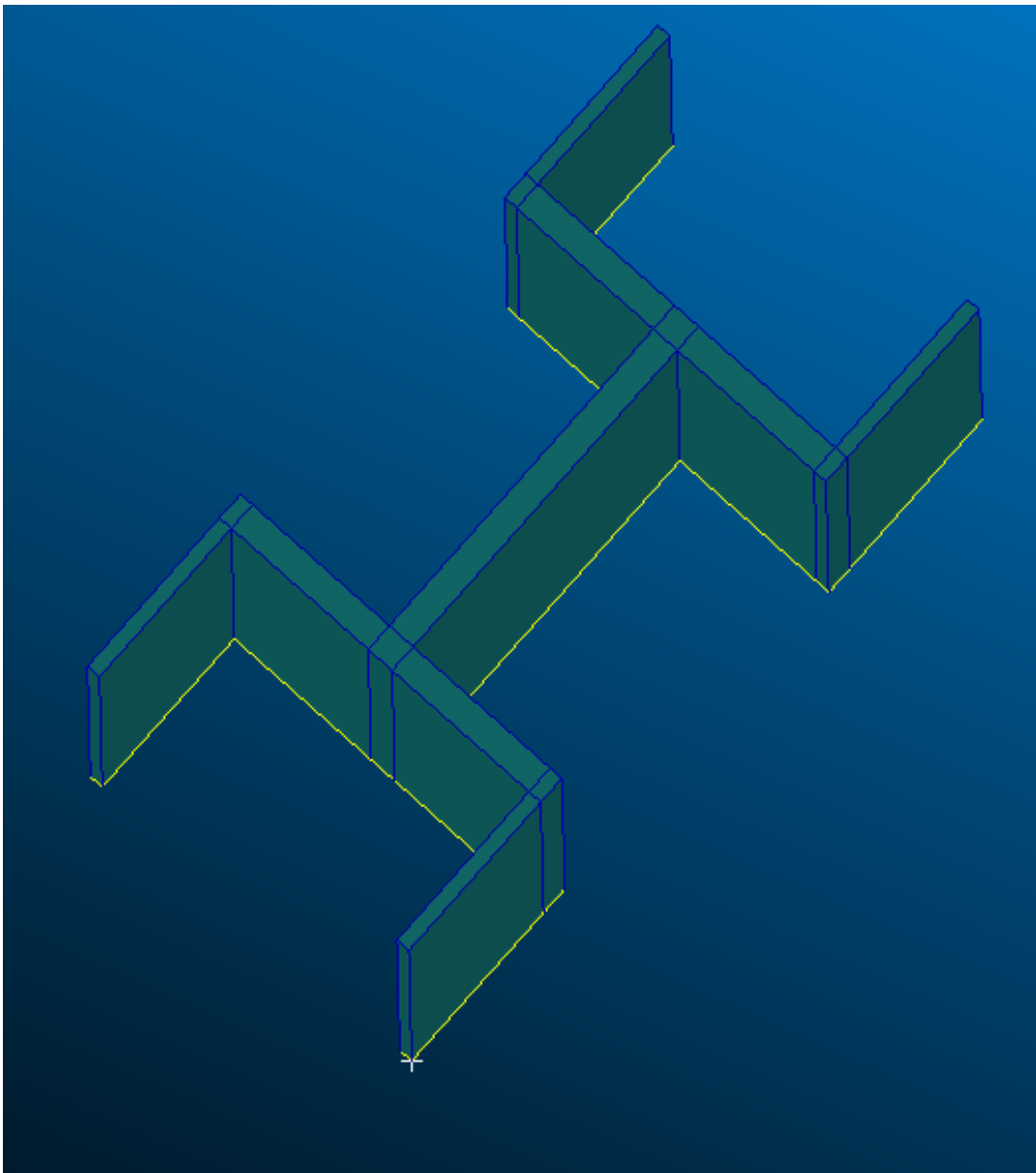


# Modelos Matemáticos en Mecánica de Sólidos

## Tomo I. Elasticidad Lineal



Peregrina Quintela Estévez

30 de junio de 2025

---

**Sobre el texto:** Modelos Matemáticos en Mecánica de Sólidos. Tomo I. Elasticidad Lineal. Máster de Matemática Industrial (M2i). Disponible en el Repositorio Minerva, Área de Ingeniería y Arquitectura, Recursos docentes, Materiales didácticos. Junio 2025.

---

---

**Sobre la autora:** Peregrina Quintela es Catedrática de Matemática Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela, e Investigadora Adscrita a CITMAga. Doctora en Matemáticas por las universidades Autónoma de Madrid y la Pierre et Marie Curie (actual Paris Sorbonne) ha desarrollado su carrera investigadora en temáticas muy relacionadas con la mecánica de sólidos. Es profesora del M2i, máster en el que ha impartido la materia de Mecánica de Sólidos desde su puesta en marcha en el año 2014. También imparte la materia Software Profesional en Mecánica de Sólidos desde el año 2022.

---



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
APLICADA



# **Modelos Matemáticos en Mecánica de Sólidos**

## **Tomo I. Elasticidad Lineal**

Peregrina Quintela Estévez

Junio 2025

**Prefacio** El texto *Modelos Matemáticos en Mecánica de Sólidos*, surge como soporte bibliográfico en la materia homónima de los Másteres de Ingeniería Matemática (cursos 2006-2007 al 2013-2014) y el de Matemática Industrial (2014-2015 y continúa). Se trata actualmente de un máster interuniversitario coordinado por la Universidad de Santiago de Compostela y en el que participan las universidades de A Coruña, Vigo, Politécnica de Madrid y Carlos III de Madrid.

El objetivo principal del **Tomo I Elasticidad Lineal** es el estudio de modelos matemáticos referidos a problemas estáticos y dinámicos en elasticidad lineal. Se presentan los modelos asociados a materiales elásticos lineales e isótropos, con especial atención a la interpretación física de las variables y parámetros que intervienen en cada caso. Para facilitar la visualización del comportamiento de estructuras y su interpretación se resuelven los problemas clásicos de torsión de barras y de flexión de vigas cilíndricas. También se incluyen modelos simplificados del modelo de elasticidad tridimensional general debidos a la geometría de la pieza, y/o el tipo de fuerzas de volumen, y/o las condiciones de contorno aplicadas, y/o la existencia de simetrías. Así, se identifican los modelos planos, con simetría axial, de vigas y de placas. Por último, se ofrece una introducción a la vibración de estructuras.

El texto se estructura en 10 capítulos. Al final de cada capítulo se recoge un boletín de problemas propuestos. Algunos de los ejercicios propuestos se ofrecen resueltos en el Anexo A al final del texto y están identificados en cada boletín con un trébol (♣).

El Capítulo 1 se dedica a la introducción de las ecuaciones generales de la elasticidad tridimensional y a la deducción del modelo de elasticidad lineal e isotrópica, tanto estática como dinámica. Los Capítulos 2 y 3 se orientan a la interpretación física de los tensores de deformación y de tensiones, así como de las principales variables y magnitudes derivadas de ellos.

La primera parte del Capítulo 4 se dedica a un estudio en detalle de la ley de Hooke, y a la interpretación física de los distintos parámetros que intervienen en ella. En la segunda parte de este capítulo se estudian los métodos de resolución del modelo de elasticidad lineal en desplazamientos (Lamé-Navier), en tensiones (Beltrami-Michell) y a través de la función de Airy. La última parte del capítulo se dedica al estudio del principio de los trabajos virtuales y al funcional de energía.

El Capítulo 5 se centra en el caso particular de problemas planos, tanto para deformaciones como tensiones planas. Se incluye también la resolución de los modelos planos a través de la función de Airy. El Capítulo 6 presenta los modelos simplificados 1D y 2D para problemas con simetría esférica y cilíndrica, respectivamente.

El Capítulo 7 se dedica al estudio de modelos clásicos de torsión de barras y de vigas con distintos tipos de sección. En la segunda parte del capítulo se presenta la flexión elastostática de vigas cilíndricas, así como la deducción de su solución e interpretación de la misma.

El Capítulo 8 presenta los modelos reducidos unidimensionales de Bernoulli-Euler y de Timoshenko para estructuras tipo vigas. A continuación, los modelos reducidos de Kirchhoff y de Reissner-Mindlin para estructuras tipo placa se presentan en el Capítulo 9.

El Capítulo 10 se orienta a realizar una introducción a la vibración de estructuras utilizando como hilo conductor la vibración de vigas.

*Por último, el Anexo A recopila los ejercicios marcados como resueltos en los boletines de cada uno de los capítulos.*

*El texto recoge las fuentes bibliográficas utilizadas en este primer tomo. Algunas referencias son de consulta recomendada a lo largo de todo el texto y para evitar reiteraciones ya se reconoce su interés en esta introducción. De especial relevancia es el libro de Henry y Parsy (ver [10]) que ha servido de inspiración en buena parte de los capítulos; desafortunadamente está agotado en las librerías y solo puede accederse a él a través de algunas bibliotecas. Otros textos básicos son los libros de Bower [4] y de Sokolnikoff [14].*

*El **Tomo II Otros modelos en elasticidad**, escrito por Patricia Barral Rodiño, se dedica al estudio de leyes de comportamiento más generales, a la formulación de condiciones de contorno no lineales y a la incorporación de efectos térmicos.*

# Índice general

|                                                                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                                                            | <b>1</b>  |
| <b>1. Elastodinámica lineal</b>                                                                                | <b>6</b>  |
| 1.1. Leyes de conservación. Coordenadas Eulerianas . . . . .                                                   | 6         |
| 1.2. Materiales elásticos e isotropos . . . . .                                                                | 8         |
| 1.3. Leyes de conservación. Coordenadas Lagrangianas . . . . .                                                 | 9         |
| 1.4. Condiciones de contorno . . . . .                                                                         | 12        |
| 1.5. Elastodinámica lineal . . . . .                                                                           | 14        |
| 1.6. Boletín 1 . . . . .                                                                                       | 18        |
| <b>2. Tensiones y esfuerzos</b>                                                                                | <b>21</b> |
| 2.1. Interpretación de sus componentes . . . . .                                                               | 21        |
| 2.1.1. Significado de las componentes . . . . .                                                                | 24        |
| 2.2. Relación de simetría de Cauchy . . . . .                                                                  | 25        |
| 2.3. Cambio de coordenadas . . . . .                                                                           | 25        |
| 2.4. Tensiones normales principales . . . . .                                                                  | 26        |
| 2.5. Invariantes escalares . . . . .                                                                           | 28        |
| 2.6. Cuádrica de Cauchy de tensiones . . . . .                                                                 | 29        |
| 2.7. Parte esférica y desviatoria . . . . .                                                                    | 30        |
| 2.7.1. Propiedades . . . . .                                                                                   | 30        |
| 2.8. Tensores particulares de esfuerzos . . . . .                                                              | 32        |
| 2.8.1. Esfuerzos puramente normales: Tensor esférico . . . . .                                                 | 32        |
| 2.8.2. Esfuerzos uniaxiales . . . . .                                                                          | 33        |
| 2.8.3. Cizallamiento simple en dos direcciones ortogonales . . . . .                                           | 34        |
| 2.8.4. Tensiones planas . . . . .                                                                              | 35        |
| 2.8.5. Combinación de esfuerzos . . . . .                                                                      | 35        |
| 2.9. Boletín 2 . . . . .                                                                                       | 35        |
| <b>3. Tensor de deformaciones</b>                                                                              | <b>38</b> |
| 3.1. Interpretación de las componentes . . . . .                                                               | 38        |
| 3.2. Elongación en una dirección . . . . .                                                                     | 42        |
| 3.3. Ecuaciones de compatibilidad . . . . .                                                                    | 43        |
| 3.3.1. Movimientos rígidos . . . . .                                                                           | 43        |
| 3.3.2. Desplazamientos rígidos infinitesimales . . . . .                                                       | 44        |
| 3.3.3. Análisis de la unicidad del desplazamiento asociado a un<br>tensor linealizado de deformación . . . . . | 45        |
| 3.3.4. Tensor de rotación . . . . .                                                                            | 45        |
| 3.3.5. Ecuaciones de compatibilidad de Saint Venant . . . . .                                                  | 48        |

|                                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.4. Boletín 3 . . . . .                                                                                        | 52         |
| <b>4. Ley de Hooke</b>                                                                                          | <b>54</b>  |
| 4.1. Introducción . . . . .                                                                                     | 54         |
| 4.2. Ley de Hooke . . . . .                                                                                     | 55         |
| 4.2.1. Tensor de tensiones esférico y desviatorio . . . . .                                                     | 59         |
| 4.2.2. Módulo de compresibilidad . . . . .                                                                      | 60         |
| 4.2.3. Interpretación física de los coeficientes de elasticidad . . . . .                                       | 60         |
| 4.2.4. Relación entre los distintos parámetros elásticos . . . . .                                              | 63         |
| 4.3. Energía de deformación . . . . .                                                                           | 65         |
| 4.3.1. Trabajo externo e interno . . . . .                                                                      | 66         |
| 4.3.2. Principio de los trabajos virtuales . . . . .                                                            | 67         |
| 4.3.3. Funcional de energía . . . . .                                                                           | 68         |
| 4.4. Ecuación de Lamé-Navier . . . . .                                                                          | 69         |
| 4.5. Ecuación de Beltrami-Michell . . . . .                                                                     | 71         |
| 4.5.1. Fuerzas de volumen constantes . . . . .                                                                  | 72         |
| 4.6. Método inverso: Solución por la función de Airy . . . . .                                                  | 73         |
| 4.6.1. Función de tensiones de Maxwell . . . . .                                                                | 75         |
| 4.6.2. Función de Airy . . . . .                                                                                | 75         |
| 4.7. Boletín 4 . . . . .                                                                                        | 76         |
| <b>5. Problemas planos en elasticidad lineal</b>                                                                | <b>81</b>  |
| 5.1. Definición de problemas de elasticidad plana . . . . .                                                     | 81         |
| 5.1.1. Sistema de ecuaciones de problemas de elasticidad plana . . . . .                                        | 83         |
| 5.2. Estado de deformación plana . . . . .                                                                      | 83         |
| 5.3. Estado de tensiones planas: modelo de membrana . . . . .                                                   | 86         |
| 5.3.1. Ecuaciones de membrana en términos del desplazamiento . . . . .                                          | 88         |
| 5.4. Solución por la función de Airy . . . . .                                                                  | 91         |
| 5.4.1. Función de Airy . . . . .                                                                                | 91         |
| 5.4.2. Ecuación diferencial asociada a la función de Airy . . . . .                                             | 92         |
| 5.4.3. Cálculo del vector desplazamiento en deformación plana para fuerzas de volumen nulas . . . . .           | 94         |
| 5.4.4. Precisiones sobre la validez de la hipótesis de tensiones planas para fuerzas de volumen nulas . . . . . | 95         |
| 5.4.5. Técnica de la función de Airy . . . . .                                                                  | 97         |
| 5.5. La función de Airy en coordenadas curvilíneas . . . . .                                                    | 99         |
| 5.5.1. Relación entre la función de Airy y las tensiones en coordenadas curvilíneas . . . . .                   | 99         |
| 5.5.2. Coordenadas polares . . . . .                                                                            | 100        |
| 5.6. Boletín 5 . . . . .                                                                                        | 101        |
| <b>6. Modelos con simetría</b>                                                                                  | <b>108</b> |
| 6.1. Simetría esférica . . . . .                                                                                | 108        |
| 6.1.1. Ecuación unidimensional para problemas de elasticidad con simetría esférica . . . . .                    | 112        |
| 6.2. Simetría cilíndrica . . . . .                                                                              | 113        |
| 6.3. Boletín 6 . . . . .                                                                                        | 118        |

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7. Problemas de torsión y flexión</b>                              | <b>123</b> |
| 7.1. Torsión elástica de barras cilíndricas . . . . .                 | 125        |
| 7.1.1. Ecuación de equilibrio . . . . .                               | 126        |
| 7.1.2. Ecuación de compatibilidad . . . . .                           | 126        |
| 7.1.3. Ley de comportamiento . . . . .                                | 127        |
| 7.1.4. Tensor de deformación . . . . .                                | 127        |
| 7.1.5. Condiciones de contorno . . . . .                              | 128        |
| 7.2. Torsión de vigas de sección circular . . . . .                   | 128        |
| 7.2.1. Cizallamiento . . . . .                                        | 131        |
| 7.3. Torsión de vigas de sección anular . . . . .                     | 131        |
| 7.4. Sección simplemente conexa . . . . .                             | 132        |
| 7.4.1. Origen del sistema de referencia (opcional) . . . . .          | 134        |
| 7.4.2. Función de tensiones de Prandtl . . . . .                      | 135        |
| 7.4.3. Rigidez geométrica a la torsión . . . . .                      | 137        |
| 7.5. Flexión de vigas cilíndricas . . . . .                           | 138        |
| 7.5.1. Ecuaciones de equilibrio . . . . .                             | 139        |
| 7.5.2. Ley de comportamiento y tensor de deformación . . . . .        | 139        |
| 7.5.3. Condiciones de contorno . . . . .                              | 140        |
| 7.5.4. Ecuaciones de compatibilidad . . . . .                         | 141        |
| 7.6. Método de resolución. Función de Timoshenko . . . . .            | 141        |
| 7.6.1. Significado de la constante $c$ . . . . .                      | 141        |
| 7.6.2. Verificación de las condiciones de contorno . . . . .          | 142        |
| 7.6.3. Cálculo del vector desplazamiento . . . . .                    | 143        |
| 7.6.4. Centro de cizallamiento . . . . .                              | 147        |
| 7.6.5. Métodos de resolución . . . . .                                | 148        |
| 7.7. Boletín 7 . . . . .                                              | 149        |
| <b>8. Modelos unidimensionales en vigas</b>                           | <b>153</b> |
| 8.1. Modelo de barra solicitada axialmente . . . . .                  | 154        |
| 8.1.1. Ecuación de equilibrio . . . . .                               | 154        |
| 8.1.2. Formulación variacional . . . . .                              | 156        |
| 8.1.3. Condiciones de contorno . . . . .                              | 156        |
| 8.2. El modelo de flexión: teoría de Bernoulli-Euler . . . . .        | 156        |
| 8.2.1. Deformación y tensión . . . . .                                | 158        |
| 8.2.2. Momentos flectores . . . . .                                   | 159        |
| 8.2.3. Ecuaciones de equilibrio . . . . .                             | 160        |
| 8.2.4. Formulación variacional . . . . .                              | 162        |
| 8.2.5. Condiciones de contorno . . . . .                              | 162        |
| 8.2.6. Tensiones cortantes. Fórmulas de Jouravski-Collignon . . . . . | 163        |
| 8.3. El modelo de flexión: Teoría de Timoshenko . . . . .             | 165        |
| 8.3.1. Tensores de deformación y tensiones . . . . .                  | 166        |
| 8.3.2. Energía potencial de deformación . . . . .                     | 167        |
| 8.3.3. Principio de los trabajos virtuales . . . . .                  | 167        |
| 8.3.4. Momentos flectores y esfuerzos de corte . . . . .              | 168        |
| 8.3.5. Tensiones cortantes. Constante de Timoshenko . . . . .         | 169        |
| 8.3.6. Modelo matemático de Timoshenko . . . . .                      | 170        |
| 8.3.7. Condiciones de contorno . . . . .                              | 171        |
| 8.4. Comparación modelos de Bernoulli y Timoshenko . . . . .          | 172        |
| 8.5. Boletín 8 . . . . .                                              | 174        |

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>9. Problemas en placas</b>                                                     | <b>177</b> |
| 9.1. El modelo de Kirchhoff . . . . .                                             | 179        |
| 9.1.1. Expresión del desplazamiento . . . . .                                     | 180        |
| 9.1.2. Tensor de deformación . . . . .                                            | 181        |
| 9.1.3. Ecuaciones constitutivas . . . . .                                         | 182        |
| 9.1.4. Fuerzas resultantes. Momentos flectores. Coeficientes de rigidez . . . . . | 183        |
| 9.1.5. Cálculo de las tensiones máximas . . . . .                                 | 185        |
| 9.1.6. Inconsistencias del modelo de Kirchhoff. Cargas totales . . . . .          | 186        |
| 9.1.7. Ecuaciones de Kirchhoff en términos de los momentos . . . . .              | 188        |
| 9.1.8. Ecuaciones de Kirchhoff en términos del desplazamiento . . . . .           | 189        |
| 9.2. Modelo en flexión: Teoría de Reissner-Mindlin . . . . .                      | 190        |
| 9.2.1. Tensor de deformación . . . . .                                            | 191        |
| 9.2.2. Ecuaciones constitutivas . . . . .                                         | 192        |
| 9.2.3. Fuerzas resultantes. Esfuerzos membranales y cortantes . . . . .           | 192        |
| 9.2.4. Momentos flectores . . . . .                                               | 194        |
| 9.2.5. Ecuaciones de equilibrio . . . . .                                         | 195        |
| 9.3. Boletín 9 . . . . .                                                          | 196        |
| <b>10. Vibraciones</b>                                                            | <b>197</b> |
| 10.1. Vibraciones naturales en vigas . . . . .                                    | 197        |
| 10.2. Boletín 10 . . . . .                                                        | 206        |
| <b>Anexo A. Boletines resueltos</b>                                               | <b>207</b> |
| Boletín 1: Elastodinámica lineal . . . . .                                        | 207        |
| Boletín 2: Tensiones y esfuerzos . . . . .                                        | 214        |
| Boletín 3: Tensor de deformaciones . . . . .                                      | 221        |
| Boletín 4: Elasticidad lineal . . . . .                                           | 228        |
| Boletín 5: Problemas planos . . . . .                                             | 241        |
| Boletín 6: Modelos con simetría . . . . .                                         | 248        |
| Boletín 7: Torsión y flexión de vigas . . . . .                                   | 260        |
| Boletín 8: Problemas unidimensionales en vigas . . . . .                          | 266        |
| Boletín 10: Vibraciones . . . . .                                                 | 278        |



# Introducción

En este texto se centra en el proceso de modelización en el ámbito de la mecánica de sólidos lineal. Presentaremos sus principales modelos matemáticos referidos a problemas estáticos y dinámicos, asociados a materiales elásticos e isotrópicos que, debido a la geometría de la pieza, y/o el tipo de fuerzas de volumen, y/o las condiciones de contorno aplicadas, y/o la existencia de simetrías, admiten simplificaciones del modelo de elasticidad tridimensional general; identificándose los modelos reducidos en cada caso.

Las competencias específicas que el lector adquiere a través del estudio del texto son:

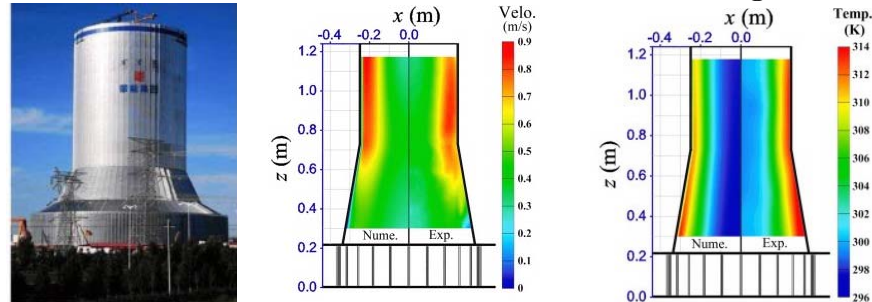
- Alcanzar un conocimiento básico en el área de mecánica de sólidos, como punto de partida para un adecuado modelado matemático, tanto en contextos bien establecidos como en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios y multidisciplinares.
- Modelar fenómenos específicos y realizar las simplificaciones adecuadas en el modelo que faciliten su tratamiento numérico, manteniendo el grado de precisión, de acuerdo con requisitos previamente establecidos.
- Ser capaz de validar e interpretar los resultados obtenidos, comparando con visualizaciones, medidas experimentales y/o requisitos funcionales del correspondiente sistema físico o de ingeniería.
- Ser capaz de extraer, empleando diferentes técnicas analíticas, información tanto cualitativa como cuantitativa de los modelos.
- Saber modelar elementos y sistemas complejos o en campos poco establecidos, que conduzcan a problemas bien planteados/formulados.

Para facilitar la adquisición de estas competencias se incorporan en cada capítulo boletines de cuestiones y problemas, de los cuales se resuelven en el Anexo A del libro los que aparecen identificados con un ♣.

En esta introducción presentaremos algunos casos de uso de interés en las aplicaciones en la industria y en ingeniería; a través de ellas se verá la relevancia de los contenidos desarrollados en este libro.

### Caso de uso 1

#### Simulación térmica e hidrodinámica de una torre de refrigeración.



Las imágenes se corresponden al comportamiento de una torre de refrigeración de acero en Mongolia (China) para reducir la temperatura del agua circulante. Los resultados han sido obtenidos en el artículo [13]. En este problema es importante calcular el flujo de los gases desde el reactor hasta la atmósfera a través de la torre **-modelo hidrodinámico-**; el campo de temperaturas de los gases emitidos a la atmósfera **-modelo térmico-**; la deformación y las tensiones que las altas temperaturas pueden provocar en la torre **-modelo termomecánico-**. Dado que la torre es una estructura de pequeño espesor en comparación con el resto de las dimensiones es posible utilizar modelos simplificados para estructuras delgadas **-modelos para shells-**. Para la simulación numérica de los fenómenos implicados en este ejemplo es usual utilizar el método de los elementos finitos y, en el problema hidrodinámico, puede utilizarse también el método de volúmenes finitos.

Así, en este primer ejemplo las **palabras clave** relacionadas con el contenido de este texto son: **modelo termomecánico, deformación, tensiones, placas y láminas**. Elementos placa, elementos shell.

### Caso de uso 2

#### Simulación bajo cargas aerodinámicas del puente Bill Emerson Memorial (Missouri).

Se trata de un puente que atraviesa el río Mississippi con dos planos de múltiples cables atirantados en ambos laterales, que son anclados a una torre en H, como puede verse en la Figura 1. Su longitud total es de  $570m$  con una luz central de  $351m$ . El puente se encuentra en una zona geológica con una falla muy activa, por lo que está preparado para soportar un posible movimiento sísmico; en particular, ha sido diseñado para soportar terremotos de magnitud superior a 7.5 en la escala Richter. Actualmente está monitorizado con casi un centenar de acelerómetros que registran en tiempo real su comportamiento ante cualquier tipo de incidencia a la que se vea sometido; de esta forma los resultados de su monitorización son un buen test real para analizar la eficacia de los métodos numéricos empleados en la simulación del comportamiento de este tipo de puentes. La monitorización permite además diseñar mecanismos para controlar las vibraciones, mecanismos que se van incorporando a la estructura monitorizada para evitar su deterioro ante nuevas situaciones de estrés.

Tenemos así para este ejemplo **palabras clave** relativas a conceptos que se analizarán en este texto: **problema elastodinámico, análisis vibratorio, cables, barras, vigas, uniones, placas**. Elementos 1d, 2d y 3d.

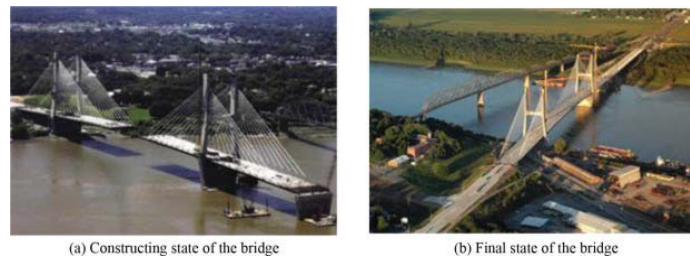


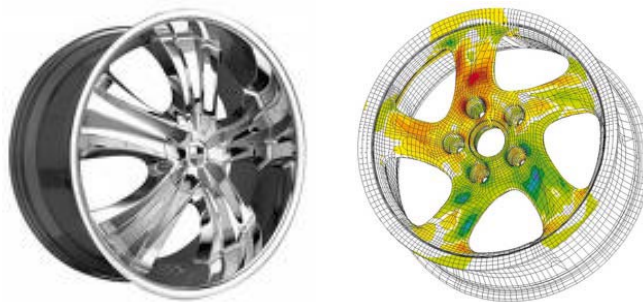
Figura 1: Figura obtenida del artículo de Omran y Karani (ver [12]).

### Caso de uso 3

#### Simulación de las zonas de plastificación de una llanta de automóvil.

Cuando las cargas a las que se somete la llanta son importantes es habitual que aparezcan deformaciones permanentes, por lo que el material deja de ser elástico; esto provoca que algunas zonas de la llanta se plastifiquen. Si la carga se incrementa aún más o se incrementa el número de ciclos de uso, el material puede sufrir daños permanentes.

En consecuencia, algunas **palabras clave relacionadas** con el contenido de este ejemplo son: **modelo mecánico**, **límite elástico del material**, **material plástico**, **zonas de plastificación** y **daño**.



### Caso de uso 4

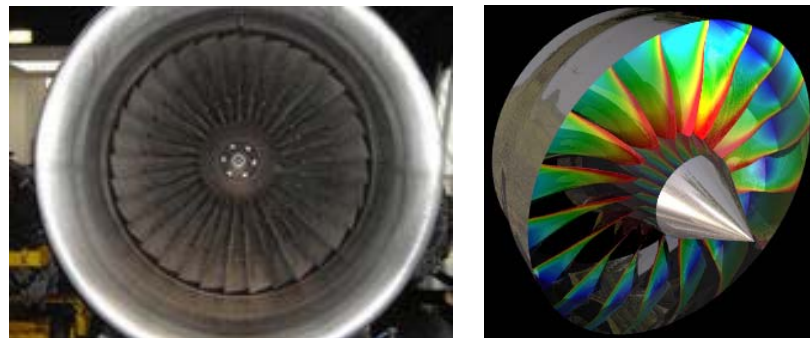
#### Simulación termo-hidro-mecánica de una turbina de avión.

La propulsión de un avión está explicada de manera muy simple por la tercera ley de Newton: por cada acción, habrá una reacción directamente opuesta y de la misma intensidad. Los 4 componentes básicos de una turbina son:

- El compresor: es la parte encargada de comprimir el aire de entrada al motor, y enviarlo a la cámara de combustión de forma uniforme y continua a altas presiones.
- La cámara de combustión: es el área donde el aire comprimido que viene del compresor se mezcla con el combustible, el cual se inyecta por una serie de boquillas que lo atomizan; el aire comprimido se quema en la cámara para de nuevo expandirlo y generar un volumen mayor de gases calientes, a mayor presión, y a alta velocidad.

- La turbina: encargada de extraer energía de los gases para mover eficientemente el compresor.
- La tobera de escape: componente encargada de dirigir los gases de alta velocidad, resultado de la combustión, hacia afuera, acelerándolos aún más por su forma y diseño, en general, en forma de embudo.

En consecuencia, la modelización y simulación del funcionamiento de una turbina conlleva nuevas **palabras clave** relacionadas con la temática de este texto: modelo de **interacción fluido estructura**, **modelo termomecánico**, **modelo dinámico**, **acoplamiento de modelos**, **multifísica**.



## Caso de uso 5

### Hundimiento de la plataforma petrolífera Sleipner A.

Para finalizar la exposición de estos ejemplos, consideraremos el relativo al hundimiento de la plataforma petrolífera Sleipner A, en cuyo diseño se cometieron algunos errores numéricos críticos.

La plataforma Sleipner A produce petróleo y gas en el Mar del Norte. Está formada por una parte externa que pesa 57.000 toneladas a las que hay que añadir un equipamiento de 40.000 toneladas. Esta parte superior de la plataforma está sostenida por una estructura inferior sumergida en el agua que se hunde hasta los 82m. La estructura inferior está conformada por 24 tanques huecos de hormigón de 12 metros de diámetro, con aire en su interior, que permiten la flotación de la plataforma, ocupando un área total de 16.000  $m^2$ . Cuatro de estas unidades se elevan hasta la superficie para servir de soporte a la parte externa de la plataforma.



En 1991 se produjo un seísmo de magnitud 3.0 en la escala de Richter y la plataforma se hundió. En concreto se produjo una fuga de agua -grieta- en una de las paredes de uno de los 24 tanques de aire, y las bombas de extracción de agua no fueron capaces de evacuar toda el agua. El fallo tuvo un coste económico total de 700 millones de dólares.

**La causa del error aparece documentada como un fallo en el modelado numérico de la plataforma que se había realizado utilizando elementos finitos:** para simular el comportamiento de los tanques de la plataforma se utilizó el programa NASTRAN de elementos finitos -software de referencia contrastada en el ámbito de sólidos- y una aproximación mediante un modelo elástico lineal. Esta aproximación no era correcta y **subestimó en un 47 % los esfuerzos que debían soportar las paredes de los tanques por cizallamiento**. En particular, algunas paredes fueron diseñadas con un grosor insuficiente. Un análisis con elementos finitos correcto, pero posterior al accidente, demostró que el diseño de la plataforma provocaría fugas en algunos de los tanques a 62 metros de profundidad. La fuga real se produjo a 65 metros de profundidad.

**Palabras clave** de este ejemplo son: **modelos simplificados, validación de modelos, modelos de daño, grietas, errores críticos.**

Se propone al lector el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 1** *Realiza un recorrido por los principales menús del paquete COMSOL para simular modelos 2D, 2D axisimétricos y 3D relativos a fenómenos en Mecánica estructural. Elabora una lista de términos clave que no conozcas y trata de encontrarlos en los contenidos de los distintos capítulos del texto.*

# Capítulo 1

## Elastodinámica lineal

Nos centraremos en la primera parte del texto en la **Mecánica de Sólidos**, rama de la Física que estudia el efecto de la aplicación de cargas mecánicas sobre sistemas materiales, con forma y volumen definidos, a temperatura constante. Más adelante, también presentaremos una introducción a la **Termomecánica de Sólidos**, rama de la Física que estudia el efecto de la aplicación de cargas térmicas y/o mecánicas sobre sistemas materiales.

En particular, este capítulo presenta un resumen de las ecuaciones de conservación y de las leyes constitutivas correspondientes a materiales elásticos en coordenadas Eulerianas. Gracias al primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff escribiremos las ecuaciones de equilibrio en la configuración de referencia, para posteriormente deducir las ecuaciones de la elasticidad finita y de la elasticidad lineal.

Además, un objetivo fundamental del capítulo es introducir la notación habitual en ingeniería en el campo de la mecánica de sólidos. En todo el texto utilizaremos la notación de Einstein de suma sobre índices repetidos. A menos que se indique lo contrario, los índices latinos  $i, j, k$  tomarán valores entre 1 y 3, mientras que los índices griegos lo harán entre 1 y 2.

### 1.1. Leyes de conservación. Coordenadas Eulerianas

Supongamos por ejemplo una viga de longitud  $L(t)$  sometida a un esfuerzo uniaxial  $\mathbf{P}(t) = P(t) \mathbf{e}_1$ , de magnitud  $P(t)$ , que provoca una elongación de la viga de magnitud  $\Delta L(t)$ . Para cuantificar la deformación sufrida por la viga debemos especificar:

- El **desplazamiento**: vector que indica el cambio de posición de cada punto material del cuerpo en cada instante:  $\mathbf{u}(p, t)$ . Asociados al desplazamiento se definen el **movimiento**:

$$\mathbf{X}(p, t) = p + \mathbf{u}(p, t), \mathbf{X} = I + \mathbf{u},$$

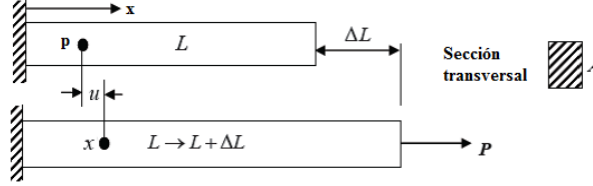
el **gradiente de deformación**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u},$$

y la **velocidad**:

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{X}(p, t)}{\partial t}, \quad x = \mathbf{X}(p, t).$$

En estas expresiones  $I$  representa la función identidad,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,  $p$  un punto en la configuración de referencia, y  $x$  el punto que ocupa  $p$  en el instante  $t$ .



- La **tensión** que surge en cada punto de la viga: esta magnitud tensorial informará de la fuerza por unidad de área en cada sección que consideremos de la viga. En su formulación más general, la tensión es una variable definida sobre el espacio de trayectorias **-formulación Euleriana-**, que se conoce como **tensor de Cauchy**; veremos que en ejemplos donde hay pequeñas deformaciones, como en la figura, se obtiene una buena aproximación si se expresa esta magnitud tensorial en la configuración inicial **-formulación Lagrangiana-**, utilizando las transformadas de Piola-Kirchhoff del tensor de Cauchy, o incluso linealizaciones de las mismas. En particular, el esfuerzo uniaxial de magnitud  $P$  provocará una tensión de valor:

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A},$$

siendo  $A$  el área de la sección transversal de la viga.

Veremos a continuación las ecuaciones que ligan las incógnitas involucradas en la deformación mecánica de un sólido. Seguiremos las notaciones de los textos de Bermúdez [3] y de Gurtin [8], aunque con algunas modificaciones para acercarla también a las notaciones usuales de los textos de ingeniería de sólidos.

Consideremos un sólido que en ausencia de fuerzas aplicadas ocupa una región  $\mathcal{B}$ .

**Teorema 2** Sea  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  un sistema de fuerzas actuando sobre el cuerpo  $\mathcal{B}$  durante un movimiento  $\mathbf{X}$ . Una condición necesaria y suficiente para que las leyes de equilibrio de los momentos lineal y angular se satisfagan es que exista un campo espacial de tensores  $\mathbf{T}$  (llamado **tensor de Cauchy**) tal que:

- Para cada vector unitario  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{s}(x, t, \mathbf{m}) = \mathbf{T}(x, t) \mathbf{m}$ ;
- $\mathbf{T}$  es **simétrico**.
- $\mathbf{T}$  satisface la **ecuación del movimiento**:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{b}, \quad (1.1)$$

para todo instante  $t$  y en todo punto  $x \in \mathcal{B}_t$ , siendo  $\mathcal{B}_t = \mathbf{X}(\mathcal{B}, t)$ . ■

En la ecuación (1.1),

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \frac{D\mathbf{v}(x,t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(x,t)}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}(x,t)) \mathbf{v}(x,t) \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}(p,t)}{\partial t^2}, \quad x = \mathbf{X}(p,t).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Cuando el movimiento es estático, entonces  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ . En cambio, si el movimiento es estacionario  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ .

La densidad de masa,  $\rho$ , debe satisfacer la ecuación de **conservación de la masa**:

$$\rho_0(p) = \det \mathbf{F}(p,t) \rho(x,t), \quad (1.3)$$

siendo  $\rho_0$  la distribución de masa en la configuración de referencia y  $\mathbf{F}$  el gradiente de deformación. En efecto, dada una parte  $P$  de  $\mathcal{B}$  debe coincidir su masa inicial con la del volumen deformado correspondiente a  $P$  en el instante  $t$ , esto es:

$$\int_P \rho_0(p) dV_p = \int_{P_t} \rho(x,t) dV_x = \int_P \rho(\mathbf{X}(p,t), t) \det(\mathbf{F}(p,t)) dV_p,$$

igualdad que, al verificarse para cualquier parte  $P$  de  $\mathcal{B}$ , permite deducir la igualdad (1.3) gracias al **principio de localización**.

Las relaciones (1.1) - (1.3) deben verificarse independientemente de la naturaleza del material que constituya el cuerpo y observamos que son insuficientes para determinar las incógnitas de interés:  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{T}$ . Las experiencias físicas muestran que dos cuerpos del mismo tamaño y geometría sometidos a la misma deformación no tienen generalmente la misma distribución de fuerzas; por ejemplo, dos esferas delgadas del mismo espesor y diámetro, una de acero y la otra de caucho, requerirán diferentes fuerzas para obtener la misma deformación. Es por esto que se introducen hipótesis adicionales, llamadas constitutivas, que servirán para distinguir el comportamiento de distintos materiales.

## 1.2. Materiales elásticos e isótropos

En Física e Ingeniería, el término **elasticidad** designa la propiedad mecánica de ciertos materiales de sufrir deformaciones reversibles cuando se encuentran sujetos a la acción de fuerzas externas, y de recuperar la forma original si estas fuerzas exteriores se eliminan. La teoría de la elasticidad, como la mecánica de sólidos deformables, describe cómo un sólido se mueve y se deforma en respuesta a fuerzas exteriores; la diferencia entre ambas es que la primera sólo trata sólidos en el que las deformaciones son termodinámicamente reversibles. Un detalle de todo lo estudiado en esta sección puede consultarse en Ciarlet [5].

**Definición 3** *Un cuerpo elástico es un cuerpo material cuya clase constitutiva  $\mathcal{C}$  consiste de todos los procesos dinámicos  $(\mathbf{X}, \mathbf{T})$  satisfaciendo:*

$$\mathbf{T}(x,t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(p,t), p), \quad x = \mathbf{X}(p,t), \quad (1.4)$$

siendo  $\hat{\mathbf{T}}$

$$\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}$$

una función regular que se conoce como **función respuesta del cuerpo**.

En consecuencia, los sólidos elásticos se caracterizan porque su función respuesta depende del movimiento a través únicamente del gradiente de deformación. Si la función respuesta,  $\hat{\mathbf{T}}$ , no depende de su segundo argumento  $p$  y la densidad de referencia  $\rho_0$  también es independiente del punto material  $p$ , el material se dice **elástico y homogéneo**; en otro caso, el material se dice **elástico y no homogéneo**.

Otro tipo de funciones respuesta serán consideradas en capítulos posteriores para caracterizar los materiales termoelásticos, viscoelásticos, termoviscoelásticos o plásticos.

Si además de elástico, el material es **isótropo**, esto es, si sus propiedades mecánicas son las mismas en todas direcciones, la respuesta  $\hat{\mathbf{T}}$  definida en (1.4) sólo puede tener una expresión muy particular en términos del gradiente de deformación, verificándose el siguiente teorema.

**Teorema 4** (*Caracterización de leyes constitutivas para materiales elásticos e isótropos*) Supongamos que el material es elástico y que, además, en el punto  $p$  es isótropo. Entonces la relación constitutiva se puede escribir en la forma

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{B}, p) = \beta_0(I_{\mathbf{B}}, p)\mathbf{I} + \beta_1(I_{\mathbf{B}}, p)\mathbf{B} + \beta_2(I_{\mathbf{B}}, p)\mathbf{B}^{-1}, \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  es el **tensor de deformación de Cauchy-Green por la izquierda**, y  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son funciones escalares de los invariantes escalares principales,  $I_{\mathbf{B}}$ , de  $\mathbf{B}$ . ■

Recordemos que los **invariantes escalares principales** se definen como:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{B}} &= (i_1(\mathbf{B}), i_2(\mathbf{B}), i_3(\mathbf{B})) \\ &= (tr(\mathbf{B}), tr(Cof(\mathbf{B})), \det(\mathbf{B})) \\ &= \left( tr(\mathbf{B}), \frac{1}{2}[tr^2(\mathbf{B}) - tr(\mathbf{B}^2)], \det(\mathbf{B}) \right). \end{aligned}$$

Recordemos que la **matriz cofactor** de  $\mathbf{B}$  es:

$$cof(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\mathbf{B}^{-T}.$$

### 1.3. Leyes de conservación. Coordenadas Lagrangianas

Sea  $(X, \mathbf{T})$  un proceso dinámico. De la ley de conservación del movimiento

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - div \mathbf{T} = \mathbf{b} \text{ en } \mathcal{B}_t,$$

se deduce que cualquiera que sea la parte  $P$  de  $\mathcal{B}$  debe verificarse en todo instante:

$$\int_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV_x - \int_{P_t} div \mathbf{T} dV_x = \int_{P_t} \mathbf{b} dV_x, \quad \forall P_t \subset \mathcal{B}_t. \quad (1.6)$$

Analicemos a continuación cada uno de los términos de esta expresión.

**a) Fuerzas externas de volumen.** Dada una parte  $P$  de  $\mathcal{B}$ , la fuerza de volumen ejercida en  $P$  en el instante  $t$  es:

$$\int_{P_t} \mathbf{b}(x, t) dV_x = \int_P det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{b}_m(p, t) dV_p,$$

siendo el campo material  $\mathbf{b}_m$  definido por:

$$\mathbf{b}_m(p, t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(p, t), t).$$

Se define la **densidad de fuerzas externas de volumen en la configuración de referencia** como:

$$\mathbf{b}_0(p, t) = \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{b}_m(p, t) = \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{b}(x, t).$$

De esta forma:

$$\boxed{\int_{P_t} \mathbf{b}(x, t) dV_x = \int_P \mathbf{b}_0(p, t) dV_p.}$$

**b) Fuerzas internas de volumen.**

$$\int_{P_t} \text{div } \mathbf{T} dV_x = \int_{\partial P_t} \mathbf{T} \mathbf{m} dA_x,$$

donde  $\mathbf{m}$  es el vector normal exterior unitario a  $\partial P_t$ .

**b1)** Dada una parte  $P$  de  $\mathcal{B}$ , la fuerza total que, desde el exterior de  $P$ , se ejerce sobre su frontera en el instante  $t$  es (ver Gurtin [8]):

$$\int_{\partial P_t} \mathbf{T} \mathbf{m} dA_x = \int_{\partial P} \det(\mathbf{F}) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} dA_p,$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior unitario a  $\partial P$ , mientras que  $\mathbf{T}_m$  es la descripción material de  $\mathbf{T}$ . Entonces, si se define el tensor material

$$\mathbf{S}(p, t) = \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{T}_m(p, t) \mathbf{F}^{-T}(p, t), \quad (1.7)$$

se verifica:

$$\boxed{\int_{\partial P_t} \mathbf{T} \mathbf{m} dA_x = \int_{\partial P} \mathbf{S} \mathbf{n} dA_p.}$$

El campo tensorial  $\mathbf{S} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}$  definido por (1.7) se conoce como **primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff**.  $\mathbf{S} \mathbf{n}$  representa la **fuerza por unidad de área** en la configuración de referencia que, desde el exterior de  $P$ , se ejerce sobre  $P$  en cada punto. Obsérvese que esta fuerza es generada internamente por las tensiones en el sólido.

Mientras que  $\mathbf{T}$  es un tensor simétrico,  $\mathbf{S}$  no tiene por qué ser simétrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{S}^T &= (\det(\mathbf{F}) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T})^T = \det(\mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-T})^T \mathbf{T}_m^T = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_m \\ &\Downarrow \\ \mathbf{F} \mathbf{S}^T &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_m = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T}_m = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T = \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\ &\Downarrow \\ \underline{\mathbf{S} \mathbf{F}^T} &= \underline{\mathbf{F} \mathbf{S}^T} = (\mathbf{S} \mathbf{F}^T)^T. \end{aligned}$$

Así, la simetría se verifica sobre el producto  $\mathbf{S}\mathbf{F}^T$ . Esto lleva en muchas ocasiones a trabajar con el **segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff** definido como:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Este tensor es simétrico:

$$\mathbf{\Sigma}^T = (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T\mathbf{F}^{-T} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{\Sigma}.$$

**b2)** De los resultados anteriores, podemos concluir la siguiente relación entre los esfuerzos internos del sólido:

$$\int_{P_t} \text{div } \mathbf{T} dV_x = \int_{\partial P_t} \mathbf{T} \mathbf{m} dA_x = \int_{\partial P} \mathbf{S} \mathbf{n} dA_p = \int_P \text{Div}(\mathbf{S}) dV_p.$$

**c)** Consideremos de nuevo la **conservación de momentos** (1.6) sobre el recinto  $P_t$ :

$$\int_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV_x - \int_{P_t} \text{div } \mathbf{T} dV_x = \int_{P_t} \mathbf{b} dV_x, \quad \forall P_t \subset \mathcal{B}_t.$$

Aplicando la identidad de Green, el teorema del cambio de variable, la ecuación de conservación de la masa y la definición del primer tensor de Piola-Kirchhoff, deducimos:

$$\begin{aligned} \int_P \det(\mathbf{F}) \rho_m \dot{\mathbf{v}}_m dV_p - \int_P \text{Div}(\mathbf{S}) dV_p &= \int_P \mathbf{b}_0 dV_p. \\ \Downarrow \\ \int_P \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} dV_p - \int_P \text{Div}(\mathbf{S}) dV_p &= \int_P \mathbf{b}_0 dV_p, \quad \forall P \subset \mathcal{B}. \\ \Downarrow \\ \underline{\rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{S}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } \mathcal{B},} \end{aligned}$$

gracias al teorema de localización.

En resumen, la ecuación de **conservación de los momentos** en la configuración de referencia, escrita en términos del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, es:

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{S}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{S}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{S}^T. \end{cases}$$

También se puede escribir la ecuación de **conservación de los momentos** en la configuración de referencia, en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (ver (1.8)):

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{\Sigma}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^T. \end{cases}$$

**Observación 5** *Las fuerzas de la gravedad son fuerzas muertas. En efecto, el campo de fuerzas de volumen asociado es:*

$$\mathbf{b}(x, t) = -\rho(x, t) g \mathbf{e}_3,$$

siendo  $g$  la gravedad que se supone que actúa en la dirección  $-\mathbf{e}_3$ . Por tanto,

$$\mathbf{b}_0(p, t) = \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{b}_m(p, t) = -\det(\mathbf{F}(p, t)) \rho(X(p, t), t) g \mathbf{e}_3 = -\rho_0(p) g \mathbf{e}_3,$$

expresión independiente de la deformación sufrida por el cuerpo. Se trata, por tanto, de una fuerza muerta.

**Observación 6** Obsérvese que, si el material es elástico, se verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p, t) &= \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{T}_m(p, t) \mathbf{F}^{-T}(p, t) \\ &= \det(\mathbf{F}(p, t)) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(p, t), p) \mathbf{F}^{-T}(p, t). \end{aligned}$$

En consecuencia, la **función respuesta**  $\hat{\mathbf{S}}$  asociada al primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff es:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) = \det(\mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^{-T}.$$

La **función respuesta del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff** para materiales elásticos es:

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{F}, p) = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^{-T}.$$

## 1.4. Condiciones de contorno

En este primer capítulo tan sólo consideraremos los dos tipos de condiciones de contorno más básicas: las condiciones tipo Dirichlet y las Neumann. Consideremos  $\Gamma = \partial B = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ , siendo  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  abiertos y de intersección vacía.

- Las condiciones **tipo Dirichlet** son aquellas en las que se fija el desplazamiento sobre un trozo de la frontera a un valor conocido:

$$\mathbf{u}(p, t) = \mathbf{u}_D(p, t), \quad p \in \Gamma_D.$$

Estas condiciones también son conocidas como de **bloqueo, encastramiento** o - clamped-.

- Las condiciones de **tipo Neumann** en cambio informan del esfuerzo realizado desde el exterior sobre el sólido en cada punto. Su formulación natural es en coordenadas Eulerianas:

$$\mathbf{T}(x, t) \mathbf{m}(x, t) = \mathbf{g}(x, t), \quad x \in X(\Gamma_N, t).$$

Veamos su **formulación en coordenadas Lagrangianas**. Sobre cada parte  $\gamma \subset \Gamma_N$ , el esfuerzo total ejercido sobre ella en el instante  $t$  es:

$$\int_{\gamma_t} \mathbf{T}(x, t) \mathbf{m}(x, t) dA_x = \int_{\gamma_t} \mathbf{g}(x, t) dA_x, \quad \text{siendo } \gamma_t = X(\gamma, t).$$

Aplicando el teorema del cambio de variable se ha demostrado:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_t} \mathbf{T}(x, t) \mathbf{m}(x, t) dA_x &= \int_{\gamma} \mathbf{T}(X(p, t), t) \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p) dA_p \\ &= \int_{\gamma} \mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p) dA_p, \end{aligned}$$

y (ver Gurtin [8], y Gurtin, Fried y Anand [9]):

$$\int_{\gamma_t} \mathbf{g}(x, t) dA_x = \int_{\gamma} \det(\mathbf{F}(p, t)) |\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)| \mathbf{g}(X(p, t), t) dA_p.$$

Definiendo la **densidad de fuerza aplicada por unidad de superficie en la configuración de referencia** como:

$$\mathbf{g}_0(p, t) = \det(\mathbf{F}(p, t)) |\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)| \mathbf{g}(X(p, t), t),$$

podemos escribir:

$$\int_{\gamma} \mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p) dA_p = \int_{\gamma} \mathbf{g}_0(p, t) dA_p, \quad \forall \gamma \subset \Gamma_N.$$

En consecuencia, el resultado de localización permite escribir la **condición de contorno Neumann en coordenadas Lagrangianas**:

$$\mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p) = \mathbf{g}_0(p, t), \quad p \in \Gamma_N.$$

Aunque en general,  $\mathbf{g}_0$  depende de la deformación, siempre consideraremos en este texto que las **fuerzas son muertas**, esto es, al expresarlas en la configuración de referencia las suponemos conocidas e independientes de la deformación que sufre el sólido.

**Observación 7** *Las fuerzas de presión no son fuerzas muertas. En este caso, la densidad de fuerzas de superficie en la configuración deformada es (ver Ciarlet [5]):*

$$\mathbf{g}(x, t) = -\pi_0 \mathbf{m}(x, t).$$

Su expresión en la configuración de referencia será:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(p, t) &= \det(\mathbf{F}(p, t)) |\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)| \mathbf{g}(X(p, t), t) \\ &= -\det(\mathbf{F}(p, t)) |\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)| \pi_0 \mathbf{m}(X(p, t), t). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el vector  $\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)$  es un vector normal exterior a la superficie del cuerpo deformado (ver Gurtin, Fried y Anand [9]), el vector unitario será:

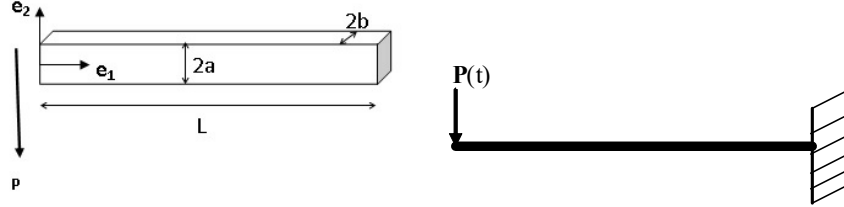
$$\mathbf{m}(X(p, t), t) = \frac{1}{|\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)|} \mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p),$$

y, por consiguiente:

$$\mathbf{g}_0(p, t) = -\pi_0 \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p).$$

En consecuencia, cuando se expresa la densidad de fuerzas de superficie de presión en la configuración de referencia, no se corresponden a una presión (excepto que  $\mathbf{F}^{-T}(p, t) \mathbf{n}(p)$  sea paralelo a  $\mathbf{n}(p)$ , o el caso trivial  $\pi_0 = 0$ ) y, además, su expresión depende de la deformación, por lo tanto, no serán en general fuerzas muertas. Cuando se considera en la configuración de referencia la expresión de una presión como:  $\mathbf{g}_0(p, t) = -\pi_0 \mathbf{n}(p)$ , se está asumiendo que se trabaja en pequeñas deformaciones y que, por tanto,  $\mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{O}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

**Ejemplo 8** Consideremos una viga en voladizo - a cantilever beam-, con longitud  $L$ , altura  $2a$  y espesor  $2b$ , como se muestra en la figura. Supongamos que su frontera lateral está libre de esfuerzos, que su extremo izquierdo está sujeto a una fuerza con resultante  $-P(t)\mathbf{e}_2$ , y que su extremo derecho está encastrado a la pared.



