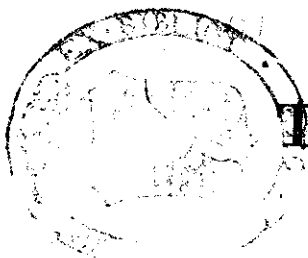


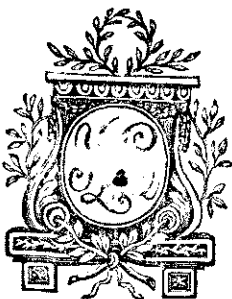
R.40 485



TRATADO DE ARITMÉTICA,

DISPUESTO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS
CABALLEROS CADETES DEL REAL COLEGIO
MILITAR DE LA CIUDAD DE SANTIAGO.

POR D. ÁNGEL LABORDE Y NAVARRO,
TENIENTE DE NAVÍO DE LA REAL ARMADA, Y PRIMER
PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE DICHO COLEGIO.



EN DICHA CIUDAD:
OFICINA DE D. MANUEL ANTONIO REY.
AÑO DE M.DCCC.XI.

-1-

Señor Mariano Torrella

Maximo

Señor Mariano Torrella
Cacete del Colegio Militar
Maximo Santiago

NOTA.

Nada es mas difícil que el escribir (mayormente lo que debe imprimirse), quando la brevedad del tiempo obliga al encargado de la obra á precipitar su formacion. En este caso se halla la presente, que se ha arreglado en poco mas de un mes, para facilitar á los alumnos de el Real Colegio militar establecido en esta ciudad de Santiago un pequeño tratado de Aritmética, que conteniendo las bases fundamentales de dicha ciencia, lograrse la posible concision, sin falta de nada esencial para su objeto. La impresion de el ha sido precisa, para obviar á los alumnos la pérdida del tiempo en escribirle, pues aun para estudiarle y poseerle con la profundidad que requiere un tratado tan fundamental de las demas ciencias, deberá faltarles tiempo á tenor de lo apurado de las circunstancias.

La ciencia Aritmética es profunda, á nadie se oculta: subsisten impresos muchos volúmenes abultados, que contienen quanto se pueda desear en la materia, como que son producciones de talentos sublimes; pero tanto por su complicacion como por no haberse formado con el objeto que el presente, no han parecido adaptables en esta época, en que la mas inmediata aplicacion debe de ser al ramo militar, y con este objeto se ha realizado en los términos que han parecido á propósito, esperando que la indulgencia de los sabios le pondrá á cubierto de las faltas que en el se noten, convencidos por las causas enunciadas, de la necesidad de imprimirle y brevedad del tiempo en recopilarle.

[Faint handwritten notes at the bottom left of the page]

[Faint handwritten notes at the bottom right of the page]

DEFINICIONES

de algunas voces matemáticas, cuya inteligencia es necesaria para la de este tratado, y demas que deben formar el plan de estudios.

Definicion nominal, es la que manifiesta el significado de una voz.

Definicion real, es la manifestacion de solo lo preciso para distinguir la cosa definida de las demas que existen, ó pueden existir.

Hipótesis, es una suposicion que se hace.

Axioma, es una verdad tan evidente por sí misma que no necesita de prueba, por exemplo, *la parte es menor que el todo: el todo es igual al conjunto de todas sus partes*: estos son unos axiomas.

Postulado, es un axioma que recae sobre la posibilidad de executar alguna cosa.

Teorema, es una verdad que no nos convence si no se demuestra, y se deduce de las definiciones, axiomas, ó de otras verdades demostradas. El *teorema* consta de dos partes, es á saber: de la proposicion en que se anuncia la verdad, y de la demostracion en que se manifiesta su certeza.

Problema, es la propuesta de una cosa que se ha de executar: consta de tres partes; es á saber: la *proposicion*, en la que se manifiesta lo que se pretende descubrir ó executar: la *resolucion*, en que se expresa el modo de executar: la *demonstracion*, en la que se prueba que executado lo que se previene en la resolucion se obtiene lo que se pretendia.

Corolario, es una consecuencia de una definicion dada, de un teorema demostrado, ó de un problema resuelto.

Lema, es un teorema, ó un problema que no se demuestra, ó no se resuelve, sino para servir de preparacion á otro teorema ó problema.

Escolio, es una recapitulacion racionada de varias proposiciones que tienen un mismo objeto.

PRINCIPIOS DE ARITMÉTICA. ⁵

PRIMERA LECCION.

Definiciones preliminares.

ARTÍCULO. 1. Se comprehende baxo el nombre de Matemáticas todas las ciencias que tienen por objeto la cantidad.

2. Se entiende por *cantidad* todo lo que es capaz de aumento, ó de disminucion.

3. La Aritmética es la ciencia que trata de la cantidad expresada en números.

4. Unidad es la cantidad que se toma por término de comparacion para dar idea de las demas cantidades de su especie.

5. Número es un conjunto de unidades.

6. El número se llama *concreto* ó *denominado* quando se expresa la especie de la unidad, y *abstracto* quando no se expresa la especie de la unidad: por exemplo, quatro varas es un número concreto ó denominado; pero quando solo se dice siete, quatro &c., es un número abstracto.

De la numeracion.

7. Se ha encontrado el medio de escribir todos los números posibles, empleando solo los diez caractéres siguientes, que se llaman *cifras*, de los quales véase la forma y el valor.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero, ó nada.	uno.	dos.	tres.	quatro.	cinco.	seis.	siete.	ocho.	nueve.

El cero quando está solo no significa nada.

8. Para contar mas allá de nueve se ha convenido:
1.º Que de diez unidades se haria una decena, y de diez decenas una centena ó ciento.

2.º Que toda cifra colocada á la izquierda de otra representara decenas, y la de la derecha unidades: segun lo dicho, en el número 78 el 7 expresará 7 decenas, y el 8 indicará 8 unidades, y se pronunciará setenta y ocho: el número 50 manifiesta 5 decenas, y el cero que está á su dere-

cha indica que no hay ninguna unidad á mas de dichas cinco decenas: de aquí deducimos que aunque el cero no equivale á nada, sirve para manifestar que la cifra que le sigue es la segunda contando de derecha á izquierda, y que por lo tanto representa decenas, y no unidades simples.

3.^o Que toda cifra colocada en tercer lugar hácia la izquierda represente centenas: un 4, un 2 y un 3, colocados como se ve, 423, expresan quatro centenas, dos decenas, y tres unidades, que se pronuncia quatrocientos veinte y tres. Las tres cifras siguientes, 900 indican solo nueve centenas, y se pronuncia nuevecientos.

9. Á tres cifras así colocadas llamaremos *la seccion de las unidades*. Tres cifras puestas á la izquierda de esta seccion tomará el nombre de *seccion de los miles, ó millares*. Para formar esta seccion se ha convenido, que de diez centenas se haria una unidad de millar, de diez unidades de millar una decena de millar, de diez decenas de millar una centena de millar.

10. Por un raciocinio semejante se forma la seccion de millones ó cuento, y de millares de millon; asimismo la de billones ó bicuentos, y de millares de billon, y progresivamente la de trillones ó tricuento, y la de millar de trillon &c.; y en cada seccion, de las tres cifras la de la derecha expresa unidades, la del medio decenas, y la mas hácia la izquierda centenas de la misma denominacion que la seccion á que corresponden.

11. Para pronunciar un número escrito, atiéndase á la siguiente regla: 1.^o Empezando por la última cifra de la derecha, divídase el número en secciones de tres en tres cifras hácia la izquierda, sin reparar que en la última porcion de la izquierda queden dos cifras ó una sola, y entre seccion y seccion se pondrá una coma.

2.^o Sobre la segunda coma póngase un punto, sobre la quarta dos puntos, sobre la sexta tres puntos &c.

3.^o Léanse cada tres cifras como si estuviesen solas, (artículo 5.), con la única adición de decir mil al llegar á cada coma sola, millon ó cuento al llegar á la coma que tiene encima un punto, billon ó bicuento al llegar á la coma que tiene encima dos puntos, trillon ó tricuento al llegar á la que tiene tres puntos, &c.; añadiendo al llegar á la última cifra de la derecha la expresion de la clase de unidades de que consta el número propuesto, sean reales, pesos, hombres &c.,

ó solamente diciendo unidades ó enteros, si no se expresa la ⁷ clase de unidades.

Si entre coma y coma no hay cifra alguna significativa, no se dice mil; y si en las dos divisiones comprendidas entre puntos no hay cifra signifante, no se dice billon, trillon &c. Por exemplo el número

87,424;371,497.

Se pronunciará ochenta y siete mil quatrocientos veinte y quatro millones, trescientos setenta y un mil quatrocientos noventa y siete unidades: el número siguiente

400,000;000,045;000,000;000,007.

Se enunciará así, quatrocientos mil trillones, quarenta y cinco billones, y siete unidades.

12. Para escribir un número propuesto, por exemplo, ochocientos treinta y siete millones, quatrocientos y tres mil y veinte y tres unidades, se reparará: 1.º que se necesitan tres secciones: 2.º que en la de los miles no hay ninguna decena, y ninguna centena en la de las unidades: escribiré pues, 837;403,023.

13. Los números de que hasta ahora hemos hablado son números enteros. Se llaman así aquellos que contienen la unidad sin resto, por exemplo dos, setecientos, &c,

14. Las operaciones de la Aritmética se reducen á dos fundamentales, que son el sumar, y el restar.

Problemas.

1.º Enunciar 407,370;200,001;101,010.

2.º Enunciar 7,007;400,400;024,007.

3.º Expresar con cifras quarenta y siete millones, siete mil y una unidad.

4.º Siete trillones, setecientos mil y siete billones, setenta mil setecientos millones, siete mil y setenta unidades.

SEGUNDA LECCION.

Del Sumar.

15. El *sumar* es una operacion, cuyo objeto es representar en una sola cantidad, llamada *suma*, el valor de dos ó mas cantidades de igual especie, llamadas *partidas*.

16. Si los números son *simples*: es decir mas pequeños que diez, no se necesita regla para sumarlos. Todo el mundo sabe que 4 añadido á 5 hacen 9, lo que se indica así: $4+5=9$, y se pronuncia quatro mas cinco igual á nueve; ó simplemente quatro y cinco hacen nueve.

17. Si los números son compuestos, por exemplo 4024 y 5103, es necesario escribir estos números de modo que las unidades estén colocadas baxo de las unidades, las decenas baxo las decenas, las centenas debaxo de las centenas &c., tirar una raya por debaxo, tomar sucesivamente la suma de las unidades, de las decenas, de las centenas, &c., y escribirlas debaxo de la raya baxo la columna correspondiente.

primera partida..... 4024

segunda partida..... 5103.

suma, ó total..... 9127.

Diré pues, 4 y 3 son 7, que escribo debaxo de la columna de las unidades. Paso á las decenas y digo: 2 y 0 son 2, que escribo debaxo de la columna de las decenas. Paso despues á la columna de las centenas y digo: 0 y 1 son 1, que escribo debaxo de dicha columna.

En fin, llegado á la columna de los miles diré: 4 y 5 son 9, que escribiré debaxo de ella. Así la suma, ó el total es 9127.

18. Quando la suma de una columna sobrepuja á 9, es necesario escribir solamente debaxo de dicha columna la cifra de las unidades, y retener las decenas para añadirlas á las cifras de la columna inmediata de la izquierda, que son de la misma especie.

Trátase de añadir juntos los tres números 499, 2532 y 9344. Los escribo segun la regla:

9

499
2532
9844

total..... 12875

Y digo: 9 y 2 son 11, y 4 son 15, ó una decena y cinco unidades: escribo 5 debaxo de la columna de las unidades, y retengo una decena que añado á la columna de las decenas que sigue inmediatamente, diciendo: 1 retenido y 9 son 10, y 3 son 13, y 4 son 17: por la misma razon no escribo sino 7 debaxo de la columna de las decenas, y retengo una decena de decenas, es decir, una centena, para añadirla á la columna siguiente, que lo es la de las centenas á la qual paso.

Digo pues: 1 retenido y 4 son 5, y 5 son 10, y 8 son 18: escribo el 8 debaxo de la columna de las centenas, y retengo una decena de centenas, ó un mil, para añadirlo á la siguiente columna, que es la de los miles y la última.

En fin diré: 1 retenido y 2 son 3, y 9 son 12, que escribo en seguida. Asi la suma buscada será 12875.

19. Es evidente que añadiendo sucesivamente las unidades, las decenas &c., que son las partes de los números dados, se hallará la suma entera que es la reunion de todas estas diferentes partes.

20. Para conocer si se ha padecido equivocacion en el sumar, se empezará la operacion contando desde abaxo para arriba cada columna: es evidente que la suma debe ser la misma que la que se ha encontrado de arriba para abaxo.

Problema.

Supóngase que en la gloriosa batalla de Baylén se rindieron á nuestras armas el General Dupont y su estado mayor compuesto de 87 oficiales incluso dicho General: igualmente rindieron las armas 9473 infantes, 3538 de caballería, y 426 de artillería: ademas murieron 2786 en la accion, y en el campo de batalla quedaron 2875 heridos; dicho ejército enemigo habia anteriormente padecido una pérdida de 1825 hombres en acciones particulares: preguntase ¿que número de combatientes tenia Dupont quando entró en Andalucía?

B

TERCERA LECCION.

Del Restar.

21. El restar sirve para hallar la diferencia entre dos números.

22. Para conocer la diferencia de dos números; es necesario restar el mas pequeño del mas grande; lo que queda es la diferencia buscada. No se necesita ninguna regla para hallarla quando los números son simples: en efecto, nadie ignora que restando 3 de 5 quedan 2 por resta. Se escribe $5-3=2$, y se dice: 5 menos 3=2; ó 3 de 5 quedan 2.

23. Si se trata de hallar la diferencia que hay entre dos números compuestos, tales como 948 y 623, es necesario escribir el mas pequeño, que llamaremos subtraendo, debaxo del mayor, al que se da el nombre de minuendo, de modo que las unidades del uno se hallen colocadas debaxo de las unidades del otro, las decenas debaxo de las decenas, las centenas debaxo de las centenas &c., y tirar una raya por debaxo. Luego se tomará sucesivamente el exceso de las unidades, de las decenas, de las centenas &c. del subtraendo sobre las unidades, decenas, centenas &c. del minuendo, y escribir los restos debaxo de la raya, y debaxo de su correspondiente columna; á este conjunto de restos, ó diferencias parciales, se le da el nombre de residuo ó resta.

$$\begin{array}{r}
 948 \dots \text{minuendo} \\
 623 \dots \text{subtraendo} \\
 \hline
 \text{residuo} \dots 325.
 \end{array}$$

Digo pues: 3 de 8 quedan 5, que pongo debaxo de la columna de las unidades: paso á la columna de las decenas diciéndolo: 2 de 4 quedan 2, que escribo debaxo de esta misma columna: en fin, pasando á la de las centenas, diré: 6 de 9 quedan 3, que escribo inferior á las centenas. Según lo qual 325 es el residuo que buscábamos.

24. Si el minuendo contuviese alguna cifra menor que la que corresponde en el subtraendo, para que la resta pueda verificarse atiendase á la regla siguiente: *llegado el caso de concurrir una cifra del minuendo menor que su correspondiente*

del subtracado, añádanse diez unidades (esto es, una unidad de la clase siguiente hacia la izquierda) á dicha cifra menor, y verifíquese la resta, que sin este artificio no se hubiera podido verificar, y escribáse la diferencia debaxo de la raya; claro está que la cifra siguiente del minuendo valdrá una unidad ménos, supuesto que se la quitamos para aumentar con ella en diez la cifra anterior, lo que se deberá tener presente quando se pase á buscar la diferencia de esta cifra disminuida con su correspondiente cifra del subtracado.

Para mayor aclaracion de la regla anterior, propongamos el restar 274 de 846.

$$\begin{array}{r}
 846..... \text{minuendo.} \\
 274..... \text{subtracado.} \\
 \hline
 \text{residuo}..... 572.
 \end{array}$$

Escribo estos dos números segun lo establecido, y digo: 4 quitado de 6 quedan 2: paso á la columna de las decenas, y diré: 7 de 4 no se puede; pero para que pueda verificarse apelo al arbitrio de quitar una unidad á la cifra siguiente 8, pero esta unidad que le quito es una centena, y es evidente que esta centena vale 10 decenas, razon por la qual digo: 10 decenas que he tomado y 4 que hay en el minuendo son 14, y de estas quitando las 7 que hay en el subtracado quedan 7, que escribo debaxo de las decenas en el residuo: paso luego á la columna de las centenas, y recuerdo que de la cifra 8 del minuendo quitamos anteriormente una unidad, de consiguiente solo valdrá 7 en la actualidad, por lo que diré: 2 quitado de 7 (y no de 8) quedan 5; y así 572 será el residuo.

Para mayor facilidad de los principiantes, y evitar equivocaciones, parece conveniente quando se tome una unidad de la cifra siguiente del minuendo se coloque un punto encima de dicha cifra, el que les recordará al llegar á ella que vale una unidad menos de la que representa.

25. Es evidente que siguiendo las reglas dadas se toma la diferencia de todas las partes de los dos números, y que de consiguiente se debe hallar la diferencia entera de estos dos números.

26. Para comprobar si la resta ha sido bien hecha,

añádase el residuo al subtraendo, y la suma deberá ser igual al minuendo si la resta ha sido bien hecha: esto se funda en que el subtraendo representa el número menor, el residuo la diferencia que hay entre este número menor y el mayor, ó el minuendo, y es claro que la diferencia es precisamente la cantidad con que el mayor número sobrepaja al mas pequeño.

Problema.

Supóngase que el Mariscal Moncey entró en el reyno de Valencia á la cabeza de 14759 combatientes, y que quando fué repelido por el valor de aquellos naturales solo se retiró con 7932. Se desea saber ¿que pérdida de gente sufrió este cuerpo de ejército en dicho reyno?

QUARTA LECCION.

De la Multiplicacion.

27. La multiplicacion no es otra cosa que un modo de sumar abreviado, por el qual se añade un número tantas veces asimismo quantas unidades hay en otro número. Así, para añadir 5 quatro veces así mismo, en lugar de escribir $5+5+5+5=20$, se dice: quatro veces 5 hacen 20, lo que se escribe de este modo $5 \times 4 = 20$: se pronuncia, 5 multiplicado por 4 igual á 20. El número 5 se llama *multiplicando*, el número 4 *multiplicador*, y el 20 *producto*.

28. El producto contiene al multiplicando tantas veces quantas el multiplicador contiene á la unidad, y tambien el producto contiene al multiplicador tantas veces quantas el multiplicando contiene á la unidad; y el multiplicando y el multiplicador se nombran las raíces, ó factores del producto.

En general es indiferente tomar qualquiera de los dos factores como multiplicando para obtener el valor numérico del producto, pues 6×4 y 4×6 dan el mismo producto 24.

29. De lo dicho se sigue: 1º que si el multiplicando se hace duplo, triplo &c., debe resultar el producto duplo, triplo &c. del anterior: que si se toma la mitad, el tercio &c. del multiplicando, el producto resultará la mitad, el tercio &c. del anterior. Asimismo, si un número dado se multiplica por un número de veces duplo, triplo &c., el resultado será duplo, triplo &c. Si el mismo número se mul-

tiplica por la mitad, el tercio &c. del número por quien se había multiplicado antes, el resultado será la mitad, el tercio &c. del anterior.

2.º Luego lo mismo será duplicar, triplicar &c., ó tomar la mitad, el tercio &c. del producto, que executar dichas operaciones con el multiplicando ó con el multiplicador.

3.º En general, el producto aumentará ó disminuirá al paso que aumente ó disminuya uno de sus dos factores.

30. Para multiplicar un número simple por un número simple, es preciso aprender de memoria los productos de los números simples que se hallan en la Tabla siguiente.

1 vez 1 es 1	2 veces 1 son 2	3 veces 1 son 3
1..... 2 son 2	2..... 2..... 4	3..... 2..... 6
1..... 3..... 3	2..... 3..... 6	3..... 3..... 9
1..... 4..... 4	2..... 4..... 8	3..... 4..... 12
1..... 5..... 5	2..... 5..... 10	3..... 5..... 15
1..... 6..... 6	2..... 6..... 12	3..... 6..... 18
1..... 7..... 7	2..... 7..... 14	3..... 7..... 21
1..... 8..... 8	2..... 8..... 16	3..... 8..... 24
1..... 9..... 9	2..... 9..... 18	3..... 9..... 27
4 veces 1 son 4	5 veces 1 son 5	6 veces 1 son 6
4..... 2..... 8	5..... 2..... 10	6..... 2..... 12
4..... 3..... 12	5..... 3..... 15	6..... 3..... 18
4..... 4..... 16	5..... 4..... 20	6..... 4..... 24
4..... 5..... 20	5..... 5..... 25	6..... 5..... 30
4..... 6..... 24	5..... 6..... 30	6..... 6..... 36
4..... 7..... 28	5..... 7..... 35	6..... 7..... 42
4..... 8..... 32	5..... 8..... 40	6..... 8..... 48
4..... 9..... 36	5..... 9..... 45	6..... 9..... 54
7 veces 1 son 7	8 veces 1 son 8	9 veces 1 son 9
7..... 2..... 14	8..... 2..... 16	9..... 2..... 18
7..... 3..... 21	8..... 3..... 24	9..... 3..... 27
7..... 4..... 28	8..... 4..... 32	9..... 4..... 36
7..... 5..... 35	8..... 5..... 40	9..... 5..... 45
7..... 6..... 42	8..... 6..... 48	9..... 6..... 54
7..... 7..... 49	8..... 7..... 56	9..... 7..... 63
7..... 8..... 56	8..... 8..... 64	9..... 8..... 72
7..... 9..... 63	8..... 9..... 72	9..... 9..... 81

31. Para multiplicar un número compuesto por un número simple, por ejemplo 309 por 9, es necesario escribir el multiplicador debaxo del multiplicando, tirar una raya por debaxo, y multiplicar sucesivamente las unidades, las decenas, las centenas &c. del multiplicando por el multiplicador.

$$\begin{array}{r} \text{multiplicando..... } 309 \\ \text{multiplicador..... } 9 \\ \hline 2781 \end{array}$$

Digo pues: 9 veces 9 son 81: escribo 1 debaxo de la columna de las unidades, y retengo 8 decenas para añadirlas al producto siguiente: 9 veces 0 decenas son 0: escribo debaxo de la columna de las decenas las 8 decenas que habia retenido: en fin continuo diciendo, 9 veces 3 centenas son 27 centenas, que escribo en seguida, porque en este exemplo 3 es la última columna. El producto será 2781.

32. Para multiplicar un número compuesto por un número compuesto, por exemplo 987 por 658, es preciso escribir los dos factores uno debaxo del otro, como se verá en seguida; multiplicar sucesivamente todo el multiplicando por las unidades, las decenas, las centenas &c. del multiplicador; escribir los productos parciales los unos debaxo de los otros, de modo que la primera cifra de la derecha del segundo producto quede colocada debaxo de las decenas, que la primera cifra de la derecha del tercer producto quede debaxo de las centenas, &c., y sumando todos estos productos parciales se tendrá el producto total.

$$\begin{array}{r} \text{multiplicando..... } 987 \\ \text{multiplicador..... } 658 \\ \hline 7896 \\ 4935 \\ 5922 \\ \hline \text{producto..... } 649446 \end{array}$$

Digo: 8 veces siete hacen 56: escribo 6 y retengo 5: 8 veces 8 hacen 64 y 5 retenidos hacen 69: escribo 9 y retengo 6: 8 veces 9 son 72 y 6 retenidos hacen 78, que escribo seguidamente.

Paso á las "5 decenas" del multiplicador y digo: 5 veces 7 son 35: se concibe claramente que son 35 decenas, escribo pues 5 debaxo de las decenas, y retengo 3: 5 veces 8 son 40, y 3 retenido son 43: escribo 3 y retengo 4: 5 veces 9 son 45, y 4 que he retenido son 49, que escribo en seguida.

En fin, pasando á las centenas del multiplicador digo: 6 veces 7 son 42: es evidente que este producto expresa centenas, y retengo 4: 6 veces 8 son 48 y 4 retenido son 52: escribo 2 y retengo 5: 6 veces 9 son 54 y 5 retenidos hacen 59, que escribo á continuacion. Añado los productos parciales y hallo 649446 por producto total.

33. La regla prescripta es infalible; porque multiplicar un número por otro es repetir el primero tantas veces quantas unidades haiga en la totalidad del segundo. Luego, siguiendo la regla prescripta, se repite el multiplicando tantas veces quantas señala cada cifra del multiplicador: de lo que deduciremos, que siguiendo la regla se repite el multiplicando tantas veces quantas unidades hay en la totalidad de cifras del multiplicador, y de que conseqüentemente se halla el verdadero producto operado como se ha executado.

34. Quando se hallan ceros á la derecha de uno de los factores ó de los dos, se verifica la multiplicacion sin atender á dichos ceros, se multiplican las cifras que estan á su izquierda; y quando esta primera operacion está acabada se ponen en seguida y á la derecha del producto tantos ceros quantos hay en seguida de los dos factores dados. Así, para multiplicar 400 por 12, tomo el producto de 4 por 12, que es 48, y en seguida escribo los dos ceros del multiplicando, lo que da 4800 por producto propuesto.

Para multiplicar 120 por 120 escribo al principio 144 producto de 12 por 12, y á continuacion pongo dos ceros, uno del multiplicando y otro que corresponde al multiplicador, el producto será pues 14400. En efecto, decenas multiplicadas por decenas dan centenas al producto; luego 12 decenas multiplicadas por 12 decenas deben dar 144 centenas, ó 14400.

Si el multiplicador fuese la unidad seguida de ceros, lo único que habrá que hacer es escribir el multiplicando, y á su continuacion poner los ceros del multiplicador. Así para multiplicar 4 por 100 escribo 400.

Problemas, cuya resolucion pende de la multiplicacion.

1.º Un regimiento provee 4 destacamentos de á 173 hombres cada uno. Se pregunta ¿quanta gente tiene destacada dicho regimiento?

Es claro se presentan dos modos de operar para indagar este número: 1.º tomando 4 veces el número 173 por partida de una suma (art. 27), ó bien 2.º multiplicando por 4 el número 173, que es el mas breve de los dos, y el verdadero objeto de la multiplicacion.

Diré pues: $173 \times 4 = 692$, que será el número de individuos destacados.

2.º *Problema.* Han llegado al Parque de artillería 168 carros que conducian 166 balas de cañon cada carro. Se quiere saber ¿quantas balas han traído los 168 carros?

La operacion se reduce á multiplicar segun las reglas dadas el número 168, que expresa el de carros, por 166 que expresa las balas que ha transportado cada carro; el producto que se halle indicará el número de balas que entre todos han transportado.

