



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

ANÁLISE TOPOLÓXICA DE DATOS E SISTEMAS DINÁMICOS

Ramón Rodríguez López de la Vega

2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

ANÁLISE TOPOLÓXICA DE DATOS E SISTEMAS DINÁMICOS

Ramón Rodríguez López de la Vega

Xullo, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Análise topolóxica de datos e sistemas dinámicos
Breve descrición do contido
Logo de introducirmos na análise topolóxica de datos e nos sistemas dinámicos, o noso obxectivo será combinar ambas disciplinas para obtermos un resultado usando homoloxía persistente para dar unha cota inferior á entropía dun sistema dinámico.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Análise de datos topolóxica	1
1.1. Homoloxía	1
1.1.1. Homoloxía simplicial	3
1.1.2. Homoloxía singular	6
1.2. Persistencia	9
1.2.1. Persistencia para a homoloxía simplicial	13
1.2.2. Persistencia e homoloxía singular	14
1.3. Estabilidade	15
2. Dinámica topolóxica	21
2.1. Introducion e exemplos salientables	21
2.2. Entropía topolóxica	28
2.3. Cálculo da entropía nalgúns exemplos	35
2.3.1. Entropía das rotacións no círculo	35
2.3.2. Entropía da aplicación z^2 no círculo	36
2.3.3. Entropía para os difeomorfismos de Anosov lineares	38
2.3.4. Entropía para o shift	38

3. Homoloxía persistente e entropía	41
3.1. Conxectura de Shub	41
3.2. Versión persistente da conxectura de Shub	43
3.3. Algoritmo para o cálculo do raio espectral persistente	50
A. Entropía dun diagrama de persistencia	53
Bibliografía	57

Resumo

Neste traballo veremos os principais conceptos da análise de datos topolóxicos: estudaremos varias teorías de homoloxía e veremos a idea de persistencia. Ademais, introduciremonos nos sistemas dinámicos e estudaremos en profundidade a entropía. Finalmente, analizaremos a conxectura de Shub, que relaciona a entropía do sistema co raio espectral entre grupos de homoloxía e buscaremos unha versión do resultado usando a homoloxía persistente.

Abstract

In this work, we will explore the main concepts of topological data analysis (TDA): we will study various homology theories and examine the idea of persistence. Additionally, we will introduce dynamical systems and study entropy in depth. Finally, we will analyze Shub's conjecture, which relates the entropy of the system to the spectral radius between homology groups, and we will seek a version of the result using persistent homology.

Introdución

A análise topolóxica de datos é unha disciplina recente (situamos o seu nacemento a principios dos 2000) que está ganando moita atención nos últimos anos. O obxectivo desta rama é poder extraer información topolóxica de grandes conxuntos de datos, que serán tratados como nubes de puntos. As motivacións, por outra banda, son diversas: que non se coñeza ben o espazo ao que pertencen os datos, que o uso dunha métrica particular non estea xustificada... O procedemento estándar é o seguinte: constrúese unha familia de complexos a partir da nube de puntos en función dun parámetro; logo avalíase a homoloxía na familia e, en función da persistencia, i.e., o tempo de vida, decídese que características topolóxicas serán consideradas parte do “ruído topolóxico” e cales serán da nosa interese.

Noutra liña, o estudo dos sistemas dinámicos e a teoría ergódica é un campo moito máis consolidado e verdadeiramente amplo. Nós centrarémonos no estudo dun destacado invariante por conxugación topolóxica: a entropía. A entropía dun sistema dinámico mide, dalgún xeito, a velocidade coa que se bifurcan e separan órbitas que nun momento no tempo estaban próximas. Para definila formalmente podemos chegar por camiños moi diferentes. Nós verémolo via recubrimentos e via conxuntos separados e xeradores.

No estudo da entropía, Shub conxecturou que a entropía dun sistema dinámico estaba limitada inferiormente polo logaritmo do raio espectral do morfismo entre grupos de homoloxía inducido polo sistema dinámico. A conxectura resultou ser falsa tal como foi proposta, pero certa baixo certas hipóteses. Deste xeito, ademais de encontrarse unha cota moi interesante, realaciónáonse as áreas da topoloxía alxébrica coa de sistemas dinámicos. O que procuraremos nós neste traballo será levar esa conexión alén diso e encontrar un resultado similar que use as ferramentas da homoloxía persistente.

Capítulo 1

Análise de datos topolóxica

Nesta primeira sección trataremos de introducir os conceptos e resultados principais da área de análise de datos topolóxica.

1.1. Homoloxía

A homoloxía é unha ferramenta para encontrar información topolóxica dun espazo. A definición de homoloxía no sentido moderno foi proposta por Poincaré no 1895 en 'Analysis Situs', fito que marca o nacemento da área da Topoloxía alxébrica. A partir de entón, fóronse proponendo distintas teorías de homoloxía que diferencian en que obxectos e espazos consideran (por exemplo símplexes, símplexes singulares, celdas,...). Eilenberg e Steenrod, a mediados do século pasado, estableceron o que era unha teoría de homoloxía (ver [10]). Definímolos a continuación, pero primeiro introducimos un par de definicións necesarias. De acordo con [17],

Definición 1.1. Unha categoría \mathcal{C} consiste en:

- Unha clase de obxectos $\text{Ob}(\mathcal{C})$,
- Para cada $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, un conxunto $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de morfismos,
- Unha operación de composición:

$$\circ: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

que cumpre:

1. Asociatividade: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
2. Identidades: Para cada A , existe $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que $f \circ 1_A = f$ e $1_B \circ f = f$ para todo $f: A \rightarrow B$.

Observación 1.2. Exemplos de categoría son os grupos cos homomorfismos; espazos vectoriais coas aplicacións lineares; espazos topolóxicos con funcións continuas; os complexos simpliciais cos mapas simpliciais, que veremos máis adiante; ...

Definición 1.3. Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorías consiste en:

- Unha función $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$
- Para cada $A, B \in \mathcal{C}$, unha función

$$F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

que cumpre:

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$ (preserva identidades)
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (preserva composicións)

Xa estamos preparados para definir teoría de homoloxía.

Definición 1.4. Unha teoría de homoloxía é un funtor

$$H_* : \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{GrAb}^{\mathbb{Z}}$$

que asigna:

- A cada par de espazos (X, A) (onde $A \subseteq X$) unha familia de grupos abelianos $\{H_n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.
- A cada aplicación continua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, homomorfismos $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.
- Homomorfismos de conexión $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$.

que satistai os axiomas de Eilenberg-Steenrod, i.e.:

1. Functorialidade: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ e $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X)}$.
2. Exactitude: Para $i : A \hookrightarrow X$ e $j : X \hookrightarrow (X, A)$, existe sucesión exacta longa:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

3. Invarianza Homotópica: Se $f \simeq g$, entón $f_* = g_*$.
4. Escisión: Para $U \subseteq \text{int}(A)$, a inclusión induce isomorfismos:

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A)$$

$$5. \text{ Dimensión: } H_n(\{\text{punto}\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Observación 1.5. Analogamente poderíamos falar de teorías de cohomoloxía, pero non é do noso interese neste traballo.

Máis adiante particularizaremos para as teorías simplicial e singular posto que son as máis coñecidas e porque son as que nos van ser útiles. Non obstante, agora continuamos con construcións xerais comúns, seguindo as liñas de [19].

Definición 1.6. O complexo de cadeas (C, ∂) sobre un anel \mathbb{A} é a colección de \mathbb{A} -módulos C_k e mapas \mathbb{A} -lineares $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ tales que $\partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$ para todo k .

Observación 1.7. A partir de agora imporemos a condición de que \mathbb{A} teña que ser un corpo, e consecuentemente, os \mathbb{A} -módulos serán espazos vectoriais.

Definición 1.8. Para cada dimensión $k \geq 0$, o k -ésimo grupo de homoloxía do complexo de cadeas (C, ∂) é o espazo vectorial cociente

$$H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) = \ker \partial_k / \text{im} \partial_{k+1} \quad (1.1)$$

Dicimos que os elementos pertencentes á mesma clase de homoloxía son homólogos. Ademais, dicímoslle k -ésimo número de Betti á dimensión do k -ésimo grupo de homoloxía, i.e.:

$$\beta_k(C_\bullet, \partial_\bullet) = \dim H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \quad (1.2)$$

Observación 1.9. Aos elementos de $\ker \partial_k$ chámamolos k -ciclos, mentres que aos elementos de $\text{im} \partial_{k+1}$ chámamolos fronteiras. Deste xeito, informalmente dicimos que a homoloxía é “ciclos módulo fronteiras”, i.e., os ciclos que non son fronteira de nada.

1.1.1. Homoloxía simplicial

Definición 1.10. Un complexo simplicial nun conxunto V é unha colección K de subconxuntos de V tal que os elementos de V (chamados vértices) están en K e se τ pertence a K e σ está comprendido en τ entón σ está en K . Dicimos, tamén, que σ é unha cara de τ . Os elementos de K chamaranse símlices.

Definición 1.11. Sexan K, L dous complexos simpliciais. Dicimos que $f : K \rightarrow L$ é un mapa simplicial se $f(\sigma) \in L$ para todo $\sigma \in K$.

Definición 1.12. A dimensión dun símlice σ é a cardinalidade do símlice menos 1. Se un símlice ten dimensión k diremos que é un k -símlice. A dimensión dun complexo será a dimensión máxima dos seus símlices.

Definición 1.13. Un subconxunto L dun complexo simplicial K é un subcomplexo se é un complexo simplicial

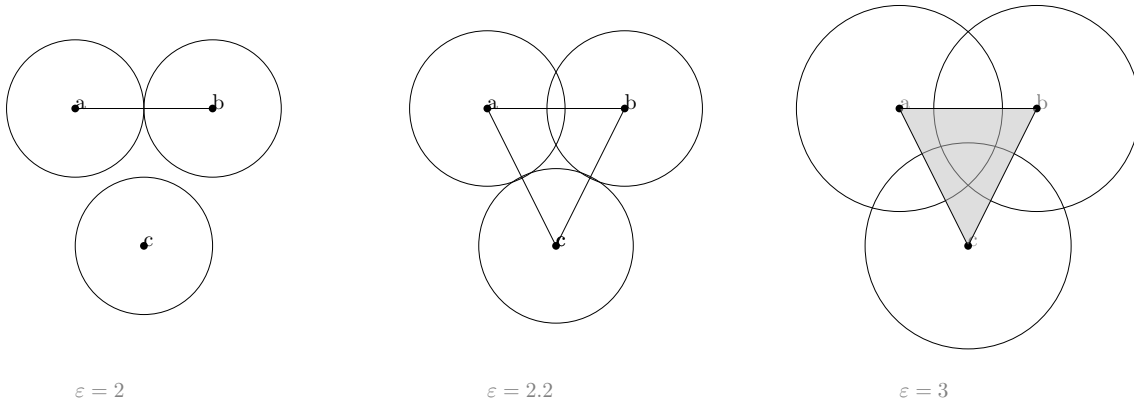
Definición 1.14. Sexa K un complexo simplicial. Unha filtración sobre K é unha secuencia de subcomplexos simpliciais:

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K \quad (1.3)$$

Definición 1.15. Sexa (M, d) un espazo métrico finito. A **filtración de Vietoris-Rips** de M é unha familia crecente de complexos simpliciais $VR_\varepsilon(M, d)$, na que un conxunto $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset M$ é un símplice k -dimensional en $VR_\varepsilon(M, d)$ se e só se $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ para todo i, j .

Definición 1.16. Sexa M un subconxunto finito do espazo métrico (Z, d) . A filtración de Čech de M con respecto a Z defínese como a familia crecente de complexos simpliciais C_ε na que un subconxunto $\{x_1, \dots, x_k\} \subset M$ forma un símplice se existir un $z \in Z$ tal que $d(x_i, z) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$

Exemplo 1.17. Consideremos o conxunto $M = \{a, b, c\}$ como na figura. Observamos que para $\varepsilon = 2$ $\varepsilon = 3$, os complexos de Vietoris Rips e o de Čech coinciden, non obstante, para $\varepsilon = 2,2$ $[a, b, c]$ é un símplice de Vietoris-Rips, pero non de Čech. Na imaxe móstrase a filtración de Čech para os valores do parámetro antes mencionados.



Definición 1.18. A subdivisión baricéntrica dun complexo simplicial K é un novo complexo simplicial $Sd K$ definido do seguinte xeito: para cada dimensión $i \geq 0$, os símplices i -dimensionais están formados por todas as secuencias

$$\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{i-1} < \sigma_i$$

de símplices (distintos) en K ordenados pola relación de “ser cara de”.

Definición 1.19. A característica de Euler dun complexo simplicial K é o enteiro obtido da suma en k con signos alternados do numero de k -símplices, i.e.:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim(K)} (-1)^i \cdot \#K_i \quad (1.4)$$

Onde $\#K_i$ indica o número de i -símplices de K .

No anexo I, chegamos a ver que a característica de Euler é invariante por homoloxía en A.6. Para ver que isto implica a invarianza por homotopías referímonos a [12]

Definición 1.20. Unha orientación de σ é unha clase de equivalencia de ordenacións dos seus vértices, onde dúas ordenacións son equivalentes se están relacionadas por unha permutación par.

Proposición 1.21. *Cada símplice ten exactamente dúas orientacións.*

Demostración. Dada unha ordeación inicial (v_0, v_1, \dots, v_n) , calquera outra ordenación corresponde a unha permutación $\pi \in S_{n+1}$ (o grupo simétrico de $n + 1$ elementos). Dúas permutacións π_1 e π_2 definen a mesma orientación se e só se $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ é unha permutación par. Isto divide o conxunto de todas as ordenacións en dúas clases:

- Orientación positiva: Permutacións pares (signatura $+1$). Estas preservarán a orientación
- Orientación negativa: Permutacións impares (signatura -1). Estas mudarán a orientación.

Sexa S_{n+1} grupo simétrico e A_{n+1} o subgrupo alternante (permutacións pares). O grupo cociente S_{n+1}/A_{n+1} ten dúas clases :

$$S_{n+1} = A_{n+1} \cup \tau A_{n+1}, \quad \text{onde } \tau \text{ é calquera transposición (permutación impar).}$$

Polo tanto, hai só dúas clases de equivalencia posibles para as ordenacións dos vértices. Como resultado, un n -símplice ten exactamente dúas orientacións: unha correspondente ás permutacións pares e outra ás impares. \square

Observación 1.22. Se fixamos unha orde nos vértices do complexo simplicial, inducimos unha orientación nos símplices.

Observación 1.23. A partir de agora, consideraremos os símplices $\sigma = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ como conxuntos ordeados.

Definición 1.24. Sexa σ un símplice orientado. A fronteira alxébrica de σ é a combinación linear

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_{-i} \tag{1.5}$$

onde σ_{-i} é a i -ésima cara de $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ definida como $\sigma_{-i} = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k]$.

Definición 1.25. Para cada dimensión $k \geq 0$ o k -ésimo grupo de cadeas do complexo simplicial K sobre un corpo \mathbb{F} é o espazo vectorial $C_k(K)$ xerado o considerar os k -símplices de K como elementos da base. Os elementos chámanse k -cadeas.

Definición 1.26. Para cada dimensión $k \geq 0$, o k -ésimo operador fronteira do complexo simplicial K é o mapa \mathbb{F} -linear $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ que asigna a cada elemento σ da base a súa fronteira alxébrica.

En particular $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$ é un complexo de cadeas. En particular, podemos definir, como fixemos en 1.8 un grupo de homoloxía simplicial. Se consideramos un complexo simplicial finito pode ser interpretada como unha teoría de homoloxía relaxando a definición 1.4, como se proba en [9].

Notación 1.27. Cando falamos do complexo de cadeas $(C_\bullet(K), \partial_\bullet)$, podemos escribir directamente $H_k(K)$ e $\beta(K)$.

1.1.2. Homoloxía singular

A homoloxía simplicial ten a vantaxe de que é sinxela conceptualmente e sobre todo computacionalmente. De feito, na práctica é a máis usada porque moitas veces non coñecemos o espazo topolóxico en cuestión e só coñecemos unha nube de puntos, ademais mesmo cando coñecemos o espazo, é máis sinxelo traballar cunha mostraxe de puntos. Non obstante, non constitúe unha teoría de homoloxía xa que non traballa con espazos topolóxicos, senon con complexos simpliciais. Para solventar este problema introducimos a teoría de homoloxía singular seguindo o exposto en [10] e [12]

Definición 1.28. Chamamos realización xeométrica dun símlice $\tau = \{x_0, \dots, x_k\} \subset K$ é a combinación convexa dos seus vértices mergullados como elementos dun conxunto linearmente independente en \mathbb{R}^n , sendo $n \geq k + 1$, i.e.:

$$|\tau| = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i x_i \mid t_i \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\} \quad (1.6)$$

Os t_i chámanse coordenadas baricéntricas. Do mesmo xeito a realización xeométrica dun complexo simplicial é simplemente a o conxunto das realizacións xeométricas dos símlices K cos vértices mergullados como elementos dun conxunto linearmente independente en \mathbb{R}^m con m o número de vértices de K .

Observación 1.29. En moitos manuais traballan con símlices entendidos como símlices xeométricos (a realización xeométrica dun símlice).

Definición 1.30. Un símlice singular nun espazo topolóxico X é unha aplicación continua dunha realización dun n -símlice de \mathbb{R}^{n+1} en X , i.e., $\sigma : |\tau| \rightarrow X$.

Definición 1.31. Sexa X un espazo topolóxico arbitrario. Definimos $C_k(X)$ como o grupo xerado por todos os k -símlices singulares en X . Definimos tamén o operador fronteira $\partial_k : C_{n+1}(X) \rightarrow$

$C_k(X)$ analogamente ao que faciamos para homoloxía simplicial, i.e.:

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \sigma_{-i} \quad (1.7)$$

onde σ é agora un símplice singular.