En este caso  $\mathcal{B}$ ,  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  están definidos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq p_1 \leq L, -a \leq p_2 \leq a, -b \leq p_3 \leq b\} \\ \bar{\Gamma}_D &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \partial\mathcal{B} : p_1 = L\}, \\ \bar{\Gamma}_N &= \bar{\Gamma}_N^1 \cup \bar{\Gamma}_N^2,\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_N^1 &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \partial\mathcal{B} : p_2 = \pm a, p_3 = \pm b\}, \text{ y} \\ \bar{\Gamma}_N^2 &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \partial\mathcal{B} : p_1 = 0\}.\end{aligned}$$

La condición Dirichlet será:

$$\mathbf{u}((L, p_2, p_3), t) = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_D;$$

en este caso se dice que la viga está encastrada o "clamped" sobre  $\Gamma_D$ .

Sobre la superficie lateral  $\bar{\Gamma}_N^1$  la viga está libre de fuerzas, entonces:

$$\mathbf{S}(p, t) \mathbf{n}(p) = \mathbf{0}, \quad p \in \bar{\Gamma}_N^1.$$

Sobre  $\bar{\Gamma}_N^2$  no se indica una condición puntual, sino que tenemos una resultante. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_{-b}^b \int_{-a}^a \mathbf{S}((0, p_2, p_3), t) \mathbf{n}(0, p_2, p_3) dp_2 dp_3 &= - \int_{-b}^b \int_{-a}^a \begin{pmatrix} S_{11}((0, p_2, p_3), t) \\ S_{21}((0, p_2, p_3), t) \\ S_{31}((0, p_2, p_3), t) \end{pmatrix} dp_2 dp_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -P(t) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

■

## 1.5. Elastodinámica lineal

En esta sección deduciremos el **sistema linealizado de la elasticidad en ausencia de tensiones residuales**, esto es, cuando en la configuración de referencia no hay tensiones en el instante inicial:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, p) = \mathbf{0}.$$

En este caso también son nulos el primero y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) &= \det(\mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^{-T} \Rightarrow \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}, p) = \det(\mathbf{I}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, p) \mathbf{I}^{-T} = \mathbf{0}. \\ \hat{\Sigma}(\mathbf{F}, p) &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^{-T} \Rightarrow \hat{\Sigma}(\mathbf{I}, p) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

El modelo de elasticidad lineal se obtiene al linealizar el modelo de elasticidad no lineal. En primer lugar, linealizamos el tensor de Cauchy utilizando una fórmula de Taylor entorno a  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) &= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, p) + \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{F} - \mathbf{I}] + o(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Si se suponen pequeños desplazamientos, el término  $o(\nabla \mathbf{u})$  será más pequeño que el término lineal en  $\nabla \mathbf{u}$ , por lo que una buena aproximación de la tensión de Cauchy será:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \simeq \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\nabla \mathbf{u}].$$

**Definición 9** El operador lineal  $\mathbf{C}(p) \in \mathcal{L}(\text{Lin}, \text{Lin})$  definido por:

$$\mathbf{C}(p) = \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p)$$

es llamado el **tensor de elasticidad** -the elasticity tensor- (de cuarto orden) en el punto  $p$ .

**Proposición 10** En ausencia de tensiones residuales el tensor de elasticidad verifica:

$$\mathbf{C}(p) = \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) &= \det(\mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^{-T} \\ &\Downarrow \\ \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{F}^T &= \det(\mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p)\end{aligned}$$

Entonces, calculando la derivada parcial respecto de  $\mathbf{F}$  en una dirección  $\mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, p) [\mathbf{H}] \mathbf{F}^T + \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) \mathbf{H}^T = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} [\mathbf{H}] \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) + \det(\mathbf{F}) \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, p) [\mathbf{H}],$$

para todo  $\mathbf{H} \in \text{Lin}$ . Evaluando la expresión anterior en el tensor identidad y teniendo en cuenta que  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}, p) = \mathbf{0}$ , se deduce:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{H}] = \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{H}],$$

lo que concluye el resultado. ■

**Corolario 11**

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}, p) + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{F} - \mathbf{I}] + o(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \mathbf{C}(p) [\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}).\end{aligned}$$

■

**Corolario 12** *En ausencia de tensiones residuales el tensor de elasticidad verifica:*

$$\mathbf{C}(p) = \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p)$$

En efecto, teniendo en cuenta (1.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{H}] &= \mathbf{H} \hat{\Sigma}(\mathbf{I}, p) + \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I}, p) [\mathbf{H}] \\ &= \mathbf{C}(p) [\mathbf{H}],\end{aligned}$$

de donde se deduce directamente el resultado. ■

En consecuencia, en la ecuación de equilibrio utilizaremos las linealizaciones:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) &\simeq \mathbf{C}(p) [\nabla \mathbf{u}], \\ \hat{\Sigma}(\mathbf{F}, p) &\simeq \mathbf{C}(p) [\nabla \mathbf{u}]\end{aligned}$$

Mientras que  $\mathbf{S}$ , en general, es no simétrico, sí lo es su aproximación lineal ya que  $\hat{\mathbf{T}}$  sí lo es.

**Proposición 13** *El tensor de elasticidad verifica las siguientes propiedades:*

1.  $\mathbf{C}(p) \in \mathcal{L}(\text{Lin}, \text{Sym})$
2.  $\mathbf{C}(p) [\mathbf{H}] = \mathbf{C}(p) [\mathbf{E}]$ , siendo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}.$$

3.  $\mathbf{C}(p) \in \mathcal{L}(\text{Sym}, \text{Sym})$ .
4. Si el material en el punto  $p$  es isótropo, se verifica:

$$\mathbf{C}(p) [\mathbf{E}] = \lambda(p) \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu(p) \mathbf{E}, \quad (1.9)$$

siendo

$$\mathbf{E}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Los escalares  $\lambda$  y  $\mu$  se conocen como **parámetros de Lamé** del material.

5. Si el material en el punto  $p$  es isótropo,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, p) &= \mathbf{C}(p) [\nabla \mathbf{u}] + o(\nabla \mathbf{u}) \\ &= \lambda(p) \text{tr}(\mathbf{E}(\nabla \mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu(p) \mathbf{E}(\nabla \mathbf{u}) + o(\nabla \mathbf{u}).\end{aligned}$$

**Demostración.** Para simplificar, en esta demostración omitiremos la dependencia respecto de  $p$ .

1.

$$\frac{d}{ds} \left( \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I} + s\mathbf{H}) \right) \Big|_{s=0+} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I} + s\mathbf{H}) - \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I})}{s} \in \text{Sym},$$

puesto que  $\hat{\mathbf{T}}$  toma valores en  $\text{Sym}$ . Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I} + s\mathbf{H}) \right) \Big|_{s=0+} &= \frac{d}{ds} \left( \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) + s \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I})[\mathbf{H}] + o(s) \right) \Big|_{s=0+} \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I})[\mathbf{H}] = \mathbf{C}(p)[\mathbf{H}]. \end{aligned}$$

2. Escribamos  $\mathbf{H} = \mathbf{W} + \mathbf{E}$ , siendo  $\mathbf{W}$  su parte antisimétrica. Sea  $\mathbf{Q}(t) = e^{\mathbf{W}t} \in \text{Orth}^+$  (ver Gurtin [8]). Por el principio de la indiferencia material:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}(t)) = \mathbf{Q}(t) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{I}) \mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{0},$$

al no tener tensiones residuales; entonces, derivando esta igualdad con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{Q}(t))[\dot{\mathbf{Q}}(t)] = \mathbf{0}.$$

Evaluando esta expresión para  $t = 0$ :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{I})[\mathbf{W}] = \mathbf{0}.$$

En consecuencia:

$$\mathbf{C}(p)[\mathbf{H}] = \mathbf{C}(p)[\mathbf{W} + \mathbf{E}] = \mathbf{C}(p)[\mathbf{E}].$$

3. Se obtiene directamente del apartado anterior.

4. Por ser  $\mathbf{C}$  una función tensorial lineal de  $\text{Sym}$  en  $\text{Sym}$ , el teorema de representación de funciones isótropas permite concluir el resultado (ver Gurtin [8], págs. 195 y 235).

5. Es consecuencia inmediata del apartado 4 y de la definición de  $\mathbf{E}$ .

■

En la bibliografía la parte simétrica del tensor gradiente de  $\mathbf{u}$  suele denotarse por:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

y se conoce como **tensor linealizado de deformación**, debido a que es la parte lineal del **tensor de Green-Saint Venant**, definido por:

$$\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{I})}{2},$$

y reservaremos la notación  $\mathbf{E}$  para este tensor. En efecto:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{I} + 2\varepsilon(\mathbf{u}) + o(\nabla \mathbf{u}),$$

es decir,

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{I}}{2} + o(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{E} + o(\nabla \mathbf{u}).$$

En todo este texto llamaremos  $\varepsilon(\mathbf{u})$  a la parte linealizada del tensor de deformación -linearized strain tensor-.

También denotaremos por

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) = C(p) [\nabla \mathbf{u}], \quad (1.10)$$

la parte linealizada del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

Con esta notación, al considerar la ecuación linealizada de conservación de los momentos y la linealizada de la ley de comportamiento, se obtiene el sistema de la elastodinámica lineal.

**Problema 14 (de Elastodinámica lineal)** Encontrar  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  tales que:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b}_0 & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) & \text{en } \mathcal{B}. \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta la definición de los distintos operadores involucrados, el problema de elastodinámica lineal se puede escribir componente a componente de la forma:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \partial_j \sigma_{ji} = b_{0i} & \text{en } \mathcal{B}, \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \text{en } \mathcal{B}, \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \\ \quad = \lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) & \text{en } \mathcal{B}. \end{cases}$$

En un sólido elástico lineal al cual aplicamos un sistema de fuerzas (causa) se producirán distintos efectos (efectos), como, por ejemplo: reacciones de apoyo, tensiones, deformaciones, sollicitaciones, etc. Si pensamos en una estructura elástica lineal podemos decir: “El efecto que produce un conjunto de fuerzas que actúan en forma simultánea es igual a la suma de los efectos que produce cada una de las fuerzas por separado”. En su expresión más general dice: “La relación entre causa y efecto es lineal.” Esto en muchas ocasiones nos permitirá aplicar el **principio de superposición** para resolver el problema de la elastodinámica lineal.

## 1.6. Boletín 1

**Ejercicio 15** Escribe la ecuación de conservación de los momentos en coordenadas lagrangianas en términos del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

**Ejercicio 16** Define las leyes de conservación de un sólido  $B$  sometido a la acción de un sistema de fuerzas  $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$  en coordenadas Eulerianas y su correspondiente expresión en coordenadas Lagrangianas.

**Ejercicio 17** Explica el concepto de campos de fuerzas materiales y cómo se definen.

**Ejercicio 18** Escribe la relación entre el tensor de elasticidad y el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

**Ejercicio 19** ♣ Consideremos como configuración de referencia  $B$  un cilindro de base el círculo unidad y de altura unidad:

$$B = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p_1, p_2) \in D((0, 0), 1), 0 \leq p_3 \leq 1\}.$$

Supongamos que el material del cilindro tiene una densidad inicial  $\rho_0 = 2$ , y su ley constitutiva es  $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$ . Sobre el cuerpo material se imponen fuerzas de volumen de la forma:

$$\mathbf{b}(x, t) = (-2x_1 + 1, -2x_2 + 1, 0)^T.$$

i) Comprobar que el movimiento  $(\mathbf{v}, \rho, \mathbf{T})$  asociado a este problema está definido en cada instante por la expresión:

$$X(p, t) = (r \cos(\theta + t), r \sin(\theta + t), p_3)^T$$

siendo  $r$ ,  $\theta$  el módulo y el argumento de  $(p_1, p_2)$  respectivamente, y el tensor de Cauchy  $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$  con

$$\pi(x, t) = (x_1 + x_2)$$

definido salvo una constante.

- ii) Calcular el gradiente de deformación.
- iii) Comprobar si el cuerpo puede ser elástico, homogéneo o isótropo.
- iv) Representar gráficamente la deformación de un plano  $P$  pasando por la generatriz del cilindro.
- v) Comprobar que la componente normal de la velocidad es nula en todo punto de la frontera.
- vi) Comprobar que no existen esfuerzos cortantes sobre la frontera.
- vii) Comprobar que la deformación es rígida.
- viii) Comprobar que el movimiento no es irrotacional y calcular el eje de rotación en cada punto  $(x, t)$ .
- ix) Escribir la densidad de fuerzas de volumen en coordenadas Lagrangianas.
- x) Calcular el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff asociado a  $\mathbf{T}$ .
- xi) Comprobar que  $\mathbf{X}$  verifica la ecuación del movimiento en la configuración de referencia:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{S}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } B.$$

**Ejercicio 20** ♣ Se considera como configuración de referencia  $B$  un cilindro de base el círculo unidad y de altura  $h = 2m$ :

$$B = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p_1, p_2) \in D((0, 0), 1), 0 \leq p_3 \leq 2\}.$$

Se supone que el material del cilindro es elástico lineal, homogéneo, e isótropo con módulo de Young  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ . Además, se supone que está sometido a una deformación estacionaria derivada de la densidad de fuerzas de volumen de la gravedad actuando en la dirección  $-x_3$ .

- Indicar cuales de entre estos tensores verifica la ecuación de equilibrio en la configuración de referencia:

$$\begin{aligned} i) \sigma_1 &= \rho_0 g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}; \quad ii) \sigma_2 = \rho_0 g x_3 \mathbf{I}; \quad iii) \sigma_3 = \rho_0 g \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}; \\ iv) \sigma_4 &= \rho_0 g x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 21** Considerar el cilindro con generatriz el eje  $z$ , de altura  $2m$  y cuya sección es un círculo de radio  $1m$ . Se supone que las características mecánicas del cilindro son:

$$\begin{cases} \text{Densidad} & 2170 \text{Kg/m}^3, \\ \text{Módulo de Young} & 2e11 \text{Pa}, \\ \text{Coeficiente de Poisson} & 0,25. \end{cases}$$

Suponer que la base del cilindro está anclada en el suelo, mientras que su tapa superior se encuentra sometida a una fuerza de compresión de valor

$$\mathbf{P} = -1000(100t + 1)\mathbf{k}.$$

La superficie lateral está sometida a una densidad de fuerzas de compresión de valor:  $\mathbf{g} = -2000\mathbf{n}$  sobre el semiespacio  $x > 0$ .

- i) Escribir el modelo matemático asociado al problema. Hacer una búsqueda bibliográfica de los conceptos no introducidos aún en el texto.
- ii) Ensayar su resolución con un paquete de software y discutir sobre la introducción de datos, la visualización de los resultados, o los calculados como postproceso.
- iii) Hacer una lista de palabras clave con los conceptos a aclarar relativos a este ejemplo.

## Capítulo 2

# Tensiones y esfuerzos

Considérese un sólido que, en ausencia de fuerzas aplicadas, ocupa un volumen  $\mathcal{B}$ , que será su **configuración de referencia**. Los puntos de  $\mathcal{B}$ , también llamados **puntos materiales**, serán denotados por sus coordenadas cartesianas  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . Las coordenadas de los puntos de la configuración de referencia se llaman **coordenadas materiales o Lagrangianas**.

Supongamos el sólido sometido a la acción de unas fuerzas de volumen en la configuración de referencia de densidad  $\mathbf{b}_0(p, t)$ ,  $p \in \mathcal{B}$  y a unas fuerzas de superficie en la configuración de referencia de densidad  $\mathbf{g}_0(p, t)$ ,  $p \in \Gamma_N$ , siendo  $\Gamma_N \subset \Gamma = \partial\mathcal{B}$ .

Las **ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica tridimensional lineal** son (ver Problema 14):

$$\begin{aligned}\rho_0(p) \ddot{\mathbf{u}}(p, t) - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(p, t) &= \mathbf{b}_0(p, t) \text{ en todo } p \in \mathcal{B} \text{ y para todo } t > 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(p, t) \mathbf{n}(p) &= \mathbf{g}_0(p, t) \text{ sobre todo } p \in \Gamma_N \text{ y para todo } t > 0,\end{aligned}$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  la aproximación lineal del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\rho_0$  la densidad de masa en la configuración de referencia y  $\ddot{\mathbf{u}}$  el vector aceleración.

En el caso **cuasiestático** la evolución es lenta y los efectos de inercia  $\rho_0(p) \ddot{\mathbf{u}}(p, t)$  son despreciables, pudiéndose escribir:

$$\begin{aligned}-\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(p, t) &= \mathbf{b}_0(p, t) \text{ en todo } p \in \mathcal{B} \text{ y para todo } t > 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(p, t) \mathbf{n}(p) &= \mathbf{g}_0(p, t) \text{ sobre todo } p \in \Gamma_N \text{ y para todo } t > 0.\end{aligned}$$

En el **caso estático** las ecuaciones son iguales y, además, los datos independientes del tiempo.

El **modelo estacionario de la elastodinámica** será (ver (1.2)):

$$\begin{aligned}\rho_0(p) (\text{grad } \mathbf{v}_m(p, t)) \mathbf{v}_m(p, t) - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(p, t) &= \mathbf{b}_0(p, t) \text{ en todo } p \in \mathcal{B} \text{ y para todo } t > 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(p, t) \mathbf{n}(p) &= \mathbf{g}_0(p, t) \text{ sobre todo } p \in \Gamma_N \text{ y para todo } t > 0,\end{aligned}$$

En todo lo que sigue, y hasta que se especifique lo contrario, supondremos el problema elástico lineal y estático también llamado de la **elastostática**.

### 2.1. Interpretación de sus componentes

El tensor de tensiones -stress tensor- verifica las siguientes propiedades:

- $\sigma$  es un tensor **simétrico** (ver Proposición 13 y ecuación (1.10)), por tanto, para determinarlo es preciso calcular 6 incógnitas.
- El vector de tensiones o vector de esfuerzos (stress vector),  $\sigma \mathbf{n}$ , **representa la densidad de fuerzas internas en el sólido**. Si  $\mathcal{B}_0$  es una parte de  $\mathcal{B}$  tal que  $\bar{\mathcal{B}}_0 \subset \mathcal{B}$ , entonces  $\sigma(p) \mathbf{n}(p)$  representa la densidad de fuerzas internas en el cuerpo actuando desde la porción  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$  del sólido sobre la porción  $\bar{\mathcal{B}}_0$  en el punto  $p$ , siendo  $\mathbf{n}(p)$  el vector normal exterior unitario a  $\partial \mathcal{B}_0$  en  $p$ . El **principio de acción reacción** implica que esta fuerza es

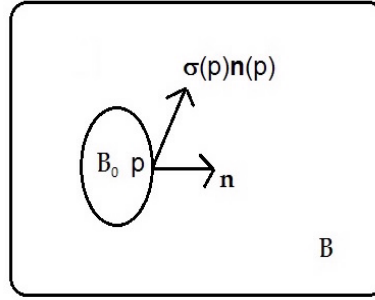
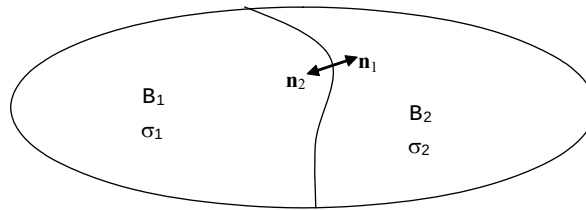


Figura 2.1: Vector densidad de esfuerzos.

igual y de signo contrario a la densidad de fuerzas internas en el cuerpo actuando desde la porción  $\mathcal{B}_0$  del sólido sobre la porción  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$  en el punto  $p$ . La expresión analítica de este principio es la condición de transmisión de esfuerzos. Este principio de acción reacción permite formular el contacto entre dos sólidos.

- **Contacto efectivo entre dos sólidos.**



En cada punto  $p$  de la frontera de contacto efectiva entre dos sólidos,  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ , debe verificarse el principio de acción reacción. En consecuencia, si denotamos por:

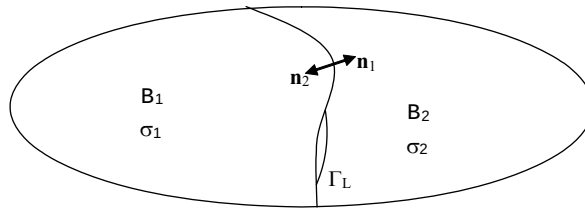
$$\mathbf{n}(p) = \mathbf{n}_1(p) = -\mathbf{n}_2(p),$$

siendo  $\mathbf{n}_1(p)$  (resp.  $\mathbf{n}_2(p)$ ) el vector normal exterior unitario en  $p$  a  $\partial \mathcal{B}_1$  (resp. a  $\partial \mathcal{B}_2$ ), debe verificarse:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \mathbf{n}_1 &= -\sigma_2 \mathbf{n}_2 \Rightarrow \sigma_1 \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \text{ en } p, \\
\sigma_1 \mathbf{n} - \sigma_2 \mathbf{n} &= \mathbf{0} \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ en } p, \\
&\Rightarrow [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})] \mathbf{n}(p) = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

en todo punto  $p \in \partial \mathcal{B}_1 \cap \partial \mathcal{B}_2$  donde el contacto es efectivo. En esta última igualdad,  $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p})]$  representa el salto de la tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  en el punto  $p$  de la frontera.

- **Gap entre sólidos.**



En las zonas de la frontera de  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  en las que no hay contacto efectivo entre los dos sólidos, denotada en la figura por  $\Gamma_L$ , no actúa ningún esfuerzo del uno sobre el otro, por lo que se verifican las relaciones habituales de una frontera libre de esfuerzos:

$$\sigma_1(p) \mathbf{n}_1(p) = \sigma_2(p) \mathbf{n}_2(p) = \mathbf{0} \text{ para todo } p \in \Gamma_L.$$

- Se define la **componente normal de  $\boldsymbol{\sigma}$**  en un punto  $p \in \Gamma_N$  como la proyección del vector de esfuerzos sobre la dirección normal:

$$\sigma_n(p) = \boldsymbol{\sigma}(p) \mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{n}(p) = \sigma_{ij}(p) n_j(p) n_i(p).$$

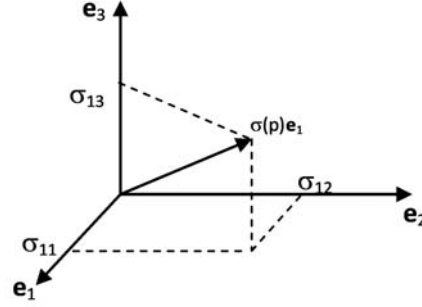
Si en ese punto  $p \in \Gamma_N$ , la fuerza exterior que se está ejerciendo sobre  $\mathcal{B}$  es de valor  $\mathbf{g}_0(p)$ , entonces debe verificarse:

$$\sigma_n(p) = \mathbf{g}_0(p) \cdot \mathbf{n}(p) = g_{0i}(p) n_i(p).$$

El escalar  $\sigma_n$  se conoce también como el **esfuerzo normal** en  $p$ . Si es positivo, es decir, la proyección de  $\mathbf{g}_0$  sobre la normal tiene la misma orientación que  $\mathbf{n}$ , las fuerzas de superficie se dice que son de **tracción**. En caso contrario se dicen de **compresión**.

- La proyección del vector de esfuerzos,  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ , sobre el plano tangente a  $\Gamma_N$  en  $p$  es

$$\boldsymbol{\sigma}_t(p) = \boldsymbol{\sigma}(p) \mathbf{n}(p) - \sigma_n(p) \mathbf{n}(p),$$

Figura 2.2: Componentes del vector de esfuerzos  $\sigma(p)\mathbf{e}_1$ .

y se llama **vector de esfuerzos de cizallamiento** -shear stress- o esfuerzos cortantes. Cuando el **vector de esfuerzos de cizallamiento** es nulo, la dirección normal es entonces una **dirección principal de esfuerzos** en  $p$ .

En particular, si  $\sigma(p)\mathbf{n}(p) = \mathbf{g}_0(p)$ , entonces:

$$\sigma_t(p) = \sigma(p)\mathbf{n}(p) - \sigma_n(p)\mathbf{n}(p) = \mathbf{g}_0(p) - (\mathbf{g}_0(p) \cdot \mathbf{n}(p))\mathbf{n}(p).$$

El vector de esfuerzos de cizallamiento será nulo si  $\mathbf{g}_0$  lleva la dirección de la normal, en cuyo caso se dice que se trata de una **presión** actuando sobre el punto  $p$ .

### 2.1.1. Significado de las componentes

Sea  $p$  un punto del sólido  $\mathcal{B}$  y  $\Sigma$  un plano pasando por  $p$ , con vector normal  $\mathbf{e}_1$ . El vector de esfuerzos en la dirección  $\mathbf{e}_1$  (ver Figura 2.2):

$$\sigma(p)\mathbf{e}_1 = \sigma_{11}(p)\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}(p)\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}(p)\mathbf{e}_3,$$

tiene por esfuerzo normal  $\sigma_{11}(p)$ . Entonces, el vector de cizallamiento es

$$\sigma_t(p) = \sigma_{12}(p)\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}(p)\mathbf{e}_3.$$

Repitiendo el mismo cálculo para planos con normales  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  deducimos que las componentes diagonales  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$  se corresponden con las **componentes normales de los vectores de esfuerzos** en las direcciones  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente; estas componentes también se llaman **tensiones normales**. El término  $\sigma_{ij}$ ,  $i \neq j$ , es una componente tangencial del vector de esfuerzos  $\sigma\mathbf{e}_i$  (proyección sobre el eje  $\mathbf{e}_j$ ), de ahí que estas componentes extradiagonales también se las conozca como **tensiones tangenciales**.

En la **notación americana** estándar el tensor de tensiones se representa por la matriz

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

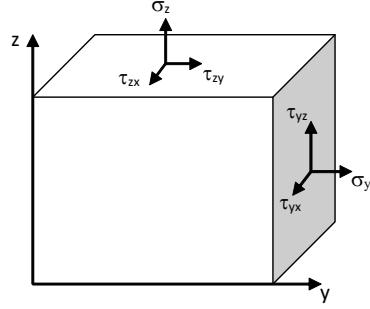


Figura 2.3: Componentes del tensor de tensiones en notación americana.

Con esta notación, la Figura 2.3 representa las componentes normales y tangenciales del tensor de tensiones sobre un elemento típico.

Análogamente a lo indicado más arriba, las tensiones  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\sigma_z$  se les llama tensiones normales (que puede ser en tensión o compresión) y las otras 6 componentes son las tensiones de cortadura -shear stresses-.

Al tener en cuenta la simetría del tensor de tensiones, también es usual encontrar en la literatura la **representación vectorial del tensor de tensiones** en la forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Relación de simetría de Cauchy

Cualesquiera que sean los vectores  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{q}$ , se verifica la relación de simetría:

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{w}, \quad (2.1)$$

en todo punto  $p \in \mathcal{B}$ . En efecto,

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{q} = w_i \sigma_{ij}(p) q_j = q_j \sigma_{ji}(p) w_i = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{w},$$

gracias a la simetría del tensor linealizado  $\boldsymbol{\sigma}$ . Por tanto, la proyección de  $\boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{q}$  (esfuerzo en  $p$  en la dirección  $\mathbf{q}$ ) sobre  $\mathbf{w}$  es igual a la de la proyección de  $\boldsymbol{\sigma}(p)\mathbf{w}$  (esfuerzo en  $p$  en la dirección  $\mathbf{w}$ ) sobre  $\mathbf{q}$ .

## 2.3. Cambio de coordenadas

Sea  $(M/p'_1, p'_2, p'_3)$  un nuevo sistema ortonormal de coordenadas en el punto  $M$  del sólido  $\mathcal{B}$  y sean  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  los vectores unitarios de estos ejes. El cambio de sistema de referencia se caracterizará por:

$$\mathbf{e}'_i = p_{ij} \mathbf{e}_j,$$

siendo  $P = (p_{ij})$  la matriz de cambio del sistema de referencia  $(M/p_1, p_2, p_3)$  al  $(M/p'_1, p'_2, p'_3)$ . Por ser el nuevo sistema ortonormal se verifica que la matriz de cambio de base debe ser ortonormal:  $P^T P = P P^T = I$ , ya que:

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = p_{ik} \mathbf{e}_k \cdot p_{jl} \mathbf{e}_l = p_{ik} p_{jl} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) = p_{ik} p_{jl} \delta_{kl} = p_{il} p_{jl} = (P P^T)_{ij}.$$

Si  $\mathbf{q}$  es un vector con origen en el punto  $M$ , puede ser expresado en ambos sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i = q'_i \mathbf{e}'_i.$$

Entonces el vector de esfuerzos en la dirección  $\mathbf{q}$ , puede expresarse por:

$$\boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{q} = \sigma_{ij} q_j \mathbf{e}_i = \sigma'_{ij} q'_j \mathbf{e}'_i,$$

siendo  $(\sigma_{ij})$  y  $(\sigma'_{ij})$  las componentes del tensor de tensiones en los dos sistemas. En consecuencia:

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{q} = w_i \sigma_{ij} q_j = w'_i \sigma'_{ij} q'_j.$$

En particular, tomando  $\mathbf{w} = \mathbf{e}'_i$ , y  $\mathbf{q} = \mathbf{e}'_j$ , se deduce:

$$\sigma'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{e}'_j = p_{il} \mathbf{e}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}(M)p_{jr} \mathbf{e}_r = p_{il} \sigma_{lr} p_{jr}.$$

Se obtiene así, la **fórmula del cambio de sistema de referencia** siguiente:

$$\sigma'_{ij} = p_{il} \sigma_{lr} p_{jr},$$

que caracteriza el hecho de que  $\boldsymbol{\sigma}$  es un tensor de segundo orden. Esta fórmula también puede escribirse en notación matricial:

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = P[\boldsymbol{\sigma}]P^T.$$

Una expresión que tiene el mismo valor en todos los sistemas de coordenadas se llama **invariante**. Por ejemplo,

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

es un invariante puesto que

$$\sigma'_{ii} = p_{il} \sigma_{lr} p_{ir} = \sigma_{rr},$$

al verificarse que  $I = P^T P$ , lo que implica que  $\delta_{lr} = p_{il} p_{ir}$ .

## 2.4. Tensiones normales principales

Se dice que la **dirección**  $\mathbf{q}$  (que suponemos vector unitario) es **principal** (en  $M$ ) para el tensor de tensiones, si existe un escalar  $\gamma$  tal que el cizallamiento sea nulo:

$$\boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{q} = \gamma \mathbf{q}.$$

De esta forma, el sistema:

$$((\boldsymbol{\sigma}) - \gamma \mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

debe admitir una solución no nula, con lo cual el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo:

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \gamma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \gamma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

Como la matriz  $(\sigma)$  es simétrica, la ecuación (2.3) admite tres raíces reales (distintas o repetidas) y 3 vectores propios linealmente independientes, que denotaremos por  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ . Estas raíces  $\gamma = \sigma_1$ ,  $\gamma = \sigma_2$  y  $\gamma = \sigma_3$  se llaman **esfuerzos normales principales o esfuerzos principales**. Una vez conocidos los esfuerzos principales, la ecuación (2.2) permite calcular las correspondientes **direcciones principales**, ejes principales o autovectores del tensor (puesto que la matriz es simétrica, cada autovector puede tomarse de forma que sus componentes sean reales).

- i) Si los esfuerzos principales son todos distintos, entonces las direcciones principales  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  son todas ortogonales entre ellas. En efecto, gracias a (2.1)

$$0 = \mathbf{x}_2 \cdot \sigma(M)\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 \cdot \sigma(M)\mathbf{x}_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2.$$

Como  $\sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$  entonces  $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ .

- ii) Si  $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$  el tensor se dice **cilíndrico**. En este caso las tres direcciones principales son ortogonales. En efecto, como en el apartado anterior  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  son ortogonales al igual que  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_3$ . Por otra parte, puesto que  $\mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  se pueden tomar linealmente independientes entonces deben ser también ortogonales entre ellos. Además, todo vector  $\mathbf{x}$  ortogonal a  $\mathbf{x}_1$  es principal; en efecto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \sigma(M)\mathbf{x}_1 &= \sigma_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_1 = 0 \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot \sigma(M)\mathbf{x} \Rightarrow \sigma(M)\mathbf{x} = \sigma_2 \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

ya que  $\mathbf{x}$  debe ser de la forma  $\mathbf{x} = \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3$  y, por tanto,  $\sigma(M)\mathbf{x} = \sigma_2(\alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3) = \sigma_2 \mathbf{x}$ . En este caso, existe un plano de direcciones principales, el que tiene de vector normal  $\mathbf{x}_1$ .

- iii) Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  el tensor se dice **esférico**. En este caso todo vector  $\mathbf{x}$  es principal.

En todos los casos existe un sistema de referencia ortonormal  $(M/\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  formado por direcciones principales. En este sistema el tensor de tensiones se representa por la matriz diagonal:

$$(\sigma)_{(M/\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

En efecto, la matriz cambio de base es por filas:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\boldsymbol{\sigma}(M)P^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_1 & \sigma_2 \mathbf{x}_2 & \sigma_3 \mathbf{x}_3 \end{pmatrix},$$

pudiendo comprobar fácilmente el resultado.

Por lo general, las tensiones principales se ordenan como

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

$\sigma_1$  siendo la tracción / compresión normal más grande en cualquier plano que pase por el punto de interés, mientras que  $\sigma_3$  es la más baja. Esto es útil, por ejemplo, para definir los criterios de daño para los materiales frágiles, que fallan cuando el estrés que actúa de forma normal a un plano material alcanza una magnitud crítica.

## 2.5. Invariantes escalares

Observemos que las raíces de la ecuación (2.3) son las raíces del **polinomio característico**:

$$-\gamma^3 + \theta_1 \gamma^2 + \theta_2 \gamma + \theta_3 = 0.$$

Sabemos que el polinomio característico de una aplicación lineal dada por la matriz  $(\sigma_{ij})$  es independiente de la elección del sistema de coordenadas, por ello, **las tensiones principales  $\sigma_i$  son independientes del sistema de coordenadas**. Además, los coeficientes  $\theta_i$  del polinomio característico también son invariantes; estos coeficientes pueden escribirse en términos de la matriz  $(\boldsymbol{\sigma})$  (ver Henry y Parsy [10]):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \theta_2 &= -\text{tr}(\text{cof}(\boldsymbol{\sigma})) = -\det(\boldsymbol{\sigma})\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{-T}) \\ &= -\left( \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \right) \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1), \\ \theta_3 &= \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \end{aligned}$$

siendo  $\text{cof}(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}^{-T}$  si  $\boldsymbol{\sigma}$  es invertible. Los coeficientes  $\theta_i, i = 1, 2, 3$  se llaman **invariantes escalares del tensor de tensiones**. En alguna bibliografía se denotan por  $I_i$  estos invariantes; en ocasiones, el segundo aparece cambiado de signo (véase, por ejemplo, Ciarlet [5] y Gurtin [8]); sin embargo, hemos decidido incluir en su definición el signo negativo por coherencia con la dada por otros autores (como Altenbach [1] y Henry y Parsy [10]), y sobre todo con el posterior desarrollo de las leyes no lineales. Obsérvese que **el cálculo de las direcciones principales equivale a determinar planos con respecto a los cuales solamente hay tensiones normales**; la solución de este problema debe ser, por tanto, independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Además de los tres invariantes principales introducidos, es también muy utilizado sobre todo para definir leyes constitutivas no lineales, el **invariante angular**:

$$\theta = \arccos \left( \frac{27}{2} \left( \frac{2}{27} \theta_1^3 + \frac{1}{3} \theta_1 \theta_2 + \theta_3 \right) (\theta_1^2 + 3\theta_2)^{-\frac{3}{2}} \right).$$

Por último, se define el **ángulo de Lode** como

$$\theta_L = \frac{\theta}{3}.$$

A partir del invariante angular, también se pueden calcular las tensiones principales ordenadas  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (ver Altenbach [1]):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{2}{3}\sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sigma_m, \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3}\sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) + \sigma_m, \\ \sigma_3 &= \frac{2}{3}\sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + \sigma_m,\end{aligned}$$

siendo  $\sigma_m$  la tensión normal media, esto es,  $\sigma_m = \theta_1/3$ .

## 2.6. Cuádrica de Cauchy de tensiones

Sea  $k$  un número real arbitrario no nulo. La superficie cuádrica

$$\sigma_{ij}\xi_i\xi_j = \pm k^2,$$

se llama **superficie cuádrica de Cauchy** -Cauchy quadric stress-. Uno de los conjuntos de esta definición (para  $+k^2$  ó  $-k^2$ ) puede ser vacío. Bajo la transformación en las direcciones principales, la cuádrica de Cauchy se escribe:

$$\sigma_1\xi_1^2 + \sigma_2\xi_2^2 + \sigma_3\xi_3^2 = \pm k^2,$$

y las direcciones principales coinciden con los ejes de la cuádrica.

Si  $\sigma_1 = \sigma_2$ , entonces:

$$\sigma_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \sigma_3\xi_3^2 = \pm k^2,$$

existiendo simetría con respecto al eje  $\xi_3$ . Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , tenemos simetría respecto del origen.

- Supongamos que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$ . Entonces, para  $+k^2$  tenemos un **elipsoide general**; para  $-k^2$  el conjunto vacío. En este caso existe una **tracción en cada dirección principal**.
- Supongamos que  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 < 0$ . Entonces, para  $-k^2$  tenemos un **elipsoide general**; para  $+k^2$  el conjunto vacío. Existe una **presión en cada dirección principal**.
- Supongamos que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 > \sigma_3$ . Entonces, para  $+k^2$  tenemos un **hiperboloide de una hoja** cuyo eje corresponde a la dirección principal  $\xi_3$ ; para  $-k^2$  se trata de un **hiperboloide de dos hojas** cuyo eje corresponde a la dirección principal  $\xi_3$  ( $\sigma_1\xi_1^2 + \sigma_2\xi_2^2 = -\sigma_3\xi_3^2 \pm k^2$ , siendo  $-\sigma_3\xi_3^2 > 0$ ).

## 2.7. Parte esférica y desviatoria

El **esfuerzo normal medio** se define por

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}).$$

En consecuencia,

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m. \quad (2.5)$$

Se llama **parte esférica del tensor de tensiones** ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) al tensor ( $\boldsymbol{\sigma}_s$ ) definido por:

$$(\boldsymbol{\sigma}_s) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) (\mathbf{I}) = \sigma_m (\mathbf{I}).$$

El tensor ( $\boldsymbol{\sigma}_s$ ) también se conoce como tensor hidrostático y es independiente del sistema de coordenadas. El nombre de hidrostático proviene de que los fluidos sometidos a cambios de presión producen tensiones internas con esta forma. De hecho, la presión hidrostática es una medida de la presión ejercida por un estado de estrés.

El **tensor desviatorio del tensor** ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) es el tensor ( $\boldsymbol{\sigma}_d$ ):

$$(\boldsymbol{\sigma}_d) = (\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) (\mathbf{I}).$$

El tensor desviatorio varía cuando la orientación del sistema de referencia varía, y da una medida del cizallamiento producido por un estado de estrés.

Se verifica, por tanto, que:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\sigma}_s) + (\boldsymbol{\sigma}_d). \quad (2.6)$$

Denotaremos por  $s_{ij}$  las componentes del tensor desviatorio.

La **tensión efectiva de Von Mises**, también llamada **tensión equivalente de Von Mises**, se define como:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d},$$

la cual puede ser considerada como una tensión uniaxial equivalente a un estado de tensión multiaxial.

### 2.7.1. Propiedades

- ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) y ( $\boldsymbol{\sigma}_d$ ) **tienen las mismas direcciones principales**. En efecto, si  $\mathbf{x}_1$  es una dirección principal de ( $\boldsymbol{\sigma}$ ), correspondiente al esfuerzo principal  $\sigma_1$ , podemos escribir:

$$(\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{x}_1 = \sigma_1 \mathbf{x}_1 = \sigma_m \mathbf{x}_1 + (\sigma_1 - \sigma_m) \mathbf{x}_1,$$

siendo  $\sigma_m$  el escalar definido en (2.5). Esto demuestra, teniendo en cuenta (2.6), que  $s_1 = (\sigma_1 - \sigma_m)$  es un esfuerzo principal para ( $\boldsymbol{\sigma}_d$ ), siendo  $\mathbf{x}_1$  la dirección principal asociada. Análogamente se demuestra para las otras direcciones principales.

- El primer invariante de  $(\sigma_d)$  es nulo:

$$s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_m = 0 \implies J_1 = 0. \quad (2.7)$$

Los otros dos invariantes del desviatorio se definen de la misma forma que los invariantes del tensor de tensiones:

$$J_2 = -tr(cof(\sigma_d)),$$

$$J_3 = \det(\sigma_d).$$

- A partir de la relación (2.7) se demuestra fácilmente que:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \\ J_2 &= s_3^2 + s_3s_1 + s_1^2, \\ J_2 &= \frac{\theta_1^2}{3} + \theta_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3), \\ J_3 &= s_3^3 - s_3J_2. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que el **segundo invariante escalar del desviatorio**,  $J_2$ , es siempre positivo:  $J_2 \geq 0$ .

- El **invariante angular** también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \theta &= ar \cos \left( \frac{27}{2} \left( \frac{2}{27}\theta_1^3 + \frac{1}{3}\theta_1\theta_2 + \theta_3 \right) (\theta_1^2 + 3\theta_2)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= ar \cos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} J_3 J_2^{-\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

- La **tensión equivalente de Von Mises** puede expresarse también en términos de las tensiones principales:

$$\begin{aligned} \sigma_{vm} &= \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_d : \sigma_d} = \sqrt{\frac{3}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} = \sqrt{3J_2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, también es un invariante del tensor de tensiones. En términos de los invariantes del tensor  $(\sigma)$ , la tensión de Von Mises se puede escribir:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2}.$$

Ello, permite escribir las tensiones principales ordenadas  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sigma_m \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sqrt{3J_2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_{vm} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right). \\
 \sigma_2 &= \frac{2}{3} \sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) + \sigma_m \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sqrt{3J_2} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_{vm} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right). \\
 \sigma_3 &= \frac{2}{3} \sqrt{\theta_1^2 + 3\theta_2} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + \sigma_m \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sqrt{3J_2} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \\
 &= \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_{vm} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right).
 \end{aligned}$$

## 2.8. Tensores particulares de esfuerzos

### 2.8.1. Esfuerzos puramente normales: Tensor esférico

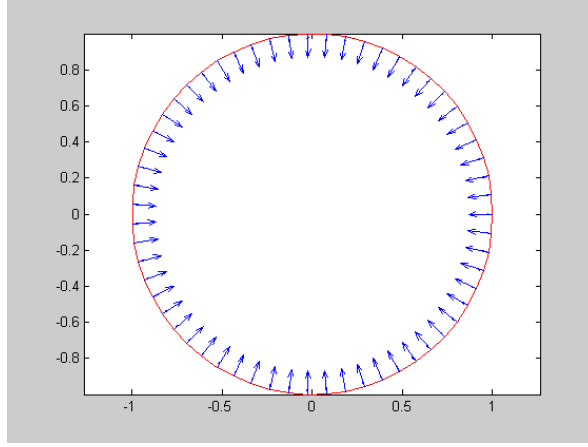
Un tensor  $(\boldsymbol{\sigma})$  es un **tensor esférico** en un punto  $M$  si los tres esfuerzos principales son idénticos. En consecuencia, el desviatorio  $(\boldsymbol{\sigma}_d)$  de un tensor esférico es idénticamente nulo. Además, se verifica que el estado de esfuerzos en  $M$  es puramente normal, ya que:

$$(\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La demostración es evidente en el sistema de referencia principal:

$$(\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{n} = \sigma_1\mathbf{n},$$

ya que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Los esfuerzos siguen la dirección de la normal; este es el caso, por ejemplo, de una presión hidrostática como la de la Figura 2.4.

Figura 2.4: Presión hidrostática uniforme con  $\sigma_1 < 0$ .

### 2.8.2. Esfuerzos uniaxiales

El tensor de tensiones ( $\sigma$ ) se dice que es un **tensor uniaxial** en la dirección del eje  $p_1$ , con vector unitario  $\mathbf{e}_1$ , si existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que para todo vector  $\mathbf{w}$  se verifica que:

$$(\sigma(M))\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1,$$

es decir, el vector de esfuerzos depende de la proyección del vector  $\mathbf{w}$  sobre  $\mathbf{e}_1$  y tiene la dirección de este último vector. Esto equivale a decir que se debe verificar el siguiente sistema algebraico cualesquiera que sean  $p_1, p_2$  y  $p_3$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}p_1 + \sigma_{12}p_2 + \sigma_{13}p_3 &= \lambda p_1, \\ \sigma_{12}p_1 + \sigma_{22}p_2 + \sigma_{23}p_3 &= 0, \\ \sigma_{13}p_1 + \sigma_{23}p_2 + \sigma_{33}p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomando, por ejemplo,  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1$  se obtiene que  $\sigma_{11} = \lambda$  y debe ser no nulo. Además, tomando  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_3$  se obtiene que el tensor debe ser de la forma:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

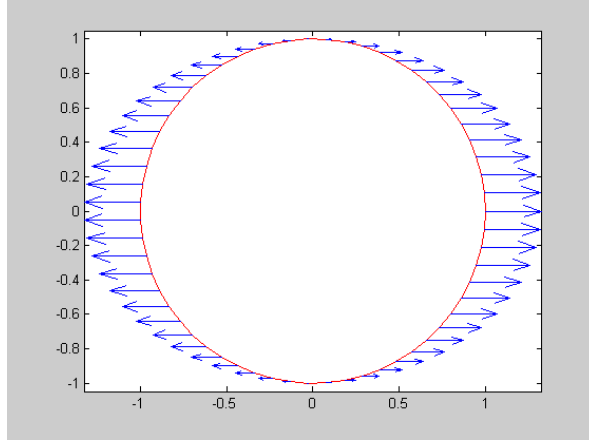
$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot (\sigma)\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \sigma_{11}n_1\mathbf{e}_1 = n_1^2\sigma_{11}.$$

Si  $\sigma_{11}$  es positivo en  $M$  se tiene un **estado de tracción** y si es negativo un **estado de compresión**.

Si  $\sigma_{11}$  no depende del punto  $M$ , entonces el estado será un **estado de tracción o de compresión pura**.

Si  $\sigma_{11}$  depende del punto  $M$ , entonces estamos en presencia de un **estado de flexión**.

En la siguiente figura se muestra un estado de tracción pura en la dirección  $\mathbf{e}_1$  considerando  $\sigma_{11} > 0$ :



### 2.8.3. Cizallamiento simple en dos direcciones ortogonales

Se dice que hay **cizallamiento simple** en dos direcciones ortogonales  $p_1$  y  $p_2$ , con vectores unitarios  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ , si existen escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tales que:

$$(\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_2, (\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{e}_2 = \beta\mathbf{e}_1, (\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

es decir,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 0, \sigma_{12} = \beta, \sigma_{13} = 0, \\ \sigma_{21} &= \alpha, \sigma_{22} = 0, \sigma_{23} = 0, \\ \sigma_{31} &= 0, \sigma_{23} = 0, \sigma_{33} = 0.\end{aligned}$$

Puesto que el tensor de tensiones debe ser simétrico,  $\alpha = \beta$  y, en consecuencia:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los esfuerzos principales asociados (asumiendo  $\sigma_{12}$  positivo) son:  $\sigma_1 = \sigma_{12}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{12}$ , ya que:

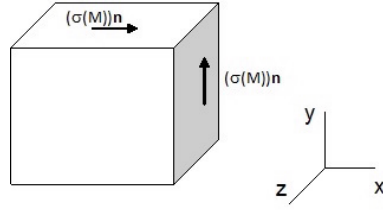
$$\begin{aligned}\det((\boldsymbol{\sigma}) - \sigma\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\sigma & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} \\ &= -\sigma^3 + \sigma\sigma_{12}^2 = 0,\end{aligned}$$

cuyas raíces son  $\sigma_{12}$ ,  $-\sigma_{12}$  y 0.

Obsérvese que si  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior unitario a la frontera del cuerpo, se tiene:

$$(\boldsymbol{\sigma}(M))\mathbf{n} = \sigma_{12}(n_2\mathbf{e}_1 + n_1\mathbf{e}_2).$$

Una visualización del cizallamiento en la dirección  $p_1, p_2$  sobre la frontera del cubo unidad puede verse en la siguiente imagen considerando  $\sigma_{12} > 0$ .



Nótese que para el vector  $\mathbf{w} = (1, 1, 0)^T$ ,  $(\sigma)\mathbf{w} = \sigma_{12}\mathbf{w}$ ; entonces la bisectriz del primer cuadrante marca una dirección de esfuerzos normales.

#### 2.8.4. Tensiones planas

El estado de tensiones en  $M$  es plano, paralelo al plano  $(M/p_1 p_2)$ , si las componentes del tensor de tensiones no dependen más que de  $p_1$  y  $p_2$ , y si para todo vector  $\mathbf{w}$

$$(\sigma(M))\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Esto implica:

$$\sigma_{13}p_1 + \sigma_{23}p_2 + \sigma_{33}p_3 = 0, \quad \forall p_1, p_2, p_3,$$

es decir,  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ . En este caso la representación matricial de un estado de tensiones plano en  $M$  es:

$$(\sigma)_{(M/p_1 p_2 p_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dirección  $p_3$  es principal y el esfuerzo en esta dirección es nulo.

#### 2.8.5. Combinación de esfuerzos

Supongamos en  $M$  dos estados de esfuerzos caracterizados en el mismo sistema de referencia  $(M/p_1 p_2 p_3)$  por los tensores  $(\sigma^1(M))$ ,  $(\sigma^2(M))$ . Se define en este mismo sistema el tensor combinación de ambos:

$$(\sigma(M)) = \alpha(\sigma^1(M)) + \beta(\sigma^2(M)),$$

de la forma

$$\sigma_{ij}(M) = \alpha\sigma_{ij}^1(M) + \beta\sigma_{ij}^2(M),$$

siendo  $\alpha, \beta$  números reales cualesquiera.

## 2.9. Boletín 2

**Ejercicio 22** ♣ Calcular los invariantes del tensor:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

*Indicar los esfuerzos normales principales, la base de direcciones principales, y representar el tensor en la base dada por las direcciones principales.*

**Ejercicio 23** *Explica la interpretación física del vector  $\sigma(p)\mathbf{n}(p)$  en un punto de un sólido.*

**Ejercicio 24** *¿Qué representa el vector de esfuerzos en un punto de la frontera de un sólido?*

**Ejercicio 25** *¿Cómo se modela una presión de 100Pa en un punto de la frontera del sólido?*

**Ejercicio 26** *¿Qué información dan las componentes diagonales del tensor de tensiones?*

**Ejercicio 27** *Consideremos un sólido que ocupa el dominio  $\Omega$  y sea  $\hat{\Gamma}$  un trozo de su frontera. Supongamos conocido sobre  $\hat{\Gamma}$  el vector de esfuerzos:*

$$\mathbf{g}_0(p) = 2\mathbf{n}(p), \quad p \in \hat{\Gamma},$$

*siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal exterior unitario.*

i) *Indica si sobre  $\hat{\Gamma}$  el esfuerzo es puramente normal.*

ii) *¿Puede ser en  $\hat{\Gamma}$  el esfuerzo uniaxial en la dirección  $\mathbf{e}_2$ ?*

iii) *¿Se tiene sobre  $\hat{\Gamma}$  un esfuerzo de tracción o de compresión?*

**Ejercicio 28** ♣ *Considera el tensor de tensiones:*

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Rota el sistema de coordenadas 60 grados entorno al eje  $p_1$  y expresa el tensor de tensiones con respecto a los nuevos ejes.*

**Ejercicio 29** *Define los conceptos de esfuerzos principales y direcciones principales. Demuestra que si los esfuerzos principales son todos distintos las direcciones principales  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  son todas ortogonales entre ellas.*

**Ejercicio 30** *Demuestra que el tensor desviatorio asociado a un tensor esférico es nulo.*

**Ejercicio 31** ♣ *Considera el tensor*

$$\boldsymbol{\sigma}(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ p_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

*Calcula su parte esférica, desviatoria y los invariantes escalares del tensor desviatorio.*

**Ejercicio 32** *Explica el concepto de tensor cilíndrico, indica un ejemplo y calcula sus direcciones principales.*

**Ejercicio 33** ♣ ¿Qué relación hay entre los invariantes del tensor de tensiones y de su desviatorio? Demuéstralo para el segundo invariante.

**Ejercicio 34** ♣ Un punto  $O$  de un medio continuo se encuentra en el origen de los ejes ortonormales  $Op_1p_2p_3$  con vectores unitarios  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ . Se supone que los ejes principales en  $O$ ,  $OP_1P_2P_3$  se deducen de los anteriores por una rotación de ángulo  $\alpha$  entorno al eje  $\mathbf{e}_3$  (en consecuencia,  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{e}'_3$  coinciden y el ángulo  $\mathbf{e}_1$  con  $\mathbf{e}'_1$  es  $\alpha$ ). Conocidas las tensiones normales principales  $\sigma_1 = \sigma$  y  $\sigma_3 = 0$ , y la tensión normal  $\tau$  para la dirección  $\mathbf{e}_2$ , calcular en función de  $\alpha, \sigma$  y  $\tau$  la tensión normal principal  $\sigma_2$  y la tensión tangencial para la dirección  $\mathbf{e}_2$ .

**Ejercicio 35** ♣ Mostrar que la tensión normal y la tangencial para una dirección que forma ángulos iguales con las tres direcciones principales del tensor de tensiones verifican:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_m, \\ \sigma_t^2 &= \frac{1}{9} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{2}{3} J_2,\end{aligned}$$

siendo  $\sigma_m$  la tensión normal media y  $J_2$  el segundo invariante del tensor desviatorio. Estos valores  $\sigma_n$  y  $\sigma_t^2$  en esta dirección se llaman **tensión normal** y **tangencial octaédrica** del tensor de tensiones.

**Ejercicio 36** ♣ Demostrar que el estado de cizallamiento en dos direcciones ortogonales es la superposición de un estado de tracción en la dirección de una de sus bisectrices y de un estado de compresión en la dirección de la otra.

**Ejercicio 37** Escribir las componentes del tensor de tensiones en el sistema de coordenadas cartesianas a partir de su correspondiente expresión en el sistema de coordenadas cilíndricas.

## Capítulo 3

# Tensor de deformaciones

En este capítulo, se estudian los conceptos asociados al tensor de deformación linealizado y su interpretación física. Se prestará especial atención a su comportamiento en transformaciones rígidas. Finalmente, se procede a la caracterización de tensores de segundo orden que admiten un campo de desplazamientos asociado.

### 3.1. Interpretación de las componentes

En esta primera sección, veremos que el tensor de deformación<sup>1</sup> es la expresión local de variaciones relativas de forma, como son, variaciones de longitud o variaciones angulares. Mostramos a continuación una deducción sencilla de estas propiedades. Una presentación más detallada puede consultarse en Fraeijs de Veubeke [7].

