



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies en $\mathbb{R}^3$

Celso Alonso López

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies en $\mathbb{R}^3$

Celso Alonso López

09/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento: Geometría y Topología</b>
<b>Título: Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies en <math>\mathbb{R}^3</math></b>
<b>Breve descripción do contido</b>
Se demuestra detalladamente el Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies en $\mathbb{R}^3$ usando el teorema de Frobenius de integrabilidad de ecuaciones en derivadas totales.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1. SUPERFICIES REGULARES</b>	<b>1</b>
1.0.1. CAMBIO DE PARÁMETROS EN UNA SUPERFICIE REGULAR.	2
1.0.2. PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO. . . . .	3
1.0.3. FUNCIONES DIFERENCIABLES ENTRE SUPERFICIES. . . . .	4
1.0.4. COEFICIENTES DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL ASOCIADA A UNA PARAMETRIZACIÓN. . . . .	5
1.0.5. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL ASOCIADA A UNA PA- RAMETRIZACIÓN. . . . .	7
<b>2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD</b>	<b>9</b>
2.0.1. FÓRMULAS DE GAUSS Y WEINGARTEN . . . . .	9
2.0.2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE GAUSS Y CODAZZI- MAINARDI. . . . .	12
<b>3. TEOREMA DE FROBENIUS</b>	<b>19</b>
<b>4. TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>23</b>
4.1. SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL Y COEFICIENTES DE WEINGARTEN ASOCIADOS A UN PAR DE FORMAS CUADRÁTICAS . . . . .	23
4.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$ . . . . .	24
<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>



## Resumen

Dado un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , es bien sabido, (de la materia Curvas y Superficies del Grado de Matemáticas), que toda parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene asociadas dos funciones matriciales

$$I, II : U \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

que reciben el nombre de primera y segunda forma fundamentales de la parametrización y que a cada punto de  $U$  le asignan sendas matrices  $2 \times 2$  simétricas, siendo  $I(u)$  definida positiva para todo  $u \in U$ .

En este trabajo probaremos el Teorema Fundamental de Superficies, el cual dice lo siguiente: dadas dos funciones

$$g, L : U \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

definidas en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y con valores en el espacio vectorial de las matrices simétricas  $2 \times 2$  (con la primera de ellas definida positiva) y fijados  $u_0 \in U$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  y una base ortonormal  $\{w_1, w_2, w_3\}$  de orientación positiva en  $\mathbb{R}^3$  entonces existen un entorno abierto  $U_0 \subset U$  y una parametrización  $\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen  $S$  es una superficie que contiene a  $\Phi(u_0) = p_0$ , y cuya base  $X_1(p_0) = D_1\Phi(u_0)$ ,  $X_2(p_0) = D_2\Phi(u_0)$  del plano tangente  $T_{p_0}S$  verifica  $X_1(p_0) = w_1$ ,  $X_2(p_0) = w_2$ ,  $(X_1(p_0) \times X_2(p_0)) / \|X_1(p_0) \times X_2(p_0)\| = w_3$ . Además para todo  $u \in U_0$  las matrices de la primera forma fundamental de la parametrización en  $u$  coinciden respectivamente con  $g(u)$  y  $L(u)$ .

La primera y segunda forma fundamental se definen, de manera única, en una superficie de  $\mathbb{R}^3$  salvo isometrías, y dadas dos formas cuadráticas podemos construir una superficie tal que esas formas cuadráticas sean su primera y segunda forma fundamental si satisfacen ciertas condiciones llamadas ecuaciones de compatibilidad.

Esto fue estudiado por primera vez por el matemático francés Pierre Ossian Bonnet (1819-1892). En diversos textos se puede encontrar este teorema bajo el nombre de Teorema de Bonnet.

Actualmente es complicado encontrar en la literatura básica de geometría una demostración uniforme de estos resultados y es eso precisamente lo que haremos en este trabajo.

También veremos la relación que tiene este teorema con el criterio de Frobenius, que utilizaremos para saber si un sistema de ecuaciones diferenciales parciales tiene solución común.

Observaremos a lo largo del trabajo que la primera y segunda forma fundamental de una superficie están relacionadas mediante las ecuaciones de Mainardi-Codazzi y la ecuación de Gauss, que son conocidas como las condiciones de compatibilidad y son una condición suficiente para la demostración del teorema. Estas ecuaciones fueron demostradas inicialmente por Gauss con una notación algo complicada y posteriormente fueron demostradas con una notación más accesible por Mainardi y Codazzi de forma casi simultánea en 1856.

## Abstract

Given an open  $U$  of  $R^2$ , it is well known, (from the subject Curves and Surfaces of the Mathematics Degree), that all parameterization  $\Phi : U \rightarrow R^3$  has two matrix functions associated

$$I, II : U \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$$

which receive the name of first and second fundamental forms of the parametrization and that to each point of  $U$  assigns  $2 \times 2$  symmetrical matrixes, being  $I(u)$  defined positive for all  $u \in U$ . In this work we will prove the Theorem of Local Surface which says the following: given two functions

$$g, L : U \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$$

defined in an open  $U$  of  $R^2$  with values of the vector space of the symmetric matrixes  $2 \times 2$  (with the first of them defined positive) and fixed  $u_0 \in U, p_0 \in R^3$  and an orthonormal basis  $\{w_1, w_2, w_3\}$  of positive orientation in  $R^3$  then there is an open environment  $U_0 \subset U$  and a parameterization  $\Phi : U_0 \rightarrow R^3$  whose image  $S$  is a surface containing  $\Phi(u_0) = p_0$ , and whose base  $X_1(p_0) = D_1\Phi(u_0), X_2(p_0) = D_2\Phi(u_0)$  of the tangent plane  $T_{p_0}S$  verifies  $X_1(p_0) = w_1, X_2(p_0) = w_2, (X_1(p_0) \times X_2(p_0)) / \|X_1(p_0) \times X_2(p_0)\| = w_3$ . In addition, for all  $u \in U_0$  the matrixes of the first fundamental form of the parameterization in  $u$  coincide respectively with  $g(u)$  and  $L(u)$ . The first and second fundamental form are defined, in a unique way, in a surface of  $R^3$  except isometries, and given two quadratic forms we can construct a surface such that those quadratic forms are their first and second fundamental form if they satisfy certain conditions called compatibility equations. This was first studied by the French mathematician Pierre Ossian Bonnet (1819-1892). This theorem can be found in some texts under the name of Bonnet's Theorem. Currently, it is

difficult to find a uniform demonstration of these results in the basic geometry literature and that is precisely what we will do in this work. We will also see the relationship that this theorem has with the Frobenius criterion, which we will use to know if a system of partial differential equations has a common solution. We will observe throughout this work that the first and second fundamental form of a surface are related by the Mainardi-Codazzi equations and the Gaussian equation, which are known as the compatibility conditions and are a sufficient condition for the proof of the theorem. These equations were initially demonstrated by Gauss with a complicated notation and were later demonstrated with a more accessible notation by Mainardi and Codazzi almost simultaneously in 1856.



# Capítulo 1

## SUPERFICIES REGULARES

Repasamos brevemente los concepto de parametrización y de superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ . De manera intuitiva, podemos pensar que una parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  transforma un abierto  $U$  del plano  $\mathbb{R}^2$  en un subconjunto homeomorfo  $P = \Phi(U) \subset \mathbb{R}^3$  (al que llamaremos abierto parametrizado) tal que que en cada  $p = \Phi(u) \in P$  hay un *plano tangente*. Una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  es un subespacio topológico de  $\mathbb{R}^3$  que es unión de abiertos relativos parametrizados.