Definición 1.32. Definimos agora o grupo de homoloxía singular, tamén igual que o faciamos para a simplicial, i.e., é o espazo vectorial cociente

$$H_k(C, \partial) = \ker \partial_k / \text{im} \partial_{k+1} \quad (1.8)$$

Referímonos a [12] para ver que a homoloxía singular é unha teoría de homoloxía. Referímonos ao capítulo III de [10] para comprobar a equivalencia entre todas as teorías de homoloxía (e coa homoloxía simplicial) para espazos topolóxicos triangulables (i.e., existe un complexo simplicial finito K tal que a súa realización xeométrica é homeomorfa a X).

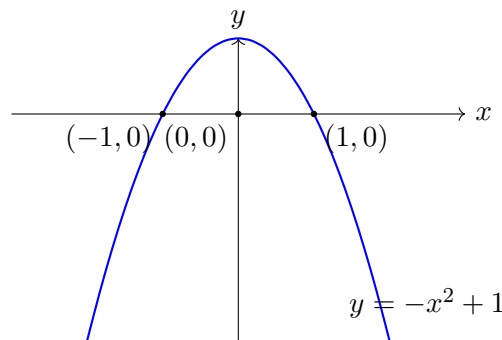
Na práctica, moitas veces a filtración vén dada por subniveis dunha función (por exemplo unha función altura). Para probar despois a estabilidade dos diagramas de persistencia, traballar desta maneira seranos cómodo, polo que imos ver uns poucos resultados primeiro. Nesta sección guiámonos polo artigo [8] e [6]

Sexa X un espazo topolóxico arbitrario e f unha función real continua en X

Definición 1.33. A filtración de X inducida por f é a familia

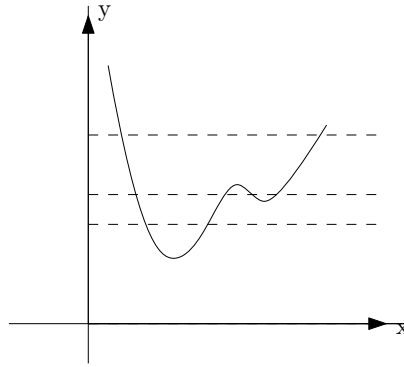
$$\mathcal{F}_f := (f^{-1}(-\infty, a))_{a \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 1.34. Consideremos $X = \mathbb{R}$ e $f = -x^2 + 1$.



Nesta figura $\mathcal{F}_f := (f^{-1}(-\infty, a))_{a \in \mathbb{R}} = (-\infty, -\frac{\sqrt{2a}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2a}}{2}, +\infty)$

Exemplo 1.35. Imos ver outro exemplo agora dado pola seguinte figura:



Observamos que \mathcal{F}_{t_1} é un intervalo, \mathcal{F}_{t_2} é a unión de dous e \mathcal{F}_{t_1} volve ser só un.

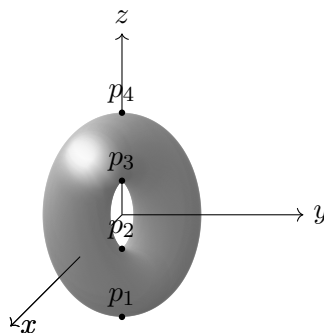
Definición 1.36. Un punto crítico k -homolóxico é un número $a \in \mathbb{R}$ tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o morfismo $H_k(f^{-1}(-\infty, a - \varepsilon]) \rightarrow H_k(f^{-1}(-\infty, a + \varepsilon])$ inducido pola inclusión non é un isomorfismo. Do mesmo xeito, dicimos que a función f é tame se ten un número finito de puntos críticos k -homolóxicos e os grupos de homoloxía $H_k(f^{-1}(-\infty, a])$ teñen dimensión finita para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Observación 1.37. Se a función f que induce a filtración no módulo de persistencia é tame, o o módulo de persistencia será tame no sentido de 1.54, e os valores críticos ser'an os mesmos.

Observación 1.38. As funcións de Morse, en particular son funcións tame.

Exemplo 1.39. Consideremos un toro mergullado en \mathbb{R}^3 coa función altura $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Esta función téñ catro puntos críticos (p_1, p_2, p_3, p_4) (ver imaxe) p_1 e p_4 son mínimo e máximo, respectivamente e p_2 e p_3 son puntos de sela.

A colección $(f^{-1}(-\infty, t))_{t \in \mathbb{R}}$ conforma unha filtración para o toro. Observamos que $f^{-1}(-\infty, t) = \emptyset$ para todo $t < f^{-1}(p_1)$. Para $f^{-1}(p_1) < t < f^{-1}(p_2)$ temos que $f^{-1}(-\infty, t)$ é homeomorfo a un disco. Para $f^{-1}(p_2) < t < f^{-1}(p_3)$ temos que $f^{-1}(-\infty, t)$ é homeomorfo a un cilindro. Para $f^{-1}(p_3) < t < f^{-1}(p_4)$ temos que $f^{-1}(-\infty, t)$ é un “toro furado”. No resto dos casos é directamente o toro. Observamos, así, como cambian os grupos de homoloxía ao avanzar o parámetro t .



Lema 1.40 (Lema do valor crítico). *Se un intervalo pechado $[x, y]$ non contén ningún punto crítico homolóxico de ningún $k \in \mathbb{Z}$ entón $H_k i : H_k(f^{-1}(-\infty, x]) \rightarrow H_k(f^{-1}(-\infty, y])$, onde $i : (f^{-1}(-\infty, x]) \rightarrow (f^{-1}(-\infty, y])$ é a inclusión, é un isomorfismo para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Notación 1.41. Escribiremos $H_k i_x^y$ para referirmonos a $H_k i : H_k(f^{-1}(-\infty, x]) \rightarrow H_k(f^{-1}(-\infty, y])$

Demostración. Sexa $m = (x + y)/2$, temos $H_k i_x^y = H_k i_m^y \circ H_k i_x^m$. Se $H_k i_x^y$ non é un isomorfismo, entón ou $H_k i_m^y$ ou $H_k i_x^m$ tampouco o é. Por indución obtemos unha secuencia decrecente de intervalos cuxa intersección é un valor crítico homolóxico en $[x, y]$ contradicindo a nosa suposición. \square

1.2. Persistencia

Continuamos agora introducindo a noción de persistencia, guiándonos polo exposto en [19]

Definición 1.42. Un módulo de persistencia \mathbb{N} -indexado sobre un corpo \mathbb{F} é unha secuencia (V_i, a_i) con $i \in \mathbb{N}$ de \mathbb{F} -espazos vectoriais e aplicacións lineares, como no seguinte diagrama:

$$V_0 \xrightarrow{a_0} V_1 \xrightarrow{a_1} \dots$$

Dicimos, ademais, que $(V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de tipo finito se a dimensión de todos os espazos vectoriais é finita e os mapas a_i son isomorfismos a partir dun certo índice.

Definición 1.43. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ definimos o grupo de persistencia entre i e j dun módulo de persistencia $(V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como o subespazo de V_j dado por:

$$P_{i,j}((V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \text{im}(a_{i \rightarrow j}) = \text{im}(a_{j-1} \circ \dots \circ a_i)$$

Observación 1.44. $P_{i,j}((V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}})$ está contido en $P_{i',j}((V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}})$ se $i' \geq i$.

Definición 1.45. Dicimos que $v \in V_i$ nace en i se v non está na imaxe de a_{i-1} . Analogamente, dicimos que $v \in V_i$ morre en j se v non está na imaxe de a_{j+1} . Se v nace en i e morre en j dicimos que ten intervalo de vida $I = (i, j)$.

Definición 1.46. Un morfismo entre módulos de persistencia $(V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(W_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é unha familia de mapas lineares $\phi_k : V_k \rightarrow W_k$ tales que $b_i \circ \phi_i = \phi_{i+1} \circ a_i$ para todo $i \geq 0$.

Observación 1.47. O par conformado por módulos de persistencia e os morfismos entre módulos de persistencia conforma unha categoría.

Definición 1.48. A suma directa de dous módulos de persistencia $(V_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(W_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é o novo módulo de persistencia $(V \oplus W, a \oplus b)$ na que os espazos vectoriais son a suma directa de cada espazo vectorial e $a_i \oplus b_i$ ten representación matricial

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$$

Proposición 1.49. *Sexa (I_\bullet, c_\bullet) un módulo de persistencia non nulo, \mathbb{N} -indexado, sobre un corpo \mathbb{F} . Supoñamos que existen índices $i \leq j$ con $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que:*

$$\dim I_p = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq p \leq j \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases} \quad e \quad \text{rank}(c_p : I_p \rightarrow I_{p+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq p < j \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Entón, (I_\bullet, c_\bullet) é indescompoñible.

Demostración. Sexa $(I_\bullet, c_\bullet) \simeq (V_\bullet, a_\bullet) \oplus (W_\bullet, b_\bullet)$ unha descomposición en suma directa calquera. Para cada $p \in \{i, i+1, \dots, j\}$ temos que $\dim V_p + \dim W_p = \dim I_p = 1$; sen perda de xeralidade supoñamos que $\dim V_i = 1$ e $\dim W_i = 0$. Isto forza que o mapa b_i sexa nulo, e por definición temos o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{F} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{F} \oplus 0 & \xrightarrow{A} & V_{i+1} \oplus W_{i+1} \end{array}$$

onde A é a matriz $\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e todas as frechas etiquetadas por \simeq son isomorfismos de espazos vectoriais. Séguese que a_i ten rango 1, entón $\dim V_{i+1} = 1$ e $\dim W_{i+1} = 0$. Procedendo por indución en i , vemos que (V_\bullet, a_\bullet) é isomorfo a (I_\bullet, c_\bullet) mentres que (W_\bullet, b_\bullet) é trivial; polo tanto, (I_\bullet, c_\bullet) é indescompoñible, como queríamos. \square

Definición 1.50. Para cada par $0 \leq i \leq j \leq \infty$ (con $i \neq \infty$), o módulo de intervalo \mathbb{N} -indexado $(I_\bullet^{i,j}, c_\bullet^{i,j})$ sobre \mathbb{F} defínese como

$$I_p^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{se } i \leq p \leq j \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases} \quad e \quad c_p^{i,j} = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{F}} & \text{se } i \leq p < j \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Onde $\text{id}_{\mathbb{F}}$ denota a identidade de $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$.

Teorema 1.51 (Teorema de estrutura). *Para calquera módulo de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) de tipo finito indexado por \mathbb{N} sobre un corpo \mathbb{F} , existe un conxunto*

$$\text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet) \subset \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\} : 0 \leq i < j\}$$

chamado código de barras (ou 'Barcode' en inglés) e unha función multiplicidade

$$\mu : \text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet) \rightarrow \mathbb{N}$$

tal que existe unha descomposición en suma directa:

$$(V_\bullet, a_\bullet) \simeq \bigoplus_{(i,j) \in \text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet)} (I_\bullet^{i,j}, c_\bullet^{i,j})^{\mu(i,j)}$$

Esta descomposición é única (excepto isomorfismo de módulos de persistencia).

Demostración. Como (V_\bullet, a_\bullet) é de tipo finito, existe $n \geq 0$ tal que cada $a_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ é un isomorfismo para $i \geq n$. Consideramos o espazo vectorial $V = \bigoplus_i V_i$ e o operador de desprazamento $t : V \rightarrow V$ definido por

$$t(v) = (0, a_0(v_0), a_1(v_1), \dots, a_{n-1}(v_{n-1}), 0, \dots)$$

Entón V adquire estrutura de módulo sobre o anel $\mathbb{F}[t]$. Como $\mathbb{F}[t]$ é un dominio de ideais principais, calquera módulo de tipo finito sobre el descomponse como suma directa de parte libre e parte torsion:

$$V \simeq F \oplus T$$

A parte libre F é suma directa de copias de $\mathbb{F}[t]$, cada unha isomorfa a un módulo de intervalo do tipo $(I_\bullet^{i,\infty}, c_\bullet^{i,\infty})$. A parte torsion T descomponse en módulos do tipo $\mathbb{F}[t]/(t^{j-i})$, que son isomorfos a intervalos finitos $(I_\bullet^{i,j}, c_\bullet^{i,j})$.

As multiplicidades de cada intervalo aparecen na función μ , e a descomposición completa está dada pola suma directa dos módulos de intervalo correspondentes. Isto conclúe a demostración. \square

Observación 1.52. O barcode é un multiconxunto. Un multiconxunto é un par (P, m) onde P é un conxunto e $m : P \rightarrow \mathbb{N}$ é unha función multiplicidade, pero, informalmente, pode ser pensado simplemente como un conxunto onde os elementos poden estar repetidos.

Vexamos agora que podemos levar estas ideas do mundo discreto ao continuo.

Definición 1.53. Un módulo de persistencia indexado por \mathbb{R}^+ sobre \mathbb{F} é un par (V_\bullet, a_\bullet) formado por un espazo vectorial V_t sobre \mathbb{F} para cada número real $t \geq 0$, e unha aplicación linear $a_{s \leq t} : V_s \rightarrow V_t$ para cada par $s \leq t$ de números reais non negativos. Estas aplicacións deben satisfacer:

- $a_{t \leq t}$ é a aplicación identidade en V_t para cada $t \geq 0$, e
- $a_{s \leq t} \circ a_{r \leq s} = a_{r \leq t}$ para cada terna $0 \leq r \leq s \leq t$ de números reais.

Definición 1.54. Un módulo de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) denomínase tame se cumpre dúas propiedades:

- Os espazos vectoriais V_t son de dimensión finita para todo $t \geq 0$, e
- Existe un número finito de valores $t \geq 0$, chamados valores críticos, para os cales o mapa

$$a_{t-\varepsilon \leq t+\varepsilon} : V_{t-\varepsilon} \rightarrow V_{t+\varepsilon}$$

non é un isomorfismo para valores $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequenos.

Corolario 1.55. *Para cada módulo de persistencia tame (V_\bullet, a_\bullet) , existe un conxunto finito $\text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet)$ de intervalos da forma $[s, t] \subset \mathbb{R}^+$ (con $t = \infty$ permitido) e unha multiplicidade $\mu: \text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet) \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ tales que temos unha descomposición única como suma directa de módulos de intervalo:*

$$(V_\bullet, a_\bullet) \cong \bigoplus_{[s,t]} (I_\bullet^{s,t}, c_\bullet^{s,t})^{\mu(s,t)},$$

onde $[s, t]$ percorre todos os intervalos en $\text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet)$.

Demostración. O feito de ser tame permítenos usar o Teorema 1.2.1 sen restricións, mesmo con indexación por \mathbb{R}^+ – cada módulo de persistencia tame (V_\bullet, a_\bullet) pode ser reducido a un módulo de persistencia de tipo finito indexado por \mathbb{N} (V'_\bullet, a'_\bullet) do seguinte xeito:

Sexan $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq \infty$ os valores críticos de (V_\bullet, a_\bullet) e definimos:

$$V'_i = V_{t_i} \quad \text{e} \quad a'_i = a_{t_i \leq t_{i+1}}.$$

O código de barras de (V'_\bullet, a'_\bullet) pode reinterpretarse como o código de barras de (V_\bullet, a_\bullet) mediante a transformación que envía cada intervalo $[i, j]$ ao correspondente $[t_i, t_j]$. O módulo de intervalo $(I_\bullet^{t_i, t_j}, c_\bullet^{t_i, t_j})$ soportado en $[t_i, t_j]$ ten a definición:

$$I_t^{t_i, t_j} = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{se } t_i \leq t \leq t_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

e

$$c_{s \leq t}^{t_i, t_j} = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{F}} & \text{se } [s, t] \subset [t_i, t_j] \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

□

Observación 1.56. Na práctica, á hora de representar en \mathbb{R}^2 , o barcode moitas veces inclúense tamén os puntos $\{(x, x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ da diagonal de $\overline{\mathbb{R}}^2$ aos que lles asignamos por convenio multiplicidade infinita. Isto ten sentido xa que serían “clases homolóxicas” que nacen e morren no mesmo tempo e polo teñen tempo de vida cero. Consecuentemente, os elementos do barcode que están próximas á diagonal, ao teren un tempo de vida curto, poden ser interpretados como ruído topolóxico.

Definición 1.57. Ao conxunto explicado na observación 1.56 chamámolo diagrama de persistencia e denotámolo $D(V_\bullet, a_\bullet)$.

1.2.1. Persistencia para a homoloxía simplicial

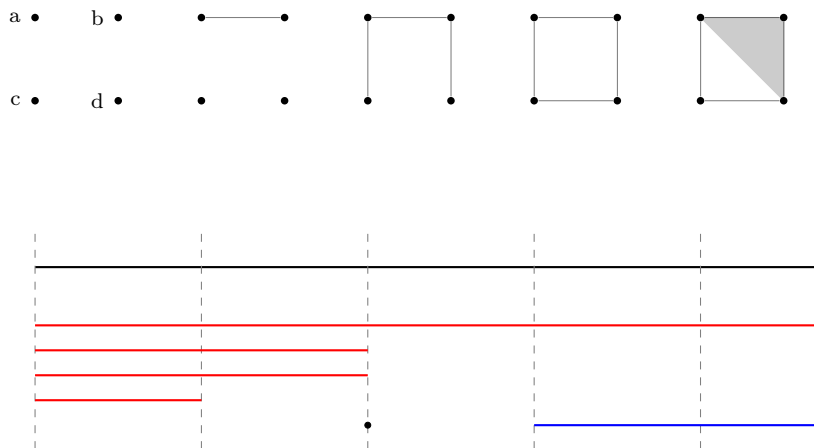
Vexamos como encaixa a homoloxía simplicial coa persistencia.

