mathcal{Q}) . \square

Observación 3.7. De este teorema, se deduce que si la sucesión generada por el algoritmo 3.4 converge a un punto, éste será solución del problema general (\mathcal{Q}) . Sin embargo, esta sucesión no tiene por qué ser convergente en general. Pues bien, puede darse que el mínimo de algún subproblema no sea finito, y por tanto, que la sucesión comience a divergir. Por este motivo, si se pueden asegurar hipótesis de convexidad y coercitividad sobre los subproblemas $(\mathcal{P}_{\varepsilon_k})$, se aseguraría la existencia y unicidad de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ generada por el algoritmo 3.4.

Una cuestión interesante ahora, sería como crear una función de penalización $P(\mathbf{v})$. En realidad, cualquier función que cumpla las propiedades que la definen, se puede usar. Sin embargo, algunas tiene mejores propiedades que otras. Una posible opción, sería usar la siguiente denominada *penalización cuadrática*:

$$P(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m (\max\{0, \varphi_i(\mathbf{v})\})^2 + \sum_{j=1}^p |\phi_j(\mathbf{v})|^2 \quad (3.7)$$

Tal y como está definida esta penalización, el funcional $J_\varepsilon(\mathbf{v})$ será derivable y continuo. Pero al no ser continua la derivada segunda, puede conllevar problemas si se usa un método de segundo orden.

Para ejemplificar visualmente lo que produce la penalización, tomando la función de penalización 3.7, se va a aplicar ahora al siguiente problema unidimensional,

$$\begin{aligned} \min_{v \in \mathbb{R}} \quad & J(v) = e^v \\ \text{Sujeto a:} \quad & \varphi_1(v) = -v \\ & \varphi_2(v) = v - 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

de lo que se obtienen los siguientes resultados:

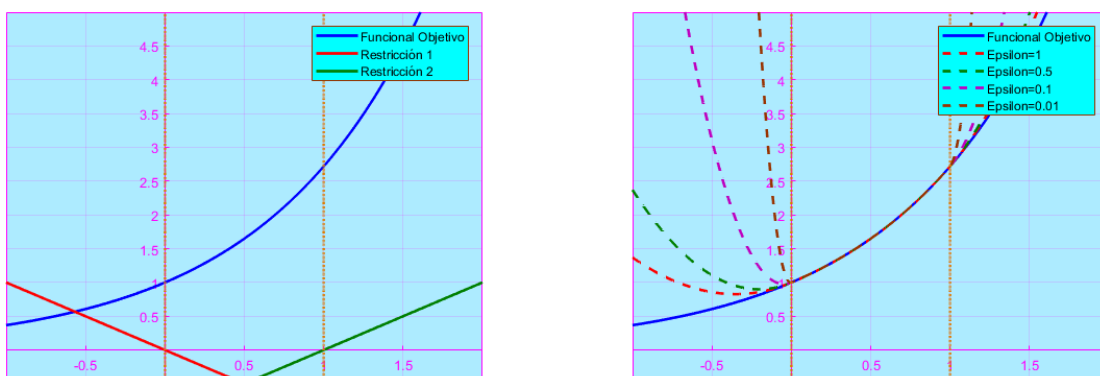


Figura 3.1: Penalización exterior

En la primera figura se muestra el funcional, las restricciones y el conjunto factible. Mientras, en la segunda imagen, se muestra el funcional objetivo $J(v)$ y los diferentes $J_{\varepsilon_k}(v)$ a medida que se afina el valor de ε_k según se indica en la leyenda. Así pues, como se observa, los funcionales $J_{\varepsilon_k}(v)$ aumentan su valor fuera de la región factible mientras que se mantiene el funcional original dentro del conjunto admisible.

3.1.2. Penalización interior

Otro método similar al anterior, es el método de la penalización interior o de la barrera. En este nuevo caso, se vuelve a usar una función de penalización, a partir de la cuál se definirá un nuevo funcional objetivo, y a partir de él, una sucesión de subproblemas cuya sucesión de soluciones converja a la solución del problema inicial.

Sin embargo, se introducen diferencias respecto del caso anterior. En primer lugar, sólo se va a considerar el problema (Q_{des}) , y se pretende construir una sucesión de soluciones factibles, por lo que cada $\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)} \in S$. Para introducirse en el método, se comenzará por la definición de la función de penalización, que se define como $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que,

$$\lim_{d(\mathbf{v}, \partial S) \rightarrow 0} P(\mathbf{v}) = +\infty \quad \text{y} \quad P(\mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S$$

donde $d(\mathbf{v}, \partial S)$ denota la distancia del punto \mathbf{v} a la frontera de S , es decir, la penalización aumenta según se aproxima a la frontera del conjunto admisible. En base a esta penalización, se define el siguiente problema sin restricciones:

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \varepsilon P(\mathbf{v}) \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

A continuación se presentan varias propiedades de esta función de penalización que son análogas a la penalización exterior.

Lema 3.8. *Dado $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, se tiene:*

- (1) $J_{\varepsilon_2}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) \leq J_{\varepsilon_1}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)})$
- (2) $J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) \leq J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)})$
- (3) $P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_2)}) \geq P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_1)})$

Demostración. Análoga al lema 3.1 o consultar [15, pág 468] □

Lema 3.9. *Siendo $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ solución del problema $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ y tomando $\delta = P(\mathbf{u}^{(\varepsilon)})$. Entonces $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ es solución del problema,*

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$P(\mathbf{v}) \leq \delta$$

Demostración. Para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ verificando que $P(\mathbf{v}) \leq \delta$, se tiene,

$$0 \leq \varepsilon \left(P(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - P(\mathbf{v}) \right) = J_\varepsilon(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J_\varepsilon(\mathbf{v}) + J(\mathbf{v}) = \\ \left[J_\varepsilon(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) - J_\varepsilon(\mathbf{v}) \right] + J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \leq J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \Rightarrow J(\mathbf{u}^{(\varepsilon)}) \leq J(\mathbf{v})$$

De lo que se obtiene la definición de mínimo y por tanto lo que se quería probar. \square

Cuando el valor de δ del lema anterior es lo suficientemente grande, éste sirve para aproximar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} \\ & P(\mathbf{v}) < +\infty \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora bien, del modo en que se ha definido la función de penalización, la restricción del problema 3.10 es equivalente a que su solución sea factible para el problema inicial (\mathcal{Q}). Sin embargo, dicha solución no se encontrará sobre la frontera de S , ya que en dichos puntos la penalización tiende a infinito.

Además, si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño y el δ del lema anterior es lo bastante grande, entonces $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ se encuentra dentro de la región factible S y aproxima el valor de la solución del problema original. Entonces, se puede deducir el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.10 (Penalización Interior). *Se procede como sigue:*

PASO 0: *Se toma $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ y $k = 0$.*

PASO 1: *Se calcula $\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}$, solución de $(\mathcal{P}_{\varepsilon_k})$.*

PASO 2: *Si $\varepsilon_k P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) < \delta$, se finaliza. En caso contrario, se toma $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/10$, $k = k+1$ y se vuelve al PASO 1.*

Observación 3.11. Como sucedía en penalización exterior, el decrecimiento de ε_k en el PASO 3, no tiene que ser la indicada, sino que puede ser cualquiera. Además, como se usarán los algoritmos del primer capítulo para resolver los subproblemas $(\mathcal{P}_{\varepsilon_k})$, en este caso también se puede tomar el iterante anterior como punto de arranque, ya que éste estará próximo a la solución.

Una vez visto este algoritmo, se introduce a continuación un teorema que aporta resultados sobre la convergencia de dicho método.

Teorema 3.12. *Sea $J(\mathbf{v})$ un funcional limitado inferiormente en la región factible S . Entonces, el algoritmo de penalización interior termina de forma finita para $\delta > 0$, y cuando no lo hace, entonces se verifica:*

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) = 0.$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) = \inf_{\mathbf{v} \in \text{Int}(S)} J(\mathbf{v}).$$

Y además, cualquier punto de acumulación de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es solución del problema (\mathcal{Q}_{des}) .

Demostración. Sólo será necesario probar (1) y (2) cuando el algoritmo no termina de forma finita. Para ello, se toma $\eta > 0$ arbitrario, por lo que existirá un elemento (que depende de η) al que se denotará por $\mathbf{u}_\eta \in \text{Int}(S)$ de tal forma que,

$$J(\mathbf{u}_\eta) < \inf_{\mathbf{v} \in \text{Int}(S)} J(\mathbf{v}) + \frac{\eta}{2} \quad (3.11)$$

entonces como $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ y $\mathbf{u}_\eta \in \text{Int}(S)$, debe existir un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\varepsilon_k P(\mathbf{u}_\eta) < \frac{\eta}{2} \quad \forall k \geq \bar{k} \quad (3.12)$$

Usando ahora que $\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}$ es el mínimo del funcional $J_{\varepsilon_k}(\mathbf{v})$:

$$J_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \leq J_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}_\eta) \Rightarrow \varepsilon_k P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \leq J(\mathbf{u}_\eta) + \varepsilon_k P(\mathbf{u}_\eta) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \quad (3.13)$$

Por lo que usando 3.11, 3.12 y 3.13, se obtiene que,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k P(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) &\leq J(\mathbf{u}_\eta) + \varepsilon_k P(\mathbf{u}_\eta) - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \leq \\ &\leq \inf_{\mathbf{v} \in \text{Int}(S)} J(\mathbf{v}) + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} - J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \leq \eta \quad \forall k \geq \bar{k} \end{aligned}$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, se concluye (1). Ahora, para probar (2), utilizando la desigualdad anterior, se tiene,

$$J(\mathbf{u}^{(\varepsilon_{k+1})}) \leq J(\mathbf{u}_\eta) + \varepsilon_k P(\mathbf{u}_\eta) \leq \inf_{\mathbf{v} \in \text{Int}(S)} J(\mathbf{v}) + \eta \quad \forall k \geq \bar{k}$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, se concluye (2). \square

Una vez vistos estos resultados, es natural plantear la cuestión sobre como tomar la función de penalización $P(\mathbf{v})$. Con este motivo, se plantean las siguientes dos opciones que son las más generales:

$$P(\mathbf{v}) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(\mathbf{v})} \quad \text{y} \quad P(\mathbf{v}) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{\log(-\varphi_i(\mathbf{v}))}$$

Entonces, para mostrar el efecto de la penalización interior de un modo visual, se considera el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \underset{v \in \mathbb{R}}{\text{mín}} \quad & J(v) = v^4 \\ \text{Sujeto a:} \quad & \\ & \varphi_1(v) = v - 1 \\ & \varphi_2(v) = -v - 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

del que se obtiene los siguientes resultados:

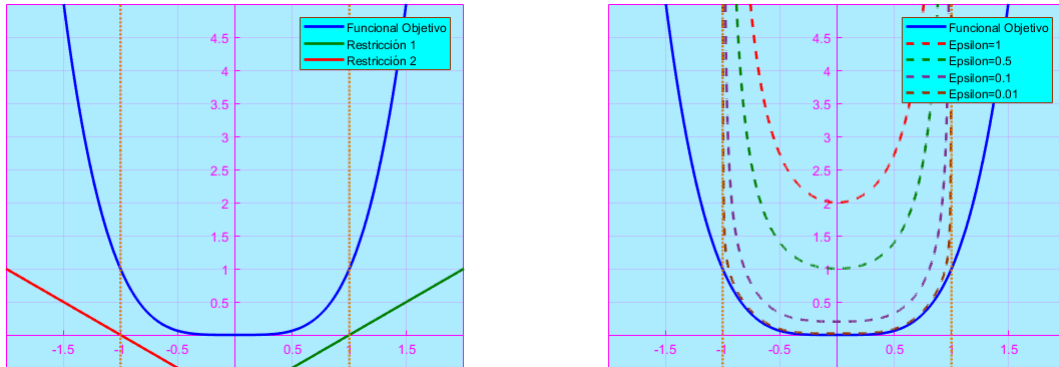


Figura 3.2: Penalización interior

En la primera gráfica, se muestra el funcional objetivo con las restricciones y el conjunto factible. Luego, en la segunda gráfica, se muestra de nuevo el funcional objetivo, y además, los funcionales $J_\varepsilon(v)$ para distintos valores de ε . De este modo, se observa la convergencia de los funcionales $J_\varepsilon(v)$ al funcional del problema original dentro de la región factible. Sin embargo, existe una peculiaridad, pues bien, en la frontera del conjunto, los valores de $J_\varepsilon(v)$ tienden al infinito, lo que muestra que el método sólo convergerá a un punto del interior del conjunto admisible.