Diré pues: $168 \times 166 = 27888$, que son las balas que han conducido.

35. El modo de comprobar si la multiplicacion ha sido bien hecha, se verá quando se trate del Partir.

Resta solo el exercitar á los alumnos en el uso de las operaciones anteriores con los dos Problemas siguientes, que ademas de esta ventaja presenta la de darles una justa idea de la fuerza de un regimiento de infantería de línea, y de otro de caballería, segun el último reglamento.

Problema 1.º

Un regimiento de infantería de línea al pie de guerra debe componerse de tres batallones. Cada batallon de seis compañías, de las quales una de granaderos otra de cazadores, y las quatro restantes de fusileros: la compañía de granaderos se compone de 1 capitan, 2 tenientes, 1 subteniente, 1 sargento primero, 3 sargentos segundos, 2 tambores, 2 pifanos, 5 cabos primeros, 5 cabos segundos, 92 granaderos

inclusos los gastadores. La compañía de cazadores se compone de 1 capitán, 2 tenientes, 1 subteniente, 1 sargento primero, 3 sargentos segundos, 5 cabos primeros, 5 cabos segundos, 2 tambores y 85 cazadores. Cada compañía de fusileros se compone de un capitán, 2 tenientes, 2 subtenientes, 1 sargento primero, 4 sargentos segundos, 8 cabos primeros, 8 cabos segundos, 3 tambores, 136 fusileros. La plana mayor del regimiento se compone de 1 coronel, 1 teniente coronel, 1 comandante, 1 sargento mayor, 3 ayudantes, 3 abanderados, 3 capellanes, 3 cirujanos, 1 tambor mayor y 3 armeros.

Se quiere saber el número de individuos de que consta una compañía de granaderos, una de cazadores, y una de fusileros, y con estos datos hallar el número de individuos de que consta un batallón, y con este último resultado y el total de los individuos de plana mayor hallar el número total de individuos de un regimiento.

Problema 2.º

Un regimiento de caballería consta de 4 esquadrones: un esquadron de tres compañías, y cada compañía de 1 capitán, 1 teniente, 1 alférez ó subteniente, 3 sargentos primeros, 2 sargentos segundos, 4 cabos primeros, 4 cabos segundos, 48 soldados carabineros ó granaderos montados, con 10 mas desmontados, y un trompeta montado.

La plana mayor se compone de 1 coronel, 1 teniente coronel, 2 comandantes de esquadron, 1 sargento mayor, 4 ayudantes, 4 porta-estandartes, 1 capellan, 1 cirujano, 1 mariscal mayor, 1 picador, 1 trompeta de orden, 1 timbalero, 1 sillero y un armero.

Siendo de advertir que á los oficiales, mariscal-mayor, sillero y armero no les da el Rey caballo.

Se pregunta ¿de qué número de hombres, incluso los oficiales, y de qué número de caballos de S. M. se compone una compañía, de quantos un esquadron, de quantos la plana mayor, y finalmente de quantos el todo del regimiento?

34. También se usa de la multiplicacion para reducir las espies mayores á otras mas pequeñas, por exemplo: se sabe que la estancia diaria de un soldado en el hospital es de 6 reales vellon: se desea saber quantos maravedices.

compone esta estancia: sabemos que el real de vellon vale 34 maravedices; luego lo único que habrá que hacer es multiplicar 6 por 34, ó lo que es lo mismo (art. 28) 34 por 6: el producto 204 nos hará ver los maravedices que valen los seis reales correspondientes á la estancia diaria. El peso del fusil de ordenanza sin incluir la bayoneta ni portafusil es próximamente de 9 libras castellanas: se desea saber quantas onzas pesa, sabiendo de antemano que la libra castellana se divide en 16 onzas.



QUINTA LECCION.

Del Partir.

37. La particion es una resta abreviada, que sirve para hallar de un modo expedito quantas veces un número puede quitarse ó restarse de otro; pero un número, por exemplo 4, no puede quitarse de otro número 8 sino tantas veces como esté contenido en él. Diciendo pues: en 8 ¿quantas veces 4? 2 veces: sabré sobre la marcha que el número 4 puede quitarse dos veces de 8: se escribe $\frac{8}{4}$ ó $8:4=2$, y se pronuncia 8 dividido, o partido por 4 igual á 2; ó en 8 ¿quantas veces 4? 2 veces. El número 8 que se ha de partir se nombra *dividendo*, el número 4 por quien se ha de partir se nombra *divisor*, y al número 2 que resulta de la particion se le da el nombre de *quociente*.

38. El dividendo contiene al divisor tantas veces quantas unidades tiene el quociente. Luego, *multiplicando el divisor por el quociente se tiene por producto el dividendo*. Conseqüente á lo dicho, el dividendo puede mirarse siempre como un producto cuyos dos factores son siempre el divisor y el quociente. Así quando se conozca un producto y uno de los factores de este producto, será facil hallar el otro factor; porque *dividiendo ó partiendo el producto conocido congeralado como un dividendo por el factor conocido considerado como divisor, se tendrá el otro factor por quociente*.

Este es el modo de comprobar una multiplicacion que habíamos ofrecido (art. 35): en efecto, es evidente que si se parte el producto de una multiplicacion qualquiera por el multiplicador de ella, si la multiplicacion ha sido bien hecha deberá resultar por quociente de esta particion el multiplicando de la multiplicacion; y que si se parte el producto por el multiplicando deberá resultar el multiplicador el quociente.

39. De lo dicho se infiere que el partir es operacion inversa del multiplicar; de suerte que el multiplicar y partir una cantidad por un mismo número es dexar la cantidad como estaba.

Por exemplo, si despues de multiplicado 4 por 3 se parte el producto 12 por 3, resultará otra vez el 4.

40. Del principio sentado (art. 38) de poderse considerar el dividendo como el producto del divisor por el quociente, y tener demostrado (art. 29 núm. 2.º) que la operacion de multiplicar un producto por qualquiera número equivale á hacer la misma operacion con uno de sus dos factores, resulta con evidencia que si dexando el mismo divisor se multiplica el dividendo por qualquiera número, resultará el quociente primitivo multiplicado por dicho número.

Por exemplo, el quociente de 8 partido por 2 es 4; y si se multiplica el dividendo primitivo 8 por el número 5, resultará por nuevo dividendo 40, que partido por el mismo divisor 2 da el nuevo quociente 20, igual al primitivo quociente 4 multiplicado por 5.

41. De este principio resulta, que en vez de multiplicar un quociente por qualquiera número se puede multiplicar el dividendo por el mismo número, y dexar el mismo divisor.

42. Hemos visto (art. 38) que el dividendo contiene al divisor tantas veces quantas unidades tiene el quociente. Luego si dexando el mismo dividendo se dupla, tripla &c. el divisor, es claro no lo podrá contener el dividendo tantas veces, pues este nuevo divisor es dos, tres &c. veces mayor que el divisor primitivo, y es igualmente evidente que solo lo podrá contener un número de veces mitad, tercio &c. que antes, esto es, que el quociente que resultará será la mitad, el tercio &c. del anterior. Luego podremos concluir que la operacion de multiplicar el divisor por qualquiera número, equivale á la de partir el quociente por el mismo número.

Por exemplo, 40 partido por 4 da por quociente 10; y multiplicando el divisor 4 por 5 resulta el nuevo divisor 20,

por el qual partiendo el 40 resulta el nuevo quociente 2, que es igual al quociente primitivo 10 partido por 5.

43. Teniendo demostrado (art. 40) que multiplicar un dividendo por qualquiera número equivale á multiplicar el quociente por dicho número; y acabando de ver (núm. 42) que multiplicar el divisor por un número qualquiera equivale á partir el quociente por dicho número, de ambos principios concluiremos con evidencia *que multiplicando por el mismo número el dividendo y divisor no variará el quociente*, supuesto que la primera operacion se reduce á multiplicar el quociente por un número, y la segunda á partir dicho quociente por el mismo número; cuyas dos operaciones no deben variar el valor del expresado quociente (art. 39).

Por exemplo, 12 partido por 3 da por quociente 4; y si se multiplica el 12 y el 3 por 5 resultará 60 partido por 15, cuyo quociente es tambien 4.

44. Siguese de esto y de lo dicho (art. 39) *que partiendo el dividendo y divisor por un mismo número, tampoco varía el quociente*.

Por exemplo, 48 partido por 8 da por quociente 6; y si se parte el 48 y el 8 por 2 resultará 24 partido por 4, cuyo quociente es tambien 6.

45. Para dividir un número simple, ó un número compuesto de dos cifras por un número simple, no hay mas regla que prescribir. Se ve desde luego que $9 : 3 = 3$; que $72 : 9 = 8$; y que $89 : 9 = 9$ y queda un resto de 8. En efecto, 9 veces 9 no son mas que 81. Se escribe el resto á continuacion del quociente encima de una raya, y debajo de dicha raya se pondrá el divisor por quien se ha partido, en esta forma $89 : 9 = 9 \frac{8}{9}$.

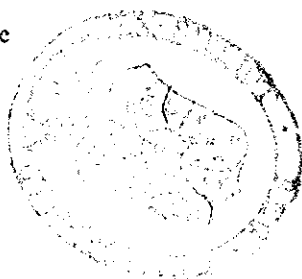
Quando un número es partible exáctamente por otro número, el primero se llama *múltiplo* del segundo, y el segundo *parte alíquota* del primero. Así el número 8 es múltiplo de 4 y de 2; 4 y 2 son las partes alíquotas de 8. Se llama número *primo* ó *primero* todo entero que no es múltiplo de ningún entero mayor que la unidad: 1, 2, 3, 5, 7, 11 &c., son números primeros.

46. Quando se trata de partir un número compuesto de mas de dos cifras por un número simple, es necesario *escribir el divisor á la derecha del dividendo, separando estos dos*

números con una raya vertical, y luego tirar otra raya debaxo del divisor, y escribir debaxo de esta raya las cifras del quociente á medida que se vayan hallando. Para hallarlos es preciso dividir sucesivamente por el mismo divisor todas las partes del dividendo, yendo de la izquierda á la derecha hasta agotar ó concluir el dividendo.

Para partir 7328 por 8, escribo estos dos números como se verá á continuación:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{dividendo..... } 7328 & 8 \text{ divisor} \\
 \hline
 72 & 916, \text{ quociente} \\
 \hline
 12 & \\
 8 & \\
 \hline
 48 & \\
 48 & \\
 \hline
 00 &
 \end{array}$$



Quando la primera cifra del dividendo total contiene al divisor, solo se toma esta primera cifra para dividendo parcial; pero como en el caso de este exemplo la primera cifra 7 del dividendo no contiene al divisor 8, tengo que tomar 73, esto es, dicha primera cifra 7 y la segunda 3, cuyas dos cifras forman la reunion de 73 centenas pertenecientes al dividendo, y digo: en 73 ¿quantas veces 8? 9 veces; y escribo 9 debaxo de la raya, y se deduce que este 9 debe expresar centenas, pues aunque es cierto que el número 73 considerado solo no contiene á 8 sino 9 veces con 1 de resto, es igualmente cierto que considerándolo formando parte del número 7328 vale realmente 73 centenas, y de consiguiente contiene á 8, 9 centenas de veces, y queda 1 centena de resto. En seguida digo: $8 \times 9 = 72$, que resto del dividendo parcial 73 despues de haberlo escrito debaxo; y al residuo me queda 1 centena que asimismo escribo, y al lado de esta baxo las 2 decenas del dividendo, y para evitar equivocaciones pongo un punto encima de la cifra 2 del dividendo que he baxado, hecho lo qual tendremos 12 por segundo dividendo parcial. Digo pues: en 12 ¿quantas veces 8? 1 vez: escribo en el quociente este 1, que expresa 1 decena,

y digo: $8 \times 1 = 8$, que resto del dividendo parcial 12: el resto es 4 decenas: baxo las 8 unidades, y las señalo con un punto en el dividendo, y escribiéndolas junto al resto 4, y tengo 48 unidades por último dividendo parcial. Digo: en 48 unidades ¿quantas veces 8? 6 veces: escribo al quociente esta cifra 8 que expresa unidades, y digo: $8 \times 6 = 48$, que quito del dividendo parcial 48, y el resto es 0. Asi, el número 7328 contiene á 8, 916 veces exáctamente.

47. Para partir un número compuesto por un número compuesto, por exemplo 151982 por 495, dispongo el dividendo y el divisor como en el exemplo anterior:

dividendo.....	151982	495 divisor
	1485	307 $\frac{17}{495}$ quociente
	3482	
	3465	
	17	residuo

Luego tomo por primer dividendo parcial las quatro cifras 1519 del dividendo total, porque las tres primeras no pueden contener al divisor: busco quantas veces el número 1519 contiene á 495, y para mayor facilidad busco solamente quantas veces las 15 centenas del dividendo parcial 1519 contienen á las 4 centenas del divisor 495, diciendo: en 15 ¿quantas veces 4? 3 veces: multiplico 495 por 3, el producto 1485 que resulta puede restarse de 1519, y de consiguiente el divisor está contenido 3 veces en el dividendo parcial: escribo pues al quociente esta cifra 3, que expresará centenas, pues que el dividendo parcial 1519 expresa 1519 centenas, y resto 1485 de 1519: el resto es 34.

Al lado de 34 baxo al momento la cifra 8 del dividendo, y tengo 348 decenas por segundo dividendo parcial; pero este número 348 no contiene á 495, es pues preciso que ponga 0 al quociente, para señalar que este quociente no contiene decena.

Al lado de 348 baxo inmediatamente la cifra 2, que es la última del dividendo, lo que nos da 3482 unidades por último dividendo parcial. En lugar de decir en 3482 quantas veces 495, digo por la misma razon que anteriormente hemos

expresado, en 34 ¿ quantas veces 4? 8 veces: antes de escribir 8 al quociente multiplico 495 por 8: el producto 3960 que me resulta es mayor que el dividendo parcial 3482: este dividendo no contiene pues 8 veces al divisor: pruebo con 7 del mismo modo, y veo que el producto 3465 puede restarse de 3482: escribo pues al quociente esta cifra 7, que evidentemente expresa unidades, y resto 3465 de 3482: el resto 17 que tambien se llama *residuo* lo escribo tambien en el quociente encima de una raya, poniendo debaxo de esta el divisor de la particion en esta forma $\frac{17}{495}$: mas adelante veremos la razon en que se funda el escribir asi el residuo en el quociente. Asi diremos que 151982 contiene al número 495, 307 veces con un resto de 17.

46. La regla que acabamos de ver es infalible. Porque partir un número por otro, es buscar quantas veces el primero contiene al segundo. Luego siguiendo la regla prescripta se halla quantas veces cada parte del dividendo contiene al divisor; y por consecuencia, quantas veces todo el dividendo contiene al divisor: luego la regla es cierta.

49. Para conocer si se ha padecido equivocacion al operar, es necesario multiplicar el divisor por el quociente: si la particion que se quiere comprobar ha sido bien hecha, el producto deberá dar el dividendo (art. 38). Quando hay un residuo, es preciso añadir al producto del divisor por el quociente el residuo que habia quedado de dicha particion. Porque, si es verdad, por exemplo, que el número 151982 contiene al número 495, 307 veces con un resto de 17, es evidente que es forzoso para volver á producir 151982 añadir 17 al producto 151965 de 495 por 307.

50. No hay precision de escribir debaxo de cada dividendo parcial el producto del divisor por cada cifra que se pone al quociente. Se abrevia la particion haciendo la resta á medida que se multiplica cada cifra del divisor por la cifra que expresa quantas veces el divisor está contenido en el dividendo parcial sobre el qual se opera.

Sea, por exemplo, 11879 á partir por 29.

$$\begin{array}{r|l}
 11879 & 29 \\
 279 & \\
 \hline
 13 & 409 \frac{18}{29}
 \end{array}$$

Tomo 118 por primer dividendo parcial, y digo: "en 11 ¿quantas veces 2? 5 veces: pruebo con 5 y encuentro que es demasiado grande, y que el dividendo parcial 118 no contiene á 29 sino 4 veces: escribo pues 4 al quociente, y multiplico el divisor diciendo: $9 \times 4 = 36$; 36 no puede restarse de 8: para poder practicar esta resta añado 30 á 8, resulta 38, y digo: 36 de 38 quedan 2, que escribo debaxo de la última cifra de la derecha de 118, y retengo estas 3 decenas para añadirlas por compensacion al producto de las decenas que me resultarán multiplicando las dos decenas del divisor por 4. Digo pues: $2 \times 4 = 8$, y 3 retenidos $= 11$; 11 de 11 queda 0.

Al lado del residuo 2 baxo la cifra 7 del dividendo, como que el dividendo parcial 27 no contiene á 29, escribo 0 al quociente, y en seguida al lado de 27 baxo el 9, lo que me da 279 por último dividendo parcial. Despues de haber reconocido que este dividendo parcial no contiene al divisor 29 mas de 9 veces, escribo 9 al quociente, y multiplico al divisor diciendo: $9 \times 9 = 81$; 81 de 9 no se puede: añado 80 á 9 y tengo 89: digo pues: 81 de 89 quedan 8, que escribo debaxo de la primera cifra de la derecha del dividendo parcial 279, y retengo 8 decenas: multiplico las dos decenas del divisor por 9 diciendo: $2 \times 9 = 18$, y 8 retenidos $= 26$, 26 de 27 queda 1, que escribo. Así, tengo por quociente 409, con el residuo 18.

51. *Adviértase que en cada particion parcial jamas puede ponerse mas de 9 al quociente, porque nuestra Aritmética es denaria. Así, en el exemplo anterior, aunque las dos primeras cifras 27 del dividendo parcial 279 contienen 13 veces la primera cifra 2 del divisor 29, no hemos puesto mas que 9 al quociente; y el resto 18 mas pequeño que el divisor 29 prueba claramente que el dividendo parcial 279 no contiene al divisor 29 mas que 9 veces.*

Si en el curso de una particion se hallase un residuo que sea mayor que el divisor, ó que solamente le iguale, será esta una prueba que nos manifestará que el divisor está aun contenido en el dividendo alguna vez mas, y de que por consiguiente la cifra puesta al quociente es demasiado pequeña. Es pues necesario en este caso aumentar esta cifra de una, dos &c. unidades.

52. Si el dividendo y el divisor estuviesen terminados por ceros, se puede suprimir tanto en el uno como en el otro nú-

mero tantos ceros como haiga en seguida de aquel que menos tenga, y se partirá la parte que quede del dividendo por la parte que quede del divisor. Por exemplo: si tubiese 1440000 que partir por 1200, quitaría dos ceros al dividendo y dos ceros al divisor: despues dividiré 14400 parte que queda del dividendo, por 12 parte que queda del divisor. Se ve muy bien que 14400 cienenas contienen á 12 centenas precisamente tantas veces como el número 14400 contiene al número 12.

Si el divisor fuese la unidad seguida de ceros, bastaría para tener el quociente borrar en el dividendo de derecha á izquierda tantos ceros como haiga á continuacion del divisor. Pero si no hubiese ceros á continuacion del dividendo, entonces, para obtener al momento el quociente, se separarian sobre la derecha del dividendo tantas cifras quantos ceros haiga despues de la unidad del divisor, y se indicará que estas cifras deben dividirse por el divisor. Asi, si se tiene 43649 y que se quiera partir por 1000, el quociente será 43 $\frac{649}{1000}$.

Sirve el partir para repartir un número en partes iguales; por exemplo, para partir 8 en 4 partes iguales parto 8 por 4; el quociente 2 es el valor de cada parte.

Sirve igualmente para reducir las especies menores á especies mayores; por exemplo, para saber quantos pesos fuertes importan 1580 reales vellon, sabiendo de antemano que el peso fuerte vale veinte reales vellon; por lo que partiré 1580 por 20, y el quociente 79 manifiesta el número de pesos fuertes que se deseaba saber.

Problema.

Un General despues de haber premiado con las mas apreciabiles recompensas que puedan lisonjear á los verdaderos militares, esto es con las honoríficas, el mérito que en una accion habia contraido un destacamento compuesto de 8 sargentos, 16 cabos, 135 granaderos y 256 fusileros, entrega por via de gratificacion al benemérito oficial que los mandaba 2616 reales vellon para que los distribuya á sus súbditos en esta forma: al granadero gratificacion doble de la del fusilero, al cabo doble de la del granadero, y finalmente á un sargento doble de la de un cabo. Pregúntase: ¿quanto le tocará á cada fusilero, granadero, cabo y sargento?

SEXTA LECCION.

De los Quebrados, ó Fracciones en general.

53. Se llaman *fracciones*, *expresiones fraccionarias*, ó *quebrados* las cantidades menores que la unidad. Una mitad, dos tercios, tres cuartos &c., son unos quebrados.

Para representar un quebrado se usa de dos números que se separan con una raya. El número superior se llama *numerador*, porque manifiesta el número de partes que se toman, y el número inferior se llama *denominador*, y manifiesta en quantas partes iguales se considera dividida la unidad. Al todo de la expresion se le da el nombre general de *quebrado*, *fraccion* ó *expresion fraccionaria*; y el numerador y denominador se llaman *términos del quebrado* ó *fraccion*. El quebrado se suele llamar particularmente *fraccion propia*, ó *quebrado propio*, quando representa una cantidad menor que la unidad, esto es, quando se toma un número de partes menor que aquel en que se considera dividida la unidad, lo qual se conoce en que el numerador es menor que el denominador; y se llama *fraccion impropia*, ó *quebrado impropio* quando representa una cantidad igual, ó mayor que la unidad, esto es, quando se toma un número de partes igual ó mayor de aquel en que se considera dividida la unidad, lo qual se conoce en que el numerador es igual ó mayor que el denominador. Segun lo dicho se infiere, que $\frac{2}{3}$ es un quebrado propio, y que $\frac{3}{3}$ y $\frac{4}{3}$ son quebrados impropios.

Para enunciar los quebrados se expresa primero el valor de su numerador, y despues el de su denominador. Si dicho denominador es 2, las partes se llaman *medios* ó *mitades*. Si es 3, se llaman *tercios*, ó *terceras partes*; por exemplo $\frac{1}{2}$ un medio, $\frac{1}{3}$ un tercio. Si el denominador es mayor que 3 y menor que 11, se lee como sigue: v. gr. $\frac{1}{4}$ un quarto, $\frac{2}{5}$ dos quintos, $\frac{1}{6}$ un sexto, $\frac{4}{7}$ quatro séptimos, $\frac{5}{8}$ cinco octavos, $\frac{7}{9}$ dos novenos, $\frac{7}{10}$ siete décimos. En adelante, siempre que el denominador no sea la unidad seguida de dos ó mas ceros, se enunciará simplemente el denominador, añadiendo la terminacion *avos*; por exemplo $\frac{8}{11}$ ocho onceavos, $\frac{9}{16}$ nueve diez y seisavos; pero decimos tres centésimos para enunciar $\frac{3}{100}$.

LLámase *fraccion simple* quando es la unidad la que se supone dividida en partes, como quando decimos los $\frac{3}{4}$ de

una legua; y *fraccion compuesta* quando la cantidad que se considera dividida en partes no es la unidad fundamental; y en tal caso se escribe dicha cantidad á la derecha del quebrado, interponiendo entre el quebrado y la cantidad que se ha de dividir en partes la palabra *de*, que se omite en las fracciones simples; por exemplo $\frac{7}{12}$ de 5 libras es un quebrado compuesto, y tambien lo es el siguiente $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$ legua.

Adviértase, que quando los dos términos de un quebrado son iguales, el quebrado vale la unidad. Así, $\frac{2}{2}=1$. $\frac{4}{4}=1$, $\frac{1}{1}=1$.

54. Adviértase, que en general en toda particion puede considerarse el dividendo de ella como el numerador de un quebrado, el divisor como denominador de dicho quebrado, y el todo de este quebrado como el quociente de la particion; y concluir por contraposicion que puede considerarse el numerador de todo quebrado, como un dividendo de una particion, el denominador como un divisor, y el total del quebrado como el quociente de dicha particion. En efecto, trátase de repartir entre 5 individuos 4 varas de paño á partes iguales; arreglándose á lo que acabamos de enunciar diremos, sean las 4 varas que se han de repartir el numerador del quebrado, y el número 5 de individuos entre quienes se han de repartir el denominador, el quebrado resultante $\frac{4}{5}$ de una vara será el quociente, ó la parte que á cada uno toca. Para convencerse de que realmente $\frac{4}{5}$ de una vara es lo que á cada uno pertenece, basta atender á que si las 4 varas que hemos tomado por dividendo se repartiesen una por una á cada uno de los 5 individuos, les tocaría $\frac{1}{5}$ de la primera vara, otro quinto de la segunda, otro de la tercera, y finalmente otro de la quarta vara, lo que en suma será los $\frac{4}{5}$ de una vara para cada uno.

55. De la definicion del quebrado impropio (art. 53) se infiere, que el valor de estos quebrados es igual ó mayor que la unidad: igual á la unidad quando el numerador del quebrado es igual al denominador, segun tenemos visto en el mismo (art. 53), y mayor que la unidad quando el numerador es mayor que el denominador; de lo que se infiere, que todo quebrado impropio encierra en sí un cierto número de enteros que es conducente saber hallar: para ello executese lo siguiente: pártase el numerador por el denominador, el quociente manifestará el número de enteros que encerraba en sí el quebrado; y si resultase un residuo en esta particion, claro está que este residuo se compondrá de partes fraccionarias de la misma especie.

que el quebrado propuesto. Sea por exemplo el quebrado $\frac{20}{5}$; reflexiónese que se necesitan 5 quintos para formar un entero; luego en el quebrado $\frac{20}{5}$ habrá tantos enteros quantas veces 20, quintos contengan á 5 quintos: para indagarlo tendré que partir á 20 por 5, y encuentre 4 por quociente; de consiguiente concluiré que $\frac{20}{5} = 4$ enteros, y de que el proceder que hemos empleado para hallar este resultado es conforme á la regla que acabamos de prescribir. Si el quebrado fuese $\frac{17}{5}$, partiendo el numerador 17 por el denominador 5 tendré 3 al quociente con un resto de 2, que claro está que serán 2 quintos: luego $\frac{17}{5} = 3$ enteros + $\frac{2}{5}$.