Sexa K un complexo simplicial. Consideremos unha filtración $F = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K$ (habitualmente consideramos a filtración dada por Vietoris-Rips ao aumentar o parámetro ε). Consideremos, tamén as aplicacións inclusión $i_j : K_j \hookrightarrow K_{j+1}$, que ademais son mapas simpliciais. Temos que

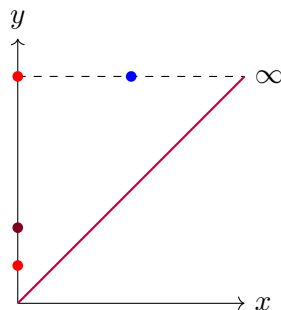
$$H_k(K_0) \xleftarrow{H_k i_0} H_k(K_1) \xleftarrow{H_k i_1} \dots \xleftarrow{H_k i_{n-1}} H_k(K_n) \tag{1.9}$$

é un módulo de persistencia \mathbb{N} -indexado. Ademais, se K é finito, como é habitualmente na práctica, será de tipo finito, e poderemos falar entón tamén de código de barras como en

Exemplo 1.58. Imos ver un exemplo para unha filtración discreta de catro vértices como se ve no diagrama. As barras vermellas correspóndense co grao de homoloxía cero, mentres que as azuis, co grao de homoloxía un.



Por outra banda, o diagrama de persistencia sería



Notemos que debuxamos o punto $(0, 2)$ en cor vermella maáis oscura para remarcar que ten multiplicidade 2, e a diagonal está en violeta porque pertence á homoloxía de graos un e dous.

1.2.2. Persistencia e homoloxía singular

Imos introducir nesta subsección resultados sobre homoloxía singular en X un espazo topolóxico compacto cunha filtración inducida por unha función continua como explicamos en 1.33 e persistencia que nos axudarán a probar a estabilidade dos diagramas de persistencia.

Definición 1.59. Dicémoslle k -ésimo número de Betti persistente entre x e y a:

$$\beta_k(f, (x, y)) = \dim(\text{im}(H_k^i x^y)). \quad (1.10)$$

Definición 1.60. Sexa $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función tame, $A = \{(a_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ o conxunto de puntos críticos k -homolóxicos e $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ a diagonal de $\overline{\mathbb{R}}^2$. Chamamos diagrama de persistencia ou código de barras ao conxunto $D_k(f) = \{(a_i, a_j) \mid a_i, a_j \in A\} \cup \Delta \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ onde os puntos $\{(a_i, a_j) \mid a_i, a_j \in A\}$ teñen multiplicidade

$$\mu_{i,j} = \beta_{b_{i-1}}^{b_j} - \beta_{b_i}^{b_j} + \beta_{b_i}^{b_{j-1}} - \beta_{b_{i-1}}^{b_{j-1}}$$

e $b_i \mid i = 0, \dots, n; b_{i-1} < a_i < b_i$ son puntos que intercalan os a_i .

Observación 1.61. As multiplicidades están ben definidas polo lema do valor crítico.

Definición 1.62. Definimos a multiplicidade dun subconxunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ como a suma das multiplicidades dos elementos de $D(f) \cap A$ e denotámolo por $\#A$.

Exemplo 1.63. $\#D(f) - \Delta = \sum_{i < j} \mu_i^j$

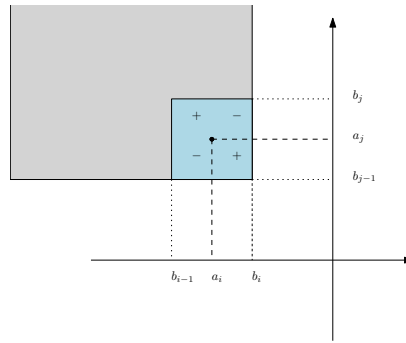
Lema 1.64 (Lema do k -triángulo). *Sexa X un espazo topolóxico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función tame e denotemos por $Q_{x,y} := [-\infty, x] \times [y, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ o cuadrante superior esquerdo tomando o punto (x, y) como orixe (ver figura). Supoñamos $x < y$ e que nin x nin y son puntos críticos homolóxicos. Entón*

$$\beta_x^y = \#(D(f) \cap Q_{x,y})$$

Demostración. Como xa fixeramos antes, consideramos $\{a_1, \dots, a_n\}$ o conxunto dos puntos críticos de homoloxía e sexa $\{b_1, \dots, b_n\}$ puntos que intecalen os a_i . Entón

$$\#Q_{x,y} = \sum_{k \leq i \leq j \leq l} \mu_k^l = \sum_{k \leq i \leq j \leq l} \beta_{b_{k-1}}^{b_l} - \beta_{b_k}^{b_l} + \beta_{b_k}^{b_{l-1}} - \beta_{b_{k-1}}^{b_{l-1}} = \beta_{b_{i-1}}^{b_j} - \beta_{b_i}^{b_j} + \beta_{b_i}^{b_{j-1}} - \beta_{b_{i-1}}^{b_{j-1}} = \mu_i^j$$

□



1.3. Estabilidade

O noso obxectivo agora é establecer condicións poder garantir a estabilidade do código de barras $\text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet)$ i.e., que pequenas variacións no espazo topolóxico X resultarán en pequenas variacións no diagrama de persistencia ou código de barras. Nesta sección ímonos guiar por [8] e [6]

Definición 1.65. Definimos a norma infinito $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{R}$ como $\|x\|_\infty = \max\{x_1, x_2\}$ e, analogamente, para unha funcións reais continuas, $\|f\|_\infty = \sup_x f(x)$.

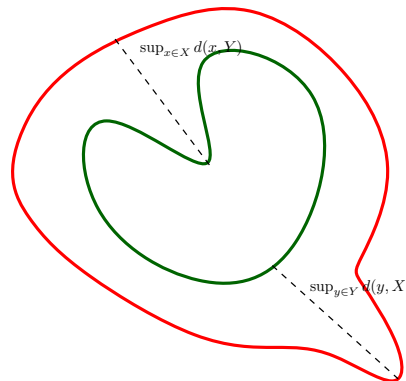
Definición 1.66. Sexan X e Y dous multiconxuntos. As distancias de Hausdorff e de gargalo ('Bottleneck' en inglés) entre X e Y son, respectivamente:

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_x \inf_y \|x - y\|_\infty, \sup_y \inf_x \|x - y\|_\infty\right\} \tag{1.11}$$

$$d_B(X, Y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_x \|x - \gamma(x)\|_\infty \tag{1.12}$$

sendo Γ o conxunto de bixeccións entre X e Y .

Exemplo 1.67. Na imaxe a continuación vemos os elementos da distancia de Hausdorff.



Definición 1.68. A distancia de Gromov-Hausdorff entre dous espazos métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é:

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf_{Z, \gamma_X, \gamma_Y} d_H(\gamma_X(X), \gamma_Y(Y)) \quad (1.13)$$

sendo γ_X e γ_Y mergullos dos espazos (X, d_X) e (Y, d_Y) nun terceiro espazo (Z, d_Z) .

Observación 1.69. $d_B(X, Y) \geq d_H(X, Y)$ xa que a distancia de gargalo satisfai unha restrición a maiores: a bixeccion entre os puntos. Por outra banda, a distancia de gargalo non ten en conta a eventual calidade de multiconxunto.

Lema 1.70 (lema da caixa). *Sexa $R = [a, b] \times [c, d] \subset \overline{\mathbb{R}^2}$ e $R_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [c + \varepsilon, d - \varepsilon] \subset \overline{\mathbb{R}^2}$ e f unha función tame. Entón, $\#(D(f) \cap R_\varepsilon) \leq \#(D(g) \cap R)$*

Como a demostración é algo extensa referímonos a [8] para os detalles.

Lema 1.71 (Lema da bixección fácil). *Sexan $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con f, g moi xuntas, i.e., $\|f - g\|_\infty < \min\{\|p - q\| \mid p \neq q \text{ con } p \in D(f) \setminus \Delta \text{ e } q \in D(g)\}/2$. Entón $d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty$.*

Demostración. Denotemos por μ a multiplicidade do punto p en $D(f) \setminus \Delta$ e por \square_ε o cadrado con centro en p e radio $\varepsilon = \|f - g\|_\infty$. Polo Lema da 1.70, temos:

$$\mu \leq \#(D(g) \cap \square_\varepsilon) \leq \#(D(f) \cap \square_{2\varepsilon}).$$

Dado que $2\varepsilon < \delta_f$, p é o único punto de $D(f)$ en $\square_{2\varepsilon}$, o que implica $\#(D(f) \cap \square_{2\varepsilon}) = \mu$. Así, podemos asociar todos os puntos de $D(g) \cap \square_\varepsilon$ a p .

Repetindo este proceso para todos os puntos fóra da diagonal de $D(f)$, os únicos puntos de $D(g)$ sen imaxe están a unha distancia maior que ε de $D(f) \setminus \Delta$. Como a distancia de Hausdorff entre $D(f)$ e $D(g)$ é como máximo ε , estes puntos de $D(g)$ están a unha distancia $\leq \varepsilon$ da diagonal. Asociándoos aos seus puntos máis próximos en Δ , obtemos unha bixección entre os multiconxuntos $D(f)$ e $D(g)$ (lembrando que os puntos en Δ teñen multiplicidade infinita).

Xa que a bixección move os puntos como máximo ε , isto remata a demostración. \square

Lema 1.72. *Sexan $\hat{f}, \hat{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$ dúas funcións lineares a cachos. Entón $d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty$*

Demostración. Descompoñemos a interpolación linear en pasos pequenos abondo para poder aplicar o Lema 1.71 en cada paso. Sexa $c = \|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty$ e observe que para cada $\lambda \in [0, 1]$, h_λ é tame e $\delta(\lambda) = \delta_{h_\lambda}$ é positivo. Disto segue que o conxunto C de intervalos abertos $J_\lambda = (\lambda - \delta(\lambda)/4c, \lambda + \delta(\lambda)/4c)$ forma un recubrimento aberto do intervalo $[0, 1]$.

Consideremos agora un subrecubrimento minimal C_0 de C . Como $[0, 1]$ é compacto, C_0 é finito. Sexan $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ os puntos medios dos intervalos en C_0 . Como C_0 é minimal,

calquera dous intervalos consecutivos, J_{λ_i} e $J_{\lambda_{i+1}}$, teñen unha intersección non baleira. Polo tanto,

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i \leq \frac{\delta(\lambda_i) + \delta(\lambda_{i+1})}{4c} \leq \frac{\max\{\delta(\lambda_i), \delta(\lambda_{i+1})\}}{2c}.$$

Por definición de c , $\|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty = c(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$. Como consecuencia,

$$\|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty \leq \frac{\max\{\delta(\lambda_i), \delta(\lambda_{i+1})\}}{2},$$

o que implica que h_{λ_i} está moi próxima a $h_{\lambda_{i+1}}$ ou viceversa. Podemos así aplicar o Lema 1.71, que garante que a distancia de gargalo entre $D(h_{\lambda_i})$ e $D(h_{\lambda_{i+1}})$ está limitada superiormente por $\|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Tomando $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_{n+1} = 1$, vemos que a desigualdade anterior tamén se cumpre para $i = 0$ e $i = n$, xa que h_0 está moi próxima a h_{λ_1} e h_1 está moi próxima a h_{λ_n} . Usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$d_B(D(\hat{f}), D(\hat{g})) \leq \sum_{i=0}^n d_B(D(h_{\lambda_i}), D(h_{\lambda_{i+1}})) \leq \sum_{i=0}^n \|h_{\lambda_i} - h_{\lambda_{i+1}}\|_\infty.$$

Pero como os h_{λ_i} mostran a interpolación linear desde \hat{f} ata \hat{g} , a suma anterior é igual a $\|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty$, o que remata a demostración. \square

Teorema 1.73 (Estabilidade I). *Sexa X un espazo topolóxico triangulable e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcións tame continuas. Entón $\|f - g\| \geq d_B(D(X), D(Y))$.*

Demostración. Estamos agora preparados para combinar os resultados técnicos acumulados e completar a demostración do teorema. Lembremos que asumimos un espazo topolóxico triangulable X e dúas funcións tame continuas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Por definición de triangulabilidade, existe un complexo simplicial (finito) L e un homeomorfismo $\Phi : L \rightarrow X$.

Notemos que o diagrama de persistencia é invariante baixo este cambio de variables, é dicir, $f \circ \Phi : L \rightarrow \mathbb{R}$ é tame e ten o mesmo diagrama de persistencia que f . Sexa $\delta > 0$ abondo pequeno. Como f e g son continuas e L é compacto, existe unha subdivisión K de L tal que:

$$|f \circ \Phi(u) - f \circ \Phi(v)| \leq \delta, \quad |g \circ \Phi(u) - g \circ \Phi(v)| \leq \delta$$

sempre que u e v sexan puntos dun mesmo simplexo en K .

Definamos agora $\hat{f}, \hat{g} : \text{Sd } K \rightarrow \mathbb{R}$ como as interpolacións lineares por partes de $f \circ \Phi$ e $g \circ \Phi$ en K . Por construción de K , estas funcións cumpren:

$$\|\hat{f} - f \circ \Phi\|_\infty \leq \delta \quad \text{e} \quad \|\hat{g} - g \circ \Phi\|_\infty \leq \delta.$$

Rematamos o argumento usando a desigualdade triangular para limitar $d_B(D(f), D(g))$ pola suma de distancias de bottleneck entre os diagramas de persistencia de funcións adxacentes na secuencia f, \hat{f}, \hat{g}, g . Para o par central obtemos:

$$d_B(D(\hat{f}), D(\hat{g})) \leq \|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + 2\delta,$$

usando o lema 1.72, o feito de que \hat{f} e \hat{g} diferan en δ como máximo de $f \circ \Phi$ e $g \circ \Phi$, e que $\|f - g\|_\infty = \|f \circ \Phi - g \circ \Phi\|_\infty$.

Para o primeiro par da secuencia, asumimos $\delta < \delta_f/2$ e aplicamos o 1.71, obtendo:

$$d_B(D(f), D(\hat{f})) = d_B(D(f \circ \Phi), D(\hat{f})) \leq \delta.$$

Analogamente, para o terceiro par, se $\delta < \delta_g/2$, temos $d_B(D(\hat{g}), D(g)) \leq \delta$. En total:

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty + 4\delta.$$

Esta desigualdade é certa para todo $\delta > 0$, que podemos facer arbitrariamente pequeno. Polo tanto, a desigualdade tamén se cumpre sen o termo 4δ , o que demostra a afirmación do teorema □

Observación 1.74. Cúmprese tamén que $\|f - g\| \geq d_H(D(X), D(Y))$ pola observación previa.

Observación 1.75. Como estamos traballando con espazos topolóxicos triangulables, este teorema garante tamén a estabilidade para homoloxía simplicial.

Este resultado, se ben, é moi interesante, a nós o que nos interesa sería obter a estabilidade dos diagramas coa distancia entre os complexos de Rips. Vexámolo:

Lema 1.76. *Calquera espazo métrico finito (X, d) con $\#X = n$ pode ser mergullado isometricamente en (\mathbb{R}^n, l^∞) .*

Demostración. Sexa $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Consideremos o embebecemento $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $f(x_i) = (d(x_i, x_1), \dots, d(x_i, x_n))$. En efecto, f é unha isometría,

1. Inxectividade: Se $f(x_i) = f(x_j)$, entón $d(x_i, x_k) = d(x_j, x_k)$ para todo $k = 1, \dots, n$. En particular, tomando $k = i$ e $k = j$, temos:

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = 0 \Rightarrow x_i = x_j.$$

2. Preservación de distancias: Para calquera $x_i, x_j \in X$, a distancia l^∞ entre $f(x_i)$ e $f(x_j)$ é:

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |d(x_i, x_k) - d(x_j, x_k)|.$$

Tomando $k = j$:

$$|d(x_i, x_j) - d(x_j, x_j)| = d(x_i, x_j).$$

Por outra banda, pola desigualdade triangular:

$$|d(x_i, x_k) - d(x_j, x_k)| \leq d(x_i, x_j) \quad \forall k.$$

Logo, $\|f(x_i) - f(x_j)\|_\infty = d(x_i, x_j)$.

□

Lema 1.77. *Para calquera conxunto finito $X \subset \mathbb{R}$ temos que para a distancia infinito (definida en 1.65), a filtración de Vietoris-Rips e a de Čech coinciden, i.e.,*

$$C_\alpha(X, d_\infty) = VR_{2\alpha}(X, d_\infty)$$

para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

Para a demostración remitímonos a [6]

Lema 1.78 (Nervo persistente). *Sexan $X \subseteq X'$ dous espazos paracompactos (i.e., un espazo topolóxico no que todo recubrimento aberto ten un refinamento que é localmente finito), e sexan $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ recubrimentos abertos bos de X e X' respectivamente, baseados no mesmo conxunto finito de parámetros A , tales que $U_\alpha \subseteq U'_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Entón, se denotamos por $\mathcal{N}\mathcal{U}$ e $\mathcal{N}\mathcal{U}'$ os nervos dos recubrimentos \mathbb{U} e \mathbb{U}' respectivamente, existen equivalencias de homotopía $\mathcal{N}\mathcal{U} \rightarrow X$ e $\mathcal{N}\mathcal{U}' \rightarrow X'$ que conmutan coas inclusións canónicas $X \hookrightarrow X'$ e $\mathcal{N}\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{N}\mathcal{U}'$ a nivel de homoloxía e homotopía.*

Para a demostración remitímonos a [7]

Teorema 1.79 (Estabilidade II). *Sexan (X, d_X) e (Y, d_Y) dous espazos métricos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ temos:*

$$d_B(D_k(VR_\varepsilon(X, d_X)), D_k(VR_\varepsilon(Y, d_Y))) \leq 2d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$$

Demostración. Sexa $\varepsilon = d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$. En [2] demóstrase que os ínfimos da definición de 1.68 é de feito un mínimo, o que significa que existe un espazo métrico (Z, d_Z) e dous mergullos isométricos $\gamma_X: X \rightarrow Z$ e $\gamma_Y: Y \rightarrow Z$ tales que a distancia de Hausdorff $d_H^Z(\gamma_X(X), \gamma_Y(Y))$ é ε .