- El **tensor linealizado de deformación** se define como la parte simétrica del gradiente del desplazamiento, y se corresponde con la linealización del tensor de Green-Saint Venant (ver Sección 1.5). Su expresión en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)_{ij} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \frac{\partial u_j}{\partial p_i}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j).
 \end{aligned}$$

Dado que a lo largo de todo el curso trabajaremos siempre en coordenadas Lagrangianas, es decir, sobre la configuración de referencia, de aquí en adelante usaremos indistintamente  $p$  o  $x$  para denotar las coordenadas de los puntos del sólido, notación esta última más habitual en mecánica de sólidos.

---

<sup>1</sup>Para simplificar la escritura, y cuando no haya lugar a posibles confusiones, llamaremos tensor de deformación al tensor linealizado de deformación.

El tensor  $(\boldsymbol{\varepsilon})$  es la parte simétrica del tensor  $\nabla \mathbf{u}$  y puede interpretarse como la parte lineal del tensor de Green-Saint Venant definido por:

$$(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}).$$

En la literatura encontramos, principalmente, dos formas de referirse al tensor de deformación. En su forma matricial

$$(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

o, utilizando su simetría, en forma de vector

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix},$$

donde

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}.$$

Las respectivas expresiones en notación americana serían

$$(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}.$$

La notación vectorial simplifica la escritura del producto tensorial del siguiente modo:

$$(\boldsymbol{\sigma}) : (\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}.$$

- Los elementos diagonales del tensor de Green -Saint Venant están relacionados con la **variación local de longitud**, midiendo esta variación con respecto a la configuración de referencia.

En efecto, sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva en la configuración de referencia. Su longitud se obtiene al calcular:

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 d\gamma = \int_I |\gamma'(s)| ds.$$

La longitud de la correspondiente curva deformada por el movimiento  $X(x) = x + \mathbf{u}(x)$ , denotada por  $\gamma^X$ , es:

$$\begin{aligned} l(\gamma^X) &= \int_I |(\mathbf{X} \circ \gamma)'(s)| ds = \int_I |\nabla X(\gamma(s)) \gamma'(s)| ds \\ &= \int_I (\gamma'(s)^T \nabla X(\gamma(s))^T \nabla X(\gamma(s)) \gamma'(s))^{1/2} ds \\ &= \int_I (\gamma'(s)^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \gamma'(s))^{1/2} ds = \int_I (\gamma'(s)^T \mathbf{C} \gamma'(s))^{1/2} ds, \end{aligned} \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{C}$  el tensor de Cauchy-Green por la derecha

$$\mathbf{C}(x) = \nabla X(x)^T \nabla X(x) = \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

Consideremos ahora la curva particular  $\gamma(s) = (s, y_0, z_0)$ , que es una recta paralela al eje  $x_1$ . Entonces:

$$l(\gamma^X) = \int_I (\gamma'(s)^T \mathbf{C} \gamma'(s))^{1/2} ds = \int_I (C_{11})^{1/2} ds.$$

Si  $\bar{E}_1$  denota la variación de longitud respecto a la inicial, se verifica:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= l(\gamma^X) - l(\gamma) = \int_I (C_{11})^{1/2} ds - \int_I ds = \int_I \mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E} \int_I (2E_{11} + 1)^{1/2} ds - \int_I ds \\ &= \int_I [(2E_{11} + 1)^{1/2} - 1] ds. \end{aligned}$$

Por tanto, la **variación elemental de longitud** que obtenemos en la dirección  $\mathbf{e}_1$  es:

$$E_1 = \sqrt{2E_{11} + 1} - 1, \quad (3.2)$$

donde  $E_{11}$  es la componente 11 del tensor de Green-Saint Venant. Análogo resultado se tendría sobre rectas paralelas a los ejes  $x_2$  o  $x_3$ , involucrando a los elementos diagonales 22 y 33, respectivamente, del tensor de Green-Saint Venant.

- En el caso de pequeños desplazamientos,  $\varepsilon_{ii}$  aproxima la **variación relativa de longitud** en la dirección  $i$ . En efecto, en primer lugar

$$(\mathbf{E}) = \frac{\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}}{2},$$

por lo que

$$\varepsilon_{ii} \simeq E_{ii}.$$

Por otra parte, haciendo un desarrollo de Taylor de la función involucrada en la expresión (3.2),  $f(x) = \sqrt{2x+1} - 1$ , en un entorno de  $x = 0^2$ , se deduce que

$$E_1 \simeq \varepsilon_{11},$$

válido, por supuesto, si  $|\nabla \mathbf{u}|$  es pequeño comparado con la unidad. En este caso, si suponemos que  $\varepsilon_{11}$  permanece constante sobre la recta paralela al eje  $x_1$ , se deduce (ver Figura 3.1):

$$l(O'A') - l(OA) = \int_I E_1 ds \simeq \int_I \varepsilon_{11} ds \simeq \varepsilon_{11} l(OA).$$

En consecuencia, para pequeñas deformaciones podemos escribir

$$\varepsilon_{11} \simeq \frac{l(O'A') - l(OA)}{l(OA)}.$$

De forma análoga,

$$\varepsilon_{22} \simeq \frac{l(O'B') - l(OB)}{l(OB)}.$$

---

<sup>2</sup> $f(x) \simeq f(0) + f'(0)x = (1-1) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)|_{x=0} x = x.$

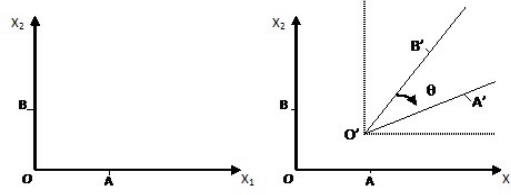


Figura 3.1: Deformación de segmentos rectilíneos.

- Para explicar el significado de las componentes no diagonales, consideremos en un punto dos vectores formando un ángulo recto. Llamemos  $\theta$  al ángulo que forman los dos vectores después de la deformación (ver Figura 3.1). Se verifica (ver Henry y Parsy [10]):

$$\cos(\theta) = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}.$$

Obsérvese la relación entre  $E_{12}$  y el producto escalar de los vectores  $O'A'$  y  $O'B'$ . El ángulo complementario  $\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta$  representa la variación con la deformación respecto del ángulo recto y verifica:

$$\sin(\alpha_{12}) = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}. \quad (3.3)$$

En el caso de desplazamientos infinitesimales  $E_{22} \simeq \varepsilon_{22}$ ,  $E_{11} \simeq \varepsilon_{11}$ ,  $E_{12} \simeq \varepsilon_{12}$  y, además, en este caso sus valores son pequeños en relación con la unidad. Por tanto, el ángulo  $\alpha_{12}$  es también pequeño, aproximando bien el valor de su seno, y de (3.3) se deduce que vale aproximadamente:

$$\alpha_{12} \simeq 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} \Rightarrow \alpha_{12} \simeq \gamma_{12},$$

$$\varepsilon_{12} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Rightarrow \theta \simeq \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}.$$

Así, la componente  $\varepsilon_{12}$  caracteriza la reducción con la deformación, respecto del ángulo recto, de segmentos paralelos a los ejes  $x_1$  y  $x_2$ . El ángulo  $\alpha_{12}$ , o lo que es lo mismo  $\gamma_{12}$ , se llama **ángulo de cizallamiento o cortadura** -shear angle-.

- Las componentes  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$  y  $\varepsilon_{23}$  del tensor de deformación se llaman **esfuerzos cortantes** y  $\gamma_{12}, \gamma_{13}$ , y  $\gamma_{23}$  aproximan la reducción respecto del ángulo recto de los segmentos rectos ortogonales determinados por los ejes correspondientes.
- Si se realiza un desarrollo de Taylor del jacobiano de la deformación en un entorno de la deformación identidad, se demuestra que para pequeñas deformaciones:

$$J = \det(I + \nabla \mathbf{u}) \simeq 1 + \varepsilon_{ii} = 1 + \text{Div}(\mathbf{u}).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} J &= \det(I + \nabla \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 1 + \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & 1 + \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & 1 + \partial_3 u_3 \end{vmatrix} \\ &= 1 + \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \end{aligned}$$

De esta forma, la traza del tensor linealizado de deformación aproxima el cambio de volumen después de la deformación con respecto al volumen original. En efecto,  $J$  está relacionado con los cambios de volumen con la deformación; así, si suponemos que  $J$  es constante y  $P$  es una parte de  $\mathcal{B}$ , se verifica:

$$\begin{aligned} Vol(P^X) &= \int_{P^X} dV^X = \int_P J dV = J Vol(P) \\ &\simeq (1 + \varepsilon_{ii}) Vol(P), \end{aligned}$$

siendo  $P^X = \mathbf{X}(P)$ . En consecuencia,

$$Vol(P^X) - Vol(P) \simeq Div(\mathbf{u}) Vol(P),$$

y, por tanto:

$$Div(\mathbf{u}) \simeq \frac{Vol(P^X) - Vol(P)}{Vol(P)}.$$

De esta forma si  $J = 1$  no hay cambios de volumen. Además,  $\varepsilon_{ii}$ , que representa el primer invariante del tensor  $(\boldsymbol{\varepsilon})$  (igual a la divergencia de  $\mathbf{u}$ ), se conoce también como **dilatación cúbica**, dando cuenta de los cambios relativos de volumen. Si un sólido se asume incompresible entonces  $Div(\mathbf{u}) = 0$ , no habiendo cambios de volumen después de la deformación.

### 3.2. Elongación en una dirección

Como ya hemos dicho anteriormente,  $\varepsilon_{11}$  representa la elongación relativa en la dirección  $\mathbf{x}_1$ , denotada por  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_1)$ . Esta componente diagonal del tensor de deformación también puede obtenerse como

$$\varepsilon_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{e}_1.$$

Análogamente, se define la **elongación unitaria en la dirección** dada por un vector unitario  $\mathbf{w}$  como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{w} = w_i \varepsilon_{ij} w_j.$$

Por analogía con el esfuerzo normal, que es la proyección sobre el vector normal del vector  $(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}$ , se define la **elongación en la dirección normal** como la proyección del vector  $(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{n}$  sobre la normal.

### 3.3. Ecuaciones de compatibilidad

Dado un vector de desplazamientos  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ , definido en todo punto de la configuración de referencia  $\mathcal{B}$ , su tensor linealizado de deformación es

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Observamos que cuando un sólido se deforma, las seis componentes del tensor de deformación no pueden comportarse independientemente, sino que deben derivarse de tres funciones, las tres componentes del desplazamiento, de acuerdo con la expresión anterior.

El problema recíproco se plantea en la forma siguiente: dadas seis funciones arbitrarias  $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  ¿es posible calcular funciones  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  tales que

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)) = e_{ij}(x_1, x_2, x_3)? \quad (3.4)$$

La respuesta no siempre es positiva. La existencia de las funciones  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  requiere que las  $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  verifiquen ciertas condiciones de compatibilidad.

#### 3.3.1. Movimientos rígidos

En este apartado, para evitar confusión alguna, usaremos de nuevo la variable  $p$  para representar coordenadas materiales.

**Definición 38** *Un movimiento  $\mathbf{X}$  es **rígido** si en cada instante  $t$  la deformación es rígida, admitiendo por tanto la expresión:*

$$\mathbf{X}(p, t) = \mathbf{a}(t) + (\mathbf{Q}(t)) \mathbf{p}, \quad \mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{Q}(t)) \in Orth^+,$$

siendo  $\mathbf{p}$  el vector asociado con respecto al origen del punto  $p$ .

El conjunto  $Orth^+$  representa las rotaciones, matrices  $(\mathbf{Q})$  verificando que  $(\mathbf{Q})^T (\mathbf{Q}) = (\mathbf{Q}) (\mathbf{Q})^T = \mathbf{I}$ , siendo además de determinante 1.

**Observación 39** *Para estos movimientos, la configuración deformada se obtiene por la superposición de una traslación de valor  $\mathbf{a}(t)$  con una rotación entorno al origen  $(\mathbf{Q}(t))$ . Entonces, la métrica de la estructura deformada coincide esencialmente con la métrica de la configuración de referencia. En efecto, su tensor de Cauchy-Green por la derecha es la identidad:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{Q})^T (\mathbf{Q}) = \mathbf{I}.$$

Obsérvese que al ser  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , la expresión (3.1) permite concluir que la métrica en el cuerpo deformado coincide con la de la configuración de referencia.

Además, dado que  $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ , su tensor de Green-Saint Venant es nulo. Sin embargo, su tensor linealizado de deformación es:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} ((\mathbf{Q}) + (\mathbf{Q})^T) - \mathbf{I}.$$

---

<sup>3</sup>Nótese que  $(\mathbf{Q})^{-1} = (\mathbf{Q})^T$ , por lo que  $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$ . Para que  $(\mathbf{Q})$  sea una rotación en  $\mathbb{R}^3$ , el determinante debe ser 1.

Por lo tanto, el tensor linealizado de deformación (también llamado tensor de deformación infinitesimal) no mide correctamente los cambios en la métrica por la deformación cuando hay grandes rotaciones (es decir, si  $(\mathbf{Q}) + (\mathbf{Q})^T$  no es próxima a la matriz identidad). Sin embargo, hemos visto que  $\mathbf{E}$  sí mide correctamente que no hay cambios en la métrica debido a la deformación. De hecho, se puede demostrar que si dos movimientos tienen el mismo tensor de Green-Saint Venant en todo punto de  $\mathcal{B}$ , entonces la diferencia entre ambos es un movimiento rígido (ver Ciarlet [5]).

**Ejemplo 40** Consideremos la solución al Ejercicio 19 incluida en el Boletín 1. El movimiento dado supone de hecho en cada instante una rotación del cuerpo de magnitud  $t$  entorno al eje  $p_3$ . La matriz de rotación asociada será:

$$(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0 \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De forma que el movimiento rígido asociado es:

$$\begin{aligned} X(p, t) &= (r \cos(\theta + t), r \operatorname{sen}(\theta + t), p_3)^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0 \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \operatorname{sen}(\theta) \\ p_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siendo  $r, \theta$  el módulo y el argumento de  $(p_1, p_2)$  respectivamente.

### 3.3.2. Desplazamientos rígidos infinitesimales

De nuevo usaremos la variable  $p$  para representar coordenadas materiales.

**Definición 41** Un desplazamiento  $\mathbf{u}$  es **rígido infinitesimal** si en cada instante  $t$  admite la expresión:

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{a}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{p}, \mathbf{a}(t) \in \mathbf{R}^3, \boldsymbol{\omega}(t) \in \mathcal{V}, \quad (3.5)$$

siendo  $\mathcal{V}$  el conjunto de vectores en el espacio.

Denotemos por  $\mathcal{Z}$  el conjunto de desplazamientos rígidos infinitesimales:

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}(p, t) = \mathbf{a}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{p}\}.$$

Omitimos por simplicidad la dependencia respecto de  $t$  en lo que sigue. Si  $\mathbf{w} \in \mathcal{Z}$ , desplazamiento se puede escribir como:

$$w_i(\mathbf{p}) = a_i + \omega_{ij}p_j.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{p} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \\ &= (\omega_2 p_3 - \omega_3 p_2) \mathbf{i} + (\omega_3 p_1 - \omega_1 p_3) \mathbf{j} + (\omega_1 p_2 - \omega_2 p_1) \mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{21} = \omega_3 \\ \omega_{13} = \omega_2 \\ \omega_{32} = \omega_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Y en consecuencia la matriz  $(\boldsymbol{\omega}) = (\omega_{ij})$  es:

$$(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que  $(\boldsymbol{\omega})^T (\boldsymbol{\omega})$  no tiene por qué ser la identidad y, por tanto,  $(\boldsymbol{\omega})$  no es una matriz de rotación. El movimiento asociado a desplazamientos del tipo  $\mathbf{w}$  es:

$$\mathbf{X}(p, t) = \mathbf{a}(t) + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{p}.$$

Este movimiento no tiene por qué ser un movimiento rígido. En efecto, la matriz  $(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}(t)) \in Orth^+$  si y solo si  $\omega_{ij} = 0$ ,  $\forall i, j$ , por lo que los desplazamientos  $\mathbf{w} \in \mathcal{Z}$  no son desplazamientos rígidos. Sin embargo,  $(\boldsymbol{\omega}) = (\omega_{ij})$  es una matriz antisimétrica, verificándose que

$$\varepsilon(\mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, de acuerdo con la interpretación dada en la Sección 3.1, a nivel infinitesimal estos desplazamientos no producen elongaciones relativas ni acortamientos respecto a ángulos rectos. De ahí que a los desplazamientos en  $\mathcal{Z}$  se les llame desplazamientos rígidos infinitesimales.

### 3.3.3. Análisis de la unicidad del desplazamiento asociado a un tensor linealizado de deformación

Volvemos ahora sobre la cuestión planteada al inicio del Apartado 3.3. Para simplificar, vamos a suponer que el tensor  $e_{ij} \in C^2(\mathcal{B})$  para todas sus componentes y que es un tensor simétrico.

Observemos que si existe una función  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$  verificando (3.4), ésta **no es única**, pues la superposición de  $\mathbf{u}$  con un desplazamiento rígido infinitesimal. En efecto, sea  $\mathbf{w} \in \mathcal{Z}$ :

$$\mathbf{w}(p) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{p}. \quad (3.6)$$

El campo de desplazamientos  $\mathbf{U}$  definido por:

$$\mathbf{U}(p) = \mathbf{u}(p) + \mathbf{w}(p),$$

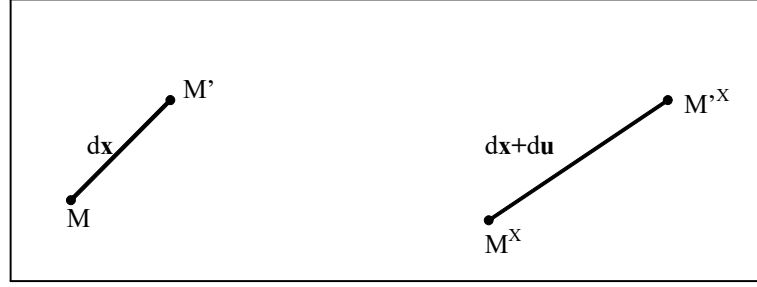
también sería solución de (3.4), pues:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{U}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = e_{ij}.$$

Hemos constatado también que para conseguir la unicidad del campo de desplazamientos asociado a un tensor linealizado de deformación es preciso evitar los desplazamientos rígidos infinitesimales. Esto se consigue si, por ejemplo, se encastra el sólido en alguna zona de su frontera de medida positiva.

### 3.3.4. Tensor de rotación

Inversamente, si el tensor de deformación es localmente nulo ¿podemos concluir que se trata de un desplazamiento rígido infinitesimal? Para mostrar que la respuesta es negativa, consideremos dos puntos  $M$  y  $M'$  tales que el vector

Figura 3.2: Desplazamiento relativo de los puntos  $M$  y  $M'$ .

$\overrightarrow{MM'}$  tenga de coordenadas  $dx_i$ . Después de la deformación, el desplazamiento relativo de los puntos deformados  $M^X = \mathbf{X}(M)$  y  $M'^X = \mathbf{X}(M')$  es (ver Figura 3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x + d\mathbf{x}) - \mathbf{X}(x) &= (x + d\mathbf{x}) + \mathbf{u}(x + d\mathbf{x}) - (x + \mathbf{u}(x)) \\ &= d\mathbf{x} + \mathbf{u}(x + d\mathbf{x}) - \mathbf{u}(x) \\ &\simeq d\mathbf{x} + \mathbf{u}(x) + \nabla \mathbf{u}(x)[d\mathbf{x}] - \mathbf{u}(x) \\ &= d\mathbf{x} + (\nabla \mathbf{u}(x))d\mathbf{x} = d\mathbf{x} + d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud  $d\mathbf{u}$  es un indicador de si hay o no **variación relativa de posición entre los puntos deformados** con respecto a su posición inicial. Sus componentes son:

$$du_i = (\nabla \mathbf{u}(x))_{ij} dx_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (3.7)$$

Las componentes de este vector también pueden escribirse como:

$$du_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j \quad (3.8)$$

$$= (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j, \quad (3.9)$$

siendo:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (\boldsymbol{\omega}) = (\omega_{ij}).$$

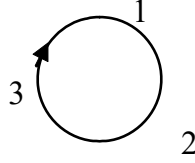
El tensor  $(\boldsymbol{\omega})$  es antisimétrico ( $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ ) y se conoce como **tensor de rotación**; es importante no confundirlo con una matriz de rotación, pues no lo es. La matriz  $(\boldsymbol{\omega})$  puede caracterizarse con sólo tres componentes no nulas, y puede transformarse en un vector  $\boldsymbol{\omega}$  con la ayuda del símbolo de permutaciones:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{ji}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_k),$$

donde<sup>4</sup>:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si hay dos índices idénticos,} \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ están en permutación circular sobre } \{1, 2, 3\}, \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

<sup>4</sup>Una permutación circular de  $n$  elementos es una agrupación de esos  $n$  elementos, dispuestos en forma circular sin que ninguno falte o se repita.



Por tanto,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21})^T$ ; veámoslo, por ejemplo, para  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \epsilon_{ij1} \omega_{ji} = \frac{1}{2} \epsilon_{231} \omega_{32} + \frac{1}{2} \epsilon_{321} \omega_{23} \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{32} - \omega_{23}) = \omega_{32}.\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{Rot}(\mathbf{u}).$$

El vector  $\boldsymbol{\omega}$  representa la **rotación sólida local**; su magnitud es el ángulo local de rotación y su dirección el eje local de rotación.

Obsérvese que (3.8) puede escribirse como:

$$d\mathbf{u} = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\mathbf{x} + (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})) d\mathbf{x}.$$

Cuando tanto el tensor de rotación como el tensor de deformación son nulos, los puntos  $M^X$  y  $M'^X$  no sufren desplazamiento relativo después de la deformación.

En cambio, el tensor de deformación puede ser nulo, pero, si  $\partial_i u_j$  es no nula para algún  $i \neq j$ , la rotación sólida local puede ser no nula y  $d\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ .

**Ejemplo 42** Consideremos:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x},$$

siendo  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\omega} = (0, 2, 0)^T$ , es decir:

$$\mathbf{u}(x) = (2x_3, 0, -2x_1).$$

Se verifica que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , por lo que el desplazamiento es rígido infinitesimal. Su matriz de rotación es:

$$(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, dados dos puntos  $M(x_1, x_2, x_3)$  y

$$M'(x'_1, x'_2, x'_3) = M'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3),$$

se obtiene que

$$\boldsymbol{\omega} \wedge d\mathbf{x} = (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})) d\mathbf{x} = 2(dx_3, 0, -dx_1),$$

es el cambio de posición relativa de los puntos. Observando que  $(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})) \notin \text{Orth}^+$ , no se verificaría la Definición 38, pudiendo concluir de otro modo que el movimiento no es rígido.

Obsérvese además que  $\varepsilon_{11}$  sólo aproxima bien las variaciones relativas de longitud en la dirección  $x_1$  si el desplazamiento  $\mathbf{u}$  es pequeño. En este ejemplo, la variación elemental de longitud es  $\sqrt{C_{11}} - 1 = \sqrt{5} - 1 \approx \varepsilon_{11}$ , que era nulo, ya que:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ (\mathbf{C}) &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I}. \\ (\mathbf{E}) &= (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

que efectivamente no está bien aproximado por  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

### 3.3.5. Ecuaciones de compatibilidad de Saint Venant

De las ecuaciones (3.7) y (3.8) se deduce que, si existe un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  asociado al tensor  $(\mathbf{e})$ , entonces debe verificarse:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + \omega_{ij}. \quad (3.10)$$

Por ello, nuestro primer objetivo será determinar  $\omega_{ij}$  y utilizar (3.10) para calcular posteriormente  $u_i$ . A partir de la definición de  $\omega_{ij}$ , y si se verifica (3.4), podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) \\ &= \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\},\end{aligned} \quad (3.11)$$

expresión en la que no se considera la suma sobre índices repetidos. Por tanto, si el tensor  $\mathbf{e}$  se corresponde con un tensor de deformación entonces el gradiente de  $(\omega)$  podría calcularse a partir del tensor  $(\mathbf{e})$ . Ahora bien, efectivamente la expresión del segundo miembro de la ecuación (3.11) será un gradiente si su rotacional es nulo, es decir, debe verificarse:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \text{Rot}(\nabla \omega_{ij}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ \partial \omega_{ij}/\partial x_1 & \partial \omega_{ij}/\partial x_2 & \partial \omega_{ij}/\partial x_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_2 \partial x_1} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

que puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} = 0, \quad \text{para cada } i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.12)$$

Obsérvese la analogía de esta condición con la dada por el teorema de Schwarz. Si tenemos en cuenta la expresión (3.11), esta condición puede escribirse en términos del tensor  $(\mathbf{e})$ :

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial e_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{lj}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i} \right), i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

por lo que la condición (3.12) puede escribirse de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 e_{lj}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 e_{il}}{\partial x_j \partial x_k} = 0, i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.13)$$

donde se ha tenido en cuenta que por ser  $(\mathbf{e})$  regular se verifica el teorema de Schwarz. Esta ecuación se puede escribir de forma reducida utilizando el símbolo de permutaciones introducido en Subsección 3.3.4:

$$\boxed{\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} = 0, i, j \in \{1, 2, 3\}.} \quad (3.14)$$

Todas ellas se llaman **ecuaciones de compatibilidad de Saint Venant**. Teniendo en cuenta la simetría en  $i, j$  se tienen 6 ecuaciones independientes<sup>5</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{11,23} = (-e_{23,1} + e_{31,2} + e_{12,3})_{,1} , \\ e_{22,31} = (-e_{31,2} + e_{12,3} + e_{23,1})_{,2} , \\ e_{33,12} = (-e_{12,3} + e_{23,1} + e_{31,2})_{,3} , \\ 2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11} , \\ 2e_{23,23} = e_{22,33} + e_{33,22} , \\ 2e_{31,31} = e_{33,11} + e_{11,33} . \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Verificadas las condiciones de compatibilidad, el campo de vectores  $\mathbf{G}_{ij}$  definido por

$$\mathbf{G}_{ij} = \left( \partial \omega_{ij} / \partial x_1, \quad \partial \omega_{ij} / \partial x_2, \quad \partial \omega_{ij} / \partial x_3 \right)^T ,$$

verifica  $\text{rot} \mathbf{G}_{ij} = \mathbf{0}$ , lo que permite asegurar que  $\mathbf{G}_{ij}$  deriva de un potencial y que, por tanto,  $\omega_{ij}$  está bien definido para todo  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Construyamos a continuación el desplazamiento. Para ello recuperemos la igualdad:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

---

<sup>5</sup> Tomando en (3.14),  $i = j = 3$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} &= 0 \Leftrightarrow \\ 2e_{12,12} &= e_{11,22} + e_{22,11}. \end{aligned}$$

Una forma más fácil de deducir esta ecuación es gracias al teorema de Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}$$

De esta expresión podemos calcular  $u_i$  siempre que:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j},$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j}.$$

Pero esta relación es cierta gracias a (3.11) y a la simetría del tensor  $(\mathbf{e})$ :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial e_{jk}}{\partial x_i}.$$

Por tanto, las únicas condiciones a verificar para la existencia de un campo de desplazamientos asociado al tensor  $(\mathbf{e})$  son las ecuaciones de compatibilidad. Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 43** *Una condición necesaria para que un tensor simétrico de orden 2,  $(\mathbf{e})$ , sea un tensor de deformación<sup>6</sup> es que sus componentes verifiquen las 6 ecuaciones de compatibilidad (3.15). ■*

**Ejemplo 44** *El tensor*

$$(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*verifica las ecuaciones de compatibilidad y, por tanto, existe un campo de desplazamientos para el cual  $(\mathbf{e})$  es su tensor de deformación. En cambio, el tensor:*

$$(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} xy^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*no verifica las ecuaciones de compatibilidad y, por consiguiente, no es compatible con ser un tensor de deformación.*

**Observación 45** *Las ecuaciones de compatibilidad son suficientes para determinar el vector de desplazamientos a partir de  $(\mathbf{e})$  cuando el dominio es simplemente conexo, esto es, si toda curva cerrada en el dominio se puede deformar continuamente en un punto sin salir del dominio).*

**Teorema 46** *Sea  $\mathcal{B}$  un sólido simplemente conexo. Si  $(\mathbf{e}) \in C^2(\mathcal{B})$  es un tensor simétrico y verifica las condiciones de compatibilidad de Saint Venant, entonces se puede identificar con un tensor de pequeñas deformaciones. El desplazamiento asociado queda determinado de forma única excepto por una deformación rígida infinitesimal.*

---

<sup>6</sup>Siempre que estemos trabajando en elasticidad lineal, y no haya riesgo de confusión, llamaremos tensor de deformación al tensor linealizado de deformación.

**Demostración.** Elijamos dos puntos  $M$  y  $M'$  en  $\mathcal{B}$ . Por ser  $\mathcal{B}$  simplemente conexo, podemos conectar estos puntos mediante una curva  $C$ , con parametrización  $x(s) \in C^1([0, 1])$ , y tal que  $x(s) \in \mathcal{B}, \forall s \in [0, 1], x(0) = M, x(1) = M'$ . Supongamos que existe un desplazamiento  $\mathbf{u} \in C^3(\mathcal{B})$ . Entonces cada componente  $u_i$  verifica:

$$u_i(M') - u_i(M) = u_i(x(1)) - u_i(x(0)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} u_i(x(s)) ds = \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} x'_j(s) ds.$$

Puesto que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij},$$

obtenemos utilizando integración por partes

$$\begin{aligned} u_i(M') - u_i(M) &= \int_0^1 [e_{ij}(x(s)) + \omega_{ij}(x(s))] x'_j(s) ds = \\ &= \int_0^1 e_{ij}(x(s)) x'_j(s) ds + \omega_{ij}(x(s)) x_j(s) \Big|_{s=0}^{s=1} - \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\partial \omega_{ij}(x(s))}{\partial x_k} x'_k(s) x_j(s) dt = \\ &= \omega_{ij}(M') x_j(1) - \omega_{ij}(M) x_j(0) + \int_C [e_{ij} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_j} x_k(t)] dx_j. \end{aligned}$$

Consideremos

$$V_{ij}(s) = e_{ij}(x(s)) - \frac{\partial \omega_{ik}(x(s))}{\partial x_j} x_k(s).$$

Para que el resultado de la última integral sea independiente de la curva considerada es necesario y suficiente (dado que el dominio es simplemente conexo) que la expresión  $V_{ij} dx_j$  sea una diferencial total (es decir, que corresponda a un campo conservativo), lo cual significa que su rotacional debe ser nulo para cada  $i$  que tomemos:

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial V_{il}}{\partial x_j}, i, j, l = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

Teniendo en cuenta la relación (3.11), se deduce:

$$V_{ij} = e_{ij} - \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i} \right) x_k. \quad (3.17)$$

Entonces, si tenemos en cuenta que la ecuación (3.16) se puede escribir como

$$\epsilon_{ilm} \frac{\partial V_{jl}}{\partial x_m} = 0,$$

para  $i, j$  fijados en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , de (3.17) se deduce<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ilm} \frac{\partial V_{jl}}{\partial x_m} &= \epsilon_{ilm} \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_m} - \epsilon_{ilm} \left[ \frac{\partial^2 e_{jl}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_m \partial x_j} \right] x_k \\ &\quad - \epsilon_{ilm} \left( \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{kl}}{\partial x_j} \right) \delta_{km} = \\ &= \epsilon_{ilm} \left( \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_m} - \frac{\partial e_{jl}}{\partial x_m} \right) + \epsilon_{ilm} \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_j} - \\ &\quad - \epsilon_{ilm} \left[ \frac{\partial^2 e_{jl}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_m \partial x_j} \right] x_k = \\ &= \epsilon_{ilm} \left[ \frac{\partial^2 e_{jl}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_m \partial x_j} \right] x_k = 0. \end{aligned}$$

Para que esta ecuación sea válida para cualquier curva  $x(s)$  debe verificarse:

$$\epsilon_{ilm} \left( \frac{\partial^2 e_{jl}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{kl}}{\partial x_m \partial x_j} \right) = 0,$$

expresión que es equivalente a las ecuaciones de compatibilidad. ■ ■

Una interpretación física detallada de las ecuaciones de compatibilidad puede verse en Barber ([2]).

### 3.4. Boletín 3

**Ejercicio 47** Define el tensor de Green-Saint Venant **E**. ¿Qué relación tiene con el tensor de deformación?

**Ejercicio 48** Define el tensor de Cauchy-Green por la derecha **C**. ¿Qué interpretación tienen sus componentes diagonales?

**Ejercicio 49** Define con precisión los siguientes conceptos:

- Tensor de tensiones.
- Tensión normal y tensión tangencial.
- Vector de esfuerzos de cizallamiento.
- Estado natural.
- Ecuaciones de equilibrio.
- Desplazamiento rígido.
- Ecuaciones de compatibilidad.

**Ejercicio 50** ♣ Considera un tensor de deformación de la forma:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))(x_1, x_2, x_3) = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo  $\epsilon = 1.e - 5m^{-1}$ . Aproxima las variaciones relativas de longitud en la dirección  $x_3$  y el ángulo de cizallamiento o cortadura en las direcciones  $x_1 x_3$ .

<sup>7</sup>  $\epsilon_{ilm} \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_j} = 0$  por la simetría de  $e$ .

**Ejercicio 51** ♣ *Considérese el tensor  $(\mathbf{e})$  definido con respecto al sistema de coordenadas cartesiano por:*

$$(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} a\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c\lambda \end{pmatrix},$$

*siendo  $a, b, c$  constantes no nulas y  $\lambda$  una función del punto  $x$  y del instante  $t$ .*

- i) Mostrar que para que  $(\mathbf{e})$  sea un tensor de deformación, asociado a un campo de desplazamientos, la función  $\lambda$  debe ser de la forma:*

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta,$$

*siendo  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  funciones de  $t$ .*

- ii) Determinar todos los campos de desplazamiento  $\mathbf{u}$  que tienen  $(\mathbf{e})$  como tensor linealizado de deformaciones.*

## Capítulo 4

# Ley de Hooke

### 4.1. Introducción

Supongamos que se realiza un test de tensión uniaxial en la dirección  $\mathbf{e}_1$  sobre una muestra de un **material elástico lineal** (ver Figura 4.1), cerciorándonos de que los niveles previos de stress sean suficientemente pequeños. La muestra se supone anclada en su base y se somete a una fuerza de tracción en la parte superior. Entonces observaremos:

- El sólido tiene una forma preferida. En la ausencia de cargas tiene una frontera bien definida -esto distingue a un sólido de un fluido-.
- Si el material es elástico la pieza **se deforma reversiblemente**. Si se retiran las cargas, el sólido recupera su forma original.
- La deformación -elastic strain- de la pieza depende únicamente del esfuerzo al que se somete: no depende de la velocidad de la carga ni de la historia de esta siempre que se mantenga en el régimen elástico.
- Para muchos materiales, en particular para los elásticos lineales, la tensión -stress- es una función lineal de la deformación como se muestra en la Figura 4.2 al representar la relación entre  $\sigma_{11}$  y  $\varepsilon_{11}$ .

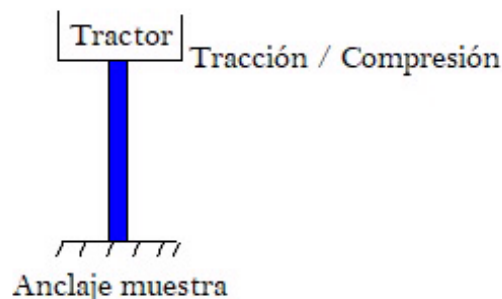


Figura 4.1: Test uniaxial sobre una muestra de material.

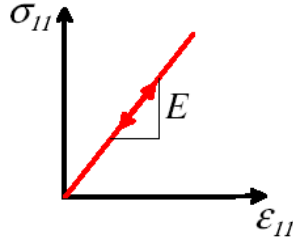


Figura 4.2: Respuesta del material elástico lineal al test uniaxial 4.1.

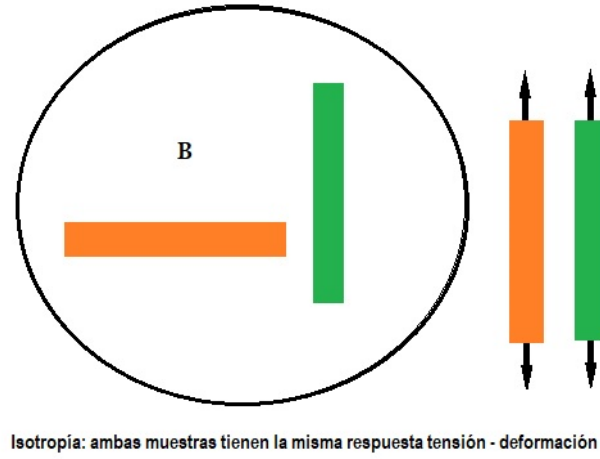


Figura 4.3: Muestras extraídas de un mismo material con distintas orientaciones.

- Para muchos, pero no todos los materiales, no hay orientaciones características. Así, si se corta una muestra de un bloque del material, la curva tensión-deformación (stress-strain) será independiente de la orientación de la muestra con respecto al bloque del material (ver Figura 4.3). Si este es el caso, se dice que el material es isótropo. Por ejemplo, si se calienta una pieza test del material, con un incremento uniforme de la temperatura, generalmente cambiará su forma lentamente. Si el material es isótropo -no tiene un orientación preferida-, entonces la pieza simplemente incrementará su tamaño sin cambiar su forma.

Todas estas propiedades definen el comportamiento de un material elástico, lineal e isótropo.

## 4.2. Ley de Hooke

Antes de escribir las relaciones tensión-deformación (stress-strain) debemos decidir qué medidas de la tensión y de la deformación vamos a usar. Puesto que

el modelo solamente trabajará con pequeños cambios de forma, caracterizaremos la deformación usando el tensor linealizado de deformación,  $(\varepsilon)$ , y usaremos la linealización del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff para medir las tensiones. La relación lineal entre ambas variables más usada es la ley de Hooke.

Así dado un medio elástico, lineal e isótropo la **ley de comportamiento de Hooke** se escribe:

$$\sigma(x) = \lambda(x)tr(\varepsilon(x))\mathbf{I} + 2\mu(x)\varepsilon(x), \quad (4.1)$$

donde  $\lambda(x)$  y  $\mu(x)$  son funciones reales, características de cada material, llamadas **módulos de Lamé**. Ambos parámetros deben ser positivos. Obsérvese que esta expresión es idéntica a la deducida en (1.10). Si  $\mu \neq 0$  y  $(3\lambda + 2\mu) \neq 0$ , la relación (4.1) se invierte en la forma:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\mu}[\sigma - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}tr(\sigma)\mathbf{I}]. \quad (4.2)$$

En efecto, si  $i \neq j$  se deduce directamente:

$$\sigma_{ij}(x) = 2\mu(x)\varepsilon_{ij}(x) \Rightarrow \varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2\mu(x)}\sigma_{ij}(x).$$

En cambio, si  $i = j$ , identificamos primero la traza de los tensores:

$$\sigma_{ii}(x) = \lambda(x)tr(\varepsilon(x)) + 2\mu(x)\varepsilon_{ii}(x) \Rightarrow tr(\sigma(x)) = (3\lambda + 2\mu)tr(\varepsilon(x)),$$

y, por tanto:

$$tr(\varepsilon(x)) = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)}tr(\sigma). \quad (4.3)$$

Esto nos permite escribir:

$$\sigma_{ii}(x) = \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}tr(\sigma(x)) + 2\mu(x)\varepsilon_{ii}(x) \Rightarrow \varepsilon_{ii}(x) = \frac{1}{2\mu}[\sigma_{ii} - \frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)}tr(\sigma)],$$

concluyendo la relación (4.2). Además de la relación (4.3) se deduce:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)}\sigma_m,$$

lo que permite obtener la relación entre las partes esféricas de los tensores de tensiones y de deformación:

$$(\varepsilon_s) = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_s). \quad (4.4)$$

A menudo, en los libros de ingeniería, la ecuación (4.2) se escribe en términos del **módulo de Young**  $E$  y del **coeficiente de Poisson**  $\nu$  del material, definidos en términos de los parámetros de Lamé como:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E > 0, 0 < \nu < \frac{1}{2},$$

o, inversamente:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}.$$

**El módulo de Young tiene la dimensión de una tensión y el coeficiente de Poisson es adimensional.** De esta forma la ecuación (4.2) se escribe:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}. \quad (4.5)$$

En la bibliografía también suele escribirse la ley de Hooke utilizando la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix},$$

deduciéndose las relaciones restantes gracias a la simetría del tensor  $(\boldsymbol{\varepsilon})$ . La relación inversa también admite una expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \hat{E} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

siendo

$$\hat{E} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}.$$

De nuevo se puede escribir en forma condensada como:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}.$$

Debe tenerse cuidado de no confundir la **matriz de elasticidad**  $[\mathbf{E}] \in \mathcal{M}_6$  con el tensor de Green-Saint Venant  $(\mathbf{E})$ .

También es habitual expresar la ley de Hooke utilizando **el tensor de elasticidad** de cuarto orden -the elastic modulus tensor-  $(\mathbf{C})$ , definido en (1.9), que permite escribir:

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x).$$

Sus componentes,  $C_{ijkl}$ , se escriben en términos de  $E$  y  $\nu$  de la forma:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl}.$$

**Ejemplo 52** Consideremos un **esfuerzo uniaxial** correspondiente a un test de tensión uniaxial (ver Figura 4.1):

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

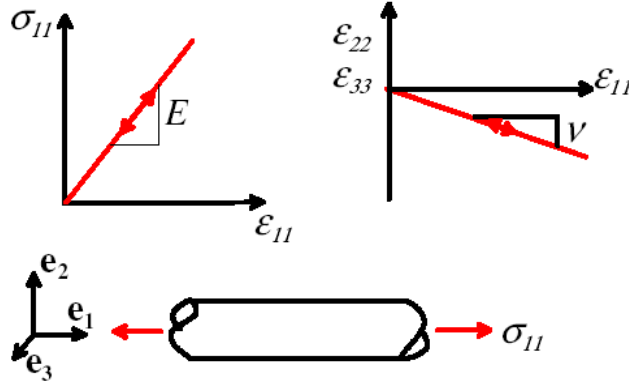


Figura 4.4: Respuesta en las tres dimensiones al test uniaxial de la Figura 4.1.

El tensor de deformación asociado es:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \\
 &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} \mathbf{I} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma_{11}/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_{11}/E \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Asumiendo que  $\sigma_{11}$  es positivo, observamos una elongación en la dirección  $\mathbf{e}_1$ , elongación proporcional a la tensión ( $\varepsilon_{11} = \sigma_{11}/E$ ) e inversamente proporcional al módulo de Young, y un acortamiento en las direcciones  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , acortamiento proporcional a la elongación en la dirección  $\mathbf{e}_1$  ( $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$ ) siendo el coeficiente de proporcionalidad  $\nu$ . Ambas observaciones pueden visualizarse en la Figura 4.4. Los ángulos entre los ejes coordenados no se modifican después de la deformación. ■

**Ejemplo 53** Veamos ahora un ejemplo con **esfuerzos de cizallamiento simple** en las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ :

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El tensor de deformación asociado es:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \\
 &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\
 &= \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En este tipo de esfuerzos no hay elongación en dirección alguna de los ejes coordenados, sino una desviación respecto al ángulo recto en las direcciones  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  de magnitud

$$2\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12}.$$

La desviación respecto al ángulo recto es inversamente proporcional al coeficiente de Lamé  $\mu$ .

Obsérvese que sí hay una elongación en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante. En efecto, si tomamos  $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ , la elongación en esta dirección es:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) &= \frac{1+\nu}{E}(2\sigma_{12}w_1w_2) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\ &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12}.\end{aligned}$$

De este modo, si se expresa  $(\boldsymbol{\sigma})$  en el sistema principal (considerando  $\sigma_{12} > 0$ )

$$(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo los vectores principales asociados:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \\ \mathbf{x}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Entonces, puesto que su traza es nula, el tensor de deformación en el sistema de direcciones principales de  $(\boldsymbol{\sigma})$  es:

$$(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1+\nu}{E}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así la elongación / acortamiento en la dirección de los dos primeros ejes principales es de magnitud  $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$ , mientras que con respecto al tercero es nula. ■

#### 4.2.1. Tensor de tensiones esférico y desviatorio

Como habíamos definido en el Capítulo 2:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\sigma}_d) + \sigma_m \mathbf{I},$$

donde el esfuerzo normal medio  $\sigma_m = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ . Análogamente, para el tensor de deformación:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_d) + \varepsilon_m \mathbf{I}.$$

Veamos entonces cómo influye en esta descomposición la ley de Hooke:

$$(\sigma_d)_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(3\lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{kk})\delta_{ij},$$

es decir:

$$\begin{aligned}(\sigma_d)_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}), \\ (\sigma_d) &= 2\mu(\varepsilon - \varepsilon_m \mathbf{I}) = 2\mu(\varepsilon_d).\end{aligned}$$

#### 4.2.2. Módulo de compresibilidad

También hemos obtenido en (4.4) una relación entre las tensiones normales medias y las deformaciones normales medias:

$$\sigma_m = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_m.$$

Puesto que  $\varepsilon_m = (1/3) \operatorname{tr}(\varepsilon) = (1/3) \operatorname{Div}(\mathbf{u})$ , podemos escribir:

$$\sigma_m = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3} \operatorname{Div}(\mathbf{u}).$$

Se define el **módulo de compresibilidad** del material como:

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Se verifica entonces

$$\sigma_m = K \operatorname{Div}(\mathbf{u}).$$

$K$  también se conoce como **módulo de compresión hidrostática**: relaciona los cambios relativos de volumen con la tensión normal media necesaria para alcanzar esa deformación. Obsérvese que si  $\nu \uparrow 1/2$ , entonces

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \rightarrow +\infty, K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \rightarrow +\infty.$$

En este caso la tensión normal media estará bien definida sólo si  $\operatorname{Div}(\mathbf{u}) = 0$ , o lo que es lo mismo, si el material es incompresible. Una interpretación física de esto lo veremos en las siguientes secciones.

#### 4.2.3. Interpretación física de los coeficientes de elasticidad

- **Módulo de Young y coeficiente de Poisson.** En el ensayo de tracción de la Figura 4.5 se considera un cilindro circular de sección recta  $(x_1^2 + x_2^2) \leq R^2$ ,  $0 \leq x_3 \leq L$ , que se supone sometido a fuerzas de tracción de densidad constante  $\sigma$  en las tapas,  $x_3 = 0, x_3 = L$ .

Se trata de un esfuerzo uniaxial en la dirección  $x_3$ . Si las fuerzas de volumen son despreciables, el tensor de Cauchy toma la forma:

$$(\sigma)_{(0/\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

siendo  $\sigma_{33} = \sigma$ . En efecto, este tensor verifica la conservación de momentos (al ser nulas las fuerzas de volumen) y también las condiciones de contorno. En las tapas  $(\sigma)\mathbf{n}$  debe ser igual a  $\sigma\mathbf{n}$ , lo que implica

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \text{ y } \sigma_{33} = \sigma.$$

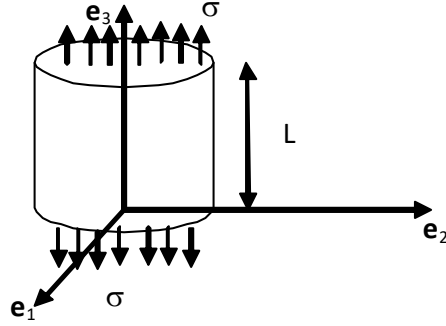


Figura 4.5: Experimento de tracción constante.

Además, la superficie lateral está libre de esfuerzos, por lo que  $(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , relación que puede escribirse como:

$$\frac{x_1}{R}\sigma_{i1} + \sigma_{i2}\frac{x_2}{R} = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \text{ tal que } (x_1^2 + x_2^2) = R^2.$$

Por tanto,

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0.$$

Si calculamos el tensor de deformación por la ley de Hooke, se obtiene:

$$(\boldsymbol{\varepsilon})_{(0/\vec{x}_1\vec{x}_2\vec{x}_3)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

donde:

- En la dirección  $\mathbf{e}_3$  hay una elongación relativa de valor  $\frac{\sigma}{E}$ :

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{\sigma}{E}.$$

De forma equivalente:

$$\sigma = E\varepsilon_{33}. \quad (4.6)$$

En consecuencia, **el módulo de Young representa el coeficiente de proporcionalidad entre la deformación en la dirección  $\mathbf{e}_3$  (es decir, entre la elongación relativa en la dirección  $\mathbf{e}_3$ ) y la tensión normal en la misma dirección**. Se puede caracterizar  $E$  como la pendiente de la curva tensión-deformación en tensión uniaxial (ver Figura 4.4). Podríamos pensar que  $E$  es una medida de la rigidez -stiffness- del sólido: a mayor valor de  $E$  mayor rigidez. Como puede deducirse fácilmente de la relación (4.6)  $E$  tiene dimensiones de tensión. Su valor es usualmente grande y, para satisfacer la segunda ley de la termodinámica,  $E$  debe ser estrictamente positivo.

- En las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  hay un acortamiento relativo de valor  $\frac{\nu}{E}\sigma$ . En efecto:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} = -\nu \varepsilon_{33}.$$

Para interpretar el coeficiente de Poisson, hay que observar que **si tenemos una elongación relativa o estiramiento en la dirección  $\mathbf{e}_3$ , debemos tener un acortamiento o encogimiento en toda dirección ortogonal a  $\mathbf{e}_3$ . La relación entre ambas deformaciones, en valor absoluto, es el coeficiente de Poisson.**

El coeficiente de Poisson es también una medida de la compresibilidad del sólido: si  $\nu \uparrow 0,5$  el sólido es incompresible (su volumen permanece constante independientemente de cómo se deforme); si  $\nu \downarrow 0$  entonces el estiramiento longitudinal -stretching- de un espécimen no causa contracción lateral.

El campo de desplazamientos asociado, definido salvo un desplazamiento rígido infinitesimal (del tipo (3.6)), sería:

$$\mathbf{u} = \frac{\sigma}{E} \begin{pmatrix} -\nu x_1 \\ -\nu x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow X(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (1 - \nu \frac{\sigma}{E}) x_1 \\ (1 - \nu \frac{\sigma}{E}) x_2 \\ (1 + \frac{\sigma}{E}) x_3 \end{pmatrix},$$

siendo  $X$  la deformación.

Puesto que el cuerpo es isótropo se puede reemplazar en este ejemplo la dirección de tracción  $\mathbf{e}_3$  por otra dirección.

En la siguiente tabla se muestran los órdenes de magnitud de los distintos parámetros físicos para tres materiales:

|                 | $E$<br>( $10^4 MPa$ ) | $\nu$ | $\lambda$<br>( $10^4 MPa$ ) | $\mu$<br>( $10^4 MPa$ ) | $K$<br>( $10^4 MPa$ ) |
|-----------------|-----------------------|-------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------|
| <b>Acero</b>    | 21                    | 0.285 | 10                          | 8                       | 16                    |
| <b>Aluminio</b> | 7                     | 0.34  | 5.6                         | 2.6                     | 7.3                   |
| <b>Caucho</b>   | 0.037                 | 0.485 | 0.4                         | 0.012                   | 0.41                  |

donde  $1MPa = 10^6 Pa = 10kg/cm^2 = 10^2 N/cm^2 = 10^2 N/10^{-4} m^2 = 10^6 N/m^2$ .

- **Módulo de cortadura o módulo de cizallamiento** -shear modulus-  $\mu$  o  $G$ . En alguna bibliografía el módulo de Lamé  $\mu$  se representa por  $G$  y también se conoce como módulo de cizallamiento o cortadura -*shear modulus o modulus of rigidity*-. Este módulo se expresa como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Si se efectúa un ensayo de cizallamiento en las direcciones  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , sabemos que el tensor de tensiones se escribe (ver Ejemplo 53):

$$(\boldsymbol{\sigma})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1 \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el tensor de deformación:

$$(\boldsymbol{\varepsilon})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1 \tilde{\mathbf{e}}_2 \tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}$ , o lo que es lo mismo,  $\sigma_{12} = \mu\gamma_{12}$ .

Entonces, **el módulo de cizallamiento  $\mu$  puede definirse en un punto como el coeficiente de proporcionalidad entre la tensión de cizallamiento en las direcciones  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , (esfuerzo en la dirección de la bisectriz, ver Subsección 2.8.3) y la desviación del ángulo recto entre las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  (ver Sección 3.1).** El módulo de cortadura cuantifica entonces la resistencia a preservar el volumen en deformaciones cortantes. Por esto, a  $\varepsilon_{12}$  se le llama **deformación de cizallamiento -shear strain-**; en consonancia a  $\sigma_{12}$  se le llama **tensión de cizallamiento -shearing stress-**. El mismo tratamiento se podría aplicar a las restantes componentes extradiagonales de ambos tensores.

- **Módulo de compresibilidad -bulk modulus-  $K$ .** Consideremos un experimento de compresión hidrostática distribuida uniformemente sobre su superficie correspondiente a un esfuerzo puramente normal:

$$(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} = -p\mathbf{n}, \text{ sobre } \partial\mathcal{B},$$

siendo  $p$  la presión ejercida sobre el material, constante. En ausencia de otras fuerzas aplicadas, el tensor de tensiones en todo punto del material es:

$$(\boldsymbol{\sigma})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1\tilde{\mathbf{e}}_2\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix},$$

con  $\sigma_m = -p$ . El tensor de deformación inducido es:

$$(\boldsymbol{\varepsilon})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1\tilde{\mathbf{e}}_2\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix},$$

donde  $\varepsilon_m = \sigma_m/(3K)$ . Por otra parte, la variación relativa de volumen es:

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \varepsilon_{ii} = 3\varepsilon_m \Rightarrow \sigma_m \simeq K \frac{\Delta V}{V}.$$

Recordemos que en el Capítulo 3 ya relacionamos estas variaciones relativas de volumen con el Jacobiano de la deformación:

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{Vol(P^X) - Vol(P)}{Vol(P)} = J - 1 \simeq Div(\mathbf{u}).$$

Por tanto, **el coeficiente de compresibilidad es el coeficiente de proporcionalidad entre la presión  $p$  y la variación relativa de volumen**, cuantificando la resistencia del sólido a los cambios de volumen.