De este modo, se muestra visualmente como es necesario inicializar el método desde un punto factible. Además, para restricciones de igualdad, el método no serviría, dado que los funcionales $J_\varepsilon(v)$ no estaría definido en esos puntos.

3.1.3. Método del lagrangiano aumentado

Una vez vistos los métodos basados en penalización de esta sección, se puede observar la necesidad de que el parámetro $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. Este hecho, es una gran desventaja desde el punto de vista numérico, debido a que según se toma ε_k más pequeño, la resolución numérica de los subproblemas generados, puede resultar más compleja de lo previsto.

Para solventar esta dificultad, se introduce el concepto de Lagrangiano aumentado. Éste, deriva de la función Lagrangiano introducida en el capítulo dos, y permitirá solventar ese problema que presentan los métodos de penalización. Para ello, se planteará en primer lugar el concepto de Lagrangiano aumentado para el problema con restricciones de igualdad (\mathcal{Q}_{ig}).

Definición 3.13. Se define la función Lagrangiano aumentado para el problema (\mathcal{Q}_{ig})

como sigue:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \xi_j \phi_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^p (\varphi_j(\mathbf{v}))^2 = J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\xi}^\top \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Phi(\mathbf{v})\|_2^2$$

Observación 3.14. Es fácil observar como la definición anterior, es precisamente el Lagrangiano del problema de minimización,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} J(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Phi(\mathbf{v})\|_2^2 \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

que tiene el mismo mínimo local que el problema (Q_{ig}) .

A continuación, se introduce el siguiente lema que será de gran utilidad para probar un teorema que demuestra lo que se ha venido diciendo hasta el momento.

Lema 3.15. Sean \mathbf{P} y \mathbf{Q} dos matrices simétricas. Se asume que \mathbf{Q} es semidefinida positiva y que \mathbf{P} es definida positiva en el espacio nulo de \mathbf{Q} , es decir, $\mathbf{d}^\top \mathbf{P} \mathbf{d} > 0$ para todo $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ con $\mathbf{d}^\top \mathbf{Q} \mathbf{d} = 0$. Entonces, existe un escalar $\bar{\rho}$ tal que:

$$\mathbf{P} + \rho \mathbf{Q} \text{ es definida positiva } \forall \rho > \bar{\rho}$$

Demostración. Se puede ver en [10, pág. 274-275]. □

Teorema 3.16. Dado el problema (Q_{ig}) , si $\mathbf{u} \in S$ cumple las condiciones suficientes de segundo orden del teorema 2.18 con su multiplicador de Lagrange asociado $\boldsymbol{\lambda}$. Entonces, existe un valor $\bar{\varepsilon}$ tal que \mathbf{u} es un mínimo local de la función $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$.

Demostración. Calculando el gradiente y la hessiana de la función $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi})$ respecto de la variable \mathbf{v} , se tiene:

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = \nabla J(\mathbf{v}) + \Phi'(\mathbf{v})^\top \left(\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\mathbf{v}) \right)$$

$$H_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) = HJ(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \left(\xi_j + \frac{1}{\varepsilon} \phi_j(\mathbf{v}) \right) H\phi_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \Phi'(\mathbf{v})^\top \Phi'(\mathbf{v})$$

En particular, si \mathbf{u} y $\boldsymbol{\lambda}$, satisfacen las condiciones del teorema 2.18, se tiene,

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla J(\mathbf{u}) + \Phi'(\mathbf{u})^\top \left(\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\mathbf{u}) \right) = \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (3.15)$$

$$H_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = HJ(\mathbf{u}) + \sum_{j=1}^p \left(\lambda_j + \frac{1}{\varepsilon} \phi_j(\mathbf{u}) \right) H\phi_j(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \Phi'(\mathbf{u}) \Phi'(\mathbf{u})^\top =$$

$$= H_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{\varepsilon} \Phi'(\mathbf{u})^{\top} \Phi'(\mathbf{u})$$

y usando la condición suficiente de dicho teorema, se sabe que $\mathbf{d}^{\top} H\mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{d} > 0$ para todo $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{d}^{\top} \Phi'(\mathbf{u})^{\top} \Phi'(\mathbf{u})\mathbf{d} = 0$. Entonces, haciendo uso del lema anterior, implica que existe un $\bar{\varepsilon}$ tal que:

$$H_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \text{ es definida positiva para todo } \varepsilon < \bar{\varepsilon} \quad (3.16)$$

Teniendo en cuenta 3.15 y 3.16, se está en hipótesis del teorema 1.6, por lo que se verifica que para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, \mathbf{u} es un mínimo local de la función $\mathcal{L}_{\varepsilon}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$. \square

Por tanto, si se conocen de antemano los valores de los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, bastaría con un número finito de subproblemas sin restricciones que minimicen al funcional $\mathcal{L}_{\varepsilon}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ para llegar a obtener la solución del problema (\mathcal{Q}_{ig}).

Sin embargo, ésta es una situación idílica, debido a que en la práctica, dichos multiplicadores no se conocerán. Por este motivo, se recurre a una estimación de dichos valores. Para ver su deducción, se considera el siguiente problema de minimización, que para un valor fijo de $\boldsymbol{\lambda}$, es equivalente al problema (\mathcal{Q}_{ig}),

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \quad & J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \phi_j(\mathbf{v}) \\ \text{Sujeto a:} \quad & \Phi(\mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

que al aplicarle el método de penalización exterior, tomando como función penalizadora $P(\mathbf{v}) = 1/2 \sum_{j=1}^p (\phi_j(\mathbf{v}))^2$, se obtiene el siguiente subproblema en cada iteración,

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \quad J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \phi_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^p (\phi_j(\mathbf{v}))^2$$

que al suponer que varía el valor de los λ_j , entonces los subproblemas también varían. Pero suponiendo que se busca un punto estacionario, entonces:

$$\nabla J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla \phi_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^p \phi_j(\mathbf{v}) \nabla \phi_j(\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \nabla J(\mathbf{v}) + \sum_{j=1}^p \left(\lambda_j + \frac{1}{\varepsilon} \phi_j(\mathbf{v}) \right) \nabla \phi_j(\mathbf{v}) = 0$$

De este modo, teniendo en cuenta las condiciones KKT del problema original (\mathcal{Q}_{ig}), para un valor fijo de $\boldsymbol{\lambda}$, se observa que un buen estimador de los multiplicadores de Lagrange sería $\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\mathbf{v})$. Por tanto, teniendo esto en cuenta, se puede plantear el siguiente algoritmo basado en el Lagrangiano aumentado para la resolución de los problemas de tipo (\mathcal{Q}_{ig}).

Algoritmo 3.17 (Método de Lagrangiano aumentado). *Se procede con el siguiente método iterativo:*

PASO 0: *Se toma un punto inicial, $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ y $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} \in \mathbb{R}^p$.*

PASO 1: *Se toma como $\mathbf{u}^{(k)}$ la solución del problema de minimización sin restricciones definido por el funcional $\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$.*

PASO 2: *Si $\|\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|_{\infty} < \delta$ entonces se para. En caso contrario, se toma $\varepsilon_{k+1} = 1/10\varepsilon_k$, $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)}$ y $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_k} \Phi(\mathbf{u}^{(k)})$ para volver al PASO 1.*

Observación 3.18. Como se ha comentado en los anteriores métodos de penalización, δ es el parámetro de tolerancia, un valor muy pequeño que permite comprobar que la solución obtenida es factible o está próxima al conjunto admisible. Luego, si este criterio de parada no se cumple, se pasa a reducir el valor de ε , que en este caso se reduce multiplicando por $1/10$, pero que se podría reducir de cualquier otra forma.

Visto este algoritmo, es necesario ver que efectivamente converge y que la deducción del método es correcta. Para ello, se introducen los siguientes resultados.

Teorema 3.19. *Dado el problema (Q_{ig}) , se supone que el funcional objetivo y las restricciones son continuas. Si $\mathbf{u}^{(k)}$ es la solución global de minimizar sin restricciones $\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$, donde $\{\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$ con $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$. Entonces cualquier punto límite de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ es un mínimo global del problema original (Q_{ig}) .*

Demostración. Sea \mathbf{u} el límite de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, como $\mathbf{u}^{(k)}$ se define como el mínimo global de $\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$, entonces:

$$\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \leq \mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (3.17)$$

Tomando como χ el valor del funcional objetivo en el óptimo para el problema (Q_{ig}) , entonces:

$$\chi = \min_{\mathbf{v} \in S} J(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v} \in S} \left\{ J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\lambda}^{(k)\top} \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon_k} \|\Phi(\mathbf{v})\|_2^2 \right\} = \min_{\mathbf{v} \in S} \mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$$

Por lo que, tomando el mínimo en el extremo derecho de la ecuación 3.17 en $\mathbf{v} \in S$, se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = J(\mathbf{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\lambda}^{(k)\top} \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) + \frac{1}{2\varepsilon_k} \|\Phi(\mathbf{u}^{(k)})\|_2^2 \leq \chi$$

Ahora bien, la sucesión $\{\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada y tiene como límite $\boldsymbol{\lambda}$. Tomando el límite superior en la ecuación anterior y usando la continuidad de las funciones $J(\mathbf{v})$ y $\Phi(\mathbf{v})$, se obtiene que,

$$J(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \Phi(\mathbf{u}) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\varepsilon_k} \|\Phi(\mathbf{u}^{(k)})\|_2^2 \leq \chi$$

pero como $\|\Phi(\mathbf{u}^{(k)})\|_2^2 \rightarrow 0$ y $1/\varepsilon_k \rightarrow \infty$, se deduce que $\Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \rightarrow 0$ y por tanto, $\Phi(\mathbf{u}) = 0$. Por consiguiente, \mathbf{u} es factible y además $J(\mathbf{u}) \leq \chi$, por lo que \mathbf{u} es el óptimo del problema (\mathcal{Q}_{ig}) . \square

Sin embargo, este resultado, implica que el mínimo de la función Lagrangiano aumentado es calculado de forma exacta. Pero esto no sucede numéricamente, por lo que se necesita un resultado más potente. En este sentido, se introduce el siguiente teorema.