Consideremos agora o subespazo $\gamma_X(X) \cup \gamma_Y(Y) \subseteq Z$, dotado da métrica inducida. Como este subespazo é finito, pode ser mergullado isometricamente en $(\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$, onde $n = \#X + \#Y$, polo Lema 1.76. Sexa γ este mergullado isométrico. Entón temos que $d_H^\infty(\gamma \circ \gamma_X(X), \gamma \circ \gamma_Y(Y)) = d_H^Z(\gamma_X(X), \gamma_Y(Y)) = \varepsilon$.

Polo tanto, dentro de $(\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$, a función distancia δ_X a $\gamma \circ \gamma_X(X)$ e a función distancia δ_Y a $\gamma \circ \gamma_Y(Y)$ están a distancia ε na norma do máximo. Ademais, como δ_X e δ_Y son envolventes inferiores dun número finito de funcións lineais a anacos, son elas mesmas lineais a anacos e, polo tanto, tame e continuas. Como consecuencia, os seus diagramas de persistencia están a distancia ε na distancia bottleneck, polo Teorema 1.79.

Recordemos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conxunto aberto α -subnivel de δ_X é o α -*offset* de $\gamma \circ \gamma_X(X)$, é dicir, a unión das bólas abertas ℓ_∞ de raio α arredor dos puntos de $\gamma \circ \gamma_X(X)$, denotado $(\gamma \circ \gamma_X(X))^\alpha$. Como as bólas ℓ_∞ son hipercubos, son convexas e, polo tanto, as súas interseccións son baleiras ou contráctiles. Como resultado, o Lema 1.78 asegura que δ_X e a filtración de Čech $C(\gamma \circ \gamma_X(X), \ell_\infty)$ teñen diagramas de persistencia idénticos.

Ademais, o Lema 1.77 garante que $C_\varepsilon(\gamma \circ \gamma_X(X), \ell_\infty)$ coincide coa filtración de Rips $VR_{2\varepsilon}(\gamma \circ \gamma_X(X), \ell_\infty)$, que á súa vez é igual a $VR_{2\varepsilon}(X, d_X)$ xa que $\gamma \circ \gamma_X$ é un mergullo isométrico. Como consecuencia, o diagrama de persistencia de $VR(X, d_X)$ coincide co diagrama de persistencia de δ_X . O mesmo é certo para Y , polo que os diagramas de persistencia de $VR_{2\varepsilon}(X, d_X)$ e $VR_{2\varepsilon}(Y, d_Y)$ están a unha distancia bottleneck de como máximo 2ε entre eles. \square

Observación 1.80. Este resultado é interesante por si mesmo desde un punto de vista computacional. En efecto, calcular a distancia de Gromov-Hausdorff é un problema non polinomial (NP), mentres que calcular a distancia de gargalo (Bottleneck) ten complexidade polinomial (o algoritmo de “perfect matching” é $O(n^3)$ como se ve en [4]), polo que este teorema establece unha cota inferior para a distancia de Gromov-Hausdorff moi interesante.

Capítulo 2

Dinámica topolóxica

O obxectivo deste capítulo será introducirmos brevemente no mundo dos sistemas dinámicos, introducir o concepto da entropía topolóxica e facer o seu cálculo para algúns exemplos.

2.1. Introdución e exemplos salientables

Guiarémonos nestas primeiras definicións e resultados por [11]

Definición 2.1. Dado un semigrupo G sobre un conxunto, chamamos acción a unha aplicación $\varphi : G \times X \rightarrow X$ que cumpre:

- $\varphi(x, 1_G) = x$ para todo $x \in X$ sendo $1_G \in G$ o elemento neutro.
- $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ para todo $x \in X$ e $g, h \in G$.

Definición 2.2. Un sistema dinámico é un par (X, f) onde X é un espazo topolóxico e φ é unha acción $f : X \times \mathbb{A} \rightarrow X$. Distinguimos dous casos segundo o que sexa o (semi)grupo \mathbb{A} :

- Dicimos que o sistema dinámico é discreto se $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.
- Dicimos que o sistema dinámico é continuo se $\mathbb{A} = \mathbb{R}$

Observación 2.3. \mathbb{A} é un semigrupo se $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, no resto dos casos é un grupo.

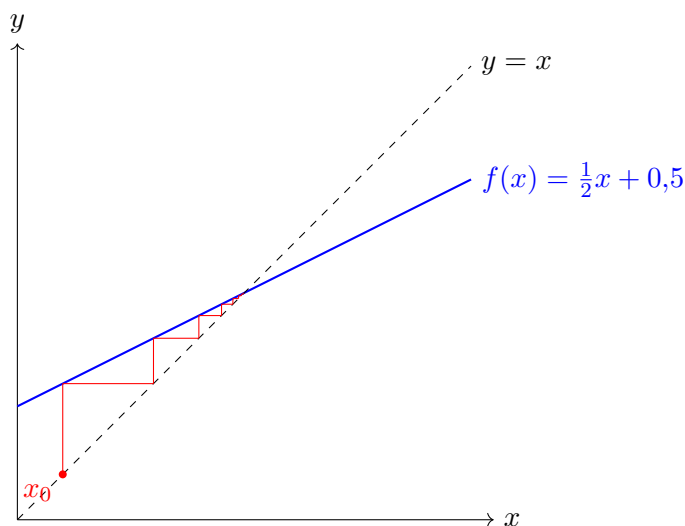
Observación 2.4. Cando o sistema dinámico é discreto moitas veces escríbese (X, φ) onde $\varphi : X \rightarrow X$ representa unha iteración, i.e., $f(x, n) = \varphi^n(x)$.

Observación 2.5. Cando o sistema dinámico é continuo, f ten que ser continua e é chamado fluxo.

Os sistemas dinámicos continuos xa foron estudados en profundidade durante o grao, por iso nos centraremos nos discretos.

Definición 2.6. Para un sistema discreto, chamamos órbitas de y ao conxunto $\mathcal{O} = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \varphi^n(y) = x\}$. Particularmente, chamamos semiórbita positiva e negativa os puntos para os que existe un n positivo e negativo, respectivamente. Ademais, ao n mínimo chamámolo período.

Exemplo 2.7. Un algoritmo gráfico moi interesante para o cálculo da órbita dun punto nun sistema discreto é o diagrama de Cobweb. O procedemento é o seguinte: a partir da gráfica dunha función con valores en \mathbb{R} trazamos a diagonal principal (se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) entón consideramos a variedade diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) e proxectamos a imaxe do punto x nela, e procedemos recursivamente a partir de aí como se mostra na imaxe.



Observación 2.8. Para o caso continuo, estes conceptos xa os introducimos ao longo do grao.

Definición 2.9. Dicimos que x é un punto fixo de φ se $\varphi(x) = x$.

Exemplo 2.10. No exemplo 2.7 observamos que o punto $x = 1$ é un punto fixo.

Definición 2.11. Sexa (X, φ) un sistema dinámico con X un espazo métrico. Dicimos que un punto fixo $x \in X$ é estable no senso de Poisson se para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada $y \in B(x, \delta)$ a semiórbita positiva \mathcal{O}^+ esta contida en $B(x, \varepsilon)$. Dicimos, ademais que é asintoticamente estable se existir un entorno $r > 0$ de x para o que todos os puntos de $B(x, r)$ son estables no senso de Poisson. Finalmente dicimos que x é un punto fixo repulsor se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in B(x, \varepsilon)$ existe un $n_y \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{n_y}(y) \notin B(x, \varepsilon)$.

Observación 2.12. Este concepto é análogo para sistemas dinámicos continuos e v'imolo na asignatura de ecuacións diferenciais.

Exemplo 2.13. O método de Newton para encontrar raíces reais de funcións pode ser interpretado como un sistema dinámico no que a raíz é un punto fixo estable.

Exemplo 2.14. As rotacións no círculo $\mathbb{S}^1 \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ defínense, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ como $R_\alpha(z) = ze^{(2\pi i\alpha)}$ con notación multiplicativa, ou ben, $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$.

Proposición 2.15. *Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ entón a semiórbita positiva de calquera punto $x \in \mathbb{S}^1$ dunha rotación no círculo $\mathcal{O}^+(R_\alpha)$ é densa no círculo. Analogamente para a semiórbita negativa. Por outra banda, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, entón para todo $x \in \mathbb{S}^1$, $\mathcal{O}^+(R_\alpha, x)$ é pechada.*

Demostración. Sexan $x, z \in \mathbb{S}^1$. Para ver que z está na clausura da semiórbita positiva de x , sexa $\varepsilon > 0$. A semiórbita positiva de x é infinita, e ningunha colección de $k \geq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ puntos pode ter todas as distancias por riba de ε . Polo tanto, existen $l, k \in \mathbb{N}$ tales que $l < k \leq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ e:

$$d(R_\alpha^k(x), R_\alpha^l(x)) < \varepsilon.$$

Entón, como R_α^{-l} conserva distancias:

$$d(R_\alpha^{k-l}(x), x) = d(R_\alpha^k(x), R_\alpha^l(x)) < \varepsilon.$$

De feito, esta distancia non depende de x . Se $y \in \mathbb{S}^1$, entón $y = R^{y-x}(x)$ e:

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^{k-l}(y), y) &= d(R_\alpha^{k-l}(R^{y-x}(x)), R^{y-x}(x)) \\ &= d(R^{(k-l)\alpha+y-x}(x), R^{y-x}(x)) \\ &= d(R^{y-x}(R_\alpha^{k-l}(x)), R^{y-x}(x)) \\ &= d(R_\alpha^{k-l}(x), x). \end{aligned}$$

Polo tanto, os índices k e l pódense escoller independentemente de x .

Agora, escollemos $\theta \in [-1/2, 1/2]$ tal que $\theta = (k-l)\alpha \pmod{1}$, e definimos $\rho := |\theta| < \varepsilon$. Entón $R_\alpha^{k-l} = R^\theta$. Sexa $N = \lfloor 1/\rho \rfloor + 1$ (independente de x). O conxunto $\{R^{i\theta}(x) \mid i = 0, 1, \dots, N\}$ pertence á semiórbita positiva de x e divide o círculo en intervalos de lonxitude $\rho < \varepsilon$, entón hai un $n \leq N(k-l)$ tal que $d(R_\alpha^n(x), z) < \varepsilon$.

Para ver que $\mathcal{O}^+(R_\alpha, x)$ é pechada consideramos $\alpha = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$. A rotación R_α ten orde q pois:

$$R_\alpha^q(x) = x + q \cdot \frac{p}{q} = x + p \equiv x \pmod{1}.$$

A órbita completa é:

$$\mathcal{O}(R_\alpha, x) = \left\{ x + \frac{k}{q} \pmod{1} \mid k = 0, 1, \dots, q-1 \right\},$$

un conxunto finito □

Definición 2.16. Dicimos que dous sistemas dinámicos (X, f) (Y, g) son topoloxicamente conxugados se existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $g = h^{-1} \circ f \circ h$.

Ímonos introducir agora na dinámica simbólica. Para iso seguiremos o exposto en [16]. Consideremos un conxunto $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ao que chamaremos alfabeto. Os seus elementos chamémoslos símbolos

Definición 2.17. O conxunto de todas as sucesións bi-infinitas (i.2., indexadas en \mathbb{Z} , en contraposición coas indexadas en \mathbb{N}) en A , $A^{\mathbb{Z}}$ é o espazo A -shift completo.

Definición 2.18. Un shift é unha aplicación $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ definida como $\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$

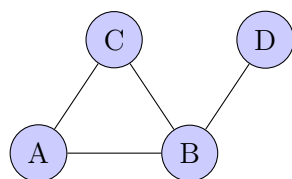
Definición 2.19. Unha palabra de A é un elemento de A^n para algun $n \in \mathbb{N}$

Definición 2.20. Un subconxunto $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ é un subshift se é invariante baixo a aplicación shift.

Definición 2.21. Sexa T un conxunto de palabras de A . Un espazo shift é un subconxunto $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ de secuencias de $A^{\mathbb{Z}}$ que non conteñen ningúnha palabra de T . Dicimos que un subconxunto $X \subset Y$ de Y un espazo shift é un espazo subshift de tipo finito se é un shift.

Observación 2.22. Primeiro establecemos unha orde $\mu : A \rightarrow \{1, \dots, m\}$ en P . A partir dunha matriz de adxacencia $B \in \mathcal{M}_{m \times m}$ (i.e., que so ten ceros e uns), o conxunto de todas as secuencias permitidas por A (i.e. $b_{\mu(x_i), \mu(x_{i+1})} = 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$) é un espazo shift. Á matriz B chamámola matriz de transición de markov. É interesante observar o paralelismo coas matrices estocásticas nos procesos de Markov.

Exemplo 2.23. Podemos considerar que un grafo é un alfabeto, cuxos símbolos son os nodos.



Neste grafo a matriz de adxacencia sería

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O estudo dos shifts xorde naturalmente ao estudar outros sistemas dinámicos. Nun sistema dinámico en X arbitrario podemos simplificar o xeito no que vemos unha órbita: se consideramos

unha partición finita de X 'codificamos' a órbita dun punto $x \in X$ cos elementos da partición que vai visitando. Considerando así a partición como un alfabeto vemos como isto é un shift.

Introducimos, agora, outra familia de sistemas dinámicos que van resultar da nosa interese: os sistemas de Anosov. Guiarémonos por [5]

Definición 2.24. Un difeomorfismo $f: M \rightarrow M$ dunha variedade compacta M dise **de Anosov** se existen constantes $K > 0$ e $0 < \lambda < 1$, e unha descomposición $T_x M = S_x \oplus U_x$ do espazo tanxente en cada punto $x \in M$, que satisfán as seguintes condicións:

1. Continuidade: Os subespazos S_x (estable) e U_x (inestable) varían continuamente con x .
2. Descomposición: $S_x \oplus U_x = T_x M$ (suma directa).
3. Invarianza: Os subespacios son invariantes baixo f :

$$Df_x(S_x) = S_{f(x)} \quad \text{e} \quad Df_x(U_x) = U_{f(x)}, \quad \forall x \in M.$$

4. Contracción exponencial na dirección estable: Para todo $s_x \in S_x$ e $n \geq 0$,

$$\|Df_x^n(s_x)\| \leq K\lambda^n \|s_x\|.$$

5. Expansión exponencial na dirección inestable: Para todo $u_x \in U_x$ e $n \geq 0$,

$$\|Df_x^{-n}(u_x)\| \leq K\lambda^n \|u_x\|.$$

Exemplo 2.25. Un exemplo clásico é o isomorfismo linear dado por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como A está en $SL(2, \mathbb{Z})$ (i.e., as matrices 2×2 de números enteiros con determinante 1), está ben definida, ao identificar os bordes do cadrado. f é un exemplo típico de difeomorfismo linear de Anosov no toro entendido como $\mathbb{T} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Como A ten determinante 1 vanse preservar as áreas e as clases de equivalencia.

Proposición 2.26. Os difeomorfismos de Anosov son expansivos no sentido de que existe unha constante (chamada de expansividade) $\rho > 0$, tal que $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \rho$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ se e soamente se $x = y$

Definición 2.27. Sexa $f: M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Defínense:

- O conxunto estable de f polo punto $x \in M$ como:

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$$

- O conxunto inestable de f polo punto $x \in M$ como:

$$W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$$

Proposición 2.28. *Sexa $f: M \rightarrow M$ un difeomorfismo expansivo con constante de expansividade ρ . Entón:*

1. *O conxunto estable pódese expresar como:*

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho \forall n \geq N\}$$

2. *O conxunto inestable pódese expresar como:*

$$W^u(x) = \{y \in M \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \rho \forall n \geq N\}$$

Demostración. Da definición de conxunto estable obtense inmediatamente que:

$$W^s(x) \subset \{y \in M \mid \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho \forall n \text{ suficientemente grande}\}$$

Para demostrar a outra inclusión, supoñamos por redución ao absurdo que existe $y \in M$ tal que:

- $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho$ para todo $n \geq N$
- $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \not\rightarrow 0$ cando $n \rightarrow +\infty$

Entón existe unha sucesión $n_k \rightarrow +\infty$ tal que:

$$\text{dist}(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \epsilon > 0 \quad \forall k$$

Pola compacidade de M , podemos escoller unha subsucesión (que seguiremos denotando por n_k) para a cal existen:

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x), \quad y_0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(y)$$

Para calquera $p \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\text{dist}(f^{n_k+p}(x), f^{n_k+p}(y)) \leq \rho \quad \forall n_k > N - p$$

Tomando o límite cando $k \rightarrow +\infty$, obtemos:

$$\text{dist}(f^p(x_0), f^p(y_0)) \leq \rho \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

Pola expansividade de f , isto implica que $x_0 = y_0$, o que contradí a elección de n_k , xa que:

$$\text{dist}(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \epsilon > 0$$

Esta contradición completa a demostración para $W^s(x)$. O caso para $W^u(x)$ é análogo considerando f^{-1} . □

Definición 2.29. Sexa $f: M \rightarrow M$ un difeomorfismo dunha variedade compacta M . Para $\epsilon > 0$ e $x \in M$, defínense:

- O ϵ -conxunto estable de f por x como:

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M \mid \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

- O ϵ -conxunto inestable de f por x como:

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M \mid \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \leq 0\}$$

Proposición 2.30. Dado $0 < \epsilon < \rho/2$ existe $\delta > 0$ tal que $W_\epsilon^s(x) \cup W_\epsilon^u(y)$ é un só punto para $x, y \in M$ tales que $d(x, y) < \delta$.

Definición 2.31. Definimos a función $[\cdot, \cdot]: M \times M \rightarrow M$ como $[x, y] := W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$.