Obsérvese que el residuo de toda particion es un quebrado propio que puede escribirse á continuacion del quociente, poniendo dicho residuo por numerador del quebrado, y el divisor de la particion por denominador de dicho quebrado. Segun esto, en los exemplos puestos (en los artículos 47 y 50), los quocientes serán $307 + \frac{17}{495}$, y $409 + \frac{18}{29}$. Para convencerse de que es así, manifestemos estas dos particiones baxo la forma fraccionaria, como sigue $\frac{151382}{495}$ la primera, y $\frac{11879}{29}$ la segunda: estos dos quebrados manifiestan los dos quocientes de las dos particiones, y ambos son impropios; y empleando el modo de operar que hemos indicado, para averiguar el número de enteros que contienen partiremos el numerador de cada uno por su correspondiente denominador, el primer quebrado nos dará un quociente de 307 enteros y un residuo de 17, que claro está que serán 17 quatrocientos noventa y cincoavos; esto es, que $\frac{151382}{495} = 307 + \frac{17}{495}$; por la misma razon $\frac{11879}{29} = 409 + \frac{18}{29}$.

Del modo de operar con los Quebrados.

56. Tenemos demostrado (art. 54) que todo quebrado se puede considerar como el quociente de la division del numerador por el denominador, y por lo tanto, las consecuencias (art. 40, 41, 42, 43 y 44) se aplicarán tambien á los quebrados; esto es, que

- 1.º La operacion de multiplicar executada con el numerador equivale á executar la misma con el quebrado (art. 41).
- 2.º La operacion de multiplicar el denominador por qualquiera número, equivaldrá á partir el quebrado por dicho número (art. 42).
- 3.º Las operaciones de multiplicar por un mismo número executadas con los dos términos del quebrado no alteran

su valor; y lo mismo sucede con las de partir (art. 43 y 44).

57. Quando un quebrado está expresado por términos grandes, es preciso, para hacerse bien cargo de su valor, reducirlo á expresion mas sencilla, esto es á términos menores, cuya operacion se llama *simplificar los quebrados*; y si este proceder se repite hasta donde pueda alcanzar, esto es que el quebrado no pueda simplificarse mas, se dice que el quebrado se ha reducido á su *minima expresion*. Para lograrlo, se partirán los dos términos del quebrado por 2, 3, 5 &c., todo lo que sea dable; y como que esta operacion se reduce á partir el numerador y denominador del quebrado por el mismo número: es evidente (art. 56 núm. 3) que el quebrado simplificado será igual al primitivo.

Se partirá por 2 quando los dos términos del quebrado sean pares, porque todo número par estando multiplicado por 2 es divisible por 2. Así, $\frac{3}{2}$ es partible por 2, y desde luego se reduce á $\frac{3}{4}$, luego á $\frac{3}{8}$, y finalmente á $\frac{3}{16}$.

Se partirá por 3 quando la suma de las cifras del numerador y las cifras del denominador hagan cada una 3, ó un multiplo de 3; porque todo número cuya suma de cifras valga 3 ó un número multiplo de 3, es partible por 3. Por exemplo, los dos términos del quebrado $\frac{15}{23}$ son partibles por 3, porque la suma 6 de las cifras del numerador es un multiplo de 3, asi como 9 suma de las cifras del denominador. Así, el quebrado $\frac{15}{23}$ se reduce á $\frac{5}{7}$.

Se partirá por 5 quando los dos términos estén terminados á la derecha por 5, ó el uno por 5 y el otro por 0. Porque todo número que termina por 5 ó por 0 es multiplo de 5, y por consiguiente partible por 5. Segun esto, los dos términos del quebrado $\frac{15}{25}$ son partibles por 5, y el quebrado reducido $\frac{3}{5}$. Por la misma razon $\frac{10}{15}$ se reduce á $\frac{2}{3}$. Si los dos términos acabasen por 0, seria preciso partirlos por 10. Así, $\frac{40}{50}$ se reduce á $\frac{4}{5}$.

58. Problema. Reducir los enteros baxo forma fraccionaria.

Para executar esta operacion se presentan dos métodos:
1.º Poner el entero por numerador de un quebrado, y por denominador la unidad: por exemplo, sea el número 4, dire $4 = \frac{4}{1}$; es evidente que el valor del entero no ha variado, pues que qualquiera cantidad parida por la unidad da un quociente igual á dicha cantidad.

2.º Poniendo por denominador el del quebrado á cuya de-

nomination se quiere reducir el entero, y por numerador el producto de dicho denominador por el entero: por exemplo, se quieren reducir á quintos 4 varas, diré $\frac{4 \times 5}{5} = 20$. Es claro que esta operacion se reduce siempre á multiplicar y partir el entero por el denominador: lo que (art. 39) no debe alterar su valor. Concluiremos pues con evidencia, que el valor del entero no se altera reduciendolo así á forma fraccionaria.

59. *Problema.* Reducir dos ó mas quebrados á comun ó igual denominador.

Si son dos quebrados se multiplicarán los dos términos del primer quebrado por el denominador del segundo, y los dos términos del segundo por el denominador del primero.

Si son mas de dos los quebrados propuestos, se multiplicarán los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas quebrados.

Exemplo 1.º Se quieren reducir á comun denominador los dos quebrados $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$.

Multiplicaré por 5 los dos términos del quebrado $\frac{1}{2}$, y tendré $\frac{5}{10}$; luego multiplicaré por 2 los dos términos del quebrado $\frac{3}{5}$ y tendré $\frac{6}{10}$. Los quebrados reducidos serán $\frac{5}{10}$ y $\frac{6}{10}$.

Exemplo 2.º Sean $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ los tres quebrados que se quieren reducir á comun denominador.

Multiplicaré los dos términos del quebrado $\frac{1}{2}$ por el producto de 5 por 7, que son los denominadores del segundo y tercer quebrado, y tendré $\frac{1 \times 5 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1 \times 35}{2 \times 35} = \frac{35}{70}$.

Despues multiplicaré los dos términos del segundo quebrado $\frac{4}{5}$ por el producto de 2 por 7, que son los denominadores del primer y tercer quebrado, y tendré $\frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 2 \times 7}$

$$\frac{4 \times 14}{5 \times 14} = \frac{56}{70}$$

En seguida multiplico los dos términos del último y tercer quebrado $\frac{3}{7}$ por el producto de 2 por 5, que son los denominadores del primer y segundo quebrado, y tendré $\frac{3 \times 2 \times 5}{7 \times 2 \times 5} = \frac{3 \times 10}{7 \times 10} = \frac{30}{70}$.

Los quebrados reducidos son pues $\frac{35}{70}$, $\frac{56}{70}$, $\frac{30}{70}$.

Demostracion. Es evidente que los quebrados reducidos tienen el mismo valor que los quebrados propuestos, pues lo único que se ha hecho para reducirlos á comun denominador ha sido multiplicar los dos términos de cada quebrado por un

34

misimo número ó por un mismo producto, lo que no altera el valor del quebrado segun hemos visto (art. 56 núm. 3).

No es menos evidente que por este método los quebrados reducidos tendrán el mismo denominador, puesto que el denominador de cada quebrado reducido es el producto de todos los denominadores de los quebrados propuestos.

60. *Problema.* Sumar quebrados, y enteros y quebrados.

El sumar dos ó mas quebrados que tengan el mismo denominador, no presenta dificultad, pues es evidente que $\frac{1}{4}$ añadido á $\frac{2}{4}$ son $\frac{3}{4}$; así mismo $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$; luego podremos decir que para sumar dos ó mas quebrados que tengan el mismo denominador, se reduce la operacion á sumar todos los numeradores de los quebrados, y esta suma será el numerador de la suma que se busca, al que se le pondrá el mismo denominador de los quebrados.

Pero sería un absurdo aplicar esta regla al caso de ser distintos los denominadores de los quebrados: en efecto, si se ha de sumar $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$, si se dixera que á 2, suma de los numeradores de los quebrados, se le había de poner el denominador 2 del primer quebrado, ó bien 3 denominador del segundo, resultaría en el primer caso $\frac{2}{2} = 1$ por suma, y en el segundo $\frac{2}{3}$; y es igualmente absurdo decir, que $\frac{1}{2}$ vara y $\frac{1}{3}$ de vara compongan juntas una vara, como que solo compongan $\frac{2}{3}$ de vara, puesto que $\frac{1}{2}$ vara es una parte distinta de $\frac{1}{3}$ de vara. Esta aparente imposibilidad de sumar estos quebrados se desvanece con reducirlos á comun denominador (art. 59). En efecto, los dos quebrados $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ reducidos á comun denominador, son $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$; y segun lo que acabamos de prescribir para sumar los quebrados que tienen el mismo denominador; será la suma $\frac{5}{6}$; luego $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$, de donde deducimos la siguiente regla.

Que para sumar dos ó mas quebrados que no tengan el mismo denominador 1.º se han de reducir antes de todas cosas á comun denominador todos los quebrados: 2.º se suman todos los numeradores de los quebrados así reducidos, y este resultado será el numerador de la suma que se busca, al que se le pondrá por denominador el denominador comun.

Si en esta operacion entran enteros se suman aparte, á menos que estos con los quebrados no haigan de formar el factor de una multiplicacion ó de una particion; en cuyo caso se reducen á forma fraccionaria (art. 57) de la misma deno-

minacion que los quebrados, y se suman sus numeradores con los del quebrado.

Exemplo. Se quiere sumar $4 + \frac{1}{5} + 5 + \frac{1}{5}$, cuya expresion simplificaré ante todas cosas sumando 4 enteros con 5 enteros, y me resultará la mas sencilla $9 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$: reduciré á comun denominador los dos quebrados, y me resultarán los reducidos $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{5}$; en seguida reduzco á dicha denominacion los 9 enteros, y tendré $9 = \frac{9 \times 5}{5} = \frac{45}{5}$; luego $9 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{45}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{47}{5}$, sumando los numeradores y poniendo á la suma el denominador comun, segun acabamos de ver debe practicarse.

61. *Problema.* Restar quebrados.

1.º El restar un quebrado de otro de igual denominacion no puede presentar dificultad: claro está que si de $\frac{4}{5}$ se resta $\frac{2}{5}$ que quedan $\frac{2}{5}$ al residuo; pero si los denominadores son distintos es forzoso (por las razones expresadas en el artículo anterior) reducirlos á comun denominador, y de verificado se restará el numerador menor del mayor, poniendo á la diferencia el denominador comun.

Exemplo. Se quiere restar $\frac{2}{5}$ de $\frac{4}{5}$, reduciéndolos á comun denominador, tendré $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, y $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$; luego $\frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$ será el residuo.

2.º Si hay enteros se suelen restar aparte; y si en dicho caso resultase mayor el numerador del quebrado del subtraendo que el numerador del quebrado del minuendo, se quitará una unidad á los enteros de dicho minuendo, y al numerador de su quebrado se le agrega el denominador del quebrado.

Exemplo. Se quiere restar 3 y $\frac{3}{4}$ de 9 y $\frac{1}{2}$.

Empiezo reduciendo los dos quebrados á comun denominador, y tendré $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, y $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; y como que no puedo restar el numerador del primero del numerador del segundo, para poder practicar la resta tengo que tomar una unidad de los enteros del minuendo (art. 27), para agregarla al quebrado $\frac{4}{4}$; y para poder verificar esta suma reduzco esta unidad á forma fraccionaria del mismo denominador 4 (art. 58 núm. 2), y tendré $1 = \frac{4}{4}$; diré pues $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$; pero esta última operacion se ha reducido á agregar el denominador 4 al numerador 4 del quebrado $\frac{4}{4}$ del minuendo. Paso ahora á restar de $\frac{7}{4}$ el quebrado del subtraendo $\frac{3}{4}$, y el residuo será $\frac{4}{4}$; en

seguida paso á los enteros y digo: 9 enteros, de los cuales ³³ he quitado 1, quedan en 8, de cuyo número resto 3 del subtrahendo, quedan 5; luego el residuo total será $5 + \frac{7}{12}$.

Demonstracion. Siendo principios generales todos los que han servido de fundamento á las operaciones anteriores, parece escusado advertir son de una aplicacion general á todos los problemas de esta especie.

62. *Problema.* Multiplicar un quebrado por un entero, ó lo que es lo mismo (art. 28 último párrafo) un entero por un quebrado.

Multipliquese el numerador del quebrado por el entero, y el resultado será el numerador del producto, al que se le pondrá por denominador el denominador del quebrado.

Exemplo. Se quiere multiplicar $\frac{2}{3}$ por 9 enteros: el producto será $\frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3}$, y reduciendo esta expresion á enteros y quebrados (art. 55), tendremos $\frac{18}{3} = 6$ exáctamente.

Demonstracion. Fúndase esta regla en lo establecido (art. 56 núm. 1.º).

63. *Problema.* Partir un quebrado por un entero.

Sin alterar en nada el valor del numerador del quebrado, póngase este por numerador del quociente; multipliquese luego el denominador del quebrado por el entero, y póngase el producto por denominador del quociente.

Exemplo. Se quiere partir el quebrado $\frac{3}{7}$ por 4; será el quociente $\frac{3}{7 \times 4} = \frac{3}{28}$.

Demonstracion. Fúndase esta regla en lo establecido (art. 56 núm. 2.º).

64. *Problema.* Multiplicar un quebrado por otro.

Para multiplicar un quebrado por un quebrado, es necesario, 1.º multiplicar el numerador del primer quebrado por el numerador del segundo, lo que dará el numerador del producto. 2.º multiplicar el denominador del primero por el denominador del segundo, lo que dará el denominador del producto.

Exemplo. Para multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ digo; 4 veces 2 son 8: este resultado es el numerador del producto; y después digo, 5 veces 3 son 15, y este resultado es el denominador del producto: el producto será pues $\frac{8}{15}$.

Demonstracion. Vease aquí la razon en que se funda la regla anterior. Si se multiplicase $\frac{2}{3}$ por el entero 4, tendria por producto $\frac{8}{3}$ (art. 62); pero este producto es 5 veces demasiado grande, pues el multiplicador que debo emplear no es.

4 enteros, sino el quinto de 4, siendo evidente que el quinto de cuatro es lo mismo que los cuatro quintos de uno. Luego para reducir el producto $\frac{8}{3}$ á su justo valor, es preciso tomar su quinta parte, es decir, partirlo por 5, lo que se executará multiplicando el denominador por 5 (art. 63); luego $\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$, resultado conforme al que se deduce de la regla: luego es exácta la expresada regla.

Si fuesen mas de dos los quebrados que se han de multiplicar, la regla se reducirá á multiplicar entre sí todos los numeradores de los quebrados propuestos, y el resultado será el numerador del producto: luego se multiplicarán entre sí todos los denominadores de los quebrados propuestos, y el producto será el denominador del producto.

Ejemplo. Se quieren multiplicar $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, el producto será $\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{6}{24}$.

Demostracion. Si solo se hubiesen de multiplicar el primer y segundo quebrado $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, el producto seria $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$: por este primer producto quedan los dos primeros quebrados reducidos á uno solo: luego la multiplicacion por el tercero no puede sufrir dificultad, segun acabamos de ver, en el caso de tener que multiplicar un quebrado por otro: en efecto, esta última multiplicacion se reducirá á $\frac{2 \times 3}{6 \times 4} = \frac{6}{24}$, resultado conforme al que se logra por el proceder que prescribe la regla anterior.

65. Partir un quebrado por otro.

Para partir un quebrado por otro practíquese lo siguiente: 1.º multiplíquese el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, el producto será el numerador del quociente. 2.º Multiplíquese el denominador del quebrado dividendo por el numerador del quebrado divisor, el producto será el denominador del quociente.

Ejemplo. Se quiere partir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$: para ello multiplico el numerador 2 del dividendo por el denominador 5 del divisor, el producto 10 será el numerador del quociente: en seguida multiplíquese el número 4 numerador del divisor por 3 denominador del dividendo, el producto 12 será el denominador del quociente: luego el quociente será $\frac{10}{12}$ ó bien $\frac{5}{6}$ simplificando el quebrado.

Demostracion. Para convencerse de que la regla prescripta es exácta, auéndase á lo que á continuacion se expresa: si

el quebrado dividiendo $\frac{2}{3}$ se hubiese de partir por 4 numerador del divisor, considerados como enteros y sin atender á su denominador, claro está (art. 63) que la operacion se reduciría á multiplicar el denominador 3 del quebrado dividiendo por 4, y tendríamos $\frac{2}{3 \times 4} = \frac{2}{12}$ por quociente: es evidente que este quociente es cinco veces menor que el que buscamos, supuesto que el divisor 4 que hemos empleado es cinco veces mayor que el divisor propuesto $\frac{4}{5}$; luego para restablecer el quociente hallado $\frac{2}{12}$ á su verdadero valor, será preciso hacerlo cinco veces mayor, esto es, multiplicarlo por 5, lo que (art. 62) se reduce á multiplicar su numerador por 5; luego el quociente que nos proponíamos hallar será $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, que es el mismo que resulta siguiendo el proceder de la regla: luego es exácto dicho proceder.

66. *Problema.* Partir un número entero por un quebrado. Para partir un número entero por un quebrado, excútese lo siguiente, *múltiplicuese el número entero por el denominador del quebrado, y el producto será el numerador del quociente, al que se le pondrá por denominador el numerador del quebrado.*

Exemplo. Se quiere partir el número 6 por $\frac{2}{5}$, el quociente será $\frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Demostracion. Hemos visto (art. 58 núm. 1.º) que los 6 enteros se podían poner baxo forma fraccionaria de este modo $\frac{6}{1}$, puestos así claro está que la operacion se reducirá á partir un quebrado por otro (art. 65), y la operacion á la siguiente $\frac{6 \times 7}{1 \times 5}$ que será el quociente que se busca; pero como multiplicar un número qualquiera por la unidad no altera su valor, dicha expresion será igual á esta $\frac{6 \times 7}{5}$; en la que claramente se ve que la operacion se reduce á multiplicar el número 6 por 7 denominador del quebrado divisor, y ponerle por denominador el numerador del quebrado.

67. *Escolio 1.º* Establecido y demostrado quanto conduce al modo de operar con los quebrados, resta solo llamar la atencion sobre los resultados de dichas operaciones. Puede causar admiracion á los principiantes el resultado del exemplo del artículo 64, en el que se nota que de la multiplicacion de los dos quebrados propios $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ resulta al producto un tercer quebrado $\frac{8}{15}$, producto menor que qualquiera de sus factores. Pero si se atiende á la definicion del multiplicar (art. 27) debe cesar la sorpresa, pues en efecto mul-

tiplicar es tomar tantas veces un factor quantas unidades haiga en el otro factor; conque si el multiplicador es la unidad, claro está que se tomará una vez el multiplicando, y que si el multiplicador es menor que la unidad, esto es, si es un quebrado propio, se tomará el multiplicando menos de una vez, resultará pues el producto menor que dicho multiplicando.

De lo dicho se infiere, que multiplicando un número entero por un quebrado propio, debe resultar un producto menor que el multiplicando. Y como tenemos demostrado que para obtener el valor numérico de un producto es indiferente invertir el orden de los factores (art. 23), concluiremos también, que multiplicando un quebrado propio por un entero, debe resultar el producto menor que el multiplicador; esto es, lo que se nota en el exemplo del artículo 62.

Escolio 2.º Si se atiende á la definición del partir (art. 37), se infiere que el quociente manifiesta el número de veces que el dividendo contiene al divisor: luego si el divisor es la unidad, claro está que el quociente resultará igual al dividendo, pero si el divisor es menor que la unidad, esto es, si es un quebrado propio es evidente que en este caso el dividendo contendrá al divisor un número de veces mayor que á la unidad, esto es, que resultará un quociente mayor que el dividendo; esta es la razón por que partiendo un quebrado propio, ó un entero por un quebrado propio (art. 65 y 66), resulta en ambos problemas un quociente mayor que el dividendo.

68. Para conocer si se ha palecido equivocacion en el cálculo de los quebrados, se recurre á medios semejantes á los que nos han servido de norma para reconocer si hay algun yerro en el cálculo de los números enteros.

69. *Problema.* Reducir los quebrados compuestos á simples. Para executar esta operación se han de multiplicar entre sí todas las cantidades separadas con la palabra *de*, y quedará reducido el quebrado compuesto á simple.

Exemplo. Es facil ver que tomar los $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se reduce á multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$; porque es tomar $\frac{2}{3}$ de vez el quebrado $\frac{3}{4}$, así el quebrado reducido será $\frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Por la misma razón la $\frac{1}{2}$ *de* los $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Asimismo los $\frac{2}{3}$ *de* $4 \frac{1}{2}$, reduciendo los enteros á medios serán $\frac{18}{6} = 3$.

Problema. ¿Que hora es? preguntaban á un aritmético.

del signo decimal cambia el valor del quebrado decimal: si se lleva el signo decimal un lugar mas hácia la izquierda, dos, tres &c., se hará el número 10, 100, 1000 &c. veces mas pequeño. Por exemplo, el número 9'458 es diez veces mas pequeño que 94'58; el número 9'458 es 100 veces mas pequeño que 945'8, &c. Al contrario, si se adelanta el signo decimal un, dos, tres &c. lugares hácia la derecha, se hará el número 10, 100, 1000, &c. veces mayor. Así, el número 54'271 es diez veces mayor que 5'4271; el número 542'71 es cien veces mayor que 5'4271, &c. La razon de todo esto es facil de comprehender. En efecto, basta cotejar los dos números 54'271 y 5'4271, y atender que la cifra 5 que en el primero manifiesta decenas, solo indica unidades en el segundo: la cifra 4 representa unidades en el primero, y décimos en el segundo: la cifra 2 señala décimos en el primero, y centésimos en el segundo; y finalmente el 7 y 1 son centésimos y milésimos en el primer número, y en el segundo el 7 representa milésimos, y el 1 diez milésimos: este cotejo nos convence sin dificultad, que todas las cifras en el primer número son diez veces mayores que sus correspondientes en el segundo: luego con evidencia podremos concluir, que todo el primer número es diez veces mayor que el segundo.

72. Para reducir á quebrado decimal otro qualquier quebrado, como $\frac{3}{4}$, póngase un cero á continuacion del numerador 3, lo que dará 30, y pártase por 4 este numerador 30 que hemos hecho diez veces mayor que 3; y se tendrá 7 por quociente, con un residuo de 2. Es claro que el quociente 7 es diez veces mayor; de consiguiente, es preciso hacerlo diez veces mas pequeño; debemos pues para reducirlo á su verdadero valor, escribirlo con el signo decimal en esta forma 0'7. Hecho esto, póngase un cero á continuacion del residuo 2, y tendremos 20 que partir por 4. El quociente es 5 sin residuo: escribase 5 á la derecha de 7, y tendremos 0'75 por valor exácto de $\frac{3}{4}$.

Se opera del mismo modo para reducir á decimales los residuos de las particiones, pues estos restos son unos verdaderos quebrados propios (art. 55). Es tambien por este medio que se va acercando continuamente del verdadero valor del quociente de dos números que no son partibles exáctamente el uno por el otro. Se tendrá el quociente con la aproximacion de un décimo, contentándose con una sola cifra decimal: se tendrá con la de un centésimo, parándose á la

segunda cifra decimal: se tendrá con la de un milésimo, ³⁹ llevándola hasta la tercera cifra decimal, &c. Basta emplear uno ó dos decimales, lo mas tres en los casos ordinarios; y solo en los de necesitarse una mayor aproximacion será quando se empleen mayor número de cifras decimales.

Hay quebrados que es imposible reducir exáctamente á quebrado decimal. Por exemplo, si se quisieran reducir $\frac{5}{12}$ á quebrados decimales se hallaria 0'416666, &c. Si se quisiera reducir $\frac{2}{3}$ á quebrado decimal, se tendria perpetuamente 0'66666, &c.; y se conoce que un quebrado no puede reducirse exáctamente á quebrado decimal, quando se ven volver las mismas cifras en el mismo orden. En este caso; nos contentaremos con tomar las dos ó tres primeras cifras: así tomaríamos por el valor de $\frac{5}{12}$ las tres primeras cifras de 0'416666, &c.; pero despues de haber despreciado las demas cifras, añadiré una unidad á la última cifra de la derecha de la parte restante, esto es, que en lugar de 0'416 tomaremos 0'417, porque 0'417, ó 0'417000 se aproxima mas á 0'416666 que 0'416 ó 0'416000. Se debe añadir una unidad á la última cifra de la derecha de la parte restante del quebrado decimal, todas las veces que la primera cifra de la izquierda de las que se desprecian sobrepuje á 5.

73. Las operaciones de la Aritmética con los quebrados decimales son las mismas que se hacen con los números enteros. Es preciso unicamente tener cuidado de colocar los signos decimales que distinguen los enteros de los decimales en su correspondiente lugar.

Para sumar los números 34'09, 0'93, 5'009, ó bien 34'090, 0'930, 5'009, escribanse los unos debaxo de los otros, de modo que quadren en columna los signos decimales, los milésimos quadren debaxo de los milésimos, los centésimos debaxo de los centésimos, los décimos debaxo de los décimos, las unidades debaxo de las unidades &c. Despues de lo qual buscaremos la suma segun las reglas del sumar enteros. (art. 17 y 18).

$$\begin{array}{r}
 34'090 \\
 0'930 \\
 5'009 \\
 \hline
 \text{suma..... } 40'029 \\
 \hline
 \end{array}$$

Para restar 49'294 de 50'39 $\overline{=}$ 50'390, escribo estos dos

40
 números como si tratase de sumarlos, observando el poner el mas pequeño debaxo del mayor, y opero segun la regla del restar los enteros (art. 23 y 24).

minuendo..... 50'390

subtraendo.... 49'294

residuo..... 1'096

Para multiplicar cantidades decimales es preciso no reparar en ningun signo decimal, y operar precisamente como si se tratase de multiplicar números enteros, pero luego se separarán con el signo decimal en el producto total, desde la derecha hácia la izquierda, un número suficiente de cifras para que se hallen tantas decimales en este producto como hay en el multiplicando y en el multiplicador; y si todas las cifras del producto no bastasen para igualar al número de cifras que haiga en el multiplicando mas las que haiga en el multiplicador, será necesario interponer un número suficiente de ceros entre el signo decimal y la primera cifra de la izquierda del producto. Así, para multiplicar 4'42 por 9'8, opero como si tubiera que multiplicar.

$$\begin{array}{r}
 442 \\
 \text{por}..... 98 \\
 \hline
 3536 \\
 3978 \\
 \hline
 43'316
 \end{array}$$

Despues separo con el signo decimal tres cifras de derecha á izquierda del producto total, porque hay dos cifras decimales en el multiplicando, y una en el multiplicador. El producto es pues 43 enteros 316 milésimos.

En efecto, $4'42 \times 9'8 = \frac{442}{100} \times \frac{98}{10} = \frac{43316}{1000} = 43'316$; y á mas es evidente que multiplicando centésimos por décimos, deben resultar milésimos al producto.

Sea el otro exemplo 6'017 x 0'04; multiplicaré 17 por 4, y al producto 68 le interpondré tres ceros entre el signo decimal y la cifra 6, en esta forma 0'00068 que será el verdadero producto, porque en efecto así constará de cinco cifras decimales, pues en el multiplicando hay tres y en el multiplicador hay dos.