Teorema 3.20. *Sea $\mathbf{u}^{(k)}$ tal que $\|\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\| \leq \delta_k$, siendo la sucesión $\{\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ acotada, $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ decreciente y $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. Entonces, si la sucesión de $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u}$ siendo \mathbf{u} un punto regular, entonces \mathbf{u} es un punto KKT para el problema (\mathcal{Q}_{ig}) y además $\left\{ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_k} \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \boldsymbol{\lambda}$ siendo $\boldsymbol{\lambda}$ los multiplicadores de Lagrange asociados a \mathbf{u} .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, se supone que $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{u}$, y se define para todo $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + 1/\varepsilon_k \Phi(\mathbf{u}^{(k)})$. Entonces se obtiene que,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) &= \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) + \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \left(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_k} \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \right) = \\ &= \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) + \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como \mathbf{u} es regular, $\Phi'(\mathbf{u})$ tiene rango p y $\Phi'(\mathbf{u}^{(k)})$ tiene rango p para todo k suficientemente grande. Sin pérdida de generalidad, se asume que $\Phi'(\mathbf{u}^{(k)})$ tiene rango p para todo k . Entonces, multiplicando la ecuación 3.18 por $\left(\Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \right)^{-1} \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})$, se obtiene que,

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} = \left(\Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \right)^{-1} \Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) \left(\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) - \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) \right)$$

pero usando que por hipótesis, $\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \rightarrow 0$, entonces $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \rightarrow \boldsymbol{\lambda}$ donde,

$$\boldsymbol{\lambda} = - \left(\Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \right)^{-1} \Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$$

por lo que volviendo a tener en cuenta que $\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\varepsilon_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \rightarrow 0$ de la ecuación 3.18 se obtiene que $\nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) + \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} = \mathbf{0}$. Ahora bien, como $\{\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada y $\boldsymbol{\lambda}^{(k)} + 1/\varepsilon_k \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \rightarrow \boldsymbol{\lambda}$, esto implica que $\{1/\varepsilon_k \Phi(\mathbf{u}^{(k)})\}$ es acotada. Pero como $1/\varepsilon_k \rightarrow +\infty$, se deduce que $\Phi(\mathbf{u}) = 0$. \square

Por tanto, este resultado muestra que si el punto \mathbf{u} , al que converge la sucesión creada por el método del Lagrangiano aumentado, es regular y los multiplicadores de Lagrange convergen a un valor finito, entonces, \mathbf{u} es un punto KKT. Y por consiguiente, un buen candidato a ser mínimo del problema (\mathcal{Q}_{ig}) .

Ahora bien, este método ha sido desarrollado para un problema del tipo (Q_{ig}) , pero sería interesante desarrollarlo para resolver un problema general del tipo (Q) . Con este objetivo, se pretende reescribir el problema (Q) de una forma equivalente en la que sólo halla restricciones de igualdad. Así pues, se puede introducir el problema,

$$\begin{aligned} & \min_{(\mathbf{v}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m}} J(\mathbf{v}) \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \quad \varphi_i(\mathbf{v}) + z_i^2 = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \phi_j(\mathbf{v}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $z_i, i = 1, \dots, m$ son variables adicionales. Esta transformación del problema original (Q) en uno de este estilo de tipo (Q_{ig}) , se puede consultar en [10, págs. 286-287].

De este modo, se puede aplicar el algoritmo del Lagrangiano aumentado al problema 3.19 para así obtener un punto KKT de dicho problema, y en consecuencia del problema original. En esta línea, se plantea minimizar el Lagrangiano aumentado asociado al problema 3.19, que sería el siguiente,

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) = J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\xi}^\top \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Phi(\mathbf{v})\|_2^2 + \sum_{i=1}^m \left\{ \nu_i (\varphi_j(\mathbf{v}) + z_i^2) + \frac{1}{2\varepsilon} |\varphi_i(\mathbf{v}) + z_i^2|^2 \right\} \tag{3.20}$$

de modo que para resolver el problema (Q) , se aplicará el algoritmo 3.17 tomando como función Lagrangiano aumentado la ecuación 3.20. Además, a esta ecuación se le pueden aplicar los resultados anteriores. Por tanto, si se conocen los valores exactos de los multiplicadores de Lagrange $(\boldsymbol{\lambda})$ y KKT $(\boldsymbol{\mu})$, se puede aplicar el teorema 3.16, que nos permite concluir que bastarían un número finito de subproblemas sin restricciones que minimicen el funcional $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ para hallar la solución del problema (Q) .

Sin embargo, bastaría con resolver el problema de minimización respecto de la variable $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, debido a que la minimización referente a la variable auxiliar $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, se puede calcular. Pues bien, minimizando en primer lugar $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ respecto de \mathbf{z} , es equivalente a minimizar,

$$\min_{w_i \geq 0} \left\{ \mu_i (\varphi_i(\mathbf{v}) + w_i) + \frac{1}{2\varepsilon} (\varphi_i(\mathbf{v}) + w_i)^2 \right\} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

que es una función cuadrática en w_i . Su mínimo teniendo en cuenta las restricciones, es $w_i^* = \max\{0, \tilde{w}_i\}$, donde \tilde{w}_i es el mínimo del problema sin restricciones, y que por tanto, cumple que anula la derivada, es decir, $\mu_i + 1/\varepsilon(\varphi_i(\mathbf{v}) + \tilde{w}_i) = 0$, luego:

$$w_i^* = \max \{0, -(\varepsilon\mu_i + \varphi_i(\mathbf{v}))\} \tag{3.21}$$

Entonces, una vez hallado el mínimo respecto de la variable $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, se puede substituir la expresión 3.21 en la ecuación 3.20, de tal modo que, para los valores fijos de los multiplicadores de Lagrange y KKT, se tiene que minimizar respecto de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ la siguiente función,

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Phi(\mathbf{v})\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\max \left\{ 0, \mu_i + \frac{1}{\varepsilon} \varphi_i(\mathbf{v}) \right\} \right)^2 - \mu_i^2 \right\} \quad (3.22)$$

que se considerará como la función *Lagrangiano aumentado* para el problema (Q). Entonces, llegado este punto, con seguir el mismo procedimiento del algoritmo 3.17, con el funcional 3.22, se obtendría numéricamente un punto KKT para el problema (Q).

Claro que, en este caso, se saben los valores fijos de los multiplicadores, que se desconocen en la realidad. Para ello, se deben aproximar mediante un procedimiento iterativo. En el caso de los multiplicadores de Lagrange, ya se dedujo anteriormente, pero teniendo en cuenta la conversión hecha para el caso de restricciones de desigualdad, haciendo el mismo procedimiento, se llega a que sus actualizaciones se corresponden con:

$$\left\{ \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_k} \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \right\} \quad \text{y} \quad \max \left\{ 0, \boldsymbol{\mu}^{(k)} + \frac{1}{\varepsilon_k} \Psi(\mathbf{u}^{(k)}) \right\}$$

3.2. Métodos de direcciones factibles

En esta nueva sección, se va a estudiar el método de las direcciones factibles. El cuál es similar al método del gradiente en el sentido de que se busca una dirección de descenso a través de la cuál se genera una sucesión de puntos que convergen al mínimo. Sin embargo, al considerar el problema (Q), se va a exigir a mayores que la dirección sea factible, para asegurar que la sucesión de puntos, está contenida en el conjunto admisible.

Con esta intención, a lo largo de esta sección, vamos a hablar del concepto de dirección factible de descenso, que en base a lo visto en 2.4 y teniendo en cuenta la definición de dirección de descenso, se define como sigue:

Definición 3.21. Se considera el problema (Q), y dado un punto $\mathbf{v} \in S$, se dice que $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es una *dirección factible de descenso* si verifica que,

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{v}) < 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{d} \in DF(\mathbf{v}, S)$$

Es importante resaltar que no siempre existen direcciones factibles de descenso. Por ejemplo, se puede tomar el problema (Q) en dimensión 2, sujeto a una única restricción de igualdad que viene dada por la función $\phi(\mathbf{v}) = v_2 - v_1^4$. En este caso, dada la peculiaridad

del conjunto S , independientemente del punto $\mathbf{v} \in S$ escogido, $DF(\mathbf{v}, S) = \emptyset$, de modo que no existen direcciones factibles de descenso.

Sin embargo, bajo algunas condiciones, la existencia de direcciones factibles de descenso sí está garantizada. A continuación, se muestra un resultado que muestra las peculiaridades de cómo debe ser el conjunto admisible.

Teorema 3.22. *Se considera el problema (\mathcal{Q}) y se supone que el conjunto admisible S es convexo y que el funcional $J(\mathbf{v})$ también lo es. Entonces, dado un punto $\mathbf{v} \in S$, siempre va a existir una dirección factible en \mathbf{v} , si y sólo si, \mathbf{v} no es un mínimo del problema (\mathcal{Q}) .*

Demostración. Obviamente, si \mathbf{v} es mínimo del problema, no van a existir direcciones de descenso por el motivo de ser mínimo. Por tanto, se asume que \mathbf{v} no es mínimo, y al mínimo, se denota por $\mathbf{u} \in S$. Pero como $J(\mathbf{v})$ es convexo, aplicando 1.13 se deduce,

$$\mathbf{d}^\top \nabla J(\mathbf{v}) < 0$$

siendo $\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Ahora bien, como el conjunto admisible S es convexo y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, entonces $\mathbf{d} \in DF(\mathbf{v}, S)$. De modo que se verifica que \mathbf{d} es una dirección factible de descenso. \square

Llegados a este punto, de la forma en la que se ha presentado el método, es fácil presentar un algoritmo genérico para la resolución del problema (\mathcal{Q}) a través de las direcciones factibles, el cual es el siguiente:

Algoritmo 3.23 (Algoritmo genérico de direcciones factibles). *Se siguen los siguientes pasos:*

PASO 0: *Se toma un iterante inicial $\mathbf{u}^{(0)} \in S$ y $k = 0$.*

PASO 1: *Si no existe una dirección factible de descenso $\mathbf{d}^{(k)}$ para el punto $\mathbf{u}^{(k)}$, entonces se finaliza. En caso contrario, se calcula $\mathbf{d}^{(k)}$.*

PASO 2: *Se calcula el paso $\alpha_k > 0$.*

PASO 3: *Se actualiza $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$, $k = k + 1$ y se vuelve al PASO 1.*

Observación 3.24. En el PASO 2 del algoritmo anterior, se pide calcular el paso α asociado a una dirección \mathbf{d} y un punto \mathbf{v} . Sin embargo, este paso no es el mismo del que se habló en el primer capítulo para el caso sin restricciones. Pues bien, dicho valor α es un valor positivo que resuelve el problema unidimensional,

$$\min_{\mathbf{v} + \alpha \mathbf{d} \in S} J(\mathbf{v} + \alpha \mathbf{d}) \quad (3.23)$$

por lo que se ve que se exige que el paso no estropee la factibilidad de los puntos de la sucesión creada con el algoritmo.