Definición 2.32. Sexa $0 < \epsilon < \rho/2$ e $\delta > 0$ escollido como en 2.30. Dicimos que $R \subset M$ é un rectángulo para f se tén diámetro menor que δ , e ademais, $[x, y] \in R$ para todo $x, y \in R$. Ademais, dicimos que R é propio se $R = \overline{\text{Int}(R)}$

Definición 2.33. Definimos a ϵ -variedade estable de x en R como

$$W^s(x, R) := W_\epsilon^s(x) \cap R$$

Analogamente, definimos

$$W^u(x, R) := W_\epsilon^u(x) \cap R$$

Definición 2.34. Dicimos que unha partición por pechados (i.e., un recubriemnto cos interiores disxuntos dous a dous) é unha partición de Markov para o difeomorfismo de Anosov f se está constituída por rectángulos propios R_1, R_2, \dots, R_m tales que se $x \in R_i \cap f^{-1}(\text{Int}(R_j))$, entón,

- $f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j)$
- $W^u(f(x), R_j) \subset f(W^u(x, R_i))$

Dada unha partición de Markov podemos construír unha cadea de Markov topolóxica, a partir dunha matriz de transición $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$ definida como $a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } \text{Int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{Int}(R_j)) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Esta 'xera' todas as sucesións $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $A_{x_n x_{n+1}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En particular son subshift de tipo finito.

2.2. Entropía topolóxica

O concepto de entropía introduciuse por vez primeira no ano de 1865 no contexto da termodinámica. Dende entón, teñense definido moitos conceptos análogos en diversos campos do saber humano que veñen a intentar medir tamén a desorde nun sistema. Exemplo do anterior son a entropía estatística de Boltzman (que contaría o número de microestados compatibles nun macroestado), a de Gibbs (que xeraliza a anterior usando probabilidades: $S = k \sum_i p_i \log p_i$). A partir disto, Shannon introduciu o concepto para o campo da teoría da información. Tamén apareceu o concepto no campo dos sistemas dinámicos en topoloxía (que veremos no seguinte capítulo) e en moitos outros terreos como a mecaánica cuántica ou en sistemas adaptativos.

No Anexo I, falamos amplamente de entropía persistente (ver [14]), un concepto introducido para traballar o problema de saber cando unha clase persistente é da nosa interese ou, se, pola contra, podemos considerala ruído topolóxico. Con todo, non acabou tendo bo encaixe neste traballo pero é un precedente interesante.

Nesta sección centrarémonos na entropía topolóxica guiándonos por [14]. A entropía topolóxica é un concepto introducido nos anos sesenta do século pasado por Konheim e McAndrew. Intuitivamente, a entropía dun sistema dinámico mide a desorde do sistema, a velocidade coa que se separan órbitas próximas. Podemos abordar esta idea desde diversos puntos de partida, pero, o mais natural é a partir da entropía dun recubremento ou usar a definición de Bowen. Nós o que faremos será empezar pola primeira e acabaremos probando a equivalencia coa segunda.

Con isto en mente consideremos, de agora en adiante, un espazo compacto (\mathcal{M}, τ) , e $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ o conxunto dos seus recubrimentos abertos. Sexa tamén $\phi : M \rightarrow M$ unha aplicación continua.

Definición 2.35. A entropía dun recubremento $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ defínese como o logaritmo do cardinal do seu subrecubremento minimal, i.e.,

$$h(\mathcal{A}) = \log(\min\{\#\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ é un subrecubremento de } \mathcal{A}\})$$

Definición 2.36. Definimos a xunción de dous recubrimentos \mathcal{A}, \mathcal{B} como a unión das interseccións de elemento de \mathcal{A} con elementos de \mathcal{B} , i.e.,

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

Proposición 2.37. Para todo $U, B \in \mathcal{C}(M)$ cúmprese que a cardinalidade do subrecubremento minimal da xunción de ambos é menor que o produto das cardinalidades dos subrecubrimentos minimais. I.e., denotando por $N(A)$ o cardinal dun subrecubremento minimal de A ,

$$N(U \vee B) \leq N(U)N(B)$$

e consecuentemente

$$H(U \vee B) \leq H(U) + H(B).$$

Demostración. Sexan $U' := \{U_1, \dots, U_{N(U)}\}$ e $B' := \{B_1, \dots, B_{N(B)}\}$ subrecubrimentos mínimos de U e B respectivamente. Entón $U' \vee B' = \{U_i \cap B_j \mid i = 1, \dots, N(U); j = 1, \dots, N(B)\}$ é un subrecubrimento de $U \vee B$, polo que: $N(U \vee B) \leq N(U)N(B)$. \square

Proposición 2.38. *Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ cúmprese:*

$$N(\phi^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U}).$$

Demostración. En efecto: sexa $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{N(\mathcal{U})}\}$ un subrecubrimento minimal de U . Entón:

$$\phi^{-1}(\mathcal{U}') = \{\phi^{-1}(\mathcal{U}_1), \dots, \phi^{-1}(\mathcal{U}_{N(\mathcal{U})})\}$$

é un subrecubrimento de $\phi^{-1}(U)$. Disto dedúcese que:

$$N(\phi^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U}). \quad \square$$

Lema 2.39 (Lema de Fekete). *Sexa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unha sucesión de números reais positivos tal que $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Entón existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n$*

Demostración. Temos que $a_{kn} \leq ka_n$ para k natural como consecuencia da condición $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Dividindo ambos lados da desigualdade por n e facendo tender k a infinito obtemos que $c := \inf_{p \in \mathbb{N}} a_p/p \leq a_n/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outra banda, polas propiedades do ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$ vai existir un natural $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_\varepsilon}/n_\varepsilon \leq c + \varepsilon$. Escribindo agora $n = qn_\varepsilon + r$ (con q e r naturais froito duna división). Temos entón que

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qn_\varepsilon+r}}{qn_\varepsilon+r} \leq \frac{qa_{n_\varepsilon} + a_r}{q(n_\varepsilon + \frac{r}{q})} \leq \frac{a_{n_\varepsilon}}{n_\varepsilon} + \frac{a_r}{n} \leq c + \varepsilon + \frac{a_r}{n}$$

Para n grande obtemos entón $c \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n \leq c + 2\varepsilon$ e como $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno, $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/n$. \square

Proposición 2.40. *Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ cúmprese que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h \left(\mathcal{U} \vee \phi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \phi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \right)$$

existe e é finito.

Demostración. Sexa $a_n = h \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$. Temos:

$$a_{n+m} = h \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right) = H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \vee \phi^{-n}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{k=0}^{m-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

Por 2.37, temos:

$$a_{n+m} \leq H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right) + H \left(\phi^{-n}(\mathcal{U}) \vee \bigvee_{k=0}^{m-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

Usando agora 2.38, temos:

$$a_{n+m} \leq H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right) + H \left((\mathcal{U}) \vee \bigvee_{k=0}^{m-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

É dicir, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Da definición de (a_n) temos que $a_n \geq 0$. Así, obtemos que existe polo Lema 2.39:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

e este límite é finito. □

Definición 2.41. Dados $\phi : M \rightarrow M$ e $(U) \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$, definimos a entropía de ϕ con respecto a \mathcal{U} como

$$h(\mathcal{U}, \phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

Ademais, definimos a entropía de ϕ como

$$h(\phi) := \sup_{(U) \in \mathcal{C}(\mathcal{M})} h(\phi, U)$$

Imos ver agora por que é un concepto interesante. Resulta que a entropía topológica é un invariante topológico. Vexámolo:

Teorema 2.42. *Sean M e M' espazos topológicos compactos e $\phi : M \rightarrow M$ unha aplicación continua. Se $\psi : M \rightarrow M'$ é un homeomorfismo, entón:*

$$h(\phi) = h(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}).$$

Demostración. Como ψ é un homeomorfismo, induce unha bixección entre os recubrimentos abertos de M e M' . En particular, para calquera recubrimiento aberto U de M' , existe un recubrimiento aberto V de M tal que $\psi(V) = U$ (pódese coller $V = \psi^{-1}(U)$).

Calculamos a entropía de $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}$ respecto do recubrimento $\psi(U)$:

$$\begin{aligned}
h(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}, \psi(U)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi(U) \vee (\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})^{-1}(\psi(U)) \right. \\
&\quad \left. \vee \dots \vee (\psi \circ \phi \circ \psi^{-1})^{-(n-1)}(\psi(U)) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \psi(\phi^k(U)) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^k(U) \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \phi^k(U) \right) \\
&= h(\phi, U).
\end{aligned}$$

Dado que ψ establece unha bixección entre os recubrimentos abertos de M e M' , temos:

$$\sup\{h(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}, V) \mid V \in \mathcal{C}(M')\} = \sup\{h(\phi, U) \mid U \in \mathcal{C}(M)\}.$$

Polo tanto:

$$h(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) = h(\phi).$$

□

Todos os resultados que acabamos de probar conforman un xeito de entender a entropía topolóxica. Imos agora con outro sentido (dirémoslle sentido de Bowen) de definir a entropía topolóxica que probaremos equivalente. Sexa agora (X, d) un espazo métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ unha aplicación continua.

Definición 2.43. Dicimos que un conxunto $E \subset X$ é (n, ε) -separado se para calquera par de puntos $x, y \in E$ existe un $0 \leq j < n$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \varepsilon$

Definición 2.44. Dicimos que un conxunto $F \subset X$ é (n, ε) -xerador ou que xera X se para todo $x \in X$ existe un $y \in F$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \varepsilon$ para todo $0 \leq j < n$.

Observación 2.45. Estas definicións poden ser reformuladas usando a n -ésima distancia dinámica, i.e., $d_f^n(x, y) = \max_{0 \leq j < n} \{d(f^j(x), f^j(y))\}$ para un $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in X$.

Definición 2.46. Definimos os seguintes enteiros:

$$r_n(\varepsilon, K) := \min\{\#F \mid F \text{ } (n, \varepsilon)\text{-xera } K\}$$

$$s_n(\varepsilon, K) := \max\{\#E \mid E \text{ é } (\varepsilon, n)\text{-separado e } E \subset K\}$$

Ademais,

$$r(\varepsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r_n(\varepsilon, K))$$

$$s(\varepsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_n(\varepsilon, K))$$

Lema 2.47. 1. Para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ tense que $r(\varepsilon_2, K) \leq r(\varepsilon_1, K)$ e $s(\varepsilon_2, K) \leq s(\varepsilon_1, K)$.

2. $r_n(\varepsilon, K) \leq s_n(\varepsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\varepsilon, K) < \infty$.

Demostración. 1. Sexa $F \subset X$ un conxunto que (n, ε_1) -xera a K . Entón, para todo $x \in K$, existe $y \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon_1$, $0 \leq i < n$, polo que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Así, F (n, ε_2) -xera a K .

Definindo $G_n(\varepsilon, K) = \{F \subset X \mid F \text{ } (n, \varepsilon)\text{-xera } K\}$, temos:

$$G_n(\varepsilon_1, K) \subseteq G_n(\varepsilon_2, K)$$

$$\min\{\text{Card}(F) \mid F \in G_n(\varepsilon_2, K)\} \leq \min\{\text{Card}(F) \mid F \in G_n(\varepsilon_1, K)\}$$

$$r_n(\varepsilon_2, K) \leq r_n(\varepsilon_1, K)$$

$$r(\varepsilon_2, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_2, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_1, K) = r(\varepsilon_1, K)$$

Sexa agora $E \subset K$ un conxunto (n, ε_2) -separado. Entón, para $x, y \in E$ con $x \neq y$, existe j ($0 \leq j < n$) tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, polo que E é (n, ε_1) -separado. Definindo $S_n(\varepsilon, K) = \{E \subset K \mid E \text{ } (n, \varepsilon)\text{-separado}\}$, tense:

$$S_n(\varepsilon_2, K) \subset S_n(\varepsilon_1, K)$$

$$s_n(\varepsilon_1, K) \geq s_n(\varepsilon_2, K) \quad \text{e} \quad s(\varepsilon_1, K) \geq s(\varepsilon_2, K)$$

2. Por compacidade de X , o número de bólas disxuntas de raio ε está limitado por unha constante N_ε . Sexa $E \in S_n(\varepsilon, K)$ un conxunto (n, ε) -separado. Entón $\text{Card}(E) \leq N_\varepsilon$, pois os puntos $f^j(x)$ deben estar en bolas distintas. Así, $s_n(\varepsilon, K) < \infty$.

Ademais, para todo $x \in K$ existe $y \in E$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon$ ($0 \leq i < n$), pois en caso contrario poderíase ampliar E . Consecuentemente, E (n, ε) -xera a K , e polo tanto:

$$r_n(\varepsilon, K) \leq s_n(\varepsilon, K)$$

Finalmente, sexa F un conxunto que $(n, \frac{1}{2}\varepsilon)$ -xera a K e E un conxunto (n, ε) -separado. Para cada $x \in E$, existe $y = T(x) \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ ($0 \leq i < n$). A aplicación $T : E \rightarrow F$ é inxectiva, pois se $T(x) = T(x')$, entón:

$$d(f^i(x), f^i(x')) \leq d(f^i(x), f^i(T(x))) + d(f^i(T(x')), f^i(x')) \leq \varepsilon$$

para todo i , o que contradí que E sexa (n, ε) -separado. Así, $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$, e polo tanto:

$$s_n(\varepsilon, K) \leq r_n\left(\frac{1}{2}\varepsilon, K\right)$$

□

Corolario 2.48. *Temos:*

1. $r(\varepsilon, K) \leq s(\varepsilon, K) \leq r(\varepsilon, K)$
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, K)$

Definición 2.49. Dada $f : X \rightarrow X$ e $K \subset X$ compacto, definimos a entropía topológica de f con respecto a K como

$$h_t(f, K) := r(\varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, K)$$

e a entropía topológica de f será $h_t(f) := h_t(f, X)$.

Definición 2.50. Dados $f : X \rightarrow X$ e \mathcal{A} un recubrimiento de X , decimos que $E \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$ é un n -recubrimiento f e para se para todo $x \in X$ existe (A_0, A_1, \dots, A_n) tal que $f^k(z) \in a_k$ para todo $0 \leq k < n$.

Lema 2.51. *A entropía topológica de (f, \mathcal{A}) vén dada por:*

$$h_{top}(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n(f, \mathcal{A})$$

onde $M_n(f, \mathcal{A})$ é a cardinalidade mínima dun n -recubrimiento de (f, \mathcal{A}) .

Demostración. Asociado a cada $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{E}$ temos:

$$A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \in \mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})$$

Definindo:

$$\mathcal{U}'_n = \left\{ A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \mid (A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathcal{E} \right\}$$

onde \mathcal{E} é un n -recubrimiento minimal con $M_n(f, \mathcal{A}) = \text{Card}(\mathcal{E})$, obtemos un subrecubrimiento minimal de:

$$\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})$$

Polo tanto:

$$\text{Card}(\mathcal{E}) = \text{Card}(\mathcal{U}'_n) = N \left(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A}) \right)$$

E consecuentemente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n(f, \mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{Card}(\mathcal{E}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N \left(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A}) \right) = h_{top}(f, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.52. *Para X compacto e $f : X \rightarrow X$ continua cúmplese que $h(f) = h_t(f)$ onde $h(f)$ é a entropía definida en 2.41.*

Demostración. Sexa \mathcal{A} un recubrimento aberto finito de X e sexa $\beta > 0$ o número de Lebesgue de \mathcal{A} (isto é, para toda $B_\beta(x)$ existe $A(x) \in \mathcal{A}$ tal que $B_\beta(x) \subset A(x)$).

Sexa Q un conxunto (n, β) -separado maximal (é dicir, $\text{Card}(Q) = s_n(\beta, X)$). Para cada $z \in Q$, definimos:

$$B(z) = \{A_0(z), A_1(z), \dots, A_{n-1}(z)\}$$

onde $A_k(z) \in \mathcal{A}$ son tales que $B_\beta(f^k(z)) \subset A_k(z)$ para $0 \leq k < n$. Definimos $\mathcal{E}_n = \{B(z) \mid z \in Q\}$.

Vexamos que \mathcal{E}_n é un n -recubrimento para (f, \mathcal{A}) .

En efecto, para cada $x \in X$, existe $z_x \in Q$ tal que $d(f^k(x), f^k(z_x)) \leq \beta$ para $0 \leq k < n$. Se non fose así, habería algún $x \in X$ tal que para todo $z \in Q$ existiría algún k con $0 \leq k < n$ para o cal $d(f^k(x), f^k(z)) > \beta$. Isto significaría que $Q \cup \{x\}$ sería (n, β) -separado, contradicindo a maximalidade de Q .

Polo tanto, para cada $x \in X$ existe $z_x \in Q$ tal que $d(f^k(x), f^k(z_x)) \leq \beta$ para $0 \leq k < n$. Disto dedúcese que $f^k(x) \in B_\beta(f^k(z_x)) \subset A_k(z_x)$, o que implica que \mathcal{E}_n é un n -recubrimento para (f, \mathcal{A}) .

Isto demostra que $M_n(f, \mathcal{A}) \leq \text{Card}(\mathcal{E}_n) = \text{Card}(Q) = s_n(\beta, X)$. Polo tanto:

$$h_{\text{top}}(f, \mathcal{A}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\beta, X) = s(\beta, X).$$

Tomando o límite cando $\beta \rightarrow 0$, obtense:

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\{h_{\text{top}}(f, \mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ é un recubrimento aberto de } X\} \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} s(\beta, X) = h_t(f).$$

Agora, para demostrar a desigualdade inversa:

Sexa $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$ (n veces) un n -recubrimento para (f, \mathcal{A}) , e sexa R un conxunto $(n, d(\mathcal{A}))$ -separado, onde $d(\mathcal{A}) = \sup\{d(C) \mid C \in \mathcal{A}\}$ e $d(C) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in C\}$.