**Definición 1.1.** Sea  $U$  un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^2$ . Una parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $r \geq 1$  es una aplicación diferenciable de clase  $r \geq 1$  en el abierto  $U$  tal que:

1. Para cada  $u = (u^1, u^2) \in U$ , la diferencial  $D\Phi(u) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\Phi$  en el punto  $u$ , es (una aplicación lineal) INYECTIVA. Por tanto en la base canónica, su matriz jacobiana

$$[D\Phi(u)] = \left[ \frac{\partial\Phi(u)}{\partial u^1}, \frac{\partial\Phi(u)}{\partial u^2} \right],$$

(que es  $3 \times 2$ ) tiene rango 2 y por tanto las dos parciales

$$D_1\Phi(u) = \partial\Phi/\partial u^1(u),$$

$$D_2\Phi(u) = \partial\Phi/\partial u^2(u)$$

son dos vectores columna independientes en  $\mathbb{R}^3$ .

2. Si dotamos a  $P = \Phi(U)$  de la topología relativa de  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\Phi : u \in U \rightarrow \Phi(u) \in P = \Phi(U)$  es un homeomorfismo.

Si  $p = \Phi(u)$ , denotaremos

$$X_1(p) = D_1\Phi(u), X_2(p) = D_2\Phi(u)$$

los cuales son base de un plano que llamaremos el plano tangente en  $p$  al abierto parametrizado  $P = \Phi(U)$ .

La primera condición de la definición anterior puede expresarse pidiendo que los vectores columna  $X_1(p) = D_1\Phi(u)$ ,  $X_2(p) = D_2\Phi(u)$  sean independientes, o equivalentemente que el producto vectorial

$$\partial\Phi(u)/\partial u^1 \times \partial\Phi(u)/\partial u^2 \neq 0.$$

**Definición 1.2.** Un subespacio topológico  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si, para cada  $p \in S$ , existe un abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\Phi(U) = V \cap S$ .

Diremos que  $p$  es una parametrización de  $S$  en  $p$  o que es un sistema (local) de coordenadas en un entorno de  $p$ . El entorno  $P = V \cap S$  se denomina un entorno coordenado del punto  $p$ .

### 1.0.1. CAMBIO DE PARÁMETROS EN UNA SUPERFICIE REGULAR.

Cada punto de una superficie regular pertenece a un entorno coordenado y los puntos de tal entorno son caracterizados por medio de una parametrización. Esto nos permite definir, de manera local, las propiedades que nos interesen en términos de esas coordenadas. Sin embargo, un punto de la superficie puede pertenecer a más de un entorno coordenado. Si este es el caso, es posible pasar de la parametrización de un entorno coordenado a otro a través de un difeomorfismo que se conoce como *cambio de parámetros*. Esto se expresa formalmente así:

**Teorema 1.3.** Sean  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos parametrizaciones de una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^n$  de clase  $r \geq 1$ . Si  $Q = \Phi(U) \cap \tilde{\Phi}(\tilde{U}) \neq \emptyset$ , entonces  $V = \Phi^{-1}(Q)$  y  $\tilde{V} = \tilde{\Phi}^{-1}(Q)$ , son abiertos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$  y el homeomorfismo

$$\tilde{\Phi}_{|Q}^{-1} \circ \Phi_{|V} : V \rightarrow \tilde{V}$$

es un DIFEOMORFISMO de clase  $r$ . Además, para todo  $p = \Phi(u) = \tilde{\Phi}(\tilde{u})$  se verifica

$$1. D\Phi(u) = D\tilde{\Phi}(\tilde{u}) \circ D(\tilde{\Phi}^{-1}_{|Q} \circ \Phi_{|V})(u).$$

2. Si, para todo  $h \in \mathbb{R}^2$ , denotamos  $\tilde{h} = D(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)(u)h$ , tenemos  $D\Phi(u) \cdot h = D\tilde{\Phi}(\tilde{u}) \cdot \tilde{h}$ .

3.  $D\Phi(u)(\mathbb{R}^2) = D\tilde{\Phi}(\tilde{u})(\mathbb{R}^2)$ .

La demostración puede verse en [1] o en [2].

### 1.0.2. PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO.

Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular de clase  $r \geq 1$ ,  $p$  un punto de  $S$  y  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$  en  $p = \Phi(u)$  entonces, por hipótesis, la diferencial  $D\Phi(u) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es lineal e inyectiva, luego

$$S_p = D\Phi(u)(\mathbb{R}^2)$$

es un subespacio vectorial bi-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es otra parametrización de la superficie  $S$  en el mismo punto  $p = \Phi(u) = \tilde{\Phi}(\tilde{u})$ , entonces, por el teorema de cambio de parámetros, se cumple

$$S_p = D\Phi(u)(\mathbb{R}^2) = D\tilde{\Phi}(\tilde{u})(\mathbb{R}^2),$$

es decir, el subespacio vectorial bi-dimensional  $S_p \subset \mathbb{R}^3$  no depende de la parametrización elegida, o dicho de otro modo,  $S_p$  es la imagen de  $\mathbb{R}^2$  por la diferencial en  $\Phi^{-1}(p)$  de CUALQUIER parametrización  $\Phi$  de  $S$  en  $p$ .

**Definición 1.4.** El plano  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$  tangente a  $S$  en  $p$  es la imagen del plano  $S_p$  por la única traslación que lleva 0 en  $p$ . Es decir,

$$T_p S = \{p + v \in \mathbb{R}^3; v \in S_p\}.$$

NOTACIÓN, si  $X = \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de una superficie  $S$  y  $p = \Phi(u) \in S$  entonces

$$X_1(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}(u), \quad X_2(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}(u)$$

forman una base del plano tangente  $T_p S$ . Abusando de la notación llamaremos  $X$  a la parametrización donde

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial X}{\partial u^2}.$$

Las derivadas de segundo orden de la parametrización (que NO son en general vectores tangentes) las denotamos

$$X_{ij}(p) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^i \partial u^j}(u)$$

$$X_{ji}(p) = \frac{\partial^2 X}{\partial u^j \partial u^i}(u).$$

Ahora veremos que la condición (iii) de la definición 1 garantiza que, para cada  $p \in S$ , el conjunto de vectores tangentes a las curvas parametrizadas de  $S$  que pasan por  $p$ , construyen un plano.

Dado un punto  $p$  de una superficie regular  $S$ , hay dos vectores unitarios de  $\mathbb{R}^3$  que son normales al plano tangente  $T_p(S)$ , se llama a cada uno de ellos un vector unitario normal en  $p$ . La recta en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $p$  y contiene a un vector unitario normal en  $p$  se denomina recta normal en  $p$ .

Fijando una parametrización  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  en  $p \in S$ , podemos determinar la elección de un vector unitario normal en cada punto  $p = \Phi(u) \in \Phi(U)$  por

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_1 \times X_2}{\|X_1 \times X_2\|}(p) = \\ &= \frac{D_1\Phi(u) \times D_2\Phi(u)}{\|D_1\Phi(u) \times D_2\Phi(u)\|}. \end{aligned}$$

Nótese que  $(X_1 \times X_2)(p) \neq 0$  y que  $N(p)$  es perpendicular al plano tangente  $T_pS$ .