Para ello, en la resolución del problema 3.23, se puede optar por hacer una búsqueda numérica del intervalo $[0, \delta]$ que asegure la factibilidad del paso α . De este modo, posteriormente se podría aplicar a dicho intervalo un método de búsqueda de paso mediante dicotomía (con derivadas o sin ellas) de la forma que se describieron en 1.5.1. Para ver un pseudocódigo que muestre esta inicialización del algoritmo, se puede consultar el Anexo II al final del trabajo.

Sin embargo, no es recomendable aplicar un algoritmo del tipo CPP y CPG. Esto es debido a que si el valor δ obtenido no cumple el CPG, el algoritmo no tiene por qué converger a un paso admisible haciendo que pueda tomar un paso excesivamente pequeño.

En este sentido, se podría optar por algún tipo de modificación de dichos criterios. Por ejemplo, en [15, pág 493-496] se aporta una propuesta modificada de la regla del Armijo.

3.2.1. Método de Zoutendijk

En el contexto de los métodos de direcciones factibles, se considerará en primer lugar el método de Zoutendijk. Éste, puede tener diferentes versiones de su algoritmo según se trate de un problema de optimización con funciones lineales o no lineales. Sin embargo, en este apartado, se considerará el caso genérico no lineal como se ha venido haciendo hasta el momento.

Para ello, se comienza considerando el problema de optimización con restricciones de desigualdad, es decir, un problema del tipo (\mathcal{Q}_{des}) para el que se desarrollará el método. En este contexto, el siguiente resultado es la base del método.

Teorema 3.25. *Sea \mathbf{v} un punto factible del problema (\mathcal{Q}_{des}) . Suponiendo que el funcional objetivo y las restricciones activas son diferenciables y aquellas que no son activas son continuas. Si $\nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$ y $\nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$ para todo $i \in I(\mathbf{v})$, entonces \mathbf{d} es una dirección factible de descenso.*

Demostración. Se supone que \mathbf{d} satisface que $\nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$ y $\nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$, $i \in I(\mathbf{v})$. Dado que para $i \notin I(\mathbf{v})$, $\varphi_i(\mathbf{v}) < 0$ y las funciones $\varphi_i(\mathbf{v})$ son continuas en \mathbf{v} , entonces debe existir un $\delta > 0$ tal que $\varphi_i(\mathbf{v} + t\mathbf{d}) \leq 0$ para todo $t \in [0, \delta]$. Ahora bien, por la diferenciabilidad de las funciones $\varphi_i(\mathbf{v})$, para $i \in I(\mathbf{v})$,

$$\varphi_i(\mathbf{v} + t\mathbf{d}) = \varphi_i(\mathbf{v}) + t \nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} + o(t\|\mathbf{d}\|)$$

Como $\nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$, entonces $\varphi_i(\mathbf{v} + t\mathbf{d}) < \varphi_i(\mathbf{v}) = 0$ para un $t > 0$ suficientemente pequeño. Ahora bien, $\varphi_i(\mathbf{v} + t\mathbf{d}) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$ para un t lo suficientemente pequeño (ya que si $i \notin I(\mathbf{v})$ cualquier dirección es factible), y por tanto existe un $t > 0$ tal que $\mathbf{v} + t\mathbf{d}$ es factible. Por consiguiente, como por hipótesis $\nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} < 0$, \mathbf{d} también es una dirección de descenso y entonces se concluye el resultado. \square

Tras lo visto, se deduce una posible forma de hallar direcciones factibles de descenso dado un punto admisible \mathbf{v} . Pues bien, se podría plantear un problema que minimice el máximo entre $\nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d}$ y $\nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d}$ con $i \in I(\mathbf{v})$. Por consiguiente, se plantea el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \underset{(z, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{n+1}}{\text{mín}} \quad z \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \quad \nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} - z \leq 0 \\ & \quad \nabla \varphi_i(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} - z \leq 0 \quad i \in I(\mathbf{v}) \\ & \quad -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.24}$$

A partir de este punto, se denotará por $(\bar{z}, \bar{\mathbf{d}})$ a la solución del problema 3.24. Como $(z, \mathbf{0})$ es factible para cualquier $z \geq 0$, entonces $\bar{z} \leq 0$. Por tanto, como en la solución del problema 3.24 $\bar{z} < 0$, al aplicar el teorema anterior, se tiene que $\bar{\mathbf{d}}$ es una dirección factible de descenso.

Teorema 3.26 (Teorema de Gordan). *Dada una matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$, sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:*

- (1) $\mathbf{Ax} < \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- (2) $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$, para un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Demostración. Se puede consultar en [11, pág. 50-51]. □

Teorema 3.27. *Dado un problema del tipo (\mathcal{Q}_{des}) , y \mathbf{u} un punto admisible. Entonces, \mathbf{u} es un punto de Fritz-John, si y sólo si, en el óptimo del problema 3.24, $\bar{z} = 0$.*

Demostración. El valor óptimo \bar{z} del problema 3.24 es cero, si y sólo si, el sistema

$$\begin{cases} \nabla J(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} < \mathbf{0} \\ \nabla \varphi_i(\mathbf{u})^\top \mathbf{d} < \mathbf{0} \quad \forall i \in I(\mathbf{u}) \end{cases}$$

no tiene solución. Entonces, haciendo uso del teorema 3.26, éste sistema no tiene solución, si y sólo si, existen escalares η_0, η_i con $i \in I(\mathbf{u})$ tales que,

$$\eta_0 \nabla J(\mathbf{u}) + \sum_{i \in I(\mathbf{u})} \eta_i \nabla \varphi_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{con } \eta_0 \geq 0 \text{ y } \eta_i \geq 0 \quad \forall i \in I(\mathbf{u})$$

donde η_0 o η_i son estrictamente mayores que 0 para algún $i \in I(\mathbf{u})$. Lo cual es precisamente la condición de punto de Fritz-John. □

En este caso, no se puede asegurar la existencia de un punto KKT. Además, se ha visto que η_0 puede no ser estrictamente positivo, lo cuál, sería necesario y suficiente para que el punto de Fritz-John fuese KKT.

Por otro lado, visto este último resultado, se puede deducir el método de Zoutendijk. Pues bien, dado un punto inicial factible, se puede proceder mediante un procedimiento iterativo en el que se obtenga una dirección factible de descenso mediante la resolución del problema 3.24. De lo que se deduce el siguiente algoritmo:

Algoritmo 3.28 (Método de Zoutendijk). *Se sigue el siguiente procedimiento iterativo:*

PASO 0: *Se toma $\mathbf{u}^{(0)} \in S$ factible y se toma $k = 0$.*

PASO 1: *Se calcula $I(\mathbf{u}^{(k)})$ y se resuelve el problema 3.24 del que se obtiene una solución $(z_k, \mathbf{d}^{(k)})$. En caso de que $z_k = 0$, se finaliza y se obtiene un punto de Fritz-John, y en caso contrario, se pasa al PASO 2.*

PASO 2: *Se calcula el paso α_k , se toma $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$ y se vuelve al PASO 1.*

Puede parecer contradictorio que para hallar una dirección factible de descenso, sea necesario resolver un nuevo problema de minimización con restricciones. Sin embargo, el problema planteado en 3.24, tiene una enorme ventaja, pues tanto el funcional objetivo como las restricciones son lineales. Por tanto, se está ante un problema de programación lineal.

Así, usando este hecho, se puede obtener la solución de dicho problema mediante el uso del algoritmo del Simplex, que permite su resolución de forma sencilla. Éste algoritmo (el Simplex), no se ha introducido en el trabajo dado que se está a considerar problemas en el contexto no lineal, pero se puede consultar su deducción e implementación en el capítulo 13 de [13, pág 370] o en el capítulo 7 de [19, pág 420] (de éste último, se puede consultar su pseudocódigo en el Anexo II).

En lo que se refiere a la convergencia del método, ésta no está asegurada. De hecho, se puede ver aplicando el contraejemplo de Wolfe [11, págs 381-382]. Sin embargo, éste problema se solventa de algún modo haciendo la modificación que Topkis y Veinott propusieron en 1967, y que garantiza la convergencia a un punto de Fritz-John.

Esta modificación, consiste en substituir el problema 3.24 en el algoritmo 3.28, por el siguiente:

$$\begin{aligned} & \min_{(z, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{n+1}} z \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \quad \nabla J(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} - z \leq 0 \\ & \quad \Psi'(\mathbf{v})^\top \mathbf{d} - z \leq -\Psi(\mathbf{v}) \\ & \quad -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nótese, que sigue estando dentro del marco de los problemas de programación lineal, por lo que esta modificación no implica una complejidad añadida en la resolución del subproblema. Esta nueva metodología de resolución, se conoce también como el algoritmo

de Topkis-Veinott en honor a sus creadores. En lo que se refiere a la convergencia, se puede aportar el siguiente resultado del que se omite su demostración debido a que ésta se basa en conceptos no introducidos en el trabajo, pero que se pueden consultar en la referencia aportada.

Teorema 3.29. *Se considera un problema del tipo (Q_{des}) donde el funcional objetivo y las restricciones son suficientemente diferenciables. Entonces, cualquier punto de acumulación de la sucesión $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ generada por el algoritmo 3.28 con la modificación de Topkis-Veinott, es un punto de Fritz-John.*

Demostración. Se puede consultar en [11, págs. 386-389]. □

3.2.2. Método de los conjuntos activos

Otro método de tipo direcciones factibles, es el conocido método de conjuntos activos. En este caso, se desarrollará para problemas de tipo cuadrático (vistos en 2.5), debido a que la resolución de estos problemas se usará en la sección posterior.

Primeramente, partiendo de la notación descrita en 2.5, se va a denotar por $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ con $i = 1, \dots, m$ la fila i -ésima de la matriz \mathbf{A} , por lo que $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mid \dots \mid \mathbf{a}_m)^\top$. Y de forma análoga, $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ con $j = 1, \dots, p$ se corresponde con la fila j -ésima de la matriz \mathbf{E} , de modo que $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \mid \dots \mid \mathbf{e}_p)^\top$. Teniendo esto en cuenta, se va a comenzar introduciendo el siguiente resultado básico.

Lema 3.30. *Sea \mathbf{u} un mínimo local del problema (QP) , entonces \mathbf{u} es un mínimo local del siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\text{mín}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top \mathbf{Q} \mathbf{v} - \mathbf{c}^\top \mathbf{v} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \\ & \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{f} \\ & \mathbf{a}_i^\top \mathbf{v} = b_i \quad i \in I(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Recíprocamente, sea \mathbf{u} un punto factible del problema (QP) que verifica las condiciones KKT del problema 3.26, con multiplicadores de Lagrange $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, de manera que $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{|I(\mathbf{u})|}$ tal que,

$$\mu_i \geq 0, \quad i \in I(\mathbf{u}) \tag{3.27}$$

entonces \mathbf{u} también es un punto cumpliendo las condiciones KKT para el problema (QP) .