Para cada $x \in R$, definimos $g(x) = (A_0(x), \dots, A_{n-1}(x)) \in \mathcal{E}$ tal que $f^k(x) \in A_k(x)$ para $0 \leq k < n$. Se $g(x) = g(y)$, entón $A_k(x) = A_k(y)$ para todo k , e pódese garantir que:

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(A_k(x)) \leq d(\mathcal{A}).$$

Isto contradiría que R é $(n, d(\mathcal{A}))$ -separado. Polo tanto, $g : R \rightarrow \mathcal{E}$ é inxectiva, o que implica:

$$\text{Card}(\mathcal{E}) \geq \text{Card}(R).$$

Disto dedúcese que $M_n(f, \mathcal{A}) \geq s_n(d(\mathcal{A}), X)$, e polo tanto:

$$h_{\text{top}}(f, \mathcal{A}) \geq s(d(\mathcal{A}), X).$$

Tomando o supremo sobre todos os recubrimentos abertos \mathcal{A} , obtense usando que s é monótona decrecente:

$$h_{\text{top}}(f) \geq \sup\{s(d(\mathcal{A}), X) \mid \mathcal{A} \text{ é un recubrimento aberto de } X\} = h_t(f).$$

En conclusión, demostrouse que $h_{\text{top}}(f) \leq h_t(f)$ e $h_{\text{top}}(f) \geq h_t(f)$, o que implica a igualdade:

$$h_{\text{top}}(f) = h_t(f).$$

□

Este teorema proba a devandita equivalencia. A continuación o que faremos será ilustrar este concepto, facendo o cálculo da entropía para os exemplos de sistemas dinámicos da sección anterior.

2.3. Cálculo da entropía nalgúns exemplos

Como avanzaremos, procedemos ao cálculo da entropía dalgúns sistemas dinámicos salientables.

2.3.1. Entropía das rotacións no círculo

Imos ver cal é a entropía dunha rotación. Para iso imos ver o seguinte resultado de [3].

Teorema 2.53. *Sexa (X, d) un espazo métrico compacto e sexa $f: X \rightarrow X$ unha isometría continua, é dicir, $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in X$. Entón, $h(f) = 0$.*

Demostración. Dado que f é unha isometría, temos que $d(x, y) = d(f^n(x), f^n(y))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Polo tanto, $r_n(\varepsilon, X)$ non varía con n . Así,

$$h_\varepsilon(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r(n, \varepsilon)) = 0,$$

o que conclúe a proba. □

Obtemos como corolario que as rotacións no círculo teñen entropía nula.

2.3.2. Entropía da aplicación z^2 no círculo

Imos calcular a entropía do sistema dinámico (\mathbb{S}^1, f) onde $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é o mapa definido por $f(e^{i\theta}) := e^{i2\theta}$, que tamén se pode interpretar como $f(x) = 2x \pmod{1}$. Guiarémonos outra vez por [3].

Lema 2.54. *Sexan $x, y \in \mathbb{S}^1$. Entón,*

$$d(x, y) \leq \frac{1}{4} \implies d(f(x), f(y)) = 2d(x, y)$$

Demostración. Claramente, $d(x, y) = |x - y|$ cando $|x - y| \leq \frac{1}{2}$. Sexan x, y tales que $d(x, y) \leq \frac{1}{4}$. Isto significa que $|x - y| \leq \frac{1}{4}$.

Usando a definición de f , temos:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= d(2x \pmod{1}, 2y \pmod{1}) \\ &= \min(|2x - 2y \pmod{1}|, 1 - |2x - 2y \pmod{1}|). \end{aligned}$$

Notemos que $|2x - 2y| \leq \frac{1}{2}$, polo que $2x - 2y \pmod{1} = 2x - 2y$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= 2|x - y| \\ &= 2d(x, y). \end{aligned}$$

□

Lema 2.55. *Consideremos a familia de conxuntos diádicos $S_k := \{\frac{i}{2^k} \mid i \in \{0, 1, \dots, 2^k\}\}$. S_{n+k} é un conxunto (n, ε) -xerador.*

Demostración. Fixemos $\varepsilon > 0$. Escollamos $k \geq 2$ tal que $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^k}$. Notamos que para calquera $x \in S^1$, existe $i \in \{0, \dots, 2^{n+k} - 1\}$ tal que

$$x \in \left[\frac{i}{2^{n+k}}, \frac{i+1}{2^{n+k}} \right).$$

Sexa $y \in S_{n+k}$ calquera dos extremos dese intervalo diádico. Entón,

$$d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Usando o Lema 2.54, isto implica:

$$d(f(x), f(y)) = 2d(x, y) \leq \frac{2}{2^{n+k}} < \frac{1}{4}.$$

Polo tanto, podemos aplicar o lema de novo para obter:

$$d(f^2(x), f^2(y)) = 2d(f(x), f(y)) \leq \frac{2^2}{2^{n+k}}.$$

Procedendo recursivamente, para calquera j que satisfaga $0 \leq j < n$, obtense:

$$d(f^j(x), f^j(y)) = 2^j d(x, y) \leq \frac{2^j}{2^{n-k}} \leq \frac{2^{n-1}}{2^{n-k}} < \frac{1}{2^{k+1}} \leq \varepsilon.$$

Así, para calquera $x \in S^1$ temos:

$$\max_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y)) = d_n(x, y) < \varepsilon,$$

para algún $y \in S_{n+k}$, o que conclúe a proba. \square

Lema 2.56. S_{n-1+k} é un conxunto (n, ε) -separado.

Demostración. Fixamos $\varepsilon > 0$. Escollemos $k \geq 2$ tal que $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^k}$.

Sexan x, y dous puntos distintos en S_{n-1+k} . Queremos demostrar que $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. Isto significa que debemos mostrar que existe j con $0 \leq j \leq n-1$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$.

Se existe j tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \frac{1}{4}$, entón xa está demostrado, pois por construción $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Se non é este o caso, entón para todo j temos $d(f^j(x), f^j(y)) < \frac{1}{4}$, polo que podemos aplicar o Lema 2.54 $n-1$ veces para obter:

$$d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) = 2^{n-1} d(x, y).$$

Notemos agora que para todos $x, y \in S_{n-1+k}$ distintos, temos $d(x, y) \geq \frac{1}{2^{n-1+k}}$, o que nos dá:

$$2^{n-1} d(x, y) \geq \frac{2^{n-1}}{2^{n-1+k}} = \frac{1}{2^k} \geq \varepsilon,$$

o que completa a demostración. \square

Chegamos finalmente a poder probar o resultado que procurabamos.

Teorema 2.57. A entropía do sistema é $h(f) = \log 2$

Demostración. Sabemos polo lema 2.55 que S_{n+k} é un conxunto (n, ε) -xerador. Ten cardinalidade 2^{n+k} , xa que os numeradores das fraccións varían entre 0 e $2^{n+k} - 1$. Polo tanto,

$$s(n, \varepsilon) \leq 2^{n+k}.$$

Calculando a entropía:

$$h_\varepsilon(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{span}(n, \varepsilon, f)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+k) \log 2}{n} = \log 2.$$

Analogamente, como polo lema 2.56 S_{n-1+k} é un conxunto (n, ε) -separado, temos:

$$h_\varepsilon(f) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1+k) \log 2}{n} = \log 2.$$

Polo teorema do sandwich para límites, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(f)$ existe e é igual a $\log 2$. \square

2.3.3. Entropía para os difeomorfismos de Anosov lineares

Imos calcular a entropía do difeomorfismo de Anosov dado pola matriz. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ introducida en 2.25. Vemos primeiro un resultado auxiliar introducido en [1]

Proposición 2.58. *Sexa A unha matriz de enteiros 2×2 con determinante 1 e valores propios λ, λ^{-1} , onde $|\lambda| > 1$. Sexa $\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ o automorfismo hiperbólico do toro asociado. Entón, a entropía topológica de \hat{A} é:*

$$h(\hat{A}) = \log |\lambda|.$$

Demostración. A proba baséase en calcular o número mínimo de bólas necesarias para cubrir o toro baixo a distancia dinámica.

Consideramos a proxección natural $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, que é un homeomorfismo local. Escollemos unha métrica \tilde{d} en \mathbb{R}^2 invariante por traslacións enteiras, que induce unha métrica d en \mathbb{T}^2 .

Sexan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vectores propios unitarios de A correspondentes a λ e λ^{-1} . Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, escribimos $\mathbf{x} - \mathbf{y} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ e definimos:

$$\tilde{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|a_1|, |a_2|).$$

Unha bóla de radio ϵ na métrica dinámica \tilde{d}_n é un paralelogramo con lados $2\epsilon|\lambda|^{-n}$ (dirección \mathbf{v}_1) e 2ϵ (dirección \mathbf{v}_2). A área euclidiana desta bóla é $\leq 4\epsilon^2|\lambda|^{-n}$.

O número mínimo de bólas necesarias para cubrir \mathbb{T}^2 é:

$$\text{cov}(n, \epsilon, \hat{A}) \geq \frac{|\lambda|^n}{4\epsilon^2}.$$

Disto dedúcese que $h(\hat{A}) \geq \log |\lambda|$.

Existe un recubrimento do toro con $\leq \frac{9|\lambda|^n}{C\epsilon^2}$ bólas, onde C depende do ángulo entre \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . Logo, $h(\hat{A}) \leq \log |\lambda|$. \square

Consecuentemente, a entropía topológica do difeomorfismo dado pola matriz A é $h(A) = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2.3.4. Entropía para o shift

Imos calcular agora a entropía do shift. Se consideramos, como antes, un alfabeto, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $P^{\mathbb{Z}}$ o espazo dos shifts, σ un shift, e X un subshift. Temos o seguinte resultado:

Proposición 2.59. *A entropía topolóxica da aplicación shift restrinxida ao subshift X é*

$$h(\sigma|_X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |W_n(X)|$$

onde $W_n(X)$ é o conxunto de palabras de lonxitude n que hai en X .

remitímonos a [1] para a demostración. A continuación Imos intentar relacionar a entropía topolóxica do shift coa entropía da teoría da información. Sexa A un alfabeto, $A^{\mathbb{Z}}$ o espaz A -shift completo, σ unha aplicación shift e $p = (p_1, \dots, p_m)$ un vector non negativo tal que $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. O vector p define unha medida sobre o alfabeto $\{1, 2, \dots, m\}$. A medida produto asociada μ_p sobre A chámase unha medida de Bernoulli. Para un conxunto cilíndrico, temos

$$\mu_p \left(C_{j_1, \dots, j_k}^{n_1, \dots, n_k} \right) = \prod_{i=1}^k p_{j_i}.$$

Sexa $\xi = \{C_j^0 : j = 1, \dots, m\}$. Entón ξ é un xerador (unilateral ou bilateral) para σ , xa que $\text{diam} \left(\bigvee_{i=-m}^0 \sigma^i \xi \right) \rightarrow 0$ con respecto á métrica

$$d(\omega, \omega') = 2^{-l},$$

onde $l = \min\{|i| : \omega_i \neq \omega'_i\}$. Polo tanto,

$$h_{\mu_p}(\sigma) = h_{\mu_p}(\sigma, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i} \xi \right).$$

Para $i \neq j$, as particións $\sigma^i \xi$ e $\sigma^j \xi$ son independentes, así que

$$H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i} \xi \right) = nH(\xi).$$

Polo tanto,

$$h_{\mu_p}(\sigma) = H(\xi) = - \sum p_i \log p_i.$$

En [1] próbase que a entropía topolóxica de σ é $\log m$.

Capítulo 3

Homoloxía persistente e entropía

O noso obxectivo deste capítulo vai ser relacionar persistencia e entropía procurando unha desigualdade similar á da *conxectura de Shub*.

3.1. Conxectura de Shub

Antes de enunciarse a conxectura precisamos dalgunhas definicións e resultados previos.

Definición 3.1. Sexa V un \mathbb{F} -espazo vectorial e sexa $f : V \rightarrow V$ un mapa linear en V . Definimos o raio espectral de f como o máximo dos autovalores da matriz asociada a f . Ao conxunto dos autovalores de f ou denotarémolo por $\sigma(f) = \sigma(A)$ e o raio, por $\rho(f)$

Observación 3.2. A definición 3.1 podese xeralizar como o supremo do espectro dun elemento dunha álgebra de Banach. Deste xeito quedaría tamén definido para todas as aplicacións continuas entre espazos de Banach, pero pola complexidade desta definición decidimos restrinxirnos ao que expuxemos.

Teorema 3.3. *O raio espectral dunha aplicación linear f coincide coa norma de f^n elevada a $1/n$, i.e.,*

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n\|^{1/n}$$

Demostración. Traballaremos nesta proba coa matriz $A \in \mathcal{M}_{\dim V}$ asociada a f e consideremos a norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$. Probaremos primeiro o menor ou igual: Como $\rho(A)$ é un autovalor de A , temos que $A^n v = \rho(A)^n v$ para algún $v \in V$. Entón, collendo normas, $\|A^n v\| = |\rho(A)|^n \|v\|$, e consecuentemente, $\|A^n\| \geq \frac{\|A^n v\|}{\|v\|} = \rho(A)^n$, e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} \geq \rho(A)$.

Supoñamos agora que A sexa diagonalizable e consideremos a norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$ (i.e., a raíz da suma dos cadrados dos autovalores). Entón, existe unha matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{\dim V}$

e outra matriz $D \in \mathcal{M}_{\dim V}$ diagonal tal que $A = P^{-1}DP$. Temos que $\rho(A) = \rho(A^n)^{1/n} \leq \|A^n\|_F^{1/n} = \|PD^nP\|_F^{1/n} \leq \|P\|_F \|D\|_F^n \|P^{-1}\|_F = \|D\|_F^n$ co que obtemos o outro lado da desigualdade para matrices diagonalizables.

Se pola contra A non fose diagonalizable, como a norma de frobenius só depende dun lado da matriz, podemos considerar A triangular. Denotemos por $|A|$ a matriz A coas entradas en valor absoluto e consideremos unha secuencia de matrices triangulares diagonalizables non negativas $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{m \rightarrow +\infty} B_m = A$. A sucesión existe e é facil de construír (por exemplo collendo $B_m = |A| + 1/mI$). Como os B_m son diagonalizables, estamos no caso do paraágrafo anterior, e consecuentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_F^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \||A|^n\|_F^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|B_m^n\|_F^{1/n}$$

Collendo, agora o límite cando m tende a infinito en ambos extremos da desigualdade,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_F^{1/n} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \rho(B_m) = \rho(A)$$

Ademais, Tamén temos que $\rho(A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_F^{1/n}$, porque $\rho(A) = \rho(A^n)^{1/n} \leq \|A^n\|_F^{1/n}$ para todo n . Co que se conclúe a demostración. \square

Conxectura 3.4 (Shub). *Sexa M unha variedade compacta de dimensión finita e sexa $f : M \rightarrow M$ unha aplicación continua. Entón*

$$h(f) \geq \log \rho(f_*)$$

onde f_* denota o homomorfismo inducido $f_* : \bigoplus_{i=0}^{\dim(M)} H_i(M, \mathbb{R}) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{\dim(M)} H_i(M, \mathbb{R})$ e $\rho(f_*)$ é o raio espectral de f_* , i.e., $\rho(f_*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_*^n\|^{1/n}$

Esta conxectura probouse falsa en xeral, pero con algunhas modificacións si que se cumpre.

Teorema 3.5. *Se M é unha variedade compacta sen borde e diferenciable, $f : M \rightarrow M$ é un mapa continuo e $f_{*1} : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ é o morfismo inducido no primeiro grupo de homoloxía, entón:*

$$h(f) \geq \log(\rho(f_{*1}))$$

Teorema 3.6. *Sexa (X, d) un espazo métrico compacto que satisfai as seguintes propiedades:*

- *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que, se $x, y \in X$ son tales que $d(x, y) < \delta$ entón existe un camiño σ de x a y con diámetro menor que ε .*
- *Existe un ε_0 tal que todo camiño pechado de diámetro $\varepsilon < \varepsilon_0$ é homotopicamente trivial en X .*

Entón, para calquera mapa continuo $f : X \rightarrow X$, temos que $h(f) \geq \log(\rho(f_{*1}))$.

Referímonos a [18] para as demostracións destes resultados.

Isto fai que teñamos unha valiosa cota inferior para a entropía, que en moitos casos nos dá a igualdade. Vexámolo nalgúns exemplos da subsección 2.3.

Exemplo 3.7. Para as rotacións no círculo vimos en 2.3.1 que a entropía é nula polo que é evidente que acadamos a igualdade tendo en conta que o raio espectral das rotacións é 1.

Exemplo 3.8. Para o sistema dinámico introducido en 2.3.2, temos que a entropía de f é $\log 2$. Vexamos se a cota de 3.5 acada a igualdade. É fácil comprobar que o primeiro grupo de homoloxía singular do círculo $H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ é \mathbb{R} . Por outra banda, observando que f o que fai é dar o dobre de voltas, temos que o morfismo inducido $f_{*1}([u]) = 2[u]$ polo que obtemos que o único elemento do espectro $\sigma(f_{*1})$ de f_{*1} é o 2, polo que o raio espectral $\rho(f_{*1})$ de f_{*1} é 2 e obtemos que si se acada a igualdade.

Exemplo 3.9. Para o exemplo de difeomorfismo linear de Anosov exposto en 2.3.3 tamén se acade a igualdade como consecuencia inmediata de 2.58 e 3.3 porque a matriz asociada a f é a mesma que a asociada a f_{*1} .

Exemplo 3.10. Para encontrar un exemplo no que non se dea a igualdade consideramos $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z_1| + |z_2| = 1\}$ e $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ dado por $f(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^2)$. Como, por ser \mathbb{S}^3 unha 3-esfera, $H_1(\mathbb{S}^3, \mathbb{R}) \simeq 0$ obtemos que o morfismo inducido $f_{*1} : 0 \rightarrow 0$ é trivial, polo que, por convención, raio é 1. Ademais, razoando como en 2.3.2 temos que a entropía é estritamente positiva, co que obtemos finalmente que non se acada a igualdade.

Observación 3.11. Notemos que o exemplo 3.10 non entra non é un caso que atinxa o teorema 3.5

3.2. Version persistente da conxectura de Shub

En [13] introdúcese unha 'homoloxía de escala', que usa unha noción de continuidade máis laxa para abordar a conxectura de Shub doutro xeito. Inspirados por iso e por [18] imos facer unha 'versión persistente deses resultados.