### 1.0.3. FUNCIONES DIFERENCIABLES ENTRE SUPERFICIES.

**Definición 1.5.** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular de clase  $r \geq 1$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación. Diremos que  $f$  es DIFERENCIABLE de clase  $r \geq 1$  si para toda parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $M$  si cumple que la composición  $f \circ \Phi$  es de clase  $r$  en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.6.** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular de clase  $r \geq 1$  y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación diferenciable de clase  $r$ . Llamaremos APLICACIÓN TANGENTE a  $f$  en  $p = \Phi(u)$  (o DIFERENCIAL de  $f$  en  $p$ ) a la aplicación lineal

$$Tf(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida, para  $v = D\Phi(u) \cdot h \in T_pM$ , por

$$Tf(p) \cdot v = D(f \circ \Phi)(u) \cdot h.$$

**Lema 1.7.** *La definición de  $Tf(p) \cdot v$  no depende de la parametrización elegida.*

*Demostración.* Si  $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es otra parametrización en  $p = \Phi(u) = \tilde{\Phi}(\tilde{u})$  y

$$\tilde{h} = D(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)(u)h$$

entonces  $v = D\Phi(u) \cdot h = D\tilde{\Phi}(\tilde{u}) \cdot \tilde{h}$  y

$$\begin{aligned} D(f \circ \Phi)(u)h &= D(f \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)(u)h \\ &= D(f \circ \tilde{\Phi})(\tilde{u}) \circ D(\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi)(u)h \\ &= D(f \circ \tilde{\Phi})(\tilde{u}) \cdot \tilde{h}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.8.** *Sean  $M \subset \mathbb{R}^3$ ,  $N \subset \mathbb{R}^3$  superficies regulares y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g : N \rightarrow \mathbb{R}^3$  aplicaciones diferenciables de clase  $r \geq 1$  verificando  $f(M) \subset N$ . Entonces, se verifica*

1. *La aplicación compuesta  $g \circ f$  es diferenciable de clase  $r$*
2. *Para todo  $p \in M$ , con  $q = f(p)$ , la aplicación tangente a  $g \circ f$  es composición de las aplicaciones tangentes de  $f$  en  $p$  y de  $g$  en  $q$ , es decir*

$$T(g \circ f)(p) = Tg(q) \circ Tf(p)$$

3. *Para  $M = N$  y  $f = id_M : p \in M \rightarrow id_M(p) = p$ ,*

$$Tid_M(p) = id_{T_p M}.$$

La demostración puede verse en [1] o en [2].

#### 1.0.4. COEFICIENTES DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL ASOCIADA A UNA PARAMETRIZACIÓN.

Los planos tangentes a una superficie  $S$  heredan el producto interior natural de  $\mathbb{R}^3$ , es decir, el producto interior natural de  $\mathbb{R}^3 \supset S$  induce en cada plano tangente  $T_p S$  a  $S$  un producto interior, que se denotará por  $I_p$  y que se denomina primera forma fundamental de  $S$  en  $p$ . Si  $v, w \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  entonces  $I_p(v, w) = \langle v, w \rangle$  es igual al producto interior de  $v$  y  $w$  como vectores de  $\mathbb{R}^3$ .  $I_p$  es una forma bilineal simétrica definida-positiva, es decir, si  $v \neq 0$  entonces

$$I_p(v, v) = \langle v, v \rangle > 0.$$

Si  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $S$  de clase  $r > 1$ , podemos expresar los vectores  $v, w \in T_p S$  en la base de las primeras derivadas parciales de la parametrización  $v = v^i D_i \Phi(u)$ ,  $w = w^j D_j \Phi(u)$  y entonces

$$\langle v, w \rangle = \Sigma v^i w^j \langle x_i, x_j \rangle = \Sigma v^i w^j g_{ij}(u),$$

donde , para todo  $u = (u_1, u_2) \in U$ , con  $p = \Phi(u)$ , es

$$g_{ij}(u) = \langle D_i \Phi(u), D_j \Phi(u) \rangle = \langle X_i(p), X_j(p) \rangle.$$

son los coeficientes de la matriz de Gram del producto interior  $I_p$  en la base  $X_1(p) = D_1 \Phi(u)$ ,  $X_2 = D_2 \Phi(u)$  de  $T_p S$ .

Las funciones

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

son de clase  $r - 1$  y se las conoce como los coeficientes de la primera forma fundamental en la parametrización  $\Phi$ . Puesto que  $I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación bilineal simétrica definida-positiva, para todo  $u \in U$  su matriz de Gram  $[g_{ij}(u)]$  es definida positiva y en particular invertible.

NOTACIÓN. Denotaremos

$$[g^{kl}(u)]$$

es la matriz  $2 \times 2$  inversa de  $g_{ij}(u)$ , es decir, para  $i, j, k = 1, 2$ ,

$$g^{ij}(u)g_{jk}(u) = \delta_k^i$$

(suma en el índice repetido arriba y abajo). Observemos que la matriz  $[g^{kl}(u)]$  es también simétrica. Observemos que la función  $g = \det[g_{ij}]$  es una función estrictamente positiva, dado que, por el criterio de Sylvester, al ser  $I_p$  una aplicación simétrica estrictamente definida-positiva, su matriz de Gram  $[g_{ij}(u)]$  también lo es luego, para todo  $u \in U$  se cumple

$$g_{11}(u) > 0,$$

$$g(u) = \det[g_{ij}(u)] > 0.$$

### 1.0.5. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL ASOCIADA A UNA PARAMETRIZACIÓN.

Sea  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de superficie regular  $S$  y  $N$  el campo de vectores unitario y normal asociado

$$N(\Phi(u)) = \frac{D_1\Phi(u) \times D_2\Phi(u)}{\|D_1\Phi(u) \times D_2\Phi(u)\|}.$$

La superficie  $S$  se llama orientable si es posible recubrirla con una familia de entornos parametrizados tales que si un punto  $q \in S$  pertenece a dos entornos parametrizados de dicha familia, el jacobiano del cambio de parametrización es positivo en  $q$ . Esta familia se llama una orientación de  $S$ . Esto equivale a que los campos normales locales  $N$  asociados a cada parametrización coinciden en las intersecciones.

Existen superficies no orientables, pero cada abierto parametrizado es una superficie orientable.

Supondremos en el resto del trabajo que todas las parametrizaciones son de clase  $r \geq 3$ .

Para cada  $u \in U$  la segunda forma fundamental  $II_p$  en  $p = \Phi(u)$  es la aplicación bilineal

$$II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow R$$

dada así: dados  $v = v^i D_i \Phi(u)$ ,  $w = w^j D_j \Phi(u) \in T_p S$

$$II_p(v, w) = v^i w^j \langle D_{ij} \Phi(u), N(\Phi(u)) \rangle.$$

Puede verse que si cambiamos a otra parametrización  $\tilde{\Phi}$  cuyo campo normal asociado sea  $\tilde{N}$  el numero  $II_p(v, w)$  no cambia cuando  $\tilde{N}(p) = N(p)$ , mientras que su signo cambia si  $\tilde{N}(p) = -N(p)$ .

Los COEFICIENTES DE LA SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL  $II_p$  asociados a la parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  son las funciones  $L_{ij} : U \rightarrow R$  definidas por

$$L_{ij}(u) = \langle D_{ij} \Phi(u), N(\Phi(u)) \rangle.$$

Es corriente llamar  $X$  en lugar de  $\Phi$  a la parametrización y  $X_{ij}(p) = D_{ij} \Phi(u)$ ; así se escribe habitual (y abusivamente)

$$L_{ij} = \langle X_{ij}, N \rangle.$$



## Capítulo 2

# ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

### 2.0.1. FÓRMULAS DE GAUSS Y WEINGARTEN

Usando las condiciones vistas en el capítulo anterior, para cada punto  $p = \Phi(u)$ , con  $u \in U$ , podemos expresar las parciales de orden dos  $X_{ij}(p) = D_{ij}\Phi(u)$  de una parametrización  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  como combinación lineal de los tres vectores de la base de  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$X_1(p) = D_1\Phi(u), X_2(p) = D_2\Phi(u), X_3(p) = (N \circ \Phi)(u),$$

de este modo

$$D_{ij}\Phi(u) = A_{ij}^h D_h\Phi(u) + B_{ij}(N \circ \Phi)(u).$$

(suma en el índice repetido  $h = 1, 2$ ). Resulta inmediatamente [7], que

$$B_{ij} = L_{ij}(u)$$

(coeficientes de la segunda forma fundamental) mientras que

$$A_{ij}^h = \langle D_{ij}\Phi(u), D_k\Phi(u) \rangle g^{kh}(u).$$

Llamaremos *símbolos de Christoffel* asociados a la parametrización  $\Phi$  a las funciones  $\Gamma_{ij}^h : U \rightarrow R$  dadas por

$$\Gamma_{ij}^h(u) = \langle D_{ij}\Phi(u), D_k\Phi(u) \rangle g^{kh}(u),$$

(que expresan los coeficientes de tipo  $A$  en la expresión anterior). Así hemos demostrado