Demostración. Como \mathbf{u} es solución del problema (QP) , éste es factible y por tanto también es un punto admisible para el problema 3.26, pero además, como los funcionales objetivos coinciden para ambos problemas y \mathbf{u} es solución de (QP) , entonces también lo es de 3.26.

Veamos ahora el segundo resultado, sea \mathbf{u} un punto admisible para el problema (\mathcal{QP}) que verifica las condiciones KKT para 3.26 con sus correspondientes multiplicadores de Lagrange cumpliendo 3.27, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{c} + \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i \in I(\mathbf{u})} \mu_i \mathbf{a}_i^\top &= \mathbf{0} \\ \mu_i (\mathbf{a}_i \mathbf{u} - b_i) &= 0 \quad y \quad \mu_i \geq 0 \quad \forall i \in I(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

por lo que definiendo $\mu_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(\mathbf{u})$, se obtienen inmediatamente las condiciones KKT para el problema (\mathcal{QP}). \square

Una vez introducido este resultado, se puede detallar la idea en la que se basa el algoritmo. Centrándose en ella, partiendo de un punto inicial factible, se desarrolla un proceso iterativo, que en cada iteración, resuelve un subproblema de tipo (\mathcal{QP}_{ig}).

Entonces, sea $\mathbf{u}^{(0)}$ un iterante inicial factible. A partir de aquí, en cada k -iteración, se calcula el conjunto de índices de las restricciones de desigualdad activas, es decir, $I_k = I(\mathbf{u}^{(k)}) \subset \{1, \dots, m\}$. Entonces, se definen los valores,

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{v} - \mathbf{u}^{(k)} \quad \mathbf{c}^{(k)} = \mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k)} \quad \mathbf{g}^{(k)} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{(k)})^\top \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{c}^\top \mathbf{u}^{(k)}$$

que se utilizan para simplificar la notación al hacer el siguiente calculo,

$$J_{QP}(\mathbf{v}) = J_{QP}(\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}) = \frac{1}{2} (\mathbf{d}^{(k)})^\top \mathbf{Q}\mathbf{d}^{(k)} - (\mathbf{c}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{g}^{(k)}$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{g}^{(k)}$ es una constante, se define el siguiente k -subproblema:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}^{(k)} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} (\mathbf{d}^{(k)})^\top \mathbf{Q}\mathbf{d}^{(k)} - (\mathbf{c}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \mathbf{E}\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{a}_i \mathbf{d}^{(k)} = 0 \quad i \in I(\mathbf{u}^{(k)}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si en el mínimo de dicho subproblema (al que se denotará por $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)}$) es el vector nulo, entonces dicho valor tiene que cumplir las condición estacionaria de las condiciones KKT. Así, se tiene que $-\mathbf{c}^{(k)} + \mathbf{E}^\top \boldsymbol{\lambda} + \sum_{i \in I_k} \mathbf{a}_i \mu_i = \mathbf{0}$, lo que implica que $\mathbf{u}^{(k)}$ cumple la condición estacionaria del problema original (\mathcal{QP}). Así, si además verifica 3.27, entonces también será un punto KKT del problema 3.26, y en consecuencia del problema inicial (\mathcal{QP}). En caso contrario, se reducirá el conjunto I_k eliminando el índice i_k tal que $\mu_{i_k} < 0$, es decir, $I_{k+1} = I_k \setminus \{i_k\}$. En este caso, cuando puede que haya varios índices de dicho modo, se podría proceder tomando el i_k correspondiente a:

$$\mu_{i_k} = \min_{\substack{i \in I_k \\ \mu_i^{(k)} < 0}} \mu_i^{(k)} \tag{3.29}$$

Por otra parte, si $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \neq \mathbf{0}$, entonces se define un nuevo iterante como $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}$ para un $\alpha_k \in [0, 1]$ de tal manera que $\mathbf{u}^{(k+1)}$ sea un punto factible, por lo que el problema en este punto es encontrar el α_k que cumple dicha propiedad. Esto es posible dado que $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)}$ es una dirección factible. Pues bien, como $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)}$ cumple las restricciones del k -problema 3.28, tomando $\alpha_k = 1$ se cumplen las restricciones del problema (\mathcal{QP}) que tienen presencia en el subproblema 3.28, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u}^{(k)} + \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}) &= \mathbf{E}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k+1)} &= \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} \leq b_i \quad i \in I(\mathbf{u}^{(k)}) \end{aligned}$$

De modo que, basta constatar la propiedad para las restricciones definidas por las filas i -ésimas de \mathbf{A} tales que $i \notin I(\mathbf{u}^{(k)})$. Pues bien, considerando por un lado el caso $\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \leq 0$ para algún $i \notin I(\mathbf{u}^{(k)})$,

$$\mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \leq \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} \leq b_i$$

por lo que este caso no influye, pero si $\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} > 0$, entonces,

$$\mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \leq b_i \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)}}{\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}}$$

de modo que, para asegurar la factibilidad de $\mathbf{u}^{(k+1)}$ se toma:

$$\alpha_k = \min \left\{ 1, \min_{\substack{i \notin I(\mathbf{u}^{(k)}) \\ \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} > 0}} \frac{b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)}}{\mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{d}}^{(k)}} \right\}$$

Es importante llegado este punto, pensar en el conjunto I_{k+1} referente al nuevo iterante $\mathbf{u}^{(k+1)}$. Entonces, si $\alpha_k < 1$, se tiene que por la forma en la que se ha tomado α_k existe al menos un $i \notin I_k$ tal que,

$$\mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{a}_i \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \tilde{\mathbf{d}}^{(k)} = b_i$$

por lo que $I_{k+1} = I_k \cup \{i\}$. Sin embargo, si $\alpha_k = 1$, entonces $I_{k+1} = I_k$ ya que lo anterior no sucedería. Y llegado a este punto, se está en condiciones de plantear un algoritmo que permita resolver el problema (\mathcal{QP}).

Algoritmo 3.31 (Método de los conjuntos activos). *Se procede a través de los siguientes pasos:*

PASO 0: *Se aporta un $\mathbf{u}^{(0)} \in S$ y se calcula I_0 , $k = 0$.*

PASO 1: *Se obtiene $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)}$ como la solución al k -subproblema 3.28. Entonces:*

Si $\tilde{\mathbf{d}}^{(k)} \neq \mathbf{0}$, se pasa al PASO 2.

En caso contrario, se comprueba la condición (3.27), que en caso de cumplirse, se para el algoritmo, y en caso contrario, se calcula el índice i_k que no cumple la propiedad de la forma descrita en (3.29), se define $I_{k+1} = I_k \setminus \{i_k\}$, $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)}$ y se pasa al PASO 3.

PASO 2: Se calcula α_k y se toma $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$. Además, si $\alpha_k = 1$, entonces se pasa al PASO 3, y en caso contrario, se calcula $I_{k+1} = I(\mathbf{u}^{(k+1)})$ y se vuelve al PASO 1.

PASO 3: Se toma $I_{k+1} = I_k$, $k = k + 1$ y se vuelve al PASO 1.

Observación 3.32. Para implementar este método, es necesario aportar un punto inicial factible. Este hecho, puede resultar tedioso en algunos casos. Sin embargo, en MATLAB, existen ciertos comandos que al combinarlos aportan ciertos métodos para la obtención de un punto inicial factible. Una propuesta en este sentido, se puede consultar en el Anexo II.

Finalmente, para terminar con el estudio del método, se introduce un resultado de convergencia del algoritmo planteado.

Teorema 3.33. *Si para todo k , los vectores \mathbf{e}_j con $j = 1, \dots, p$ y \mathbf{a}_i con $i \in I(\mathbf{u}^{(k)})$ son linealmente independientes, entonces la sucesión generada por el algoritmo (3.31) converge a la solución del problema (QP) en un número finito de iteraciones, o bien, el problema (QP) no tiene mínimo finito.*

Demostración. Se puede consultar en el teorema 9.4.4 de [15, pág 434]. \square

Sin embargo, para poder aplicar el algoritmo 3.31, es necesario poder resolver los subproblemas cuadráticos sujetos a restricciones afines de igualdad (al que se denotará por (QP_{ig})).

Para ello, partiendo de un problema genérico (QP_{ig}) , se supone que $\text{rang}(\mathbf{E}) = p < n$ y que las filas de E son linealmente independientes. Pues bien, si no lo son, o bien el sistema es incompatible y por tanto no hay elementos factibles, o bien hay restricciones redundantes.

En el caso $p = n$, sólo existe un punto admisible, por lo que es trivial. En caso contrario, $p < n$ y se toma \mathbf{Z} una matriz que tiene por columnas una base del $\ker(\mathbf{E})$. Ahora bien, dado un elemento factible $\mathbf{u}^{(0)}$ cualquiera, la resolución del problema (QP_{ig}) es equivalente al problema:

$$\begin{aligned} & \text{mín}_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n} J_{QP}(\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{d}) \\ & \text{Sujeto a:} \\ & \mathbf{E}\mathbf{d} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.30}$$

La restricción sobre \mathbf{d} , hace que este elemento pertenezca al $\ker(\mathbf{E})$, por lo que debe existir un elemento $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-p}$ tal que $\mathbf{d} = \mathbf{Z}\mathbf{y}$. Por consiguiente, el problema 3.30 se

reescribe como,

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-p}} J_{QP}(\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{Z}\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{Q}_Z \mathbf{y} - \mathbf{c}_Z^\top \mathbf{y} + J_{QP}(\mathbf{u}^{(0)}) \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{Q}_Z = \mathbf{Z}^\top \mathbf{Q} \mathbf{Z}$ y $\mathbf{c}_Z = \mathbf{Z}^\top (\mathbf{c} - \mathbf{Q}\mathbf{u}^{(0)})$. Pero dado que $J_{QP}(\mathbf{u}^{(0)})$ es una constante, la solución al problema 3.31 es la misma que al del problema cuadrático sin restricciones:

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-p}} \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{Q}_Z \mathbf{y} - \mathbf{c}_Z^\top \mathbf{y} \quad (3.32)$$

Así, una vez obtenida la solución al problema 3.32 (a la que se denotará por $\tilde{\mathbf{d}}$), la solución al problema original (\mathcal{QP}_{ig}), será $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{d}}$.

Observación 3.34. En este trabajo, se ha optado por esta propuesta para resolver el problema (\mathcal{QP}_{ig}) dado que se adecua al contexto y los contenidos introducidos con anterioridad. Sin embargo, se podría consultar [23, Cap. 3] para ver otros puntos de vista o [18, págs. 86-88] donde se aplica el Lagrangiano aumentado visto en 3.1.3 al problema (\mathcal{QP}_{ig}).

3.3. Métodos SQP

Uno de los métodos más actuales, son los SQP (del inglés *sequential quadratic programming*), el cuál consiste en reducir el problema (\mathcal{Q}) a una serie de problemas cuadráticos (\mathcal{QP}) con restricciones lineales, de tal manera que la sucesión de soluciones de esta serie de problemas converja a la solución del problema inicial. A continuación, se presentarán dos propuestas básicas y su deducción. Sin embargo, se omitirán aspectos de la convergencia debido a que ésta se desmarca del contexto del trabajo, ya que para su demostración se debe usar aspectos muy específicos de dichos métodos, pero se aportarán referencias donde se discuten dichos aspectos.