Sexa (M, g) unha variedade riemanniana compacta, con $d : M \rightarrow [0, +\infty]$ a distancia asociada á métrica g . Escollemos α menor ca o raio de inxectividade de M , i.e., o maior $x > 0$ tal que para todo $x \in M$ a respectiva aplicación exponencial é inxectiva nunha bóla de raio x .

Definición 3.12. Dicimos que un conxunto $P \subset M$ é ε -denso se para todo $x \in M$ existe $y \in P$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Lema 3.13. *Sexa $P \subset M$ un conxunto $\varepsilon/4$ -denso, $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon \leq t < \alpha$ e sexa u un 1-ciclo de $C_1(VR_t(P))$. Entón existe un 1-ciclo c de $C_1(VR_\varepsilon(P))$ tal que u e c son homólogos en $VR_t(P)$, i.e., $u \in [c] \in H_1(C(VR_t(P), \mathbb{F}))$.*

Demostración. Consideremos un símplice $[x, y] \in VR_t(P)$. Sexa $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a xeodésica de mínima distancia que une x con y (existe porque M é unha variedade riemanniana completa ao ser compacta). Sexa B_1, B_2, \dots, B_k un recubrimento de $\gamma([0, 1])$ formado por bólas centradas en $\gamma(t_i)$ con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ e raio $\varepsilon/4$ tales que $d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) < \varepsilon/2$. para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ collemos $p_i \in B_i \cap P$ con $p_0 = x, p_k = y$. Definimos agora a cadea $c = \sum_{i=1}^k [p_{i-1}, p_i]$. Temos $d(p_{i-1}, p_i) < d(p_{i-1}, \gamma(t_{i-1})) + d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), p_i) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon$, polo que $c \in C_1(VR_t(P), \mathbb{F})$ para todo $t \geq \varepsilon$. Sexa $T \in [0, 1]$ tal que $\gamma([0, T])$ e $\gamma([T, 1])$ teñen a mesma lonxitude. Sexa $p_j \in B(\gamma(T), \varepsilon/4) \cap P$. De novo, pola desigualdade triangular, temos que $\max\{d(x, p_j), d(y, p_j)\} \leq \frac{t+\varepsilon}{2} \leq t$. Polo tanto $[x, p_j, y] \in VR_t(P)$. Analogamente e de forma inductiva deducimos que $[x, p_{j-1}, p_j], [y, p_{j-1}, p_j] \in VR_t(P)$. Disto dedúcese que c e $[x, y]$ son homólogos en $VR_t(P)$. \square

Sexa (M, f) un sistema dinámico definido en M . Consideremos un conxunto $Q_n \subset M$ ($n, \varepsilon/6$)-denso con $\varepsilon < \alpha$. Imos intentar definir un morfismo $f_*^{n-1} : H_1(VR_t(Q_n)) \rightarrow H_1(VR_t(f^{n-1}(Q_n)))$, con $\varepsilon \leq t < \alpha$. Isto non é inmediato, xa que f non é unha aplicación simplicial, i.e., non conserva os símplices. O que imos facer é xogar coa homoloxía para obter unha aplicación ben definida.

Sexa u un 1-ciclo de $C(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$. Podemos escribir $u = \sum_{i \in I} a_i \sigma_i$ con $I = \{0, 1, \dots, b\}$, $a_i \in \mathbb{F}$, $\sigma_i = [q_{i-1}, q_i]$, e $q_i \in Q_n$ para todo $i \in I$. Observamos que os símplices son consecutivos porque, doutro xeito, u deixaría de ser un 1-ciclo. Ademais, é claro que $q_0 = q_b$ por ser u un 1-ciclo.

Antes de seguir observemos que como Q_n é $(n, \varepsilon/6)$ -xerador entón é $\varepsilon/6$ -denso para a distancia dinámica d_n^f . En particular, Q_n e $f^{n-1}(Q)$ serán $\varepsilon/6$ -densos para a distancia estática d .

Agora para cada $i \in I$ consideramos a xeodésica de mínima distancia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que une q_{i-1} con q_i , que, de novo, sabemos que existe porque M é compacta. Sexa B_0, \dots, B_k un recubrimento finito de $\gamma([0, 1])$ formado por bólas de raio $\varepsilon/6$ centro $\gamma(t_i)$ con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ e tales que $\varepsilon/12 < d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) < \varepsilon/6$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$. Collemos enton $p_i \in Q_n \cap B_i$ que sabemos que non é baleiro pola densidade de Q , ademais, impoñemos $p_0 = q_{i-1}$ e $p_k = q_i$. Temos que $d(p_{i-1}, p_i) \leq d(p_{i-1}, \gamma(t_{i-1})) + d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), p_i) \leq \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/2$. Entón, se definimos $c_i = \sum_{j=1}^k [p_{j-1}, p_j] \in C(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$ temos que $\tilde{f}^{n-1}(c_i) := \sum_{j=1}^k [f^{n-1}(p_{j-1}), f^{n-1}(p_j)]$ é unha 1-cadea de $C_1(VR_{\varepsilon/2}(f^{n-1}(Q_n)))$ e en particular tamén será unha 1-cadea de $C_1(VR_t(f^{n-1}(Q_n)))$.

Proposición 3.14. *O homomorfismo $f_*^{n-1} : H_1(VR_t, \mathbb{F}) \rightarrow H_1(VR_t, \mathbb{F})$ definido para $u =$*

$\sum_{i \in I} a_i \sigma_i$, $f_*^{n-1}(u) := \sum_{i \in I} a_i \tilde{f}^{n-1}(c_i)$, onde os c_i están definidos como acabamos de explicar, está ben definido.

Demostración. Temos que ver que $f_*^{n-1}([u])$ non depende do representante da clase de u nin dos c_i que escollemos na construción. Vexámolo:

Fixado u sexa para $c'_i = \sum_{j=1}^{k'} [p'_{j-1}, p'_j] \in C(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$ outra cadea coas mesmas propiedades que $c_i = \sum_{j=1}^k [p_{j-1}, p_j] \in C(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$. Temos que, para cada índice $j \in \{1, \dots, k'\}$ existe un índice $m_j \in \{1, \dots, k\}$ tales que $d_f^n(p_j, p'_{m_j}) < \varepsilon/2$ e $d_f^n(p_{j+1}, p'_{m_j}) < t$ por construción das bólas. Isto fai que os símlices $[f^{n-1}(p_j), f^{n-1}(p_{j+1}), f^{n-1}(p'_{m_j})]$ e $[f^{n-1}(p_j), f^{n-1}(p'_{m_j}), f^{n-1}(p'_{m_{j+1}})]$ (se $m_j = k$, entón sería o símlice $[f^{n-1}(p_j), f^{n-1}(p'_{k'}), f^{n-1}(p'_{m_1})]$) poidan estar definidos en $VR_t(f^{n-1}(Q_n), \mathbb{F})$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, o que provoca unha equivalencia homolóxica entre c_i e c'_i .

Sexa agora $u' \in [u]$ (obviamente $u' \in C(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$). Supoñamos, por simplicidade, que u e u' só se distinguen nun único 2-símlice de $VR_\varepsilon(Q_n)$. O caso xeral veriámolo por indución. Sabemos que $d(x, y)$, $d(y, z)$, $d(x, z) \leq \varepsilon < \alpha$ e recordemos que toda bóla na métrica d de raio menor que α é convexa. Sexa \exp_x a aplicación exponencial en x e sexan x' , y' , z' os puntos correspondentes en $T_x(M)$ (é claro que x' se corresponde coa orixe). As xeodésicas que unen x , y , z en M levántanse a camiños en $T_x M$ que unen x' , y' , z' onde os camiños que unen x' con y' e z' son segmentos rectos, pero o camiño de y' a z' pode ter certa distorsión. Sexa $\lambda(t)$ ese camiño e consideremos para cada $t \in [0, 1]$ os camiños radiais $\varphi(s, t) = (1 - s) + \lambda(t) \cdot s$. É claro que φ parametriza unha superficie en $T_x M$ que se proxecta pola aplicación exponencial en M , sexa Δ a imaxe desa superficie. Sexa B_1, \dots, B_k un recubrimento aberto de Δ formado por bólas na distancia dinámica de raio $\varepsilon/6$ centradas en puntos da forma $d_n f(\varphi(s, t))$. Sen perda de xeneralidade, asumiremos que os centros destas bólas se escriben da forma $\varphi(s_i, t_j)$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, de modo que $0 \leq s_i < s_{i+1} \leq 1$, $0 \leq t_j < t_{j+1} \leq 1$, $s_0 = 0 = t_0$, $s_n = 1 = t_m$ e

$$d_n f(\varphi(s_i, t_j), \varphi(s_{i+1}, t_j)) < \varepsilon/6, \quad d_n f(\varphi(s_i, t_j), \varphi(s_i, t_{j+1})) < \varepsilon/6.$$

Sexa $q_{i,j} \in Q_n$ tal que $d_n f(\varphi(s_i, t_j), q_{i,j}) < \varepsilon/6$. Da desigualdade triangular obtemos que:

$$d_n f(q_{i,j}, q_{i+1,j}) < \varepsilon/2, \quad d_n f(q_{i,j}, q_{i,j+1}) < \varepsilon/2.$$

De onde se deduce que os 2-símlices:

$$[f^{n-1}(q_{i,j}), f^{n-1}(q_{i,j+1}), f^{n-1}(q_{i+1,j+1})] \quad \text{e} \quad [f^{n-1}(q_{i,j}), f^{n-1}(q_{i+1,j}), f^{n-1}(q_{i+1,j+1})]$$

están definidos en $VR_\varepsilon(f^{n-1}(Q))$ e dan lugar a unha equivalencia de homoloxía entre a cadea $\sum_i [q_{i-1,0}, q_{i,0}] + \sum_j [q_{1,j-1}, q_{1,j}]$ e a cadea $\sum_i [q_{i-1,1}, q_{i,1}]$. Estas son cadeas usadas para definir f_*^{n-1} e polo tanto $f_*^{n-1}(u')$ é homólogo a $f_*^{n-1}(u)$ en $VR_\varepsilon(f^{n-1}(Q_n))$. \square

Proposición 3.15. *Na construción do morfismo de 3.14 podemos coller un $c_i = \sum_{j=1}^k [p_{j-1}, p_j] \in C_1(VR_t(Q_n), \mathbb{F})$ construído como 3.2 con $k \leq \#Q_n$*

Demostración. Supoñamos que c_i é unha cadea con $k > \#Q_n$, entón existiría unha sub-1-cadea $d_i = \sum_{j=l}^r [p_{j-1}, p_j]$ de c_i que é un ciclo ($p_{l-1} = p_r$). Pódese probar que d_i é fronteira dunha 2-cadea de $C_1(VR_t(Q_n))$.

En efecto, ao ser γ unha xeodésica minimizante, para calquera par de subíndices i, j entre $l-1$ e r , i.e., $l-1 < i, j < r$ temos que $d(\gamma(t_{l-1}), \gamma(t_r)) \geq d(\gamma(t_i), \gamma(t_j))$. Sexa $\rho = d(\gamma(t_{l-1}), \gamma(t_r))$. Temos que $\rho < \varepsilon$, pois $d(\gamma(t_{l-1}), \gamma(t_r)) \leq d(\gamma(t_{l-1}), p_{l-1}) + d(p_{l-1}, p_r) + d(p_r, \gamma(t_r)) < \varepsilon/2 + 0 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Por construción temos que existe un $l-1 \leq J \leq r$ tal que $d(\gamma(t_{l-1}), \gamma(t_J)) < \rho/2 + \varepsilon/6$ e $d(\gamma(t_r), \gamma(t_J)) < \rho/2 + \varepsilon/6$. Consecuentemente, se $l-1 \leq i, j \leq J$ entón $d(p_i, p_j) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) + 1/3 \leq d(\gamma(t_{l-1}), \gamma(t_J)) + 1/3 < \rho/2 + \varepsilon/6 + 1/3 < \varepsilon$. Analogamente se $J \leq i, j \leq r$, $d(p_i, p_j) \leq d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) + 1/3 \leq d(\gamma(t_r), \gamma(t_J)) + 1/3 < \rho/2 + \varepsilon/6 + 1/3 < \varepsilon$. Consecuentemente os símplexes da forma $[p_i, p_{i+1}, p_l]$ están definidos en $VR_\varepsilon(Q_n)$ o que anula homoloxicamente o ciclo $c_i = \sum_{j=1}^k [p_{j-1}, p_j]$ \square

Consideremos unha nube de puntos $P \subset M$ e $\varepsilon > 0$ un número real positivo.

Definición 3.16. Sexa $c = \sum_{i \in I} a_i \sigma_i \in C_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})$ unha 1-cadea finita dun complexo simplicial K , con $a_i \in \mathbb{F}$ coeficientes do corpo \mathbb{F} , $\sigma_i \in K_j$ j -símplexes e I o conxunto finito de índices. Definimos o operador $\|\cdot\|_\varepsilon : C_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})$ como a suma dos coeficientes, i.e.,

$$\|c\|_\varepsilon := \sum_{i \in I} |a_i|$$

para. Definimos tamén $\|\cdot\|_\varepsilon : H_1(C_\bullet(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\|[u]\|_\varepsilon := \inf_{[v]=[u]} \{\|v\|_{C_j}\}$

Proposición 3.17. *A función $\|\cdot\|_\varepsilon$ definida en $C_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R})$ é unha norma.*

Demostración. $\|c\|_\varepsilon = \sum_{i=1}^n |a_i| \geq 0$ pois é suma de valores absolutos. $\|c\|_\varepsilon = 0 \iff |a_i| = 0$ para todo $i \iff a_i = 0$ para todo $i \iff c = 0$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda c\|_\varepsilon = \left\| \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) \sigma_i \right\|_\varepsilon = \sum_{i=1}^n |\lambda a_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |a_i| = |\lambda| \|c\|_\varepsilon.$$

Para $c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i$ e $d = \sum_{i=1}^n b_i \sigma_i$,

$$\|c + d\|_\varepsilon = \left\| \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \sigma_i \right\|_\varepsilon = \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|) = \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |b_i| = \|c\|_\varepsilon + \|d\|_\varepsilon.$$

□

Proposición 3.18. $\|\cdot\|_\varepsilon$ é unha norma para o espazo vectorial $H_1(C_\bullet(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R}))$

Demostración. É claro que $\|[u]\|_\varepsilon \geq 0$ para todo $[u] \in H_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R})$. Antes de probar que é definida positiva imos ver as outras condicións. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $[c] \in H_1(C_\bullet(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R}))$,

$$\begin{aligned} \|\alpha[c]\|_\varepsilon &= \inf\{\|z\|_\varepsilon \mid [z] = \alpha[c]\} \\ &= \inf\{\|\alpha w\|_\varepsilon \mid [w] = [c]\} \quad (\text{pois } [z] = \alpha[c] \Leftrightarrow z = \alpha w \text{ con } [w] = [c]) \\ &= \inf\{|\alpha| \|w\|_\varepsilon \mid [w] = [c]\} \quad (\text{por homoxeneidade en } C_1) \\ &= |\alpha| \inf\{\|w\|_\varepsilon \mid [w] = [c]\} \\ &= |\alpha| \|[c]\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Para $[c_1], [c_2] \in H_1(C_\bullet(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R}))$,

$$\begin{aligned} \|[c_1] + [c_2]\|_\varepsilon &= \inf\{\|z\|_\varepsilon \mid [z] = [c_1] + [c_2]\} \\ &= \inf\{\|z_1 + z_2\|_\varepsilon \mid [z_1] = [c_1], [z_2] = [c_2]\} \\ &\leq \inf\{\|z_1\|_\varepsilon + \|z_2\|_\varepsilon \mid [z_1] = [c_1], [z_2] = [c_2]\} \\ &= \inf\{\|z_1\|_\varepsilon \mid [z_1] = [c_1]\} + \inf\{\|z_2\|_\varepsilon \mid [z_2] = [c_2]\} \\ &= \|[c_1]\|_\varepsilon + \|[c_2]\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Vexamos agora que $\|[u]\|_\varepsilon = 0 \iff [u] = 0$. Por ser $\|[u]\|_\varepsilon = 0$ temos que existe unha sucesión de ciclos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $[z_n] = [u] \in H_1(C_\bullet(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R}))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n\|_\varepsilon = 0$. Ademais, por ser $[u] = [z_n]$, existe $w_n \in C_2(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R})$ tal que $z_n = u + \partial w_n$, polo que collendo o límite en ambos lados da igualdade, obtemos $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u + \partial w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u + \lim_{n \rightarrow +\infty} \partial w_n$ polo que $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \partial w_n$. Disto, deducimos que u é unha fronteira xa que ∂ é un operador linear, e en consecuencia $\partial(C_2(VR_\varepsilon(P), \mathbb{R}))$ é pechado. □

Observación 3.19. Para un corpo arbitrario \mathbb{F} non é certo que $\|\cdot\|_\varepsilon$ sexa unha norma.

Proposición 3.20. Sexa Q_n un conxunto $(n, \varepsilon/6)$ -xerador, con $\varepsilon < \alpha$. Entón

$$\|f_*^{n-1}([u])\|_\varepsilon \leq \#Q_n \|[u]\|_\varepsilon$$

Demostración. Sexa $u = \sum_i a_i \sigma_i$ o mínimo da súa clase (sempre se acada o infimo), i.e., $\|[u]\|_\varepsilon = \sum_i |a_i|$. Pola definición de f_*^{n-1} , e considerando os c_i como antes,

$$\|f_*^{n-1}([u])\|_\varepsilon = \left\| \sum_i a_i \tilde{f}^{n-1}(c_i) \right\|_\varepsilon \leq \sum_i |a_i| \|\tilde{f}^{n-1}(c_i)\|_\varepsilon \leq \#Q \sum_i |a_i| = \#Q_n \|[u]\|_\varepsilon$$

□

Sexa $\varepsilon < \alpha$ e $\varepsilon \leq t < \alpha$. Sexa $P \subset M$ unha nube de puntos $\varepsilon/8$ -densa e $Q_n \subset M$ un conxunto $(n, \varepsilon/12)$ -xerador.