**Teorema 2.1.** (Fórmulas de Gauss) Sea  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización, entonces, para todo  $u \in U$  y para todo  $i, j = 1, 2$ , se cumple

$$D_{ij}\Phi(u) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(u) D_k \Phi(u) + L_{ij}(u)(N \circ \Phi)(u).$$

Si llamamos  $p = \Phi(u)$ ,  $X_j(p) = D_j \Phi(u)$ ,  $X_{ij}(p) = D_{ij} \Phi(u)$ , lo anterior se escribe así

$$X_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k(u) X_k + L_{ij} N. \quad (2.1)$$

La siguiente propiedad juega un papel muy importante en este trabajo y expresa que los símbolos de Christoffel son funciones de los coeficientes de la primera forma fundamental  $g_{ij}$  y de sus primeras derivadas parciales.

**Teorema 2.2.** para todo  $i, j, k = 1, 2$

$$\Gamma_{ij}^k = (1/2) \sum_{l=1}^2 (D_i g_{jl} - D_l g_{ij} + D_j g_{li}) g^{lk}$$

(hay suma en el índice repetido arriba y abajo).

*Demostración.* Para esta demostración se usa la técnica llamada permutación cíclica de índices

$$D_i g_{jl} = D_i \langle X_j, X_l \rangle = \langle X_{ji}, X_l \rangle + \langle X_j, X_{li} \rangle \quad (2.2)$$

$$D_l g_{ij} = D_l \langle X_i, X_j \rangle = \langle X_{il}, X_j \rangle + \langle X_i, X_{jl} \rangle \quad (2.3)$$

$$D_j g_{li} = D_j \langle X_l, X_i \rangle = \langle X_{lj}, X_i \rangle + \langle X_l, X_{ij} \rangle \quad (2.4)$$

Consideramos que  $X$  es de clase  $C^3$ ,  $X_{ij} = X_{ji}$ . Combinando estas tres ecuaciones obtenemos

$$(1/2)(D_i g_{jl} - D_l g_{ij} + D_j g_{li}) = \langle X_{ij}, X_l \rangle$$

Si multiplicamos este resultado por  $g^{lk}$  y el sumatorio sobre  $l$ , obtenemos

$$(1/2) \sum_{l=1}^2 (D_i g_{jl} - D_l g_{ij} + D_j g_{li}) g^{lk} = \sum \langle X_{ij}, X_l \rangle g^{lk} = \Gamma_{ij}^k$$

□

:

Fijada la parametrización, el campo normal unitario  $N$  define una aplicación diferenciable  $N : P = \Phi(U) \rightarrow S^2$  (llamada a veces la aplicación de Gauss). Es diferenciable como aplicación de superficies y  $TN(p)$  es una aplicación lineal de  $T_p(S)$  en  $T_{n(p)}(S^2)$ , porque, para todo  $u \in U$ , al hacer las parciales de la aplicación constante  $1 = \langle (N \circ \Phi)(u), (N \circ \Phi)(u) \rangle$ , se cumple, para  $i = 1, 2$ ,

$$\langle (N \circ \Phi)(u), D_i(N \circ \Phi)(u) \rangle = 0.$$

Como  $T_p S$  y  $T_{N(p)} S^2$  son planos ortogonales a  $N(p)$  podemos identificarlos, y así  $TN(p)$  puede verse como un endomorfismo lineal en  $T_p(S)$ . Por lo anterior, las parciales  $D_j(n \circ \Phi)(u)$  son vectores tangentes a  $S$ . Las fórmulas de Weingarten consisten en expresar  $D_j(n \circ \Phi)(u)$  como combinación lineal de las primeras parciales de la parametrización  $\Phi$

Sean  $p = \Phi(u) \in S$  y  $v = v^i X_1(p) + v^2 X_2(p) = D\Phi(u) \cdot (v^i E_i) \in T_p S$ . Es fácil ver que

$$\langle N(p), D_i(n \circ \Phi)(u) \rangle = 0,$$

luego la aplicación lineal

$$L_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

conocida como operador de Weingarten o *shape operator*, que lleva un vector tangente  $v = v^i X_1(p) + v^2 X_2(p) = D\Phi(u) \cdot (v^i E_i)$  en  $L_p(v) = -TN(p) \cdot v = -D(N \circ \Phi)(u) \cdot (v^i E_i) = -v^i D_i(n \circ \Phi)(u)$  es un endomorfismo del plano tangente  $T_p(S)$ .

**Teorema 2.3.** (Weingarten) Sea  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de una superficie  $S$ , entonces, para todo  $v, w \in T_p S$ ,

1. El operador de Weingarten  $L_p$  y la segunda forma fundamental  $II_p$  verifican

$$\langle L_p(v), w \rangle = II_p(v, w).$$

2. El operador de Weingarten  $L_p$  es un endomorfismo autoadjunto, es decir

$$\langle L_p(v), w \rangle = \langle v, L_p(w) \rangle.$$

3. Si  $L(X_k) = \Sigma L_k^h X_h$ , entonces

$$L_j^i = g^{ik} L_{kj}.$$

La demostración puede verse en [7] o en [3]. De lo anterior se deduce la siguiente propiedad importante.

**Corolario 2.4.** (*Fórmulas de Weingarten*). Sea  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de una superficie  $S$  y  $N$  el campo normal asociado sobre el abierto  $P = \Phi(U)$  de  $S$ . Se tiene, para  $j = 1, 2$

$$D_j(N \circ \Phi)(u) = -L_j^i D_i \Phi(u),$$

(suma en el índice repetido) lo que se denota

$$N_j = -L_j^i X_i.$$

abreviadamente.

### 2.0.2. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE GAUSS Y CODAZZI-MAINARDI.

Para todo  $1 \leq i, l, j, k \leq 2$ , las funciones  $R_{ijk}^l : U \rightarrow R$  definidas por

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Sigma(\Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l). \quad (2.5)$$

definen el llamado tensor curvatura de la superficie. Esto significa lo siguiente:

Si  $a, b, c \in T_p S$ , entonces la aplicación  $R : T_p S \times T_p S \times T_p S \rightarrow T_p S$  dada, para  $a = a^i X_i$ ,  $b = b^j X_j$ ,  $c = c^k X_k$  por

$$R(a^i X_i, b^j X_j, c^k X_k) = a^i b^j c^k R_{ijk}^l X_l$$

es tri-lineal e independiente de la parametrización usada. Se dice que  $R$  es un campo de tensores de tipo  $(2, 3)$ , o simplemente un tensor (en este caso, el tensor de curvatura de la superficie  $S$  parametrizada con  $\Phi$ )

**Teorema 2.5.** Para todo  $1 \leq i, l, j, k \leq 2$ . se tiene

(i) *Ecuaciones de Gauss*

$$R_{ijk}^l = L_{ik} L_j^l - L_{ij} L_k^l; \quad (2.6)$$

(ii) *Ecuaciones de Codazzi-Minardi*

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \Sigma(\Gamma_{ik}^l L_{ij} - \Gamma_{ij}^l L_{lk}). \quad (2.7)$$