3.3.1. Método de Lagrange-Newton

Un primer método SQP, es el conocido con el nombre de Lagrange-Newton que resuelve problemas del tipo (\mathcal{Q}_{ig}).

Para su deducción, recordando lo visto en la sección 2.3, una condición necesaria para que un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ sea un punto KKT, es la existencia de un vector $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ de tal forma que:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla J(\mathbf{u}) + \Phi'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

Para resolver este sistema no lineal, se puede partir de un punto inicial $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (próximo a la solución $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ si es posible) para resolverlo mediante el método

de Newton-Raphson. De modo que aplicando dicho procedimiento, para una k -iteración cualquiera, se satisface,

$$\begin{pmatrix} H_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) & \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \\ \Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u}^{(k)} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) + \Phi'(\mathbf{u}^{(k)})^{\top} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) \end{pmatrix}$$

donde $H_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ denota la matriz hessiana del Lagrangiano respecto de la variable \mathbf{v} , $\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}$ y $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(k)}$. Ahora bien, la resolución de dicho sistema, aporta un punto KKT para el siguiente problema cuadrático:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}^{(k)} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(k)\top} H_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})^{\top} \mathbf{d}^{(k)} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} + \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Así, si se denota por $\bar{\mathbf{d}}^{(k)}$ la solución del problema 3.33 y a $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ sus multiplicadores de Lagrange asociados, se podría actualizar cada iterante como $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \bar{\mathbf{d}}^{(k)}$ y $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$. Sin embargo, esto es muy costoso debido al cálculo de la Hessiana en cada iteración.

Por ello, se recurre a una aproximación de la Hessiana como en la sección 1.5.5. Pero en este caso, no se desea aproximar la inversa de la Hessiana, sino la Hessiana en sí. Con este objetivo, en [13, págs 536-538], se propone una actualización de la Hessiana partiendo de una matriz definida positiva, que ha resultado muy satisfactoria llevada a la práctica. En ella, denotando por \mathbf{B}_k la aproximación de la matriz Hessiana en la k -iteración, viene dada por,

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)}} + \frac{\mathbf{r}^{(k)} \mathbf{r}^{(k)\top}}{\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{r}^{(k)}} \tag{3.34}$$

donde $\mathbf{r}^{(k)} = \theta_k \mathbf{y}^{(k)} + (1 - \theta_k) \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)}$ y $\mathbf{s}^{(k)}$, $\mathbf{y}^{(k)}$ se definen como en 1.5.5 y θ_k viene dado por:

$$\theta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)} \geq 0, 2 \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)} \\ (0,8 \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)}) / (\mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)}) & \text{si } \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{y}^{(k)} < 0, 2 \mathbf{s}^{(k)\top} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)} \end{cases}$$

Sin embargo, la convergencia del método presentado hasta el momento, no esta asegurada. Según el razonamiento planteado, se espera que $(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})$ sea un mejor aproximador de la solución $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, que $(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$. Sin embargo, al igual que sucedía en 1.5.4, ésto no tiene que ser cierto a priori. Para asegurar que este echo sea así, se recurre a lo que se conoce como una *función de mérito*. Ésta, involucra comunmente al funcional objetivo y la cantidad de infactibilidad de las restricciones, ya que si el iterante $k + 1$ -ésimo

es mejor que el k -ésimo, entonces el valor de la función de mérito se reduce. En este sentido, el siguiente lema aporta un ejemplo de función de mérito y un importante resultado que permite deducir el algoritmo que le sigue:

Lema 3.35. *Si \mathbf{Q}_k es una aproximación de $H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ definida positiva. Entonces, si $\bar{\mathbf{d}}^{(k)} \neq \mathbf{0}$, para un valor suficientemente grande de ρ , $\bar{\mathbf{d}}^{(k)}$, es una dirección de descenso para la función (a la que se denominará función de mérito):*

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \rho \Phi(\mathbf{v})^\top \Phi(\mathbf{v}) \quad (3.35)$$

Demostración. Se puede consultar en [8, pág 517]. □

Algoritmo 3.36 (Método de Lagrange-Newton). *Se procede con el siguiente procedimiento iterativo:*

PASO 0: *Se aporta un punto inicial de arranque $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)})$, una aproximación de la Hessiana \mathbf{Q}_0 , y un nivel de tolerancia ε , $k = 0$.*

PASO 1: *Se resuelve el problema cuadrático 3.33 tomando como $H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \mathbf{Q}_k$, siendo ésta una aproximación de la Hessiana de la forma vista en 3.34. Del que se obtiene como solución $\bar{\mathbf{d}}^{(k)}$ y $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)}$.*

PASO 2: *Se calcula un paso α_k tal que $\mathcal{M}(\mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \bar{\mathbf{d}}^{(k)}) < \mathcal{M}(\mathbf{u}^{(k)})$.*

PASO 3: *Se toma $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \alpha_k \bar{\mathbf{d}}^{(k)}$ y $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \alpha_k \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$. Se comprueba si $\|\nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)})\|_2 < \varepsilon$, que en caso afirmativo se finaliza, y en caso contrario se vuelve al PASO 2.*

Para conocer aspectos técnicos y detallados de dicho método, se podría consultar [15, págs. 523-530].

3.3.2. Método de Wilson-Han-Powell

Para abordar el problema genérico (\mathcal{Q}) , se introduce el método de Wilson-Han-Powell. Para ello, se extiende el problema 3.33, por lo que a partir de un punto inicial cualquiera $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\mu}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, se define el problema,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}^{(k)} \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^{(k)\top} H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} + \nabla J(\mathbf{u}^{(k)})^\top \mathbf{d}^{(k)} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \Psi(\mathbf{u}^{(k)}) + \Psi'(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} \leq \mathbf{0} \\ & \Phi(\mathbf{u}^{(k)}) + \Phi'(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Observación 3.37. Nótese que este problema presenta una ligera modificación respecto del 3.33, ya que utiliza el valor de $\nabla J(\mathbf{u}^{(k)})$ en lugar del gradiente del Lagrangiano. Pues

bien, al resolver este problema, se obtiene como solución un elemento $\bar{\mathbf{d}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ y sus multiplicadores asociados $(\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Además, si $\bar{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{0}$, sus condiciones KKT cumplirían,

$$\begin{aligned} \nabla J(\bar{\mathbf{u}}^{(k)}) + \Phi'(\bar{\mathbf{u}}^{(k)})^\top \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} + \Psi'(\bar{\mathbf{u}}^{(k)})^\top \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} &= \mathbf{0} \\ \Psi(\bar{\mathbf{u}}^{(k)}) &\leq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \Phi(\bar{\mathbf{u}}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)\top} \Psi(\bar{\mathbf{u}}^{(k)}) &= \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

las cuales, son las condiciones KKT para el problema genérico (\mathcal{Q}) . Por tanto, llegado a una k -iteración donde $\bar{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$ es un punto KKT para el problema original. Y es por este motivo, que se utiliza el $\nabla J(\bar{\mathbf{u}}^{(k)})$ en lugar del gradiente del Lagrangiano en el problema 3.36. Ya que si se usase el gradiente del Lagrangiano, no se podrían obtener las condiciones KKT para el problema original cuando $\bar{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{0}$. Entonces, resulta lógico plantear el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.38 (Método de Wilson-Han-Powell). *Se procede con el siguiente procedimiento iterativo:*

PASO 0: *Se aporta un punto inicial de arranque $(\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\mu}^{(0)}, \boldsymbol{\lambda}^{(0)})$, se toma \mathbf{Q}_0 una aproximación de Hessiana definida positiva y un nivel de tolerancia ε , $k = 0$.*

PASO 1: *Se resuelve el problema cuadrático 3.36 tomando como $H_v \mathcal{L}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) = \mathbf{Q}_k$, donde \mathbf{Q}_k es una aproximación de la Hessiana que viene dada por 3.34. De lo que se obtiene como solución $\bar{\mathbf{d}}^{(k)}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k+1)}$ y $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$.*

PASO 2: *Si $\|\bar{\mathbf{d}}^{(k)}\|_2 < \varepsilon$, entonces se finaliza. En caso contrario, se actualiza $\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \bar{\mathbf{d}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$ y $\boldsymbol{\mu}^{(k+1)} = \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(k)}$. Se toma $k = k + 1$ y se vuelve al PASO 1.*

Observación 3.39. Nótese, que el algoritmo presentado, es un método básico. Para poder mejorarlo, se debería introducir una función de mérito que al igual que en el caso de Lagrange-Newton, asegurase descenso del funcional y de la infactibilidad de los puntos calculados. Para ello, sería necesario calcular el paso y una nueva actualización de los multiplicadores que tuviese en cuenta el paso calculado.

Sin embargo, la teoría que subyace detrás de dichas cuestiones, es muy amplia y se desmarca de los objetivos del trabajo, por lo que se omite y sólo se presenta esta versión reducida. Para dar respuesta a las cuestiones planteadas, se podría consultar [15, págs. 530-537] o [13, Cap. 18].

3.4. Problemas y ejecuciones

Finalmente, en esta sección, se mostrarán las ejecuciones de los diferentes algoritmos planteados al aplicarlos a distintos problemas. Dichas ejecuciones, se han obtenido con los códigos programados en MATLAB de los diferentes algoritmos planteados en el trabajo.

3.4.1. Problema de la geodésica

Un problema usual en las compañías aéreas, es el de calcular la menor trayectoria en el recorrido de los aviones. Intuitivamente, dicha trayectoria es la línea recta. Sin embargo, al aproximarse la Tierra a una esfera, la trayectoria más corta será el arco de geodésica que une ambos puntos.

El objetivo de este primer problema, es una versión de dicho problema. Se considerará la esfera unidad y se querrá calcular la curva de longitud mínima que une dos puntos dados. La solución exacta, es conocida y se puede consultar sus detalles en [22, Cap. V]. Para plantear el problema de forma numérica, se desea hallar una discretización de dicha curva para aproximarla por la curva que une los puntos de la discretización solución. Así, se plantea el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \min_{A(2:n-1,:) \in \mathbb{R}^{3(n-2)}} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(a_{i+1,1} - a_{i1})^2 + (a_{i+1,2} - a_{i2})^2 + (a_{i+1,3} - a_{i3})^2} \\ \text{Sujeto a:} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 1 \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \\ a_{ij} = \sigma_i \quad \forall j = 2, \dots, n-1 \text{ y algún } i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times 3}$ es la matriz que en cada fila contiene las coordenadas de cada punto. Entonces, en la primera fila, se tiene el punto de partida, y en la última el punto de destino. Así, las variables son las coordenadas de los puntos incluidos en las filas interiores de la matriz. De esta forma, se tiene un problema $3(n-2)$ -dimensional con $n-2$ puntos que definen la discretización de la curva buscada.

Respecto a las restricciones, se tienen $n-2$ primeras restricciones de igualdad que aseguran que los puntos calculados pertenezcan a la esfera unidad. Y finalmente, para asegurar que la discretización sea útil para visualizar la trayectoria, se fija una de las coordenadas de los puntos a un valor a elegir (σ_i), dejando las demás libres.