#### 4.2.4. Relación entre los distintos parámetros elásticos

La siguiente tabla muestra todas las posibles combinaciones de los módulos elásticos para caracterizar un material elástico, lineal e isótropo.

|                | M. Lamé<br>( $\lambda$ )        | M. Cortad.<br>( $\mu$ )       | M. Young<br>( $E$ )                           | C. Poisson<br>( $\nu$ )          | M. Compr.<br>( $K$ )            |
|----------------|---------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| $\lambda, \mu$ |                                 |                               | $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}$    | $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\frac{(3\lambda+2\mu)}{3}$     |
| $\lambda, \nu$ |                                 | $\frac{\lambda(1-2\nu)}{2}$   | $\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{3(K-\lambda)}$ |                                  | $\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$   |
| $\lambda, K$   |                                 | $\frac{3(K-\lambda)}{2}$      | $\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$            | $\frac{\lambda}{3K-\lambda}$     |                                 |
| $\mu, E$       | $\frac{\mu(2\mu-E)}{E-3\mu}$    |                               |                                               | $\frac{E-2\mu}{2\mu}$            | $\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$       |
| $\mu, \nu$     | $\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$        |                               | $2\mu(1+\nu)$                                 |                                  | $\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ |
| $\mu, K$       | $\frac{3K-2\mu}{3}$             |                               | $\frac{9K\mu}{3K+\mu}$                        | $\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$      |                                 |
| $E, \nu$       | $\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ | $\frac{E}{2(1+\nu)}$          |                                               |                                  | $\frac{E}{3(1-2\nu)}$           |
| $E, K$         | $\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$         | $\frac{3KE}{9K-E}$            |                                               | $\frac{3K-E}{6K}$                |                                 |
| $\nu, K$       | $\frac{3K\nu}{(1+\nu)}$         | $\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$ | $3K(1-2\nu)$                                  |                                  |                                 |

Como puede observarse, hemos introducido 5 parámetros mecánicos característicos de cada material elástico lineal e isotrópico:  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $K$ . Sin embargo, sólo dos cualesquiera de ellos son suficientes para caracterizarlo (ver primera columna de la tabla anterior), pues los otros tres podrían deducirse utilizando las relaciones indicadas en la correspondiente fila de la tabla.

**Ejemplo 54** *Dos materiales típicos en construcción, como el hormigón y el acero, son considerados, con buena aproximación, materiales elásticos lineales, homogéneos e isotrópicos a temperatura ambiente. Sin embargo, la hipótesis de elasticidad lineal sólo es aceptable en condiciones donde los materiales no estén demasiado estresados. En cuanto se superan ciertos umbrales de tensión, de los cuales hablaremos en capítulos posteriores, el comportamiento del material pasa a ser no lineal o inelástico. Cuando las tensiones siguen creciendo, pueden alcanzarse condiciones críticas que una vez superadas impedirán a partir de ese momento considerar el cuerpo como un continuo deformable; en otras palabras, pueden aparecer fracturas y entonces producirse discontinuidades en la función desplazamiento. En la siguiente tabla se indican los valores de  $E$ ,  $\nu$  y  $\sigma_{\text{máx}}$  para los dos materiales mencionados, siendo  $\sigma_{\text{máx}}$  la **tensión normal máxima** -tensile normal stress- a partir del cual el material deja de ser lineal. En el caso del acero es el valor crítico a partir de la cual el material pasa a tener un comportamiento plástico, en este caso el valor crítico es el **umbral de plasticidad**,  $\sigma_y$  -yield stress-. En cambio, el hormigón se comporta como un **material frágil**: es elástico hasta que de repente cede o se fractura; más adelante, llamaremos a este concepto **módulo de ruptura**.*

|                          | $E$<br>( $10^4 \text{ MPa}$ ) | $\nu$ | $\sigma_{\text{máx}}$<br>( $\text{MPa}$ ) | $\sigma_{\text{máx}}/E$ |
|--------------------------|-------------------------------|-------|-------------------------------------------|-------------------------|
| <b>Acero (AISI 9260)</b> | 20                            | 0.29  | 440                                       | 0.0022                  |
| <b>Hormigón</b>          | 2.5                           | 0.15  | 3                                         | 0.00012                 |

El cociente  $\sigma_{\text{máx}}/E$  indica el orden de magnitud de la dilatación

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{E},$$

por debajo de la cual la idealización elástica lineal tiene un significado físico. Nótese que para los materiales incluidos en la tabla anterior este orden de mag-

nitid permanece entre  $10^{-3}$  y  $10^{-4}m$ . Las deformaciones que de hecho encontramos en elementos estructurales en construcción son en efecto muy pequeñas.

Por ejemplo, si trabajamos con una tracción o compresión en la dirección  $x_1$ , entonces  $|\varepsilon_{11}|$  debe ser a lo sumo de valor 0.0022 para el acero, lo que significa que si antes de la deformación se tenía un segmento OA de longitud unidad en la dirección del eje  $x_1$ , entonces el incremento de longitud sería:

$$\varepsilon_{11} \simeq 1 - |O'A'| = \pm 0,0022.$$

Por tanto, por cada metro de longitud tenemos una dilatación máxima de 2,2mm para que el acero pueda seguirse considerando elástico lineal. En el caso del hormigón, este valor disminuye hasta 0,12mm, superado ese valor el material fractura y la ley de Hooke no podría aplicarse.

### 4.3. Energía de deformación

Para deformar un bloque de un material es necesario hacer un trabajo sobre él o, en algunos casos, él puede hacer un trabajo sobre otro cuerpo. En **elasticidad lineal** se verifica:

- En un material elástico, el **trabajo** realizado durante la carga se almacena como una variable recuperable, llamada **energía de deformación** -strain energy-.
- Si dejamos de cargar sobre el bloque, éste hace trabajo sobre su entorno y cuando alcanza su configuración inicial deja de hacer trabajo.
- El trabajo realizado para deformar el bloque depende solamente de la deformación al final del ensayo, independientemente de la historia de la carga.

**Definición 55** Se define la **densidad de energía de deformación** de un sólido como el trabajo hecho por unidad de volumen para deformar el material desde la configuración de referencia, supuesta ésta libre de tensiones, al estado cargado y se define como:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

**Observación 56** La densidad de energía de deformación admite las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}) \\ &= \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}. \end{aligned}$$

**Observación 57** Obsérvese que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

En efecto, veamos, por ejemplo, la primera igualdad. Para ello, tengamos en cuenta:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ ; por lo que para todo tensor  $\boldsymbol{\tau}$ ,

$$\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\tau} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{\tau}] &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{\tau}] = \frac{1}{2} \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}[\boldsymbol{\tau}] \\ &= \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\tau} : \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) + (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\tau})) \\ &= \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\tau} : \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau})) = (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}), \end{aligned}$$

ya que:

$$(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\tau}) = \frac{1+\nu}{E}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}) - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) = (\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}).$$

#### 4.3.1. Trabajo externo e interno

Supongamos que se somete al sólido  $\mathcal{B}$  a un sistema de fuerzas externas  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{g}_0)$ , donde  $\mathbf{g}_0$  actúa sobre una parte  $\Gamma_N$  de su frontera, manteniendo encastrado el sólido sobre el resto de su frontera  $\Gamma_D$ . El correspondiente sistema de elasticidad es:

$$-\partial_j \sigma_{ij} = (b_0)_i, \text{ en } \mathcal{B}, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{ij} n_j = (g_0)_i \text{ sobre } \Gamma_N \subset \partial \mathcal{B}, \quad (4.8)$$

$$u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \subset \partial \mathcal{B}. \quad (4.9)$$

**Definición 58** El trabajo realizado por las fuerzas externas  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{g}_0)$  sobre un campo de vectores  $\mathbf{v}$  admisible o virtual, esto es, verificando  $v_i = 0$  sobre  $\Gamma_D$ , es:

$$T_e(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Al aplicar fuerzas sobre un sólido elástico se producen tensiones internas  $(\boldsymbol{\sigma})$ , deformaciones específicas  $(\boldsymbol{\varepsilon})$  y desplazamientos internos  $\mathbf{u}$ . Las fuerzas externas producen un **trabajo externo** sobre los desplazamientos,  $T_e(\mathbf{u})$ , trabajo que se emplea en deformar el sólido utilizándose para vencer los **rozamientos** de los vínculos externos e internos, producir **energía cinética** por los movimientos, y acumular **energía potencial** de deformación debida a las tensiones y deformaciones internas:

$$T_e(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} d\Gamma.$$

Obsérvese que las dimensiones de esta magnitud son Joules, o lo que es lo mismo  $Nm$ .

En general, en las estructuras civiles y para cargas de servicio se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Las fuerzas se aplican de forma paulatina de modo que los desplazamientos son muy lentos y **no se produce energía cinética** al no existir aceleraciones y velocidades significativas.
- **No existen rozamientos** en los vínculos externos y, por lo tanto, no se emplea ningún trabajo que, en caso contrario, se disiparía como calor o energía térmica.
- El cuerpo es perfectamente elástico y al no haber deformaciones plásticas **las deformaciones son reversibles**, no existiendo pérdidas de energía por rozamiento de vínculos internos.

Bajo estas premisas podemos decir que nuestro sistema es conservativo, de manera tal que el trabajo externo se utiliza para vencer la resistencia de los vínculos internos, representados por las tensiones internas. De este modo, al no existir un intercambio de trabajo y energía con el exterior se cumple:

$$T_e(\mathbf{u}) + T_i(\mathbf{u}) = 0. \quad (4.10)$$

#### 4.3.2. Principio de los trabajos virtuales

Consideremos de nuevo que  $\mathcal{B}$  se somete un sistema de fuerzas externas  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{g}_0)$ , donde  $\mathbf{g}_0$  actúa sobre una parte  $\Gamma_N$  de su frontera, manteniendo encastrado el sólido sobre el resto de su frontera  $\Gamma_D$ . De las ecuaciones de equilibrio, se deduce que cualquiera que sea el campo de vectores admisible  $\mathbf{v}$  debe verificarse:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathcal{B}} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV, \\
 &\Downarrow \\
 - \int_{\mathcal{B}} \partial_j \sigma_{ij} v_i dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV, \\
 &\Downarrow \\
 \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij} \partial_j v_i dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV, \\
 &\Downarrow \\
 \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

gracias a la fórmula de Green, y a tener en cuenta que, por ejemplo, para  $i = 1, j = 2$  e  $i = 2, j = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12} \partial_2 v_1 + \sigma_{21} \partial_1 v_2 &= \frac{1}{2} \overbrace{\sigma_{12} \partial_2 v_1} + \frac{1}{2} \overbrace{\sigma_{21} \partial_2 v_1} + \frac{1}{2} \overbrace{\sigma_{21} \partial_1 v_2} + \frac{1}{2} \overbrace{\sigma_{12} \partial_1 v_2} \\
 &= \sigma_{12} \varepsilon_{12}(\mathbf{v}) + \sigma_{21} \varepsilon_{21}(\mathbf{v}).
 \end{aligned}$$

**Definición 59** La igualdad variacional (4.11) se conoce como **principio de los trabajos virtuales** en la configuración de referencia:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{v} d\Gamma,$$

que debe verificarse para todo campo de desplazamientos admisibles  $\mathbf{v}$ , esto es, verificando  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_D$ .

En particular, el desplazamiento solución es un desplazamiento admisible, y por tanto debe verificar el principio de los trabajos virtuales:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (4.12)$$

que es equivalente a la ecuación de conservación de los trabajos externo e interno (4.10).

### 4.3.3. Funcional de energía

De la Definición 58, y de las relaciones (4.10), y (4.12), se deduce que el **trabajo realizado por las fuerzas internas** sobre el campo de desplazamientos es:

$$\begin{aligned} T_i(\mathbf{u}) &= - \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV = - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV \\ &= -2 \int_{\mathcal{B}} U(\mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

Podemos decir que el trabajo de la fuerza externa se gasta en deformar el sólido (trabajo interno), el cual acumula el trabajo en forma de una **energía elástica potencial de deformación** ( $U$ ). Si retiramos la fuerza externa el sólido regresará a su posición original y las fuerzas internas producirán un trabajo positivo producto de la energía acumulada. Obsérvese que  $\mathbf{u}$  debe ser un punto crítico del funcional de energía:

$$I(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}} U(\mathbf{u}) dV - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} d\Gamma,$$

esto es:

$$I'(\mathbf{u})[\mathbf{v}] = 0,$$

para toda dirección  $\mathbf{v}$  admisible. El término:

$$T_i(\mathbf{u}) = -2 \int_{\mathcal{B}} U(\mathbf{u}) dV$$

representa el **trabajo interno** y el término

$$I_i(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}} U(\mathbf{u}) dV$$

la **energía potencial de deformación**.

El criterio que adoptaremos en este texto es que el trabajo externo que realizan las fuerzas exteriores en las deformaciones que ellas mismas producen es positivo, y se gasta en vencer la resistencia de las tensiones internas, lo que produce un trabajo interno negativo, trabajo que se acumula como energía potencial

de deformación,  $U$ , que puede ser recuperada al eliminar las cargas externas y volver el sólido a su posición original sin deformación. Así, el principio de los trabajos virtuales se resume en la frase: **“En un sólido elástico en equilibrio bajo un sistema de fuerzas, el trabajo de dichas fuerzas a lo largo de un desplazamiento virtual es nulo”**.

**Observación 60** *En el caso de sólidos rígidos infinitesimales, al ser nulo el tensor de deformación, el trabajo interno es nulo. En este caso, el principio de los trabajos virtuales se enuncia como: “Si damos una traslación virtual a un sólido rígido en equilibrio, la suma de los trabajos del sistema de fuerzas externas a lo largo de los desplazamientos virtuales es cero”.*

**Observación 61** *Consideremos el problema (4.7) - (4.9) y modifiquemos su condición Dirichlet de forma que pasemos a tener:*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sobre } \Gamma_D. \quad (4.13)$$

En este caso, el principio de los trabajos virtuales para el problema (4.7), (4.8), (4.13) sigue siendo el dado por la ecuación (4.11). Sin embargo, ahora  $\mathbf{u}$  no puede jugar el papel de función test admisible ya que no es nula sobre  $\Gamma_D$ . Si  $\mathbf{u}_D$  es suficientemente regular, existe una función  $\hat{\mathbf{u}}_D$  bien definida sobre todo  $\mathcal{B}$  tal que  $\hat{\mathbf{u}}_D = \mathbf{u}_D$  sobre  $\Gamma_D$ . Por tanto, la función  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_D$  sí puede considerarse una función test admisible, verificándose entonces:

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{u}}) dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma,$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{u}}_D) dV \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_D dV - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_D d\Gamma. \end{aligned}$$

## 4.4. Ecuación de Lamé-Navier

Consideremos que el sólido  $\mathcal{B}$  se somete un sistema de fuerzas externas  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{g}_0)$ , donde  $\mathbf{g}_0$  actúa sobre una parte  $\Gamma_N$  de su frontera, manteniendo encastrado el sólido sobre el resto de su frontera  $\Gamma_D$ . Suponiendo que está en equilibrio estático y que el material es homogéneo e isotrópico, en el marco de la elasticidad lineal debe verificarse:

1. La ecuación de equilibrio:

$$-Div(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b}_0 \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + (b_0)_i = 0. \quad (4.14)$$

2. Las relaciones deformación-desplazamiento:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (4.15)$$

3. La ley de Hooke que indica la relación tensión-deformación:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \lambda(x) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(x)) \mathbf{I} + 2\mu(x) \boldsymbol{\varepsilon}(x). \quad (4.16)$$

Las incógnitas del problema son: 6 componentes del tensor de deformación, 6 componentes del tensor de tensiones y 3 componentes del vector desplazamiento, es decir, en total 15 incógnitas. Puesto que también tenemos 15 ecuaciones, el problema, si está correctamente planteado, puede tener una solución verificando las condiciones de contorno.

Ensayaremos el cálculo de la solución del sistema buscando directamente el campo de desplazamientos en la configuración de referencia, suponiendo que el desplazamiento es de clase  $C^2$ . Una vez calculado el vector de desplazamientos, las tensiones se calculan mediante simples derivaciones parciales utilizando las fórmulas (4.15) y (4.16). Por tanto, en este método de resolución, llamado método directo, tan sólo nos centramos en las ecuaciones de equilibrio, que debemos escribir en términos del desplazamiento utilizando las relaciones (4.15) y (4.16). De estas relaciones se deduce que

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{Div} \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Esto permite escribir la ley de equilibrio (4.14) en términos del desplazamiento como:

$$\lambda \frac{\partial \text{Div} \mathbf{u}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + (b_0)_i = 0,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\lambda \frac{\partial \text{Div} \mathbf{u}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left[ \Delta u_i + \frac{\partial \text{Div} \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] + (b_0)_i = 0.$$

En notación vectorial:

$$\boxed{(\lambda + \mu) \nabla \text{Div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.} \quad (4.17)$$

Esta ecuación se llama **ecuación de equilibrio de Lamé-Navier, ecuación de Lamé o ecuación de Navier**.

Si se tiene en cuenta la relación:

$$\lambda + \mu = \mu \left( 1 + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \right) = \frac{\mu}{1 - 2\nu},$$

y que  $\mu$  también se identifica con el módulo de cortadura  $G$ , entonces la ecuación (4.17) puede escribirse como:

$$\nabla \text{Div} \mathbf{u} + (1 - 2\nu) \Delta \mathbf{u} + \frac{1 - 2\nu}{G} \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.$$

Teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \text{Div} \mathbf{u} - \text{Rot} \text{ Rot} \mathbf{u},$$

la ecuación de Lamé-Navier (4.17) se puede escribir como:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \text{Div} \mathbf{u} - \mu \text{Rot} \text{ Rot} \mathbf{u} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

**Observación 62** Si el material no es homogéneo, los módulos de Lamé no son constantes, sino que dependen del punto  $x$ . En este caso, la ecuación de Lamé-Navier toma la forma:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \text{Div} \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \nabla \mu + \text{Div} \mathbf{u} \nabla \lambda + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.$$

## 4.5. Ecuación de Beltrami-Michell

El método inverso intenta resolver el problema en tensiones sin conocer *a priori* el campo de desplazamientos. En este método se necesita utilizar, en primer lugar, las ecuaciones de equilibrio en la forma (4.14). Sin embargo, estas ecuaciones sabemos que no son suficientes, al ser sólo 3 ecuaciones y tener 6 incógnitas. Por ello, habrá que utilizar las ecuaciones de compatibilidad estudiadas en la Sección 3.3.5 para completar adecuadamente las ecuaciones. Una vez calculadas las tensiones, las correspondientes componentes del tensor de deformación se obtienen a partir de la relación (4.2). Por último, el campo de desplazamientos se calcula a partir del tensor de deformación, como lo hemos indicado en la Sección 3.3.5.

Consideremos las ecuaciones de compatibilidad (3.13) escritas en términos del tensor de deformación:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Fijemos los índices  $j$  y  $l$ , consideremos  $i = k = 1, 2, 3$  y sumemos los resultados:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_l} + \Delta \varepsilon_{lj} - \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0. \quad (4.19)$$

Para expresar estas ecuaciones de compatibilidad en términos del tensor de tensiones, debemos tener en cuenta la relación (4.5):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I},$$

obteniendo, por tanto, de (4.19):

$$\begin{aligned} & (1+\nu) \Delta \sigma_{lj} - \nu \Delta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \delta_{lj} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_l} \\ & - (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \sigma_{il}}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \nu \left( \delta_{ij} \frac{\partial^2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_i \partial x_l} + \delta_{il} \frac{\partial^2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Puesto que debemos sumar en el índice  $i$  podemos escribir las ecuaciones de compatibilidad en términos de  $(\boldsymbol{\sigma})$  en la forma:

$$(1+\nu) \Delta \sigma_{lj} - \nu \Delta \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \delta_{lj} + \frac{\partial^2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_l} - (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \sigma_{il}}{\partial x_j \partial x_i} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Tenemos así 6 ecuaciones, una para cada  $\sigma_{lj}$ .

Consideremos, a continuación, la ecuación de equilibrio:

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.$$

Considerando las componentes  $l, j$  de su tensor de deformación, podemos escribir:

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon_{lj}(\text{Div} \boldsymbol{\sigma}) + 2\varepsilon_{lj}(\mathbf{b}_0) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \sigma_{li}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial (b_0)_l}{\partial x_j} + \frac{\partial (b_0)_j}{\partial x_l} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \sigma_{li}}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 \sigma_{ji}}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial (b_0)_l}{\partial x_j} + \frac{\partial (b_0)_j}{\partial x_l} = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando esta última ecuación por  $(1 + \nu)$  y substituyendo los dos primeros sumandos por la expresión equivalente obtenida de la igualdad (4.21), se obtiene:

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{lj} - \nu\Delta tr(\boldsymbol{\sigma})\delta_{lj} + \frac{\partial^2 tr(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_l} + (1 + \nu)\left(\frac{\partial(b_0)_l}{\partial x_j} + \frac{\partial(b_0)_j}{\partial x_l}\right) = 0. \quad (4.22)$$

En particular, tomando  $l = j$  y sumando en  $j = 1, 2, 3$  se deduce:

$$\boxed{\Delta tr(\boldsymbol{\sigma}) = -\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)Div(\mathbf{b}_0).} \quad (4.23)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **primera ecuación de Beltrami-Michell**. Substituyendo esta expresión en (4.22), resulta:

$$\boxed{\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 tr(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}Div(\mathbf{b}_0) + \left(\frac{\partial(b_0)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(b_0)_j}{\partial x_i}\right) = 0,} \quad (4.24)$$

ecuación que debe verificarse para cada  $ij$ . (4.24) es realmente un sistema de 6 ecuaciones puesto que existe simetría en  $i$  y  $j$ . Se tienen así 6 ecuaciones que se conocen como **ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell**<sup>1</sup>.

Recordemos que para la obtención de esta ecuación hemos hecho intervenir no sólo las ecuaciones de equilibrio sino también las ecuaciones de compatibilidad. Vemos que, planteado en términos de las tensiones, el problema podría parecer inconsistente: tenemos 6 ecuaciones derivadas de las condiciones de compatibilidad y 3 ecuaciones de equilibrio, mientras que sólo tenemos 6 incógnitas: las 6 componentes de la tensión. Sin embargo, no vamos a tener inconsistencia puesto que para estas 6 incógnitas sólo hay 3 condiciones de contorno (derivadas de la prescripción de  $\boldsymbol{\sigma}_n$  sobre la frontera). Puede demostrarse que basta con que tres de las ecuaciones de compatibilidad se verifiquen sobre la frontera. Por ello, el problema cambia a una forma sensiblemente distinta: un sistema de 6 ecuaciones en derivadas parciales con 6 incógnitas y 6 condiciones de contorno.

#### 4.5.1. Fuerzas de volumen constantes

En el caso de fuerzas de volumen constantes, como por ejemplo las fuerzas debidas a la gravedad o, en el caso más general, las fuerzas derivadas de un potencial armónico<sup>2</sup> (en cuyo caso  $Div(\mathbf{b}_0) = 0$ ), la relación (4.23) se reduce a:

$$\Delta tr(\boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

y, en consecuencia, tendremos:

$$\Delta tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{3K}\Delta tr(\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Por otra parte, aplicando de nuevo el operador  $\Delta$  a la ecuación (4.24) se obtiene:

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0.$$

<sup>1</sup>Ecuaciones obtenidas por Beltrami en el año 1892 para fuerzas de volumen nulas y generalizadas en el año 1900 por Michell para fuerzas de volumen arbitrarias.

<sup>2</sup>Si  $\mathbf{b}_0$  deriva de un potencial armónico  $\mathbf{b}_0 = \nabla h$ , con  $\Delta h = 0$ . Esto implica que:

$$\Delta(\mathbf{b}_0) = \Delta(\nabla h) = \nabla(\Delta h) = \mathbf{0}.$$

Estas fuerzas derivando de un potencial armónico también se conocen como de campos centrales.

Análogamente, si aplicamos el operador  $\Delta$  a la ecuación de Lamé-Navier y tenemos en cuenta que el Laplaciano conmuta con el gradiente se tiene:

$$\begin{aligned} & \boxed{(\lambda + \mu)\Delta(\nabla \text{Div} \mathbf{u}) + \mu\Delta^2 \mathbf{u} + \Delta(\mathbf{b}_0) = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda + \mu)\nabla(\Delta \text{Div} \mathbf{u}) + \mu\Delta^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}.} \\ \Rightarrow & \boxed{(\lambda + \mu)\nabla(\Delta \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))) + \mu\Delta^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}.} \Rightarrow \Delta\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A partir de estos resultados se puede demostrar también que la deformación  $\varepsilon_{ij}$  debe satisfacer la ecuación:

$$\Delta\Delta\varepsilon_{ij} = 0.$$

**Teorema 63** *En el caso en que las fuerzas de volumen sean constantes, o deriven de un potencial armónico, o sean nulas, las componentes del estado elástico (componentes del vector desplazamiento, del tensor de tensiones y del tensor de deformación) son funciones biarmónicas. Además, los invariantes  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  y  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  son funciones armónicas. ■*

## 4.6. Método inverso: Solución por la función de Airy

El método inverso permite realizar un cambio de función incógnita, de forma que las ecuaciones de equilibrio (4.14) se verifiquen de forma automática para la tensión obtenida. A continuación, impondremos a la deformación, derivada de esta tensión a través de la ley de Hooke, las condiciones de compatibilidad que garanticen la existencia de un campo de desplazamientos asociado.

Retomemos las ecuaciones de equilibrio. Sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0)$  un tensor solución particular de las ecuaciones de equilibrio correspondientes a las fuerzas de volumen  $\mathbf{b}_0$ , es decir, verificando:

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.$$

La solución general de las ecuaciones de equilibrio se escribirá entonces en virtud de su linealidad, como:  $(\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\sigma}_0) + (\boldsymbol{\sigma}_1)$ , siendo  $(\boldsymbol{\sigma}_1)$  un tensor simétrico solución de

$$\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}_1) = \mathbf{0}.$$

Para que esto sea cierto es suficiente que se verifique:

$$(\boldsymbol{\sigma}_1) = \text{Rot} \mathbf{P},$$

donde  $(\mathbf{P})$  se debe elegir de forma que su rotacional sea simétrico.

**Observación 64** Si  $(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$  se define su rotacional como el tensor:

$$\begin{aligned} \text{Rot} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} \text{Rot} P_1 \\ \text{Rot} P_2 \\ \text{Rot} P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} & \frac{\partial P_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1} & \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_{11}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial P_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial P_{22}}{\partial x_3} & \frac{\partial P_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial P_{23}}{\partial x_1} & \frac{\partial P_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial P_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial P_{32}}{\partial x_3} & \frac{\partial P_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial P_{33}}{\partial x_1} & \frac{\partial P_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_{31}}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para que el rotacional de  $(\mathbf{P})$  sea simétrico debe verificarse:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{11}}{\partial x_3} - \frac{\partial P_{13}}{\partial x_1} &= \frac{\partial P_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial P_{22}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_{11}}{\partial x_2} &= \frac{\partial P_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial P_{32}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} &= \frac{\partial P_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial P_{33}}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

Otra forma de escribir estas relaciones es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P})}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{32}}{\partial x_3} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P})}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P})}{\partial x_1} &= 0,\end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{P})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ y suma en } j.$$

Teniendo en cuenta la definición de divergencia de un tensor ( $\text{Div} \mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij} \mathbf{e}_i$ ), se puede escribir:

$$\text{Div} \mathbf{P}^T - \nabla(\text{tr}(\mathbf{P})) = \mathbf{0}.$$

Si elegimos  $(\mathbf{P}) = (\text{Rot} \Phi)^T$  el primer sumando de la expresión anterior se anula, y sólo queda verificar:

$$\nabla(\text{tr}((\text{Rot} \Phi)^T)) = \nabla(\text{tr}(\text{Rot} \Phi)) = \mathbf{0},$$

es decir, en coordenadas cartesianas y proyectando sobre la dirección  $x_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x_2} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para que esta relación se verifique de forma automática, es suficiente elegir:

$$\Phi_{21} = \Phi_{12}, \Phi_{23} = \Phi_{32}, \Phi_{31} = \Phi_{13},$$

es decir, basta con elegir el tensor  $(\Phi)$  simétrico.

En consecuencia, la ecuación de equilibrio homogénea se verificará de forma automática eligiendo:

$$\boxed{(\boldsymbol{\sigma}_1) = \text{Rot}((\text{Rot} \Phi)^T)} \quad (4.25)$$

siendo  $(\Phi)$  un tensor simétrico llamado **tensor de funciones de tensiones**.

En el caso de coordenadas cartesianas ortonormales tendremos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\
 \sigma_{12} &= - \left( \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} \right) \right), \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\
 \sigma_{13} &= - \left( \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} \right) \right), \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 \sigma_{23} &= - \left( \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

#### 4.6.1. Función de tensiones de Maxwell

Tomemos el tensor  $(\Phi)$  en la forma diagonal:

$$(\Phi)_{(0|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$Rot \Phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_3} & -\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix},$$

y, por tanto, las componentes del tensor de tensiones se expresan como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_2^2}, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_3^2}, \sigma_{13} = -\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_1^2}, \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}.
 \end{aligned}$$

Las funciones  $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}$  se llaman **funciones de tensiones de Maxwell**.

#### 4.6.2. Función de Airy

Un caso muy interesante que trataremos es cuando el tensor  $(\Phi)$  toma la forma:

$$(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

aquí las componentes del tensor de tensiones en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 \sigma_{23} &= \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Observemos que esta función de tensiones  $A$  permitirá resolver problemas en los que las tensiones sean planas. Esta función  $A$  se llama **función de Airy**.

## 4.7. Boletín 4

**Ejercicio 65** ♣ En la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) se encuentran para el Aluminio los siguientes datos:

*Yield Strength, 400MPa*

*Tensile Strength, Ultimate 455MPa*

*Modulus of Elasticity 68,0GPa*

*Poissons Ratio 0,420*

*Shear Modulus 25,0GPa*

i) Deducir el orden máximo de los desplazamientos en el régimen elástico lineal para el aluminio.

ii) Calcular los parámetros de Lamé en el SI a partir los datos proporcionados.

**Ejercicio 66** Utilizar el principio de los trabajos virtuales para escribir

$$\int_{\mathcal{B}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV$$

en notación vectorial en términos de la divergencia del tensor de tensiones y del vector de esfuerzos sobre la frontera.

**Ejercicio 67** ♣ Se considera un material elástico lineal, homogéneo e isótropo, con módulo de Young  $E$ , módulo de cortadura  $G$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , sometido a la tensión

$$\sigma = \rho_0 g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Identifica entre los siguientes el tensor de deformación asociado:

$$\begin{aligned} & i) \varepsilon(x) = \frac{\rho_0 g x_3}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad ii) \varepsilon(x) = \rho_0 g x_3 \mathbf{I}; \quad iii) \varepsilon(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ & iv) \varepsilon(x) = \frac{\rho_0 g x_3}{2G(1+\nu)} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 68** ♣ Considerar la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

y cuyo material verifica la ley de Hooke. Considerar el campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, y^2, z^2)^T.$$

- i) Calcular el tensor de rotación.
- ii) Calcular el ángulo de cizallamiento o cortadura en cada punto del sólido en las direcciones  $yz$ .
- iii) Calcular la elongación en la dirección de la bisectriz del octante  $yz$  positivo en el punto  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y en el punto  $(0, 1, 1)$ . Relacionar las elongaciones obtenidas con la variación relativa de longitud entre los puntos deformados y los de partida.
- iv) Calcular las fuerzas de superficie aplicadas sobre la cara lateral del cilindro correspondientes al desplazamiento  $\mathbf{u}$ . Indicar un punto donde el esfuerzo sea a compresión y otro donde sea a tracción.
- v) Estudiar si existe fricción sobre la cara lateral.

**Ejercicio 69** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  un sólido cuya configuración de referencia se corresponde con el cubo unidad  $C$ :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se supone que el sólido se comporta como un material elástico, homogéneo e isótropo y que sometido a la acción de un campo de fuerzas aplicadas se ha medido en cada punto el desplazamiento:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (xz, xy, yz)^T. \quad (4.27)$$

- i) Calcular el tensor de deformación.
- ii) Calcular el tensor de Green-Saint Venant y relacionarlo con el tensor de deformación.
- iii) Calcular el tensor de Cauchy-Green por la derecha. Utilizar su expresión para calcular los cambios relativos de longitud de un segmento unidad, que antes de la deformación se encuentra en el eje  $x$ . Comparar el valor obtenido con su correspondiente aproximación utilizando el tensor de deformación.
- iv) A partir de la ley de Hooke obtener el tensor de tensiones asociado.
- v) Obtener la densidad de fuerzas de volumen aplicadas al sólido.
- vi) Calcular el vector de esfuerzos en la cara  $x = 1$ .
- vii) Calcular el esfuerzo normal y el vector de esfuerzos de cizallamiento en la cara  $x = 1$ . Indicar sobre esta cara si los esfuerzos son de tracción o de compresión. Indicar si la dirección normal es una dirección principal de esfuerzos.
- viii) Escribir la ecuación de equilibrio de Lamé-Navier para las fuerzas calculadas en el apartado v).
- ix) Verificar que el campo de desplazamientos dado en (4.27) es solución de la ecuación de Lamé-Navier.

- x) Escribir la ecuación de Beltrami-Michell para las fuerzas calculadas en el apartado v).
- xi) Verificar que el campo de tensiones calculado en iv) es solución de la ecuación de Beltrami-Michell.
- xii) Descomponer el tensor de tensiones como suma de cuatro en la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\sigma}_1) + (\boldsymbol{\sigma}_2) + (\boldsymbol{\sigma}_3) + (\boldsymbol{\sigma}_4),$$

donde:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_1) &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{\sigma}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\boldsymbol{\sigma}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{\sigma}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comprobar si para cada  $(\boldsymbol{\sigma}_i)$  existe un campo de desplazamientos asociado a través de la ley de Hooke.

- xiii) Comprobar que  $(\boldsymbol{\sigma}_3)$  representa un cizallamiento en dos direcciones ortogonales. Calcula las tensiones principales asociadas. ¿En qué dirección  $(\boldsymbol{\sigma}_3)$  representa un esfuerzo uniaxial?

**Ejercicio 70** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  un sólido cuya configuración de referencia se corresponde con el cubo unidad  $C$ :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se supone que el sólido se comporta como un material elástico, homogéneo e isótropo y que sometido a la acción de un campo de fuerzas aplicadas se ha medido en cada punto el tensor de deformación:

$$\varepsilon(\mathbf{u})(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

- i) Calcular los campos de desplazamientos asociados. Determinar el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  tal que:

$$\mathbf{u}(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(0, 0, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(1, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

- ii) Calcular la deformación asociada al campo  $\mathbf{u}$  deducido en i). Representar gráficamente la configuración deformada indicando los ejes coordenados y los límites del sólido deformado sobre éstos.

- iii) A partir de la ley de Hooke obtener el tensor de tensiones asociado. Considerar  $\lambda = 10^3 \text{ MPa}$  y  $\mu = 10^2 \text{ MPa}$  y deducir el valor de la tensión en el sistema internacional  $\text{N/m}^2$ . ¿Sabrías indicar las unidades correspondientes al tensor de deformación?
- iv) Obtener las fuerzas de volumen necesarias, las de superficie sobre  $x_3 = 0$  y las condiciones Dirichlet sobre el resto de las fronteras para que  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  sea la solución relativa al equilibrio de fuerzas. ¿Sabrías indicar las unidades de las fuerzas en el sistema internacional?
- v) Calcular el esfuerzo normal y el vector de esfuerzos de cizallamiento en la cara  $x_3 = 1$ . Indicar sobre esta cara si los esfuerzos son de tracción o de compresión. Indicar si la dirección normal es una dirección principal de esfuerzos.
- vi) Escribir la ecuación de equilibrio de Lamé-Navier para las fuerzas calculadas en el apartado iv).
- vii) Verificar que el campo de desplazamientos calculado en i) es solución de la ecuación de Lamé-Navier.
- viii) Escribir la ecuación de Beltrami-Michell para las fuerzas calculadas en el apartado iv).
- ix) Verificar que el campo de tensiones calculado en iii) es solución de la ecuación de Beltrami-Michell.

**Ejercicio 71** ♣ Se considera la viga sólida cuya configuración de referencia es (en el SI):

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\},$$

siendo  $a[m]$  una constante positiva dada y  $b = 2a$ . Sean  $\Gamma^+ = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 10\}$  y  $\Gamma^- = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\}$  las tapas superior e inferior del cilindro respectivamente y sea  $\Gamma_L$  su superficie lateral. Se supone que el sólido está formado por un material elástico con coeficientes:

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \nu = 0,3$$

- i) Sabiendo que

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)) = \frac{1 + \nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) \mathbf{I} \quad (4.29)$$

Obtener el valor de la tensión en función del tensor de deformación indicando sus unidades.

- ii) Calcular los módulos de Lamé, de compresibilidad y cortadura del material. Indicar sus unidades.
- iii) Tomar sobre la viga un test de cizallamiento en las direcciones  $yz$  distribuido uniformemente de intensidad  $\sigma$ . Escribir el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones, el ángulo de cizallamiento y el campo de desplazamientos asociado.

- iv) Representar gráficamente la deformación obtenida en el apartado anterior sobre una sección transversal del cilindro.
- v) Calcular la desviación respecto del ángulo recto para dos segmentos que antes de la deformación formasen un ángulo recto en el plano  $yz$ .
- vi) Calcular la elongación relativa de un segmento que se encuentra en el eje  $z$  antes de la deformación?
- vii) Calcular el vector de rotación.
- viii) Usar COMSOL para resolver el problema 3D correspondiente al modelo considerado en iii) y iv), para el caso particular  $\sigma = 1.e8[N/m^2]$ , con fuerzas de superficie aplicadas sobre su frontera lateral,  $\Gamma_L$ , y sobre la base,  $\Gamma^-$ . Calcular el error máximo del primer valor principal del tensor de tensiones cuando se compara con el calculado analíticamente. Calcular la norma  $L^2(\Omega)$  del error.
- ix) Calcular el máximo de la tensión equivalente de Von Mises y de las tensiones principales. Sabiendo que el *yield stress* es  $\sigma_y = 7.5e8 N/m^2$ , calcular el coeficiente de seguridad de esta componente estructural.
- x) Calcular la fuerza total ejercida sobre cada frontera por las fuerzas aplicadas. Comparar las obtenidas numérica y analíticamente.
- xi) Representar la deformación y la tensión equivalente de Von Mises sobre el plano transversal correspondiente a  $x = 5$ .

**Ejercicio 72** En la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) se encuentran para el Aluminio los siguientes datos:

*Density* 2,6989g/cc  
*Modulus of Elasticity* 68,0GPa  
*Poissons Ratio* 0,420  
*Shear Modulus* 25,0GPa  
*Tensile Strength, Yield* 200MPa

- i) Para cada uno de los datos explicar brevemente el concepto al que hace referencia.
- ii) Expresar todos los datos en el sistema internacional de unidades.
- iii) Deducir el orden máximo de los desplazamientos en el régimen elástico lineal para el aluminio.

**Ejercicio 73** Consultar la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y encontrar para la plata, en el sistema internacional de unidades, su densidad, el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y la máxima tensión normal admitida. A partir de ellos deducir el valor de los módulos de Lamé  $\mu$ ,  $\lambda$  y del módulo de compresibilidad,  $K$ . Indicar también el orden máximo de los desplazamientos en el régimen elástico lineal.

## Capítulo 5

# Problemas planos en elasticidad lineal

En este capítulo nos centraremos en el estudio de problemas elásticos tridimensionales sometidos a tensiones planas o a cargas que conducen a deformaciones en un plano.

Un problema típico de elasticidad plana puede verse en la siguiente figura en la que se muestra un plano de corte sobre el sólido en  $x_3 = cte$  y cómo las cargas son también planas:

En estos casos, el problema tridimensional se puede resolver o aproximar utilizando un problema bidimensional planteado sobre el plano.

### 5.1. Definición de problemas de elasticidad plana

En los problemas de elasticidad plana se deben verificar al menos dos condiciones:

**Condición 74 (Sobre la geometría)** *Consideremos un sistema ortonormal de referencia ( $O/\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) en el espacio y suponemos que el sólido, de material*

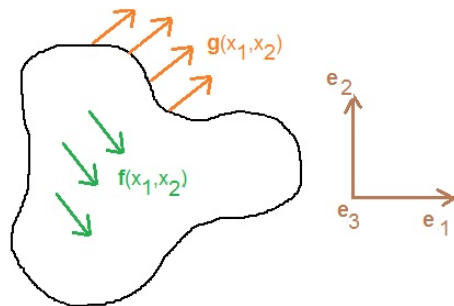


Figura 5.1: Esquema de cargas admisibles en un problema plano sobre  $x_3 = cte$ .

homogéneo e isótropo, ocupa un **dominio cilíndrico**  $\mathcal{B}$  definido por:

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3); (x_1, x_2) \in \bar{\omega}, |x_3| \leq h\}.$$

De este modo, la sección transversal de  $\mathcal{B}$  es  $\bar{\omega}$ , y  $\mathcal{B} = \bar{\omega} \times [-h, h]$ ,  $h > 0$ .

Denotemos por  $\Gamma_L$  la superficie lateral del cilindro, por  $\Gamma_D$  la porción de  $\Gamma_L$  donde el desplazamiento es conocido y por  $\Gamma_N$  la porción donde se aplican las cargas. Denotaremos por  $\Gamma^\pm$  las tapas superior ( $x_3 = h$ ) e inferior ( $x_3 = -h$ ). Por último, se denotará por  $\gamma_D = \Gamma_D \cap \partial\omega$ , y  $\gamma_N = \Gamma_N \cap \partial\omega$ .

**Condición 75 (Sobre las cargas aplicadas)** *Se imponen dos condiciones:*

1. *Supondremos que  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  son complementarios e independientes de  $x_3$ , es decir,  $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N$  se compone, a lo sumo de segmentos de recta de longitud  $2h$  y paralelos al eje  $0x_3$ .*
2. *La densidad de fuerzas de volumen  $\mathbf{f}$  en  $\mathcal{B}$ , los desplazamientos impuestos sobre  $\Gamma_D$ , y las fuerzas aplicadas  $\mathbf{g}$  sobre  $\Gamma_N$  se suponen independientes de  $x_3$  y paralelas al plano  $x_1, x_2$ .*

**Observación 76** *En consecuencia, la restricción sobre las cargas implica que  $f_3 = g_3 = 0$ ,  $f_\alpha = f_\alpha(x_1, x_2)$ ,  $g_\alpha = g_\alpha(x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(x_1, x_2)$  y  $(\mathbf{u}_D)_3 = 0$  (ver Figura 5.1).*

El **problema plano de la elasticidad estática** sobre el plano  $(x_1, x_2)$  consiste en la búsqueda de un estado elástico  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  correspondiente a las fuerzas de volumen  $\mathbf{f}$  en  $\mathcal{B}$  y verificando las condiciones de contorno de uno de los dos problemas siguientes:

■ **Problema plano 1:**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \text{ sobre } \Gamma_D, \mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(x_1, x_2), \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma_N, \mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2), \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma^\pm. \end{aligned}$$

Obsérvese que la última condición es equivalente a exigir  $\sigma_{i3} = 0$  sobre  $x_3 = \pm h$ .

■ **Problema plano 2:**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \text{ sobre } \Gamma_D, \mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(x_1, x_2), \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma_N, \mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2), \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} &= 0 \text{ sobre } \Gamma^\pm. \end{aligned}$$

En el problema plano 2, la condición de contorno sobre las tapas es equivalente a:

$$u_3 = 0 \text{ sobre } x_3 = \pm h.$$

### 5.1.1. Sistema de ecuaciones de problemas de elasticidad plana

A *priori*, consideramos el tensor de tensiones en su forma general y dependiente de las coordenadas  $x_1, x_2$  y  $x_3$ ; considerando la misma dependencia para el vector desplazamiento. Teniendo en cuenta las hipótesis realizadas para definir un estado elástico plano, los problemas planos 1 y 2 se pueden escribir en la forma siguiente:

- Las **ecuaciones de equilibrio** de ambos basta con verificarlas en el dominio bidimensional  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\alpha j}}{\partial x_j} + f_\alpha &= 0 \text{ en } \omega, \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} &= 0 \text{ en } \omega.\end{aligned}\tag{5.1}$$

- Análogamente, las **condiciones de contorno sobre la superficie lateral**  $\Gamma_L$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \text{ sobre } \Gamma_D, \mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(x_1, x_2), (u_3 = 0), \\ \mathbf{g} &\text{ sobre } \Gamma_N, \mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2) (\sigma_{3\alpha} n_\alpha = 0),\end{aligned}\tag{5.2}$$

gracias a la condición sobre las cargas basta con escribirlas sobre  $\Gamma_L \cap \partial\omega$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \text{ sobre } \gamma_D, \mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(x_1, x_2), (u_3 = 0), \\ \mathbf{g} &\text{ sobre } \gamma_N, \mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2) (\sigma_{3\alpha} n_\alpha = 0).\end{aligned}\tag{5.3}$$

- Las **condiciones de contorno sobre las tapas** son distintas para cada uno de los problemas:

$$\begin{aligned}\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h) &= 0 \text{ para el Problema plano 1.} \\ u_3(x_1, x_2, \pm h) &= 0 \text{ para el Problema plano 2.}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Tal y como está formulado, este problema es aún tridimensional. En lo que sigue intentaremos analizar cómo encontrar sus soluciones a través de problemas bidimensionales. Los modelos así obtenidos serán llamados **estados de deformación plana y de tensiones planas**. La justificación matemática de la aproximación de este último al problema plano1 se ha realizado en los últimos años utilizando técnicas de análisis asintótico.

## 5.2. Estado de deformación plana

**Definición 77** *El estado elástico  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  es un **estado de deformación plana** -plane strain deformation- con respecto al plano  $x_1, x_2$  si en todo punto de  $\mathcal{B}$ :*

$$\begin{aligned}u_\alpha &= u_\alpha(x_1, x_2), \\ u_3 &= 0.\end{aligned}$$

Con esta hipótesis, un punto de una sección plana  $x_3 = cte$  permanece en la misma sección después de la deformación; además, la deformación es la misma en todas las secciones transversales.

Veamos cuales son las implicaciones de esta elección del vector desplazamiento en deformaciones planas. Por una parte:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{u}) &= \varepsilon_{33}(\mathbf{u}) = 0.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ley de comportamiento de Hooke, el tensor de tensiones asociado verifica:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}), \\ \sigma_{\alpha 3}(\mathbf{u}) &= 0, \sigma_{33}(\mathbf{u}) = \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Es fácil demostrar que:

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}) = \nu \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}).$$

En efecto, si  $\mathbf{u}$  corresponde a un estado de deformación plana:

$$\sigma_{33}(\mathbf{u}) = \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) = \lambda \frac{\sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{u})}{2(\mu + \lambda)} = \nu \sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}).$$

En la bibliografía también suele escribirse la **ley de comportamiento en deformaciones planas** utilizando la forma matricial (se omite la dependencia respecto de  $\mathbf{u}$ ):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{pmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

En efecto, veamos, por ejemplo, la relación para  $\varepsilon_{11}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})) \\ &= \frac{1+\nu}{E} ((1-\nu) \sigma_{11} - \nu \sigma_{22}).\end{aligned}$$

La relación inversa también admite una expresión matricial:

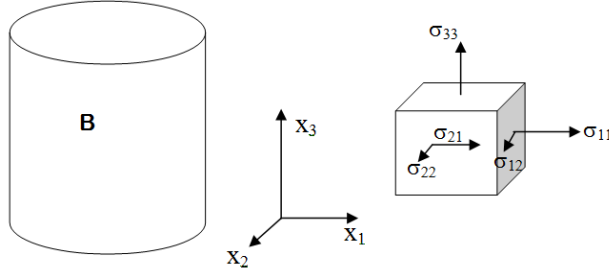
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la matriz de elasticidad  $[\mathbf{E}]$  del problema de deformaciones planas es una submatriz de la correspondiente matriz de elasticidad 3D.

En resumen, en el modelo de deformación planas el sistema completo de ecuaciones, teniendo en cuenta que el tensor de tensiones no puede depender de  $x_3$ , es:

■ **Problema de deformaciones planas:**

$$(\text{DP}) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha = 0 & \text{en } \omega, \\ \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, & \sigma_{\alpha 3} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma}, \\ u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2), & u_3 = 0, \\ u_\alpha(x_1, x_2) = (u_D)_\alpha(x_1, x_2) & \text{sobre } \gamma_D, \\ \sigma_{\alpha\beta}n_\beta = g_\alpha & \text{sobre } \gamma_N. \end{array} \right.$$



En esta gráfica se muestra un esquema del vector de esfuerzos en cada elemento de volumen de la viga.

Aún nos queda por verificar si una solución de este problema de deformaciones planas es solución del problema plano entero. Es evidente que la solución del problema de deformaciones planas verifica la ecuación de equilibrio (5.1) y la condición de contorno (5.2). Esta aproximación verifica, además, la segunda de las condiciones (5.4). Por tanto, **la solución del modelo de deformaciones planas es la solución del problema plano 2 en virtud del teorema de unicidad en elasticidad lineal.**

El valor de  $\sigma_t$  en las tapas es:

$$\sigma_t = \sigma \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

En cambio, el modelo de deformaciones planas no permite verificar enteramente el problema plano 1. En efecto, la primera de las condiciones (5.4) exige que  $\sigma_{33} = 0$  sobre las tapas, mientras que en deformaciones planas  $\sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma}$  independiente de la variable  $x_3$ . En general,  $\sigma_{33}$  será no nulo, salvo si  $\nu = 0$  (lo cual no es físicamente posible) o en el caso particular de que  $\sigma_{\gamma\gamma} = 0$ . En consecuencia, **la solución del modelo de deformaciones planas no es en general una solución exacta del problema plano 1.**

**Observación 78** Como se ha visto en el Capítulo 4, el principio de los trabajos virtuales (ver (4.12)) requiere conocer:

$$\int_{\Gamma^\pm} (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma^\pm} (\sigma_n v_n + \sigma_t \cdot \mathbf{v}_t) \, d\Gamma.$$

Por ello, si la condición Dirichlet considerada sobre las tapas para el problema plano 1 es  $u_n = 0$ , esta condición es requerida a los desplazamientos admisibles, por lo que la igualdad anterior se reduce a:

$$\int_{\Gamma^\pm} (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma^\pm} \sigma_t \cdot \mathbf{v}_t \, d\Gamma = 0,$$

ya que  $\sigma_t$  es nulo sobre las tapas. Obsérvese que, en general, si no aportamos información en la simulación del esfuerzo tangencial en las tapas, implícitamente se supone que es nulo.

### 5.3. Estado de tensiones planas: modelo de membrana

**Definición 79** El estado elástico  $(\mathbf{u}, \sigma)$  es un **estado de tensiones planas o de membrana** -plane stress deformation- con respecto al plano  $x_1x_2$  si el tensor de tensiones sólo depende de  $x_1x_2$  y es tal que:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0.$$

Al igual que hicimos anteriormente analicemos las consecuencias de tal elección. De la ley de comportamiento se deduce:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}), \quad (5.5)$$

$$\sigma_{\alpha 3} = 0 = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{u}) \Rightarrow \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{u}) = 0, \quad (5.6)$$

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) + 2\mu \varepsilon_{33}. \quad (5.7)$$

Despejando  $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  de la ecuación (5.7):

$$(2\mu + \lambda) \varepsilon_{33}(\mathbf{u}) + \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33}(\mathbf{u}) = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}), \quad (5.8)$$

y, substituyendo en (5.5), se obtiene:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}\right) \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \bar{\lambda} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}),$$

siendo

$$\bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}.$$

Esta ley de comportamiento, correspondiente a tensiones planas, puede escribirse también utilizando el módulo de Young y el coeficiente de Poisson:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\nu E}{(1 - \nu^2)} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \delta_{\alpha\beta} + \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}).$$

Obsérvese que el primer término del segundo miembro está modificado con respecto a la ley de Hooke 3D ya que está afectado por la traza. De esta relación se deduce que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma} &= \left(\frac{2\nu E}{(1 - \nu^2)} + \frac{E}{(1 + \nu)}\right) \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{2E\nu + E(1 - \nu)}{(1 - \nu^2)} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) = \\ &= \frac{E}{1 - \nu} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

y, por tanto, de (5.8):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33}(\mathbf{u}) &= -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{\gamma\gamma}(\mathbf{u}) \\
&= -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{(1 - \nu)}{E} \sigma_{\gamma\gamma} = \\
-\left[ \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} : \left( \frac{E}{(1 + \nu)} + \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right) \right] \frac{(1 - \nu)}{E} \sigma_{\gamma\gamma} &= \\
-\left[ \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} : \frac{E\nu + E(1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right] \frac{(1 - \nu)}{E} \sigma_{\gamma\gamma} &= \\
-\left[ \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} : \frac{E(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \right] \frac{(1 - \nu)}{E} \sigma_{\gamma\gamma} &= \\
-\frac{E\nu}{E(1 - \nu)} \frac{(1 - \nu)}{E} \sigma_{\gamma\gamma} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma}.
\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\varepsilon_{33}(\mathbf{u}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma}. \quad (5.9)$$

Puesto que el tensor de tensiones es independiente de  $x_3$ , el tensor de deformación lo será también. Observemos qué significa esta observación en las condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11,23} &= (-\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{12,3}),_1 & (5.10) \\
\varepsilon_{22,31} &= (-\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{23,1}),_2 \\
\varepsilon_{33,12} &= (-\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2}),_3 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0}, \\
2\varepsilon_{12,12} &= \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}}, \\
2\varepsilon_{23,23} &= \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0}, \\
2\varepsilon_{31,31} &= \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0}.
\end{aligned}$$

Estas relaciones implican que  $\varepsilon_{33}$  debería ser una función lineal de  $x_1$  y  $x_2$ ; además, en virtud de (5.9),  $\sigma_{\gamma\gamma}$  también debería ser una función lineal de  $x_1$  y  $x_2$  que, en general, para un problema plano no tiene porqué verificarse.

**Conclusión 80** *La solución del problema de tensiones planas tan sólo es una aproximación de la solución del problema de elasticidad plana. Sólo en algunos casos se encontrará un campo de desplazamientos tridimensional asociado.*

■ **Problema de tensiones planas:**

$$(\text{TP}) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha = 0 & \text{en } \omega, \\ \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \bar{\lambda} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, & \bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}, \quad \sigma_{i3} = 0, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = 0, & \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma}, \\ u_\alpha(x_1, x_2, 0) = (\mathbf{u}_D)_\alpha(x_1, x_2) & \text{sobre } \gamma_D, \\ \sigma_{\alpha\beta} n_\beta = g_\alpha(x_1, x_2) & \text{sobre } \gamma_N. \end{array} \right.$$

Así hay cinco incógnitas en el problema de tensiones planas: Las tres componentes de la tensión,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$ , y las dos componentes del desplazamiento,  $u_1, u_2$ .

En la bibliografía también suele escribirse la ley de comportamiento en tensiones planas utilizando la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix},$$

submatriz de la correspondiente al modelo 3D. La relación inversa también admite la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

En esta expresión, nótese que la matriz está modificada con respecto a la submatriz que se obtendría de la  $[\mathbf{E}]$  correspondiente al modelo 3D.