Proposición 3.21. *Existen dúas aplicacións $\pi_{Q_n} : f^{n-1}(Q_n) \rightarrow P$ e $\pi : P \rightarrow Q_n$ dúas 'proxeccións' tales que $d(p, \pi_P(p)) < \varepsilon/8$ e $d(q, \pi(Q_n)) < \varepsilon/8$.*

Demostración. Podemos garantir a existencia de ambas porque tanto Q_n como P son $\varepsilon/8$ densos. \square

Consideremos, como antes, $u = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i [p_{i-1}, p_i] \in H_1(VR_t(P), \mathbb{F})$ para un $n \in \mathbb{N}$ con $p_0 = p_n$. Definimos $\tilde{\pi}_P : H_1(VR_t(P), \mathbb{F}) \rightarrow H_1(\pi_P(VR_t(P)), \mathbb{F})$ e $\tilde{\pi}_P(u) := \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i [\pi_P(p_{i-1}), \pi_P(p_i)]$. Como $u \in VR_t(P)$, polo lema 3.13, existe $v \in VR_{\varepsilon/2}(P)$ tal que $[u] = [v] \in VR_t(P)$, polo que o nacemento da clase persistente de u é anterior a $\varepsilon/2$, e a de morte, posterior a t . Polo teorema de estabilidade (1.79) temos que $\pi_P(u)$ define unha clase persistente en $H_1(VR_{\bullet} \pi_P(K) \mathbb{F})$ que está viva (como mínimo) entre os tempos $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$ e $t - \varepsilon/4$ xa que $d_{GH}(P, \pi_P(P)) \varepsilon/8$ pola construción de π_P .

Definindo $\pi_{*Q_n} : H_1(VR_t(Q_n), \mathbb{F}) \rightarrow H_1(\pi_P(VR_t(Q_n)), \mathbb{F})$ como $\pi_{*Q_n}([u]) := \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i [\pi_Q(p_{i-1}), \pi_{Q_n}(p_i)]$ e analogamente para P e razoando como no parágrafo anterior obtemos que se $t > 3\varepsilon/2$ entón $\tilde{\pi}_{Q_n} \circ f_*^{n-1} \circ \pi_{*P}([u])$ está viva en $H_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})$.

$$I_{[u]} \subset \left[\frac{\varepsilon}{2}, t \right] \xrightarrow{\tilde{\pi}_P} I \subset \left[\frac{3\varepsilon}{4}, t - \frac{\varepsilon}{4} \right] \xrightarrow{f_*^{n-1}} I \subset \left[\frac{3\varepsilon}{4}, t - \frac{\varepsilon}{4} \right] \xrightarrow{\tilde{\pi}_Q} I \subset \left[\varepsilon, t - \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

Corolario 3.22. *Sexan $\varepsilon < t < \alpha$, P e Q_n como en 3.21 e $u \in C_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})$ con tempo de vida $I_{[u]} \subset [\varepsilon/2, 3\varepsilon/2]$. Entón*

$$\| \pi_{*Q} \circ f_*^{n-1} \circ \pi_{*P}([u]) \|_\varepsilon \leq \#Q_n \| [u] \|_\varepsilon$$

Demostración. É inmediato da proposición 3.20 tendo en conta que polo exposto no parágrafo anterior $\pi_{*Q_n} \circ f_*^{n-1} \circ \pi_{*P}([u]) \in H_1(VR_\varepsilon(P), \mathbb{F})$ e nin π_{*P} nin π_{*Q_n} alteran a norma. \square

Notación 3.23. Sexa $R \in M$ unha nube de puntos arbitraria. Dados $\alpha, \beta > 0$ con $\alpha \leq \beta$, denotamos por $i_*^{\alpha, \beta} : H_1(VR_\alpha(R), \mathbb{F}) \rightarrow H_1(VR_\beta(R), \mathbb{F})$ o morfismo inducido pola inclusión $i^{\alpha, \beta} : VR_\alpha(R) \rightarrow VR_\beta(R)$

Conxectura 3.24. *Sexan $P, Q_n, \pi_{*P}, \pi_{*Q_n}$ e ε como antes. Entón, o límite de 3.25 non depende dos conxuntos Q_n escollidos.*

Definición 3.25. Ao límite

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \left(\frac{\| \pi_{*Q_n} \circ f_*^{n-1} \circ \pi_{*P}([u]) \|_\varepsilon}{\| [u] \|_\varepsilon} \right)^{1/n} \mid 0 \neq [u] \in i_*^{\varepsilon/2, 3\varepsilon/2} \right\}$$

chamarémolo raio espectral persistente e denotarémolo $\rho_{\varepsilon, P, Q_n}$.

Conxectura 3.26. *Sexan $P, Q_n, \pi_{*P}, \pi_{*Q_n}$ e ε como antes. Entón, o límite de 3.25 non depende dos conxuntos Q_n escollidos.*

Conxectura 3.27. *O raio espectral persistente do morfismo inducido por un mapa continuo nunha variedade coincide co raio espectral do mapa.*

Observación 3.28. Aquí o raio espectral do mapa é unha xeralización de 3.1 como explicamos en 3.2

Observación 3.29. Se a conxectura 3.32 resulta ser certa, significaría que demos cunha demostración alternativa de 3.5

Corolario 3.30. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \log(\rho_{\varepsilon, P, Q_n}) \leq r(f, \varepsilon)$

Demostración. Séguese inmediatamente de 3.22 tomando límites en ambos lados da desigualdade (notemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \#Q = s(\varepsilon)$) □

Corolario 3.31. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \log(\rho_{\varepsilon, P, Q_n}) \leq h(f)$

Demostración. Séguese do Corolario 3.30 tomando o límite cando ε tende a cero e observando a definición de entropía 2.49 □

Conxectura 3.32. *O raio espectral persistente do morfismo inducido por un mapa continuo nunha variedade coincide co raio espectral do mapa.*

Observación 3.33. Aquí o raio espectral do mapa é unha xeralización de 3.1 como explicamos en 3.2

Observación 3.34. Se a conxectura 3.32 resulta ser certa, significaría que demos cunha demostración alternativa de 3.5

Observación 3.35. Evidentemente, puidemos escribir os resultados anteriores sen considerar as proxeccións π_Q e π_P , e sería máis sinxelo. A razón principal é computacional: non temos acceso aos conxuntos Q_n , mentres que é ben máis sinxelo encontrar unha nube de puntos ε -densa.

Observación 3.36. A interese destes resultados é a seguinte: consideremos un conxunto pechado atractor $A \subset M$ e $U \subset M$ aberto tal que $A \subset U$, poderíamos facer unha versión dos resultados anteriores con P $\varepsilon/12$ denso en U e Q $(n, \varepsilon/6)$ -xerador de A .

Así, o raio espectral limita inferiormente a entropía de $f|_A$. A vantaxe disto é que un aberto U pode ser non trivial homolóxicamente mesmo se o ambiente M o é, polo que obteríamos cotas non triviais para a entropía a partir do raio espectral persistente.

Desgraciadamente, debido ás limitacións deste proxecto, non deu tempo a avanzar máis nesta dirección, pero, sen dúbida será obxecto de próximos desenvolvementos.

3.3. Algoritmo para o cálculo do raio espectral persistente

Motivados polos resultados da sección anterior imos intentar conseguir un algoritmo encontre unha cota inferior da entropía dun sistema dinámico. Para iso, ímonos servir da librería “Ripser” dispoñible para Python que, entre outras cousas, dada unha nube de puntos, calcula o seu diagrama de persistencia.

Observación 3.37. Se ben é certo que a librería Ripser traballa con cohomoloxía en vez de con homoloxía, o diagrama de persistencia resultante é o mesmo (este resultado é coñecido como a dualidade de Poincaré, pero por non termos falado nada de cohomoloxía non imos profundizar máis).

Observación 3.38. Motivados pola Observación 3.37, usaremos a librería gudhi de onde se poden obter as ferramentas para crearmos a función “cocycle_to_cycle(cociclo, complexo)”, que nos devolverá o ciclo de norma mínima.

Observación 3.39. Imos usar tamén unha subrutina “calculaVR(P, ε)” que o que fai é calcular o complexo $VR_\varepsilon(P)$. É fácil encontrar subrutinas semellantes en internet.

Observación 3.40. Outro obxectivo intermedio será encontrar o punto medio da xeodésica minimizante que une dous puntos de M . Para iso pódense empregar diferentes algoritmos observando que o punto que nos interesa será un $z \in M$ tal que $z = \arg \min_{p \in M} (d(x, p) + d(y, p))$ (hai unha función distanciapor ser M riemanniana). Nós recomendaremos o descenso do gradiente por termolo visto no grao. Á función que calcule este punto chamaremos “mid(x,y)”

Observación 3.41. A última función que introduciremos será un booleano $\text{bool}(\text{ciclo}, P, \varepsilon)$ que devolverá true se “ciclo” $\in H_1(VR_\varepsilon(P))$. O que este booleano faría sería comprobar se existe unha 2-cadea en $VR_\varepsilon(P)$ tal que a súa fronteira sexa “ciclo”.

Sexa $\varepsilon > 0, M \subset \mathbb{R}^n$ unha variedade riemanniana e P unha nube de puntos ε -densa.

Algorithm 1 Cálculo do raio espectral persistente

```

VR=calculaVR(P,ε/2)
resultados = Ripser(X, maxdim = 1, do_cocycles = True)
diagramas = resultados['dgms']
cociclos = resultados['cocycles']
for all  $i$  índices de diagramas[1] do
    if diagramas[1][i].nacimiento  $\leq \varepsilon/2$  e diagramas[1][i].morte  $\geq 3\varepsilon/2$  then
        classe = i
        return
    end if
end for
cociclo = cociclos[1][classe]
ciclo=cocycle_to_cycle(cociclo, VR)
ciclorma= #ciclo
fciclo= simplices de ciclo collendo como novos vertices a imaxe por  $f^{n-1}$ 
while bool(fciclo,  $f^{n-1}(P), \varepsilon/2$ )== False do
    for all simplices  $\sigma = [x, y]$  en ciclo do
        if bool(fciclo,  $f^{n-1}(P), \varepsilon/2$ )== True then return
        end if
        ciclo= ciclo  $\sigma$ 
        ciclo= ciclo  $\cup [x, mid(x, y)] \cup [mid(x, y), y]$ 
        fciclo= fciclo  $[f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)]$ 
        ciclo= ciclo  $\cup [f(x), f(mid(x, y))] \cup [f(mid(x, y)), f(y)]$ 
    end for
end while
fnorma= #fciclo
raio=fnorma/ciclorma

```

Anexo A

Entropía dun diagrama de persistencia

A continuación veremos a entropía para diagramas de persistencia, un concepto deste século, baseado na entropía de Shannon. A información deste apartado vén de [?].

Definición A.1. Sexa K un complexo simplicial con $|K| = n$ e $\mathbb{F} = \{K_0 \subset \dots \subset K_n = K\}$ unha filtración. Un filtro sobre \mathbb{F} é un unha función bixectiva $f : K \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que se $\sigma \subset \tau$, entón $f(\sigma) < f(\tau)$, e ademais, a filtración asociada ao filtro, $K_t = \{f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(t)\}$, respecta a orde preestablecida por \mathbb{F} .

Observación A.2. Facendo un certo abuso de notación, identificaremos o filtro coa súa filtración inducida.

Proposición A.3. *Dado un filtro F sobre un complexo simplicial K , existe unha función ben definida $f : K \rightarrow \{-1, +1\}$ que asigna a cada símplice $\sigma_t \in K$ un signo positivo se provoca o nacemento dunha nova clase de homoloxía, ou negativo se, pola contra, a destrúe.*

Demostración. □

Teorema A.4. *Dado un complexo simplicial K , un grao de homoloxía k , e un filtro F , a cardinalidade do código de barras é*

$$\#Bar_k(F) = \beta_k(F) + \sum_{j=k+1}^{\#K} (-1)^{k+1-j} (\#K_j - \beta_j) \quad (\text{A.1})$$

É dicir, é independente do filtro escollido.

Demostración. Por unha banda, os intervalos de lonxitude infinita coinciden cos números de Betti persistentes. Da outra banda, pola proposición A.3, contar o número de intervalos finitos é equivalente a encontrar o número d_{k+1} de $(k+1)$ -símplices negativos. Temos que $d_0 = d_{n+1} = 0$

e $\#K_k = b_k + d_k$ e $\beta_k = b_k - d_{k+1}$, onde d_k é o número de k -símplices positivos. Entón, $d_n = \#K_n - b_n = \#K_n - \beta_n$, e por indución, obtemos:

$$d_k = \#K_k - b_k = \#K_k - \beta_k - d_{k+1} = \#K_k - \beta_k - \sum_{j=k+1}^n (-1)^{k+1-j} (\#K_j - \beta_j) = \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} (\#K_j - \beta_j)$$

□

Corolario A.5. *A característica de euler $\chi(K)$ pode ser expresada como a suma alternada dos números de Betti, i.e.,*

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \#K_j = \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta^j$$

Demostración. Séguese inmediatamente da proba anterior, tendo en conta que $d_0 = 0$. □

Corolario A.6. *A característica de Euler é invariante por homoloxía e, consecuentemente, por homotopías.*

Se non temos un xeito uniforme de construír filtros é posible que acabemos. Ademais, se consideramos un obxecto topolóxico con forma, por exemplo de parábola, se ordeamos os vértices de esquerda a dereira non aparecerá ningún burato, pero se or ordeamos de abaixo, haberá un burato ata a eventual incorporación do vértice máis alto.

Un concepto esencial da persistencia homolóxica é que as características que sobreviven moito no tempo son as importantes, mentres que as outras son interpretadas como ruído. É este o motivo da introdución da entropía nesta área

Definición A.7. Dado un filtro F e o seu correspondente diagrama de persistencia $Bar(F) = \{(a_j, b_j) : j \in J\}$, definimos a entropía de F como

$$E(F) = - \sum_{j \in J} p_j \cdot \log(p_j) \tag{A.2}$$

onde $p_j = (b_j - a_j) / \sum_{i \in J} (b_i - a_i)$

Observación A.8. Aos intervalos da forma $[a, \infty)$, podemos asignarlles a lonxitude $|F| + 1 - a$.

A partir desta definición estudáronse algoritmos para encontrar o filtro con entropía mínima (intuitivamente isto sería que todos os intervalos tivesen lonxitudes similares). Un resultado interesante á hora de deseñar ese algoritmo é o seguinte:

Teorema A.9. *Sexan K e F un complexo simplicial e un filtro, respectivamente e $Bar(K, F) = \{(a_j, b_j) : j \in J\}$. Supoñamos que $b_j - a_j = \text{cons sexa igual para todo } j \in J \text{ excepto para un certo } i \in J \text{ con lonxitude } \mathcal{L} \in [m, M] \subset [1, \#K]$. Entón o valor mínimo da entropía $E(F(\mathcal{L}))$ está en $\mathcal{L} = m$ ou $\mathcal{L} = M$.*

Demostración. Fixando o resto de parámetros e variando \mathcal{L} , a entropía pode ser escrita como $E(F(\mathcal{L})) = \log(L + \mathcal{L}) - (c + \mathcal{L} \log(\mathcal{L})) / (L + \mathcal{L})$ con L e c dúas constantes positivas. Derivando e igualando a cero obtemos $\mathcal{L} = e^{c/L}$, e ademais, $E''(F(e^{c/L})) < 0$ co que obtemos o resultado. \square

Observación A.10. $\mathcal{L} < \#K - 1$

Bibliografía

- [1] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [2] Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov, et al. *A course in metric geometry*, volume 33. American Mathematical Society Providence, 2001.
- [3] KAREN BUTT. An introduction to topological entropy. *Chicago, IL, USA: Univ. of Chicago*, 2014.
- [4] Sergio Cabello, Siu-Wing Cheng, Otfried Cheong, and Christian Knauer. Geometric matching and bottleneck problems. *arXiv preprint arXiv:2310.02637*, 2023.
- [5] Eleonora Catsigeras. *Particiones de Markov para difeomorfismos de Anosov*. PhD thesis, Facultad de Ingenieria, Universidad de la República, 2004.
- [6] Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, Leonidas J Guibas, Facundo Mémoli, and Steve Y Oudot. Gromov-hausdorff stable signatures for shapes using persistence. In *Computer Graphics Forum*, volume 28, pages 1393–1403. Wiley Online Library, 2009.
- [7] Frédéric Chazal and Steve Yann Oudot. Towards persistence-based reconstruction in euclidean spaces. In *Proceedings of the twenty-fourth annual symposium on Computational geometry*, pages 232–241, 2008.
- [8] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and John Harer. Stability of persistence diagrams. In *Proceedings of the twenty-first annual symposium on Computational geometry*, pages 263–271, 2005.
- [9] Robert J MacG Dawson. A simplification of the eilenberg-steenrod axioms for finite simplicial complexes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 53(3):257–265, 1988.
- [10] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, 2015.

-
- [11] Boris Hasselblatt and Anatole Katok. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 2005.
- [13] Bingzhe Hou, Kiyoshi Igusa, and Zihao Liu. Scaled homology and topological entropy. *Proceedings of the American Mathematical Society, Series B*, 10(25):273–287, 2023.
- [14] Rafael Labarca, Solange Aranzubia, and Alma Armijo. Apuntes para un minicurso sobre la entropía topológica. Universidad de Santiago de Chile.
- [15] Serge Lang. *Real and functional analysis*, volume 142. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge university press, 2021.
- [17] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 1997.
- [18] Anthony Manning. Topological entropy and the first homology group. In *Dynamical Systems—Warwick 1974: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1973/74*, pages 185–190. Springer, 2006.
- [19] Vidit Nanda. Computational algebraic topology. Lecture Notes, 2022.
- [20] Walter Rudin. Functional analysis 2nd ed. *International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [21] Michael Shub. Dynamical systems, filtrations and entropy. 1974.