En este caso, se tomará como punto de partida $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ y como punto de destino $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ con 100 puntos de discretización. Para los cuales, se han obtenido los siguientes resultados con los diferentes métodos con los que se puede tratar el problema.

	Número de iteraciones	Distancia	Tiempo de ejecución
Penalización exterior	2	1.047107	2.4036 min
Lagrangiano aumentado	10	1.047192	13.0308 min
SQP (Lagr.-Newt.)	107	1.047192	2.1864 min

Tabla 3.1: Ejecuciones del problema de la geodésica

Para la obtención de dichos resultados, se usó el mismo criterio de tolerancia para todos (10^{-5}) y un método cuasi-newton con búsqueda de Wolfe-Powell y actualización B.F.G.S de memoria limitada en la resolución de los subproblemas. Por otra parte, la solución se representa en la siguiente figura.

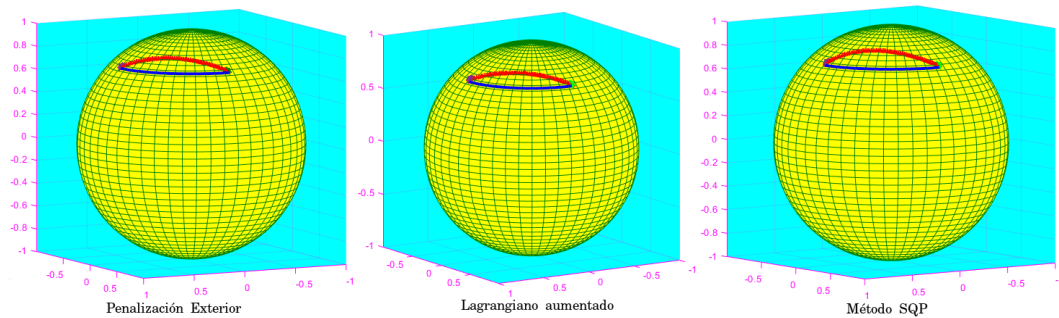


Figura 3.3: Solución del problema de la geodésica

En las imágenes, el arco de la geodésica obtenida numéricamente, y el arco del paralelo que une los dos puntos (el camino más intuitivo en un primer lugar). La distancia del recorrido del paralelo, es de 1,1107 u.d, mientras que la distancia del arco de la geodésica exacta es $\arccos(0,5) = 1,0472$ u.d.

Por tanto, dentro de las soluciones obtenidas, sería la del Lagrangiano aumentado la más aproximada. Obteniendo una solución similar, pero con mucho menor tiempo de ejecución, se encuentra el método SQP. Finalmente, penalización exterior, converge en dos iteraciones, lo que impide la convergencia de $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ y por consiguiente, de que sea fiable el método. Por ello, sería conveniente aumentar el criterio de tolerancia para ver como se suceden las soluciones según siguiese decreciendo ε_k en cada iteración.

Así, se puede empezar a concluir que el uso del método de penalización exterior es muy intuitivo pero no muy eficaz en la práctica. Mientras que, tanto el método del Lagrangiano aumentado como un método SQP, si aportan buenos resultados en tiempos razonables de ejecución.

3.4.2. Problema de la bancarrota

Otra de las aplicaciones de la optimización, es en la “Teoría de Juegos”. Pues bien, en la obtención de la solución de Nash en los juegos de negociación, es necesario resolver problemas de optimización. En [6], se pueden ver los detalles relativos a esta disciplina, y uno de los problemas que se plantea, que es el problema de la bancarrota.

En él, se presenta una empresa en quiebra, cuyo capital es insuficiente para pagar las deudas contraídas. Además, la legislación del país, obliga a que el capital de la empresa se reparta entre los acreedores, sin que ninguno de ellos, reciba más de lo que se le adeuda, y de un modo que sea aceptado por todos.

Entonces, se denota por n el número de acreedores, $E > 0$ el capital de la empresa y a un vector de n componentes que contiene en la componente i -ésima los adeudamientos del i -ésimo acreedor. Así, en [6, págs 105-112], se plantea como posible respuesta la solución de Nash. La cuál, es la solución al problema:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n}{\text{máx}} \quad \prod_{i=1}^n v_i \\ & \text{Sujeto a:} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n v_i \leq E \\ & 0 \leq v_i \leq a_i \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

El cual, se ha resuelto con los distintos algoritmos programados, para el caso particular en el que $n = 10$, $E = 5$ millones de euros, y el vector a de los adeudamientos, es aquel que viene dado por,

$$a = (1 \quad 0,8 \quad 0,5 \quad 1,1 \quad 0,7 \quad 0,2 \quad 0,9 \quad 1,5 \quad 0,1 \quad 1,2)$$

en millones de euros. Así pues, con una tolerancia común de 10^{-5} , se ha obtenido:

	Número iteraciones	J(\mathbf{u})	Tiempo de ejecución
Penalización exterior	Diverge	Diverge	Diverge
Lagrangiano aumentado	14	2.7991.e-04	0.7227 seg
Zoutendijk (Topkis-Veinott)	1	1.696.e-07	0.6319 seg
SQP (W-H-P)	2	2.7994.e-04	0.026 seg

Tabla 3.2: Ejecuciones del problema de la bancarrota

Entonces, en un primer lugar, el método de penalización exterior, diverge debido a que la penalización 3.7 no es capaz de conseguir que los funcionales $J_{\varepsilon_k}(\mathbf{v})$ tengan mínimo finito. Por otro lado, el método de Zoutendijk (con modificación de Topkis-Veinott) si converge, pero obteniendo una peor solución que los demás. Esto es debido a la tolerancia 10^{-5} , pues bien, ésta debería de tomarse más pequeña para que realmente se aproximase al mínimo. Por ejemplo, tomando 10^{-9} , se obtiene resultados similares a los obtenidos con Lagrangiano aumentado o SQP, pero entonces, el tiempo de ejecución se estable entorno a 1.4697 horas.

Finalmente, se aprecia como tanto el método de Lagrangiano aumentado como el método SQP, son los que obtienen un mejor resultado en un tiempo razonablemente pequeño. Es más, resolviendo este problema con el paquete `fmincon` de Matlab, se obtiene que el mínimo el funcional valdría $2.7834 \cdot 10^{-4}$. De modo que incluso se obtienen mejores resultados con los programas programados del Lagrangiano aumentado y SQP que con el paquete `fmincon`.

3.4.3. Conclusiones

Estos dos casos anteriores, dan una visión de la amplia gama de problemas tan diversos que se pueden abordar con el uso de la optimización. Y en lo que se refiere a los métodos, en base a las ejecuciones mostradas, se puede concluir que el Lagrangiano aumentado, es el mejor o uno de los mejores que se han introducido.

Por otra parte, los métodos SQP tienen un tiempo computacional muy pequeño, y en la realidad suelen funcionar muy bien. Sin embargo, para poder concluir que éstos fuesen los mejores, habría que estudiar con detenimiento las funciones de mérito y toda la teoría desarrollada detrás de ellas para mejorar y completar la versión básica que se ha dado (dicho estudio permitiría concluir una buena convergencia, pero como se ha dicho, ésta era una cuestión que se desmarcaba de los objetivos del trabajo).

Finalmente, el método de Zoutendijk con modificación de Topkis-Veinott, necesita niveles de tolerancia muy bajos y un enorme tiempo computacional, pero si converge hacia un mínimo y aporta resultados. Por el contrario, la penalización exterior, es muy intuitiva y no siempre converge como en el problema de la bancarrota.

Anexos

Anexo I: Pseudocódigos de optimización sin restricciones

```
1 J(v), grad_J(v), u, d, a, b, tol ← % Elementos a aportar
2 phi=@(v)J(u+v.*d); % Definicion de la funcion phi(v)
3 der_phi=@(v)d'*grad_J(u+v*d); % Definicion de la derivada de phi(v)
4 while (abs(b-a) > tol)
5     if (abs(der_phi(alpha)) < 10*eps)
6         return %Se toma como solucion alpha
7     elseif (der_phi(alpha) > 0)
8         b=alpha; %Se modifica el extremo izquierdo
9     elseif (der_phi(alpha) < 0)
10        a=alpha; %Se modifica el extremo derecho del
11        intervalo
12    end
13    alpha=(a+b)/2;
14 end
```

Listing 1: Pseudocódigo dicotomia con derivadas

```
1 J(v), u, d, a, b, tol ← % Elementos a aportar
2 phi=@(v)J(u+v*dir); % Definicion de la funcion phi(v)
3 c=(a+b)/2; %Se toma el punto medio del intervalo
4 while (abs(b-a) > tol)
5     d=(a+c)/2; e=(c+b)/2;
6     phic=phi(c); % Evaluacion de phi en c
7     if (phi(d) < phic)
8         b=c; c=d;
9     elseif (phi(e) < phic)
10        a=c; c=e;
11    else
12        a=d; b=e;
13    end
14 end
```

```
15 alpha=(a+b)/2; % Se toma alpha como solucion
```

Listing 2: Pseudocódigo dicotomia sin derivadas

```
1 J(v),grad_J(v),u,d,alpha,amplificador,itmax ← % Elementos a aportar
2 phi=@(v)J(u+v*d); % Definicion de la funcion phi.
3 der_phi=@(v)d'*grad_J(u+v*d); % Definicion de la derivada de phi.
4 phi0=phi(0); der_phi0=der_phi(0); % Evaluacion de phi y der_phi en 0.
5 alpha_min=0; % Se toma un valor inicial para el valor minimo de alpha.
6 % Se inicia la busqueda de un alpha_max que cumpla CPG:
7 int=false; k=0;
8 while (~int && (k <= itmax))
9     phi_alpha=phi(alpha); % Evaluacion de phi en alpha
10    der_phi_alpha=der_phi(alpha); % Evaluacion de la derivada de phi en alpha
11    CPG=(phi_alpha > phi0+m1*der_phi0*alpha); % Criterio de paso grande
12    CPP=(der_phi_alpha < m2*der_phi0) && (~CPG); % Criterio de paso pequeno
13    k=k+1;
14    if CPG % Se cumple el CPG
15        alpha_max=alpha;
16        int=true;
17    elseif CPP % Se cumple el CPP
18        alpha_min=alpha;
19        alpha=alpha*amplificador; % Se aumenta el alpha (amplificador > 1)
20    else % El paso es admisible
21        alpha ← % Se toma alpha como solucion
22        return; % Se finaliza con exito
23    end
24 end
```

Listing 3: Pseudocódigo de búsqueda del intervalo de implementación criterios de tipo CPP y CPG

```
1 J(v),grad_J(v),u0,delta,itmax ← % Elementos a aportar
2 k=0;
3 % Se realiza una iteracion del metodo.
4 d ← % Se toma una direccion de descenso.
5 alpha ← % Se calcula el paso.
6 u=u0+alpha*d; k=k+1;
7 % Se procede con un proceso iterativo:
8 while (norm(u-u0,2)/(1+norm(u,2)) > delta) || (norm(grad_J(u),Inf) > delta)
9     & (k < itmax)
9     u0=u;
10    d ← % Se toma una direccion de descenso.
11    alpha ← % Se calcula el paso.
12    u=u0+alpha*d; k=k+1; % Se realizan las actualizaciones pertinentes.
```