### 5.3.1. Ecuaciones de membrana en términos del desplazamiento

En la bibliografía también suele escribirse el problema de tensiones planas en términos del desplazamiento. De la primera expresión del Problema (TP) se deduce tomando  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{1\beta}}{\partial x_\beta} + f_1 = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial (2\mu \varepsilon_{1\beta} + \bar{\lambda} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{1\beta})}{\partial x_\beta} + f_1 = 0 \\ & \Rightarrow (2\mu + \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + f_1 = 0 \\ & \Rightarrow (2\mu + \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\mu + \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + f_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Escribiendo los parámetros de Lamé en términos del módulo de Young y del coeficiente de Poisson se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\mu + \bar{\lambda} &= 2\mu + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} = 4\mu \left( \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right) \\ &= 4 \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) : \left( \frac{E}{(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\ &= 4 \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{E(1-2\nu) + 2E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \right) : \left( \frac{E(1-2\nu) + E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\ &= 4 \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \right) : \left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\ &= 4 \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{2(1-\nu)} \right) = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\mu + \bar{\lambda} &= \mu + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} = \mu \left( \frac{2\mu + \lambda + 2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \right) \\ &= \frac{E}{2(1-\nu)}.\end{aligned}$$

Y, por tanto, la ecuación (5.11) se escribe como:

$$E \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + f_1 = 0. \quad (5.12)$$

Realizando el mismo desarrollo para la primera expresión del Problema (TP) con  $\alpha = 2$ :

$$E \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + f_2 = 0. \quad (5.13)$$

**Observación 81** En las expresiones (5.12) - (5.13) las fuerzas  $f_\alpha$  consideradas son las componentes horizontales de la densidad de fuerzas volúmicas definidas sobre el problema tridimensional. Si se transforman estas fuerzas, en la fuerza por unidad de superficie que actúa en cada punto de la superficie media, para lo que habrá que integrarlas en el espesor de la placa, tendremos las fuerzas:

$$F_\alpha(x_1, x_2) = \int_{-h}^h f_\alpha dx_3 = 2f_\alpha h,$$

ya que  $f_\alpha$  es independiente de  $x_3$ .

Así para una placa de espesor  $2h$  las ecuaciones (5.12) - (5.13) pueden reescribirse, al integrar entre  $-h$  y  $h$  ambas expresiones, en la forma:

$$\begin{aligned}2hE \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + F_1 &= 0, \\ 2hE \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + F_2 &= 0,\end{aligned}$$

debiendo ambas ser verificadas en  $\omega$ .

■ **Problema de tensiones planas en términos del desplazamiento:**

$$(TP) \left\{ \begin{array}{ll} 2hE \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + F_1 = 0, & \text{en } \omega, \\ 2hE \left\{ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} + F_2 = 0, & \text{en } \omega, \\ \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \bar{\lambda}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, & \bar{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}, \quad \sigma_{i3} = 0, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = 0, & \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}, \\ u_\alpha(x_1, x_2, 0) = (\mathbf{u}_D)_\alpha(x_1, x_2) & \text{sobre } \gamma_D, \\ \sigma_{\alpha\beta}n_\beta = g_\alpha(x_1, x_2) & \text{sobre } \gamma_N. \end{array} \right.$$

**Observación 82** Veamos otra explicación de por qué el modelo de tensiones planas sólo es una buena aproximación del Problema 1 si  $h$  es suficientemente pequeño. Puesto que

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma} \implies u_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}x_3 + \hat{u}_3(x_1, x_2).$$

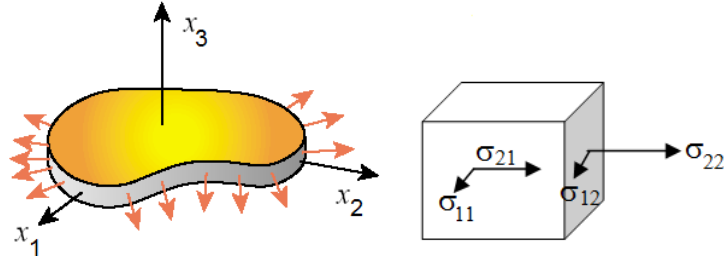
De aquí, si se tiene en cuenta además que  $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$ , se deduce que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} &= -\frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial x_\alpha} x_3 + \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \\ \Rightarrow u_\alpha &= \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial x_\alpha} \frac{x_3^2}{2} - \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} x_3 + \hat{u}_\alpha(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ley de comportamiento:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ &= \mu \left( \underbrace{\frac{\nu}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^2 - 2 \frac{\partial^2 \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} x_3}_{\text{Depende de } x_3} + 2\varepsilon_{12}(\hat{u}_\alpha(x_1, x_2)) \right). \end{aligned}$$

El término marcado en la expresión anterior no es compatible con la hipótesis de tensiones planas; este término no aparece con la aproximación de Kirchhoff-Love al poderse despreciar si  $|x_3|$  es suficientemente pequeño.



En la primera de las figuras puede verse una situación típica de tensiones planas. También su correspondiente presentación sobre un elemento de volumen.

La verificación de las condiciones de contorno Dirichlet para el problema de tensiones planas implica que:

$$\begin{aligned} \hat{u}_3(x_1, x_2) &= 0 \text{ sobre } \gamma_D, \\ \hat{u}_\alpha(x_1, x_2) &= (\mathbf{u}_D)_\alpha(x_1, x_2) \text{ sobre } \gamma_D. \end{aligned}$$

De nuevo se observa que estas condiciones sólo aproximan bien las correspondientes 3D cuando  $h$  es suficientemente pequeño. En efecto, sí se verifican si  $x_3 = 0$ , pero si  $x_3 \neq 0$  entonces de la Observación 82 se deduce que con la hipótesis de tensiones planas para aplicar las condiciones Dirichlet homogéneas debería tenerse, además:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma} &= 0 \text{ sobre } \gamma_D, \\ \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial x_\alpha} &= 0 \text{ sobre } \gamma_D, \quad \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ sobre } \gamma_D. \end{aligned}$$

Por ello, lejos de  $x_3 = 0$ , la condición Dirichlet solo se verificaría de forma aproximada si  $|x_3|$  es suficientemente pequeño.

**Observación 83** *Clásicamente, en el problema de placas, que se estudiará en el Capítulo 9, se asume la siguiente hipótesis sobre los desplazamientos:*

$$\begin{aligned} u_3 &\approx \hat{u}_3(x_1, x_2), \\ u_\alpha &\approx -\frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} x_3 + \hat{u}_\alpha(x_1, x_2). \end{aligned}$$

*Los desplazamientos con esta propiedad se llaman de Kirchhoff-Love. Esta hipótesis, unida al resto de las ecuaciones del problema de tensiones planas, define el problema de placas más clásico; después de lo expuesto aquí vemos que supone una simplificación respecto del problema plano 1 planteado al comienzo del capítulo. Observar que con esta hipótesis los puntos de una recta paralela al eje  $x_3$  permanecen sobre una recta paralela a este eje después de la deformación.*

## 5.4. Solución por la función de Airy

En el apartado anterior se demostró que la solución del problema de tensiones planas no verifica en general las ecuaciones de compatibilidad y que la solución de deformaciones planas no verifica la condición de contorno  $\sigma_{33} = 0$  para  $x_3 = \pm h$ . Por ello, estas dos soluciones no son del todo satisfactorias.

La resolución de las ecuaciones de equilibrio con condiciones de contorno en tensiones puede obtenerse de forma única por el método de la función de Airy para fuerzas derivadas de un potencial. Cuestiones complementarias a las presentadas en esta sección pueden consultarse en Barber ([2]).

### 5.4.1. Función de Airy

En el capítulo anterior se ha demostrado que se verifican automáticamente las ecuaciones de equilibrio homogéneas si elegimos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Rot}(\text{Rot } \boldsymbol{\Phi}^T),$$

siendo  $(\boldsymbol{\Phi})$  un tensor simétrico. En particular, si:

$$(\boldsymbol{\Phi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

las componentes del tensor de tensiones asociado en coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0, \end{aligned}$$

verificándose de forma automática las ecuaciones de equilibrio homogéneas (sin fuerzas de volumen) y la hipótesis de tensiones planas.

Nos quedaría, por tanto, encontrar una solución particular de las ecuaciones de equilibrio con las fuerzas de volumen derivando de un potencial:

$$\mathbf{f} = -\nabla V, \quad V = V(x_1, x_2).$$

Elijamos una solución particular tal que  $\sigma_{12} = 0$ ; las tensiones se escriben entonces:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + V, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + V, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.14)$$

### 5.4.2. Ecuación diferencial asociada a la función de Airy

Con el cambio de función (5.14) las ecuaciones de equilibrio se verifican automáticamente. Nos quedarían por comprobar las ecuaciones de compatibilidad:

#### ■ Deformación plana

Consideramos como en el párrafo anterior las componentes de la tensión definidas a partir de la función de Airy y del potencial de las fuerzas, excepto la componente 33:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Puesto que  $\sigma_{33}$  no depende de  $x_3$ , la tercera ecuación de equilibrio sigue verificándose. Con las hipótesis de deformación plana la única ecuación que resta por cumplirse es la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]_{\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})} \\ &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

ya que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}.$$

Se verifica, además:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + V, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + V, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2},$$

y, llevando esto a la ecuación de compatibilidad, podemos escribir:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \right) \\ & \quad - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \right) = 0, \\ & \frac{1-\nu^2}{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) + \left( 2 \frac{1+\nu}{E} - 2 \frac{(1+\nu)\nu}{E} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & \quad = - \left( \frac{1-\nu^2}{E} - \frac{(1+\nu)\nu}{E} \right) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} & (1-\nu) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) + (2-2\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & \quad = -((1-\nu) - \nu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right), \end{aligned}$$

lo que implica:

$$\boxed{\Delta \Delta A = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Delta V.}$$

#### ■ Tensiones planas

En tensiones planas las relaciones tensión-deformación se escriben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Introduciendo estas expresiones en la segunda ecuación de compatibilidad subrayada en (5.10) se obtiene:

$$\boxed{\Delta \Delta A = -(1-\nu)\Delta V.} \quad (5.17)$$

Lamentablemente, las otras tres ecuaciones de compatibilidad que aparecen subrayadas en (5.10) no se verifican en general. Sin embargo, (5.17) se utiliza a menudo para resolver los problemas planos para la aproximación de tensiones planas; pero debemos saber que no será posible en este caso calcular correctamente el vector desplazamiento. Nosotros daremos en una próxima sección el cálculo de una solución completa.

**Observación 84** *Obsérvese que*

$$\Delta \Delta A = \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2V).$$

Entonces, para el problema de tensiones planas, el sistema de tres ecuaciones diferenciales a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \\ \Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1+\nu)\Delta V, \end{cases}$$

en el que como puede observarse sólo aparecen las constantes elásticas del material si las fuerzas de volumen aplicadas derivan de un potencial no armónico.

**Teorema 85** En el caso de sistemas elásticos planos las ecuaciones de equilibrio se verifican automáticamente si:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + V, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + V, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2},$$

siendo  $A$  la función de Airy y  $V$  el potencial de fuerzas de volumen ( $\mathbf{f} = -\nabla V$ ). Además:

- Las ecuaciones de compatibilidad se reducen, entonces, a:

$$\Delta \Delta A = -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \Delta V \text{ en } \omega, \quad (5.18)$$

en deformación plana.

- En el caso de tensiones planas solo una de las ecuaciones de compatibilidad puede garantizarse si se verifica:

$$\Delta \Delta A = -(1-\nu) \Delta V \text{ en } \omega. \quad (5.19)$$

■

**Observación 86** En el caso de fuerzas de volumen constantes, el peso por ejemplo, o derivando de un potencial armónico, la ecuación diferencial verificada por la función de Airy es idéntica en tensiones planas o en deformaciones planas:

$$\Delta \Delta A = 0.$$

La función de Airy es entonces biarmónica.

### 5.4.3. Cálculo del vector desplazamiento en deformación plana para fuerzas de volumen nulas

Hemos visto que, con la hipótesis de tensiones planas, el problema elástico no era compatible; en consecuencia, no es posible en este caso determinar el vector desplazamiento.

En el caso de deformaciones planas, las hipótesis no permiten verificar todas las condiciones de contorno en tensiones. Si se supone, en una primera aproximación, que el problema para las tensiones está resuelto, entonces es posible calcular el vector desplazamiento.

Con las hipótesis de deformación plana, utilizando las ecuaciones (5.14) y (5.15), tendríamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right], \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} \right], \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 2\varepsilon_{12} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Escribamos las dos primeras ecuaciones de (5.20) en la forma:

$$\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x_1}; \quad \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}. \quad (5.21)$$

Verificándose por identificación:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial x_2}.$$

Las ecuaciones (5.21) pueden también integrarse, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} u_1 &= -\frac{\partial A}{\partial x_1} + \xi + G_1(x_2), \\ \frac{E}{1+\nu} u_2 &= -\frac{\partial A}{\partial x_2} + \eta + G_2(x_1). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Las funciones  $G_1(x_2)$  y  $G_2(x_1)$  pueden incorporarse a las funciones  $\xi$  y  $\eta$  en la integración de las ecuaciones (5.21). Si sustituimos el vector  $\mathbf{u}$  obtenido, en la tercera igualdad de (5.20) obtenemos por identificación:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \eta}{\partial x_1}.$$

Resumiendo los resultados, tenemos que el **vector desplazamiento** se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} u_1 &= -\frac{\partial A}{\partial x_1} + \xi, \\ \frac{E}{1+\nu} u_2 &= -\frac{\partial A}{\partial x_2} + \eta, \end{aligned} \quad (5.23)$$

verificándose que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = (1-\nu) \Delta A(x_1, x_2), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

#### 5.4.4. Precisiones sobre la validez de la hipótesis de tensiones planas para fuerzas de volumen nulas

Veamos, en primer lugar, la forma general de la función de Airy para un problema de tensiones planas en coordenadas cartesianas. Situémonos en la hipótesis de tensiones planas  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ , pero supongamos que la función de Airy depende de  $x_1, x_2$  y  $x_3$  (de las relaciones (4.26) esto no modifica el tensor  $\sigma$  asociado). Puesto que las relaciones (5.14) garantizan las ecuaciones de equilibrio siempre deben utilizarse; nos restaría resolver todas las ecuaciones de compatibilidad. Para ello, introduzcamos las relaciones (5.14) en las ecuaciones de Beltrami (obtenidas de las ecuaciones de compatibilidad) correspondientes a fuerzas de volumen nulas:

$$(1+\nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 \text{tr}(\sigma)}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

y tengamos en cuenta que  $\sigma_{33} = 0$ :

$$\begin{aligned}
(1 + \nu)\Delta\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0, \\
(1 + \nu)\Delta\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0, \\
-(1 + \nu)\Delta\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

De las ecuaciones tercera, cuarta y quinta en (5.24), se deduce que:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} = kx_3 + \hat{A}(x_1, x_2) = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{5.25}$$

donde  $k$  es una constante arbitraria y  $\hat{A}$  una función arbitraria de  $x_1$  y  $x_2$ . Por otra parte, en el capítulo anterior habíamos visto que si las fuerzas de volumen eran constantes o nulas entonces la traza de  $\boldsymbol{\sigma}$  era una función armónica y, por tanto,  $\hat{A}$  es armónica:

$$\Delta \hat{A}(x_1, x_2) = 0. \tag{5.26}$$

Este resultado permite reescribir la primera ecuación de (5.24):

$$(1 + \nu)\Delta\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}\right\} + \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x_1^2} = 0.$$

Si tenemos en cuenta (5.25) y (5.26), se deduce que:

$$(1 + \nu)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \hat{A}(x_1, x_2)\right\} - \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial x_2^2} = 0$$

o, equivalentemente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 + \nu}\hat{A}(x_1, x_2)\right\} = 0.$$

De la misma forma, las dos ecuaciones de Beltrami aún no utilizadas permitirían escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 + \nu}\hat{A}(x_1, x_2)\right\} &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 + \nu}\hat{A}(x_1, x_2)\right\} &= 0.
\end{aligned}$$

Estas tres últimas ecuaciones en derivadas parciales permiten concluir que:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 + \nu}\hat{A}(x_1, x_2) = l(x_3) + x_1 m(x_3) + x_2 n(x_3).$$

Integrando dos veces con respecto a la variable  $x_3$ , la función de Airy solución completa del problema plano 1 se escribe:

$$A(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} \hat{A}(x_1, x_2) x_3^2 + L(x_3) + x_1 M(x_3) + x_2 N(x_3) + A_o(x_1, x_2) + x_3 A_1(x_1, x_2),$$

siendo  $l(x_3)$ ,  $m(x_3)$  y  $n(x_3)$  las derivadas segundas de las funciones  $L(x_3)$ ,  $M(x_3)$  y  $N(x_3)$ , respectivamente. Las funciones  $A_o(x_1, x_2)$  y  $A_1(x_1, x_2)$  no pueden ser arbitrarias, pues no debemos olvidar que la función de Airy debe verificar la relación (5.25).

Antes de utilizar esta relación, busquemos una forma simplificada de la función de Airy. Por una parte, el plano  $x_3 = 0$  es un plano de simetría, por tanto, las tensiones deben ser funciones pares en  $x_3$ ; por otra parte, el cálculo de las tensiones hace intervenir unas derivadas segundas con respecto a  $x_1, x_2$ . Estas dos reflexiones ayudan a simplificar la expresión de la función de Airy puesto que algunas de ellas no intervienen en el cálculo de las tensiones. Por lo tanto, podemos elegir:

$$L(x_3) = M(x_3) = N(x_3) = 0, \quad k = 0, \quad A_1(x_1, x_2) = 0.$$

En consecuencia, la expresión de la función de Airy queda así:

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} \hat{A}(x_1, x_2) x_3^2 + A_o(x_1, x_2).$$

Substituyamos ahora esta solución en la ecuación (5.25) y tengamos en cuenta que  $k = 0$  y que  $f$  es armónica:

$$\begin{cases} \Delta A_o(x_1, x_2) = \hat{A}(x_1, x_2), \\ \Delta \Delta A_o(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Con la solución completa que hemos calculado, las tensiones  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  y  $\sigma_{12}$  son funciones de  $x_1, x_2$  y dependen de  $x_3$ . Por tanto, para que la hipótesis de tensiones planas no esté demasiado alejada de la realidad es necesario que el espesor  $2h$  no sea demasiado importante, es decir que  $h$  sea pequeño con respecto a las dimensiones de  $x_1$  y  $x_2$ . El método de los desarrollos asintóticos permite demostrar que el problema de tensiones planas se corresponde con el término de orden cero de un desarrollo asintótico, con respecto a  $h$ , de la solución del problema plano 1.

#### HIPÓTESIS SUPLEMENTARIA DE TENSIONES PLANAS

Para que un problema plano pueda ser bien aproximado por el problema de tensiones planas, es necesario que el espesor  $2h$  sea pequeño con respecto a las otras dimensiones de la placa.

##### 5.4.5. Técnica de la función de Airy

Resumimos hasta aquí la técnica de la función de Airy y lo que debemos tener en cuenta en su aplicación:

- La función de tensiones de Airy sólo puede aplicarse a sólidos elásticos e isotrópicos.

- La función de tensiones de Airy sólo puede aplicarse si las fuerzas de volumen tienen una forma especial:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = -\nabla V(x_1, x_2).$$

Afortunadamente, muchos casos prácticos responden a este tipo de fuerzas, entre ellos, los campos de la gravedad.

- La técnica de la función de Airy trabaja mejor para problemas donde un sólido se somete a condiciones de tracción sobre su frontera que a condiciones de prescripción de desplazamientos.

La técnica se resume en los siguientes puntos:

1. Calcular la función de Airy  $A$  solución del problema:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta A &= C(\nu) \operatorname{Div}(\mathbf{f}), \text{ en } \omega, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} n_1 - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 &= g_1, \text{ sobre } \gamma_N, \\ -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} n_2 &= g_2, \text{ sobre } \gamma_N,\end{aligned}$$

siendo:

$$C(\nu) = \begin{cases} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}, & \text{en deformación plana,} \\ (1-\nu), & \text{en tensiones planas.} \end{cases}$$

2. Se determinan las tensiones:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + V, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + V, \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0, \\ \sigma_{33} &= \beta\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}$$

con  $\beta = 1$  para deformaciones planas y  $\beta = 0$  en tensiones planas.

3. Si se necesita calcular el tensor de deformación utilizamos las relaciones:

a) Para deformaciones planas

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,\end{aligned}$$

b) y para tensiones planas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).\end{aligned}$$

4. Si además se necesitan calcular los desplazamientos:

a) Para deformaciones planas:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{E} \left( -\frac{\partial A}{\partial x_1} + \xi \right), \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{E} \left( -\frac{\partial A}{\partial x_2} + \eta \right), \end{aligned} \quad (5.27)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = (1-\nu) \Delta A(x_1, x_2), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

b) Para tensiones planas el desplazamiento se aproxima por:

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} x_3 + \hat{u}_3(x_1, x_2), \\ u_\alpha &= \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial x_\alpha} \frac{x_3^2}{2} - \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} x_3 + \hat{u}_\alpha(x_1, x_2). \end{aligned}$$

En ambos casos se utilizarán las condiciones Dirichlet para ajustar el resultado.

## 5.5. La función de Airy en coordenadas curvilíneas

En esta sección escribiremos la solución por la función de Airy en coordenadas curvilíneas ortogonales. Al igual que en la sección anterior consideraremos fuerzas de volumen derivando de un potencial.

### 5.5.1. Relación entre la función de Airy y las tensiones en coordenadas curvilíneas

En el sistema ortonormal  $(M/\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  asociado a las coordenadas curvilíneas  $(q_1, q_2, q_3)$ , el tensor de tensiones es, por definición:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(M/\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

con:  $\sigma_{33} = 0$  en tensiones planas y  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta})$  en deformaciones planas.

Como ya se ha visto anteriormente, las ecuaciones de equilibrio se verificarán automáticamente tomando:

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Rot}(\text{Rot}\boldsymbol{\Phi}^T),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{(M/\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \vec{x}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las componentes del tensor de tensiones se escribirán introduciendo el potencial  $V$  de fuerzas de volumen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left( \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial A}{\partial q_\beta} \right) + \frac{1}{H_\alpha^2} \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \ln H_\beta}{\partial q_\alpha} + V, \quad \alpha = 1, 2, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial A}{\partial q_\beta} \right) + \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \ln H_\alpha}{\partial q_\beta}.\end{aligned}$$

### 5.5.2. Coordenadas polares

Las ecuaciones verificadas por la función de Airy escritas mediante los operadores bilaplacianos (5.18) y (5.19) siguen siendo las mismas cualquiera que sea el sistema de coordenadas curvilíneas elegido. Por tanto, es suficiente conocer el operador laplaciano en los distintos sistemas de coordenadas. Consideremos coordenadas polares:  $q_\alpha = r, q_\beta = \theta, H_\alpha = 1, H_\beta = r$ . Los operadores divergencia y Laplaciano podemos escribirlos como:

$$\begin{aligned}\text{Div} \mathbf{f} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r f_r)}{\partial r} + \frac{\partial (f_\theta)}{\partial \theta} \right) \\ \Delta V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.\end{aligned}$$

La función de Airy debe satisfacer la ecuación:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 A(r, \theta) = C(\nu) \left( \frac{\partial (r f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \right),$$

siendo  $C(\nu)$  la función definida en la sección anterior.

Las tensiones se deducen de  $A$  por las relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + V, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + V, \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right).\end{aligned}$$

La relación entre el tensor de deformación y el tensor de tensiones es:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix},$$

para deformaciones planas y

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix},$$

para tensiones planas.

Los desplazamientos deben ser determinados utilizando una metodología similar a la utilizada en coordenadas cartesianas. Para ello, sea  $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ ,

el vector desplazamiento. Las relaciones tensor deformación - desplazamiento en coordenadas polares se escriben:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r},\end{aligned}$$

Integrando estas ecuaciones de forma similar a la realizada en la sección anterior obtenemos los desplazamientos asociados en deformaciones planas o los aproximados en tensiones planas.

## 5.6. Boletín 5

**Ejercicio 87** Indicar en qué condiciones la solución del problema de tensiones planas puede considerarse una aproximación de la solución del problema de elasticidad plana.

**Ejercicio 88** Escribir en términos de la función de Airy las tensiones de un sólido sometido a un estado de deformaciones planas y cuyas fuerzas de volumen derivan de un potencial. Para fuerzas derivando de un potencial armónico obtener la ecuación diferencial asociada a la función de Airy.

**Ejercicio 89** Indicar cuándo un tensor de tensiones uniaxial en la dirección  $x_2$  puede ser solución de un problema de tensiones planas en el plano  $x_2x_3$ .

**Ejercicio 90** Indicar cuándo un tensor de tensiones uniaxial en la dirección  $x_1$  puede ser solución de un problema de deformaciones planas en el plano  $x_1x_3$ .

**Ejercicio 91** Indicar cuándo un tensor de tensiones correspondiente a un cizallamiento simple en las direcciones  $x_2x_3$  puede ser solución de un problema de tensiones planas.

**Ejercicio 92** Indicar cuándo un tensor de tensiones correspondiente a un cizallamiento simple en las direcciones  $x_2x_3$  puede ser solución de un problema de deformaciones planas.

**Ejercicio 93** Indicar cuándo un tensor esférico puede ser un tensor de deformación asociado a un problema de deformaciones planas.

**Ejercicio 94** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  el sólido del ejercicio 69 cuya configuración de referencia se corresponde con el cubo unidad  $C$ :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se supone que el sólido se comporta como un material elástico, homogéneo e isótropo y que sometido a la acción de un campo de fuerzas aplicadas se ha medido en cada punto el desplazamiento:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (xz, xy, yz). \quad (5.28)$$

Consideremos la descomposición del tensor de tensiones construida en el apartado xii) del ejercicio 69.

## 102 CAPÍTULO 5. PROBLEMAS PLANOS EN ELASTICIDAD LINEAL

- i) Estudiar si el campo  $(\sigma_3)$  corresponde a un estado de tensiones planas en el plano  $yz$ . ¿Y en el plano  $xz$ ?
- ii) Estudiar si  $(\sigma_2)$  corresponde a un estado de tensiones planas en el plano  $xz$ . ¿Y en el plano  $yz$ ?
- iii) Indicar si  $(\sigma_1)$  corresponde a un estado de tensiones planas.

**Ejercicio 95** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  un sólido cuya configuración de referencia se corresponde con el cubo unidad  $C$ :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se supone que el sólido se comporta como un material elástico, homogéneo e isótropo y que sometido a la acción de un campo de fuerzas aplicadas se ha medido en cada punto el desplazamiento:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (xz, xy, yz). \quad (5.29)$$

- i) Obtener el tensor de deformaciones asociado.
- ii) Descomponer el tensor de deformación como suma de cuatro en la forma:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = (e_1) + (e_2) + (e_3) + (e_4),$$

donde:

$$\begin{aligned} (e_1) &= \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}, (e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & e_{23} & 0 \end{pmatrix}, (e_4) = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- iii) Utilizar las ecuaciones de compatibilidad para comprobar si cada  $(e_i)$  es un tensor de deformación asociado a un campo de desplazamientos. Cuando sea posible calcular el desplazamiento.
- iv) Para aquellos casos en los que  $(e_i)$  sea un tensor de deformación estudiar si corresponde a un estado de deformaciones planas. En los casos en que la respuesta sea positiva, indica en qué plano.

**Ejercicio 96** Se considera en  $\mathbb{R}^3$  un sólido cuya configuración de referencia se corresponde con el cubo unidad  $C$ :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Se supone que el sólido se comporta como un material elástico, homogéneo e isótropo y que sometido a la acción de un campo de fuerzas aplicadas se ha medido en cada punto el desplazamiento:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 10^{-3}(x^2, xy^2, z^2). \quad (5.30)$$

- i) A partir de la ley de Hooke obtener el tensor de tensiones asociado.
- ii) Descomponer el tensor de tensiones como suma de dos en la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\sigma}_1) + (\boldsymbol{\sigma}_2),$$

donde:

$$(\boldsymbol{\sigma}_1) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (\boldsymbol{\sigma}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

- iii) Utilizar las ecuaciones de compatibilidad para comprobar si  $(\boldsymbol{\sigma}_1)$  admite un campo de desplazamientos asociado a través de la ley de Hooke. Si es posible calcularlo.
- iv) Estudiar si  $(\boldsymbol{\sigma}_1)$  corresponde a un estado de tensiones planas en el plano  $xy$ . ¿Y de deformaciones planas?

**Ejercicio 97** *Se considera un bloque prismático de latón de altura unidad, y de sección homogénea rectangular de  $2m \times 1m$  en el plano  $x_1x_2$ . Sus parámetros elásticos son  $E = 100GPa$ ,  $\nu = 0,33$ . Se considera que la tercera componente de la deformación del cilindro es la identidad sobre su base inferior, que sobre la cara  $x_2 = 0$  se impiden los desplazamientos y que está sometido en sus otras caras a una tracción paralela a la frontera de la sección transversal plana de magnitud  $3,76e + 06N/m^2$ . Calcular el valor de  $\alpha$  para que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones el campo de desplazamiento solución del problema de elasticidad tridimensional sea:*

$$u_1(x_1, x_2) = \alpha x_2, \quad u_2(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2) = 0.$$

*¿Es este campo de desplazamientos solución del correspondiente problema de deformaciones planas? ¿Se corresponde con un problema de cizallamiento puro en las direcciones  $x_1, x_2$ ?*

**Ejercicio 98** ♣ *Consideremos la viga sólida del ejercicio 68 cuya configuración de referencia es:*

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \quad y^2 + z^2 \leq 4\},$$

*y cuyo material verifica la ley de Hooke. Considera que bajo la acción de las fuerzas calculadas en el ejercicio 68, el desplazamiento en cada punto es:*

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, y^2, z^2)^T.$$

- i) *Estudiar si se trata de un estado de deformaciones planas.*
- ii) *Estudiar si se trata de un estado de tensiones planas.*

**Ejercicio 99** ♣ Consideremos la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

siendo  $a > 0$  una constante dada y  $b = 2a$ , con parámetros de Lamé asociados:

$$\begin{aligned}\lambda &= 4,0e10N/m^2, \\ \mu &= 2,7e10N/m^2.\end{aligned}$$

Se considera un sistema de equilibrio para el cual el tensor de deformaciones es

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y/2 \\ 0 & y/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Calcular el tensor de rotación.<sup>1</sup>
- ii) Calcular los campos de desplazamientos asociados.
- iii) Comprobar si alguno de los campos de desplazamientos obtenido se corresponde a un problema de deformaciones planas. Si es el caso definir el problema bidimensional asociado considerando sobre la superficie lateral fuerzas de tracción.
- iv) ¿Existe una función de Airy asociada? Si existe calcularla.

**Ejercicio 100** Considérese el modelo obtenido en el Ejercicio 71.

- i) Indicar si el modelo (11.12) - (11.15) considerado en el boletín 4 para resolver el Ejercicio 71 será de tensiones planas.
- ii) Escribe un problema de tensiones planas que tenga el cizallamiento indicado como solución considerando  $h = 0.04m$  y que tenga unicidad de solución. ¿Cuál sería la condición de contorno que verificaría sobre las tapas del cilindro?
- iii) Resuelve el modelo de tensiones planas considerado y compara sus resultados con los calculados en el caso 3D del Ejercicio 71. Si has encontrado diferencias justifícalas.
- iv) Indicar si el modelo (11.12) - (11.15) considerado en el boletín 4 para resolver el Ejercicio 71 será de deformaciones planas.
- v) Escribe un problema de deformaciones planas que tenga el cizallamiento indicado como solución considerando  $h = 10m$  y que tenga unicidad de solución. ¿Cuál sería la condición de contorno que verificaría sobre las tapas del cilindro? ¿Dependerá la solución del  $h$  considerado?
- vi) Resuelve el modelo de deformaciones planas considerado y compara sus resultados con los calculados en el caso 3D. Si has encontrado diferencias justifícalas.

---

1

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}.$$

**Ejercicio 101** Consideremos la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 0,1, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\},$$

siendo  $a > 0$  una constante dada y  $b = 2a$ . Denotemos por  $\Gamma^+ = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0,1\}$  y  $\Gamma^- = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\}$  las tapas superior e inferior del cilindro respectivamente. Denotamos por  $\Gamma_L$  su superficie lateral. Supongamos que el sólido está formado por un material elástico con coeficientes:

$$E = 7.e10N/m^2, \nu = 0,3$$

- i) Tomar sobre la viga un test de presión hidrostática distribuida uniformemente sobre su superficie de intensidad  $p$  y correspondiente a un esfuerzo puramente normal. Escribir el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones, el coeficiente de dilatación cúbica, y el campo de desplazamientos asociado.
- ii) Calcular para el ejemplo del apartado anterior la desviación respecto del ángulo recto para dos segmentos que antes de la deformación formasen un ángulo recto en el plano  $yz$ . Calcular la elongación relativa de un segmento que se encuentra en el eje  $z$  antes de la deformación.
- iii) Utilizar el principio de superposición para escribir el problema anterior como suma de dos en el que al menos uno sea un problema de tensiones planas no trivial.

**Ejercicio 102** Considerar de nuevo la geometría del ejercicio 101.

- i) Escribir el modelo de elasticidad estático asociado a la fuerza de la gravedad en la dirección del eje  $x$  suponiendo que la viga está empotrada en su base y que el resto de su superficie exterior está libre de fuerzas.
- ii) Encontrar la expresión analítica del campo de desplazamientos y tensiones asociados.
- iii) ¿Se podría resolver este modelo cómo un modelo plano?

**Ejercicio 103** Considerar un sólido cilíndrico con generatriz el eje  $z$ , de altura  $2h$  y cuya sección es un círculo de radio  $1m$ . Suponer que las características del material son:

$$\begin{cases} \text{Densidad} & 2170Kg/m^3, \\ \text{Módulo de Young} & 2e11Pa, \\ \text{Coeficiente de Poisson} & 0,25 \end{cases}$$

Suponer que la superficie lateral está sometida a una fuerza de compresión de valor:  $\mathbf{g} = -2 \times 10^8 \mathbf{n}$  sobre el semiespacio  $x > 0$ , y que se encuentra empotrado sobre la parte correspondiente a  $x < 0$ . Considerar el cilindro sometido a la fuerza de la gravedad en la dirección del eje  $x$  negativo.

- i) Considerar sobre las tapas la condición de desplazamiento normal nulo y  $h = 1m$ . Escribir el modelo matemático 3D asociado al problema. Utilizar COMSOL para su resolución.

- ii) Demostrar que se trata de un problema de deformaciones planas. Resolver con COMSOL el problema 2D asociado. Comparar los resultados obtenidos con los del apartado anterior.
- iii) Considerar ahora sobre las tapas el vector de esfuerzos nulo y  $h = 1\text{m}$ . Escribir el modelo matemático 3D asociado al problema. Utilizar COMSOL para su resolución.
- iv) Demostrar que se trata de un problema de tensiones planas. Resolver con COMSOL el problema 2D asociado. Comparar los resultados obtenidos con los del problema 3D.
- v) Repetir los dos apartados anteriores para  $h = 0,001$  ¿Qué se puede concluir? ¿Qué aproximación se obtiene para el desplazamiento 3D?

**Ejercicio 104** Consideremos una viga en voladizo - a cantilever beam-, con longitud  $L$ , altura  $2a$  y espesor  $2b$ . La parte superior e inferior de la viga están libres de tracción. Su extremo izquierdo está sujeto a una fuerza con resultante  $-P\mathbf{e}_2$ , y el extremo derecho está encastrado a la pared. Supongamos que  $b \ll a$ , de modo que un estado de tensiones planas puede considerarse sobre la viga. Calcular las tensiones, el tensor de deformación y aproximar los desplazamientos. (Sugerencia: Una función de Airy puede comprobarse que sería:

$$A = -\frac{3P}{8ab}x_1x_2 + \frac{P}{8a^3b}x_1x_2^3).$$

**Ejercicio 105** <sup>2</sup> Consideremos un sistema ortonormal de referencia  $(O/\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  en el espacio y consideremos un sólido de material homogéneo e isótropo ocupando un **dominio cilíndrico**  $D$  definido por:

$$D = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_3^2 \leq 4, |x_2| \leq 1.e - 2\}.$$

Denotemos por  $\Gamma_L$  la superficie lateral de la placa y distingamos los subconjuntos  $\Gamma_N$  correspondiente a la porción de  $\Gamma_L$  dada por:

$$\Gamma_N = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_3^2 = 4, |x_2| \leq 1.e - 2, 0 \leq x_1, x_3 \leq 2\}$$

y  $\Gamma_D$  la porción complementaria de  $\Gamma_N$  en  $\Gamma_L$ .

- i) Estudiar si es posible que a partir de la función de Airy  $A(x_1, x_3) = (1 - \nu)x_3\sin(x_1)$ , siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson, se pueda construir la solución del problema de tensiones planas correspondiente a las fuerzas de volumen  $\vec{F} = (x_3 \cos(x_1), 0, \sin(x_1))$ .
- ii) Indicar la condición de contorno que se debe considerar en la superficie  $\Gamma_N$  sobre la que se aplican fuerzas de superficie. Particularizar el valor en el punto  $(1, 0, \sqrt{3})$ .
- iii) ¿Es posible construir el campo de desplazamientos asociado a este problema?

<sup>2</sup>Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} = 0, i, j = 1, 2, 3.$$

- iv) Indicar la condición de contorno sobre las tapas superior e inferior de la placa.
- v) Estudiar si es posible que a partir de la función de Airy  $A(x_1, x_3) = (1 - \nu) x_3 \sin(x_1)$  se pueda construir la solución del problema de deformaciones planas correspondiente a las fuerzas de volumen  $\vec{F} = (x_3 \cos(x_1), 0, \sin(x_1))$ .

**Ejercicio 106 ♣** Considerar un problema de tensiones planas en el plano  $x_1 x_2$  cuyas fuerzas de volumen derivan de un potencial  $V$ . Utilizando la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

deducir la ecuación diferencial asociada a la función de Airy.

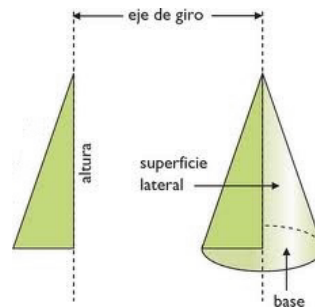
**Ejercicio 107 ♣** Considerar una tensión correspondiente a un cizallamiento en las direcciones  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

- i) Obtener condiciones sobre el cizallamiento para que admita un campo de desplazamientos asociado.
- ii) Demostrar que corresponde a un estado de deformaciones planas.
- iii) Calcular el campo de desplazamientos asociado.

## Capítulo 6

# Modelos con simetría

Los **problemas axisimétricos** o **radialmente simétricos** se refieren al estudio de estructuras de revolución bajo cargas axisimétricas. Una estructura de revolución se genera por una sección transversal que rota  $360^\circ$  alrededor de un eje de revolución como muestra la figura.



Si se verifican las dos condiciones, geometría axisimétrica y carga axisimétrica, entonces la respuesta de la estructura será axisimétrica; esto significa que todas las variables de interés en el análisis estructural (desplazamientos, deformaciones, tensiones) son independientes de la coordenada ángulo de giro.

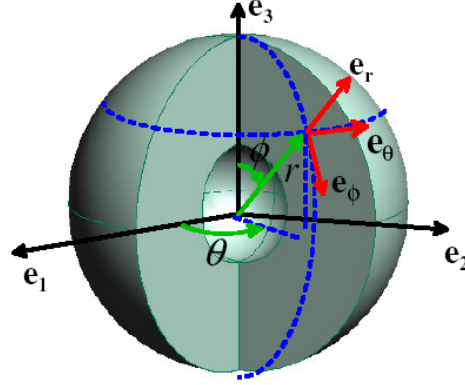
Este es un problema de gran interés en la práctica ya que muchos problemas en la industria o en la ingeniería cumplen esta propiedad. En este capítulo nos centraremos en dos casos particulares: problemas con simetría cilíndrica y problemas con simetría esférica.

### 6.1. Simetría esférica

Consideremos un problema de elasticidad lineal sobre un sólido cuya configuración de referencia tiene simetría esférica y supondremos las siguientes hipótesis:

- Todos los desplazamientos son pequeños.
- El material es elástico, lineal e isótropo, con módulo de Young  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  y densidad de masa  $\rho_0$ .

Un dominio con simetría esférica representativo se muestra en la siguiente figura:



Así consideramos un **sólido esférico**  $\mathcal{B}$  de radio  $r_{ext}$ , con un agujero interior de radio  $r_{int}$ , y sometido a **cargas con simetría esférica**: esto significa que las fuerzas de volumen, las de superficie y los desplazamientos impuestos actúan sólo en la dirección radial y son independientes de la longitud,  $\theta$ , y de la latitud,  $\phi$ . Para resolver problemas de estas características es más conveniente expresar todos los vectores y tensores del problema en coordenadas esféricas con respecto a la base  $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$  como se muestra en la figura y reducir el problema a uno unidimensional.

Para un problema de simetría esférica debe verificarse:

- La geometría se describe completamente a través del vector de posición  $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ ,  $0 \leq r_{int} \leq r \leq r_{ext}$ .
- Las fuerzas de volumen  $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{e}_r$ .
- Las fuerzas de superficie  $\mathbf{g} = g(r)\mathbf{e}_r$  deben actuar sobre toda una superficie esférica.

Con estas hipótesis, el campo de desplazamientos puede comprobarse que también es de la forma:

$$\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r.$$

En las expresiones anteriores  $f(r)$ ,  $g(r)$  y  $u(r)$  son funciones escalares.

Para los problemas con simetría esférica las ecuaciones de elasticidad lineal se reducen a (la primera igualdad se refiere en cada caso a la correspondiente expresión en coordenadas esféricas, y las siguientes a su reducción si existe simetría esférica):

■ **Relaciones tensor deformación - desplazamiento:**

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{du(r)}{dr}; \\
 \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} = \frac{u(r)}{r}; \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin(\phi)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\phi}{r \tan(\phi)} = \frac{u(r)}{r}, \\
 2\varepsilon_{r\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} = 0, \\
 2\varepsilon_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin(\phi)} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r \tan(\phi)} = 0, \\
 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r \sin(\phi)} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

■ **Ley constitutiva:**

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(x) &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x) \\
 &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \varepsilon_{kl}(x) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl}(x), \\
 \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\
 &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{du(r)}{dr} + 2 \frac{u(r)}{r} \right) \\
 &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r}, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\phi\phi} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\
 &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{u(r)}{r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{du(r)}{dr} + 2 \frac{u(r)}{r} \right) \\
 &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r}, \\
 \sigma_{r\theta} &= \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que podemos expresar las relaciones de interés en la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & 2\nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du(r)}{dr} \\ \frac{u(r)}{r} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

En consecuencia, los tensores de deformación y desplazamiento son:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du(r)}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u(r)}{r} \end{pmatrix}, \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

con la propiedad de que  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$  y  $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi}$ .

- Las **ecuaciones de equilibrio** en coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\sin(\phi)} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \right\} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sigma_{r\phi}}{r \tan(\phi)} + f_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin(\phi)} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}}{r \tan(\phi)} + \frac{3}{r} \sigma_{r\phi} + f_\phi &= 0, \\ \frac{1}{r \sin(\phi)} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + 3 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{2}{r \tan(\phi)} \sigma_{\theta\phi} + f_\theta &= 0. \end{aligned}$$

En el caso particular de problemas con simetría esférica se reducen a la ecuación unidimensional:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0, \quad r_{int} < r < r_{ext}. \quad (6.2)$$

- **Condiciones de contorno:**

- Dirichlet: la condición Dirichlet  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$  debe ser tal que  $\mathbf{u}_D = u_D(r) \mathbf{e}_r$  y debe aplicarse sobre toda una superficie esférica. Así, si se aplica sobre la interior se obtiene:

$$\mathbf{u}(r_{int}) = \mathbf{u}_D(r_{int}).$$

Análogamente, si se aplica sobre la cara exterior:

$$\mathbf{u}(r_{ext}) = \mathbf{u}_D(r_{ext}).$$

- Neumann:

- Si se aplica una condición de esfuerzos sobre  $r = r_{int}$ , dado que el vector normal exterior unitario es  $-\mathbf{e}_r$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -\sigma_{rr}(r_{int}) &= g(r_{int}). \end{aligned}$$

- Análogamente, en  $r = r_{ext}$ ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sigma_{rr}(r_{ext}) &= g(r_{ext}). \end{aligned}$$

### 6.1.1. Ecuación unidimensional para problemas de elasticidad con simetría esférica

Substituyendo en la ecuación de equilibrio (6.2), la expresión en términos del desplazamiento (6.1), se deduce:

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0. \\ & \frac{d}{dr} \left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r} \right) \\ & + \frac{2}{r} \left\{ \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r} \right. \\ & \left. - \left( \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r} \right) \right\} + f_r = 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos y simplificando se deduce:

$$\begin{aligned} & (1-\nu) \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + 2\nu \frac{d}{dr} \left( \frac{u(r)}{r} \right) + (1-\nu) \frac{2}{r} \frac{du(r)}{dr} \\ & + 4\nu \frac{u(r)}{r^2} - \frac{2\nu}{r} \frac{du(r)}{dr} - \frac{2}{r} \frac{u(r)}{r} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} f_r = 0. \end{aligned}$$

Esto implica:

$$\begin{aligned} & (1-\nu) \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\nu}{r} \frac{du(r)}{dr} - \frac{2\nu}{r^2} u(r) + (1-\nu) \frac{2}{r} \frac{du(r)}{dr} \\ & + 4\nu \frac{u(r)}{r^2} - \frac{2\nu}{r} \frac{du(r)}{dr} - 2 \frac{u(r)}{r^2} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} f_r = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1-\nu) \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left( \frac{2\nu}{r} + (1-\nu) \frac{2}{r} - \frac{2\nu}{r} \right) \frac{du(r)}{dr} \\ & + (-2\nu + 4\nu - 2) \frac{u(r)}{r^2} + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} f_r = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\left( \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du(r)}{dr} - 2 \frac{u(r)}{r^2} \right) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} f_r = 0.$$

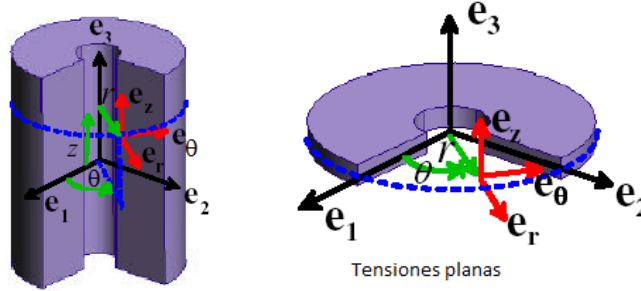
Esta relación puede resumirse como:

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u(r)) \right) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} f_r = 0, \quad r_{int} < r < r_{ext}.}$$

Conocido el campo de fuerzas, esta ecuación unidimensional puede integrarse fácilmente para calcular el desplazamiento  $u(r)$ . En la integración surgirán dos constantes arbitrarias que deben utilizarse para verificar las condiciones de contorno en las esferas externa e interna; las constantes deben determinarse de modo que o bien el desplazamiento o la tensión radial se impongan sobre estas superficies.

## 6.2. Simetría cilíndrica

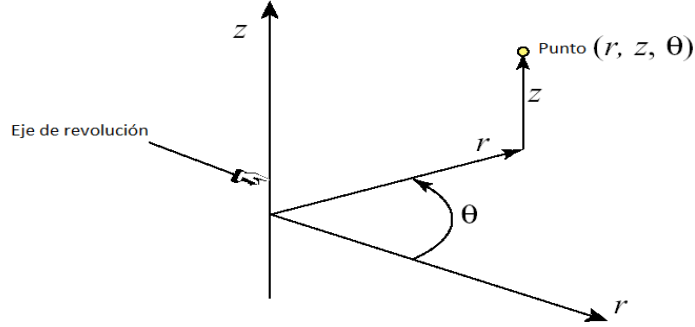
Dos situaciones con simetría cilíndrica se indican en las siguientes figuras:



En la primera de ellas la longitud del cilindro es mucho mayor que cualesquiera de las otras dimensiones características; en la segunda, en cambio, esta longitud es mucho menor y el cilindro se asemeja más a **una placa**. La deformación y las tensiones en el sólido dependen de las cargas aplicadas en los extremos del cilindro:

- Si se impide cualquier alargamiento -stretching- en la dirección  $\mathbf{e}_3$  se tiene en el sólido un estado de **deformaciones planas**:  $u_3 = 0$  sobre las caras superior e inferior del cilindro.
- Si el cilindro es de pequeño espesor y está libre de tensiones sobre las caras superior e inferior se tiene un estado de tensiones planas:  $\sigma_{33} = 0$  sobre las caras superior e inferior del cilindro. Como hemos visto, la solución del problema de **tensiones planas** aproxima la solución del problema de elasticidad tridimensional y la aproximación es precisa solamente si la longitud del cilindro es mucho menor que su diámetro.
- Si los extremos del cilindro largo están sujetos a esfuerzos dados o los extremos están libres de esfuerzos se tiene un estado de deformación plana generalizada. En este caso el problema de deformaciones planas aproxima la solución del problema tridimensional y da buena precisión solo lejos de los extremos del cilindro. Una regla muy usada es que esta solución solo es aplicable a una distancia superior a tres radios de los extremos del cilindro.

Fuera de estos tres casos de interés práctico suele ser muy útil, si las fuerzas aplicadas lo permiten, expresar el sistema en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , donde  $r$  es la coordenada radial, esto es, la distancia desde el eje de revolución,  $r \geq 0$ ;  $z$  es la coordenada axial, dirigida a lo largo del eje de revolución y  $\theta$  es la coordenada circunferencial también llamada longitud.



Nótese que  $(r, z)$  forman un sistema de coordenadas Cartesiano sobre los planos con  $\theta$  constante, mientras que  $(r, \theta)$  forman un sistema de coordenadas polares sobre los planos  $z = Cte$ .

En Barber ([2]) puede consultarse el detalle de las componentes del tensor de tensiones en coordenadas cilíndricas.

Para un problema con simetría axial se supone:

- El sólido  $\mathcal{B}$  se obtiene como la rotación de  $360^\circ$  de una superficie plana con respecto a un eje de rotación. En lo que sigue supondremos que la superficie,  $S_{rz}$ , está en el plano  $rz$  y rota con respecto al eje  $z$ .
- El **vector de posición** de la superficie  $S_{rz}$  será:

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

- El sólido  $\mathcal{B}$  se obtendrá como:

$$\mathcal{B} = \{(r, z, \theta) : (r, z) \in S_{rz}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

- Las **fuerzas de volumen** admitidas son:

$$\mathbf{b}_0(r, z) = b_r(r, z)\mathbf{e}_r + b_z(r, z)\mathbf{e}_z.$$

- El **campo de desplazamientos** solución también será independiente de  $\theta$ :

$$\mathbf{u} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_z(r, z)\mathbf{e}_z,$$

donde  $u_r(r, z)$  se llama desplazamiento radial y  $u_z(r, z)$  desplazamiento axial.

- El **tensor linealizado de deformación** en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} = 0, \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\},\end{aligned}$$

donde  $[\mathbf{D}]$  es el operador gradiente simétrico  $4 \times 2$  que relaciona el desplazamiento con el tensor de deformación en coordenadas cilíndricas.

La primera igualdad se refiere en cada caso a la correspondiente expresión en coordenadas cilíndricas, y las siguientes a su reducción si existe simetría cilíndrica ); esto también debe tenerse en cuenta en lo que sigue para la ley constitutiva y las ecuaciones de equilibrio.

■ **Ley constitutiva:**

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(x) &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(x) \\ &= \left( \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \varepsilon_{kl}(x), \\ \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{rr} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{zz} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \\ &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta z} = 0, \\ \sigma_{rz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).\end{aligned}$$

El tensor de tensiones entonces es de la forma:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \\ &= [\hat{\mathbf{E}}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta matriz de elasticidad,  $[\hat{\mathbf{E}}]$ , se corresponde con el menor principal de orden 4 de la matriz de elasticidad general  $[\mathbf{E}]$  asociada a la ley de Hooke.

- Las **ecuaciones de equilibrio** en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + b_z &= 0. \end{aligned}$$

En el caso particular de problemas con simetría axial  $b_\theta = 0$ ,  $\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta z} = 0$  y  $\sigma_{\theta\theta}$  es independiente de  $\theta$ . Entonces el sistema anterior se reduce al sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + b_z &= 0, \end{aligned}$$

que debe resolverse en todo punto de una sección plana  $(r, z)$  del sólido de revolución. Este sistema bidimensional admite la expresión simplificada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rz})}{\partial r} + b_z &= 0, \end{aligned}$$

que debe resolverse sobre  $S_{rz}$ . Si  $b_\theta \neq 0$  el problema no puede ser tratado como axisimétrico.

- **Leyes de equilibrio en términos de los desplazamientos:** Las leyes de equilibrio anteriores pueden escribirse también en términos de los des-

plazamientos; así por ejemplo de la primera se deduce:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r = 0, \\ \Rightarrow & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} r \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) \\ & - \frac{1}{r} \left( \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u_r}{r} \right) \\ & + b_r = 0, \end{aligned}$$

ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el desplazamiento, que puede simplificarse como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} r \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \\ & - \frac{1}{r} \left( \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right) + b_r \frac{(1+\nu)}{E} = 0, \text{ sobre } S_{rz}. \end{aligned}$$

#### ■ Condiciones de contorno

Como es usual dos tipos de condiciones de contorno pueden imponerse:

- Dirichlet: Para que una condición del tipo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$  sobre  $\Gamma_D$ , sea compatible con simetría cilíndrica debe verificarse:

$$\mathbf{u}_D(r, z) = u_{Dr}(r, z) \mathbf{e}_r + u_{Dz}(r, z) \mathbf{e}_z,$$

y, además, la frontera  $\Gamma_D$  debe ser independiente de  $\theta$ , de forma que se obtenga al rotar  $360^\circ$  su intersección con  $S_{rz}$ . Así, si denotamos  $\gamma_D = \Gamma_D \cap S_{rz}$ , debe verificarse:

$$u_r(r, z) = u_{Dr}(r, z), u_z(r, z) = u_{Dz}(r, z) \text{ sobre } \gamma_D.$$

- Neumann: Para que una condición del tipo  $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{g}$  sobre  $\Gamma_N$ , sea compatible con simetría cilíndrica debe verificarse:

$$\mathbf{g} = g_r(r, z) \mathbf{e}_r + g_z(r, z) \mathbf{e}_z$$

y la frontera  $\Gamma_N$  debe ser independiente de  $\theta$ , de forma que se obtenga al rotar  $360^\circ$  su intersección con  $S_{rz}$ . Así, si denotamos  $\gamma_N = \Gamma_N \cap S_{rz}$ , debe verificarse:

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sobre } \gamma_N,$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal exterior unitario a  $\mathcal{B}$  en  $\gamma_N$ .