Si hubiese que multiplicar un número como 5'2439 por 10, ó por 100, ó por 1000 &c.; para tener el producto bastará llevar el signo decimal uno, ó dos &c. lugares hácia la derecha en el multiplicando. Así, $5'2493 \times 10 = 52'439$, $5'2439 \times 100 = 524'39$, &c.

Porque multiplicar por 10 ó por 100 es hacer el multiplicando 10 veces ó 100 veces mayor. Pero adelantando el signo decimal uno ó dos lugares hácia la derecha del multiplicando, se hace este número 10 ó 100 veces mayor (art. 71); luego por este medio se obtiene el verdadero producto.

La particion de las cantidades decimales se hace precisamente como la de los enteros; pero antes de empezar la operacion, es preciso hacer de modo que haiga el mismo número de decimales en el dividendo y en el divisor.

Por exemplo, para partir 44'09 por 9'5, pongo un cero á continuacion del divisor, para que así haiga tantas cifras decimales en este como en el dividendo, y parto como si tubiera que partir 4409 por 950.

$$\begin{array}{r} 4409 \quad | \quad 950 \\ 609 \quad | \quad 4 \overset{602}{955} \text{ ó } 4'64 \end{array}$$

El quociente que hallo es el mismo que el de 44'09 partido por 9'5. Porque si en el dividendo 44'09 y en el divisor 9'50 se suprime el signo decimal, es multiplicar estos dos factores de la particion por el mismo número, esto es, por ciento; lo que no debe variar el valor del quociente (art. 43), concluiremos pues, que el quociente de 44'09 por 9'5 es el mismo que el de 4409 por 950.

Si se tubiese un número tal como 983'7 que partir por 10, ó por 100, ó por 1000 &c., bastaría para hallar el quociente llevar el signo decimal un lugar, ó dos, ó tres &c. hácia la izquierda del dividendo. Por exemplo, $983'7 : 10 = 98'37$; $983'7 : 100 = 9'837$, &c.

En efecto, partir por 10 ó por 100, es hacer el dividendo diez veces ó cien veces mas pequeño. Pero llevando el signo decimal uno ó dos lugares hácia la izquierda del dividendo, se hace este número diez ó cien veces mas pequeño; luego se obtiene por este medio el verdadero quociente.

OCTAVA LECCION.

De los números denominados, y de los complexós.

74. Se llaman *números complexós* aquellos que contienen diferentes unidades ó denominaciones, que pueden reducirse á la misma especie ó denominacion. Por exemplo, si se dice que una distancia es de 8 varas, 2 pies, 7 pulgadas y 4 líneas, este será un número denominado (art. 6) y además complexó; y es claro que este número puede reducirse todo á líneas, ó bien los 2 pies, 7 pulgadas y 4 líneas á quebrado decimal de vara; pero antes de entrar en este por menor de reducciones es conveniente tomar una idea de los números complexós que estan en mas frecuente uso en el arte militar.

Distancias.

Quando las distancias son crecidas se toma por unidad la *legua*, que consta de 8000 varas de Burgos.

La *legua marina*, comunmente llamada de veinte en grado, consta de unas 6648 varas de Burgos, aunque en los cálculos aproximados puede suponerse de 6660 varas.

La *legua marina* se divide en tres *millas*. Por consiguiente la milla marina constará de 2216 varas, que en los cálculos aproximados puede suponerse valer 2220 varas.

Para la medicion de extensiones menores se toma por unidad la *vara* de Burgos.

La *vara* se considera dividida en tres *pies* de Burgos: el pie en 12 *pulgadas*: la pulgada en 12 *líneas*: la línea en 12 *puntos*.

La *toesa* se considera dividida en 6 pies de *París* ó de *Rey*, cuya relacion con el pie de Burgos veremos mas adelante (a).

Monedas.

El *peso* se distingue con los nombres de *duro* ó *fuerte*, y el de *sencillo*: el peso fuerte vale 20 *reales vellon*, y el sencillo solo 15: el real vale 34 *maravedises*.

(a) *Dexamos para el tratado de Geometria el hacer mencion de las medidas naturales, determinadas por la Comision de sabios congregados á este fin en París.*

El *quintal* consta de 100 *libras*, y se divide en 4 *arrobas*: la *arroba* consta de 25 *libras*: la *libra* de 16 *onzas*: la *onza* de 16 *adarmes*; y el *adarme* de 36 *granos*. También se suele dividir la *libra* en 2 *marcos*, el *marco* en 8 *onzas*, y la *onza* en 8 *ochavos* (b).

Líquidos.

Para la medida de los líquidos se suele usar de la *cántara* ó *arroba*: la *arroba* se divide en 8 *azumbres*: el *azumbre* en 4 *quartillos*; y el *quartillo* en 4 *copas*.

Granos.

Para la medida de los granos se emplea la *fanega*, que consta de 12 *celemines*: el *celemin* se subdivide en 4 *quartillas*, y la *quartilla* en 5 *quintillos*.

Tiempo.

El día consta de 24 *horas*: la *hora* de 60 *minutos*: el *minuto* de 60 *segundos*: el *segundo* de 60 *terceros*, &c.

Partes de la circunferencia.

Para medir la circunferencia, que es una vuelta redonda (que con mas propiedad definiremos en la Geometría), se divide esta en 360 partes iguales, que llaman *grados*. El *grado* se divide en 60 *minutos*: el *minuto* en 60 *segundos*; y el *segundo* en 60 *terceros* &c.

75. Es evidente que los pies son quebrados de la vara, y que tienen á 3 por denominador: que las pulgadas son que-

(b) Sirva de prevención, que las divisiones y los valores absolutos de las unidades no solo difieren de nacion á nacion, sino que tambien difieren las de nuestras provincias. La vara de Valencia, por exemplo, difiere de la de Burgos: la libra gallega consta de 20 onzas, &c. Al fin del tratado de Geometría se hallarán Tablas que expresan los valores de estas unidades, y las relaciones de unas con otras.

brados del pie, las líneas de la pulgada, y los puntos de la línea; y que todas estas dimensiones tienen á 12 por denominador. Igualmente el real es quebrado del peso, y tiene por denominador á 15 si se trata de peso sencillo, ó á 20 si se trata de peso fuerte: el maravedí es una fracción del real, que tiene á 34 por denominador.

76. Enterados de la subdivisión de una unidad en otras de menor denominación, será fácil deducir las reglas de reducir un número de mayor á menor denominación, y de menor denominación á otro de mayor, lo que aclararemos con los dos problemas siguientes.

Problema 1.º Reducir un número á otro de menor denominación.

Para reducir un número á otro de menor denominación, multiplíquese el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad suya, y el producto será el número reducido á menor denominación.

Ejemplo. Para reducir 17 varas á pies, multiplico á 17 por 3, y el producto 51 será el número de pies que componen 17 varas: si los 51 pies se quisieran reducir á pulgadas, multiplicaríamos 51 por 12, y hallaríamos que componen 610 pulgadas.

Quando hay varias denominaciones intermedias y dos extremas, que llamaremos *máxima* y *mínima*, como en el número 2 arrobas 6 libras y 4 onzas, se executará la reducción del modo siguiente: se reducirá la máxima denominación á la intermedia mas próxima, y se le agrega al resultado el número de unidades de dicha denominación inmediata: luego se reduce este conjunto á la denominación que sigue, y así sucesivamente hasta llegar á la mínima denominación. Baxo este principio reduzco las dos arrobas á libras, multiplicando á 2 por 25, que son el número de libras que contiene una arroba, y me resulta 50 al producto: á este producto le añado las 6 libras que hay en el número propuesto, y la suma 56 libras corresponden á 2 arrobas mas 6 libras: las 56 libras las multiplicaré por 16, porque la libra consta de 16 onzas, y el producto 896 serán las onzas que componen las 56 libras; y finalmente al producto 896 le añado las 4 onzas que hay en el número propuesto, y la suma 900 nos manifestará el número propuesto reducido á onzas.

Problema 2.º Reducir un número á otro de mayor denominación.

Como que el partir es operacion contraria de la de multiplicar, deduciremos esta otra regla: *que para reducir un número á otro de mayor denominacion, se partirá el número propuesto por el número de unidades menores que contiene cada unidad mayor, y el quociente será el número reducido á mayor denominacion.*

Siempre se podrá poner en práctica esta regla, ya sea expresando la particion en forma de quebrado (art. 54), ya efectuándola por decimales (art. 72) con la aproximacion necesaria.

Exemplo. Para reducir 72 pulgadas á pies, partiré 72 por 12, y el quociente 6 serán los pies: por igual razon 5 pulgadas serán $\frac{5}{12}$ de pie, ó bien 0'4166, &c. pies.

Quando el número propuesto conste de varias denominaciones, lo mas breve será reducirlo á la mínima denominacion, segun tenemos enseñado, y se tendrá el numerador de un quebrado cuyo denominador será el número de unidades mínimas que contiene cada unidad máxima del número propuesto.

Exemplo. Para reducir 2 varas + 2 pies + 5 pulgadas á una sola fraccion de vara, se reducirá el todo á pulgadas, que serán 101 pulgadas; y como que la vara consta de 36 pulgadas, tendremos $2 \text{ varas} + 2 \text{ pies} + 5 \text{ pulg.} = \frac{101}{36}$ de vara. Si se trata de reducir este quebrado á entero y quebrado, ó á decimales de la máxima denominacion, tendremos en el primer caso $2 \frac{25}{36}$ varas $= \frac{101}{36}$ de vara; y en el segundo caso partiendo 101 por 36, tendremos $\frac{101}{36} = 2'806$ de vara.

77. Las operaciones, á las quales se sujetan los números complexos, se deducen facilmente de las reglas que hemos dado.

Problema. Sumar números complexos.

Para sumar los números complexos executese lo siguiente:

1.º Escribanse estos números los unos debaxo de los otros de modo que las unidades de la misma especie se hallen en la misma columna.

2.º Empiécese á sumar la columna de la mínima denominacion como si fuesen números simples, y solo se pondrá debaxo el exceso de dicha suma á un número exácto de unidades inmediatas, y reténgase en la memoria dicho número exácto de unidades para agregarlo luego á la denominacion que sigue.

3.º Se sumarán por el mismo estilo los números de la segunda denominacion de la derecha, agregando ante todas cosas

las unidades que se llevaban de la denominacion anterior, y continúese por el mismo estilo.

4.º Quando las sumas son algo crecidas, para evitar equivocaciones será mejor escribir en un papel suelto: ó aparte en el mismo papel, la suma de las unidades de la especie inferior, y hallar por la regla dada (art. 76 probl. 2.º) el número de unidades de la especie inmediata superior, y las unidades sobrantes de especie inferior, que son las que se han de escribir en la columna de la mínima denominacion; y lo mismo se va executando con las siguientes.

Exemplo. Se quieren sumar los dos números 12 varas 2 pies 11 pulg., y 15 varas 1 pie 8 pulg., que escribo así:

Varas.	Pies.	Pulg.
12.....	2.....	11.
15.....	1.....	08.

suma..... 28..... 1..... 07.

Tomo la suma de estos dos números, empezando por la columna de las pulgadas: sumo dicha columna, pero sin escribir la suma, que se irá conservando en la memoria, y veo que dicha suma 19, por constar el pie de 12 pulgadas, vale en pie, que retengo, y á mas 7 pulgadas, que son las que escribo debaxo de la columna de las pulgadas.

Paso á la columna de los pies, y digo: 1 pie retenido y 2=3 y 1=4; conservo 4 en la memoria, y reflexiono que la vara consta de 3 pies, luego los 4 pies importarán 1 vara y 1 pie; escribo 1 pie debaxo de la columna de los pies, y retengo la vara para llevarla á la columna de las varas, cuya suma hallaré como hemos visto para los números compuestos.

Exemplo 2.º Se quieren sumar los quatro números siguientes:

Ps.	Rs.	Mrs.
8.....	17.....	15.
7.....	11.....	28.
6.....	15.....	31.
5.....	06.....	27.
28.....	11.....	33.

47

Empiezo sumando los maravedises, cuyo total es de 101: escribo á parte este número y lo parto por 34, porque se necesitan 34 maravedises para componer un real, y me resultan 2 reales al quociente con un resto de 33 maravedises: escribo los 33 baxo la columna de los maravedises, y llevo los 2 reales á la columna de los reales, y añadiéndolos á ellos suman 51, que componen 2 pesos fuertes con un resto de 11 reales: escribo 11 baxo la columna de reales, y llevo los 2 pesos á la de los pesos; y efectuando la suma tendré por suma total 28 Ps..... 11 Rs..... 33 Mrs.

78. *Problema.* Restar un número complexô de otro.

1.º *Escríbese el subtrahendo debaxo del minuendo, de modo que los números de cada denominacion queden debaxo de su correspondiente, y se executará la resta como hemos enseñado debaxo executarse con los números simples (art. 23).*

2.º *Si en el discurso de la operacion se encuentra algun número del subtrahendo que exceda al del minuendo de su denominacion, por un proceder semejante al indicado (art. 24), se le agrega á este número del minuendo el número de unidades de su denominacion, que compone una unidad de la inmediata superior.*

3.º *Efectuada la resta de los números de dicha denominacion, quítase una unidad á la denominacion siguiente del minuendo (art. 24), y continuase la operacion.*

Exemplo. De 156 fanegas, 10 celemines, 3 quartillas y 2 quintillos de cebada que habia en un almacén, se han extraído 88 fanegas, 9 celemines, 3 quartillas y 3 quintillos; y se quiere saber quanta cebada quedó en dicho almacén.

Claro está, que para averiguarlo se necesita restar el segundo número del primero: escribiré estos dos números como sigue:

Fan.	Celem.	Quart.	Quint.
156.....	10.....	3.....	2.
88.....	09.....	3.....	3.
68.....	00.....	3.....	4

Digo: 3 de 2 no puede restarse: tomo una unidad del minuendo en la columna inmediata, que es la de las quartillas, y como que una quartilla consta de 5 quintillos diré:

5 quintillos que tomo y 2 que hay en el minuendo son 7, de los que resto 3, y el residuo 4 lo escribo. Paso á la columna de las quartillas, y el punto puesto sobre el 3 del minuendo me recuerda que este 3 ya no vale mas que 2, y digo: 3 de 2 no se puede, por lo que tomo una unidad en la columna de los celemines, cuya unidad vale 4 quartillas, por lo que digo: 4 y 2 son 6, y quien de 6 resta 3 quedan 3, que escribo en la columna de las quartillas. Despues paso á la columna de los celemines, y reparo que el punto sobre el diez del minuendo lo reduce á 9; digo pues: 9 de 9 queda nada, ó cero, que escribo debaxo de dicha columna de celemines. Finalmente verifico la resta en la columna de las fanegas, segun las reglas que hemos dado para la de los números compuestos, y vendré en conocimiento de que quedaron en el almacén 68 fanegas; 3 quartillas y 4 quintillos.

Procediendo por un método semejante, hallariamos que la diferencia entre

Quintal.	Arroba.	Lib.	Onz.
12.....	1.....	20.....	08.
Y..... 9.....	2.....	23.....	09.
ES..... 2.....	1.....	21.....	15.

Problema.

Supóngase ser el valor aproximado del fusil de 114 reales con 29 maravedices: el de la bayoneta incluso su vayna, boton y contera, de 12 reales y 25 maravedices: el de la cartuchera incluso su correage y el del porta-sable de 32 reales y 12 mrs.: el del porta-fusil de 1 real; y el del sable incluso vayna, boton y contera, de 18 reales y 24 mrs.: se quiere saber el importe de todo este armamento.

Otro.

Un Cadete sentó plaza en el año de 1809 el día 4 de Junio á las 8 de la mañana, y fué ascendido á Subteniente en 19 de Noviembre de 1811 á las 10 de la mañana. Pregúntase ¿que tiempo sirvió de Cadete?

NONA LECCION.

Continuacion de los números denominados y de los complexós.

79. Problema 1.º Multiplicar un número complexó por un número abstracto ó denominado de una sola denominacion.

1.º Multiplíquese el número de la menor denominacion por el multiplicador aparte, ó en un papel suelto; y si dicho producto contiene una ó mas unidades de la especie mayor inmediata, se halla el número de unidades justas de dicha especie mayor, y las sobrantes (art. 76 Prob. 2.º). Estas se escriben en su columna, y las otras se agregan á las de la especie próxima mayor, como en el sumar (art. 77 núm. 2.º).

2.º Multiplíquese luego el número de la denominacion siguiente por el mismo multiplicador, agregando al producto las unidades que se llevaban de la anterior, operando con este resultado como con el primero; y se continúa así la operacion hasta acabar.

Exemplo. Se han comprado 29 varas de paño á 7 pesos fuertes, 12 reales y 5 mrs. cada vara: se quiere saber el importe del paño que se ha comprado. El Problema se reduce á multiplicar por 29 el precio de una vara: luego

Ps.	Rs.	Mrs.
7.....	12.....	05.
29 varas		

producto..... 220..... 16..... 09.

Multiplíquese aparte los 5 mrs. por 29, y el producto 145 lo parto por 34, número de mrs. que contiene el real: de dicha particion me resultan 4 reales al quociente, con un resto de 9 mrs. que escribo debaxo de la columna de los mrs.: seguidamente multiplico aparte los 12 reales por 29, y al producto 352 le agrego los 4 reales que ha importado el producto parcial de los mrs., y el resultado 356 lo parto por 20: de dicha particion resultan 17 pesos fuertes al quociente, con un resto de 16 reales que escribo al producto debaxo de su correspondiente: finalmente multiplico los 7 pesos por 29, y al producto 203 le agrego los 17 pesos que ha importado el resultado de reales, y la suma 220 la es-

cribo en el producto, con lo que queda concluida la operacion.

80. Problema 2.º Multiplicar un número complexó por otro complexó.

1.º Escrito el multiplicador debaxo del multiplicando, empícese multiplicando todo el multiplicando por el número de la denominacion máxima del multiplicador, cuya operacion es evidente se reduce á multiplicar un número complexó por un número abstracto ó denominado de una sola denominacion (art. 79), y que por lo tanto (art. 31 y 32) no puede ofrecer dificultad.

2.º Hecha esta primera multiplicacion, es igualmente evidente que solo resta que multiplicar el multiplicando por las denominaciones segunda, tercera &c. del multiplicador: para efectuarlo, se verá si la segunda denominacion es una parte alícuota de una unidad de la máxima denominacion; y si no lo es se descompone en dos, tres &c. que lo sean: en el primer caso es claro que si es la mitad, el tercio, el quarto &c. de una unidad máxima, debe reducirse la operacion á tomar la mitad, el tercio, la quarta parte &c. del multiplicando: si en el segundo caso se ha descompuesto el número de la segunda denominacion en dos partes que sean, por exemplo, una mitad y la otra un octavo de una unidad máxima, en este caso se tendrá por la una la mitad del multiplicando, y por la otra la octava parte, ó el quarto del producto parcial que resultó por la mitad.

3.º En fin, pasando á multiplicar por la tercera denominacion del multiplicador, se buscarán sus partes alíquotas, bien sean de una unidad de la segunda ó de la máxima denominacion, ó bien de alguno de los productos parciales anteriores.

Esta regla se hará mas inteligible con los exemplos siguientes.

Problema 1.º Se quiere saber el coste de 46 y $\frac{3}{4}$ de vara de paño á 66 reales y 24 mrs. vellon la vara.

Claramente se ve que la operacion se reduce á repetir el precio de la vara tantas veces como 1 vara está contenida en 46 varas y $\frac{3}{4}$, es decir, quarenta y seis y tres quartas de veces.

Rs.	Mrs.
66.....	24.
46 $\frac{2}{3}$ varas	

primer producto.....	3068.....	16.
por $\frac{1}{2}$	33.....	12.
por $\frac{1}{4}$	16.....	23.

producto total..... 3118..... 17.

Para efectuar esta multiplicacion empezaremos la operacion como si el multiplicador fuese un número compuesto solo de enteros, esto es, como si unicamente fuese 46; y hasta que no se halle el resultado de la multiplicacion de todo el multiplicando por dicho número, no nos ocuparemos de las tres cuartas del multiplicador. Establecido esto se hallará este primer producto parcial por la regla del problema 1.º (art. 79), y por ella hallaremos que el coste de las 46 varas á razon de 66 reales y 24 mrs. asciende á 3068 reales y 16 mrs.

Hallado este primer producto parcial, tratemos de indagar el coste de las $\frac{2}{3}$ de vara de que hasta ahora no nos hemos ocupado: claro está que si una vara cuesta 66 reales y 24 maravedises, las $\frac{2}{3}$ de vara valdrán los $\frac{2}{3}$ de 66 reales y 22 mrs. Para mayor facilidad descompongo $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$: por $\frac{1}{2}$ tomo la mitad del precio de una vara, es decir, la mitad de 66 reales y 24 mrs., lo que me dará 33 reales y 12 mrs., cuyas partidas escribo debaxo de sus correspondientes columnas. En fin, por $\frac{1}{4}$ que es la mitad de la mitad, tomo la mitad del último resultado 33 reales y 12 mrs., lo que me dará 16 reales y 23 mrs., que igualmente escribo en sus correspondientes columnas. Despues sumo estos tres productos parciales, segun queda enseñado debe executarse con los números complexos; con lo que hallo que las 46 $\frac{2}{3}$ varas de paño á 66 reales y 24 mrs. vara, cuestan 3118 rs. y 17 mrs.

Exemplo 2.º Se han comprado 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillos de cebada á 4 pesos sencillos, 5 reales y 5 mrs. vello. la fanega, se quiere saber á quanto asciende el coste de esta partida de cebada: veo que repitiendo 4 pesos, 5 reales y 5 mrs. tantas veces quantas una fanega está contenida en 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas, hallaré el producto como sigue:

	Ps.	Rs.	Mrs.
4.....	05.....	05.	
23 faneg.	4 celem.	2 quarti.	
primer producto...	99.....	13.....	13.
por 4 celemines $\frac{1}{8}$...	1.....	06.....	24 $\frac{1}{8}$
por 2 quartillos $\frac{1}{8}$...	0.....	02.....	24 $\frac{7}{8}$
producto total....	101.....	07.....	27 $\frac{5}{8}$

Operando por un proceder semejante al que hemos empleado en la operacion anterior. Empezaré multiplicando todo el multiplicando por la mayor denominacion del multiplicador, esto es por las 23 fanegas, y para ello empezaré multiplicando por 23 la mínima denominacion del multiplicando, que son los 5 mrs., y el producto 115 lo escribo en un papel suelto, y seguidamente lo parto por 34, y tendré 115 mrs. = 3 reales + 13 mrs.: escribo los 13 mrs. en su correspondiente columna, reteniendo en la memoria los 3 reales. Paso á la columna de los reales y multiplico los 5 reales del multiplicando por 23, y al producto 115 le sumo los 3 reales que he retenido de la de los mrs., y la suma 118 la parto por 15, por constar el peso sencillo de 15 reales, y encuentro 7 al quociente con un residuo de 13, lo que me manifiesta que 118 reales = 7 pesos + 13 reales: escribo pues los 13 reales en su correspondiente columna, y retengo los 7 pesos en la memoria. Finalmente paso á la columna de los pesos, y multiplicando tambien en papel suelto los 4 pesos por 23, al producto 92 le añadiré los 7 pesos retenidos de la columna de los reales, y la suma 99 la escribiré en la columna de los pesos: tendremos pues que el coste de 23 fanegas á 4 pesos, 5 reales y 5 mrs. importan 99 pesos, 13 reales y 13 mrs.

Tratemos ahora de averiguar el importe de los 4 celemines. Es evidente que si una fanega cuesta 4 pesos, 5 reales y 5 mrs., 4 celemines que son el tercio de la fanega costarán $\frac{1}{3}$ de 4 pesos, 5 reales y 5 mrs.: luego por 4 celemines tomaré el tercio del multiplicando, que será 1 peso, 6 reales, y 24 $\frac{1}{8}$ mrs., que escribo como segundo producto parcial.

Solo falta saber el importe de las 2 quartillas: para ello no se necesita mas que recapacitar que 2 quartillas es lo

mismo que $\frac{1}{2}$ celemin, y que $\frac{1}{2}$ celemin es $\frac{7}{8}$ de 4 celemines: luego si tomamos la octava parte de un peso 6 reales y $24 \frac{1}{8}$ mrs. que es el importe que hemos hallado corresponde á los 4 celemines, tendremos el de las 2 quartillas: esta octava parte es 2 reales y $24 \frac{7}{8}$ mrs., que escribo como tercer producto parcial. Hallados todos los productos parciales los sumo segun las reglas dadas, y tendré por producto total 101 pesos, 7 reales y $27 \frac{5}{8}$ mrs. importe de las 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas de cebada.

Solo añadiremos para mayor facilidad de los principiantes la trivial advertencia de que los $\frac{5}{8}$ del producto total resultan de la suma de $\frac{1}{8} + \frac{7}{24} = \frac{8}{24} + \frac{7}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

81. Es evidente que el arte de la multiplicacion de los números complexos consiste en descomponer las diferentes denominaciones en partes aliquotas de la especie ó denominacion inmediata superior.



DÉCIMA LECCION.

Continuacion de los números denominados y de los complexos.

82. Vamos á tratar de la particion ó division de un número complexó, ya sea que el divisor sea un divisor simple, ya sea que el divisor sea otro número complexó; y para proceder con método principiaremos por el primer caso.

Problema. Partir un número complexó por un número abstracto ó denominado de una sola denominacion.

1.º Se parte por el divisor el número de la mayor denominacion, y este primer quociente es de dicha denominacion mayor.

2.º El residuo se reduce á la denominacion segunda, y despues de agregarle las unidades que hubiese de dicha denominacion segunda en el dividendo, se parte el conjunto por el mismo divisor, y este segundo quociente será de dicha denominacion segunda.

3.º El residuo se reduce á la denominacion tercera, y se continúa partiendo por el mismo estilo hasta acabar.

Exemplo. Trátase de repartir 138 pesos sencillos, 12 reales y 16 mrs. entre 25 hombres: claro está que esta operación se reduce á partir por 25 la cantidad propuesta.