13 end

Listing 4: Pseudocódigo del algoritmo genérico de resolución

```

1 J(v),grad_J(v),u0,d,m,tol,itmax ← %Elementos a aportar
2 k=0;
3 n=length(u0); %Dimension del problema.
4 %Realizacion de una iteracion del algoritmo:
5 grad1=grad_J(u0); %Evaluacion del grandiente en u0.
6 H0=eye(n); %Matriz inicial definida positiva.
7 d=-H0*grad1; %Obtencion de la direccion.
8 alpha ← %Se llamaria a una funcion que calcule el paso
9 u=u0+alpha*d; grad2=grad_J(u); s=u-u0; y=grad2-grad1; k=k+1;
10 u0=u; grad1=grad2;
11 %Se empieza el proceso iterativo:
12 while ((norm(grad2,Inf) > tol) || (norm(s(:,end),Inf) > tol))
13 gamma=(s(:,end)'*y(:,end))/(y(:,end)'*y(:,end));
14 H0=gamma*eye(n);
15 q=grad_J(u0); alfa=[];
16 for j=k-1:-1:k-size(s,2)
17 i=j+1+size(s,2)-k;
18 v=1/(y(:,i)'*s(:,i))*s(:,i)'*q;
19 alfa=[v; alfa];
20 q=q-v*y(:,i);
21 end
22 r=H0*q;
23 for j=k-size(s,2):k-1
24 i=j+1+size(s,2)-k;
25 beta=1/(y(:,i)'*s(:,i))*y(:,i)'*r;
26 r=r+s(:,i)*(alfa(i)-beta);
27 end
28 d=-r;
29 %Comprobacion de la direccion de descenso:
30 if (d'*grad1 > 0)
31 d=-d;
32 end
33 alpha ← %Se llamaria a una funcion que calcule el paso
34 u=u0+alpha*d; grad2=grad_J(u);
35 if (k > m)
36 s(:,1)=[]; s=[s u-u0];
37 y(:,1)=[]; y=[y grad2-grad1];
38 else
39 s=[u-u0 s];
40 y=[grad2-grad1 y];
41 end

```

```
42 k=k+1; u0=u; grad1=grad2; % Actualizacion de iterantes.  
43 end  
44 u ← %Se toma u como solucion obtenida.
```

Listing 5: Pseudocódigo del método Cuasi-Newton con coste reducido B.F.G.S

Anexo II: Pseudocódigos de optimización con restricciones

```
1 u,d,amplificador,contraccion,itmax ← %Elementos a aportar
2 %Se inicializa la búsqueda de un intervalo en el que aplicar el algoritmo.
3 a=0; b=1; k=0;
4 if (u+b*d ∈ S)
5     while (u+amplificador*b*d ∈ S) && (k < itmax)
6         b=amplificador*b; %Se amplifica el intervalo (amplificador > 1)
7         k=k+1;
8     end
9 else
10    b=contraccion*b;
11    while ~(u+contraccion*b*d ∈ S)
12        b=contraccion*b; %Se contrae el intervalo (contraccion ∈ (0,1))
13    end
14 end
```

Listing 6: Pseudocódigo de búsqueda del intervalo donde calcular el paso

```
1 % Resolucion del problema de programacion lineal:
2 %     Min fun'x, Sujeto a: Ax <= 0 y x>=0
3 % Calculo de una solucion basica factible de inicio:
4 [f,c]=size(A); % Dimensiones de la matriz de restricciones
5 fun=[fun;zeros(f,1)]; % Reescritura del vector que describe el funcional
6 A=[A eye(f)]; % Reescritura de la matriz de restricciones
7 B=eye(f); xB=b; IB=c+1:size(A,2); % Se toma una solucion basica factible
8 xN=zeros(c,1); IN=1:c; % Se define la solucion complementaria
9 x=[xN;xB]; I=1:size(A,2);
10
11 % Se comienza con el proceso iterativo:
12 for iter=1:itmax
13     % Paso 1:
14     lambda=B'\fun(IB);
15     cr=fun(IN)-(lambda'*A(:,IN))';
```

```

16   if ( cr >= 0)
17       break
18   end
19   % Paso 2: Determinar la columna de pivotacion:
20   [ crq ,q]=min( cr );
21   y=B\A( : ,IN(q) );
22   if ( y <= 0)
23       fprintf( 'El problema es ilimitado\n' );
24       x = []; z = []; ← %Se toman soluciones vacias
25       return      ← %Se termina
26   end
27   % Paso 3: Determinar la fila de pivotacion. Analisis de Ratios:
28   w=xB./y; k=find( y <= 0 ); w(k)=Inf;
29   [ theta ,p]=min( w );
30   % Paso 4: Pivotacion:
31   x(IN(q))=theta;
32   x(IB)=x(IB)-theta*y;
33   ep=zeros( f ,1 ); ep(p)=1;
34   B=B+(A( : ,IN(q))-B( : ,p) )*ep';
35   l=IB(p); IB(p)=IN(q); xB=x(IB);
36   IN(q)=1;
37 end
38 x=x(1:c);      ← %Se extraen las componentes que son solucion
39 z=fun(1:c)'*x; ← %Se calcula el valor del funcional en la solucion

```

Listing 7: Código método Simplex

```

1 K=E; k=f; q=rank(K); %Se inicia la matriz K y el vector k con las
   restricciones de igualdad
2 %Se adieren las restricciones de desigualdad que son linealmente
   independientes con las que estan almacenadas en K
3 for i=1:length(b)
4     if (rank([K;A(i,:)]) ~= q)
5         K=[K;A(i,:)];
6         k=[k;b(i)];
7         q=q+1;
8     end
9 end
10 %Se completa K con el espacio ortogonal de K
11 if (q < length(c))
12     K=[K;null(K)'];
13     k=[k;zeros(length(c)-q,1)];
14 end
15 u=K\k; %Se toma como punto inicial factible el que resuelve el sistema

```

Listing 8: Ejemplo búsqueda de punto inicial factible en el método de conjuntos activos

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol, *Análisis matemático*, Reverté S.A (1960)
- [2] S.I.Birbil, J.B.G.Frank, G.J.Still, *An elementary proof of the Fritz-John and Karush-Kuhn-Tucker conditions in nonlinear programming*, The European Journal of Operational Research, (2006). Se puede consultar en: <http://research.sabanciuniv.edu/177/1/301180000548.pdf>
- [3] D.P.Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic Press (1982)
- [4] J.V.Tiel, *Convex Analysis, An Introduction Text*, John Wiley and Sons (1984)
- [5] E. Castillo, J. Conejo, P. Pedregal, R. García, N. Alguacil, *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia*, Universidad de Castilla-La Mancha (2012)
- [6] B.Casas, G. Fiestras Janeiro, I. García Jurado, J. González Díaz, *Introducción a la Teoría de Juegos*, USC editora, (2012)
- [7] J. M. Viaño, M. Bruguera, *Lecciones de Métodos Numéricos. Volumen 4: Optimización*, Andavira (2013)
- [8] S.G.Nash, A.Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill (1996)
- [9] K.Sydsaeter, P.Hammond, *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall (1996)
- [10] D.P.Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific (1995)
- [11] M.S. Bazaraa, C.M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and algorithms*, John Wiley and sons (1979)
- [12] G. Allaire, A. Craig, *Numerical Analysis and Optimization. An introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*, Oxford University press (2007)

- [13] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. Springer (2006)
- [14] Clark, F.H., *Optimization and Non-Smooth Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1990)
- [15] W. Sun, Y-X Yuan, *Optimization Theory and Methods. Nonlinear Programming*, Springer (2006)
- [16] David E. Luenberger, *Programación lineal y no lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana (1989)
- [17] R.Cantu Cuellar, *Programación no lineal*, Universidad Autónoma de Nuevo León (1996). Disponible en <http://eprints.uanl.mx/393/1/1080072405.PDF>
- [18] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization, (Volume 2 of Constrained Optimization)*, John Wiley and Sons, (1981)
- [19] J.L De La Fuente O'Connor, *Técnicas de cálculo para Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera*, Editorial Reverté S.A (1997)
- [20] F.W. Sears, G.L. Salinger, *Termodinámica, teoría cinética y termodinámica estadística*, Reverté (1978)
- [21] A.L. Peressini, F.E. Sullivan, J.J. Uhl, Jr., *The mathematics of Nonlinear Programming*, Springer (1988)
- [22] M.A. Hernández Cifre, J.A Pastor González, *Un curso de geometría diferencial. Teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*, Ediciones Doce Calles S.L (2010)
- [23] M.J. Best, *Quadratic Programming with Computer Programs*, Taylor and Francis Group, LLC (2017)

Índice alfabético

A,

actualización

B.F.G.S, 14

B.F.P, 14

C,

condición

de cualificación, 26, 27

de factibilidad, 25

de Fritz-John, 27

de holgura, 25

de Karush-Kuhn-Tucker, 24

estacionaria, 25

conjunto

admisible, 16

convexo, 5

de restricciones activas, 18

D,

dicotomía, 10

dirección

conjugada, 11

de descenso, 8

de descenso B.F.G.S, 14

de restricción nula linealizada, 30

de restricción secuencial nula, 30

factible, 18

factible secuencial, 18

factible de descenso, 53

factible linealizada, 18

E,

espacio tangente, 22

F,

Fletcher-Reeves, 12

función

de mérito, 64

de penalización exterior, 40

de penalización interior, 44

de penalización cuadrática, 43

dual, 35, 38

Lagrangiano, 23, 25

Lagrangiano aumentado, 47

funcional

coercitivo, 4

convexo, 5

cuadrático, 7

estrictamente convexo, 5

L,

Lema

de Farkas-Mirkonski, 26

M,

mínimo

global, 2

local, 1

método

Cuasi-Newton, 13
 de direcciones factibles, 54
 de Lagrange-Newton, 64
 de los conjuntos activos, 60
 de Newton, 12
 de Newton-Raphson, 12, 63
 de penalización exterior, 41
 de penalización interior, 45
 de tipo SQP, 62
 de Wilson-Han-Powell, 65
 de Zoutendijk, 57
 del gradiente, 11
 del gradiente conjugado, 11
 del Lagrangiano aumentado, 50
 Símples, 57
 modificación de Topkis-Veinott, 57
 multiplicadores
 de Fritz-John, 27
 de Karush-Kuhn-Tucker, 25
 de Lagrange, 22

P,

paso

 óptimo, 9
 grande, 10
 pequeño, 10

Polak-Ribière, 12

problema

(\mathcal{P}) , 1
 $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, 40, 44
 (\mathcal{QP}) , 32, 58
 (\mathcal{Q}) , 15

de la bancarrota, 68

de la geodésica, 66

dual, 35, 38

primal, 35

programación

convexa, 28, 36

cuadrática, 32, 37, 58

lineal, 57

punto regular, 22

R,

regla

 de Armijo, 11

 de Goldstein, 11

 de Wolfe-Powell, 11

S,

solución óptima factible, 16

T,

Teorema

 de Jordan, 56

 de Karush-Kuhn-Tucker, 26

 de la función implícita, 23

 de Lagrange, 22

 de Weierstrass, 27