- Si hay condición Neumann en la tapa superior:  $z = z^0$

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{zz} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \sigma_{rz}(r, z^0) = g_r(r, z^0) \\ \sigma_{zz}(r, z^0) = g_z(r, z^0) \end{cases} \text{ sobre } \Gamma^+ \cap \gamma_N. \end{aligned}$$

- o Si hay condición Neumann en la tapa inferior:  $z = z_0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{rz} \\ -\sigma_{zz} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{cases} -\sigma_{rz}(r, z_0) = g_r(r, z_0) \\ -\sigma_{zz}(r, z_0) = g_z(r, z_0) \end{cases} \text{ sobre } \Gamma^- \cap \gamma_N.\end{aligned}$$

- o Por último, si la condición se impone sobre la superficie lateral exterior:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \sigma_{rr}(r, z) = g_r(r, z) \\ \sigma_{rz}(r, z) = g_z(r, z) \end{cases} \text{ sobre } \Gamma_L \cap \gamma_N.\end{aligned}$$

- o En caso de que el sólido no contenga al eje de simetría ( $r = 0$  no está en el dominio), la condición de contorno se formularía de forma análoga considerando que la normal sería  $-\mathbf{e}_3$ .
- o Si la frontera lateral interna de  $S_{rz}$  está en el eje de rotación  $r = 0$ , entonces las condiciones de contorno son las de simetría para garantizar el principio de acción reacción entre un plano vertical y el que está girado  $\pi$  radianes:  $u_r(0, z) = 0$ ;  $\boldsymbol{\sigma}_t(0, z) = \mathbf{0}$ . Dado que el vector de esfuerzos en esa frontera es:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = - \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces  $\boldsymbol{\sigma}_t(0, z) = -\sigma_{rz}(z, 0)\mathbf{e}_z$  que debe ser nulo.

### 6.3. Boletín 6

**Ejercicio 108** Para un sólido con simetría esférica sometido a fuerzas de superficie  $\mathbf{g}$  en la frontera exterior, definida por una esfera de radio  $r_{ext} = 0,5$  ¿Cómo debe ser la expresión de la condición de contorno sobre esta frontera y cómo debe ser  $\mathbf{g}$  para que sea compatible con un problema de simetría esférica?

**Ejercicio 109** Para un sólido con geometría cilíndrica ¿Cómo deben ser las condiciones de contorno Dirichlet sobre su base  $z = 0$  para que sean compatibles con un problema con simetría cilíndrica?

**Ejercicio 110** Se considera un cilindro circular recto de latón con base de radio  $R_{ext} = 2m$  y altura  $L = 10m$ . con un hueco central de radio  $R_{int} = 1m$ . Considerar una dilatación radial de valor:

$$u_1(x, y, z) = 1.e - 02x, u_2(x, y, z) = 1.e - 02y, u_3(x, y, z) = 0.$$

Suponer que los parámetros elásticos del latón son  $E = 100GPa$ ,  $\nu = 0,33$ .

- i) Escribir el campo de tensiones en coordenadas cartesianas.
- ii) Escribir el campo de desplazamientos en coordenadas cilíndricas.
- iii) Escribir el campo de tensiones en coordenadas cilíndricas.
- iv) Describir los esfuerzos normales y tangenciales en las superficies laterales exterior e interior del cilindro.
- v) Escribir el problema bidimensional asociado en coordenadas cilíndricas.
- vi) Escribir el problema bidimensional de deformaciones planas asociado.

**Ejercicio 111** ♣ Considera un planeta bajo su propia atracción gravitatoria. Idealiza el planeta como una esfera sólida de radio  $a$  sometida a las siguientes cargas:

- Un campo de fuerzas  $\mathbf{b} = -g \frac{r}{a} \mathbf{e}_r$  por unidad de masa, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera.
- La superficie del planeta está libre de esfuerzos.

Considerar, además, que la componente normal de la tensión en la dirección radial debe estar acotada en el centro del planeta.

- i) Calcular los campos de desplazamientos verificando la ecuación de equilibrio.
- ii) A partir de la ley de Hooke deducir la correspondiente componente normal de la tensión en la dirección radial.
- iii) Utilizar las condiciones de contorno para determinar la deformación y la tensión en cada punto del planeta.

**Ejercicio 112** Se considera un cilindro circular recto de latón con base de radio  $r_{ext} = 2m$  y altura  $L = 10m$ . con un hueco central de radio  $r_{int} = 1m$ . Considerar una dilatación radial de valor:

$$u_1(x, y, z) = 1.e - 02x, u_2(x, y, z) = 1.e - 02y, u_3(x, y, z) = 0.$$

Suponer que los parámetros elásticos del latón son  $E = 100GPa$ ,  $\nu = 0,33$ .

- i) Escribir el campo de tensiones en coordenadas cartesianas.
- ii) Escribir el campo de desplazamientos en coordenadas cilíndricas.
- iii) Escribir el campo de tensiones en coordenadas cilíndricas.
- iv) Describe los esfuerzos normales y tangenciales en las superficies laterales exterior e interior del cilindro.

**Ejercicio 113** Considera el sólido de revolución generado al rotar entorno al eje  $z$  el dominio 2D delimitado por  $r = 0,2$  y las curvas  $C_1$  y  $C_2$  de Bezier de grado 2 definidas en el plano  $(r, z)$  por:

- $C_1$  pasa por los puntos  $P_0 = (0, 2, -0, 8)$  y  $P_1 = (1, 0)$  y cuyas rectas tangentes se cortan en el punto  $P_2 = (0, 8, -0, 4)$ .
- $C_2$  pasa por los puntos  $P_3 = (0, 2, 0, 8)$  y  $P_4 = (1, 0)$  y cuyas rectas tangentes se cortan en el punto  $P_5 = (1, 0, 8)$ .

Se supone que las características físicas del sólido son:

$$\begin{cases} \text{Densidad} & 2170 \text{Kg/m}^3, \\ \text{Módulo de Young} & 2e11 \text{Pa}, \\ \text{Coeficiente de Poisson} & 0,25. \end{cases}$$

Considerar que el sólido está empotrado en toda su superficie interior, sobre la superficie exterior generada por  $C_2$  está sometido a una fuerza  $\mathbf{g} = -2000z\mathbf{e}_r$  y el resto está libre de fuerzas externas. Las fuerzas de la gravedad deben imponerse en la dirección del eje  $r$ .

- i) Escribir el modelo axisimétrico asociado.
- ii) Resolver el modelo axisimétrico 2D utilizando COMSOL.
- iii) Indicar si este problema admitiría una resolución como problema plano.

**Ejercicio 114** ♣ Se considera el sólido semiesférico:

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; 1/4 \leq z \leq 1\},$$

de densidad constante  $\rho_0 = 2750 \text{Kg/m}^3$ , sometido a la deformación:

$$X((x, y, z), t) = (-tx, y, z),$$

cuyo desplazamiento asociado en metros es:

$$\mathbf{u}((x, y, z), t) = (x(-t - 1), 0, 0).$$

- i) Comprobar si es una transformación rígida.
- ii) Calcular el tensor de tensiones utilizando la ley de Hooke para

$$\lambda = 10e5 \text{MPa}, \quad \mu = 8e4 \text{MPa},$$

escribiendo el resultado en  $\text{N/m}^2$ .

- iii) Calcular el tensor desviatorio en  $t = 0,01\text{s}$  y expresar el resultado en  $\text{Pa}$ .
- iv) Calcular la densidad de fuerzas de volumen y la densidad de fuerzas de superficie sobre su frontera para que el desplazamiento dado y el tensor de tensiones calculados sean solución del problema elastodinámico lineal:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b}_0 & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} & \text{en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{en } \partial \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{en } \mathcal{B}. \end{cases}$$

Indicar las unidades de las fuerzas. Indicar en qué casos se tienen esfuerzos normales, tangenciales, de tracción o de compresión.

- v) *Planteado el problema elastodinámico en la forma anterior con los datos calculados ¿Estaría bien planteado para calcular, por ejemplo, con el ordenador su solución?*
- vi) *¿Crees que este problema se podría reducir a uno evolutivo de deformaciones o tensiones planas, esto es, que para cada  $t$  el problema asociado pueda plantearse sobre una sección bidimensional?*
- vii) *¿Tiene este problema simetría esférica?*
- viii) *¿Y simetría cilíndrica?*

**Ejercicio 115 ♣** *Considera un cilindro hueco,  $C_h$ , con un espesor de 0.125m, siendo la sección transversal exterior de radio 0.25m, con altura 3m y con generatriz correspondiente al eje  $oy$ .*

- i) *Escribir para esta geometría un modelo matemático correspondiente a un problema 3D que admita una hipótesis de simetría cilíndrica. Considerar que las fuerzas de volumen son no nulas, y fuerzas superficiales impuestas en sus superficies laterales (interior y exterior) y en su base. Detallar la expresión analítica de todos los datos del modelo para que tenga una solución única.*
- ii) *Consultar el sitio WEB: [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y elegir para una aleación de acero los parámetros necesarios para completar los datos del modelo considerado. Considerar todos los datos en el sistema internacional de unidades.*
- iii) *Resolver el problema 3D en COMSOL. Calcule el error máximo en la componente  $y$  y del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta.*
- iv) *Calcular el máximo de la tensión equivalente de Von Mises y de las tensiones principales.*
- v) *Calcular la carga total aplicada en la tapa superior  $y = 3$ . Comparar su valor con el calculado numéricamente.*

**Ejercicio 116 ♣** *Considerar la geometría y el modelo considerado en el Ejercicio 115.*

- i) *Escribir el modelo matemático 3D correspondiente en coordenadas cilíndricas.*
- ii) *Escribir los tensores de deformación y tensión en coordenadas cilíndricas.*
- iii) *Considerar la misma aleación de acero que en el Ejercicio 115 y escribir el modelo 2D asociado, en términos del desplazamiento, en un plano vertical del cilindro aprovechando la simetría cilíndrica del problema 3D propuesto.*
- iv) *Resolver el problema de simetría axial 2D en COMSOL. Calcular el error máximo en la componente radial del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta.*
- v) *Comparar el valor de la carga total aplicada a la tapa superior  $y = 3$  con la obtenida de la simulación 2D.*

- vi) *Calcular el máximo de la tensión de Von Mises y de las tensiones principales utilizando la simulación 2D y compararlas con las calculadas previamente en la simulación 3D.*

## Capítulo 7

# Problemas de torsión y flexión

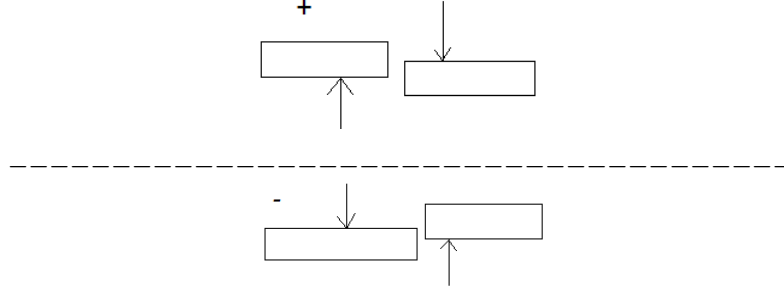
Este capítulo trata un caso particular de sólidos cilíndricos, elásticos, lineales, homogéneos e isótropos cargados únicamente en sus extremos. Este sólido, conocido como sólido de Saint Venant, permitirá obtener modelos relativamente simples y muy útiles en el caso de vigas.

En la primera parte del capítulo nos centraremos en analizar la deformación y tensiones de una viga sometida en uno de sus extremos a un momento de eje coincidente con el de la propia viga. La segunda parte se dedicará al estudio de la flexión de vigas cilíndricas encastradas en un extremo, y tales que la carga resultante en el otro extremo equivale a una fuerza concentrada aplicada perpendicularmente al eje de la viga, lo que constituye una carga en flexión.

En ingeniería y arquitectura se denomina **viga** -beam- a un elemento constructivo en el cual la longitud predomina sobre las otras dos dimensiones y que trabaja principalmente a flexión.

Las reacciones internas características para una viga son:

- **Fuerza axial** -axial force-: es la componente de la fuerza tangencial al eje de la viga, por tanto, es la componente que va en la dirección del eje de la viga. La fuerza axial se toma positiva cuando es en tracción o extensión -tensile-, y negativa cuando es a compresión.
- **Fuerzas cortantes** -shearing force o shear-: son las componentes de las fuerzas perpendiculares al eje de la viga. Se calculan como la suma algebraica de todas las fuerzas externas perpendiculares al eje de la viga y que actúan a un lado de la sección considerada. Existen dos fuerzas cortantes: una con respecto a cada dirección de un sistema de coordenadas considerado en cada sección de la viga; a lo largo del texto tomaremos el origen de este sistema en el baricentro de la sección. Por convenio, la fuerza cortante es positiva cuando la parte situada a la izquierda de la sección tiende a subir con respecto a la parte derecha. En las siguientes figuras podemos observar en el primer caso una fuerza cortante positiva mientras que en el segundo caso es negativa.



Supongamos una viga con eje  $x_3$ , y de sección constante  $\omega$  en el plano  $x_1x_2$ . Tomada una división de la viga a través de una sección perpendicular al eje, encontramos que las fuerzas ejercidas sobre el trozo izquierdo de la viga en cada punto  $(x_1, x_2, x_3)$  son:

$$(\sigma \mathbf{n})(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3) \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} (N/m^2).$$

La fuerza axial es:

$$R_3(x_3) = \int_{\omega} \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \quad (N).$$

La fuerza tangencial será:

$$\begin{pmatrix} R_1(x_3) \\ R_2(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\omega} \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \\ \int_{\omega} \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \end{pmatrix} (N).$$

- **Momentos:** Análogamente a como se hizo para las fuerzas, dividamos la viga en dos trozos considerando una sección transversal y calculemos el momento de las fuerzas con respecto al origen de la sección en cada punto:

$$(\mathbf{ox} \wedge \sigma \mathbf{n})(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \sigma_{33} \\ -x_1 \sigma_{33} \\ x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31} \end{pmatrix} (Pa \cdot m),$$

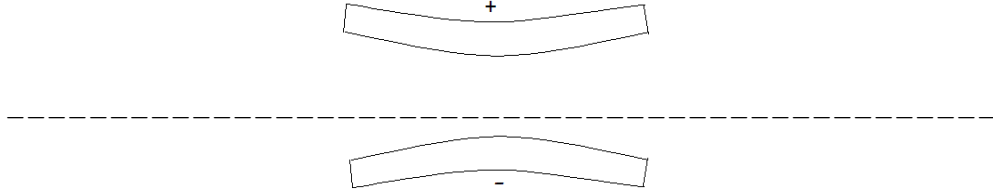
siendo  $Pa \cdot m$  las unidades para el momento por unidad de superficie.

- **Momento de flexión** -bending moment-: son las componentes transversales del momento de la fuerza que dos trozos de viga transmiten el uno al otro con respecto a la sección considerada. El **Momento Flector** tiene de componentes:

$$\begin{pmatrix} M_1(x_1, x_2, x_3) \\ M_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) \\ -x_1 \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

El momento de flexión o momento flector es tomado positivo cuando comprime -stretches- las fibras superiores y tracciona las fibras inferiores de la viga. En las siguientes figuras podemos observar en el primer caso un momento flector positivo mientras que en el segundo caso es negativo.

Existen dos momentos flectores, uno con respecto a cada dirección de una base de la sección de la viga.

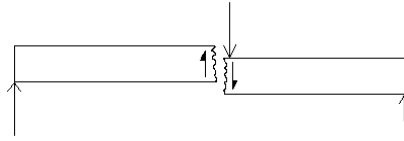


- **Momento de torsión** -twisting moment-: componente del momento a lo largo del eje de la viga con respecto al eje de rotación. El **Momento Torsor** se calcula a partir de la tercera componente del vector de momentos:

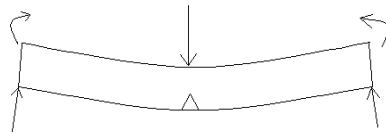
$$M_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3) - x_2 \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3).$$

Las fuerzas cortantes y los momentos flectores son ejemplos de fuerzas internas que surgen al aplicar cargas a una estructura tipo viga. Aumentando la carga se puede provocar el fallo de la estructura en dos formas:

- a) Aumentando los esfuerzos cortantes lo que llega a provocar su **ruptura** a través de su sección.



- b) Aumentando la flexión de la viga hasta valores excesivos provocando su **fallo**.



## 7.1. Torsión elástica de barras cilíndricas

Se llama **torsión** a la sollicitación que actúa sobre la viga sometida a un momento de eje coincidente con el de la propia viga. Cuando esta sollicitación no está acompañada por ninguna otra se llama **torsión pura**.

Supongamos un sólido cilíndrico de generatriz paralela al eje  $x_3$  y longitud  $L$ . La sección transversal  $\omega$  se supone delimitada por una curva  $\gamma = \partial\omega$  de ecuación  $f(x_1, x_2) = 0$ .

Supondremos **fuerzas de volumen despreciables** ( $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ ) y las condiciones de contorno siguientes:

- La viga está **encastrada en la tapa inferior**  $\Gamma^-$ , esto es **en la sección**  $\omega_0$  correspondiente a  $x_3 = 0$ . En realidad limitaremos esta hipótesis, para poder tener torsión uniforme, a que  $u_1 = u_2 = 0$  sobre la sección  $\omega_0$ .

- Supondremos la superficie lateral del cilindro,  $\Gamma_L$ , **libre de fuerzas aplicadas**.
- **Sobre la cara superior  $\Gamma^+$** , esto es sobre la sección  $\omega_L$  **correspondiente a  $x_3 = L$ , las cargas aplicadas  $\mathbf{g}$  se suponen equivalentes a un par  $M_3$  con dirección  $\mathbf{e}_3$** , es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \int_{\omega_L} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = \int_{\omega_L} \mathbf{g}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M} &= \int_{\omega_L} (\vec{ox} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}))(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\omega_L} (\vec{ox} \wedge \mathbf{g})(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = M_3 \mathbf{e}_3, \quad (N \cdot m).\end{aligned}$$

Esto es:

- La resultante de las fuerzas axiales -axial forces-,  $R_3$ , y de las fuerzas cortantes -shearing forces- a lo largo de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ ,  $R_1, R_2$ , respectivamente, son nulas.
- Los momentos de flexión -bending moment- a lo largo de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ ,  $M_1, M_2$ , respectivamente, son nulos; mientras que el momento torsor -twisting moment-  $M_3$  es de valor dado.

Admitamos por un momento que el tensor de tensiones solución de este problema de torsión pura sea de la forma:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Si somos capaces de verificar todas las ecuaciones del problema elástico con un tensor de este tipo, entonces, gracias a la unicidad de solución, el tensor propuesto será la solución correcta para la torsión. Este será el objetivo de los siguientes apartados.

### 7.1.1. Ecuación de equilibrio

Como las fuerzas de volumen se suponen despreciables, las ecuaciones de equilibrio, en coordenadas cartesianas, se reducen a:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0,}$$

deduciéndose de las otras dos ecuaciones de equilibrio la independencia del tensor de tensiones respecto de  $x_3$ , algo natural puesto que la geometría de la viga y las condiciones de carga son independientes de  $x_3$ .

### 7.1.2. Ecuación de compatibilidad

Las ecuaciones de Beltrami

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \text{Div} \mathbf{b}_0 + \left( \frac{\partial (b_0)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (b_0)_j}{\partial x_i} \right) = 0,$$

se reducen a:

$$\boxed{\Delta\sigma_{13} = 0, \Delta\sigma_{23} = 0.}$$

Esta ecuación debe verificarse en todo el sólido, pero dado de las ecuaciones de equilibrio se ha deducido que las tensiones no pueden depender de  $x_3$ , ambas basta que se verifiquen en  $\omega$ .

### 7.1.3. Ley de comportamiento

Aplicando la ley de Hooke:

$$\varepsilon(x) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\sigma)\mathbf{I},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{13}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{23}, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0.\end{aligned}$$

### 7.1.4. Tensor de deformación

El vector desplazamiento será tal que sus componentes  $u_1$  y  $u_2$  dependen de  $x_3$ , puesto que ambos deben ser nulos en la sección encastrada. Las relaciones:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

implican:

$$\boxed{u_1 = u_1(x_2, x_3), u_2 = u_2(x_1, x_3), u_3 = u_3(x_1, x_2),}$$

debiéndose verificar, además:

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} = 0.$$

Así,  $u_1$  tiene a lo sumo una dependencia lineal en  $x_2$ , y  $u_2$  es a lo sumo lineal en  $x_1$ . Además:

$$\frac{\partial u_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2(x_1, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2)}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

### 7.1.5. Condiciones de contorno

Sobre la tapa  $x_3 = L$ , el vector de esfuerzos es:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})(x_1, x_2, L) = \begin{pmatrix} \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La resultante de fuerzas debe ser nula sobre esta cara, entonces:

$$\int_{\omega_L} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = \mathbf{0} \iff \boxed{\int_{\omega_L} \sigma_{13}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0, \int_{\omega_L} \sigma_{23}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0.}$$

Teniendo en cuenta que las tensiones no dependen de  $x_3$ , las ecuaciones anteriores pueden escribirse sobre cualquier sección  $\omega$ .

El momento de los esfuerzos sobre la cara  $\omega_L$  debe ser igual a  $M_3\mathbf{e}_3$  y, por tanto:

$$\int_{\omega_L} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = M_3\mathbf{e}_3 \iff \begin{cases} M_1 = 0, \\ M_2 = 0, \end{cases} \boxed{\int_{\omega_L} (x_1\sigma_{23}(x_1, x_2) - x_2\sigma_{13}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = M_3.}$$

Sobre la cara lateral las cargas aplicadas son nulas, por tanto:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_L.$$

En todo punto de  $\Gamma_L$  el vector normal es proporcional al gradiente de  $f$ , la función cuyo conjunto de nivel cero define la frontera de  $\omega$ , y, por tanto, la sección transversal de  $\Gamma_L$ . Entonces  $\mathbf{n} = \lambda(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0)^T$ , siendo  $\lambda$  el factor escalar que garantiza que la normal elegida es unitaria y exterior. Para que la frontera  $\Gamma_L$  esté libre de esfuerzos debe verificarse:

$$\boxed{\sigma_{13}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sigma_{23}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \text{ sobre } \Gamma_L.}$$

Dado que todos los términos del primer miembro son independientes de  $x_3$ , basta con verificar esta ecuación sobre  $\gamma = \partial\omega$ .

## 7.2. Torsión de vigas de sección circular

Nos centraremos, en primer lugar, en el estudio de la torsión en vigas en las que su sección recta  $\omega$  es circular:

$$f = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0.$$

En este caso, gracias a la simetría de revolución, podemos suponer que las secciones rectas del cilindro tan sólo sufren una rotación de ángulo  $\theta$  respecto al eje  $0x_3$ , variando esta rotación con la sección para tener en cuenta el encastramiento de la sección  $\omega_0$ . Puesto que las deformaciones deben ser pequeñas, tomaremos:

$$\theta = \alpha x_3,$$

donde  $\alpha$  representa el desplazamiento angular de dos secciones rectas que distan la unidad de longitud: rotación relativa por unidad de longitud, y es llamado el **ángulo unidad de torsión** -unit angle of torsion-; veremos que  $\alpha$  también puede ser considerado el **parámetro de carga del problema**.

Con esta idea, un punto  $M(x_1, x_2, x_3)$  de una sección transversal pasará a estar en la posición  $M'(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3)$  después de la deformación, de forma que si  $x_1 = r \cos(\beta)$ ,  $x_2 = r \sin(\beta)$  con respecto a un sistema de coordenadas polares en la sección  $x_3$ , el desplazamiento se escribiría:

$$\begin{aligned} u_1 &= r \cos(\beta + \theta) - r \cos(\beta) = r \cos(\beta)(\cos(\theta) - 1) - r \sin(\beta) \sin(\theta) \\ &= x_1(\cos(\theta) - 1) - x_2 \sin(\theta), \\ u_2 &= r \sin(\beta + \theta) - r \sin(\beta) = r \sin(\beta)(\cos(\theta) - 1) + r \cos(\beta) \sin(\theta) \\ &= x_1 \sin(\theta) + x_2(\cos(\theta) - 1). \end{aligned}$$

Si  $\theta$  es pequeño, tendremos en el primer orden:

$$u_1 = -\theta x_2, u_2 = \theta x_1$$

es decir,

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, u_2 = \alpha x_1 x_3, u_3 = 0.$$

Observemos que:

- Las **secciones** rectas, planas y perpendiculares al eje antes de la deformación, **se mantienen planas y perpendiculares al eje** después de la misma.
- Los **radios de las distintas secciones rectas se mantienen rectos**.
- El **ángulo formado por los radios de una misma sección recta se mantiene constante** después de la deformación.

Estas tres propiedades verificadas por las vigas cilíndricas, no sólo de sección llena sino también anular, conforman la **teoría elemental de Coulomb**.

El tensor de deformación asociado al desplazamiento calculado es:

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de tensiones asociado se reduce a:

$$\sigma_{23} = \mu \alpha x_1, \sigma_{13} = -\mu \alpha x_2.$$

Las otras componentes son nulas tal y como habíamos considerado. La ecuación de equilibrio se verifica de forma automática y, lógicamente, las ecuaciones de compatibilidad, puesto que en este caso se ha razonado a partir del desplazamiento.

No resta más que verificar las condiciones de contorno. El encastramiento en  $x_3 = 0$  se verifica trivialmente. La condición de esfuerzos nulos sobre la superficie lateral se verifica con  $f = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$ ; también la condición de resultante

de esfuerzos nulos sobre la tapa  $\omega_L$ . Tan sólo nos queda por verificar la tercera ecuación sobre la resultante de los momentos:

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{\omega_L} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2 \\ &= \mu \alpha \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \\ &= \mu \alpha I_0, \end{aligned}$$

siendo  $I_0 = \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \pi R^4/2$  el **momento cuadrático polar de la sección recta**. En consecuencia, el ángulo unidad de torsión es:

$$\alpha = \frac{M_3}{\mu I_0}.$$

Así,  $\alpha$  caracteriza la deformación a partir del momento torsor, la geometría de la sección y el parámetro de cortadura del material; este ángulo es directamente proporcional a la característica estática  $M_3$ , e inversamente proporcional a la característica elástica  $\mu$  ( $G$ ) y a la característica geométrica  $I_0$ . El término  $\mu I_0$  se llama **rigidez a la torsión**. El parámetro de Lamé  $\mu$  ( $G$ ), también llamado **módulo de elasticidad transversal**, se determina en la práctica mediante ensayos de torsión sobre barras cilíndricas de momento  $I_0$  conocido: se les aplica un momento torsor medible y se mide, asimismo, el ángulo de torsión  $\alpha$  originado, calculándose  $G$  de la ecuación anterior. Como se sabe  $E$  se obtiene en el ensayo de tracción y  $\nu$ , conocidos  $E$  y  $\mu$ , se deduce de la relación:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Obsérvese que:

$$\int_0^L \left( \int_{\omega} \rho (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \right) dx_3,$$

representa el momento de inercia alrededor del eje  $x_3$  que, como sabemos, mide la respuesta de un cuerpo ante los intentos de girarlo; puesto que aquí consideramos que el cuerpo es homogéneo y que la longitud de la viga es  $L$ , el momento de inercia coincide con  $\rho L I_0$ . El momento de inercia es análogo a la masa de un cuerpo: mide su respuesta al intento de moverlo. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, los momentos de inercia dependen de la forma y no sólo de la masa total (es más difícil poner a girar un mástil que una bola compacta con la misma masa).

El vector de rotación asociado a este movimiento es (ver Sec. 3.3.1):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= (\omega_{32}, \omega_{13}, \omega_{21}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{2} (x_1, x_2, -2x_3), \end{aligned}$$

valor que coincide con  $\text{rot}(\mathbf{u})/2$ . Y como ya habíamos comentado más arriba:

$$\alpha = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}.$$

### 7.2.1. Cizallamiento

Se observa que, en todo punto de una sección transversal, el vector de esfuerzos cumple:

$$\sigma(M)\mathbf{e}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 = \mu\alpha(-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2),$$

vector que está en el plano de la sección. Obsérvese que el vector de esfuerzos es, en cada punto de una sección recta, perpendicular al radio que pasa por ese punto:  $\sigma(M)\mathbf{e}_3 \cdot (x_1, x_2, 0) = 0$ . Mientras que:

$$\sigma(M)\mathbf{e}_1 = \sigma_{13}\mathbf{e}_3, \sigma(M)\mathbf{e}_2 = \sigma_{23}\mathbf{e}_3.$$

Se obtiene un cizallamiento en las direcciones  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$  compuesto con un cizallamiento en las direcciones  $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ .

El **módulo de tensión tangencial**  $\tau$  es igual a:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = \mu^2\alpha^2(x_1^2 + x_2^2) = \mu^2\alpha^2r^2 \\ \Rightarrow \tau(r) &= \sigma_t(r) = \mu\alpha r = \frac{M_3}{I_0}r, \end{aligned} \quad (7.2)$$

alcanzando su valor máximo en la frontera de la viga:

$$\sigma_{t\text{ máx}} = \frac{M_3}{I_0}R = \frac{2M_3}{\pi R^3},$$

sin más que tener en cuenta el valor del momento de inercia polar  $I_0 = \pi R^4/2$ , antes calculado. De la ecuación (7.2), y dado que  $\mu$  y  $\alpha$  son constantes en cada sección, se deduce que la tensión cortante en cada punto de una sección es proporcional a su distancia al centro de esta. Además

$$\sigma_{t\text{ máx}} = \frac{M_3}{(I_0/R)},$$

por lo que el cociente  $I_0/R$  se llama **módulo resistente a la torsión**; obsérvese que solo depende de la geometría y de la carga, no de las propiedades del material.

## 7.3. Torsión de vigas de sección anular

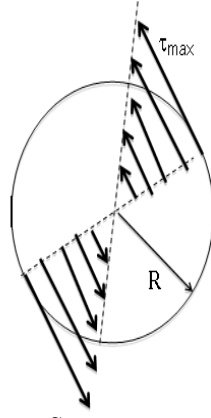
En el caso de que la sección transversal de la viga sea anular, es posible repetir todo el desarrollo de las secciones anteriores correspondientes a vigas de sección circular completa. Será suficiente con tener en cuenta que ahora el momento de inercia polar será:

$$I_0 = \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4),$$

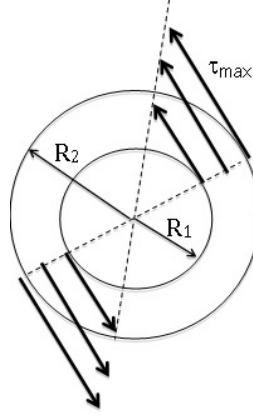
y

$$\sigma_{t\text{ máx}} = \frac{M_3}{I_0}R = \frac{2M_3}{\pi(R_2^4 - R_1^4)}R_2.$$

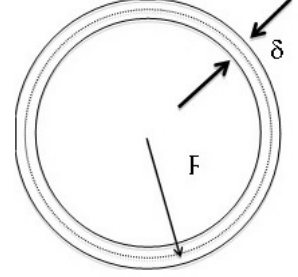
Dado un radio máximo igual, el tener la sección hueca hace aumentar las tensiones tangenciales.



Sección llena.



Sección hueca.



Pared delgada.

Si la pared de la sección transversal es delgada con espesor  $\delta$ , podemos realizar alguna simplificación:

$$\begin{aligned}\sigma_{t \text{ máx}} &= \frac{2M_3}{\pi(R_2^4 - R_1^4)} R_2 = \frac{2M_3}{\pi(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)} R_2 \\ &= \frac{2M_3}{\pi(R_2 - R_1)(R_2 + R_1)(R_2^2 + R_1^2)} R_2 \\ &\simeq_{R_2 \sim R_1 = R} \frac{2M_3}{\pi \delta 2R 2R^2} R = \frac{M_3}{2\pi \delta R^2}.\end{aligned}$$

#### 7.4. Sección simplemente conexa

En el caso de torsión de un tocho cilíndrico cuya sección transversal tiene una geometría cualquiera no es tan sencillo elegir un campo de desplazamientos como en el caso de tener sección circular, pues la condición de contorno sobre la superficie lateral no se verificaría tan fácilmente. En secciones no circulares no es pues admisible la teoría de Coulomb debido a que no se conservan las secciones rectas después de la deformación; en efecto, se puede comprobar experimentalmente que se alabea debido a que la distorsión de un ángulo inicialmente recto, uno de cuyos lados sea una fibra longitudinal, depende no sólo de la rotación relativa entre dos secciones sino, también, del alabeo de estas, aspecto que no considera la teoría de Coulomb.

Una modificación natural consiste en tener en cuenta el alabeo de las secciones rectas escribiendo:

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, u_2 = \alpha x_1 x_3, u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2),$$

donde  $\varphi$  es llamada **función de alabeo** -warping function- pues representa el alabeo de la sección durante la deformación; también se le conoce como **función de Saint-Venant**. Nótese que en este caso  $u_3$  no tiene por qué ser nulo sobre  $\omega_0$ .

A continuación, debemos determinar esta función  $\varphi$  para que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de contorno.

El cálculo de las tensiones nos proporciona las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right), \sigma_{23} = \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right), \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0.\end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio se obtiene (puesto que  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  no dependen de  $x_3$ ):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = 0},$$

en todo punto de la sección transversal  $\omega$ . La no aplicación de fuerzas sobre la superficie lateral se traduce en:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2\right)n_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1\right)n_2 = 0,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{d\varphi}{dn} = x_2 n_1 - x_1 n_2 \text{ sobre } \Gamma_L. \quad (7.3)$$

Pero no olvidemos que si la superficie lateral está definida a partir de la parametrización  $(x_1(s), x_2(s))$  de la frontera  $\gamma$  de la sección transversal  $\omega$ , entonces el vector normal se calcula por:

$$n_1 = x_2'(s), n_2 = -x_1'(s),$$

suponiendo que el parámetro  $s$  es natural, de forma que el vector normal a la curva sea unitario. En este caso, la ecuación (7.3) se transforma en:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x_1^2 + x_2^2) \text{ sobre } \Gamma_L.}$$

En resumen, hemos obtenido:

**Teorema 117** *El problema de torsión de una viga cilíndrica de sección simplemente conexa  $\omega$  consiste en determinar una función  $\varphi(x_1, x_2)$ , o función de Saint-Venant, de clase  $C^2$  tal que:*

$$\Delta \varphi = 0 \text{ en todo punto de la sección transversal } \omega, \quad (7.4)$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x_1^2 + x_2^2) \text{ en todo punto de la frontera } \gamma \text{ de } \omega. \quad (7.5)$$

Las componentes del vector desplazamiento son, entonces:

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, u_2 = \alpha x_1 x_3, u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2).$$

Obsérvese que el problema (7.4) - (7.5) solo depende de la geometría de la sección y no del material implicado. Además, si la sección es circular, la función de alabeo es nula, lo que reduce el desplazamiento al dado en la sección anterior.

Para que la demostración de este teorema sea completa, sólo nos queda por verificar que la acción de las cargas sobre  $\Gamma^+$  se reducen a un par  $M_3 \mathbf{e}_3$ . Para ello, es necesario que:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_L} \sigma_{13} dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_{\omega_L} \sigma_{23} dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_{\omega_L} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Para verificar la primera de estas relaciones debe verificarse:

$$\int_{\omega_L} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) dx_1 dx_2 = 0.$$

Ahora bien, puesto que  $\Delta \varphi = 0$ , y el integrando es independiente de  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) dx_1 dx_2 &= \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ x_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ x_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \right\} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\gamma} x_1 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) n_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) n_2 \right] d\gamma \\ &= \int_{\gamma} x_1 \left( \frac{d\varphi}{dn} - x_2 n_1 + x_1 n_2 \right) d\gamma = 0, \end{aligned}$$

gracias a la relación (7.3). De la misma forma se puede demostrar la segunda relación de (7.6). Con respecto a la tercera se debe tener:

$$\begin{aligned} M_3 &= \mu \alpha \int_{\omega} \left( x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \\ &\mu \alpha \left[ \int_{\omega} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \varphi \frac{d}{ds} (x_1^2 + x_2^2) d\gamma \right] \end{aligned} \quad (7.7)$$

y, por tanto:

$$M_3 = \mu \alpha D,$$

donde  $D$  se llama **módulo de rigidez geométrica a la torsión de la sección**  $\omega$ ; este parámetro sólo depende de la forma de la sección. Puesto que el valor de  $M_3$  es conocido, **el parámetro de carga  $\alpha$  se calcula desde la última relación.**

#### 7.4.1. Origen del sistema de referencia (opcional)

En los cálculos realizados más arriba, la posición en  $\omega$  del origen  $O$  del sistema de coordenadas no ha intervenido, cosa que sí tendrá importancia cuando estudiemos la flexión de vigas.

Consideremos un cambio de coordenadas definido por una traslación  $(a_1, a_2)$  en la sección:

$$X_1 = x_1 - a_1, X_2 = x_2 - a_2, X_3 = x_3,$$

y demostremos que **el origen se puede elegir libremente en torsión.** El sistema  $(0/\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  se cambia por  $(0'/\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$  cuidando que  $0'$  pertenezca a la sección  $\omega_0$ . En este nuevo sistema la deformación de la viga sería:

$$(I+U)(X_1, X_2, X_3) = (X_1 - \alpha X_2 X_3, X_2 + \alpha X_1 X_3, X_3 + \alpha \varphi_1(X_1, X_2)),$$

siendo el desplazamiento:

$$\begin{aligned} U_1 &= -\alpha X_3 X_2 = -\alpha x_3(x_2 - a_2), \\ U_2 &= \alpha X_3 X_1 = \alpha x_3(x_1 - a_1), \\ U_3 &= \alpha \varphi_1(X_1, X_2), \end{aligned}$$

donde en principio  $\varphi_1(X_1, X_2) \neq \varphi(x_1, x_2)$ .

Observamos que el desplazamiento en cada punto es el mismo que el calculado en el sistema de referencia original:

$$\begin{aligned}(I+\mathbf{U})(X_1, X_2, X_3) &= (X_1 - \alpha X_2 X_3, X_2 + \alpha X_1 X_3, X_3 + \alpha \varphi_1(X_1, X_2)) \\ &= (I+\mathbf{u})(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3) \\ &= (x_1 - a_1 - \alpha(x_2 - a_2)x_3, x_2 - a_2 + \alpha(x_1 - a_1)x_3, x_3 + \alpha \varphi_1(x_1 - a_1, x_2 - a_2)).\end{aligned}$$

Como las fuerzas de volumen se suponen nulas, la componente  $U_3$  debe ser armónica:

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_1 = 0.$$

La condición de contorno sobre la superficie lateral se escribe (puesto que  $n_1$  y  $n_2$  son iguales en ambos sistemas):

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - (x_2 - a_2)\right]n_1 + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + (x_1 - a_1)\right]n_2 = 0$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dn}(\varphi_1 + a_2 x_1 - a_1 x_2) = x_2 n_1 - x_1 n_2 \text{ sobre } \gamma.$$

Denotando por  $\psi = \varphi_1 + a_2 x_1 - a_1 x_2$ ,  $\psi$  es una función armónica como  $\varphi$  y verifica la misma condición sobre  $\gamma$  que  $\varphi$ . Se demuestra, entonces, que  $\varphi$  y  $\psi$  tan sólo pueden diferir en una constante arbitraria; esta constante no interviene en el cálculo de las tensiones puesto que para el cálculo de éstas se deriva la función de alabeo. En consecuencia, el origen de referencia no interviene en la torsión. Las componentes del tensor de tensiones en el nuevo sistema son:

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= \mu\alpha\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + x_1 - a_1\right), \sigma_{13} = \mu\alpha\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - x_2 + a_2\right), \\ \sigma_{33} &= \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0.\end{aligned}$$

#### 7.4.2. Función de tensiones de Prandtl

Hemos visto que la función  $\varphi$  solución del problema de torsión es una función armónica en  $\omega$ . Por tanto,  $\varphi$  puede considerarse como la parte real de una función holomorfa  $\tilde{f}$  de la variable compleja  $z = x_1 + ix_2$ :

$$\tilde{f}(x_1 + ix_2) = \varphi(x_1, x_2) + i\chi(x_1, x_2),$$

donde  $\chi(x_1, x_2)$  función conjugada de  $\varphi$ , debe verificar las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \chi}{\partial x_1}.$$

Si  $\varphi$  es conocida, entonces  $\chi$  se puede calcular por:

$$\chi(x_1, x_2) = \int_l \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} dx_2\right) = \int_{M(a_1, a_2)}^{M(x_1, x_2)} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_2\right),$$

donde la integral se toma a lo largo del camino  $l$  uniendo  $M(a_1, a_2)$  y  $M(x_1, x_2)$  de una sección transversal  $\omega$  cualquiera. Si  $\omega$  es simplemente conexa,  $\chi$  está

perfectamente definida: su valor en  $M(x_1, x_2)$  es independiente del camino, lo que es falso si  $\omega$  es múltiplemente conexa.

Formulemos ahora el problema de la torsión con ayuda de la función  $\chi$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dn} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}n_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_1}{ds}, \\ \frac{d\chi}{dn} &= \frac{\partial\chi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\chi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} = \frac{d\chi}{ds}.\end{aligned}$$

Así, la condición de contorno se escribe:

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x_1^2 + x_2^2) \text{ sobre } \gamma$$

y, por tanto:

$$\chi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + K \text{ sobre } \gamma.$$

Además, esta constante puede tomarse cero ya que no intervendrá en el cálculo de las tensiones. En consecuencia, la determinación de  $\chi$  se reduce a resolver el problema:

$$\boxed{\Delta\chi = 0 \text{ en todo punto de } \omega,} \quad (7.8)$$

$$\boxed{\chi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \text{ sobre } \gamma.}$$

### Función de Prandtl

La complejidad de la condición de contorno del problema (7.8) conduce al cambio de función:

$$\boxed{\vartheta = \chi - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).}$$

$\vartheta$  es llamada **función de Prandtl**. En este caso el problema de torsión se transforma en:

**Teorema 118** *La torsión de un tocho cilíndrico de sección simplemente conexa  $\omega$  consiste en determinar una función  $\vartheta(x_1, x_2)$ , o función de Prandtl, de clase  $C^2$  tal que:*

$$\boxed{\Delta\vartheta = -2 \text{ en todo punto de } \omega,} \quad (7.9)$$

$$\boxed{\vartheta = 0 \text{ sobre } \gamma.}$$

En términos de la función de Prandtl, las componentes no nulas del tensor de tensiones se escriben:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right) = \mu\alpha\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - x_2\right) = \mu\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} \implies \boxed{\sigma_{13} = \mu\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2},} \\ \sigma_{23} &= \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) = \mu\alpha\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + x_1\right) = -\mu\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} \implies \boxed{\sigma_{23} = -\mu\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1},}\end{aligned}$$

mientras que los desplazamientos se escriben:

$$u_3 = \alpha\varphi,$$

y siendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \chi}{\partial x_2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + x_2, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \chi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - x_1.\end{aligned}$$

**Ejemplo 119** La función de Prandtl para las vigas de sección circular de radio  $R$  es:

$$\vartheta = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{R^2}{2}.$$

En efecto, su laplaciano es  $-2$ , y su valor es nulo sobre  $\gamma$ . Las tensiones asociadas son:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \mu\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = -\mu\alpha x_2, \\ \sigma_{23} &= -\mu\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \mu\alpha x_1,\end{aligned}$$

coherente con lo estudiado previamente en la Sección 7.2.

### 7.4.3. Rigidez geométrica a la torsión

El cálculo de la rigidez geométrica a la torsión puede hacerse a partir de su definición dada en (7.7):

$$\begin{aligned}M_3 &= \mu\alpha D = \int_{\omega} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2 \\ &= -\mu\alpha \int_{\omega} (x_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2})dx_1dx_2.\end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando Green se deduce:

$$\begin{aligned}D &= - \int_{\omega} (x_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2})dx_1dx_2 \\ &= - \int_{\gamma} \vartheta(x_1n_1 + x_2n_2)ds + 2 \int_{\omega} \vartheta dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\vartheta$  es nula sobre  $\gamma$ , se obtiene:

$$D = 2 \int_{\omega} \vartheta dx_1dx_2.$$

$D$  se conoce como **factor de rigidez geométrica a la torsión** -factor of torsional rigidity-. Este factor depende exclusivamente de la característica geométrica de la sección transversal de la viga y siempre es menor o igual que el momento polar de inercia de la sección de la viga. El ángulo unidad de torsión puede expresarse como:

$$\alpha = \frac{M_3}{\mu D}.$$

Obsérvese que las unidades de  $D$  son:

$$[D] = \frac{[M_3]}{[\mu][\alpha]} = \frac{Nm}{Nm^{-2}rad} = m^3rad^{-1}.$$

## 7.5. Flexión de vigas cilíndricas

En esta sección seguiremos considerando vigas cilíndricas cuyas generatrices son paralelas al eje  $x_3$ . El sistema de referencia (que tiene gran importancia en los problemas de flexión) se tomará tal que:

- El origen en cada sección coincide con el baricentro de esta.
- Los ejes  $x_1$  y  $x_2$  son los ejes principales de la sección recta  $\omega$  de la viga, esto es, rectas generadas por vectores propios del tensor de inercia

$$\int_{\omega} x_1 dx_1 dx_2 = \int_{\omega} x_2 dx_1 dx_2 = \int_{\omega} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = 0.$$

La condición de carga en la flexión será tal que:

- Las cargas sobre la cara  $\omega_L$  ( $x_3 = L$ ) equivalen a una fuerza  $\mathbf{P}$ , de magnitud  $P$ , dirigida según el eje  $\mathbf{e}_1$ , es decir:

$$\int_{\omega_L} \sigma(M) \mathbf{e}_3 = P \mathbf{e}_1; \quad \int_{\omega_L} \vec{ox} \wedge \sigma(M) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

- La superficie lateral de la viga está libre de esfuerzos.
- Las fuerzas de volumen son despreciables.
- La sección  $\omega_0$  se supondrá sometida a una cierta condición de encastramiento.

**Observación 120** *En el caso en que la carga equivalente  $\mathbf{P}$  no esté dirigida en la dirección de uno de los ejes principales, siempre es posible descomponer  $\mathbf{P}$  en dos componentes sobre los dos ejes principales y aplicar el principio de superposición.*

Al igual que para el problema de la torsión, supondremos que el tensor de tensiones que permite resolver este problema de flexión es de la forma:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Además, en este caso supondremos que la tensión normal  $\sigma_{33}$  admite la expresión:

$$\boxed{\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{P(L-x_3)x_1}{I_2}}, \quad (7.10)$$

donde  $I_2$  denota el momento principal de inercia de la sección transversal  $\omega$  con respecto al eje  $x_2$ :

$$I_2 = \int_{\omega} x_1^2 dx_1 dx_2.$$

Obsérvese que  $\sigma_{33}$  no depende de  $x_2$  si la carga en el extremo derecho actúa en la dirección  $x_1$ .

Si esta elección del tensor de tensiones permite resolver todas las ecuaciones de la elastostática y las condiciones de contorno, aplicando la unicidad de solución habremos encontrado la solución del problema de flexión planteado.

**Observación 121** En el caso de una carga total  $\mathbf{P} = P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2$  sobre  $x_3 = L$ , entonces:

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{P_1(L-x_3)x_1}{I_2} - \frac{P_2(L-x_3)x_2}{I_1}.$$

Por motivos de simplificar la exposición en lo que sigue consideramos el caso en que  $P_1 = P$ , y  $P_2 = 0$ .

### 7.5.1. Ecuaciones de equilibrio

Al igual que en el problema de torsión, consideramos fuerzas de volumen despreciables. Las ecuaciones de equilibrio se escriben, entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{P x_1}{I_2} = 0. \end{array} \right.$$

Las dos primeras relaciones implican que  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  **deben ser independientes** de  $x_3$ . Por tanto, es suficiente buscar  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$  sobre una sección transversal  $\omega$  cualquiera.

### 7.5.2. Ley de comportamiento y tensor de deformación

Aplicando la ley de Hooke, tendremos:

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{13}, \quad (7.11)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} = -\frac{P(L-x_3)x_1}{EI_2} \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{P(L-x_3)x_1}{EI_2},$$

$$2\varepsilon_{12} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (7.12)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{\nu P(L-x_3)x_1}{EI_2} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\nu P(L-x_3)x_1}{EI_2}.$$

Obsérvese que de estas relaciones se deduce que:

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{P(L-x_3)^2 x_1}{2EI_2} + \hat{u}_3(x_1, x_2), \\ u_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\nu P(L-x_3)x_1^2}{2EI_2} + \hat{u}_1(x_2, x_3), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\nu P(L-x_3)x_1 x_2}{EI_2} + \hat{u}_2(x_1, x_3), \end{aligned}$$

verificándose, además:

$$\frac{\partial \hat{u}_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial \hat{u}_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} - \frac{\nu P(L-x_3)x_2}{EI_2}.$$

### 7.5.3. Condiciones de contorno

1. Sobre la tapa  $x_3 = L$ , el vector de esfuerzos aplicado es igual a:

$$\boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}_{/x_3=L}.$$

La resultante de las fuerzas aplicadas sobre esta cara debe ser igual a  $P\mathbf{e}_1$  y, por tanto:

$$\int_{\omega_L} \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{e}_3 d\Gamma = P\mathbf{e}_1,$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\int_{\omega_L} \sigma_{13}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = P,} \quad (7.13)$$

$$\boxed{\int_{\omega_L} \sigma_{23}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = 0,} \quad (7.14)$$

$$\int_{\omega_L} \sigma_{33}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = 0.$$

La tercera de estas ecuaciones se verifica gracias a la hipótesis (7.10).

El momento total de las fuerzas aplicadas sobre la cara  $x_3 = L$ , con respecto al centro de gravedad de la sección  $\omega_L$ , debe ser igual a cero, lo que implica, que el campo de tensiones debe verificar:

$$\vec{ox} \wedge \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \implies$$

$$\int_{\omega_L} x_2 \sigma_{33}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\int_{\omega_L} x_1 \sigma_{33}(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 = 0,$$

$$\boxed{\int_{\omega_L} [x_1 \sigma_{23}(x_1, x_2, L) - x_2 \sigma_{13}(x_1, x_2, L)] dx_1 dx_2 = 0.} \quad (7.15)$$

Nuevamente la hipótesis (7.10) garantiza las dos primeras de estas igualdades.

2. Se supone que la superficie lateral de la viga no está cargada, por tanto, en todo punto de la superficie lateral:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_L, \mathbf{n} = (n_1, n_2, 0),$$

esto es,  $\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$ . Si el contorno  $\gamma$  de la sección transversal  $\omega$  es de ecuación  $f(x_1, x_2) = 0$ , esta condición de contorno se puede escribir

$$\sigma_{13} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sigma_{23} \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

En cambio, si el contorno admite la parametrización natural  $(x_1(s), x_2(s))$ ,  $s \in I$ , entonces:

$$\boxed{\sigma_{13} \frac{dx_2}{ds} - \sigma_{23} \frac{dx_1}{ds} = 0.} \quad (7.16)$$

### 7.5.4. Ecuaciones de compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad de Beltrami, al tener en cuenta que las fuerzas de volumen son nulas, se reducen a:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{tr}(\sigma) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma_{13} = -\frac{P}{(1+\nu)I_2}, \\ \Delta\sigma_{23} = 0, \end{cases}$$

ya que la ecuación de compatibilidad se verifica de forma automática para el resto de las componentes.

## 7.6. Método de resolución. Función de Timoshenko

Al igual que en el problema de la torsión se introduce una función de tensiones  $\phi(x_1, x_2)$ , llamada **función de Timoshenko**, de forma que se verifique automáticamente la tercera condición de equilibrio. En efecto, si tomamos:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{\partial\phi}{\partial x_2} - \frac{Px_1^2}{2I_2} + h(x_2), \\ \sigma_{23} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

automáticamente se verifica:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{Px_1}{I_2} = 0. \end{cases}$$

Si introducimos la elección de las tensiones (7.17), en las ecuaciones de compatibilidad:

$$\Delta\sigma_{23} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{13} &= -\frac{P}{(1+\nu)I_2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \right) - \frac{P}{I_2} + h''(x_2) = -\frac{P}{(1+\nu)I_2} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{I_2} - h''(x_2). \end{aligned}$$

Estas dos relaciones implican que:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Px_2}{I_2} - h'(x_2) + c, \quad (7.18)$$

donde  $c$  es una constante de integración.

### 7.6.1. Significado de la constante $c$

Consideremos la tercera componente del vector de rotación local:

$$2\omega_3 = 2\omega_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones (7.11), se deduce que:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} &= 2 \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left( \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} \right) \\ &= -2 \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + h'(x_2) \right). \end{aligned}$$

Por último, si se tiene en cuenta (7.18), la constante  $c$  está relacionada con la tercera componente de la rotación mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} &= - \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + h'(x_2) \right) \\ &= - \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \left[ \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Px_2}{I_2} + c \right] = - \frac{\nu}{E} \frac{Px_2}{I_2} - \frac{1+\nu}{E} c. \end{aligned}$$

Si la sección es simétrica con respecto al eje  $0x_1$  entonces el valor medio de  $x_2$  sobre la sección es cero. En este caso, el valor medio de  $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}$  es igual a  $-\frac{1+\nu}{E}c$  y, por tanto, salvo el coeficiente  $-\frac{1+\nu}{E}$ ,  $c$  **representa la rotación media relativa de la sección respecto al eje  $0x_3$ .**

$-\frac{1+\nu}{E}c$  es, por tanto, el coeficiente  $\alpha$  de la torsión. Si  $c$  es nulo, entonces tendremos flexión sin torsión. De forma general, si  $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}$  es de media nula sobre la sección, la carga  $P$  será entonces aplicada en el punto llamado **centro de cizallamiento** de la sección.

### 7.6.2. Verificación de las condiciones de contorno

#### ■ Sobre la superficie lateral

Comencemos por verificar que la superficie lateral no está cargada. Para ello introducimos la elección de las tensiones (7.17) en la relación (7.16), obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{Px_1^2}{2I_2} + h(x_2), \\ \sigma_{23} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \sigma_{13} \frac{dx_2}{ds} - \sigma_{23} \frac{dx_1}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} = \left[ \frac{Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] \frac{dx_2}{ds}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\boxed{\frac{d\phi}{ds} = \left[ \frac{Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] \frac{dx_2}{ds}},$$

ecuación que debe verificarse sobre  $\gamma = \partial \omega$ .

■ **Sobre la tapa  $\omega_L$**

Utilizando de nuevo las relaciones (7.17), tendremos:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_L} \sigma_{13} dx_1 dx_2 &= \int_{\omega_L} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \int_{\omega_L} \frac{Px_1^2}{2I_2} dx_1 dx_2 + \int_{\omega_L} h(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\omega_L} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \frac{P}{2} + \int_{\omega_L} h(x_2) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Green a la primera integral:

$$\int_{\omega_L} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\gamma} \phi n_2 d\gamma = - \int_I \phi(x_1(s), x_2(s)) x_1'(s) ds,$$

siendo  $\gamma$  la frontera de  $\omega$  y, en particular de  $\omega_L$  (téngase en cuenta que  $n_2 = -x_1'(s)$ ), siendo  $s$  un parámetro natural. Si integramos por partes y tenemos en cuenta que la frontera de  $\omega$  es una curva cerrada, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_L} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_I \frac{d\phi(x_1(s), x_2(s))}{ds} x_1(s) ds \\ &= \int_I \left[ \frac{Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] x_1(s) \frac{dx_2(s)}{ds} ds.\end{aligned}$$

Y, aplicando de nuevo la fórmula de Green, ( $\frac{dx_2}{ds} = n_1$ ):

$$\begin{aligned}\int_{\omega_L} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= \int_{\omega_L} \left[ \frac{3Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] dx_1 dx_2 \\ &= \frac{3}{2}P - \int_{\omega_L} h(x_2) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Agrupando los resultados obtenidos, se obtiene:

$$\boxed{\int_{\omega_L} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = P,}$$

que es la condición de contorno (7.13) impuesta. Con un procedimiento análogo se comprueba la condición (7.14):

$$\boxed{\int_{\omega_L} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = 0.}$$

Más adelante verificaremos la tercera condición de contorno (7.15) aún no impuesta sobre  $\omega_L$ .