*Demostración.* Usando las fórmulas de Gauss (2.1), tenemos que  $X_{ijk} = \partial(L_{ij}N + \Sigma\Gamma_{ij}^l X_l) / \partial u^k$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} X_{ijk} &= \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} N + L_{ij} N_k + \Sigma \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} X_l + \Gamma_{ij}^l X_{lk} \\ &= \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} N - \Sigma L_{ij} L_k^l X_l + \Sigma \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} X_l + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m X_m + \Sigma \Gamma_{ij}^l L_{lk} N \\ &= \left( \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} + \Sigma \Gamma_{ij}^l L_{lk} \right) N + \Sigma \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - L_{ij} L_k^l + \Sigma \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l \right) X_l. \end{aligned}$$

De forma similar

$$X_{ikj} = \left( \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} + \Sigma \Gamma_{ik}^l L_{lj} \right) N + \Sigma \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - L_{ik} L_j^l + \Sigma \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l \right) X_l.$$

Asumimos que X es por lo menos de clase  $C^3$ ,

$$X_{ijk} = \frac{\partial^3 X}{\partial u^k \partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^3 X}{\partial u^j \partial u^k \partial u^i} = X_{ikj}$$

$\{X_1, X_2, N\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  en cada punto, de modo que las diversas componentes de  $X_{ijk}$  con respecto a esta base deben ser iguales a las de  $X_{ikj}$ . Entonces

$$\left( \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} + \Sigma \Gamma_{ij}^l L_{lk} \right) = \left( \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} + \Sigma \Gamma_{ik}^l L_{lj} \right) \quad (2.8)$$

$$\left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} - L_{ij} L_k^l + \Sigma \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l \right) = \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - L_{ik} L_j^l + \Sigma \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l \right) \quad (2.9)$$

La ecuación (2.8) se puede reescribir como

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \Sigma (\Gamma_{ik}^l L_{ij} - \Gamma_{ij}^l L_{lk})$$

que son precisamente las ecuaciones de Codazzi-Minardi (2.7). La ecuación (2.9) se puede reescribir como

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Sigma (\Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^l - \Gamma_{ij}^p \Gamma_{pk}^l) = L_{ik} L_j^l - L_{ij} L_k^l.$$

Dado que la parte izquierda de la ecuación es  $R_{ijk}^l$  (por definición), obtenemos la ecuación de Gauss.  $\square$

Vamos a reformular Gauss y Weingarten usando las matrices  $P$  y  $Q$  que calcularemos más adelante y vienen dadas por:

$$P(u) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1(u) & \Gamma_{21}^1(u) & -L_1^1(u) \\ \Gamma_{11}^2(u) & \Gamma_{21}^2(u) & -L_1^2(u) \\ L_{11}(u) & L_{12}(u) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$P(u) = [p_j^i(u)]$$

es una función matricial sólo de la variable  $u = (u^1, u^2) \in U$ .

y

$$Q(u) = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1(u) & \Gamma_{22}^1(u) & -L_2^1(u) \\ \Gamma_{12}^2(u) & \Gamma_{22}^2(u) & -L_2^2(u) \\ L_{12}(u) & L_{22}(u) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$Q(u) = [q_j^i(u)]$$

es una función matricial sólo de la variable  $u = (u^1, u^2) \in U$

Entonces las fórmulas quedarían de la siguiente manera

$$\left. \begin{aligned} (X_1, X_2, N)_{u^1} &= (X_1, X_2, N)P \\ (X_1, X_2, N)_{u^2} &= (X_1, X_2, N)Q \end{aligned} \right\}$$

donde  $P = (p_{ij})$ ,  $Q = (q_{ij})$ .

Esto significa para la primera igualdad

$$\left. \begin{aligned} X_{11} &= p_{11}X_1 + p_{21}X_2 + p_{31}N, \\ X_{21} &= p_{12}X_1 + p_{22}X_2 + p_{32}N, \\ N_1 &= p_{13}X_1 + p_{23}X_2 + p_{33}N, \end{aligned} \right\}$$

y para la segunda

$$\left. \begin{aligned} X_{12} &= q_{11}X_1 + q_{21}X_2 + q_{31}N, \\ X_{22} &= q_{12}X_1 + q_{22}X_2 + q_{32}N, \\ N_2 &= q_{13}X_1 + q_{23}X_2 + q_{33}N, \end{aligned} \right\}$$

donde el conjunto de ecuaciones que contienen a  $X_{11}$ ,  $X_{21}$ ,  $X_{21}$  y  $X_{22}$  son las ecuaciones de Gauss y las que contienen a  $N_1$  y  $N_2$  son las ecuaciones de Weingarten.

Recordemos que las formas fundamentales vienen dadas por:

$$g_{ij} = X_i \cdot X_j, L_{ij} = -X_i \cdot N_j = X_{ij} \cdot N.$$

Vamos a proceder al calculo explícito de las matrices P y Q para lo que necesitaremos la siguiente proposición.

**Lema 2.6.** *Sea  $V$  un espacio vectorial real con producto interior  $(,)$  y  $V_1, V_2, \dots, V_n$  una base de  $V$ . Sea  $\xi \in V$  un vector cuya expresión en términos de la base es  $\xi = \sum_{i=1}^n x_i V_i$ . Entonces*

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

donde  $\xi_i = (\xi, V_i)$  y  $G = (g_{ij}) = (V_i, V_j)$ .

*Demostración.* Notemos que

$$\xi_i = (\xi, V_i) = \left( \sum_{j=1}^n x_j V_j, V_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j (V_j, V_i) = \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j.$$

entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

□

**Lema 2.7.** *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(i) *Las matrices P y Q pueden escribirse en términos de  $g_{ij}, L_{ij}$  y de la derivada de la primera parcial de  $g_{ij}$ .*

(ii)  *$\{p_{ij}, q_{ij} | 1 \leq i, j \leq 2\}$  se pueden calcular a partir de la primera forma fundamental.*

*Demostración.* Veremos que  $X_{ij} \cdot X_k$ ,  $X_{ij} \cdot N$ ,  $N_i \cdot X_j$ ,  $N_i \cdot N$ , pueden ser expresadas en términos de  $g_{ij}$ ,  $L_{ij}$  y de la derivada de la primera parcial de  $g_{ij}$ , para ello procedemos de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} X_{ii} \cdot X_i &= \frac{1}{2}(g_{ij})_i, \\ X_{ij} \cdot X_i &= \frac{1}{2}(g_{ii})_j, \text{ si } i \neq j, \\ X_{ii} \cdot X_j &= (X_i \cdot X_j)_i - X_i \cdot X_{ji} = (g_{ij})_i - \frac{1}{2}(g_{ij})_j, \text{ si } i \neq j, \end{aligned} \right\}$$

entonces

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} \cdot N &= L_{ij}, \\ X_i \cdot X_j &= -L_{ij}, \\ X_i \cdot N &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Tenemos

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la proposición anterior tenemos

$$P = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_{11})_1 & \frac{1}{2}(g_{11})_2 & -L_{11} \\ (g_{12})_1 - \frac{1}{2}(g_{11})_2 & \frac{1}{2}(g_{22})_1 & -L_{12} \\ L_{11} & L_{12} & 0 \end{bmatrix} = G^{-1}A_1, \quad (2.10)$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_{11})_2 & (g_{12})_2 - \frac{1}{2}(g_{22})_1 & -L_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_1 & \frac{1}{2}(g_{22})_2 & -L_{22} \\ L_{12} & L_{22} & 0 \end{bmatrix} = G^{-1}A_2.$$

□

**Teorema 2.8.** *Las matrices  $P$  y  $Q$  satisfacen la ecuación:*

$$P_2 - P_1 + [P, Q] = 0$$

*Demostración.* Definimos la función  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^9$  por

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ N \end{bmatrix}.$$

X es diferenciable, por lo que satisface

$$X_{12} = X_{21}.$$

Si desarrollamos usando la forma matricial de las fórmulas de Gauss y Weingarten tenemos

$$\begin{aligned} (X)_{12} &= (X_1)_2 = (PX)_2 \\ &= P_2X + PX_2 \\ &= P_2X + PQX \\ &= (P_2 + PQ)X \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} (X)_{21} &= (X_2)_1 = (QX)_1 \\ &= Q_1X + QX_1 \\ &= Q_1X + QPX \\ &= (P_1 + QP)X \end{aligned}$$

Igualando las expresiones anteriores tenemos

$$(P_2 + PQ)X = (P_1 + QP)X$$

entonces

$$P_2 + PQ = P_1 + QP$$

y al igualar a cero obtenemos

$$P_2 - P_1 + PQ - QP = 0 \tag{2.11}$$

□

Esta ecuación es conocida como condición de compatibilidad o ecuación de Gauss-Codazzi. La ecuación de Gauss y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se conocen con el nombre de ecuaciones de compatibilidad.