Pes.	Rs.	Mrs.	25
138.....	12.....	16	
13.....	195.....	238	
	207	254	
	7	4	

Pes.	Rs.	Mrs.
5.....	8.....	10 $\frac{4}{5}$

Digo: 25 en 138? 5 veces: escribo el 5 en el quociente, y serán pesos, y el residuo 13 lo voy escribiendo conforme vaya resultando debaxo de los pesos del dividendo: este residuo de 13 pesos los reduzco á reales en un papel suelto multiplicándolos por 15; y los 195 que me dan de resultado los escribo debaxo de los reales del dividendo; y paso á sumar 12 con 195, y el conjunto 207 de estas dos cantidades lo parto por el divisor 25 diciendo: 25 en 207, ó bien 2 en 20 ¿quintas veces? 8 veces: escribo el 8 al quociente, que serán reales, y el residuo 7 reales lo reduzco á mrs. también en papel suelto, multiplicándolos por 34, y el resultado 238 lo escribo debaxo de los mrs. del dividendo: sumo 238 con 16, y la suma 254 la parto por 25: el quociente 10 que me resulta lo escribo en el quociente como mrs.: también escribo el residuo en el quociente como numerador de un quebrado, cuyo denominador debe ser el divisor (art. 55). Luego á cada uno le tocarán 5 pesos, 8 reales, 10 $\frac{4}{5}$ mrs.

83. Pasemos al segundo caso de tener que partir un número complexó por otro: la operación se reduce á plantearla de modo que quede convertido el divisor en un número abstracto ó denominado de una sola denominación, conseguido lo qual se operará como acabamos de enseñar en la regla anterior: el modo de reducir á este estado la operación es el siguiente.

Problema. Partir un número complexó por otro complexó.

1.º Redúzcase el divisor á quebrado de su mínima denominación (art. 76).

2.º Redúzcase también el dividendo al mismo denominador que el divisor, lo que se hará multiplicando el dividendo por el denominador del divisor (art. 58 núm. 2.º); y tanto este como el dividendo quedarán reducidos á quebrados de comun denominador.

3.º Suprimanse los denominadores de ambos quebrados; lo que no debe variar el valor del quociente, puesto que suprimir dichos denominadores equivale á multiplicar estos dos quebrados por el expresado denominador, lo que (art. 43) no debe alterar el valor del quociente: luego se formará un nuevo quebrado, poniendo por numerador el correspondiente al quebrado dividendo, y por denominador el numerador del quebrado divisor.

4.º Resultará pues un quebrado impropio, cuyo numerador será un número complejo, y el denominador será un número denotado de una sola denominación, cuya reducción (art. 55) se reducirá á partir un número complejo por un número denotado de una sola denominación, y de consiguiente entra esta operación en la regla dada para la resolución del primer caso (art. 82).

Exemplo. 46 varas y $\frac{3}{4}$ de paño costaron 3118 reales y 17 mrs.: se quiere saber el precio de una vara.

La operación se reduce á partir 3118 reales y 17 mrs. por 46 $\frac{3}{4}$ varas: reduciré las 46 $\frac{3}{4}$ varas á quartas, son $\frac{187}{4}$; reduzco á quebrado de esta denominación el dividendo 3118 reales y 17 mrs., multiplicándolo por 4 y poniéndole á 4 por denominador, esto es $(3118 \text{ rs.} \dots 17 \text{ mrs.}) \times 4 = \frac{12474}{4}$ rs.; formo con los dos numeradores del dividendo y divisor el quebrado $\frac{12474}{187}$ reales: resta solo ahora partir 12474 reales por 187, que verificado dará al quociente 66 reales y 24 mrs. por el precio de una vara. Pondremos aquí abreviadamente esta última operación.

12474 rs.	187
1254	
132	Rs. Mrs.
34 mrs.	66..... 24.
528	
396	
4388 mrs.	
748	

84. Asimismo, para saber el precio de una fanega de cebada, suponiendo que 230 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas costaron 101 pesos, 7 reales y 27 $\frac{1}{2}$ mrs., reparo

que el precio de una fanega estará tantas veces contenido en 101 pesos, 7 reales y $27 \frac{5}{8}$ mrs.; quantas una fanega está contenida en 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas; luego despues de partir 101 pesos, 7 reales y $27 \frac{5}{8}$ mrs. por 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas, el quociente manifestará el precio de la fanega.

Para hacerlo, reduzco 23 fanegas, 4 celemines y 2 quartillas á su mínima expresion, esto es á quartillas; el resultado será 23 fanegas, 4 celemines 2 quartillas = 1122 quartillas; y como que la fanega consta de 48 quartillas, tendremos $1122 \text{ quartillas} = \frac{1122}{48}$ de fanega. Luego multiplico el dividendo por 48, cuya operacion bastará indicar.

Pes.	Rs.	Mrs.
101.....	07.....	$27 \frac{5}{8}$
		48

producto..... 4072..... 12..... 02

Concluiremos pues que 101 Ps. 07 Rs. $27 \frac{5}{8}$ Mrs. =
 $(101 \text{ Ps. } 07 \text{ Rs. } 27 \frac{5}{8} \text{ Mrs.}) \times 48 = 4072 \text{ Ps. } 12 \text{ Rs. } 02 \text{ mrs.}$
4848

hecha esta reduccion á comun denominador resultará el quebrado $\frac{4872 \text{ Ps. } 07 \text{ Rs. } 02 \text{ Mrs.}}{1122}$; cuya operacion tampoco haremos

mas que indicar.

Pesos.	Rs.	Mr.	1122
4872.....	12.....	02	
384 Ps. =	5760 Rs.		
	5772		
	162 Rs. =	5508 Mrs.	
		5510	
		0000	

Luego una fanega costará 4 pesos, 5 reales y 5 mrs.

85. Se ve que para la particion de los números complexôs por otro complexô, se ha de reducir el divisor á su mínima denominacion, luego multiplicar el dividendo por el

número que exprese quantas unidades mínimas del divisor se necesitan para componer una máxima de este mismo divisor, y hacer la partición según las reglas dadas. 57

Problema.

425 Varas..... 2 pies..... 11 pulg. de mampostería han costado
1326 pesos 13 reales 14 mrs.: se pregunta ¿quanto ha costado cada vara?

DE LAS POTESTADES Y RAÍCES EN GENERAL.

86. Se llaman *potestades* ó *potencias* de un número los productos que resultan multiplicando este número por la unidad, ó por sí mismo. Multiplicando un número por 1 se tiene la primera potestad de este número, 4×1 , ó 4 es la primera potestad de 4. Así, la primera potestad de un número es este mismo número.

Multiplicando un número una vez por sí mismo, el producto que resulta es la segunda potestad, ó el *quadrado* de este número: por exemplo, 3×3 , ó 9 es el quadrado de 3. Si se multiplica dos veces seguidas un número por sí mismo, esto es que se tome tres veces por factor, ó lo que es lo mismo si se multiplica el quadrado de un número por este número, se tiene por producto la tercera potestad, ó el *cubo* de este número: así $4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4$ ó 64 es el cubo de 4, &c.

87. Al operar con dicho número para formar qualquiera de las potestades expresadas, se llama *elevarlo* á dichas potestades.

88. Repárese que todas las potestades de 1 son 1; porque 1 multiplicado por sí mismo tantas veces como se quiere, no puede dar sino 1 por producto. La unidad sola tiene esta propiedad.

89. Se llama *raíz* de una potestad el número que multiplicado por 1 ó por sí mismo ha producido esta potestad: la raíz primera y la potestad primera son la misma cosa.

En quanto á la segunda potestad, el número que la ha producido se llama *raíz segunda*, ó *raíz quadrada*. En quanto á la tercera potestad, el número que la ha producido se llama *raíz tercera*, ó *raíz cúbica* &c.

Para indicar que una cantidad está elevada á una potestad, supongo 4 á la segunda, se escribe así: 4^2 ; la cifra pequeña 2 puesta mas arriba y á la derecha de 4 se llama *exponente de la potestad*; así, 5^3 indica que 5 se considera elevado al cubo, y dicha expresion $\equiv 125$; 8^6 equivale á 8 elevado á la sexta potestad.

Para indicar la raíz de qualquiera potestad sirve este signo $\sqrt{}$, colocando entre sus piernas el exponente de la potestad que se omite en la quadrada. Así; $\sqrt{25}$ expresa la raíz quadrada de 25; de modo que $\sqrt{25} \equiv 5$, y $\sqrt[3]{8}$ la raíz cúbica de 8, de modo que $\sqrt[3]{8} \equiv 2$.

90. Al operar para hallar el número ó la raíz quando se conoce la potestad, se llama *extraer la raíz*.

91. El elevar un número á una potestad no pue le presentar ninguna dificultad: *bastará multiplicar el número que se quiere elevar á la potencia, una vez por sí mismo para el quadrado, dos veces por sí mismo para el cubo, &c.* Así, multiplicando 12 una vez por 12, el producto 144 da el quadrado de 12. El número que se quadra es pues dos veces factor del producto que expresa la segunda potestad, pues es al mismo tiempo multiplicando y multiplicador. Multiplicando por 12 el producto de 12 por 12, el producto 1724 da el cubo de 12. El número que se eleva al cubo es pues tres veces factor del producto que expresa la tercera potestad.

Se hallará asimismo, 1.º que el quadrado de $\frac{2}{3}$ es $\frac{4}{9}$, por que $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \equiv \frac{4}{9}$. 2.º que el cubo del mismo quebrado $\frac{2}{3}$ es $\frac{8}{27}$; porque $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \equiv \frac{8}{27}$. 3.º que el quadrado de 0'4 es 0'16, porque $0'4 \times 0'4 \equiv 0'16$, &c.

92. Se ve que para formar las diferentes potestades de los quebrados, es preciso elevar el numerador y el denominador á la potencia propuesta; de donde se sigue que el valor de un quebrado disminuye á medida que se eleva este quebrado á mas alta potestad. La disminucion es tanto mas rápida quanto el denominador es mayor que el numerador.

93. La extraccion de las raíces está sajeta á reglas particulares, cuyos detalles nos alexarían del fin que nos proponemos, que es de no hacer demasiado dilatado este Tratado, sobre todo quando en seguida veremos un metodo de verificar estas operaciones con mucha mas facilidad: basta por ahora saber que los números siguientes

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

son respectivamente las raíces cuadradas de

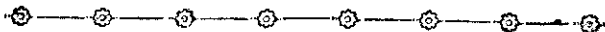
1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

y las raíces cúbicas de

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Son pocos los números que tienen raíz cuadrada, ó raíz cúbica exácta; y los mas no las tienen ni en enteros ni en expresion fraccionaria. $\sqrt{7}$, y $\sqrt[3]{9}$ se hallan en este caso, porque no hay número que multiplicado por sí dé exáctamente el 7; ni tampoco existe número que tomado tres veces por factor dé exáctamente el 9. Llámense estas cantidades *incomensurables*, ó *sordas*.

94. Para extraer la raíz cuadrada y la raíz cúbica de los quebrados, es preciso sacar la raíz propuesta del numerador y del denominador. Se hallará de este modo, que la raíz cuadrada de $\frac{4}{9}$ es $\frac{2}{3}$; que la raíz cúbica de $\frac{125}{125}$ es $\frac{5}{5}$ &c. La regla es la misma para los quebrados decimales; pero la operacion es mas facil y mas pronta. Por exemplo, se ve en el momento que la raíz de 0'49 es 0'7.



UNDÉCIMA LECCION.

De las Razones, Proporciones y Progresiones.

95. Se llama *razon* en la Matemática á la comparacion de dos cantidades, y se da el nombre de *exponente* al resultado que se halla comparando dos cantidades de la misma especie.

96. Se pueden comparar dos cantidades para saber de quanto la una sobrepaja á la otra, ó quantas veces la una contiene á la otra: así, se puede comparar 4 con 8 para saber de quanto 8 sobrepaja á 4, ó quantas veces contiene á 4. Se llaman *términos de la razon* las dos cantidades que se comparan: de estos dos términos, el que se escribe el pri-

mero se llama *antecedente*, y el otro se llama *consecuente*.

97. Quando se comparan dos cantidades, para indagar de quanto la una sobrepaja á la otra, la razon se llama *aritmética*: consiste el exponente en la *diferencia absoluta* que hay entre el antecedente y el consecuente: así, se hallará que en la razon aritmética de 6 á 2 el exponente es 4: esta razon se escribe así $6 \cdot 2$.

Quando se comparan dos cantidades con el fin de averiguar quantas veces la una contiene á la otra, la razon se llama *geométrica*, y el exponente de la razon consiste en el *quociente* que se halla *partiendo* el antecedente por el consecuente: así, en la razon geométrica 4 es á 8, que se escribe de este modo $4:8$; el exponente es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; y en la de 15 á 5, ó 15:5 será $\frac{15}{5} = 3$ el exponente de dicha razon.

98. La comparacion de dos razones iguales se llama *proporcion*. La proporcion es aritmética quando las razones que se comparan son aritméticas: la proporcion es geométrica quando las razones que se comparan son geométricas.

Por exemplo, la razon aritmética de 6 á 4 es igual á la de 10 á 8, ó lo que es lo mismo $6-4=10-8$; puedo pues decir 6 es á 4 aritméticamente, como 10 es á 8, lo que se escribe del modo siguiente $6.4:10.8$; el punto puesto entre el 6 y el 4 y el 10 y el 8, se pronuncia *es á*; los dos puntos puestos entre las dos razones se pronuncian *aritméticamente como*. La razon geométrica 6 á 12 es igual á la de 8 á 16, es decir, que se tiene $\frac{6}{12} = \frac{8}{16}$; diré pues, 6 es á 12 como 8 es á 16, lo que se escribe como sigue $6:12::8:16$; en esta clase de proporciones los dos puntos entre el 6 y el 12 y entre el 8 y el 16 se pronuncia *es á*, y los quatro puntos que se hallan entre las dos razones se pronuncian *como*.

Pues que toda razon se compone de dos términos, es claro que constando una proporcion de dos razones, constará tambien de quatro términos: el primero y el tercero son los *antecedentes*, el segundo y el quarto son los *consecuentes*: Se llaman extremos el primer y último término de la proporcion; el segundo y tercero se llaman *medios*.

99. Si el segundo término de la proporcion, que es el consecuente de la primera razon, es al mismo tiempo antecedente de la segunda razon, la proporcion se llama *continua*. Segun lo qual $3.5:5.7$ es una proporcion aritmética continua, que se escribe así $\div 3.5.7$.

La proporción $2 : 4 :: 4 : 8$ es una proporción geométrica continua, y se escribe de este modo $\div 2 : 4 : 8$.

La señal $\div$ escrita delante de la proporción aritmética continua, así como la señal $\div$ escrita delante de la proporción geométrica continua, indica que es necesario al enunciar la proporción repetir dos veces el término *medio*.

Llámanse proporción *discreta* quando los términos medios son desiguales.

La razón se llama *de mayor desigualdad* quando el antecedente es mayor que el conseqüente; *de igualdad*, quando los dos términos son iguales, y *de menor desigualdad* quando es menor el antecedente que el conseqüente.

100. Se llama *progresión aritmética* una série de términos, que tomados consecutivamente, tienen entre ellos la misma diferencia; y se llama *progresión geométrica* una série de términos, que divididos consecutivamente el uno por el otro, dan el mismo quociente.

La série $\div 3 . 6 . 9 . 12 . 15$ &c. es una progresión aritmética. La diferencia que se halle entre los términos consecutivos se llama el *exponente de la progresión*.

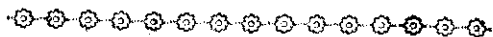
La série $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ &c. es una progresión geométrica. El quociente $\frac{1}{2}$ que se halla partiendo los términos consecutivos el uno por el otro, se llama *exponente de la progresión*.

El signo $\div$ que precede la progresión aritmética, y el signo $\div$ que se ve al principio de la progresión geométrica, significan que enunciando la progresión, se debe repetir dos veces cada término, excepto el primero y el último.

101. Las progresiones pueden ser *ascendentes* ó *descendentes*.

Una progresión es *ascendente*, quando los términos van aumentando; la progresión aritmética y la progresión geométrica que acabamos de poner por exemplo son ascendentes.

Una progresión es *descendente*, quando los términos van en disminución: por exemplo $\div 19 . 15 . 11 . 7 . 3$ es una progresión aritmética descendente; $\div 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1$ es una progresión geométrica descendente.



PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES Y PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

102. En toda proporción aritmética, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

Por exemplo, en la proporcion aritmetica $4 : 6 : 7 : 9$; $4 + 9$ ó 13 suma de los extremos $\equiv 6 + 7$ ó 13 suma de los medios.

En esta otra $3 : 1 : 7 : 5$; $3 + 5$ ó 8 suma de los extremos $\equiv 1 + 7$ ó 8 suma de los medios.

Lo mismo sucede en qualquiera otra proporcion aritmetica; porque en toda proporcion aritmetica, cada conseqüente es igual á su antecedente, aumentado ó disminuido del valor del exponente comun, segun que la razon sea de mayor ó menor desigualdad (art. 97 y 99); luego, poniendo en lugar de cada conseqüente su antecedente aumentado ó disminuido del valor del exponente comun, la suma de los extremos y la de los medios se hallan compuestas de cantidades idénticas, y por conseqüencia estas dos sumas son iguales; en efecto tomemos por exemplo la proporcion aritmetica $4 : 6 : 7 : 9$; descompongo el conseqüente 6 en $4 + 2$, esto es, el antecedente 4 mas el exponente 2 ; y el conseqüente 9 lo descompongo en $7 + 2$, esto es, el antecedente 7 mas el exponente 2 , luego la proporcion anterior se reducirá á la siguiente $4 : 4 + 2 : 7 : 7 + 2$, poniendo en lugar de 6 á $4 + 2$, y en lugar de 9 á $7 + 2$. En esta última proporcion tenemos por suma de los extremos $4 + 7 + 2$, y por suma de los medios $4 + 2 + 7$, cuyas dos sumas son iguales por constar de cantidades iguales. Sea para mayor comprobacion esta otra proporcion $3 : 1 : 7 : 5$; segun lo que hemos dicho tocante al modo de descomponer los conseqüentes en dos cantidades, una de ellas igual á su antecedente, y la otra igual á mas ó menos el exponente; tendremos $1 \equiv 3 - 2$, y $5 \equiv 7 - 2$, la proporcion propuesta se transformará en la siguiente $3 : 3 - 2 : 7 : 7 - 2$; la suma de los extremos es $\equiv 3 + 7 - 2$, y la de los medios $3 - 2 + 7$ tambien igual á la de los extremos; y como lo que acabamos de practicar puede verificarse con toda proporcion aritmetica, concluiremos que es general la demostracion, de que en toda proporcion aritmetica la suma de los medios es igual á la suma de los extremos.

103. Luego 1.º En toda proporcion aritmetica continua, la suma de los extremos es igual al duplo del término medio. Porque, por exemplo, la proporcion aritmetica continua $\div 3 : 7 : 11$ siendo la misma que $3 : 7 : 7 : 11$, se tendrá por suma de los extremos $11 + 3$, ó $14 \equiv 7 + 7$, ó el doble de 7 .

104. Luego 2.º Si se suman los dos términos medios de una proporcion aritmetica, y de la suma se resta uno de los

extremos, el residuo será el otro extremo. En efecto, si de la suma de los dos extremos se resta un extremo, el otro extremo debe resultar al residuo. Pero la suma de los medios es igual á la suma de los extremos (art. 102); luego si de la suma de los medios se resta un extremo, resultará el otro extremo al residuo. Atendiendo tambien á que, si de la suma de los medios restamos un medio, debe resultar el otro medio al residuo, y á que la suma de los medios es precisamente igual á la de los extremos, podremos concluir, que *si de la suma de los extremos se resta un medio, resultará el otro medio al residuo.* Primer exemplo, si conociendo los tres términos 5, 7, 9 de una proporcion aritmética, y siendo 5 uno de los extremos, busco el otro extremo; sumaré 7 con 9, y de la suma 16 resto 5, el residuo 11 será el extremo que busco; de modo que la proporcion completa será 5. 7 : 9. 11 ó bien 11. 7 : 9. 5 : Segundo exemplo, sean los tres términos 3, 7, 9 de una proporcion aritmética, y sea 7 el término medio conocido; si se quiere conocer el otro medio, sumaré 3 con 9, de la suma 12 resto 7, y el residuo 5 será el otro medio que se quería saber; de modo que la proporcion completa será 3. 5 : 7. 9, ó bien 3. 7 : 5. 9.

105. Si se trata del término medio de una proporcion aritmética continua, es claro que *se hallará tomando la mitad de la suma de los extremos.* Así para hallar el término medio de una proporcion aritmética continua, de la qual 4 y 8 sean los extremos añado estos dos números, y de esta suma 12 tomo su mitad 6, que será el término medio buscado. La proporcion completa será pues $\div 4. 6. 8$, ó bien $4. 6 : 6. 8$.

106. Siempre que quatro números, como 6, 5, 4, 3, sean tales que la suma de los extremos sea igual á la de los medios, estos quatro números estarán en proporcion aritmética.

En efecto, pues que $6 \div 3 = 2$; $+ 4$, se tendrá restando 3 de un lado y otro, $6 - 3 = 3$; $+ 4 - 3 = 4$. Si en este resultado se resta 5 de un lado y otro, se tendrá $3 - 5 = -2$; $4 - 5 = -1$. Luego estas son dos razones aritméticas iguales (art. 98), supuesto que la diferencia ó el exponente es 1 en cada lado; luego formarán proporcion diciendo 6. 5 : 4. 3. (art. 93).

107. En toda progresion aritmética un término qualquiera es igual al primero mas ó menos el exponente repetido tantas veces como términos haya antes del propuesto.

Porque una progresion aritmética es una série de términos, que tomados consecutivamente tienen entre sí la misma diferencia (art. 100), luego el segundo término de la progresion

es igual al primero aumentado, ó disminuido del valor del exponente, segun que la progresion sea ascendente ó descendente.

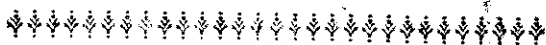
El tercer término de la progresion es igual al segundo aumentado ó disminuido del valor del exponente: luego este tercer término es igual al primero mas ó menos dos veces el valor del exponente.

El quarto término de la progresion es igual al tercero aumentado ó disminuido del valor del exponente: luego este quarto término es igual al primero mas ó menos tres veces el valor del exponente, y así de los demás: en efecto, en la progresion aritmética ascendente $\div 18. 21. 24. 27. 30$ &c. se tiene 1.º $21 = 18 + 3$; 2.º $24 = 21 + 3 = 18 + 3 + 3 = 18 + 3 \times 2$, &c. En la progresion aritmética descendente $\div 18. 15. 12. 9. 6$ &c., se tiene 1.º $15 = 18 - 3$; 2.º $12 = 15 - 3 = 18 - 3 - 3 = 18 - 3 \times 2$ &c.; de lo que concluiremos, que es evidente que en toda progresion aritmética, un término qualquiera es igual al primero mas ó menos el valor del exponente repetido tantas veces como términos haiga delante del propuesto.

108. Luego en toda progresion aritmética que tiene cero por primer término, un término qualquiera es igual al valor del exponente repetido tantas veces como términos haiga delante del producto.

109. Este principio sirve para interponer entre dos términos dados un número qualquiera de términos medios aritméticos.

Si se trata, por exemplo, de interponer entre 11 y 19 tres números que estén en progresion aritmética con 11 y 19, veo que esta progresion habrá de componerse de 5 términos, y que conociendo el primero no me queda otra cosa que hacer para formar los demás sino averiguar el valor del exponente. Pero sabemos que el quinto y último término se compone del primer término 11 mas 4 veces el valor del exponente (art. 107): conseqüente á esto, si de 19 resto 11 el residuo 8 que resulta se compondrá del valor del exponente repetido 4 veces. Luego si parto este residuo por 4, el quociente 2 que tengo será el exponente de la progresion. Actualmente determinaré en seguida los tres términos medios que se buscaban: el primero $= 11 + 2 = 13$; el segundo $= 11 + 2 \times 2 = 15$; y el tercero $= 11 + 2 \times 3 = 17$. La progresion que estos tres medios forman con 11 y 16 es pues $\div 11. 13. 15. 17. 19$.



DUODÉCIMA LECCION.

Propiedades de las Proporciones y Progresiones geométricas.

110. En toda proporción geométrica, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Por ejemplo, en la proporción $8 : 16 :: 6 : 12$, 8×12 ó 96 producto de los extremos $\equiv 16 \times 6$ ó 96 producto de los medios.

Esta propiedad se verifica en general en toda proporción geométrica; porque en toda proporción geométrica (art. 97) todo antecedente es igual al producto de su consecuente por el exponente; luego poniendo en lugar de cada antecedente su consecuente multiplicado por el exponente común, el producto de los extremos y el de los medios se compendrán de los mismos factores, y de consiguiente serán iguales.

En efecto, sea la proporción geométrica $24 : 8 :: 15 : 5$, en la qual será el exponente $\frac{8}{24}$ ó bien $\frac{15}{5}$ (art. 97), que ambas expresiones son $\equiv 3$, á mas será $24 \equiv 8 \times 3$ y $15 \equiv 5 \times 3$, esta proporción se transforma en la siguiente $8 \times 3 : 8 :: 5 \times 3 : 5$. Luego el producto $8 \times 3 \times 5$ de los extremos, se compone de los mismos factores que $8 \times 5 \times 3$ producto de los medios; luego serán iguales.

Si tomásemos por ejemplo la primera proporción propuesta $8 : 16 :: 6 : 12$, el exponente $\frac{8}{16}$ ó $\frac{6}{12} \equiv \frac{1}{2}$, en esta tendremos $8 \equiv 16 \times \frac{1}{2}$ y $6 \equiv 12 \times \frac{1}{2}$; luego se transformará en esta $16 \times \frac{1}{2} : 16 :: 12 \times \frac{1}{2} : 12$; en la qual $16 \times \frac{1}{2} \times 12$ producto de los extremos $\equiv 16 \times 12 \times \frac{1}{2}$ producto de los medios.

111. Luego, 1.º en toda proporción geométrica continua, el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio. Porque, por ejemplo, la proporción geométrica continua $4 : 6 : 9$, ó lo que es lo mismo $4 : 6 :: 6 : 9$, se tiene 4×9 ó 36 , producto de los extremos $\equiv 6 \times 6$ ó 36 , cuadrado del término medio.

112. Luego, 2.º es fácil de hallar el cuarto término de una proporción geométrica, de la que se conocen los otros términos; para lo qual, si el término que se busca es un extremo, se multiplicarán los medios uno por otro, y el producto se partirá por el extremo conocido, debiendo resultar al quocien-

te el extremo que se busca. Si fuese un medio el término desconocido, se hallará este partiendo por el medio conocido el producto de los extremos. Esto se funda, en que si se parte el producto de los extremos por un extremo, se tiene al quociente el otro extremo. Pero el producto de los medios es igual al producto de los extremos (art. 110); luego partiendo el producto de los medios por el extremo conocido resultará al quociente el extremo que se busca. Asimismo se ve claramente, que si se parte el producto de los medios por un medio, resulta el otro medio al quociente. Pero el producto de los extremos es igual al de los medios; luego partiendo el producto de los extremos por el término medio conocido, resultará al quociente el medio que se busca. Por exemplo, dados los tres términos 4, 8, 12 de una proporción geométrica, y siendo 4 uno de los extremos, si se pide el otro extremo multiplicaré los medios 8 por 12, y partiré por 4 su producto 96, el quociente 24 será el extremo pedido; de modo que la proporción completa será $4 : 8 :: 12 : 24$ ó $24 : 8 :: 12 : 4$. Si conociendo tres términos 5, 15, 21, de una proporción geométrica, y siendo 15 uno de los medios, busco el otro medio multiplicando los extremos 5 y 21, el uno por el otro, y partiendo por 15 su producto 105, el quociente será el medio que se busca; de modo que la proporción completa es $5 : 7 :: 15 : 21$ ó $5 : 15 :: 7 : 21$.