### 7.6.3. Cálculo del vector desplazamiento

El vector desplazamiento se calculará con la técnica dada en el Capítulo 3. Comenzamos por calcular las diferenciales  $d\omega_{12}$ ,  $d\omega_{23}$  y  $d\omega_{31}$  de las componentes del tensor antisimétrico.

$$d\omega_{12} = \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} dx_3.$$

Las derivadas parciales  $\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_k}$  se calculan mediante la fórmula:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}.$$

Y, teniendo en cuenta la ley de Hooke y la relación (7.18), se obtiene:

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{22}}{\partial x_1}\right)dx_2 + \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{32}}{\partial x_1}\right)dx_3 \\ &= -\frac{\nu P(L-x_3)}{EI_2}dx_2 + \left[\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + h'(x_2) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}\right)\right]dx_3 \\ &= -\frac{\nu P(L-x_3)}{EI_2}dx_2 + \left(\frac{\nu P x_2}{E I_2} + \frac{1+\nu}{E}c\right)dx_3, \end{aligned}$$

ya que:

$$e_{12} = 0, \quad \frac{\partial e_{11}}{\partial x_2} = 0.$$

Cálculos análogos muestran que:

$$\begin{aligned} d\omega_{31} &= \left(\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{P x_1}{EI_2}\right)dx_1 \\ &\quad - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} dx_2 - \frac{P(L-x_3)}{EI_2}dx_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_{23} &= -\frac{(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + h'(x_2)\right)dx_1 \\ &\quad + \left[\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu P x_1}{E I_2}\right]dx_2. \end{aligned}$$

Integrando, estas ecuaciones nos conducen a:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -\frac{\nu P(L-x_3)x_2}{EI_2} + \frac{(1+\nu)c}{E}x_3 + \beta_{12}, \\ \omega_{23} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\nu P x_1 x_2}{EI_2} - \frac{(1+\nu)c}{E}x_1 + \beta_{23}, \\ \omega_{31} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + h(x_2) - c x_2\right] - \frac{P x_1^2}{2EI_2} - \frac{\nu P x_2^2}{2EI_2} + \frac{P(L-x_3)^2}{2EI_2} + \beta_{31}. \end{aligned}$$

siendo  $\beta_{ij}$  constantes de integración. Para calcular las componentes del vector desplazamiento utilizaremos las relaciones:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})dx_j = (\varepsilon_{ij} - \omega_{ji})dx_j$$

que, al integrar, permiten obtener el vector desplazamiento:

$$u_1 = \frac{\nu P(L-x_3)}{2EI_2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{(1+\nu)c}{E}x_2 x_3 + \frac{P(L-x_3)^3}{6EI_2} + \beta_{12}x_2 - \beta_{31}x_3 + A, \quad (7.19)$$

$$u_2 = \frac{\nu P(L - x_3)}{EI_2} x_1 x_2 - \frac{(1 + \nu)c}{E} x_1 x_3 - \beta_{12} x_1 + \beta_{23} x_3 + B, \quad (7.20)$$

$$u_3 = \frac{P(L - x_3)^2 x_1}{2EI_2} - \frac{(2 + \nu)Px_1^3}{6EI_2} + \chi(x_1, x_2) + \beta_{31} x_1 - \beta_{23} x_2 + C. \quad (7.21)$$

Las constantes  $A, B$  y  $C$  son constantes de integración y la función  $\chi$  será determinada por las condiciones de integrabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + h(x_2) \right) - \frac{(1 + \nu)cx_2}{E} - \frac{\nu Px_2^2}{2EI_2}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_2} &= -\frac{2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\nu Px_1 x_2}{EI_2} + \frac{(1 + \nu)cx_1}{E}. \end{aligned}$$

Obsérvese que de la relación (7.18) las derivadas cruzadas de la función  $\chi$  definida a partir de estas expresiones son iguales, lo que garantiza que la función  $\chi$  está bien definida. Las constantes  $\beta_{ij}$  corresponden a una rotación sólida y las constantes  $A, B$  y  $C$  se corresponden con una traslación sólida y pueden ser determinadas, por ejemplo, a partir de las condiciones de contorno elegidas sobre la tapa  $\omega_0$ . Si hay flexión sin torsión, la constante  $c$  será nula.

En caso de producir torsión, obsérvese que el ángulo  $\alpha$  de torsión era  $\alpha = -\frac{(1+\nu)c}{E}$ , por lo que en las expresiones (7.19) - (7.21) podemos identificar los términos  $-\alpha x_2 x_3$  en  $u_1$ ,  $\alpha x_1 x_3$  en  $u_2$ , y la función de alabeo asociada está incluida en  $u_3$  a través de la función  $\chi$ .

**Observación 122** Obsérvese que de la expresión del vector desplazamiento se deduce que no es posible un encastramiento clásico en cada punto de  $\omega_0$ ; en efecto, si nos centramos en las dos primeras componentes del desplazamiento en esta sección, se tiene:

$$u_1(x_1, x_2, 0) = \frac{\nu PL}{2EI_2} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{PL^3}{6EI_2} + \beta_{12} x_2 + A,$$

$$u_2(x_1, x_2, 0) = \frac{\nu PL}{EI_2} x_1 x_2 - \beta_{12} x_1 + B.$$

Esto nos lleva a que si bloqueamos el centroide de la sección:

$$u_1(0, 0, 0) = \frac{PL^3}{6EI_2} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{PL^3}{6EI_2},$$

$$u_2(0, 0, 0) = B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Si bloqueamos, por ejemplo, las bisectrices de los cuatro cuadrantes para la componente 1:

$$u_1(x_1, \pm x_1, 0) = \pm \beta_{12} x_1 = 0 \Rightarrow \beta_{12} = 0,$$

condición que ya no podría imponerse sobre la segunda componente pues:

$$u_2(x_1, \pm x_1, 0) = \pm \frac{\nu PL}{EI_2} x_1^2 \neq 0.$$

Es por ello, que en este problema de flexión no se puede imponer un bloqueo total sobre la sección  $\omega_0$ . Obsérvese que, por ejemplo, sí es posible un encastramiento débil sobre la segunda componente:

$$\int_{\omega_0} u_2 dx_1 dx_2 = 0,$$

gracias a la hipótesis de que los ejes  $x_1$  y  $x_2$  son los ejes principales de la sección  $\omega$ , lo que conlleva:

$$\int_{\omega_0} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = 0.$$

**Observación 123** Fijémonos en los desplazamientos obtenidos. Llamaremos fibras de la viga a las líneas originalmente paralelas al eje de la viga, en este caso  $\mathbf{e}_3$ . La fibra que está en el plano central  $x_1 = 0$  no sufre tracción ni compresión. En efecto, la componente normal del vector de esfuerzos en cada sección  $x_3$  verifica:

$$\sigma_n(0, x_2, x_3) = \sigma_{33}(0, x_2, x_3) = -\frac{P(L-x_3)x_1}{I_2} = 0.$$

En cambio, las fibras que están en la parte  $x_1 < 0$  del plano central serán traccionadas ya que  $\sigma_{33} > 0$ , mientras que las de la parte  $x_1 > 0$  serán comprimidas,  $\sigma_{33} < 0$ . El desplazamiento en la línea neutra es ( $x_1 = x_2 = 0$ )

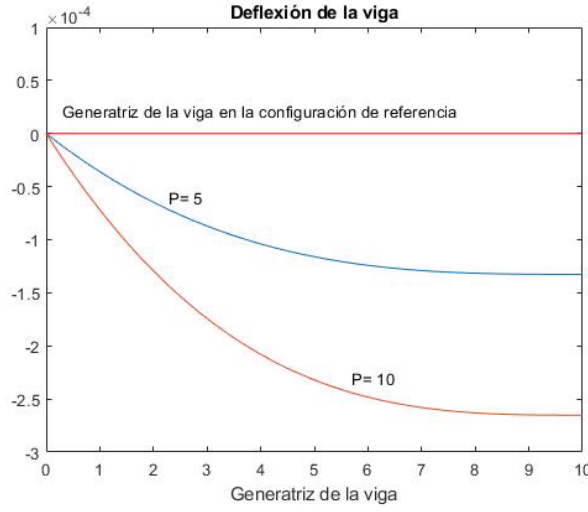
$$u_1(0, 0, x_3) = \frac{P(L-x_3)^3}{6EI_2} - \frac{PL^3}{6EI_2},$$

donde se ha tomado la constante  $A$  para que  $u_1$  sea nulo en  $x_3 = 0$ . El desplazamiento en la segunda componente sería nulo si suponemos éste nulo en la frontera  $\omega_0$ . Por último:

$$u_3 = \chi(0, 0) + C.$$

La deflexión obtenida para una viga cilíndrica de longitud 10m y sección de radio 1.e-1m, se recoge en la siguiente figura realizada con MATLAB:

```
-----
L=10 %m;
R=0.1 %m;
I2=pi*R^4/4; % Momento de inercia I2
x3=linspace(0,L,100); % discretización del eje de la viga;
P=5; %Carga total Pe_1
E=8.e10; %Pa
plot(x3,P*(L-x3).^3/(6*E*I2)-P*L^3/(6*E*I2))
title('Deflexión de la viga')
xlabel('Generatriz de la viga')
gtext(['P= ', num2str(P)])
hold on
P=10; plot(x3,P*(L-x3).^3/(6*E*I2)-P*L^3/(6*E*I2))
gtext(['P= ', num2str(P)])
plot(x3,0*x3,'r')
axis([0,10,-3.e-4,1.e-4])
gtext('Generatriz de la viga en la configuración de referencia')
-----
```



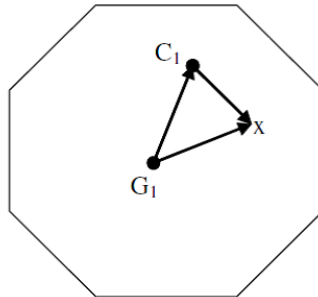
#### 7.6.4. Centro de cizallamiento

Tan sólo nos queda por comprobar la condición de contorno sobre la tapa derecha de la viga correspondiente a  $x_3 = L$ :

$$\int_{\omega_L} [x_1 \sigma_{23}(x_1, x_2, L) - x_2 \sigma_{13}(x_1, x_2, L)] dx_1 dx_2 = 0.$$

Como ya se ha visto más arriba, al calcular la variación de la componente  $\omega_3$  de la rotación según  $x_3$ , puede haber torsión de la viga bajo el efecto de la carga  $P$  aplicada cuando los ejes principales de inercia no coinciden con los ejes de simetría. En consecuencia, esta torsión es engendrada por un momento, con respecto al baricentro  $G_1$  de la sección  $\omega_L$ , de valor:

$$M_3(G_1) = \int_{\omega_L} [x_1 \sigma_{23}(x_1, x_2, L) - x_2 \sigma_{13}(x_1, x_2, L)] dx_1 dx_2.$$



Busquemos un centro  $C_1$ , llamado centro de cizallamiento, donde se debería aplicar la carga  $P$  para obtener flexión sin torsión. Denotemos por  $d_1$  y  $d_2$  las

coordenadas del centro  $C_1$  en el plano  $\omega_L$ . Puesto que:

$$\begin{aligned} M(G_1)\mathbf{e}_3 &= \underbrace{M(C_1)\mathbf{e}_3}_{=0} + \int_{\omega_L} \overrightarrow{G_1C_1} \times (\sigma_{13}(x_1, x_2, L), \sigma_{23}(x_1, x_2, L), 0) dx_1 dx_2 \\ &= \overrightarrow{G_1C_1} \times \int_{\omega_L} (\sigma_{13}(x_1, x_2, L), \sigma_{23}(x_1, x_2, L), 0) dx_1 dx_2 \\ &= \overrightarrow{G_1C_1} \times P\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

De donde se deduce que si las coordenadas de  $C_1$  son las coordenadas de  $G_1$  más  $(d_1, d_2)$ , entonces:

$$\overrightarrow{G_1C_1} \times P\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d_1 & d_2 & 0 \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -d_2P),$$

y, en consecuencia:

$$d_2 = -\frac{M(G_1)}{P}.$$

Aplicando la carga según el eje  $x_2$  se encontrará, por el mismo método, la coordenada  $d_1$ .

### 7.6.5. Métodos de resolución

Si la carga se supone aplicada en el centro de cizallamiento en la dirección  $x_1$ , la resolución del problema de la flexión consiste en encontrar dos funciones  $\phi(x_1, x_2)$  y  $h(x_2)$  tales que:

$$\Delta\phi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Px_2}{I_2} - h'(x_2),$$

en toda sección recta  $\omega$  y verificando que:

$$\frac{d\phi}{ds} = \left[ \frac{Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] \frac{dx_2}{ds}, \quad (7.22)$$

en la frontera  $\gamma$  de  $\omega$ . Un método para la búsqueda de solución consiste, por ejemplo, en simplificar la escritura de la condición de contorno, determinando la función  $h(x_2)$  para que anule en la frontera el segundo miembro de (7.22). En este caso, la condición de contorno para una sección simplemente conexa quedaría:

$$\phi = cte,$$

sobre  $\gamma$  frontera de  $\omega$ .

**Ejemplo 124** Si la sección de  $\omega$  es circular:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

entonces la elección:

$$h(x_2) = (R^2 - x_2^2) \frac{P}{2I_2},$$

conlleva de (7.22):

$$\frac{d\phi}{ds} = \left[ \frac{Px_1^2}{2I_2} - h(x_2) \right] \frac{dx_2}{ds} = 0, \text{ sobre } \gamma.$$

En consecuencia  $\phi$  debe ser constante sobre la frontera, constante que puede tomarse nula ya que no interviene en el valor de las tensiones. En este caso,

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Px_2}{I_2} - h'(x_2) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Px_2}{I_2} + x_2 \frac{P}{I_2} \\ &= \frac{1+2\nu}{1+\nu} \frac{P}{I_2} x_2. \end{aligned}$$

En resumen, la función de Timoshenko debe ser solución del problema:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{(1+2\nu)P}{(1+\nu)I_2} x_2, \text{ en } \omega, \\ \phi &= 0 \text{ sobre } \gamma. \end{aligned}$$

## 7.7. Boletín 7

**Ejercicio 125 ♣** Indicar si el problema de torsión elástica sobre una barra cilíndrica de sección circular se puede considerar de deformaciones planas.

**Ejercicio 126** Indicar la forma de los desplazamientos y tensiones solución de un problema de torsión puro sobre una viga de sección circular llena.

**Ejercicio 127** Se considera un cilindro circular recto con generatriz el eje  $z$ , base de radio  $r = 1\text{m}$ . y altura  $L = 10\text{m}$ , encastrado en su base y sometido a una rotación de ángulo  $\theta = \pi/20$  en su tapa superior. Se supone que el material es latón, elástico lineal, con  $E = 100\text{GPa}$  y  $\nu = 0,33$ .

Suponiendo que, bajo pequeñas deformaciones, los desplazamientos son:

$$u_1 = -\frac{\theta y z}{L}, u_2 = \frac{\theta x z}{L}, u_3 = 0,$$

calcular analíticamente los campos de deformaciones y de tensiones. ¿Cómo es la tensión en la frontera lateral del cilindro? ¿Y en la tapa superior?

**Ejercicio 128 ♣** Se considera la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\},$$

siendo  $a > 0$  una constante dada y  $b = 2a$ . Sean  $\Gamma^+ = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 10\}$  y  $\Gamma^- = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\}$  las tapas superior e inferior del cilindro, respectivamente, y  $\Gamma_L$  su superficie lateral. El sólido está formado por un material elástico con coeficientes:

$$E = 7.e10\text{N/m}^2, \nu = 0,3$$

i) Sabiendo que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) \mathbf{I}, \quad (7.23)$$

obtener el valor de la tensión en función del tensor de deformación y calcular los coeficientes de Lamé del material indicando sus unidades.

ii) Considerar un problema de torsión pura sobre esta viga cilíndrica de sección elipsoidal. Calcular los semiejes de la elipse para que la función

$$\theta(y, z) = -\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) + 1,$$

se la función de Prandtl asociada.

iii) Calcular la función de alabeo asociada.

iv) Para  $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$  demostrar que el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}zy, -xz, yx\right) \quad (7.24)$$

es solución de un problema de torsión puro sobre la viga con fuerzas de volumen nulas. Calcular el momento total aplicado en la cara superior.

v) Para  $a = 1$ , demostrar que el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, -xz, yx) \quad (7.25)$$

es solución de un problema de torsión puro sobre la viga con fuerzas de volumen nulas. Calcular el momento total aplicado en la cara superior.

vi) Verificar la ecuación de Lamé Navier para el campo de desplazamientos definido en (7.25).

**Ejercicio 129** Considerar un cilindro de generatriz el eje  $x_3$  y de longitud  $L$  de un material elástico, homogéneo e isótropo. Suponer que el cilindro está sometido a las siguientes cargas:

- El origen en la sección encastrada  $\omega_0$  coincide con el baricentro de la sección.
- Los ejes  $x_1$  y  $x_2$  son los ejes principales de la sección recta  $\omega$  de la viga, esto es, rectas generadas por vectores propios del tensor de inercia.
- La condición de carga en la flexión es tal que las cargas sobre la cara  $\omega_L(x_3 = L)$  equivalen a una fuerza  $\mathbf{P}$  dirigida según el eje  $x_1$ , es decir:

$$\int_{\omega_L} \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{e}_3 dx_1 dx_2 = P \mathbf{e}_1; \quad \int_{\omega_L} \vec{\sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{e}_3 dx_1 dx_2 = \mathbf{0}.$$

- La superficie lateral de la viga está libre de esfuerzos.
- Las fuerzas de volumen son despreciables.

Calcular para este problema de flexión el campo de tensiones, el problema asociado a la función de Timoshenko y recuperar el campo de desplazamientos. Deducir el desplazamiento en la dirección  $x_1$  a lo largo de la fibra neutra de la viga.

**Ejercicio 130** Considerar un cilindro de generatriz el eje  $x_3$  y de longitud  $L$  de un material elástico, homogéneo e isótropo, sometido a las siguientes cargas:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre su superficie lateral } \Gamma_L, \quad (7.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = ax_1 \mathbf{e}_3 \text{ sobre } x_3 = L, \quad (7.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -ax_1 \mathbf{e}_3 \text{ sobre } x_3 = 0. \quad (7.28)$$

Además, el momento total con respecto a la generatriz en la sección  $x_3 = L$  debe verificar

$$\mathbf{M} = M\mathbf{e}_2. \quad (7.29)$$

- Representar gráficamente una sección longitudinal del cilindro y las cargas aplicadas sobre sus tapas.
- Calcular el parámetro  $a$  para que se verifique la relación 7.29.
- Demostrar que el tensor de tensiones:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Mx_1/I_2 \end{pmatrix},$$

donde  $I_2$  denota el momento principal de inercia de la sección transversal  $\omega$  con respecto al eje  $x_2$ :

$$I_2 = \int_{\omega} x_1^2 dx_1 dx_2,$$

verifica las condiciones de contorno impuestas y verifica también las ecuaciones de equilibrio correspondientes a fuerzas de volumen nulas.

- Calcular el tensor de deformación y comprobar que verifica las ecuaciones de compatibilidad.
- Demostrar que el campo de desplazamientos asociado es, salvo una transformación rígida:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{M(x_3^2 + \nu x_1^2 - \nu x_2^2)}{2EI_2}, \\ u_2 = \frac{M\nu x_1 x_2}{EI_2}, \\ u_3 = -\frac{Mx_1 x_3}{EI_2}. \end{cases}$$

- Representar gráficamente la componente  $u_1$  del desplazamiento para cada punto de la fibra neutra  $x_1 = x_2 = 0$ .
- Comprobar que la fibra neutra no es elongada ni comprimida.
- Demostrar que los filamentos que se encuentran sobre  $x_1 < 0$  sufren una extensión, mientras los que permanecen sobre  $x_1 > 0$  una compresión.

**Ejercicio 131** Consultar la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y elige para una aleación de zinc, en el sistema internacional de unidades, los parámetros necesarios para resolver cada uno de los siguientes apartados como material elástico lineal. Considerar una viga sólida con la aleación elegida y cuya configuración de referencia sea:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 20, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

- i) Plantear sobre el cilindro un modelo matemático 3D de flexión pura.
- ii) Resolver en COMSOL el modelo 3D considerado. Representar gráficamente sobre la configuración de referencia la viga deformada.
- iii) Verificar si el modelo propuesto tiene efectos de torsión.
- iv) Indicar si el material está trabajando realmente en régimen elástico lineal.
- v) Realizar en COMSOL los cálculos postproceso necesarios para comprobar si la resultante de las fuerzas y de los momentos verifican las hipótesis de los problemas de flexión.
- vi) Especificar los cálculos necesarios para llegar a la misma solución a partir de la función de Timoshenko.
- vii) Seguir el apartado anterior para calcular la solución de Timoshenko utilizando el toolbox PDE Modeler de MATLAB. Reconstruir a partir de ella la solución del modelo de flexión.

## Capítulo 8

# Modelos unidimensionales en vigas

De los modelos tridimensionales de la elasticidad pueden derivarse modelos unidimensionales en casos en que tanto la geometría del cuerpo que se deforma como el sistema de fuerzas aplicadas tengan ciertas características especiales. La característica común de estos modelos reside en que una de las dimensiones del cuerpo sea considerablemente más grande que las otras dos. En particular, en este capítulo estudiaremos modelos de barras y vigas; esencialmente, en una barra, el sistema de fuerzas tiene la dirección de la dimensión mayor, mientras que, en una viga el sistema de fuerzas es transversal a ella.

Así, consideraremos **estructuras tipo viga** sometidas a condiciones de carga que permiten su simplificación a estudios unidimensionales. Para fijar ideas supondremos una viga de longitud  $L$  que se extiende desde  $x_3 = 0$  hasta  $x_3 = L$ , y cuya sección viene determinada por un dominio plano en el plano  $x_1x_2$ ,  $\omega$ , de área  $A$ . El origen de coordenadas en cada sección se toma en el baricentro de esta y se supone que la sección es independiente de  $x_3$ . Suponemos que **su longitud es mucho mayor que el área de la sección**:  $L \gg A$ . El material se supone elástico y lineal, siendo  $E$  su módulo de Young del material y  $\nu$  su coeficiente de Poisson.

Denotaremos por  $\mathbf{q}$  la carga total (en unidades de fuerza) por unidad de longitud, es decir: si consideramos la viga como sólido tridimensional sometido a fuerzas de volumen de densidad  $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$  y, sobre una parte  $\Gamma_N$  de su superficie lateral, a fuerzas de superficie de densidad  $\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3)$ , entonces la carga total por unidad de longitud es:

$$\mathbf{q}(x_3) = \int_{\omega} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N(x_3)} \mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) d\gamma, \quad (8.1)$$

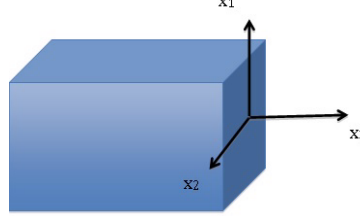
siendo  $\Gamma_N(x_3)$  la curva que corresponde a la sección de  $\Gamma_N$  en  $x_3$ .

En este capítulo **supondremos que la resultante de la componente axial de los momentos aplicados con respecto al origen de la sección es nula, evitando así fenómenos de torsión.**

Soluciones analíticas para distintos modelos de vigas 1D, correspondientes a distintas condiciones de contorno y/o cambios en la sección pueden consultarse en Vinson ([15]).

## 8.1. Modelo de barra solicitada axialmente

En la siguiente figura se muestra una barra sometida a solicitaciones axiales.



**Condición 132 (Barras)** *El comportamiento de una viga,  $\mathcal{B}$ , es de tipo **barra** si:*

1. *El material es homogéneo, isótropo y verifica la ley de Hooke.*
2. *La viga es recta con sección constante y de doble simetría en todo el dominio*
3. *Está sometida a una **carga axial** por unidad de longitud, esto es*

$$\mathbf{q} = (0, 0, q_3(x_3)).$$

4. ***Cada sección transversal  $x_3 = \text{cte}$  se mantiene totalmente plana antes y después de la deformación.***
5. *El campo de desplazamientos es de la forma:*

$$\mathbf{u} = (0, 0, u_3), u_3 = u_3(x_3).$$

En cada sección transversal de la barra, los ejes  $ox_1$  y  $ox_2$  no están sometidos a esfuerzos en flexión y, por ello, ambos son ejes neutros, esto es, las componentes tangenciales del vector de esfuerzos,

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

son nulas,  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , sobre las **fibras neutras**. La superficie que contiene los ejes neutros de las secciones se llama **superficies neutras**.

### 8.1.1. Ecuación de equilibrio

La ecuación diferencial 3D para el movimiento de una barra puede reducirse bajo las hipótesis anteriores a una ecuación 1D planteada sobre el eje de la barra, despreciando así las tensiones normales  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ . En la dirección axial puede escribirse:

$$\varepsilon_{33} = \frac{du_3(x_3)}{dx_3}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33}.$$

En consecuencia,  $\sigma_{33} = E\varepsilon_{33}$ <sup>1</sup>. Por lo que esta relación se conoce como **ley de Hooke unidimensional**. Obsérvese que en ella no interviene el coeficiente de Poisson del material, algo razonable ya que, en el modelo de barras, para cada sección  $x_3 = \text{cte}$  no hay reducción del área de la sección.

En resumen, la sollicitación axial colabora en la solución total con los siguientes términos:

$$\sigma_{33} = E \frac{du_3(x_3)}{dx_3}; \quad \mathbf{u} = (0, 0, u_3(x_3)).$$

Obsérvese que su aportación al momento en flexión<sup>2</sup> es también nulo. En efecto, el momento respecto al origen de coordenadas de cada sección es:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} = (x_2\sigma_{33}, -x_1\sigma_{33}, 0).$$

Puesto que  $\sigma_{33}$  es independiente de  $x_1$  y  $x_2$ , y el origen de coordenadas se toma en el baricentro de la sección:

$$M_1 = \int_{\omega} x_2\sigma_{33}dA = 0; \quad M_2 = - \int_{\omega} x_1\sigma_{33}dA = 0.$$

El **esfuerzo normal total** sobre cada sección  $x_3 = \text{cte}$  es:

$$A\sigma_{33} = AE \frac{du_3(x_3)}{dx_3}.$$

Este valor se denota en la bibliografía por  $Q_3(x_3)$ :

$$Q_3(x_3) = \int_{\omega} \sigma_n dx_1 dx_2 = \int_{\omega} \sigma_{33} dx_1 dx_2 = A\sigma_{33}.$$

Las unidades de  $Q_3(x_3)$  son  $N$ . Así, la **ecuación de equilibrio en la dirección axial** se reduce a:

$$\frac{dQ_3(x_3)}{dx_3} + q_3(x_3) = 0, \quad (8.2)$$

donde  $Q_3(x_3)$  es el **esfuerzo normal total** y  $q_3(x_3)$  es la **carga axial distribuida por unidad de longitud** a lo largo de la barra.

Otro razonamiento posible para llegar a esta relación es a partir de la ecuación de equilibrio 3D considerando una densidad de carga equivalente en cada punto de la sección de valor  $q_3/A$ , que lleva a la ecuación de equilibrio 3D:

$$-Div(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{q_3}{A} \mathbf{e}_3.$$

Puesto que  $\sigma_{33}$  es la única componente no nula, esta ecuación se reduce a:

$$-\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \frac{q_3}{A} \Rightarrow -E \frac{d}{dx_3} \left( \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) = \frac{q_3}{A},$$

<sup>1</sup>Obsérvese que esta igualdad no se deduce considerando  $(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  con única componente no nula la  $\varepsilon_{33}$ . En efecto, la relación 3D de Hooke:  $\boldsymbol{\sigma}(x) = \lambda(x)tr(\boldsymbol{\varepsilon}(x))\mathbf{I} + 2\mu(x)\boldsymbol{\varepsilon}(x)$  llevaría a las componentes normales  $\sigma_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{du_3}{dx_3}$ ; y, además, con  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , en general, no nulas.

<sup>2</sup>Obsérvese que su componente axial es nula, por lo que no habrá torsión.

equivalente a la ecuación (8.2) sin más que tener en cuenta la definición de esfuerzo normal total. La ecuación de equilibrio en términos del desplazamiento es la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$-\frac{d}{dx_3} \left( AE \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) = q_3(x_3). \quad (8.3)$$

### 8.1.2. Formulación variacional

La **formulación variacional** para el modelo de barras se obtiene de modo análogo al mostrado en la Sección 4.3.2. Se considera la ecuación (8.3), se multiplica por una función test  $v(x_3)$  suficientemente regular en  $[0, L]$ , se integra en todo el intervalo y se aplica integración por partes:

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{d}{dx_3} \left( AE \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) v(x_3) dx_3 &= \int_0^L q_3(x_3) v(x_3) dx_3 \implies \\ \int_0^L AE \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \frac{dv(x_3)}{dx_3} &= \int_0^L q_3(x_3) v(x_3) dx_3 + AE \frac{du_3(x_3)}{dx_3} v(x_3) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

igualdad que debe verificarse para toda función test  $v(x_3)$  adecuada. Para fijar los campos de desplazamientos admisibles deben fijarse las condiciones de contorno que se impondrían sobre el desplazamiento.

### 8.1.3. Condiciones de contorno

De la formulación variacional (8.4) se obtienen las **condiciones de contorno** naturales para el modelo de sollicitación axial. Se detallan las más habituales en la siguiente tabla.

| Condición                 | Identificación                       | Fórmula Matemática                                                |
|---------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Dirichlet/Borde fijo      | Desplazamiento nulo                  | $u_3(0) = 0$ y/o $u_3(L) = 0$ .                                   |
| Libre de fuerzas          | Esfuerzo normal nulo                 | $\frac{du_3(0)}{dx_3} = 0$ y/o $\frac{du_3(L)}{dx_3} = 0$ .       |
| Carga total $P\mathbf{n}$ | Esfuerzo normal no nulo <sup>3</sup> | $EA \frac{du_3(0)}{dx_3} = P$ y/o $EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P$ . |

## 8.2. El modelo de flexión: teoría de Bernoulli-Euler

Establecemos primero las hipótesis para el modelo de flexión.

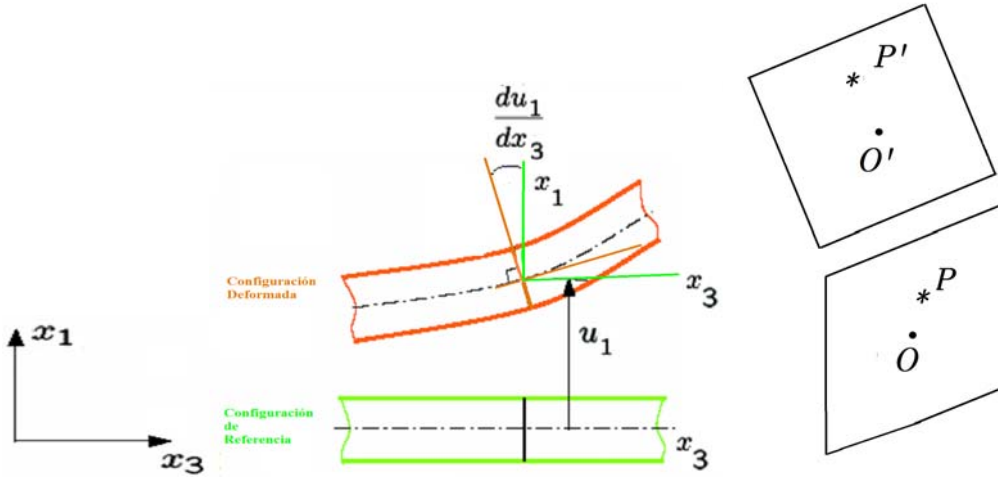
**Condición 133** *El modelo de flexión de vigas de Bernoulli-Euler se basa en las siguientes hipótesis:*

- *El material es homogéneo, isótropo y verifica la ley de Hooke.*
- *La viga es recta con sección constante y de doble simetría en todo el dominio.*

<sup>3</sup>Para deducir la condición, debe tenerse en cuenta que  $(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} = (0, 0, \sigma_{33})^T (\pm \mathbf{e}_3)$  sobre  $\Gamma^\pm$ . Por lo que la carga total, se obtiene integrando sobre toda la sección, obteniendo:  $\pm A\sigma_{33} = \pm P$ . Obteniendo la misma condición sobre ambos extremos.

- El estado de cargas por unidad de longitud es tal que  $q_3 = 0$  a lo largo de todo el intervalo  $[0, L]$ .
- Se supone que cada sección transversal es plana antes y después de la deformación. Además, el origen de cada sección se mantiene en la misma sección.
- Se supone la existencia de un estado uniaxial de tensiones en la dirección del eje de la viga<sup>4</sup>.

En consecuencia, **una sección plana en  $x_3 = cte$ , que es inicialmente normal al eje neutro, permanece plana y normal después de la deformación**. Veamos con estas hipótesis el **desplazamiento** asociado.



Consideremos una sección  $x_3 = cte$ . El origen de coordenadas en la sección es  $O = (0, 0, x_3)$  y su correspondiente deformado debe mantenerse en la misma sección por lo que será  $O' = (u_1(x_3), u_2(x_3), x_3)$ . Este desplazamiento del origen, permite obtener la parametrización del eje deformado de la viga:

$$x_3 \in [0, L] \rightsquigarrow (u_1(x_3), u_2(x_3), x_3),$$

y de su vector tangente:

$$\mathbf{t} = \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3}, \frac{du_2(x_3)}{dx_3}, 1 \right)^T.$$

Cada punto  $P = (x_1, x_2, x_3)$  en  $x_3 = cte$ , sufrirá un desplazamiento a  $P'$ :

$$P' = (u_1(x_3), u_2(x_3), x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3)).$$

El desplazamiento  $u_3$  se calcula bajo la hipótesis de que cada sección permanezca normal al vector tangente al eje deformado. En consecuencia, para la sección  $x_3 = cte$ :

$$\overrightarrow{O'P'} = (x_1, x_2, u_3(x_1, x_2, x_3))^T \perp \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3}, \frac{du_2(x_3)}{dx_3}, 1 \right)^T.$$

<sup>4</sup>Esta hipótesis garantiza un estado de flexión pura.

Esto implica que:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3}.$$

Así, el **desplazamiento** asociado al modelo de vigas de Bernoulli-Euler es:

$$\boxed{\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \left( u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3} \right)}. \quad (8.5)$$

Por ello, el **desplazamiento axial** de un punto genérico  $(x_1, x_2)$  localizado en la sección plana se escribe por:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3}.$$

La posición en la configuración deformada del punto  $P'$  será:

$$\begin{aligned} P' &= (x_1 + u_1(x_3), x_2 + u_2(x_3), x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3)) \\ &= \left( x_1 + u_1(x_3), x_2 + u_2(x_3), x_3 - x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3} \right). \end{aligned}$$

Obsérvese que con esta elección **la rotación sólida local** sería:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \text{Rot} \left( \left( u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3} \right)^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1(x_3) & u_2(x_3) & -x_1 \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{du_2(x_3)}{dx_3} \end{vmatrix} = \left( -\frac{du_2(x_3)}{dx_3}, \frac{du_1(x_3)}{dx_3}, 0 \right), \end{aligned}$$

de modo que las componentes del vector de rotación son:

$$\theta_1(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3}, \quad \theta_2(x_3) = \frac{du_1(x_3)}{dx_3}.$$

Se observa, que la rotación es la misma en todos los puntos de la sección, hipótesis esencial de la teoría de Bernoulli. Además, la tercera componente del vector de rotación es nula, lo que implica que en este modelo **no hay torsión asociada**.

En términos de las rotaciones el desplazamiento se expresa como:

$$\boxed{\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1 \theta_2(x_3) + x_2 \theta_1(x_3))}.$$

### 8.2.1. Deformación y tensión

Usando la ecuación deformación-desplazamiento se deduce de (8.5):

$$\varepsilon_{33} = -x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} - x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2},$$

siendo esta componente axial del tensor de deformación la única no nula. Entonces, gracias a la ley uniaxial de Hooke, la **tensión axial** es:

$$\sigma_{33} = -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right), \quad (8.6)$$

siendo esta la única componente del tensor de tensiones considerada con la hipótesis de Bernoulli-Euler. Obsérvese que se trata por tanto de una aproximación del modelo 3D, ya que en la ley de Hooke 3D,  $\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{33} \neq E\varepsilon_{33}$ , y tampoco serían nulas las otras dos componentes diagonales del tensor de tensiones.

### 8.2.2. Momentos flectores

El **momento flector resultante** puede calcularse tomando el momento de las fuerzas que actúan sobre cada sección transversal:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} = (x_2\sigma_{33}, -x_1\sigma_{33}, 0).$$

El momento resultante es<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{\omega} x_2 \sigma_{33} dA = \int_{\omega} x_2 \left( -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) \right) dA \\ &= -EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2}. \\ M_2 &= - \int_{\omega} x_1 \sigma_{33} dA = - \int_{\omega} x_1 \left( -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) \right) dA \\ &= EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2}. \\ M_3 &= 0. \end{aligned}$$

En estas expresiones,  $I_1$  e  $I_2$  son los momentos de inercia asociados a la flexión de la sección transversal  $\omega$ :

$$I_1 = \int_{\omega} x_2^2 dA; \quad I_2 = \int_{\omega} x_1^2 dA.$$

$M_1$  y  $M_2$  son los **momentos flectores** en las direcciones  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente; en notación americana también suelen denotarse por  $M_x$  y  $M_y$ . Puesto que la componente axial de los momentos es nula, entonces el movimiento está exento de rotación.

Los momentos flectores pueden escribirse en función de los desplazamientos como:

$$M_1(x_3) = -EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2}, \quad (8.7)$$

$$M_2(x_3) = EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2}, \quad (8.8)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos del centroide: punto ubicado en la intersección de los dos ejes neutros. En consecuencia, los momentos flectores son

---

<sup>5</sup> Bajo la hipótesis de Bernoulli-Euler, el momento axial respecto al centro de la sección es nulo.

proporcionales a las derivadas primeras de las rotaciones flexionales:

$$\begin{aligned} M_1(x_3) &= EI_1 \frac{d\theta_1}{dx_3}, \\ M_2(x_3) &= EI_2 \frac{d\theta_2}{dx_3}. \end{aligned}$$

**Observación 134** De acuerdo con la relación (8.1), para aplicar la hipótesis de Bernoulli-Euler, debe cuidarse que no solo la componente axial de las cargas aplicadas,  $q_3$ , sea nula, sino que también la componente axial de los momentos aplicados lo sea. En efecto:

$$\int_{\omega} ox \wedge \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_N(x_3)} ox \wedge \mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) d\Gamma$$

debe tener una componente axial nula para todo  $x_3$ . Por ejemplo, el momento asociado a  $\mathbf{f}$  es:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} ox \wedge \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 &= \int_{\omega} (x_2 f_3, -x_1 f_3, x_1 f_2 - x_2 f_1)^T dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\omega} (0, 0, x_1 f_2 - x_2 f_1)^T dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

asumiendo que  $f_3 = 0$ . Así, la componente axial del momento no sería nula en general. Si, por ejemplo, la fuerza  $\mathbf{f}$  es independiente de  $x_1$  y de  $x_2$  entonces sí lo sería.

### 8.2.3. Ecuaciones de equilibrio

Bajo la hipótesis de Bernoulli-Euler las **ecuaciones de equilibrio de la viga en la dirección flexional** vienen dadas por el siguiente modelo matemático:

$$\begin{cases} \frac{d^2 M_2(x_3)}{dx_3^2} - q_1(x_3) = 0, \\ -\frac{d^2 M_1(x_3)}{dx_3^2} - q_2(x_3) = 0, \end{cases} \quad (8.9)$$

siendo  $q_1(x_3)$  y  $q_2(x_3)$  las componentes 1, 2 de la fuerza por unidad de longitud. En efecto, la relación (8.9) puede deducirse a partir del principio de los trabajos virtuales escrito en términos de la hipótesis sobre el desplazamiento, y tomando como desplazamientos virtuales

$$\mathbf{v} = \left( v_1(x_3), v_2(x_3), -x_1 \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} \right). \quad (8.10)$$

La expresión:

$$\int_0^L \int_{\omega} \sigma_{33}(\mathbf{u}) \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) dAdx_3 = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3,$$

implica:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\omega} -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) \left( -x_1 \frac{d^2 v_1(x_3)}{dx_3^2} - x_2 \frac{d^2 v_2(x_3)}{dx_3^2} \right) dAdx_3 \\ = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^L E \left( I_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \frac{d^2 v_1(x_3)}{dx_3^2} + I_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \frac{d^2 v_2(x_3)}{dx_3^2} \right) dx_3 \\
&\quad = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3. \\
&\Rightarrow - \int_0^L E \left( I_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} + I_1 \frac{d^3 u_2(x_3)}{dx_3^3} \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} \right) dx_3 \\
&\quad = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3 \\
&\quad - E \left( I_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} + I_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L}.
\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente integración por partes, se obtiene el principio de los trabajos virtuales:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^L E \left( I_2 \frac{d^4 u_1(x_3)}{dx_3^4} v_1(x_3) + I_1 \frac{d^4 u_2(x_3)}{dx_3^4} v_2(x_3) \right) dx_3 \\
&\quad = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3 \\
&\quad - E \left( I_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} + I_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} \\
&\quad + E \left( I_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} v_1(x_3) + I_1 \frac{d^3 u_2(x_3)}{dx_3^3} v_2(x_3) \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L},
\end{aligned}$$

cualesquiera que sean  $v_1(x_3)$  y  $v_2(x_3)$  suficientemente regulares. Así, se deduce (8.9) en el espacio de las distribuciones a partir de (8.7) y (8.8), ya que al ser de soporte compacto en  $(0, L)$  son nulas en la frontera.

**Observación 135** Obsérvese que la hipótesis sobre el desplazamiento asociado al modelo de Bernoulli, conlleva que los desplazamientos admisibles sean de la forma indicada en (8.10). Esto impide incluir en el modelo fuerzas axiales ya que:

$$\int_{\omega} q_3(x_3) v_3(x_1, x_2, x_3) dA = \int_{\omega} q_3(x_3) \left( x_1 \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} - x_2 \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} \right) dA = 0,$$

por lo que las fuerzas axiales no nulas no podrían tenerse en cuenta.

**Observación 136** Si en el principio de los trabajos virtuales se toma  $v_2(x_3) = 0$ , y  $v_1(x_3)$  de soporte compacto en  $[0, L]$ , se puede escribir:

$$\int_0^L \frac{d}{dx_3} \left( EI_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} \right) v_1(x_3) dx_3 = \int_0^L q_1(x_3) v_1(x_3) dx_3,$$

ecuación de equilibrio de la que se deduce que la **carga total en la dirección  $x_1$**  es:

$$Q_1 = -EI_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3}.$$

Análogamente, se deduce:

$$Q_2 = -EI_1 \frac{d^3 u_2(x_3)}{dx_3^3}.$$

En consecuencia:

$$Q_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3}.$$

Análogamente:

$$Q_1(x_3) = -\frac{dM_2(x_3)}{dx_3}.$$

Estas ecuaciones relacionan los momentos flectores y los esfuerzos cortantes, lo que permite escribir las **ecuaciones de equilibrio 1D** en la forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_1(x_3), \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_2(x_3), \end{cases} \quad (8.11)$$

lo que demuestra (8.9). Los términos  $EI_1$  y  $EI_2$  se conocen como rigidez a flexión en las direcciones perpendiculares a la 1 y 2, respectivamente.

#### 8.2.4. Formulación variacional

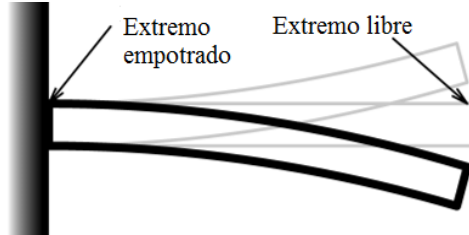
La **formulación variacional** es, por ejemplo, para la segunda ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) v(x_3) dx = \int_0^L q_1(x_3) v(x_3) dx \\ \Rightarrow & - \int_0^L \frac{d}{dx_3} \left( EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) \frac{dv(x_3)}{dx_3} dx + \frac{d}{dx_3} \left( EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) v(x_3) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} \\ & = \int_0^L q_1(x_3) v(x_3) dx \\ \Rightarrow & \int_0^L EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \frac{d^2 v(x_3)}{dx_3^2} dx - EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \frac{dv(x_3)}{dx_3} \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} \\ & + \frac{d}{dx_3} \left( EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) v(x_3) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} = \int_0^L q_1(x_3) v(x_3) dx, \end{aligned}$$

para toda función test  $v(x_3)$  suficientemente regular. Para identificar los campos  $v$  admisibles se analizarán a continuación las condiciones de contorno.

#### 8.2.5. Condiciones de contorno

Las posibles **condiciones de contorno** en el modelo de Bernoulli Euler son:



| Condición extremo viga                                                                       | Identificación                                                                                         | Fórmula Matemática                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Dirichlet/Borde fijo</b>                                                                  | Desplazamiento nulo<br>Rotación nula                                                                   | $u_1 = 0, u_2 = 0,$<br>$\frac{du_1}{dx_3} = 0, \frac{du_2}{dx_3} = 0,$                                                                                  |
| <b>Libre de fuerzas</b>                                                                      | Momento flector nulo<br>Esfuerzo cortante nulo                                                         | $\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = 0,$<br>$\frac{d^3 u_2}{dx_3^3} = 0, \frac{d^3 u_1}{dx_3^3} = 0,$                                  |
| <b>Extremo articulado o simplemente apoyada</b>                                              | Desplazamiento nulo<br>Momento nulo                                                                    | $u_1 = 0, u_2 = 0,$<br>$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = 0,$                                                                        |
| <b>Fuerza de valor</b> $(P_1, P_2, 0)$<br><br><b>y</b><br><br><b>momento resultante nulo</b> | Carga total dirección 1<br>igual a $P_1$<br>Carga total dirección 2<br>igual a $P_2$<br>Momentos nulos | $EI_2 \frac{d^3 u_1}{dx_3^3} = \mp P_1$<br><br>$EI_1 \frac{d^3 u_2}{dx_3^3} = \mp P_2$<br><br>$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = 0.$ |

Si, por ejemplo, se considera una fuerza total en el extremo de valor  $P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2$  y de momento nulo, entonces, dado que la normal es  $\pm \mathbf{e}_3$  (según sea el extremo derecho o el izquierdo)<sup>6</sup>:

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = P_1 \mathbf{e}_1 + P_2 \mathbf{e}_2 \Rightarrow \int_{\omega} \sigma_{31} dA = \pm P_1, \int_{\omega} \sigma_{32} dA = \pm P_2, \text{ y } \int_{\omega} \sigma_{33} dA = 0.$$

De donde se deduce utilizando la Observación (136):

$$Q_1(x_3) = -EI_2 \frac{d^3 u_1}{dx_3^3} = \pm P_1,$$

y, por tanto,

$$EI_2 \frac{d^3 u_1}{dx_3^3} = \mp P_1,$$

tomando el signo negativo en  $x_3 = L$  y el positivo en  $x_3 = 0$ . Análogamente se tiene la relación para  $Q_2$ .

Por último, teniendo en cuenta (8.6), la tercera relación se verifica trivialmente:

$$\int_{\omega} \sigma_{33} dA = \int_{\omega} -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) dA = 0.$$

### 8.2.6. Tensiones cortantes. Fórmulas de Jouravski-Collignon

En el modelo de Bernoulli-Euler, la ecuación que relaciona los esfuerzos con los momentos, en un punto  $(x_1, x_2)$  de la sección de la viga, viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) &= -E \left( x_1 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} + x_2 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) \\ &= \frac{M_1(x_3)}{I_1} x_2 - \frac{M_2(x_3)}{I_2} x_1, \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Olvidamos por un momento que las componentes tangenciales del tensor de tensiones deberían ser nulas de acuerdo con la hipótesis de Bernoulli-Euler. Como veremos en la siguiente sección ésta será una incongruencia en el modelo.

sin más que tener en cuenta las expresiones de los momentos:

$$\begin{aligned} M_1(x_3) &= -EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2}, \\ M_2(x) &= EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2}. \end{aligned}$$

Puede observarse que **la resultante del esfuerzo normal en cada sección es nulo**, al ser una función impar en  $x_1$  y  $x_2$ . Del modelo de Bernoulli-Euler no se derivan automáticamente las tensiones cortantes ya que por hipótesis ambas son nulas.

Es habitual completar este modelo tomando para el cálculo de la tensión de corte en la sección transversal las **ecuaciones de Jouravski-Collignon** (introducidas en 1877). Para derivar su expresión tenemos en cuenta la tercera ecuación de equilibrio 3D:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0,$$

asumiendo que no hay cargas axiales, dado que  $q_3 = 0$ . Y, por tanto,

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{x_2}{I_1} \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} - \frac{x_1}{I_2} \frac{dM_2(x_3)}{dx_3} = 0.$$

En términos de las cargas cortantes totales esta expresión puede escribirse como:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{x_2}{I_1} Q_2 + \frac{x_1}{I_2} Q_1 = 0.$$

Esto lleva a equilibrar los términos correspondientes a los esfuerzos cortantes 31 y 32:

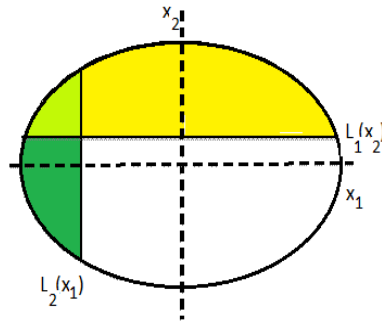
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} &= -\frac{x_1}{I_2} Q_1(x_3), \text{ y} \\ \frac{\partial \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} &= -\frac{x_2}{I_1} Q_2(x_3). \end{aligned}$$

Dado un punto  $(x_1, x_2, x_3)$ , si se integra la primera (segunda) ecuación respecto de  $x_1$  (respecto de  $x_2$ ) y al resultado se le hace la media en la dirección  $x_2$  ( $x_1$ ), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{b_2} \int_{L_2(x_1)}^{x_1} \left( \int_{c(x_2)}^{x'_1} \frac{x'_1}{I_2} Q_1(x_3) dx'_1 \right) dx'_2 \\ &= \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2} S_2(x_1), \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{b_1} \int_{L_1(x_2)}^{x_2} \left( \int_{x_2}^{c(x'_1)} \frac{x'_2}{I_1} Q_2(x_3) dx'_2 \right) dx'_1 \\ &= \frac{Q_2(x_3)}{I_1 b_1} S_1(x_2), \end{aligned} \tag{8.13}$$

donde  $L_\alpha$  es la recta paralela al eje  $x_\alpha$  que pasa por el punto donde se desea calcular el estado tensional,  $b_\alpha$  es la longitud del segmento de  $L_\alpha$  en el dominio, es decir, son los anchos de la franja donde se calcula el estado tensional en las direcciones  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.



Además:

$$S_2(x_1) = - \int_{L_2(x_1)} \left( \int_{c(x_2)}^{x_1} x'_1 dx'_1 \right) dx'_2;$$

$$S_1(x_2) = \int_{L_1(x_2)} \left( \int_{x_2}^{c(x'_1)} x'_2 dx'_2 \right) dx'_1.$$

Obsérvese que para calcular  $S_1$  se integra en la zona coloreada de amarillo, mientras que para calcular  $S_2$  se integra sobre la zona verde y la parte de la verde por encima de la recta paralela al eje  $x_1$  a la altura  $x_2$ . Las tensiones cortantes máximas se tendrán en los ejes neutros y el valor de estas dependerá de la geometría de la sección. En la siguiente tabla se muestran las tensiones máximas para distintos tipos de sección en la dirección  $x_1$ :

| Rectangular                     | Circular sólida                 | Circular hueca                 |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| $\sigma_{31} = \frac{3Q_1}{2A}$ | $\sigma_{31} = \frac{4Q_1}{3A}$ | $\sigma_{31} = \frac{2Q_1}{A}$ |

### 8.3. El modelo de flexión: Teoría de Timoshenko

Este modelo permite mejorar la respuesta de la teoría de Bernoulli-Euler cuando la razón entre la longitud de la viga y la principal dimensión de la sección comienza a ser cada vez más pequeña. Esto significa poder considerar vigas de aspecto más robusto.

La teoría de Timoshenko se basa en las mismas hipótesis que la teoría de Bernoulli-Euler, aunque con las hipótesis adicionales siguientes:

- Se supone la presencia de un estado de tensiones cortantes en la sección de la viga.
- La rotación flexional se considera como una variable independiente, esto es, no asociada con los desplazamientos flexionales.

Para simplificar el proceso deductivo, que se dará en forma completa a partir de suponer el campo de desplazamientos, se procederá a reducir el problema flexional a un solo plano, para ir fijando ideas, el plano  $x_1x_3$ , y posteriormente se extenderá el problema flexional a dos planos. De acuerdo con las hipótesis,

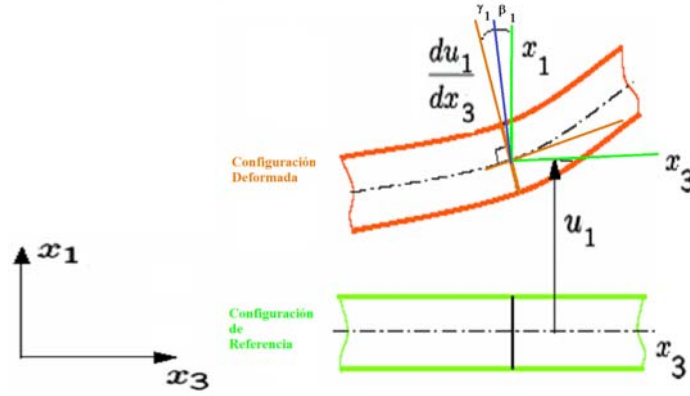
se supone el **desplazamiento correspondiente al modelo de Timoshenko** es de la forma:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1\theta_2(x_3) + x_2\theta_1(x_3)), \quad (8.14)$$

$$\beta_2 = -\theta_1(x_3) = \frac{du_2}{dx_3} - \gamma_2, \quad (8.15)$$

$$\beta_1 = \theta_2(x_3) = \frac{du_1}{dx_3} - \gamma_1. \quad (8.16)$$

En la siguiente gráfica podemos observar el comportamiento en el plano  $x_1x_3$ :



Puede observarse que  $\gamma_\alpha$  representa la desviación respecto del ángulo recto de segmentos que inicialmente estaban en la dirección  $x_1x_3$ ; mientras que  $\beta_\alpha$  representa el ángulo que forma la sección plana deformada con respecto al eje  $x_\alpha$ , después de la deformación.