Es lógico preguntarse si existen otras relaciones de compatibilidad entre la primera y segunda forma fundamental, como veremos en el teorema fundamental de superficies la respuesta es negativa. Dicho de otra forma, mediante derivaciones sucesivas u otro proceso, no podemos obtener nuevas relaciones entre los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y sus derivadas.



## Capítulo 3

# TEOREMA DE FROBENIUS

Existen diversas formulaciones del teorema de integrabilidad completa de Frobenius [5], el cual establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones de las llamadas ecuaciones de Pfaff completamente integrables o ecuaciones diferenciales en derivadas totales. Aquí lo formularemos en una versión moderna y muy sencilla, tal como aparece enunciado en [10] y de modo avanzado en [4], donde se dan demostraciones detalladas. Una versión clásica más general (que no precisaremos) aparece en [6].

Sean  $E_\alpha$  y  $E_j$  las respectivas bases canónicas de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  ( $j = 1, \dots, m$  y  $\alpha = 1, \dots, n$ ). Denotemos por

$$M = M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

al espacio vectorial de las matrices reales de  $n$  filas y  $m$  columnas, (que es isomorfo al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ ). Sean  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y

$$F : U \times V \rightarrow M$$

una aplicación diferenciable de clase  $r \geq 1$ , cuyas imágenes por tanto son matrices de  $n$  filas y  $m$  columnas

$$F(u, v) = [F_{\alpha j}(u, v)],$$

siendo cada componente

$$F_{\alpha j} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

una función diferenciable de clase  $r \geq 2$ , para  $\alpha = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ . Una ECUACIÓN EN DERIVADAS TOTALES ([4]) asociada  $F$  es una igualdad formal del tipo

$$D\xi(u) = F(u, \xi(u))$$

donde decimos que una función diferenciable  $\xi : U \rightarrow V$  es una hipotética solución, cuando es diferenciable de clase  $\geq 1$  en  $U$  y su diferencial en cada  $u \in U$  (equivalentemente, su matriz jacobiana en  $u$ ) verifica la igualdad anterior en todo  $u \in U$ . Es decir,  $\xi$  es una solución de la ecuación en derivadas totales asociada a la función  $F$  si y sólo si es de clase  $\geq 1$  y para todo  $u \in U$  tiene una matriz jacobiana en  $u$  cuyas componentes son los números  $F_{\alpha j}(u, \xi(u))$ . Luego, que  $\xi$  sea solución de la ecuación asociada a  $F$  equivale al sistema de  $m \times n$  ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^j}(u) = F_{\alpha j}(u, \xi(u))$$

o con la notación alternativa para las parciales

$$D_j \xi^\alpha(u) = F_{\alpha j}(u, \xi(u))$$

Observemos que si  $F$  es de clase  $k$  entonces una eventual solución es necesariamente de clase  $k + 1$ . En particular, si  $F$  es de clase  $k \geq 1$  entonces una eventual solución  $\xi$  sería necesariamente de clase  $k + 1 \geq 2$  y por el Lema de Schwarz tendríamos

$$D_{ij} \xi^\alpha(u) = D_{ji} \xi^\alpha(u),$$

es decir

$$D_i(D_j \xi^\alpha)(u) = D_j(D_i \xi^\alpha)(u),$$

Si denotamos momentáneamente

$$H_{\alpha j} : u \in U \rightarrow H_{\alpha j}(u) = F_{\alpha j}(u, \xi(u)) \in R$$

es evidente que  $H_{\alpha j}$  es al menos de la misma clase que  $F$ . Además, que  $\xi$  sea solución de la ecuación significa que se cumple (para todo  $\alpha = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, m$ )

$$D_j \xi^\alpha = H_{\alpha j}$$

Por tanto de  $D_i(D_j \xi^\alpha) = D_j(D_i \xi^\alpha)$  deducimos que tiene que cumplirse la identidad

$$D_i H_{\alpha j} = D_j H_{\alpha i}.$$

Por otra parte, aplicando la regla de la cadena y cambiando a la notación clásica para las parciales,  $(D_i H_{\alpha j}(u) = \frac{\partial H_{\alpha j}}{\partial u^i}(u))$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\alpha j}}{\partial u^i}(u) &= \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial u^i}(u, \xi(u)) + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial u^i}(u) \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u)) \\ &= \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial u^i}(u, \xi(u)) + F_{\beta i}(u, \xi(u)) \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u)) \end{aligned}$$

(suma en el índice repetido  $\beta$ ).

Análogamente obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{\alpha i}}{\partial u^j}(u) &= \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial u^j}(u, \xi(u)) + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial u^j}(u) \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u)) \\ &= \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial u^j}(u, \xi(u)) + F_{\beta j}(u, \xi(u)) \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u))\end{aligned}$$

(suma en el índice repetido  $\beta$ ).

Así, con todo lo anterior hemos probado

**Teorema 3.1.** *Con las notaciones anteriores, dada una función  $F : U \times V \rightarrow M$  de clase  $k \geq 1$  y a valores en el espacio de matrices  $M = M_{n \times m}(R)$ , para que el sistema de ecuaciones*

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^j} = F_{\alpha j}(u, v)$$

*admита una solución  $\xi : u \in U \rightarrow v = \xi(u) \in V$  es condición necesaria que se cumplan las igualdades*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial u^i}(u, \xi(u)) + \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u)) F_{\beta i}(u, \xi(u)) \\ &= \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial u^j}(u, \xi(u)) + \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial v^\beta}(u, \xi(u)) F_{\beta j}(u, \xi(u)),\end{aligned}$$

(suma en el índice repetido).

La demostración se puede observar en [4], [5], [6] y [10].

El Teorema de Frobenius es exactamente el recíproco de este enunciado, pero exigiendo que  $F$  sea de clase  $k \geq 2$ . Se pueden añadir unas condiciones iniciales para que la solución sea única.

**Teorema 3.2.** (Frobenius, 1875). *Sean  $M = M_{n \times m}(R)$  el espacio vectorial de las matrices reales de  $n$  filas y  $m$  columnas,  $U$  un abierto en  $R^m$ ,  $V$  un abierto en  $R^n$  y*

$$F : U \times V \rightarrow M$$

*una aplicación diferenciable de clase  $k \geq 2$ .*

1. *Una condición suficiente para que exista una función  $\xi : u \in U \rightarrow v = \xi(u) \in V$  que cumpla el sistema de ecuaciones*

$$\partial v^\alpha / \partial u^j(u) = F_{\alpha j}(u, v)$$

es que se cumplan las igualdades

$$\frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial u^i} + \frac{\partial F_{\alpha j}}{\partial v^\beta} F_{\beta i} = \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial u^j} + \frac{\partial F_{\alpha i}}{\partial v^\beta} F_{\beta j},$$

(suma en el índice repetido).