113. Si se trata del término medio de una proporción geométrica continua, se hallará este sacando la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Así, para hallar el término medio de una proporción geométrica continua de la qual 4 y 9 son los extremos, multiplico 4 por 9, el producto es 36, cuya raíz 6 es el medio que se busca; de modo que la proporción completa es $4 : 6 : 9$ ó $9 : 6 : 4$.

114. Todas las veces que quatro números como 10, 5, 8, 4, son tales que el producto de los extremos iguales al de los medios, estos quatro números formarán una proporción geométrica.

Porque $5 \times 8 = 4 \times 10$; se tendrá partiendo por 10 los dos productos $\frac{5 \times 8}{10} = 4$. Si en este resultado se parte á un lado y otro por 8, se tendrá $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$; luego $5 : 10 :: 4 : 8$, porque $\frac{5}{10}$ y $\frac{4}{8}$ son dos exponentes geometricos iguales entre sí, pues lo son ambos $\frac{1}{2}$; luego (art. 98) los quatro términos estarán en proporción.

115. Luego, 1.º cuando dos productos sean iguales se puede siempre deducir una proporcion geométrica, tomando por extremos los dos factores del uno de los productos, y por medios los dos factores del otro: Así porque $24 \times 3 = 36 \times 2$, deduzco que $24 : 2 :: 36 : 3$, ó que $24 : 36 :: 2 : 8$.

116. Luego, 2.º si quatro números están en proporcion geométrica, formarán siempre una proporcion geométrica, sea qual fuese la mutacion que se haga con sus términos, siempre y quando que haiga igualdad entre los productos de los exiremos y el de los medios.

De ser $8 : 4 :: 6 : 3$ concluiremos que se tendrá

- 1.º..... $4 : 8 :: 3 : 6$ *invirtiendo.*
- 2.º..... $6 : 3 :: 8 : 4$ *cambiando.*
- 3.º..... $8 : 6 :: 4 : 3$ *alternando.*
- 4.º $\left\{ \begin{array}{l} 8 + 4 : 8 :: 6 + 3 : 6 \\ 8 + 4 : 4 :: 6 + 3 : 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{comparando} \\ \text{componiendo} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{con el antecedente.} \\ \text{con el consecuente.} \end{array} \right.$
- 5.º $\left\{ \begin{array}{l} 8 - 4 : 8 :: 6 - 3 : 6 \\ 8 - 4 : 4 :: 6 - 3 : 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{comparando} \\ \text{dividiendo} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{con el antecedente.} \\ \text{con el consecuente.} \end{array} \right.$

La primera mutacion se llama *invertir*, y se reduce á poner los antecedentes en lugar de los consequentes, y los consequentes en lugar de los antecedentes.

La segunda se ha reducido á poner la segunda razon en lugar de la primera, y esta en lugar de la segunda: esto se llama *cambiar las razones*.

La tercera se llama *alternar*, se reduce á cambiar el lugar de los medios.

La quarta se llama *comparar componiendo*, y es comparar la suma de cada antecedente y consecuente, con el mismo antecedente ó consecuente.

La quinta se llama *comparar dividiendo*, y se reduce á comparar la diferencia entre el antecedente y consecuente de cada una de las razones con sus mismos antecedentes ó consequentes.

Es fácil convencerse, de que en todas las proporciones anteriores el producto de los medios es igual al de los extremos.

En efecto, en los números 1.º, 2.º y 3.º se evidencia claramente, que de *invertir*, *cambiar* y *alternar* las razones que forman una proporcion geométrica, resulta en todos estos casos, que quedan siempre por medios y extremos los factores que dan igual producto.

Con la misma evidencia se deduce, que la proporcion no

se altera comparando, componiendo ó dividiendo, ya sea con el antecedente ó con el consecuente. Para ello repárese que quando se hace la comparacion con el consecuente, es claro que si le añadimos o quitamos al valor del antecedente una vez el valor del consecuente, cabra el expresado consecuente en el nuevo antecedente una vez mas o una vez ménos que antes; y como que se practica lo mismo en la segunda razon, la qual, por la naturaleza de la proporcion (art. 98), es igual con la primera, las dos nuevas razones serán tambien iguales una con otra. Quando la comparacion se hace con el antecedente, se probará la proposicion del mismo modo, y para ello bastará imaginar que en la proporcion donde se hace esta mudanza, se ha puesto el antecedente de cada razon en lugar de su consecuente, y el consecuente en lugar del antecedente. Segun acabamos de probar puede executarse (núm. 1.º).

117. En una série qualquiera de razones geométricas iguales, la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consequentes, como un antecedente es á su consecuente, ó como la suma de un número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de consequentes correspondientes.

Sea, por exemplo, la serie de razones geométricas iguales $2 : 4 :: 3 : 6 :: 5 : 10$, &c. se tendrá primero $2 + 3 + 5 : 4 + 6 + 10 :: 3 : 6$, ó $2 : 4 :: 3 : 6$, ó en fin $5 : 10$.

Se tendrá en segundo lugar $2 + 3 + 5 : 4 + 6 + 10 :: 2 + 3 : 4 + 6$ porque en cada una de estas dos proporciones, el producto de los extremos es igual al de los medios.

Para convencernos de esta verdad de un modo general, llamemos a, b, c , &c. á los antecedentes de una serie de razones iguales, y e el exponente. Porque en toda razon geométrica los consequentes expresan siempre un divisor (art. 97); serán estos (art. 38) $\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, \frac{c}{e}$; luego se tendrá $a : \frac{a}{e} ::$

$b : \frac{b}{e} :: c : \frac{c}{e} ::$ &c. Si se quiere probar que $a + b + c +$ &c. :

$\frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} +$ &c. $\frac{a + b + c + \text{&c.}}{e} :: a : \frac{a}{e}$, es fácil

ver en efecto (art. 62) que los productos de medios y extremos son ambos $\frac{(a + b + c + \text{&c.}) \times a}{e}$. Como $a, b,$

c , e pueden representar quantos valores numéricos se quiera

independientemente los unos de los otros), dicha *série de razones* expresada con letras puede representar quantas proporciones geométricas pueden formarse con números; y por lo tanto, lo que convenga á dicha *série general* convenirá á todas las demás.

118. Si se multiplican ó si se parten los quatro términos de una proporción geométrica por los quatro términos de una ó de varias proporciones geométricas, antecedente por antecedente, conseqüente por conseqüente, los productos ó los quocientes que resulten estarán en proporción.

Las proporciones que resultan de dos, ó de mayor número de proporciones, multiplicadas antecedente por antecedente, y conseqüente por conseqüente, se llaman *proporciones compuestas*.

Llámanse *proporciones subcompuestas* las que resultan de la partición de dos, ó de mayor número de proporciones particiadas en los términos anteriormente expresados.

Exemplo 1.º Sean las dos proporciones $2 : 4 :: 3 : 6$, y $5 : 15 :: 7 : 21$; los productos correspondientes son 10, 60, 21, 126; cuyos quatro términos estan en proporción mediante á que $10 \times 126 = 60 \times 21 = 1260$; luego los productos expresados formarán una proporción, es decir, que se tiene $10 : 60 :: 21 : 126$.

Demostracion. Para convencerse de que esta propiedad se verificará en toda proporción compuesta; bastará recordar (art. 97) que todo antecedente representa el numerador del exponente de la razón á que pertenece, y todo conseqüente su denominador: es pues claro, que de multiplicar una razón por otra debe resultar una tercera, cuyo exponente tendrá por numerador el producto de los dos antecedentes, ó de los dos numeradores de los exponentes de las dos razones que la componen, y por denominador el producto de los dos conseqüentes ó de los denominadores de los dos exponentes correspondientes; lo que equivale á decir, que el exponente de la razón compuesta debe ser un quebrado igual al producto de los quebrados de los exponentes de las razones que la componen: pero como el exponente de la segunda razón de toda proporción geométrica es igual al exponente de la primera (art. 93), es evidente, que el exponente de la segunda razón de toda proporción compuesta, será igual al de la primera por ser producto producido por iguales factores; luego los quatro términos deberán estar en proporción.

Exemplo 2.º Sean las dos mismas proporciones $2 : 4 :: 3 : 6$, y $5 : 15 :: 7 : 21$, y párcense por orden los términos de la primera por los términos de la segunda; los quatro quocientes que resulten formarán la siguiente proporcion subcompuesta $\frac{2}{5} : \frac{4}{15} :: \frac{3}{7} : \frac{6}{21}$.

Demostracion. De lo dicho y de la demostracion anterior se infiere, que el exponente de toda razon subcompuesta es el quociente de los exponentes de las razones que la componen, y como estos factores de la particion son iguales en la segunda razon (art. 98), es claro que el exponente de la segunda razon de la proporcion subcompuesta resultará igual al de la primera, luego sus quatro términos estarán en proporcion.

119. Luego los quadrados, los cubos &c. de los términos en proporcion geométrica están tambien en proporcion geométrica; porque estas diferentes potestades no son sino los productos de los términos de la misma proporcion multiplicados por orden un cierto número de veces por sí mismos: así de ser $2 : 4 :: 3 : 6$, concluirémos,

1.º que $4 : 16 :: 9 : 36$.

2.º que $8 : 64 :: 27 : 216$.

120. Recíprocamente las raíces quadradas, cúbicas, &c. de los términos en proporcion geométrica, están tambien en proporcion geométrica: porque si las raíces no formasen una proporcion, mientras que sus potestades la forman, sería preciso deducir, que dos razones desiguales, multiplicadas por orden un cierto número de veces podrán dar por productos razones iguales, lo que es un absurdo.

Así, de tenerse $4 : 16 :: 9 : 36$, y $8 : 64 :: 27 : 216$, se concluirá que $2 : 4 :: 3 : 6$.

121. En toda progresion geométrica, un termino qualquiera es igual al primero partido por el valor del exponente elevado á una potestad indicada por el número de términos que preceden al propuesto.

Porque una progresion geométrica es una série de términos, que partidos consecutivamente el uno por el otro dan el mismo quociente (art. 100). Luego el segundo término de la progresion es igual al primero partido por el exponente de la progresion.

El tercer término de la progresion es igual al segundo partido por el exponente. Luego este tercer término es igual al primero partido por la segunda potestad del exponente.

El quarto término de la progresion es igual al tercero

partido por el exponente. Luego este quarto término es igual al primero partido por el exponente elevado á la tercera potencia, y así de los demás.

Igualmente podemos decir, que un término qualquiera de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por el exponente inverso de la progresion, elevado á una potencia indicada por el número de términos que preceden al propuesto. Porque partir por el exponente, es decir, por un quebrado, cuyo numerador es el antecedente, y el conseqüente su denominador, se reduce (art. 65 y 66) á multiplicar por el quebrado invertido, es decir, por un quebrado que tenga por numerador el conseqüente, y por denominador el antecedente.

Por exemplo, sea la progresion descendente $\div 729 : 243 : 81 : 27 : 9 : 3$, cuya razon $\frac{729}{243}$ vale 3. El quarto término 27 es igual al quociente del primero 729 partido por 27 cubo del exponente, ó al producto del primero 729 multiplicado por $\frac{1}{27}$ cubo inverso del exponente.

En la progresion ascendente $\div 2 : 8 : 32 : 128 : 512 : 2048$; en la qual $\frac{2}{8}$ es el exponente, ó $\frac{1}{4}$; el quarto término 128 es igual al quociente del primero 2 partido por el cubo de $\frac{1}{64}$ del exponente; ó al producto del primero 2 multiplicado por $\frac{64}{1}$ cubo inverso de la razon.

122. Luego en toda proporcion geométrica, cuyo primer termino es 1, un término qualquiera es igual al valor del exponente invertido, elevado á una potencia indicada por el número de términos que preceden á aquel de que se trata. Por exemplo, en la progresion $\div 1 : 3$, &c. cuyo exponente es $\frac{1}{3}$, el sexto término será $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 243$.

123. Sirve este principio para hallar entre dos términos dados un número qualquiera de medios geométricos.

Si se quiere, por exemplo, interponer entre 972 y 4, quatro medios proporcionales geométricos; es claro que la operacion se reduce á formar una progresion geométrica compuesta de seis términos, de los quales 972 es el primero, y 4 el sexto.

Heinos visto (art. 121) que este sexto término debe ser igual al primero partido por el exponente elevado á la quinta potencia; es claro que partiendo el primero 972 por el último 4, el quociente $\frac{972}{4} = 243$ será la quinta potencia del exponente de la progresion, cuya raíz quinta es 3, que será el exponente de la progresion. Determino ahora los medios

buscados. El primero será $\frac{972}{3} = 324$; el segundo $\frac{972}{3^2} = \frac{972}{9} = 108$; el tercero $\frac{972}{3^3} = \frac{972}{27} = 36$; el quatro $\frac{972}{3^4} = \frac{972}{81} = 12$. La progresion que estos quatro medios forman es $\therefore 972 : 324 : 108 : 36 : 12 : 4$.



DECIMATERCIA LECCION.

De la Regla de Tres.

124. El principio establecido (art. 110) encierra una regla, cuya utilidad le ha hecho dar por algunos el nombre de *regla de oro*, pero que con mas generalidad se llama *regla de tres*. La regla de tres se reduce á hallar un término de una proporcion, de la qual se conocen los otros tres términos.

Se distinguen dos reglas de tres, la regla de tres directa, y la regla de tres inversa.

La regla de tres es *directa*, quando los términos correspondientes van de *mayor á mayor*, ó de *menor á menor*. Es *inversa* quando los términos correspondientes van de *mayor á menor*, ó de *menor á mayor*.

Esto se entenderá mejor con exemplos.

Exemplo 1.º Seis jornaleros han hecho una obra de 8 pies en un cierto número de dias: se quiere saber, 18 jornaleros quanta obra harán en el mismo tiempo.

En primer lugar, advierto que los 8 pies de obra es el término correspondiente á 6 jornaleros, supuesto que es la obra que estos hicieron, así como 18 jornaleros es el dato correspondiente á la obra que se pretende averiguar harian en el mismo tiempo, esta obra debe aumentar en la misma razon que aumenta el número de jornaleros; luego los términos correspondientes van de mayor á mayor, luego la regla es directa, y se reduce á hallar el quarto término de esta proporcion 6 jorn. : 18 jorn. :: 8 pies : x pies, representando por la letra x el quarto término, mientras que no se halle su valor, que segun lo visto (art. 112) sera $x =$

$$\frac{18 \times 8}{6} = 24 \text{ pies.}$$

En efecto, si 6 jornaleros hacen 8 pies de obra, 18 jornaleros en el mismo tiempo harán tres veces 8 pies, esto es 24.

Para mayor facilidad se llamarán datos los dos términos homólogos, ó semejantes conocidos, y resultados los otros dos. Se llamará *primer dato* el correspondiente al resultado conocido, y *segundo dato* el correspondiente al resultado que se va á buscar. Así, en el exemplo anterior, 6 hombres y 18 hombres son los datos, por ser semejantes y conocidos: 8 pies de obra y x ó 24 pies de obra son los resultados, por ser homólogos y tratarse de hallar el valor de uno de ellos: el término x ó 24 pies de obra que se busca es el 2.º *resultado*; luego los 18 jornaleros que los han hecho será el 2.º *dato*: por un raciocinio igual 6 jornaleros será el *primer dato*, por corresponder al *primer resultado* 8 pies de obra: veremos á continuacion la utilidad que tiene saber distinguir la denominacion de cada término de la proporcion, pues vamos á estribar en esta distincion un método breve y clarísimo de plantear todo problema que recaiga en el caso de una regla de tres.

Para ello considérese que todas las resoluciones de problemas de reglas de tres directas, han de seguir la misma ley ó método que la del exemplo anterior; de que resulta, que atendiendo á la colocacion que á datos y resultados hemos dado en la proporcion, 6 hombres : 8 pies :: 18 hombres : x pies, podrá pues concluirse, 1.º que en toda regla de tres directa deberá decirse, que el *primer dato* es al *primer resultado*, como el *segundo dato* es al *segundo resultado*, ó *quarto término* que se busca. 2.º De lo establecido en la regla anterior, se deduce con evidencia que alternando, es decir, cambiando el lugar de los medios de dicha proporcion (art. 116 núm. 1.º), podremos tambien decir *primer dato* es al *segundo dato*, como el *primer resultado* es al *segundo* que se busca.

Exemplo 2.º Se quiere saber quantos pies de Burgos componen 360 pies de Paris ó de Rey, sabiendo que 6 pies de Paris componen 7 de Burgos.

La propuesta es una regla de tres directa; porque en efecto, así como una distancia de 6 pies de Paris aumenta hasta 7 medida en pies de Burgos, así deberá aumentar la distancia de 360 pies de Paris medida en pies de Burgos.

En segundo lugar, véase que el quarto término ó segundo resultado que se busca han de ser pies de Burgos; luego el término 7 pies de Burgos es el *primer resultado*,

como que 6 pies de Paris corresponden á 7 pies de Burgos, 6 pies de Paris será el primer dato; luego 360 pies de Paris será el segundo dato: hecha mentalmente esta distincion, apelenos á la regla anterior diciendo:

1. dato	1. resultado	2.º dato	2.º resultado
Ps. de Paris.	Ps. de Burgos.	Ps. de Paris.	Ps. de Burgos.
6	:	7	:
360	:	360	:
x			
=====			
71360	=====	2520	=====
6		6	

420 pies de Burgos, esto es, que 360 pies de Paris corresponden á 420 pies de Burgos.

125. Pasemos á la regla de tres inversa.

Exemplo 3.º Si 20 hombres han consumido un repuesto de víveres en 16 dias, en quantos dias lo consumirían 40 hombres?

Mientras mayor sea el número de hombres, menor será el número de dias que durarán los víveres: basta este raciocinio para venir en conocimiento (art. 124) de que la regla de tres es inversa, pues que los términos correspondientes van de mayor á menor: igualmente se conocerá que el quarto término, o segundo resultado que se busca, son los dias que durará el repuesto con 40 consumidores, luego el término homologo 16 dias será el primer resultado, y como estos 16 dias corresponden á 20 consumidores, será primer dato los 20 hombres: luego 40 hombres será el segundo dato.

Paso á resolver este problema planteando la proporcion segun tenemos demostrado debe practicarse en el caso de estar sujeta la propuesta al de la regla de tres directa (art. 124, núm. 2.º): digo pues 1.º dato 20 homb.: 2.º dato 40 homb.: 1.º resultado 16 dias: 2.º resultado x dias. Pero examinando esta proporcion descubro facilmente que no forman proporcion sus quatro términos así dispuestos, atendiendo al estado actual de la propuesta; en efecto, para conocerlo basta reparar que el quarto término x dias debe ser menor que 16 dias, puesto que el número de consumidores habiendo aumentado de 20 hasta 40, el número de dias que duren los víveres debe ser menor que 16; de consiguiente la segunda razon 16 : x será una razon de mayor desigualdad (art. 99), y como que la primera 20 : 40 es de menor desigualdad, resulta pues que no son razones iguales: luego no formarán proporcion (art. 93). De lo dicho se evidencia en primer lugar, que para la resolucion de los problemas sujetos á la regla de

tres inversa, no puede emplearse la regla prescripta para la de las directas. En segundo lugar es claro, que si se invierte el orden de la primera razon de la proporcion anterior, diciendo 40 : 20 tendríamos una razon de mayor desigualdad que de consiguiente formará proporcion con la segunda: luego diremos

$$40 \text{ hom.} : 20 \text{ hom.} :: 16 \text{ día} : x \text{ días} = \frac{20 \times 16}{40} = \frac{320}{40} = 8 \text{ días.}$$

1.^{er} dato 2.^o dato 1.^{er} result. 2.^o result.

En efecto, doble número de consumidores emplearán la mitad del tiempo en consumir los mismos víveres.

Como que este raciocinio tiene generalmente lugar en toda regla de tres inversa, de la colocacion que ha sido forzoso dar á los terminos de la proporcion anterior deduciremos por regla general, que para plantear la proporcion de una regla de tres inversa, se ha de decir, el segundo dato es al primer dato, como el primer resultado es al segundo que se le busca.

Ejemplo 4.^o Hallándose un Oficial con su destacamento asediado en un Fuerte, solo tiene víveres para 15 días dando racion entera; pero esperando ser socorrido dentro de 25 días, quiere disminuir la racion de modo que le lleguen hasta aquella época. Se pregunta ¿á quanto debe reducirse la racion diaria?

Es evidente, que supuesto que con el mismo repuesto de víveres se han de mantener el mismo número de individuos, ha de ser preciso disminuir la suministracion diaria, y que esta disminuirá en la misma razon que aumente el número de días que con aquel repuesto se han de mantener; luego la regla de tres es inversa; queda solo que indagar la denominacion de cada término de la propuesta, y de averiguado establecer la proporcion segun la regla que acabamos de asentar.

Representemos por la unidad la totalidad de víveres que se consumirían diariamente si se diese la racion entera: es evidente que x quarto término, ó segundo resultado que se busca, será menor que 1, supuesto que ha de disminuir la racion en razon del aumento de días: ademas 1 será el primer resultado, y su término correspondiente 15 días será el primer dato; luego días será el segundo dato: la proporcion será

$$25 \text{ días} : 15 \text{ días} :: 1 \text{ racion} : x \text{ racion} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Luego en lugar de dar racion entera, deberá solo dar $\frac{3}{5}$ de racion.

126. La regla de tres, sea directa sea inversa, puede ser *simple* ó *compuesta*: es simple quando como en los exemplos anteriores no hay sino tres términos conocidos: se llama compuesta quando hay mas de tres. El siguiente exemplo es una regla de tres *compuesta*.

Exemplo 5.º 5 hombres trabajando durante 8 dias han hecho 42 varas de obra; quanta obra harán 10 hombres trabajando durante 16 dias?

Esta regla de tres compuesta la reduzco á una regla de tres *simple*, diciendo, 5 hombres que trabajen durante 8 dias, hacen la misma obra que 8 veces 5 hombres, ó 40 hombres que trabajen durante un dia: asimismo 10 hombres que trabajen durante 16 dias, hacen la misma obra que 16 veces 10 hombres, ó 160 hombres que trabajen un dia. La operacion se reduce á esta: 40 hombres han hecho 42 varas de cierta obra; quantas harán 160 hombres en el mismo tiempo?

Es evidente que la regla es directa, y diré 40 : 160, ó

$$1 : 4 :: 42 \text{ v.}^s : x = \frac{42 \times 4}{1} = 168 \text{ v.}^s$$

Se pueden disponer los números como sigue:

h. ^s	h. ^s
5	10
8	16
h. ^s	h. ^s
producto 40	: 160

6 40 : 160 :: 42 v.^s : x = 168 v.^s

y se verá que la regla de tres es directa, diciendo: mientras mas obreros haiga, y mientras mas dias trabajen estos obreros, mas obra harán; porque doble número de obreros en doble tiempo deben hacer quadrupla obra; asi es, que 168 varas es quadruplo de 42 varas.

Exemplo 6.º Si 12 operarios en 10 dias trabajando 7 horas diarias han hecho cierta obra; quantos operarios se necesitarán para hacer la misma obra en 14 dias, trabajando estos 10 horas diarias?

Un trabajo de 10 dias y de 7 horas diarias, es la misma cosa que un trabajo de 7 veces 10 dias, ó de 70 dias y de una hora cada dia. Asimismo un trabajo de 14 dias y de 10 horas diarias, es la misma cosa que un trabajo de 10 veces 14 dias, ó de 140 dias y de una hora cada dia. Segun lo qual la propuesta se reduce á la siguiente:

Si 12 operarios trabajando 70 dias han hecho cierta obra;

quantos operarios serán necesarios para executar la misma en 410 dias?

Es evidente que esta última propuesta es una regla de tres simple é inversa, porque aumentando el número de dias debe disminuir el número de operarios: tambien es claro que por ser x quarto término ó segundo resultado que se busca, un número de operarios, el que 12 operarios es el primer resultado, y de esto se sigue que 70 dias será el primer dato, y 140 dias el segundo dato: luego la proporcion se planteará segun la regla prescripta (art. 125), esto es

Dias Dias Oper.

$$140 : 70 :: 12 : x = \frac{70 \times 12}{140} = \frac{840}{140} = 6.$$

Es decir, que con 6 operarios se podrá hacer la misma obra en 14 dias, trabajando 10 horas cada dia.

De lo dicho en este exemplo y en el anterior se deduce, que en la resolucion de los problemas sujetos á la regla de tres compuesta, el artificio consiste en *saberla reducir á simple*, tino que con una poca de meditacion y práctica se adquiere fácilmente.

DE LA REGLA DE COMPAÑIA.

127. La regla de Compañia es una operacion, por la qual se parte un número en partes proporcionales á números dados: sirve para repartir una pérdida ó una ganancia, proporcionalmente á lo que cada uno ha puesto.

Exemplo 1.º Dos comerciantes han formado una compañía; el uno ha puesto 100 pesos, y el otro 200 pesos: han ganado 1200 pesos. ¿Quanto le tocará á cada uno?

Pues que es evidente que cada ganancia particular debe ser proporcional á cada puesta particular, se tendrá esta proporcion.

La primera puesta: la primera ganancia :: la segunda puesta: la segunda ganancia.

Luego (art. 117) la suma de las puestas: la suma de las ganancias :: { La primera puesta: la primera ganancia.
La segunda puesta: la segunda ganancia.

Luego la regla de Compañia se reduce á una regla de tres, cuyo primer término es la suma de las puestas.

El segundo, la suma de las ganancias.

El tercero, cada puesta particular.

Se tendrá al quarto término la parte de cada uno de los socios. Será pues

			Pesos		Ps.		Ps.
Ps.	Ps.	{	100	: x	$\frac{100 \times 1200}{300}$	=	400
300	: 1200 ::		Ps.		Ps.		Ps.
			200	: y	$\frac{200 \times 1200}{300}$	=	800

Exemplo 2.º Tres Comerciantes han puesto en giro un fondo de 724 pesos: el uno puso 412 pesos, el otro 208 pesos, y el último 104 pesos: han perdido 1472 pesos: ¿quanto ha perdido cada uno? Hago esta regla de tres.

			Ps.		Ps.		Ps.		Rs.		Mrs.
Ps.	Ps.	{	412	: x	$\frac{412 \times 1472}{724}$	=	337.....	09...	29	$\frac{220}{724}$	
724	: 1472 ::		208	: y	$\frac{208 \times 1472}{724}$	=	422.....	13...	14	$\frac{386}{724}$	
			104	: z	$\frac{104 \times 1472}{724}$	=	211....	06...	24	$\frac{168}{724}$	

Se hace la prueba de esta especie de regla, tomando la suma de las ganancias particulares, ó de las perdidas particulares: esta suma debe igualar la ganancia ó pérdida total.

128. Para resolver las operaciones anteriores se han empleado reglas de tres simples; hay casos en los cuales es forzoso recurrir á la regla de tres compuesta.

Exemplo 3.º Tres sujetos han hecho una compañía; el primero ha puesto 100 pesos durante dos meses; el segundo 200 pesos durante 4 meses: el tercero 300 pesos durante 6 meses. Estos fondos han producido una ganancia de 8400 pesos, quanto le toca á cada uno?

Digo, 100 pesos durante 2 meses, deben producir la misma ganancia que 2 veces 100 pesos, ó 200 pesos durante un mes.

200 pesos durante 4 meses deben producir la misma ganancia que 4 veces 200 pesos, ó 800 pesos durante un mes.

300 pesos durante 6 meses deben producir la misma ganancia que 6 veces 300 pesos, ó 1800 pesos durante un mes.

Para la resolución de la operación propuesta, ejecútase como si la primera puesta fuese de 200 pesos, la segunda de 800 pesos, la tercera de 1800 pesos, y que las tres puestas haigan estado el mismo tiempo en giro.

Resta solo sumar 200 pesos, 800 pesos, 1800 pesos: la suma es de 2800 pesos, y se tendrá

			Pesos.
Ps.	Ps.	{	200 : x
2800	: 8400 ::		800 : y
			1800 : z
			$\frac{8400 \times 2}{28} = 600$ pesos. $\frac{8400 \times 8}{28} = 2400$ pesos. $\frac{8400 \times 18}{28} = 5400$ pesos. 8400 suma.

DE LA REGLA DE FALSA POSICION.

129. La regla de falsa posición sirve á hallar un número pedido por medio de un número supuesto, que se sujeta al orden de la operación propuesta.

Exemplo 1.º Qual es el número cuya mitad, tercia parte y quarta parte hacen 26?

Supóngase que este número sea el 12. La mitad de 12 es 6, el tercio de 12 es 4, la quarta parte de 12 es 3. Luego $6 + 4 + 3 = 13$; la suposición es falsa, pero servirá á hacer hallar el verdadero número que se busca, porque el número 13 se compone de las partes de 12, como 26 se compone de las partes del número buscado: luego el número supuesto es al número buscado como 13 es á 26; ó bien $13 : 26 :: 12 : x = \frac{26 \times 12}{13} = \frac{2 \times 12}{1} = 24$.

En efecto, la mitad, el tercio y el quarto de 24 = 26.

Exemplo 2.º Tres amigos se han reunido para hechar á la lotería: han ganado 20000 reales, que tratan de repartir proporcionalmente á lo que cada uno ha puesto: el segundo ha puesto una cantidad doble de la que puso el primero, y la que puso el tercero es doble de la suma que han puesto los otros dos. ¿Qual será la parte de cada uno?

Supóngase que el primero haya puesto 2 reales: la puesta del segundo será 4 reales, y la del tercero 12 reales. Tendré pues (art. 127)

	Rs.		Rs.
18 : 20000 ::	2 : x	$\frac{40000}{13}$	2222 $\frac{2}{9}$
	4 : y	$\frac{80000}{13}$	4444 $\frac{4}{9}$
	12 : z	$\frac{240000}{13}$	13333 $\frac{3}{9}$
			20000 suma.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

DECIMAQUARTA LECCION.

De los Logaritmos.

130. Los Logaritmos son unos números que están en proporcion aritmetica, y corresponden á otros números que entre si están en progresion geometrica; es decir, que se disponen dos progresiones, la una geometrica y la otra arit-

mética, sea qual fuese el exponente de ellas, de modo que los términos de la una correspondan á los términos de la otra; cada término de la progresion aritmética es el logaritmo del término de la progresion geométrica que le corresponde. Así, en las dos progresiones siguientes

$$\begin{array}{l} \div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : \&c. \\ \div 2 : 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : \&c. \end{array}$$

2 es el logaritmo de 1, 5 es el logaritmo de 3, 8 es el logaritmo de 9 &c.

131. Se ve claramente, que un número qualquiera puede tener una infinidad de logaritmos diferentes, pues que á los términos de una progresion geométrica se puede hacer corresponder los términos de una infinidad de progresiones aritméticas diferentes. Como que los que han calculado las Tablas de logaritmos han tenido una plena libertad de tomar las progresiones que les pareciese, eligieron la progresion geométrica décupla $\div 1 : 10 : 100 : \&c.$, y la progresion aritmética de los números naturales poniendo o por primer término de ella, en esta forma

$$\begin{array}{l} \text{números} \div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \&c. \\ \text{logaritmos} \div 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : \&c. \end{array}$$

de modo que 0 es el logaritmo de la unidad, 1 el logaritmo de 10, 2 el logaritmo de 100, y que en general el logaritmo de un número qualquiera expresado por 1 y seguido de qualquiera número de ceros, será de tantas unidades quantos ceros haiga en dicho número despues del 1. Así, el logaritmo de 100000 es 5, el de 1000000 es 6, &c.

En las Tablas de logaritmos, los logaritmos de 1, 10, 100, 1000, &c., es decir 1, 2, 3 &c., están seguidos de seis ó siete ceros escritos en forma decimal, de este modo 0'000000, 1'000000, 2'000000, 3'000000; pero esta forma no cambia el valor de estos logaritmos.

132. No basta tener los logaritmos de los números 1, 10, 100, 1000, 10000 &c., es preciso á mas tener los de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 11 99, fot &c.; de otro modo las ventajas que se sacarian se reducirian á bien poca cosa. Trátese pues de determinar los logaritmos de los números intermedios de la progresion geometrica decupla.

133. Para hallar estos logaritmos, supóngase que se inserten diez millones de medios geométricos entre todos los términos consecutivos de la progresión geométrica décupla, y que se inserten también diez millones de medios aritméticos entre todos los términos consecutivos de la progresión aritmética de los números naturales, de modo que los términos de cada una correspondan á los términos de la otra, cada uno con su correspondiente. Es evidente que los diez millones de medios aritméticos son los logaritmos de los diez millones de medios geométricos correspondientes. Pero, pues que los diez millones de medios geométricos por los cuales se asciende de 1 á 10 forman una graduación de términos extremadamente próximos los unos á los otros, es pues preciso que se hallen algunos de estos medios que sean iguales á 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, comprendidos entre 1 y 10, ó que difieran tan poco que puedan tomarse por dichos números. Luego se tendrán los logaritmos de estos mismos números, tomando los medios aritméticos que en la progresión aritmética ocupan el mismo lugar que los medios geométricos tomados por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ocupan en la progresión geométrica.

Con un procedimiento semejante se determinan los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c.

134. Es evidente que los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 en la progresión geométrica décupla deben ser mayores que 0, que es el logaritmo de la unidad, y menores que 1, que es el logaritmo de 10. Los logaritmos de estos números serán pues unas fracciones. Se han expresado estas fracciones por fracciones decimales.

135. No es menos evidente que los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100 se hallarán expresados por 1 y una fracción decimal: que los logaritmos de los números comprendidos entre 100 y 1000, se expresarán por 2 y un quebrado decimal, y así de los demás.

136. La cifra que se halla antes del punto que separa los enteros de los decimales se llama la característica del logaritmo; y la fracción decimal se llama mantisa. Así, la característica de los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 es 0; la de los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100 es 1, &c., como se ve en la Tabla siguiente.

Núm.s	Logaritmos.	Núm.s	Logaritmos.	Núm.s	Logaritmos.
1	0.000000	37	1.568252	73	1.863323
2	0.301030	38	1.579734	74	1.869232
3	0.477121	39	1.591065	75	1.875001
4	0.602060	40	1.602060	76	1.880814
5	0.698970	41	1.612784	77	1.886491
6	0.778151	42	1.623249	78	1.892095
7	0.845093	43	1.633403	79	1.897627
8	0.903090	44	1.643453	80	1.903090
9	0.954243	45	1.653213	81	1.908485
10	1.000000	46	1.662758	82	1.913814
11	1.041393	47	1.672093	83	1.919078
12	1.079181	48	1.681241	84	1.924279
13	1.113943	49	1.690195	85	1.929419
14	1.146128	50	1.698970	86	1.934498
15	1.176091	51	1.705770	87	1.939519
16	1.204120	52	1.713003	88	1.944463
17	1.230449	53	1.724276	89	1.949390
18	1.255273	54	1.732394	90	1.954243
19	1.278754	55	1.740363	91	1.959041
20	1.301030	56	1.748188	92	1.963788
21	1.322219	57	1.755875	93	1.968483
22	1.342423	58	1.763428	94	1.973128
23	1.361728	59	1.770852	95	1.977724
24	1.380211	60	1.778151	96	1.982271
25	1.397940	61	1.785330	97	1.986772
26	1.414973	62	1.792392	98	1.991226
27	1.431364	63	1.799341	99	1.995635
28	1.447158	64	1.806180	100	2.000000
29	1.462398	65	1.812913	101	2.004321
30	1.477121	66	1.819544	102	2.008600
31	1.491362	67	1.826075	103	2.012837
32	1.505150	68	1.832509	104	2.017033
33	1.518514	69	1.838849	105	2.021189
34	1.531479	70	1.845098	106	2.025306
35	1.544063	71	1.851258	107	2.029384
36	1.556303	72	1.857332	108	2.033424

Núm.s	Logaritmos.	Núm.s	Logaritmos.	Núm.s	Logaritmos.
109	2.037426	145	2.161308	181	2.257679
110	2.041593	146	2.164353	182	2.260071
111	2.045823	147	2.167317	183	2.262451
112	2.049218	148	2.170262	184	2.264818
113	2.053078	149	2.173186	185	2.267172
114	2.056905	150	2.176091	186	2.269513
115	2.060698	151	2.178977	187	2.271842
116	2.064458	152	2.181844	188	2.274158
117	2.068186	153	2.184691	189	2.276462
118	2.071882	154	2.187521	190	2.278754
119	2.075547	155	2.190332	191	2.281033
120	2.079181	156	2.193125	192	2.283301
121	2.082785	157	2.195900	193	2.285557
122	2.086360	158	2.198657	194	2.287802
123	2.089905	159	2.201397	195	2.290035
124	2.093422	160	2.204120	196	2.292256
125	2.096910	161	2.206826	197	2.294466
126	2.100371	162	2.209515	198	2.296665
127	2.103804	163	2.212188	199	2.298853
128	2.107210	164	2.214844	200	2.301030
129	2.110590	165	2.217484	201	2.303196
130	2.113943	166	2.220108	202	2.305351
131	2.117271	167	2.222716	203	2.307496
132	2.120574	168	2.225309	204	2.309630
133	2.123852	169	2.227887	205	2.311754
134	2.127105	170	2.230449	206	2.313867
135	2.130334	171	2.232996	207	2.315970
136	2.133539	172	2.235528	208	2.318063
137	2.136721	173	2.238046	209	2.320146
138	2.139879	174	2.240549	210	2.322219
139	2.143015	175	2.243038	211	2.324282
140	2.146128	176	2.245513	212	2.326336
141	2.149219	177	2.247973	213	2.328380
142	2.152288	178	2.250420	214	2.330414
143	2.155336	179	2.252853	215	2.332438
144	2.158362	180	2.255273	216	2.334454

En las Tablas solo se encuentran los números enteros, y sus logaritmos: hubiera sido inútil insertar en ellas los otros medios geométricos, y los medios aritméticos correspondientes.

137. El uso de los logaritmos se funda sobre las propiedades y la correspondencia de la progresion aritmética, y de la progresion geométrica. En efecto, 1.º En toda progresion aritmética que tiene á a por primer término, y de consiguiente en la progresion aritmética $(A) \div a$. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. un término cualquiera es igual al valor del exponente repetido tantas veces quantos terminos naga delante de el (art. 103). 2.º En toda progresion geométrica, cuyo primer término es la unidad, y de consiguiente en la progresion geométrica $(G) \div 1$. 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 &c. un término cualquiera es igual al valor del exponente elevado á una potestad indicada por el número de terminos que le preceden (art. 122).

Luego las dos progresiones A y G, hallándose dispuestas de modo que los términos de la una correspondan á los terminos de la otra, cada uno á cada uno; el exponente de la progresion aritmética se hallará repetido en un término cualquiera de esta progresion, precisamente el mismo número de veces que el valor del exponente de la progresion geométrica sea factor en el término correspondiente de esta última progresion.

138. Se sigue de lo dicho, que, si se suman dos términos cualquiera de la progresion aritmética, y que al mismo tiempo se multiplican los dos términos correspondientes de la progresion geométrica, la suma de los dos términos aritméticos, y el producto de los dos geométricos serán dos términos que se correspondrán en las dos progresiones.

Porque la suma es formada del valor del exponente tomado tantas veces quantas está tomado en uno y otro término de los que hemos sumado, y el producto es formado por el valor del exponente tomado tantas veces por factor, quantas lo estan en uno y otro término de los dos que hemos multiplicado; luego, pues que los dos términos sumados corresponden á los dos términos multiplicados, cada uno á su correspondiente, la suma de aquellos y el producto de estos serán dos términos que se correspondrán en las dos progresiones.

139. Luego la suma de los logaritmos de dos números corresponde al producto de estos números.

Recíprocamente, la diferencia entre los logaritmos de dos números corresponde al cociente de estos números. En efecto, el dividendo siendo igual al producto del divisor por el cociente, el logaritmo del dividendo será igual á la suma de los logaritmos del divisor y del cociente: luego el logaritmo del cociente es igual al exceso del logaritmo del dividendo sobre el logaritmo del divisor.

Véanse pues las multiplicaciones reducidas á sumas por medio de los logaritmos, y las particiones á restas.

140. Establecido lo dicho anteriormente, para elevar un número al cuadrado ó á la segunda potencia, se multiplica este número por sí mismo; luego, añadiendo consigo mismo el logaritmo de un número, ó lo que es lo mismo, *multiplicando por 2 el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo del cuadrado de este número.*

Para elevar un número al cubo ó á la tercera potestad, se multiplica este número dos veces seguidas por sí mismo. Luego, añadiendo dos veces consigo mismo el logaritmo de un número, ó lo que es lo mismo, *multiplicando por 3 el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo del cubo de este número.*

Por un raciocinio semejante hallaremos, que multiplicando por 4, 5, 6, &c. el logaritmo de un número, se tendrá el logaritmo de dicho número elevado á la quarta, quinta, sexta, &c. potencia; pero nótese que en todos los casos, la operacion se reduce á multiplicar el logaritmo del número por el exponente de la potestad. Luego por regla general diremos, *que multiplicando el logaritmo de un número por el exponente de una potestad qualquiera, se tendrá el logaritmo de este número elevado á dicha potestad.*

Recíprocamente, *partiendo por dos, ó tomando la mitad del logaritmo de un número, se tiene el logaritmo de la raíz cuadrada de este número; y tomando el tercio del logaritmo del número, se tiene el logaritmo de la raíz cúbica de este número; y con mas generalidad diremos, que partiendo el logaritmo de un número por el exponente de la potestad, cuya raíz se ha de extraer, se tiene el logaritmo de la raíz pedida de este número.*

Véanse pues las extracciones reducidas á particiones por medio de los logaritmos. Este es el metodo que anteriormente (art. 93) indicamos como el mas fácil, y breve de executar estas operaciones.

141. Problema. *Multiplicar un número entero por otro, por medio de los logaritmos.*

Ejemplo. Para multiplicar 24 por 8, tomo el logaritmo de 24, que es. 1.380211
á este logaritmo le añado el de 8, que es. 0.903090

La suma es. 2.283301
busco este logaritmo en las Tablas, y hallo que corresponde al número 192, que es efectivamente el producto de 24 por 8. (art. 139)

Otro. *Multiplicar un número por 10, 100, 1000 &c. por medio de los logaritmos.*

Si el número, por el qual se ha de multiplicar, fuese 10, 100, 1000, &c., bastaría para hallar el producto añadir 1, 2, 3, &c., unidades á la característica del logaritmo del multiplicando. Por exemplo, para multiplicar 49 por 10, añado 1 á la característica del logaritmo de 49, que es 1.690196, y la suma 2.690196 es el logaritmo del producto de 49 por 10, es decir de 490. Añadiendo 2 á la característica de 1.690196, se tendrá por suma 3.690196, y este logaritmo es el del número 4900, que es el producto de 49 por 100.

Es evidente que multiplicar 49 por 10 ó por 100, es hacer este número diez ó cien veces mayor. Luego segun que se añade 1 ó 2 unidades á la característica del logaritmo de 49, se hace corresponder este logaritmo á un número diez veces ó cien veces mayor; luego por este medio se tiene el logaritmo del verdadera producto.

142. Problema. *Partir un número entero por otro empleando los logaritmos.*

Ejemplo. Para partir 174 por 29, del logaritmo de 174, que es. 2.240549
resto el de 29, que es. 1.462398

la diferencia es. 0.778151
busco este logaritmo en las Tablas, y hallo que corresponde al número 6, que es en efecto el quociente de 174 partido por 29.

Otro. *Partir un número por 10, 100, &c. empleando los logaritmos.*

Pues que añadiendo 1, 2, 3, &c. unidades á la característica del logaritmo de un número, se tiene el logaritmo del producto de este número por 10, 100, 1000 &c., es claro que restando 1, 2, 3, &c. unidades á la característica

del *logaritmo de un número*, se tendrá el *logaritmo del quociente de este número partido por 10, 100, 1000, &c.*

143. Problema. *Elevar un número á la segunda potencia, ó quadrarlo por logaritmos.*

Si se trata de elevar un número como 13 al quadrado, busco en las Tablas el *logaritmo de este número*, que hallo ser 1.113913, que multiplico por 2, y tengo 2.227836, que en las Tablas corresponde al número 169, quadrado de 13 (art. 140.) Aunque en las Tablas el *logaritmo de 169*, es 2.227837, y no 2.227836 como hemos hallado al resultado, la diferencia de un millonésimo es tan despreciable, que en este y otro qualquiera caso semejante se deba mirar como nula.

Otro. *Elevar un número al cubo ó á la tercera potencia empleando los logaritmos.*

Del mismo modo, trátase ahora de elevar 5 al cubo; multiplico por 3 su *logaritmo* 0.698970: este producto es 2.096910, al qual en las Tablas corresponde el número 125, cubo de 5 (art. 140).

144. Problema. *Sacar ó extraer la raíz quadrada de un número por logaritmos.*

Para hallar la raíz quadrada de 144, busco en las Tablas el *logaritmo de 144*, que hallo ser 2.158362; tomo la mitad de este *logaritmo* y tengo el *logaritmo* 1.079181, al qual corresponde el número 12, raíz quadrada de 144. (art. 140).

Otro. *Extraer la raíz cúbica de un número operando con los logaritmos.*

Asimismo para extraer la raíz cúbica de 27, tomo el *térccio de su logaritmo* 1.431364. Este *térccio* es 0.477121, al qual corresponde el número 3, que es en efecto la raíz cúbica de 27, (art. 140).

145. Se deduce de todo lo que antecede, que para la resolución de una regla de tres por logaritmos es preciso si se busca un extremo, tomar la suma de los medios, y restar de ella el *logaritmo del extremo conocido*, el residuo será el *logaritmo del extremo que se busca*. Si se busca un medio, es preciso al contrario sumar los *logaritmos de los extremos*, y restar de esta suma el *logaritmo del medio conocido*: el residuo será el *logaritmo del medio que se busca*.

Ejemplo. Trátase de resolver por logaritmos la regla de tres pospuesta (art. 124 exemp. 1.^a), cuya proporción es 6 jorns. : 12 jorns. :: 8 pies : x.

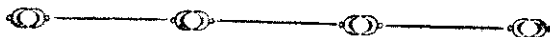
Logaritmo de 18.....1,255273

Logaritmo de 8.....0,903090

Suma.....2,158363

Logaritmo de 6.....0,778151

Diferencia es el logaritmo del
cuarto término x.....1,380212 = 24, re-
sultado idéntico al hallado anteriormente.



DECIMAQUINTA LECCION.

Continuacion de los logaritmos.

146. Algunas veces los números correspondientes á los logaritmos que quieren emplearse no se hallan en las Tablas (a). Es pues importante saber lo que debe hacerse en los diferentes casos para determinar los logaritmos de estos números.

Problema. Buscar el logaritmo de un número que sobrepuje á los comprendidos en los límites de las Tablas.

Propóngase, por exemplo, el determinar el logaritmo de 627849. Este número sobrepuja los límites de las Tablas mas extensas. Separo con el signo decimal las dos últimas cifras de la derecha, en esta forma 6278'49. El logaritmo de la parte de la izquierda 6278 se hallará en las Tablas ser 3,7978213. Tomo la diferencia que hay entre 3,7978213 logaritmo de 6278, y 3,7978905 logaritmo de 6279; esta diferencia es 0,0000692; luego digo, si por una unidad de diferencia entre los números 6279 y 6278 tengo 0,0000692 de diferencia entre sus logaritmos, por 0'49 de diferencia entre los números 6278'49 y 6278 ¿quanto me resultará de diferencia entre sus logaritmos?

(a) Se usará de las Tablas portátiles de Callet; y como la coordinacion de ellos necesita una explicacion particular, que en este lugar nos distraería de la ilacion del raciocinio, quedará pues á cargo del Profesor enterar á los alumnos en el uso de ellas.

Esta diferencia será pues el cuarto término de la regla de tres siguiente:

$1:0'49::0.0000692:x=0.0000339'08$, ó bien (despreciando las dos últimas cifras) $=0.0000339$. Si se añade este cuarto término á 3.7978213 logaritmo de $6278'$, la suma 3.7978552 será el logaritmo de $6278'49$. Luego añadiendo 2 á la característica, el logaritmo 5.7978552 que resulta será el logaritmo de 627849 , que es 100 veces mayor que $6278'49$.

Es evidente que si las cifras separadas á la derecha del número fuesen ceros, bastaría añadir á la característica del logaritmo de la parte de hacia la izquierda tantas unidades quantos ceros se hubiesen separado.

147. Problema 1.^o Hallar un logaritmo correspondiente á un número entero seguido de un quebrado.

Si se trata de un número entero unido á un quebrado tal como $9\frac{3}{4}$, reduzco el entero al denominador 4, lo que me dará $\frac{36}{4}$: este número añadido á $\frac{3}{4}$ hacen $\frac{39}{4}$. Así, $9\frac{3}{4}$ no es otra cosa sino el quociente de 39 partido por 4: luego el logaritmo de $9\frac{3}{4}$ es igual á la diferencia del logaritmo de 39, y del logaritmo de 4.

El logaritmo de 39..... $=1,591065$

El logaritmo de 4..... $=0,602060$

Su diferencia..... $0,989005$

Es el logaritmo de $9\frac{3}{4}$.

Si los términos del quebrado resultante no se hallasen comprendidos en los límites de las Tablas, se empezaría por determinar sus logaritmos, como acabamos de enseñar, después de lo qual se hallará la diferencia de estos logaritmos, como acabamos de decir.

Problema 2.^o Hallar el logaritmo de un número entero seguido de un quebrado decimal.

Puede acaecer que el entero esté unido á un quebrado decimal: en este caso se toma el logaritmo de este número como si no existiese el signo decimal: Después de haberlo hallado en las Tablas, ó del modo que hemos prescripto para quando pasen los límites de éstos, se le quitarán tantas unidades á la característica quantas cifras decimales habia en el número propuesto.

Exemplo. Se pide el logaritmo de $67'48$

Busco en las Tablas el logaritmo correspondiente á $67'48$, que hallo ser 3.8289176 ; y porque el número propuesto tiene dos cifras decimales, resto dos unidades á la característica del logaritmo hallado, y tendré 1.8289176 por logaritmo de $67'48$.

Es evidente que $67'48$ es un número 100 veces menor que 6748 ; y también que 1.8289176 es un logaritmo que corresponde á un número 100 veces menor que 6748 (art. 142 probl. 2.^o), esto es correspondiente á $67'48$.

148. Para poder tratar con alguna propiedad de los logaritmos *negativos*, de los quales vamos á dar una idea, es indispensable atender á las definiciones siguientes, y á las reglas que acerca de los signos daremos, tanto en el sumar como en el restar.

Las cantidades *negativas* no significan otra cosa, sino que estan tomadas en sentido opuesto á las *positivas*. De tal modo que si las positivas expresan una ganancia ó caudal, las negativas expresarán una pérdida ó deuda. Si las positivas expresan una distancia andada hácia la derecha, las negativas expresarán otra andada hácia la izquierda.

Es indiferente llamar positiva á qualesquiera clase de cantidad, siempre y quando que en el mismo cálculo se denominen negativas las tomadas en sentido contrario: por exemplo, si se establece que las distancias contadas hácia la izquierda sean positivas, deberán llamarse negativas las distancias contadas hácia la derecha.

149. Quando á una cantidad le antecede el signo $+$, dicha cantidad se llama *positiva*, y se le da el nombre de *negativa* quando le antecede el signo $-$. A toda cantidad que no lleva signo se entiende que le corresponde el signo $+$, que suele omitirse quando se escribe una cantidad sola, y en la primera de varias cantidades escritas las unas á continuación de otras. Por exemplo, $3+6$ es lo mismo que si dixeramos $+3+6$.

150. Es evidente que las cantidades *negativas* destruyen á las *positivas*, y estas á aquellas: por exemplo, si teniendo 3 pesos de caudal, y expresándolos por $+3$, tengo que pagar 3 pesos de una deuda, que en este caso expresaré por -3 , es claro que no me quedara nada ó cero, esto es, que $+3-3$ ú $3-3=0$. Asimismo, si teniendo 3 pesos de caudal tengo 5 de deuda, el resultado será $3-5=-2$ ú $+3-5=-2$. Del mismo modo si teniendo 8 pesos de caudal y una deuda de 15

pesos, si pago quedará aun debiendo 7 pesos, esto es, que $+8 - 15 = -7$.

Del raciocinio anterior deducirémos como consecuencias los correlarios siguientes.

1.º Si la cantidad ó conjunto de cantidades negativas fuese mayor que la cantidad ó conjunto de cantidades positivas, el resultado debe ser positivo.