2. Si se cumplen las anteriores condiciones y fijamos un  $u_0 \in U$ , un  $v_0 \in V$  y una matriz  $W_0 \in M$ , entonces existen un entorno abierto  $U_0$  de  $u_0$  y una única solución  $\xi : U_0 \rightarrow V$  verificando  $\xi(u_0) = v_0$  y  $D\xi(u_0) = W_0$ .

La demostración se puede observar en [4], [5], [6] y [10] .

## Capítulo 4

# TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$

### 4.1. SIMBOLOS DE CHRISTOFFEL Y COEFICIENTES DE WEINGARTEN ASOCIADOS A UN PAR DE FORMAS CUADRÁTICAS

Empecemos creando unas funciones  $\Gamma_{jk}^i$  (denotadas así porque son análogas a los símbolos de Christoffel de una parametrización, la cual construiremos después en el teorema de Bonnet y de la que serán efectivamente sus Christoffels) y otras  $L_j^i$  que emulan a los coeficientes de Weingarten de una parametrización pero que lo serán de la misma que vale para los gamma.

**Teorema 4.1.** Sean  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $g, L : U \rightarrow M$  dos funciones diferenciables de clase  $r \geq 3$  a valores en el espacio vectorial  $M$  de las matrices  $2 \times 2$ , con  $g(u) = [g_{ij}(u)]$  simétrica y definido positiva para todo  $u \in U$  mientras que  $L(u) = [L_{hk}(u)]$  es siempre simétrica. Definamos las funciones

$$g^{ij}, L_l^k : U \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas así:

1. la matriz

$$[g^{ij}(u)] = [g_{kl}(u)]^{-1}$$

2.

$$L_k^j(u) = g^{jh}(u)L_{hk}(u).$$

3. Para todo  $i, j, k = 1, 2$

$$\Gamma_{ij}^k = (1/2) \sum_{l=1}^2 (D_i g_{jl} - D_l g_{ij} + D_j g_{li}) g^{lk}$$

(hay suma en el índice repetido arriba y abajo).

4.

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \Sigma(\Gamma_{ik}^h \Gamma_{hj}^l - \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^l). \quad (4.1)$$

Si tres campos de vectores  $V_1, V_2, V_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciables son solución del sistema en derivadas totales

$$\frac{\partial V_1}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 V_1 + \Gamma_{11}^2 V_2 + L_{11} V_3$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 V_1 + \Gamma_{12}^2 V_2 + L_{12} V_3$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial u^1} = \Gamma_{21}^1 V_1 + \Gamma_{21}^2 V_2 + L_{21} V_3$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 V_1 + \Gamma_{22}^2 V_2 + L_{22} V_3$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u^1} = -(L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u^2} = -(L_2^1 X_1 + L_2^2 X_2)$$

entonces las funciones anteriormente definidas satisfacen las condiciones de Gauss, y Codazzi-Mainardi.

La demostración se puede encontrar en [7]

## 4.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$

**Teorema 4.2.** (Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies en  $\mathbb{R}^3$ ) (P. O. Bonnet 1865)

Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $g, L : \rightarrow M$  están definidos dos funciones diferenciables de clase  $r \geq 2$  a valores en el espacio vectorial  $M$  de las matrices  $2 \times 2$  SIMÉTRICAS, con  $g(u)$  definida positiva para todo  $u \in U$  entonces existe una parametrización  $X = \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tiene como primera forma fundamental a  $g$  y como segunda forma fundamental a  $h$ .

Sean  $P$  y  $Q$  dos matrices definidas en términos de  $g_{ij}$  y  $L_{ij}$ , entonces  $P$  y  $Q$  satisfacen la condición de compatibilidad

$$P_2 - P_1 + PQ - QP = 0$$

*Demostración.* El punto de partida consiste en buscar un *triedro móvil*, es decir, tres campos de vectores independientes

$$V_1, V_2, V_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que dependan de  $u = (u_1, u_2) \in U$ , y que satisfagan seis (6) ecuaciones diferenciales vectoriales análogas a las fórmulas de Gauss (las cuatro primeras) y a las fórmulas Weingarten (las dos últimas) es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial u^1} &= \Gamma_{11}^1 V_1 + \Gamma_{11}^2 V_2 + L_{11} V_3 \\ \frac{\partial V_1}{\partial u^2} &= \Gamma_{12}^1 V_1 + \Gamma_{12}^2 V_2 + L_{12} V_3 \\ \frac{\partial V_2}{\partial u^1} &= \Gamma_{21}^1 V_1 + \Gamma_{21}^2 V_2 + L_{21} V_3 \\ \frac{\partial V_2}{\partial u^2} &= \Gamma_{22}^1 V_1 + \Gamma_{22}^2 V_2 + L_{22} V_3 \\ \frac{\partial V_3}{\partial u^1} &= -(L_1^1 X_1 + L_1^2 X_2) \\ \frac{\partial V_3}{\partial u^2} &= -(L_2^1 X_1 + L_2^2 X_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

si escribimos los tres vectores columna

$$V_1 = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix},$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} \xi^4 \\ \xi^5 \\ \xi^6 \end{bmatrix}.$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} \xi^7 \\ \xi^8 \\ \xi^9 \end{bmatrix}.$$

entonces el vector  $\xi \in \mathbb{R}^9$  formado por las tres columnas  $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}^3$ , que también puede pensarse como la matriz  $3 \times 3$

$$\hat{\xi} = [V_1, V_2, V_3].$$

Las 18 funciones que aparecen en el segundo miembro de las seis ecuaciones vectoriales anteriores las denotamos

$$F_{\alpha j} : U \times \mathbb{R}^9 \rightarrow R$$

son funciones de las coordenadas  $(u, \xi)$ ,  $u = (u_1, u_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_9)$ ,  $\alpha = 1, \dots, 9$ , que forman una matriz  $9 \times 2$  y que cumplen

$$\partial \xi^\alpha / \partial u^j = f_{\alpha j}(u, \xi),$$

Las ecuaciones precedentes definen el siguiente sistema de  $2 \times 9 = 18$  ecuaciones en derivadas parciales en  $U \times \mathbb{R}^9$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} = F_{11}(u, \xi),$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = F_{21}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} = F_{31}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} = F_{12}(u, \xi),$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} = F_{22}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} = F_{32}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial u^1} = F_{41}(u, \xi),$$

$$\frac{\partial \xi_5}{\partial u^1} = F_{51}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_6}{\partial u^1} = F_{61}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial u^2} = F_{42}(u, \xi),$$

$$\frac{\partial \xi_5}{\partial u^2} = F_{52}(u, \xi);$$

$$\frac{\partial \xi_6}{\partial u^2} = F_{62}(u, \xi)$$

$$\frac{\partial \xi_7}{\partial u^1} = F_{71}(u, \xi),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_8}{\partial u^1} &= F_{81}(u, \xi); \\ \frac{\partial \xi_9}{\partial u^1} &= F_{91}(u, \xi); \\ \frac{\partial \xi_7}{\partial u^2} &= F_{72}(u, \xi), \\ \frac{\partial \xi_8}{\partial u^2} &= F_{82}(u, \xi); \\ \frac{\partial \xi_9}{\partial u^2} &= F_{92}(u, \xi);\end{aligned}$$

donde:

Las 12 primeras ecuaciones mimetizan las fórmulas de Gauss, que expresan las parciales de segundo orden de la parametrización  $\Phi$  que buscamos en función de las parciales de primer orden  $X_1$  y  $X_2$  de  $\Phi$ .