2.º Si la cantidad ó conjunto de cantidades negativas fuese mayor que la cantidad ó conjunto de cantidades positivas, el resultado debe ser negativo.

151. Siguese de lo dicho que para sumar varias partidas aunque tengan diferentes signos, se ha de practicar lo siguiente.

1.º Escríbanse las partidas en seguida unas de otras, conservando cada una su signo; y para obtener el resultado.

2.º Súmense aparte las partidas positivas, y á la suma póngase el signo +.

3.º Súmense aparte las partidas negativas, y á dicha suma pongase el signo —.

4.º Réstese el valor numérico de la menor de estas dos sumas del valor numérico de la mayor, y al resultado se le pondrá el signo de la suma mayor.

Exemplo. Sean $+8, -9, +7, -4$ las partidas que se quieren sumar; escribo $8 - 9 + 7 - 4$, para deducir el resultado sumo 8 con 7, y la suma 15 lo será de las positivas; seguidamente sumo 9 con 4, y la suma 13 lo será de las negativas: resto esta suma de la primera, y á la diferencia 2 le pongo el signo mas.

Otro. Sean $10, -8, +4, -12$ las partidas que se han de sumar: escribo $10 - 8 + 4 - 12 = 14 - 20 = -6$.

152. En el restar toda cantidad muda de signo al pasar del subtraendo al residuo; es decir, que las cantidades positivas del subtraendo pasan al residuo con el signo —, y recíprocamente las cantidades negativas al pasar del subtraendo al residuo, toman el signo +.

Para convencerse de esta verdad, supongamos que de 10 se quiera restar 7, es evidente que el residuo será $10 - 7$ (art. 22), anteponiendo al 7 el signo menos: luego el número 7 que en el subtraendo tenía el signo positivo, pasó al residuo con signo negativo. Supongamos ahora que del minuendo 10 se quiere restar -7 ; para verificarlo, empiezo res-

tando de 10 el número 7, el residuo será según acabamos de ver $10 - 7$; pero como el subtraendo no es 7, sino $7 - 2$, es evidente que hasta ahora hemos empleado un subtraendo mayor que el propuesto en dos unidades: luego por esta misma razón el residuo $10 - 7$ resulta ser aun menor que el propuesto en dos unidades; de consiguiente para obtener el verdadero residuo, es necesario añadir al anterior 2 unidades: será pues el verdadero residuo $10 - 7 + 2 = 5$. Examinando ahora este resultado, se evidencia claramente que el número 7 que en el subtraendo tenía el signo positivo, ha pasado con signo negativo al residuo; y que el número 2 que en el subtraendo tenía el signo negativo, ha pasado al residuo con signo positivo: *que es lo que se pretendía demostrar.*

153. Problema. *Hallar el logaritmo de un quebrado propio.*

Exemplo. Trátese de hallar el logaritmo de un quebrado como $\frac{4}{5}$.

Reparo que el valor del quebrado es igual al quociente que resulta partiendo el numerador por el denominador (art. 54): *debiera pues para obtener el quociente restar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador* (art. 139): luego el logaritmo del denominador que es el subtraendo se le pondrá el signo — (art. 152). Pero como en los quebrados propios el denominador es mayor que el numerador, es evidente que el logaritmo del denominador que para pasarlo al residuo hemos hecho negativo, será mayor que el logaritmo positivo del numerador: luego *para obtener el resultado es necesario* (art. 150 núm. 2.º) *restar el logaritmo positivo ó del numerador del negativo perteneciente al denominador, y puesto que este último es el mayor, debe ser negativo el resultado:* así, el logaritmo de 5 siendo 0.693970
el de 4 siendo 0.602060

el residuo es. 0.096910

y este resto 0.096910 precedido por el signo — será el logaritmo buscado: el logaritmo de $\frac{4}{5}$ es pues — 0.096910.

De donde se deduce que el logaritmo de $\frac{4}{5}$ y el de $\frac{5}{4}$ no difieren sino por el signo —.

154. Problema. *Multiplicar un número por un quebrado propio empleando los logaritmos.*

Para multiplicar un número por un quebrado propio, se

restará el logaritmo del quebrado del logaritmo del multiplicando.

Porque acabamos de ver (art. 153) que el logaritmo de un quebrado propio es siempre negativo: luego la operación se reducirá (art. 139) á sumar un logaritmo positivo con otro logaritmo negativo, y para hallar el resultado (art. 151) habrá que restar el logaritmo negativo ó del quebrado del logaritmo positivo ó del entero; *que es lo que se pretendia demostrar.*

Exemplo. Se quiere multiplicar el número 25 por $\frac{4}{5}$, empleando los logaritmos.

Hallo en las Tablas que el logaritmo de 25 es 1.396940, y acabamos de ver en el problema anterior que el logaritmo de $\frac{4}{5}$ es —0.096910; luego lo único que resta que hacer (art. 151 núm. 4) será restar este último logaritmo del primero, y la diferencia 1.301030 que buscada en las Tablas como logaritmo corresponde al número 20, es el resultado de la multiplicación de 25 por $\frac{4}{5}$.

155. Problema. Partir un número por un quebrado propio operando con los logaritmos.

Para partir un número por un quebrado propio, se sumará el logaritmo del quebrado con el logaritmo del dividendo.

Porque, si para partir por logaritmos es preciso restar del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor (art. 139), como que en este caso el logaritmo del divisor es negativo (art. 153), será necesario al pasar dicho logaritmo del sustractando al residuo mudarle el signo (art. 152); quedará pues positivo, y por lo tanto habrá que sumarle con el logaritmo del multiplicando: *que es lo que se pretendia demostrar.*

Exemplo. Se quiere partir el número 12 por $\frac{4}{5}$.

Sumo el logaritmo de 12 que hallo ser 1.079181 con el logaritmo de $\frac{4}{5}$ que hemos visto era —0.096910, y la suma 1.176091 la busco en las Tablas, y hallo corresponde al número 15, que es el resultado de la partición de 12 por $\frac{4}{5}$.

156. Problema. Hallar el logaritmo correspondiente á un quebrado decimal.

Para hallar el logaritmo de un quebrado decimal, se buscará su logaritmo como si fuese un entero: despues de haberlo hallado se restará de un número de unidades igual al número de cifras decimales que hay en el quebrado, y el residuo antepuesto al signo —, será el logaritmo del quebrado decimal.

Por exemplo, para tener el logaritmo de 0.009, tomo el de 9 que es 0.954243; lo resto de 3.000000, que es el lo-

garitmo de 1000, y antepongo el signo — á la diferencia 2.045757. Así, el logaritmo de 0'009 es — 2.045757. En efecto, $0'009 = \frac{9}{1000}$; pero para hallar el logaritmo de $\frac{9}{1000}$ se necesita restar el logaritmo de 9 del de 1000, y dar al residuo el signo — (art. 153); luego el logaritmo de 0'009 es — 2.045757.

157. Problema. *Buscar á que número pertenece un logaritmo que sobrepuje á los comprendidos en los límites de las Tablas.*

Examinemos ahora que método debemos seguir para determinar á que número pertenece un logaritmo que no se encuentra en las Tablas, ya sea porque sobrepuja los límites de las Tablas, sea porque quadre entre dos logaritmos de las Tablas.

Desde luego, si se tiene un logaritmo que sobrepuje los límites de las Tablas, se disminuirá su característica de tantas unidades, quantas sea necesario para que este logaritmo así disminuido no sobrepuje los límites de las Tablas.

Entonces de dos cosas la una; ó se hallarán en las Tablas todas las cifras de este logaritmo, ó no se hallarán sino las primeras cifras de este mismo logaritmo.

Si todas las cifras del logaritmo se hallan en las Tablas, el número buscado será aquel que en las Tablas se halle al lado del logaritmo propuesto; pero habrá que añadir á continuacion de este número tantos ceros, quantas unidades se restaron á la característica del logaritmo propuesto.

Por exemplo, restando 4 unidades de la característica del logaritmo 6.225309, veo que el logaritmo restante 2.225309 se halla por entero en las Tablas, y que el número que le corresponde es 168. Tendré pues el número buscado, añadiendo quatro ceros á continuacion de 168; así 6.225309 es el logaritmo del número 1680000.

158. Si no se encuentran en las tablas sino las primeras cifras del logaritmo, se procederá como en el exemplo que á continuacion vamos á poner. Se trata de hallar á que número pertenece el logaritmo 5.8604125.

Despues de haber quitado dos unidades á la característica, hallo que el logaritmo restante 3.8604125 quadra entre 7251 y 7252. Será pues el número buscado mayor que 7251 y menor que 7252. Luego será igual á 7251, mas una fraccion que es necesario determinar.

Para hallar esta fraccion, averiguo la diferencia de 3.8604125 logaritmo restante, y de 3.8603979 logaritmo de 7251, que hallaré ser 0,0000146.

Asimismo busco la diferencia de los logaritmos de los números 7252 y 7251. Esta diferencia es 0,00000599.

En fin hago esta proporcion; $0,000599 : 0,0000146 :: 1 : x$ ó $599 : 146 :: 1 : x$ $\frac{146}{599}$. Asi el quebrado $\frac{146}{599}$ es lo que debemos añadir al número 7251 para tener el número correspondiente al logaritmo 3,8604125. Este número es pues 7251 $\frac{146}{599}$; y como el logaritmo propuesto 3,8604125 pertenece á un número 100 veces mayor, el número buscado será el número 7251 $\frac{146}{599}$ hecho 100 veces mayor, esto es, 725100 $\frac{14600}{599}$, y verificando la particion de 14600 por 599 tendré por quociente 24 $\frac{224}{599}$; luego el número propuesto será 725124 $\frac{224}{599}$ = 725124'37 reduciendo el quebrado á decimales.

Quando el logaritmo propuesto quadra entre dos de las Tablas, este caso se reduce al anterior, de consiguiente se executará la misma operacion, con solo la diferencia de lo que no habrá que añadir ceros á continuacion del número hallado, pues que no ha habido que restar unidades á la característica del logaritmo propuesto.

159. Problema. Hallar á que número corresponde un logaritmo, que sin exceder los límites de las Tablas no se halla exactamente en ellas.

Si el logaritmo, cuyo número se quiere determinar, cayese entre dos logaritmos correspondientes á números muy pequeños, convendría aumentar su característica, de una, de dos, ó tres unidades, si la extension de la Tabla lo permite: se tomará el número mas próximo correspondiente á dicho logaritmo, y se separarán con el signo decimal tantas cifras en dicho número, quantas unidades se aumentaron á la característica del logaritmo.

Por exemplo, si tenemos el logaritmo 0,9038543 que quadra entre el de 8 y el de 9, añdo tres unidades á su característica, busco á que número corresponde en las Tablas el logaritmo resultante 3,9038543. Quadra entre 8014 y 8015: Tomo 8014 que es el número, cuyo logaritmo se aproxima mas á corresponder al logaritmo 3,9038543. El número buscado es pues 8'014, aproximado hasta un milésimo de diferencia.

Si se requiriese una mayor aproximacion se recurrirá al método indicado (núm. 138).

160. Problema. Hallar á que número corresponde un logaritmo negativo.

En fin, para saber á que fraccion corresponde un logaritmo negativo, tal como —1,255273, se puede buscar á que

número corresponde el logaritmo positivo 1.255273. Este número es 18: de consiguiente — 1.255273 corresponde al quebrado $\frac{1}{18}$.

Pero como no acaece siempre que el logaritmo se halle por entero en las Tablas; para conseguir en decimales el valor muy aproximado del quebrado que corresponde á un logaritmo negativo, es preciso restar este logaritmo de 1, 2, 3, 4, &c. unidades, buscar á que número pertenece el logaritmo resultante, y separar con el signo decimal sobre la derecha del número hallado tantas cifras, quantas unidades hay en el número, del qual se ha restado el logaritmo propuesto.

Quiérese por exemplo saber á que fraccion corresponde el logaritmo negativo — 1.390883, resto este logaritmo de 5 de este modo:

$$\begin{array}{r} 5.000000 \\ 1.390883 \\ \hline 3.609117 \end{array}$$

El logaritmo restante cae entre los de 4065 y 4066. El quebrado buscado es pues 0,04066.

Se deduce fácilmente, porque en este exemplo se han separado cinco decimales. La razon es, porque si al logaritmo negativo propuesto se le quieren sumar 5 unidades, que es el logaritmo de 100000 (art. 131), dicha suma será 5 — 1.390883 (art. 151 núm. 1.º), y reduciendo 3.609117 (art. 151 núm. 4). Es evidente que por haber agregado 5 unidades al logaritmo propuesto, el número correspondiente al logaritmo resultante 3.609117 buscado en las Tablas, dará un número 100000 veces mayor que el que debe corresponder al logaritmo propuesto. Este número buscado en las Tablas es 4066, el que partido por 100000 nos da 0.04066 al quociente (art. 71), cuyo quociente será el número correspondiente al logaritmo negativo propuesto.

161. Para abreviar los cálculos en ciertos casos, se cambian las restas de los logaritmos en sumas, lo que se hace por medio de los complementos aritméticos. Llámense complementos aritméticos la diferencia que se halla entre un número y la unidad seguida de tantos ceros, quantas cifras hay en dicho número.

Problema. Hallar el complemento aritmético de un número.

Se halla fácilmente el complemento aritmético de un número, por exemplo, de 3728 reparando las cifras que hay que sumar desde la izquierda hacia la derecha del número 3728, para que cada suma sea de 9, excepto la última de la derecha que debe importar 10. Así el complemento aritmético de 3728 es 6272.

Es fácil convencerse que por este método se hallará la misma diferencia que por el dado (art. 24).

162. El emplear los complementos aritméticos de los números ó de los logaritmos, tiene en la práctica la ventaja de que entrando por suma las partidas negativas ó que se han de restar, se envuelven todas las partidas en una misma y única operación.

Es decir, que si las partidas son $+244, +176, -84, -56$, y se quiere hallar el resultado de ellas al tenor del artículo 151, tendríamos que sumar por un lado 244 con 176, y por otro 84 con 56; en seguida de la primera suma 420 restar la segunda 140, y al residuo ponerle el signo +; porque la suma de las partidas positivas es mayor que la de las negativas (art. 151 núm. 4.º).

Pero empleando los complementos aritméticos operaré del modo siguiente: tomo el complemento aritmético de todas las partidas negativas, esto es, de todas las cantidades que se han de restar: el de 84 es 16, el de 56 es 44, y estos dos complementos los sumo con las partidas positivas, el resultado será 480, del que resto dos centenas, y el residuo 280 será el verdadero resultado.

Este último modo de operar está fundado en el siguiente raciocinio, que para mayor claridad aplicaremos al exemplo siguiente. Supongamos que las dos partidas positivas 244 reales y 176 reales ó 420 reales suma de ellas, represente un caudal, y las partidas negativas 84 y 56 dos deudas contraídas que se quieren satisfacer: para verificarlo, en vez de restar estas partidas de la suma de las positivas (art. 151 núm. 4), supóngase que pido 100 reales prestados y que con ellos pago la primera deuda 84 reales, con esto queda satisfecha dicha primera deuda, y me queda un remanente de 16 reales á mi favor: para satisfacer la segunda deuda de 56 reales, pido otros cien reales prestados, y de verificado queda á mi favor un segundo remanente de 44 reales. Sumo estos dos remanentes con las partidas positivas, el resultado será 480: es evidente que con esto quedan satisfechas las deudas.

propuestas, pero tambien es cierto que tengo que satisfacer los empréstitos que para pagarlos he pedido; para lo qual del resultado anterior 480 reales, resto dos centenas de reales, y queda por resultado final 280 reales, hallado por medio de una sola operacion.

En efecto, si en lugar de restar por exemplo la primera deuda 84, se suma su complemento aritmetico 16, es lo mismo que sumar 100—84. Luego es evidente que sumar el complemento aritmetico de un número, es restar este número aumentando el resultado de la unidad seguida de tantos ceros quantas cifras hay en dicho número: luego si despues de sumar dicho complemento se resta la expresada unidad, queda el número restado, y desvanecido el aumento del resultado.

163. Problema. *Restar un logaritmo de otro empleando el complemento aritmético del logaritmo subtraendo.*

Si se trata en una operacion de restar un logaritmo, en lugar de restarlo se sumará su complemento aritmetico, y se restará una decena á la caracteristica de la suma resultante.

Es fácil comprehender la razon de este procedimiento observando que si, por exemplo, en lugar de restar del logaritmo 1.176091 el logaritmo 0.845098, se añade el complemento aritmético de 0.845098, es la misma cosa que si se añadiese 10.000000—0.845098; luego en este caso se hace al mismo tiempo la resta propuesta, y se aumenta la caracteristica del resultado en una decena; luego se debe restar una decena de 10.330993, que es la suma del logaritmo de 1.176091, añadido con 9.154902, complemento aritmetico de 0.845098. El resultado 0.330993 es el mismo que el que se tendria tomando el exceso del logaritmo

1.176091
sobre el logaritmo..... 0.845098

como se ve aquí..... 0.330993

164. Problema. *Hallar el quarto término de una proporcion geométrica, empleando los logaritmos, y complemento aritmético de él del primer término.*

Apliquemos á un exemplo lo que acabamos de decir. Supongamos que se pide el quarto término de la proporcion 6 : 18 :: 8 : x (art. 145); operando por logaritmos; hay que sacar la suma de los logaritmos medios, y de ella restar el logaritmo del extremo conocido (art. 145). En lugar de res-

tar el logaritmo del extremo conocido sumaré su complemento aritmético como sigue:

Log. de 18.....	1,255273
Log. de 8.....	0,903090
Complemento aritmet. del logarit. de 6....	9,221849
Suma.....	11,380212

Borro una decena á la característica, y hallo que el logaritmo 1.380212 corresponde en las Tablas al número 24; resultado idéntico al hallado (art. 145).

Este ejemplo basta para hacer comprender el uso de los complementos aritméticos, y su utilidad para abreviar los cálculos cambiando las restas en sumas.

165. Finalmente vamos á dar algunos ejemplos del modo de hallar el cuarto término de una proporción geométrica, resueltos por logaritmos, para familiarizar á los alumnos en las operaciones en que estos están mezclados con los negativos.

Ejemplo 1.º Si $6 : 17 :: \frac{4}{3} : x$.

Hemos visto (art. 145) que para hallar el valor de este cuarto término operando por logaritmos, es necesario sumar los logaritmos de los dos términos medios, y de la suma restar el de los extremos. Pero en este caso el logaritmo del medio $\frac{4}{3}$ es negativo, luego para sumarlo habrá que restarlo del de 17 (art. 150), y del residuo se restará el logaritmo de 6.

Log. de 17.....	1.230449
Log. de $\frac{4}{3}$ (art. 153).....	0.096910
Residuo.....	1.133539
Log. de 6.....	0.778151

Residuo..... 0.355388 = 2'257
(art. 159) valor del cuarto término pedido.

Ejemplo 2.º Si $\frac{4}{3} : 6 :: 17 : x$.

En este caso el logaritmo del primer término es negativo, de consiguiente para restarlo habrá que mudarle el signo (art. 152): luego entra por suma en la operación, puesto que los logaritmos de los medios son también positivos: será pues:

Log. de 6.....	0.778151
Log. de 17.....	1.230449
Log. de $\frac{2}{3}$ con signo contrario....	0.096910

Suma..... 2.105510 = 127'5
(art. 159) valor del quarto término pedido.

Exemplo 3.º Si $\frac{4}{5} : 6 :: \frac{2}{3} : x$.

En este caso, como que el logaríto de uno de los medios es positivo, y el otro negativo, para hallar el resultado habrá que restar el uno del otro como en el exemplo 1.º, y al resultado habrá que sumarle el logaríto del primer término (art. 152) como en el exemplo 2.º, por ser negativo el logaríto de dicho primer término.

Log. de 6.....	0.778151
Log. de $\frac{4}{5}$	0.096910

Resultado (art. 150).....	0.681241
Log. de $\frac{2}{3}$ con signo contrario....	0.176091

Suma..... 0.857332 = 7'2
(art. 159) valor del quarto término pedido.

Exemplo 4.º Si $6 : \frac{4}{5} :: \frac{2}{3} : x$.

Los logaríto de los medios son negativos, luego la suma de ellos será negativa: el logaríto del extremo es positivo, luego para restarlo entrará en la operacion con signo negativo, y por lo tanto habrá que sumarlo con la suma de los medios que es negativa, luego el resultado será tambien un logaríto negativo.

Log. de $\frac{4}{5}$	0.096910
Log. de $\frac{2}{3}$	0.176091
Log. de 6 con signo contrario.....	0.778151

Suma..... 1.051152 = 0'08339
(art. 160) valor del quarto término pedido.

Exemplo 5.º Si $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} :: \frac{3}{7} : x$.

Los tres logaríto de este exemplo son negativos, puesto que pertenecen á quebrados propios: la suma de los lo-

garítmos de los medios será negativa, y el logarítmico del extremo puesto que se ha de restar tomará al entrar en la operación el signo positivo; de consiguiente se restará de dicha suma si es menor que ella, ó bien de él se restará la expresada suma: quedando en el primer caso un resultado negativo, y en el segundo quedará positivo.

Log. de $\frac{2}{3}$	—	0. 176091
Log. de $\frac{3}{7}$	—	0. 367977
Suma.....	—	0. 544068
Log. de $\frac{4}{5}$ con signo contrario—	+	0. 096910
Residuo.....	—	0. 447158 = 0'35714
(art. 160) valor del quarto término pedido.		

FIN DE ESTE TRATADO.

ÍNDICE

de las Lecciones contenidas en este Tratado.

	Páginas.
I. Leccion. Definiciones preliminares.....	5.
De la numeracion.....	ibid.
II. Leccion. Del sumar números enteros.....	8.
III. Leccion. Del restar números enteros.....	10.
IV. Leccion. De la Multiplicacion de números enteros.....	12.
V. Leccion. Del partir enteros.....	18.
VI. Leccion. De los Quebrados ó Fracciones en general, y modo de operar con ellos.....	26.
VII. Leccion. De los Quebrados Decimales, y modo de operar con ellos.....	37.
VIII. Leccion. De los números denominados y de los Complexôs, y modo de sumarlos y el de restarlos.....	42.
IX. Leccion. De la Multiplicacion de los números Denominados y Complexôs.....	49.
X. Leccion. De la particion de los números Com- plexôs.....	53.
De las potestades y sus Raíces.....	57.
XI. Leccion. De las Razones, Proporciones y Pro- gresiones en general.....	59.
Propiedades de las Proporciones y Pro- gresiones aritméticas.....	61.
XII. Leccion. Propiedades de las Proporciones y Pro- gresiones geométricas.....	65.
XIII. Leccion. De la Regla de Tres.....	72.
De la Regla de Compañía.....	77.
De la Regla de Falsa Posicion.....	79.
XIV. Leccion. De los Logarítmos, y modo de operar con ellos.....	ibid.
XV. Leccion. Continuacion de la Leccion anterior.....	88.

NOTA.

El primer cuidado de los alumnos será enmendar las siguientes erratas en el Tratado, ó señalar el lugar en que se hallen con una indicación arbitraria, por exemplo una estrella *.

ERRATAS.

<u>Página.</u>	<u>Línea.</u>	<u>Dice.</u>	<u>Debe decir.</u>
4	27	obtiene,	obtiene.
6	36	(art. 5),	(art. 8, núm. 3.º).
15	20	operado,	operando.
17	21	3 sargentos primeros,	1 sargento primero.
id.	36	34. También se usa,	36. También se usa.
31	27	son $\frac{1}{9}$ y $\frac{2}{3}$,	son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.
id.	41	(art. 57),	(art. 58, núm. 2.º).
36	30	cálculo,	cálculo.
id.	37	será $\frac{3 \times 2}{4 \times 3}$,	será $\frac{3 \times 2}{4 \times 3}$.
37	11	de los números,	de los números.
40	17	la primera,	la primera.
id.	32	ejemplo 6'017x0'04,	ejemplo 0'017x0'04.
44	22	610 pulgadas,	612 pulgadas.
id.	39	propuesto,	propuesto.
45	25	2 $\frac{28}{36}$ varas,	2 $\frac{28}{36}$ varas.
id.	41	de la derecha,	de la izquierda.
46	21	vale en pie,	vale un pie.
48	21	es...2...1...21...15,	es...2...2...21...15.
49	24	producto 220...16...09,	producto 220...12...09.
id.	30	producto 352,	producto 348.
id.	31	y el resultado 356.	y el resultado 352.
id.	33	con un resto de 16,	con un resto de 12.
51	21	$\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$,	$\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{4}$ o $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.
55	17	3114 reales,	3118 reales.
56	16	producto...4872...12...02,	producto...4873.00.00.
id.	18	$\frac{4072 \text{ Ps. } 12 \text{ Rs. } 02 \text{ mrs.}}{48}$	$\frac{4873 \text{ Ps.}}{45}$
id.	20	$\frac{4372 \text{ Ps. } 07 \text{ Ps. } 02 \text{ Mrs.}}{1172}$	$\frac{4873 \text{ Ps.}}{1172}$
id.	23	4872 12 02,	4873.
id.	24	384 Ps. = 5760 Rs.	385 Ps. = 5775 Rs.

<u>Página.</u>	<u>Línea.</u>	<u>Dice.</u>	<u>Debe decir.</u>
56	25	5772,	5775.
id.	26	162 Rs. = 5508 Mrs.	165 Rs. = 5610 Mrs.
id.	27	5510,	5610.
60	5	si,	asi.
66	34	extremos iguales al de los medios,	extremos iguale al de los medios.
67	5	ó que $24 : 36 :: 2 : 3$,	ó que $24 : 36 :: 2 : 3$.
71	21	por el cubo de $\frac{1}{64}$ del exponente,	por $\frac{1}{64}$ cubo del exponente.
73	29 y 30	(art. 116, núm. 1.º),	(art. 116, núm. 3.º).
75	7	1.º dato 2.º dato,	2.º dato 1.º dato.
77	12	$x = \frac{70 \times 21}{140}$	$x = \frac{70 \times 12}{140}$
78	10	$x = \frac{412 \times 1472}{724}$	$x = \frac{412 \times 1472}{724}$
id.	11	$422...13...14 \frac{386}{724}$	$422...13...14 \frac{386}{724}$
79	14	$\frac{212}{13} = 24,$	$\frac{312}{13} = 24.$
id.	32	proporcion,	progresion.
80	21	logarítmos $\div 2. 1. 2. \&c.$	logarítmos $\div 0. 1. 2. \&c.$
82	5	Log. 4 = 0.602020,	Log. 4 = 0.602060.
86	6	2.282301,	2.283301
91	42	restar — 72,	restar 7 — 2.
92	22	el logarítmo,	al logarítmo.
93	11	es 1.396940,	es 1.397940



028
08