Por ejemplo, las tres primeras ecuaciones tienen que ser un sucedáneo de la siguiente fórmula de Gauss

$$X_{11} = D_{11}\Phi(u) = \Gamma_{ij}^k(u)D_k\Phi(u) + L_{11}(u)(X_3 \circ \Phi)(u).$$

Análogamente las últimas seis ecuaciones (13-18) deben mimetizar las fórmulas de Weingarten, que expresan las parciales del campo  $V_3$  (asociado a dicha parametrización buscada, respecto a la que sería  $V_3 = N$ ) en función de  $V_1$  y  $V_2$ .

Siguiendo las notaciones de [11] podemos escribir las nueve ecuaciones que llevan parcial respecto a  $u_1$  así

$$\frac{\partial[V_1, V_2, V_3]}{\partial u_1} = [V_1, V_2, V_3]P(u)$$

Análogamente podemos escribir las nueve ecuaciones que llevan parcial respecto a  $u_2$  así

$$\frac{\partial[V_1, V_2, V_3]}{\partial u_2} = [V_1, V_2, V_3]Q(u)$$

Las 18 funciones

$$F_{\alpha i} : U \times \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$$

son funciones de las coordenadas  $(u, \xi)$ ,  $u = (u_1, u_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_9)$ . que forman una matriz  $9 \times 2$ .

Dado que existe solución del anterior sistema  $\xi(u) = [V_1(u), V_2(u), V_3(u)]$ , fijando un  $u_0 = (a^1, a^2)$  en  $U$ , un  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  y una base  $W_1, W_2, W_3$  en  $\mathbb{R}^3$  que verifique  $W_3 = (W_1 \times W_2)/\|W_1 \times W_2\|$  la parametrización buscada es

$$\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que  $U_0 \subset U$  sea un entorno de  $u_0$  de la forma

$$U_0 = (a^1 - \epsilon, a^1 + \epsilon) \times (a^2 - \epsilon, a^2 + \epsilon)$$

así

$$\Phi(u^1, u^2) = \int_{s=a^1}^{s=u^1} V_1(s, u^2) ds + \int_{t=a^2}^{t=u^2} V_1(u^1, t) dt + p_0.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral obtenemos, para todo  $u \in U_0$  es

$$V_1(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}(u)$$

$$V_2(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}(u)$$

Vamos a plantear ahora el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (V_1, V_2, V_3)_{u_1} &= (V_1, V_2, V_3)P, \\ (V_1, V_2, V_3)_{u_2} &= (X_1, X_2, N)Q, \\ (V_1, V_2, V_3)(u_1^0, u_2^0) &= (w_1, w_2, w_3). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

La condición necesaria del teorema la tenemos demostrada, puesto que si tenemos una parametrización, sabemos que verifica las fórmulas de Gauss y Weingarten que son equivalentes al sistema (3.3), derivando estas obtenemos la ecuación de Gauss-Codazzi que es la condición de compatibilidad. Usando el teorema de Frobenius el sistema (3.3) tiene una única solución. A continuación queremos resolver

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= V_1, \\ X_2 &= V_2, \\ \Phi(u_1^0, u_2^0) &= p_0. \end{aligned} \right\}$$

La condición de compatibilidad es  $(V_1)_2 = (V_2)_1$ . Pero

$$(V_1)_2 = \sum_{j=1}^3 q_{j1} V_j,$$

$$(V_2)_1 = \sum_{j=1}^3 p_{j2} V_j.$$

Sabemos que la segunda columna de P es igual que la primera columna de Q, entonces  $(V_1)_2 = (V_2)_1$  por lo que  $\Phi$  es única.

$V_3$  es perpendicular a la superficie  $\Phi$ ,  $\|V_3\| = 1$ ,  $X_i \cdot X_j = g_{ij}$ , y  $(V_3)_i \cdot X_j = -L_{ij}$ , es decir,  $\Phi$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con

$$I = \sum_{ij} g_{ij} du_i du_j,$$

$$II = \sum_{ij} L_{ij} du_i du_j,$$

como su primera y segunda formas fundamentales. Vamos a demostrar que la función matricial  $3 \times 3$ ,  $\Phi = (V_i \cdot V_j)$  es igual a la matriz  $G$ , donde  $G$  es la matriz

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para esto calculamos la primera derivada de  $\Psi$ . Dado que  $V_1, V_2, V_3$  satisfacen el sistema de ecuaciones (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} (V_i \cdot V_j)_1 &= (V_i)_1 \cdot V_j + V_i \cdot (V_j)_1 \\ &= \sum_k p_{ki} V_k \cdot V_j + p_{kj} V_k \cdot V_i = \sum_k p_{ki} g_{jk} + g_{ik} p_{kj} \\ &= (GP)_{ji} + (GP)_{ij} = (GP + (GP)^t)_{ij}. \end{aligned}$$

Por la fórmula (2.10) tenemos que  $GP = G(G^{-1}A_1) = A_1$  y  $A_1 + A_1^t = G_1$ . Por lo tanto  $(GP)^t + GP = G_1$  y

$$\Phi_1 = G_1.$$

De forma similar tenemos

$$\Phi_2 = G_2.$$

Pero el valor inicial  $\Phi(u_1^0, u_2^0) = G(u_1^0, u_2^0)$ . Entonces  $\Phi = G$ . En otras palabras, hemos demostrado que

$$X_i \cdot X_j = g_{ij}, \quad X_i \cdot V_3 = 0.$$

Por lo tanto

1.  $X_1, X_2$  son linealmente independientes,
2.  $V_3$  es un campo vectorial normal unitario a la superficie  $X$ ,
3. la primera forma fundamental de  $X$  es  $\sum_{ij} g_{ij} du_i du_j$ .

Para calcular la segunda forma fundamental usamos de nuevo (3.3)

$$\begin{aligned}
 -(V_3)_1 \cdot V_j &= (g^{11}L_{11} + g^{12}L_{12})V_1 \cdot V_j + (g^{12}L_{11} + g^{22}L_{12})V_2 \cdot V_j \\
 &= (g^{11}L_{11} + g^{12}L_{12})g_{1j} + (g^{12}L_{11} + g^{22}L_{12})g_{2j} \\
 &= L_{11}(g^{11}g_{1j} + g^{12}g_{2j}) + L_{12}(g^{21}g_{1j} + g^{22}g_{2j}) \\
 &= L_{11}\delta_{1j} + L_{12}\delta_{2j}.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$-(V_3)_1 \cdot V_1 = L_{11}, \quad -(V_3)_1 \cdot V_2 = L_{12}.$$

De forma similar

$$-(V_2)_2 \cdot V_j = L_{2j}.$$

Esto prueba que  $\sum_{ij} L_{ij} du_i du_j$  es la segunda forma fundamental de X. □

# Bibliografía

- [1] M. Abate-F. Tovena, *Curves and Surfaces*, Springer, Berlin, (2012).
- [2] P. O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Deuxième partie.* J. l'Ecole Polytech. 42, 1–151 (1867).
- [3] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, (1976).
- [4] J. Dieudonné, *Fundamentos de Análisis.* Ed. Reverté, Barcelona, (1966).
- [5] F. G. Frobenius, *Über das Pfaffsche Problem.* Journal Reine Angew. Math. 82, 230–315 (1875).
- [6] Ph. Hartmann, *Ordinary differential Equations. 2nd ed.* SIAM, Philadelphia, (2002).
- [7] R. S. Millman, George D. Parker, *Elements of Differential Geometry.* Prentice hall, Englewood Cliffs, (1977).
- [8] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd edition.*
- [9] E. R. Phillips, *Karl M Peterson : the earliest derivation of the Mainardi-Codazzi equations and the fundamental theorem of surface theory.* Historia Math. 6 (2) 137-163 (1979).
- [10] J. J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley, New York, (1969).
- [11] Ch. L. Terng, *Lecture Notes on Curves and Surfaces in  $R^3$ .*, Differential Geometry Computer Projects for NCTS Workshop, (2003).