### 8.3.1. Tensores de deformación y tensiones

El **tensor de deformación** derivado de (8.14) es:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3}, \quad (8.17)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \gamma_{12} = 0,$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) = \gamma_1, \quad (8.18)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) = \gamma_2. \quad (8.19)$$

Con estas expresiones cinemáticas se muestra que el plano de la sección transversal de la viga deformada (que se mantiene siempre plana) no es perpendicular al eje neutro una vez deformada la misma. Por otro lado, hay que recordar que en la teoría de flexión clásica, es decir, en la teoría de Bernoulli-Euler, la deformación axial,  $\varepsilon_{33}$ , es proporcional a la derivada de la rotación flexional definida en función de la primera derivada del desplazamiento flexional del eje neutro y, en consecuencia, de la tangente a la curva de deformación del eje neutro.

Además, en el caso de la teoría de Timoshenko se tiene que la deformación por corte transversal no es nula y, en consecuencia, la tensión cortante  $\alpha 3$  no es nula. Sin embargo, se asume que  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ .

### 8.3.2. Energía potencial de deformación

La **energía potencial de deformación** y el **trabajo de las fuerzas externas** vendrán dados por las expresiones:

$$I_i(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} U dAdx_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} (\sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{23}\gamma_{23}) dAdx_3,$$

$$T_e = \int_0^L (q_1(x_3)u_1(x_3) + q_2(x_3)u_2(x_3)) dx_3.$$

### 8.3.3. Principio de los trabajos virtuales

El **principio de los trabajos virtuales** en términos de la hipótesis sobre el desplazamiento se deduce tomando como desplazamiento virtual:

$$\mathbf{v} = \left( v_1(x_3), v_2(x_3), -x_1\hat{\theta}_2(x_3) + x_2\hat{\theta}_1(x_3) \right), \quad (8.20)$$

en la expresión general:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{\omega} (\sigma_{33}(\mathbf{u})\varepsilon_{33}(\mathbf{v}) + \sigma_{13}(\mathbf{u})\gamma_{13}(\mathbf{v}) + \sigma_{23}(\mathbf{u})\gamma_{23}(\mathbf{v})) dAdx_3 \\ &= \int_0^L (q_1(x_3)v_1(x_3) + q_2(x_3)v_2(x_3)) dx_3. \\ &\Rightarrow \int_0^L \int_{\omega} \sigma_{33}(\mathbf{u}) \left( x_2 \frac{d\hat{\theta}_1(x_3)}{dx_3} - x_1 \frac{d\hat{\theta}_2(x_3)}{dx_3} \right) dAdx_3 \\ &+ \int_0^L \int_{\omega} \sigma_{13}(\mathbf{u}) \left( \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} - \hat{\theta}_2(x_3) \right) dAdx_3 \\ &+ \int_0^L \int_{\omega} \sigma_{23}(\mathbf{u}) \left( \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} + \hat{\theta}_1(x_3) \right) dAdx_3 \\ &= \int_0^L (q_1(x_3)v_1(x_3) + q_2(x_3)v_2(x_3)) dx_3, \end{aligned}$$

cualesquiera que sean  $v_1(x_3)$ ,  $v_2(x_3)$ ,  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  suficientemente regulares.

**Observación 137** Obsérvese que la hipótesis sobre el desplazamiento asociado al modelo de Timoshenko, conlleva que los desplazamientos admisibles sean de la forma indicada en (8.20); de nuevo  $v_3$  es una función impar en  $x_1$  y  $x_2$  por lo que no es posible tampoco incluir en el modelo fuerzas axiales.

**Observación 138** Si en el principio de los trabajos virtuales se toma  $v_2(x_3) = 0$ ,  $\hat{\theta}_1 = 0$ , y  $\hat{\theta}_2 = 0$ , y  $v_1(x_3)$  de soporte compacto en  $[0, L]$ , se puede escribir:

$$- \int_0^L \int_{\omega} \frac{d}{dx_3} (\sigma_{13}(\mathbf{u})) v_1(x_3) dx_3 = \int_0^L q_1(x_3) v_1(x_3) dx_3,$$

ecuación de equilibrio en la dirección  $x_1$ , de la que se deduce que la carga total en la dirección  $x_1$  es:

$$Q_1(x_3) = \int_{\omega} \sigma_{13}(\mathbf{u}) dA.$$

Análogamente, se deduce:

$$Q_2(x_3) = \int_{\omega} \sigma_{23}(\mathbf{u}) dA.$$

### 8.3.4. Momentos flectores y esfuerzos de corte

Se define el **momento resultante en la sección** como:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = (x_2\sigma_{33}, -x_1\sigma_{33}, x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13}),$$

y su resultante es:

$$\begin{aligned} M_1(x_3) &= \int_{\omega} x_2\sigma_{33}dA = E \int_{\omega} x_2 \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) dA \\ &= EI_1 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(x_3) &= - \int_{\omega} x_1\sigma_{33}dA = -E \int_{\omega} x_1 \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) dA \\ &= EI_2 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3(x_3) &= \int_{\omega} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13}) dA \\ &= G \int_{\omega} \left( x_1 \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) - x_2 \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) \right) dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia los **momentos flectores** son no nulos:

$$M_2(x_3) = EI_2 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3}, \quad M_1 = EI_1 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3}, \quad (8.21)$$

mientras que el **momento torsor** es nulo.

Los **esfuerzos de corte** se definen por:

$$\begin{aligned} Q_1(x_3) &= \int_{\omega} \sigma_{13}dA = G \int_{\omega} \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) dA \\ &= GA \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2(x_3) &= \int_{\omega} \sigma_{23}dA = G \int_{\omega} \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) dA \\ &= GA \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right). \end{aligned}$$

Obsérvese que si el desplazamiento es de tipo de Bernoulli entonces  $Q_1(x_3) = 0$ , y  $Q_2(x_3) = 0$ .

### 8.3.5. Tensiones cortantes. Constante de Timoshenko

Una observación importante es que, por las relaciones (8.18) y (8.19), la deformación por corte no depende de las variables  $x_1, x_2$ , y, en consecuencia, la tensión cortante solo será función de  $x_3$ . Esto contradice la evidencia de que las tensiones cortantes de una viga varían con las variables  $x_1, x_2$ , por las relaciones (8.12) y (8.13). Para tener una mejor representación de la energía (o trabajo virtual) de las tensiones de corte se empleará de nuevo la fórmula de Jouravski-Collignon. Para ello, se consideran dos situaciones:

a) Primero se analiza el desplazamiento de una sección sin considerar el alabeo. Con ella se tendrá que la energía de deformación de corte por unidad de longitud viene dada por

$$\begin{aligned} E_{c1} &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \sigma_{13} \gamma_{13} dA = \frac{G}{2} \int_{\omega} \gamma_{13}^2 dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} \sigma_{13} \frac{\sigma_{13}}{G} dA = \frac{1}{2G} \int_{\omega} \sigma_{13}^2. \end{aligned}$$

b) A continuación, se considera la fórmula de Jouravski-Collignon correspondiente, de forma que la energía de deformación de corte por unidad de longitud viene dada por:

$$\hat{E}_{c1} = \frac{1}{2G} \int_{\omega} \left( \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2} S_2(x_1) \right)^2 dA.$$

En general, se verifica que  $E_{c1} \neq \hat{E}_{c1}$  y a partir de ellas se introduce la relación:

$$k = \frac{\hat{E}_{c1}}{E_{c1}}.$$

El coeficiente  $k$ , ( $k < 1$ ), se denomina **coeficiente de corte de Timoshenko** y es diferente para cada geometría de sección. El esfuerzo de corte puede reemplazarse por:

$$Q_1(x_3) = GAk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right), \quad (8.22)$$

manteniendo la expresión (8.21) para los momentos.

El **coeficiente de corte de Timoshenko para distintos tipos de sección** es:

| Tipo de sección                      | $k$   |
|--------------------------------------|-------|
| Rectangular o cuadrada maciza        | 5/6   |
| Rectangular o cuadrada hueca         | 5/12  |
| Circular                             | 6/7   |
| Perfil en I en la dirección del alma | 0.296 |

### 8.3.6. Modelo matemático de Timoshenko

La introducción del coeficiente de Timoshenko, permite escribir el **principio de los trabajos virtuales** como:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \int_{\omega} E \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) \sigma_{33}(\mathbf{u}) \left( x_2 \frac{d\hat{\theta}_1(x_3)}{dx_3} - x_1 \frac{d\hat{\theta}_2(x_3)}{dx_3} \right) dAdx_3 \\
 & + \int_0^L \int_{\omega} Gk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) \sigma_{13}(\mathbf{u}) \left( \frac{dv_1(x_3)}{dx_3} - \hat{\theta}_2(x_3) \right) dAdx_3 \\
 & + \int_0^L \int_{\omega} Gk \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) \sigma_{23}(\mathbf{u}) \left( \frac{dv_2(x_3)}{dx_3} + \hat{\theta}_1(x_3) \right) dAdx_3 \\
 & = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el dominio  $\omega$  se supone simétrico respecto a los ejes coordenados, el primer término del primer miembro se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \int_{\omega} E \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) \sigma_{33}(\mathbf{u}) \left( x_2 \frac{d\hat{\theta}_1(x_3)}{dx_3} - x_1 \frac{d\hat{\theta}_2(x_3)}{dx_3} \right) dAdx_3 \\
 & = \int_0^L \int_{\omega} E \left( x_1^2 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \frac{d\hat{\theta}_2(x_3)}{dx_3} + x_2^2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \frac{d\hat{\theta}_1(x_3)}{dx_3} \right) dAdx_3 \\
 & = - \int_0^L \left( \frac{dM_2(x_3)}{dx_3} \hat{\theta}_2(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} \hat{\theta}_1(x_3) \right) dx_3 \\
 & + \left( M_2 \hat{\theta}_2(x_3) + M_1 \hat{\theta}_1(x_3) \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L}.
 \end{aligned}$$

De esta forma, la **formulación variacional asociada al modelo 1D de Timoshenko** se reduce a:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L \left( \frac{dM_2(x_3)}{dx_3} \hat{\theta}_2(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} \hat{\theta}_1(x_3) \right) dx_3 + \left( M_2 \hat{\theta}_2(x_3) + M_1 \hat{\theta}_1(x_3) \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} \\
 & - \int_0^L \left( \frac{dQ_1(x_3)}{dx_3} v_1(x_3) + Q_1(x_3) \hat{\theta}_2(x_3) \right) dx_3 - \int_0^L \left( \frac{dQ_2(x_3)}{dx_3} v_2(x_3) - Q_2(x_3) \hat{\theta}_1(x_3) \right) dx_3 \\
 & + \left( Q_1(x_3) v_1(x_3) + Q_2(x_3) v_2(x_3) \right) \Big|_{x_3=0}^{x_3=L} \\
 & = \int_0^L (q_1(x_3) v_1(x_3) + q_2(x_3) v_2(x_3)) dx_3,
 \end{aligned}$$

cualesquiera que sean  $v_1(x_3)$ ,  $v_2(x_3)$ ,  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  suficientemente regulares. En consecuencia, dado que  $\hat{\theta}_\alpha$  y  $v_\alpha$  son funciones test arbitrarias, las **ecuaciones de equilibrio** son:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_2(x_3)}{dx_3} + Q_1(x_3) &= 0, \quad \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} - Q_2(x_3) = 0, \\
 \frac{dQ_1(x_3)}{dx_3} + q_1(x_3) &= 0, \quad \frac{dQ_2(x_3)}{dx_3} + q_2(x_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que formalmente estas expresiones son análogas a las de Euler-Bernoulli. En términos de la rotación y del desplazamiento se pueden escribir:

$$\begin{aligned}
EI_2 \frac{d^2 \theta_2(x_3)}{dx_3^2} + GAk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) &= 0, \\
EI_1 \frac{d^2 \theta_1(x_3)}{dx_3^2} - GAk \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) &= 0, \\
GAk \left( \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) + q_1(x_3) &= 0, \\
GAk \left( \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} + \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) + q_2(x_3) &= 0,
\end{aligned}$$

De la misma forma se debe corregir la **energía de deformación**:

$$\begin{aligned}
I_i(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} (\sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{13} \gamma_{13} + \sigma_{23} \gamma_{23}) dA dx_3 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} E \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right)^2 dA dx_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} Gk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right)^2 dA dx_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\omega} Gk \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right)^2 dA dx_3
\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
I_i(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} E \int_0^L \left( I_2 \left( \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right)^2 + I_1 \left( \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right)^2 \right) dx_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} AGk \int_0^L \left( \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right)^2 + \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right)^2 \right) dx_3.
\end{aligned}$$

### 8.3.7. Condiciones de contorno

Las **condiciones de contorno** que se pueden incluir de forma natural en este modelo son:

| Condición                                           | Identificación                                                                                         | Fórmula Matemática                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dirichlet/Borde fijo                                | Desplazamiento nulo<br>Rotación nula                                                                   | $u_1 = 0, u_2 = 0,$<br>$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0,$                                                                                                                                                          |
| Libre de fuerzas                                    | Momento flector nulo<br>Esfuerzo cortante nulo                                                         | $\frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} = 0, \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} = 0,$<br>$\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) = 0,$<br>$\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) = 0,$                                         |
| Extremo articulado                                  | Desplazamiento nulo<br>Momento nulo                                                                    | $u_1 = 0, u_2 = 0,$<br>$\frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} = 0, \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} = 0.$                                                                                                                    |
| Fuerza $(P_1, P_2, 0) N$<br>y<br>momento total nulo | Carga total dirección 1<br>igual a $P_1$<br>Carga total dirección 2<br>igual a $P_2$<br>Momentos nulos | $GAk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = \pm P_1^7$<br>$GAk \left( \frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) = \pm P_2$<br>$\frac{d\theta_1}{dx_3} = 0, \frac{d\theta_2}{dx_3} = 0.$ |

<sup>7</sup>Signo positivo para  $x_3 = L$ , y negativo en  $x_3 = 0$ .

Si, por ejemplo, se considera una fuerza total en el extremo de valor  $P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2$ , entonces, dado que la normal es  $\pm\mathbf{e}_3$  (según sea el extremo derecho o el izquierdo):

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2 \Rightarrow \int_{\omega} \sigma_{31} dA = \pm P_1, \int_{\omega} \sigma_{32} dA = \pm P_2, \text{ y } \int_{\omega} \sigma_{33} dA = 0.$$

De donde se deduce utilizando (8.22):

$$Q_1(x_3) = GAk \left( \frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = \pm P_1,$$

tomando el signo positivo en  $x_3 = L$  y el signo negativo en  $x_3 = 0$ . Análogamente se tiene la relación para  $Q_2$ .

Por último, teniendo en cuenta (8.17):

$$\int_{\omega} \sigma_{33} dA = \int_{\omega} E \left( -x_1 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + x_2 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) dA = 0,$$

que garantiza la tercera relación. Recordando las expresiones de los momentos, si las cargas aplicadas tienen un momento resultante nulo, entonces basta con verificar:

$$M_1(x_3) = 0 \text{ y } M_2(x_3) = 0,$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} = 0 \text{ y } \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} = 0,$$

en el extremo correspondiente.

## 8.4. Comparación modelos de Bernoulli y Timoshenko

A continuación, se verán dos ejemplos para distinguir las dos teorías de vigas en flexión. En el primer caso se comparan las soluciones para una viga de aluminio de sección circular y longitud unitaria ( $L = 1$ ), empotrada en ambos extremos y sometida a una carga distribuida uniforme  $q\mathbf{e}_1$ . El módulo de Young es  $E = 7.1 \times 10^{10} Pa$  y el módulo de cortadura es  $G = 2.6 \times 10^{10} Pa$ . La solución obtenida con Mathematica para la teoría de Bernoulli-Euler es:

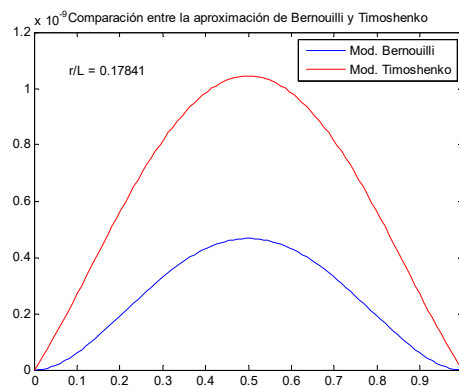
$$u_1(x_3) = \frac{q}{12EI_2} \left( \frac{x_3^2 + x_3^4}{2} - x_3^3 \right) = \frac{q}{24EI_2} x_3^2 (1 - x_3)^2,$$

y para la de Timoshenko:

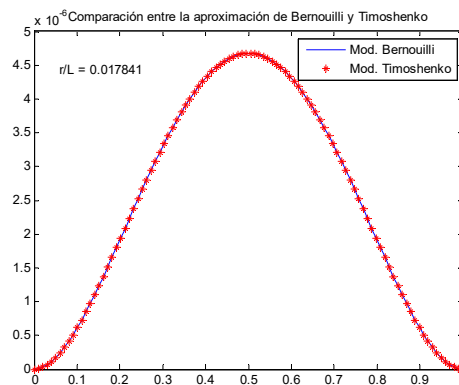
$$\begin{aligned} u_1(x_3) &= \frac{q}{24EI_2} x_3^2 (1 - x_3)^2 + \frac{q}{2GAk} x_3 (1 - x_3), \\ \theta_2(x) &= \frac{q}{12EI_2} (x_3 - 3x_3^2 + 2x_3^3). \end{aligned}$$

Obsérvese que la solución del desplazamiento  $u_1$ , según la Teoría Timoshenko, es igual a la suma de la solución de la Teoría Bernoulli-Euler más los términos que provienen del corte por flexión, término que depende del cociente  $x_3/A$ , teniendo por lo tanto más peso cuanto mayor sea el módulo de éste. En la siguiente figura se muestra la diferencia entre ambas para una relación  $r/L=0.17841$ , lo que supone tener un área de la sección diez veces menor que la longitud de la viga:

```
>> L=1;r2=0.1*L/pi;r=sqrt(r2);
>> q=10; E=7.e10; G=2.6e10;I2=pi*r^4/4;k=5/6;
>> x3=linspace(0,L,100);
>> u1b=q/(12*E*I2)*((x3.^2+x3.^4)./2-x3.^3);
>> plot(x3,u1b)
>> hold on
>> u1t=u1b+q/(2*G*pi*r2*k)*(x3-x3.^2);
>> plot(x3,u1t,'r')
>> title('Comparación entre la aproximación de Bernoulli y Timoshenko')
>> legend('Mod. Bernoulli','Mod. Timoshenko')
>> gtext(['r/L = ',num2str(r/L)])
```



Puede verse que ambos modelos están más próximos si consideramos una relación más pequeña entre la sección y la longitud. Así si el radio de la viga se divide por 10:



En consecuencia, si la viga es muy esbelta ambos modelos son muy similares. A medida que se hace más robusta es necesario incorporar el modelo de Timoshenko.

## 8.5. Boletín 8

**Ejercicio 139** En el modelo de flexión de Bernoulli-Euler indicar las condiciones de contorno a imponer sobre el desplazamiento o sus derivadas si los extremos de la viga están libres de esfuerzos.

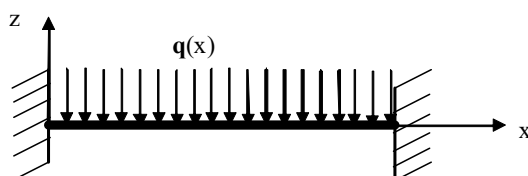
**Ejercicio 140** ♣ ¿Identificas la expresión

$$\int_0^L EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) dx - EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \frac{d}{dx} v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{d}{dx} \left( EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \right) v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} = \int_0^L q_y(x) v(x) dx?$$

¿Sabrías indicar qué expresa cada término y cada coeficiente que aparece en ella?

**Ejercicio 141** ♣ Consideremos una viga de sección cuadrada de lado  $2h$  y de longitud  $L$  con eje longitudinal el eje  $x$ . Se supone empotrada en sus extremos  $x = 0$  y  $x = L$  y sometida a una carga uniforme en cada punto  $x$ ,  $\mathbf{q}(x) = -q\mathbf{e}_3 N/m$ .

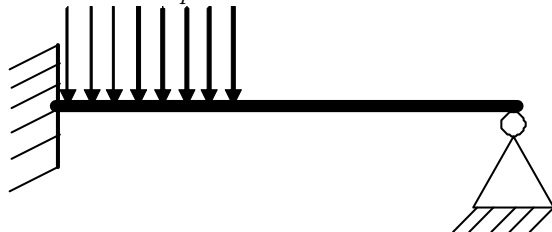
- i) Calcular el desplazamiento vertical máximo y la tensión axial máxima.
- ii) Calcular los momentos flectores para cada  $x$ .
- iii) Resolver el modelo 1D de Bernoulli en COMSOL considerando  $h = 0,09m$ ,  $L = 2m$ , y una densidad de carga sobre su cara superior de valor  $\mathbf{g}_0 = -g_0\mathbf{e}_3$ , siendo  $g_0 = -5000N/m^2$ . Considerar que el módulo de Young es  $E = 7.e10N/m^2$ , y el coeficiente de Poisson es  $\nu = 0,3$ . El material de la viga tiene una densidad  $\rho = 2700kg/m^3$ , por lo que la viga está sometida a la acción de la gravedad en la dirección  $z$  negativa.
- iv) Resolver el modelo 1D de Timoshenko asociado.
- v) Programa en MATLAB la representación de las soluciones calculadas en los apartados i) y iv) para los datos considerados en el apartado iii).
- vi) Comparar los resultados de la simulación en COMSOL de los apartados iii) y iv) con el modelo 3D.



**Ejercicio 142 ♣** Considerar una viga de sección rectangular y de longitud  $L$  con eje longitudinal el eje  $x$ . Se supone empotrada en su extremo  $x = 0$ , y simplemente apoyada en  $x = L$ . Sobre su frontera superior se aplica una carga de resultante:

$$\mathbf{q}(x) = \begin{cases} -q_0 \mathbf{e}_3, & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

Calcular el desplazamiento vertical.



**Ejercicio 143 ♣** Considerar la viga sólida de aluminio cuyas características corresponden a las dadas en el Problema 65, y cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 0,25\}.$$

Suponer que no hay fuerzas de volumen aplicadas y que la fuerza de superficie sobre su superficie lateral es nula. Considerar además una carga total  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{e}_2$  sobre la cara  $x = 10$ , y suponer que la resultante de los momentos es nula sobre esta cara.

- i) Calcular el momento principal de inercia de su sección transversal con respecto al eje  $z$ . ¿Cuál sería el valor con respecto al eje  $y$ ?
- ii) Escribir el modelo matemático 3D asociado suponiendo que en  $x = 0$  el desplazamiento es nulo sobre las direcciones de los ejes de la sección.
- iii) Escribir la componente normal del vector de esfuerzos asociado al problema 3D anterior en cada sección transversal.
- iv) Escribir el modelo de Bernoulli asociado al problema 3D anterior, ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno, planteado sobre la generatriz del cilindro.
- v) Indicar cuál es la tensión normal calculada con el modelo de Bernoulli en cada punto de la generatriz.

**Ejercicio 144** Consultar la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y elegir para una aleación de zinc, en el sistema internacional de unidades, los parámetros necesarios para resolver cada uno de los siguientes apartados. Considerar una viga sólida con la aleación elegida y cuya configuración de referencia sea:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1\},$$

- i) Si su material verifica la ley de Hooke, plantear sobre el cilindro un modelo matemático 3D de flexión pura, considerando al menos una zona de su frontera lateral con fuerzas de superficie no nulas.

- ii) *Resolver en COMSOL el modelo 3D. Representar gráficamente sobre la configuración de referencia la viga deformada.*
- iii) *Indicar si el material está trabajando realmente en régimen elástico lineal.*
- iv) *Realizar los cálculos postproceso necesarios para comprobar si la resultante de las fuerzas y de los momentos verifican las hipótesis de los problemas de flexión.*
- v) *Escribir el modelo matemático asociado correspondiente a una viga en flexión de Bernoulli. Resolver en COMSOL o MATLAB el modelo obtenido.*
- vi) *Escribir el modelo matemático asociado correspondiente a una viga en flexión de Timoshenko. Resolver en COMSOL el modelo obtenido.*
- vii) *Realizar una comparación de las gráficas obtenidas para su desplazamiento vertical con la simulación 3D, con la aproximación de Bernoulli o con la de Timoshenko.*

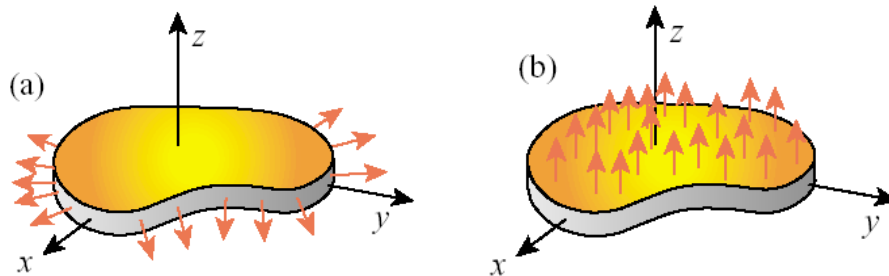
## Capítulo 9

# Problemas en placas

**Definición 145** Una placa *-thinness-* es una estructura que se caracteriza por:

- Su pequeño espesor: una de las dimensiones de la placa, llamada **espesor** *-thickness-*, es mucho más pequeña que las otras dos.
- Por ser plana: la **superficie media de la placa** *-midsurface-*, definida como la superficie que divide en dos el espesor, **es plana**.

Para placas ya hemos estudiado el problema de tensiones planas, también llamado de membrana, el cual puede ser considerado cuando las cargas aplicadas son como las de la figura (a).



En este capítulo estudiaremos placas sometidas a cargas transversales, esto es, cargas normales a su superficie media como se representa en la figura (b): encontrar los desplazamientos, deformaciones y tensiones asociadas se corresponde con un problema de placa en flexión *-plate bending-*.

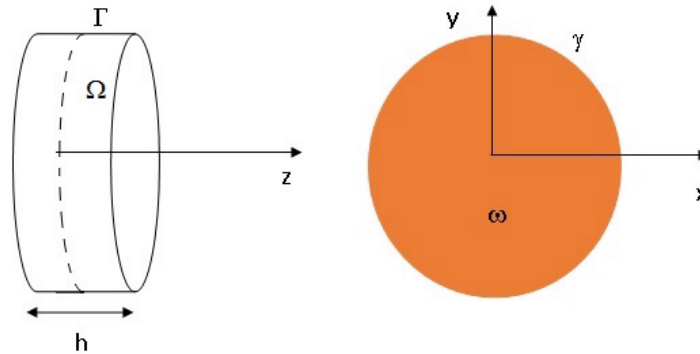
Soluciones analíticas para distintos modelos de placas rectangulares y circulares, correspondientes a distintas condiciones de contorno, pueden consultarse en Vinson ([15]).

Consideremos la placa de la figura (b) definida por

$$\Omega = \omega \times (-h/2, h/2),$$

siendo  $\omega$  su superficie media y cuyo espesor es  $h$ . Consideremos la superficie media permaneciendo en el plano  $xy$  y el eje  $z$  es tomado normal a la superficie

media, de tal forma que el sistema  $XYZ$  verifica la regla de la mano derecha. Generalmente en placas se puede permitir que el espesor sea una función  $h(x, y)$ , aunque las más habituales son las placas de espesor constante debido a su facilidad de fabricación.



Ahora imaginemos filamentos de material dirigidos en la dirección de la normal a la superficie media, esto es, en la dirección  $z$  extendiéndose desde  $-h/2$  por debajo y hasta  $h/2$  por encima. Los puntos finales de esos filamentos normales describen dos superficies frontera, llamadas las superficies de la placa: la que va en la dirección  $+z$  es llamada superficie superior -top surface-, denotada  $\Gamma^+$ , y la que va en la  $-z$ , la superficie inferior -bottom surface-, denotada  $\Gamma^-$ . Este cuerpo tridimensional se dice que es una placa si su espesor  $h$  es en todo punto pequeño -pero no demasiado pequeño- comparado con la longitud característica  $L_c$  de la superficie media de la placa. El término "pequeño" debe interpretarse en el sentido siguiente:  $h/L_c$  debe estar entre  $1/5$  y  $1/100$  para la mayor parte de las estructuras placa. Una paradoja es que una placa extremadamente delgada, tal como la tela de un paracaídas, deja de funcionar como una placa.

Una placa esta flexionada -bend- si soporta cargas normales a su superficie media. Los problemas resultantes en mecánica de estructuras se llaman:

- **Flexión inextensional:** si la placa no experimenta un estiramiento -stretching- o contracción apreciable de su superficie media. Este problema también se conoce como placa en flexión -plate bending-.
- **Flexión extensional:** la superficie media sufre un apreciable estiramiento o contracción. Este problema acopla efectos flexión-dilatación -combined bending-stretching-, acoplamiento membrana-flexión -coupled membrane-bending-.

Los modelos más importantes de placas son:

1. El **modelo de membrana** -membrane shell model-: para placas extremadamente finas dominadas por efectos de membrana, tales como estructuras hinchables y tejidos (paracaídas, velas,...).
2. El **modelo de Von Kármán:** Para placas bastante delgadas en las que interactúan fuertemente efectos membrana y de flexión. Un estudio detallado de este modelo puede consultarse en Ciarlet y Rabier [6].

3. El **modelo de Kirchhoff**: para placas delgadas en flexión con pequeñas desviaciones, despreciable energía cortante y acción flexión- membrana desacoplada.
4. El **modelo de Reissner-Mindlin**: para placas en flexión delgadas y moderadamente delgadas en las cuales los efectos cortantes en el primer orden son importantes. Este modelo es muy utilizado en dinámica y cuando se trabaja con estructuras en nido de abeja o composites.
5. **Modelos composite** de orden superior: incluye esfuerzos cortantes interlámina.
6. **Modelos exactos**: para el análisis de efectos adicionales se debe usar el modelo tridimensional.

Los problemas 1 y 2 son geoméricamente no lineales y se escapan de los objetivos de este curso.

## 9.1. El modelo de Kirchhoff

El modelo de Kirchhoff es aplicable a placas elásticas que satisfacen las siguientes condiciones:

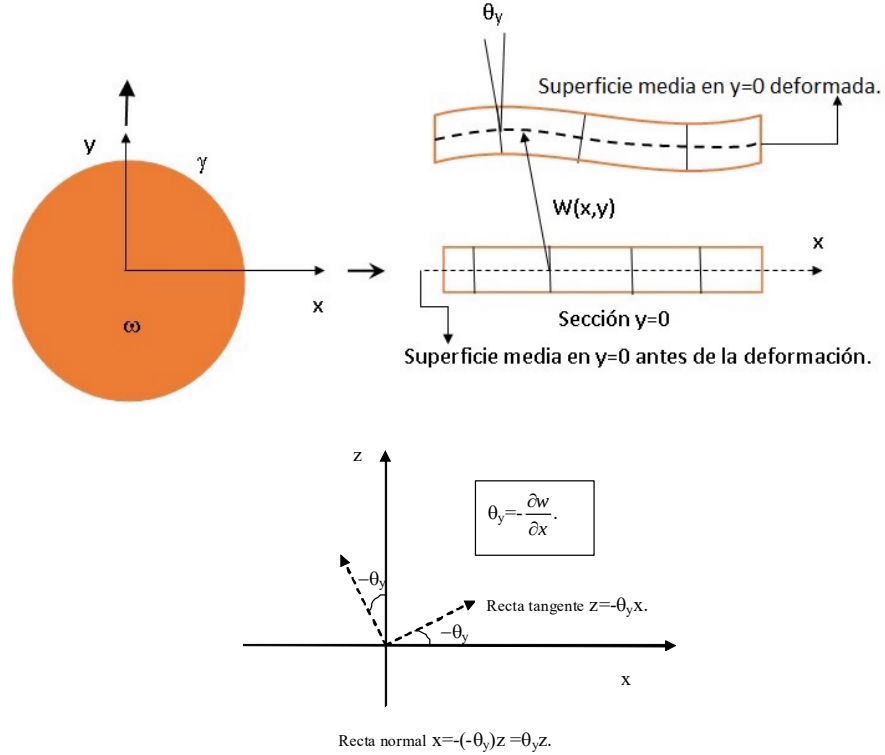
- **La placa es delgada** en el sentido de que el espesor  $h$  es pequeño comparado con la longitud característica de la sección media; pero no tan pequeño que la desviación -deflection- vertical  $w$  pueda ser comparable con  $h$ .
- **El espesor de la placa es o bien constante o varía lentamente** de forma que los efectos tridimensionales puedan ser ignorados.
- La placa es **simétrica con respecto a la superficie media**.
- **Las cargas son solo transversales a la superficie media de la placa** y en consecuencia no hay cargas en el plano de la superficie media. Además, estas cargas transversales aplicadas están **distribuidas sobre las tapas de la placa sobre un área de dimensión  $h$  o mayor**. Denotaremos por

$$\mathbf{q}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} (0, 0, b_z(x, y, z)) dz \text{ N/m}^2,$$

la fuerza por unidad de superficie aplicada, siendo  $b_z$  la carga transversal por unidad de volumen. De este modo las cargas que quedan en el plano de la placa  $(b_x, b_y, 0)$ , si por ejemplo fuesen independientes de  $z$ , se resolverían utilizando una aproximación de tensiones planas, y posteriormente se aplicaría el principio de superposición.

- Las condiciones soportadas por la placa son tales que no hay una extensión significativa de su superficie media.

La cinemática de la viga de Bernoulli-Euler está basada en la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas y normales al eje deformado longitudinal. La cinemática de la placa de Kirchhoff está basada en la extensión de esta hipótesis a la flexión biaxial: **"Fibras normales a la superficie media de referencia permanecen rectas y normales a la superficie media deformada"**. La cinemática de una placa de Kirchhoff puede verse en la figura: el desplazamiento transversal  $w$  aparece exagerado para visualizarlo mejor; en la práctica para que el modelo de Kirchhoff sea válido  $w \ll h$ .



### 9.1.1. Expresión del desplazamiento

Con la flexión, las partículas que estaban sobre la superficie media  $z = 0$  sufren una **desviación**  $w(x, y)$  a lo largo de  $z$ ;  $w$  también se suele llamar **flecha en el punto**. Las pendientes de la superficie media deformada en las direcciones  $x$  e  $y$  son:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, y).$$

Las rotaciones de la fibra material normal que pasa por  $(x, y)$  son denotadas por  $\theta_x, \theta_y$  respectivamente. Para pequeñas desviaciones  $w$ , la hipótesis de Kirchhoff relaciona las rotaciones con las pendientes<sup>1</sup>:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

<sup>1</sup>Nótese que  $\text{rot}(0, 0, w) = \left( \frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right)^T$ .

Un punto de la superficie media  $O = (x, y, 0)$  va a pasar después de la deformación a ocupar la posición:  $O' = (x, y, w(x, y))$ . En cambio un punto  $P$  de la fibra normal pasando por  $O$ ,  $P = (x, y, z)$  pasará a ocupar la posición  $P' = (x + u_x, y + u_y, z + w(x, y))$ , donde la extensión en las direcciones  $x$  e  $y$  deben calcularse para que la fibra deformada siga permaneciendo normal a la superficie media deformada.

En consecuencia, el vector  $\overrightarrow{O'P'} = (u_x, u_y, z)$  debe ser perpendicular a los vectores tangentes a la superficie media deformada  $(1, 0, \frac{\partial w}{\partial x})$  y  $(0, 1, \frac{\partial w}{\partial y})$  (tener en cuenta que una parametrización de la mencionada superficie sería:  $(x, y) \in \omega \mapsto (x, y, w(x, y))$ ). De donde se deduce que los desplazamientos  $(u_x, u_y, u_z)$  de un punto material de la placa, no necesariamente localizado sobre la superficie media, están dados por:

$$\begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial w}{\partial x} = z\theta_y, \\ u_y &= -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z\theta_x, \\ u_z &= w. \end{aligned}$$

Nótese nuevamente que su vector de rotación es:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{Rot}(\mathbf{u}) = \left( \frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right)^T,$$

el mismo obtenido que en los puntos de la superficie media.

Por tanto, en el modelo de Kirchhoff, **los desplazamientos horizontales sólo se dan fuera del plano medio y sólo se producen por giro del segmento perpendicular al plano medio, no habiendo extensión de la superficie media de la placa.** Además, **los puntos del plano medio sólo sufren desplazamiento vertical:**  $u_x(x, y, 0) = 0$ ,  $u_y(x, y, 0) = 0$ . Esta hipótesis es análoga a la hipótesis de Navier-Bernoulli para vigas.

### 9.1.2. Tensor de deformación

El **tensor de deformación** asociado con estos desplazamientos se obtiene de las ecuaciones de elasticidad:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z\kappa_{xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z\kappa_{yy}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z\kappa_{xy}, \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

En estas expresiones hemos denotado por:

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

las curvaturas de la superficie media deformada. En el **modelo de placas de Love-Kirchhoff se desprecia la deformación por cortante**:  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ .

Obsérvese que en el modelo de Kirchhoff el desplazamiento y el tensor de deformación quedan completamente determinados si  $w(x, y)$  es conocido; en particular, el tensor de deformación es una función lineal en  $z$  y depende de las segundas derivadas de  $w$ . Además, este modelo desprecia las deformaciones cortantes; y podemos observar que no es de deformaciones planas, pues sus componentes  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  dependen de  $z$ .

### 9.1.3. Ecuaciones constitutivas

Si tenemos en cuenta la **ley de Hooke para tensiones planas** (al ser una placa delgada, el modelo de Kirchhoff supone que  $\sigma_{zz} = 0$ ) podemos escribir sobre cada lámina  $z = cte$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \\ &= -z [\mathbf{E}] \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siendo  $[\mathbf{E}]$  la **matriz de elasticidad correspondiente a tensiones planas**. Una simple cuenta, en términos del módulo de Young y del coeficiente de Poisson, permite escribir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} &= -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \sigma_{xx} = -z \frac{E}{1-\nu^2} (\kappa_{xx} + \nu \kappa_{yy}), \\ \sigma_{yy} = -z \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \kappa_{xx} + \kappa_{yy}), \\ \sigma_{xy} = -z \frac{E}{1+\nu} \kappa_{xy}. \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \sigma_{xx} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{xy} = -z \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (9.1) \\ \Rightarrow &\begin{cases} \sigma_{xx} = -z E \left( \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \Delta w \right), \\ \sigma_{yy} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \Delta w \right), \\ \sigma_{xy} = -z \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (9.2) \end{aligned}$$

**Observación 146** Obsérvese que el **modelo de Kirchhoff no es un modelo plano**. En efecto, si bien las componentes  $\alpha\beta$  del tensor de deformación son las únicas no nulas dependen también de la variable  $z$ , por tanto, no es de deformaciones planas. El **modelo de Kirchhoff tampoco es propiamente**

**de tensiones planas**, ya que las componentes  $\alpha\beta$  del tensor de tensiones dependen de  $z$ . Además, si calculamos la componente  $zz$  de la tensión a partir del tensor de deformación obtenido:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(x, y, z) &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\ &= -z \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) = -z \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \Delta w,\end{aligned}$$

que en general no tiene por qué ser nulo. Sin embargo, en el modelo de Kirchhoff

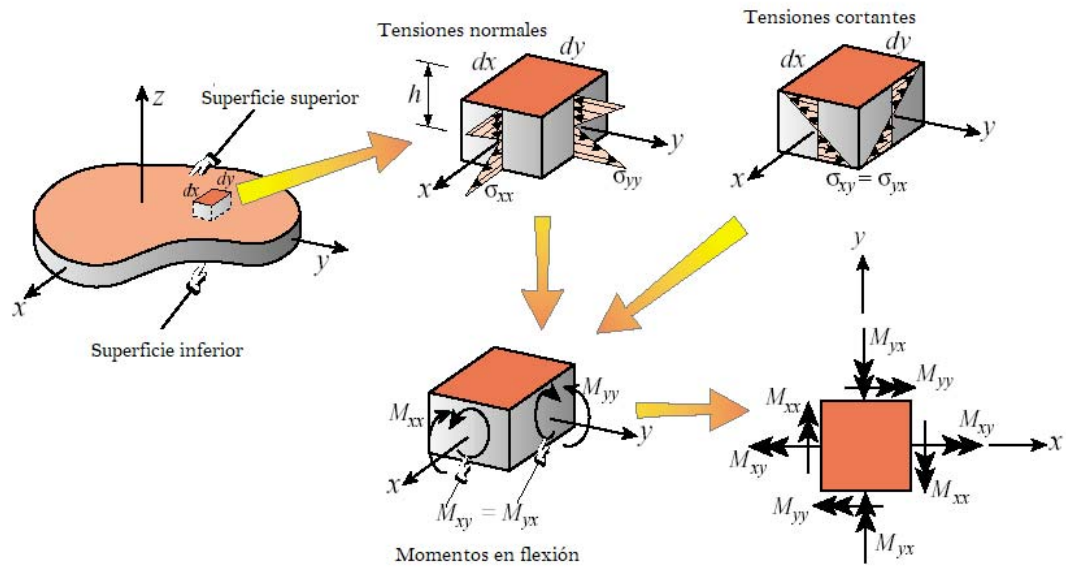
se supone que  $\sigma_{zz}(x, y, 0) = 0$  y  $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz}(x, y, z) dz = 0$ .

#### 9.1.4. Fuerzas resultantes. Momentos flectores. Coeficientes de rigidez

Sobre cada corte transversal de la placa según  $x = cte$  o  $y = cte$ , el **vector de esfuerzos** es:

$$\begin{aligned}\sigma \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sobre } x = cte, \\ \sigma \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sobre } y = cte.\end{aligned}$$

La visualización del vector de esfuerzos sobre un elemento de placa, teniendo en cuenta su linealidad en  $z$ , puede verse en la siguiente figura.



En la figura se suponen que los términos en  $w$  son positivos y no afectan al signo de las tensiones. Obsérvese que las secciones encima de la superficie media se comprimen, mientras las que están por debajo se estiran (ver la gráfica de las tensiones normales). También se aprecia bien el efecto de giro de las distintas secciones en la gráfica de las tensiones cortantes dentro del plano.

El momento que se origina en cada punto de la sección, con respecto al origen de coordenadas de la sección tomado como el baricentro de esta, es:

$$\mathbf{M}_x = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y & z \\ \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \end{vmatrix} = (-z\sigma_{xy}, z\sigma_{xx}, -y\sigma_{xx}) \text{ sobre } x = cte,$$

$$\mathbf{M}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 0 & z \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \end{vmatrix} = (-z\sigma_{yy}, z\sigma_{xy}, x\sigma_{yy}) \text{ sobre } y = cte.$$

Las integrales en el espesor de las componentes  $z$  de  $\mathbf{M}_x$  y  $\mathbf{M}_y$  son nulas:

$$\int_{-h/2}^{h/2} -y\sigma_{xx}dz = 0; \int_{-h/2}^{h/2} -x\sigma_{yy}dz,$$

al ser  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$  impares en  $z$ . La resultante en flexión se obtiene integrando en el espesor los momentos flectores:

$$M_{xx} = - \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}dz, \quad M_{yy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}dz, \quad (9.3)$$

y los momentos de torsión:

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}dz, \quad M_{yx} = - \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}dz. \quad (9.4)$$

$M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  y  $M_{xy}$  son tensiones resultantes con dimensión de momento por unidad de longitud, esto es, fuerza.

Integrando estas expresiones se obtiene la relación momento-curvatura:

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = - \int_{-h/2}^{h/2} z(-z) [\mathbf{E}] \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix} dz$$

$$= \frac{h^3}{12} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes

$$D_{ij} = \frac{h^3}{12} E_{ij},$$

son llamados **coeficientes de rigidez de la placa**. Las definiciones dadas de los momentos y su signo se toman por convenio, para que la matriz de rigidez  $[D]$  asociada tenga coeficientes positivos. No todos los autores lo consideran así, por lo que es conveniente revisar en cada caso el signo considerado.

Para un material isótropo, con módulo de Young  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix},$$

siendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

el **coeficiente de rigidez isotrópico de la placa**.

La expresión de los momentos en términos de los parámetros del material y de la deflexión de la placa es:

$$M_{xx} = D(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (9.5)$$

$$M_{yy} = D(\nu\kappa_{xx} + \kappa_{yy}) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (9.6)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.7)$$

### 9.1.5. Cálculo de las tensiones máximas

Si los momentos flectores son dados, los valores máximos de las correspondientes tensiones en la placa se deducen de las expresiones:

$$\sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} = \pm \frac{6M_{xx}}{h^2}, \sigma_{yy}^{\text{máx(mín)}} = \pm \frac{6M_{yy}}{h^2}, \quad (9.8)$$

$$\sigma_{xy}^{\text{máx(mín)}} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2} = \sigma_{yx}^{\text{máx(mín)}}. \quad (9.9)$$

En efecto, veamos esto para  $\sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}}$ . Puesto que  $\sigma_{xx}$  es lineal en  $z$  su máximo y su mínimo se alcanzan en las tapas. En efecto, podemos escribir de la expresión (9.2):

$$\sigma_{xx} = -z\beta(x, y), \quad (9.10)$$

siendo

$$\beta(x, y) = E \left( \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \Delta w \right).$$

Esto permite obtener:

$$\sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} = \pm \frac{h}{2} \beta(x, y),$$

que se alcanza en  $z = \pm h/2$ . Esta observación permite escribir la tensión normal en la dirección  $x$  en función de ese máximo y mínimo a lo largo de la fibra normal al punto  $(x, y)$  como:

$$\sigma_{xx} = \mp \frac{2z}{h} \sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}}. \quad (9.11)$$

Utilizando ahora la definición del momento flector  $M_{xx}$  (ver (9.3)):

$$\begin{aligned} M_{xx} &= - \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz = - \int_{-h/2}^{h/2} z \left( \mp \frac{2z}{h} \sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} \right) dz \\ &= \pm \frac{2}{h} \sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \pm \frac{2}{h} \sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} \frac{h^3}{12}. \end{aligned}$$

Gracias a esta relación, se deduce:

$$M_{xx} = \pm \frac{h^2}{6} \sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}},$$

y, finalmente, despejando:

$$\sigma_{xx}^{\text{máx(mín)}} = \pm \frac{6M_{xx}}{h^2},$$

que es la primera de las relaciones indicadas en (9.8). Así, la tensión máxima, para un mismo momento flector aplicado, aumenta cuanto menor es el valor de  $h$ .

Para placas no homogéneas, por ejemplo, fabricadas combinando distintos materiales, los pasos esenciales de la teoría de Kirchhoff son los mismos pero la integración puede ser más laboriosa.

### 9.1.6. Inconsistencias del modelo de Kirchhoff. Cargas totales

Al igual que sucede con el modelo de Bernoulli-Euler, alguna **inconsistencia del modelo de Kirchhoff** surge al considerar las ecuaciones de equilibrio, ya que estas exigen la existencia de fuerzas transversales y, por tanto, en la práctica debe haber tensiones transversales  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ . Sin embargo, con las hipótesis propuestas, las componentes transversales del tensor de deformación son nulas y, en consecuencia, también lo serían las correspondientes componentes de las tensiones.

Veamos, por ejemplo, la ecuación de equilibrio a lo largo del eje  $x$  suponiendo que la fuerza resultante en la dirección  $x$  sea nula:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}.$$

Utilizando las expresiones para las tensiones del modelo de Kirchhoff (ver (9.1)) se deduciría:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -zE \left( \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \Delta w \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -z \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z},$$

y, agrupando términos:

$$zE \left( \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}.$$

Esta igualdad se puede escribir de forma simplificada como:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = z\lambda(x, y), \quad (9.12)$$

siendo  $\lambda$  una función independiente de  $z$ :

$$\lambda(x, y) = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}.$$

Lo primero que observamos es que en general esta función será no nula y, en consecuencia,  $\sigma_{xz}$  debería ser distinto de cero.

Además, el punto crítico en  $z$  de  $\sigma_{xz}$  ocurre en  $z = 0$ , punto en el cual toma el valor máximo  $\sigma_{xz}^{\text{máx}}$ . En efecto, integrando la expresión (9.12), se obtiene:

$$\sigma_{xz} = \frac{z^2}{2} \lambda(x, y) + \gamma(x, y).$$

Puesto que, en la tapa de la placa, la fuerza total en la dirección  $x$  debe ser nula, debería verificarse que

$$\sigma_{xz} \left( x, y, \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \Rightarrow \lambda(x, y) = -\frac{8}{h^2} \gamma(x, y),$$

y, por tanto:

$$\sigma_{xz} = \left( -\frac{4z^2}{h^2} + 1 \right) \gamma(x, y),$$

por lo que el punto crítico  $z = 0$  es un máximo y  $\gamma(x, y) = \sigma_{xz}^{\text{máx}}$ . Así:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{\text{máx}} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right).$$

En resumen, para una placa homogénea y usando argumentos derivados de las ecuaciones de equilibrio se debe verificar:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^{\text{máx}} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{\text{máx}} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (9.13)$$

donde los valores máximos  $\sigma_{xz}^{\text{máx}}, \sigma_{yz}^{\text{máx}}$  se alcanzarán en la superficie media y serán función solamente de  $x$  e  $y$ . Integrando sobre el espesor se obtiene:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{2}{3} \sigma_{xz}^{\text{máx}} h, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{2}{3} \sigma_{yz}^{\text{máx}} h.$$

En consecuencia, si  $Q_x$  y  $Q_y$  son dados, entonces:

$$\sigma_{xz}^{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}; \quad \sigma_{yz}^{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}. \quad (9.14)$$

Esta predicción, obtenida de las ecuaciones de equilibrio, indica que, puesto que el modelo de Kirchhoff no tiene en cuenta la energía cortante transversa (ya que de hecho de las hipótesis cinemáticas se deduce  $\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$ ), sólo podrá ser aplicado si las tensiones dadas por la ecuación (9.14) son mucho más pequeñas que las dadas por las relaciones (9.8) - (9.9).

**Observación 147** Obsérvese que asumiendo la existencia de cortantes  $xz$  e  $yz$  no nulas, el vector de esfuerzos en una sección es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \text{ sobre } x = \text{cte}, \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \text{ sobre } y = \text{cte}.\end{aligned}$$

Dado que las funciones  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$  son funciones impares en  $z$ , el esfuerzo total en cada sección es:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_x \end{pmatrix} \text{ sobre } x = \text{cte}, \\ \mathbf{Q} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_y \end{pmatrix} \text{ sobre } y = \text{cte}.\end{aligned}$$

### 9.1.7. Ecuaciones de Kirchhoff en términos de los momentos

Nos centramos en lo que sigue en deducir la ecuación del modelo de Kirchhoff en términos de los momentos. Si consideramos la ecuación de equilibrio correspondiente a las cargas transversales se deduce:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} \right) dz = -q_z,$$

siendo  $q_z$  la carga transversal total por unidad de área. De aquí se deduce:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q_z. \quad (9.15)$$

Por otra parte, si consideramos de nuevo la primera de las ecuaciones de equilibrio, y tenemos en cuenta que no hay fuerzas aplicadas en el plano de la superficie media, se deduce:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}.$$

En consecuencia, gracias a las expresiones (9.13), y (9.14), se deduce fácilmente:

$$\frac{1}{z} \left( \frac{\partial (z\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (z\sigma_{xy})}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \sigma_{xz}^{\text{máx}} \frac{8z}{h^2} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \frac{8z}{h^2} = 12 \frac{Q_x}{h^3} z,$$

y, por tanto,

$$\left( \frac{\partial (z\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (z\sigma_{xy})}{\partial y} \right) = 12 \frac{Q_x}{h^3} z^2.$$

Integrando en el espesor:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial(z\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(z\sigma_{xy})}{\partial y} \right) dz = \int_{-h/2}^{h/2} 12 \frac{Q_x}{h^3} z^2 dz = Q_x \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -Q_x.$$

Análogamente, utilizando la ecuación de equilibrio en la dirección  $y$  se deduce:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = -Q_y. \quad (9.17)$$

### 9.1.8. Ecuaciones de Kirchhoff en términos del desplazamiento

Para finalizar, de (9.15) se deduce la **ecuación del modelo de Kirchhoff de placas** en términos del desplazamiento. Sustituyendo en la ecuación (9.15) las relaciones (9.16) y (9.17) se puede escribir:

$$-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q_z.$$

Teniendo en cuenta las relaciones (9.5) - (9.7), se deduce:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (D(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy})) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D(1-\nu)\kappa_{xy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D(\nu\kappa_{xx} + \kappa_{yy})) = q_z,$$

y, en términos del desplazamiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) = q_z. \end{aligned}$$

En consecuencia, para una placa plana de espesor constante en la que sean válidas las hipótesis de Kirchhoff-Love, la flecha vertical en cada punto, bajo la acción de las cargas verticales sobre ella, verifica:

$$\Delta^2 w = \frac{q_z}{D}.$$

Para placas de espesor no constante, la flecha,  $w$ , y la carga aplicada están relacionadas por la ecuación:

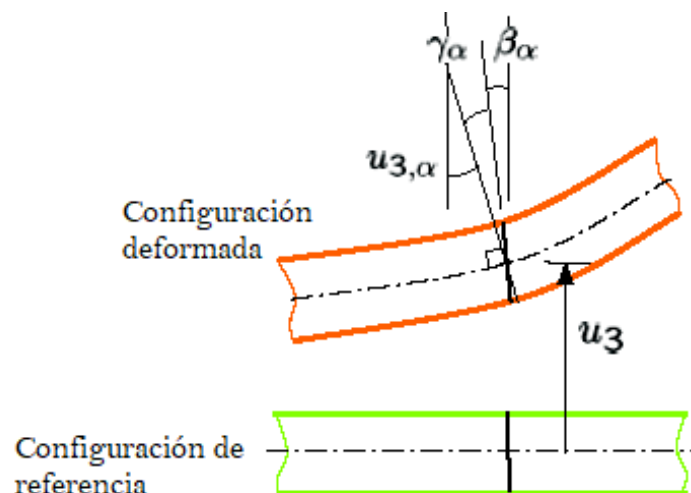
$$\Delta(D\Delta w) = q_z,$$

donde ahora la rigidez flexional  $D$  es una función, que depende del punto  $(x, y)$  concreto de placa.

**Observación 148** *Es interesante notar que esta ecuación es análoga a la elástica para vigas de Bernoulli: se trata de una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden. Su formulación variacional lleva a un operador bilineal expresado*

en términos del laplaciano, por lo que, en su resolución numérica, se requiere que tanto el desplazamiento vertical como sus derivadas sean continuas a través de las fronteras de los elementos finitos. Este requerimiento lleva a una formulación utilizando elementos placa conformes que requiere cierta complejidad. Un elemento finito es considerado conforme (o compatible) para una formulación débil si satisface todos los requerimientos de continuidad impuestos sobre su formulación débil. Si un elemento viola alguna de estas condiciones se dice no conforme. Los elementos conformes se basan sobre fundamentos matemáticos sólidos y, por tanto, exhiben unas buenas propiedades de convergencia; mientras que los elementos no conformes pueden no mostrar un buen comportamiento asintótico cuando se refina la malla. Desafortunadamente, a causa de las dificultades en conseguir una formulación simple y computacionalmente eficiente de los elementos placa de Kirchhoff, en los códigos comerciales se consideran muchos elementos placa y lámina no conformes; estos elementos generalmente dan resultados razonables; sin embargo, el usuario debe ser consciente de que los resultados teóricos sobre la convergencia no se aplican en general a estos elementos.

## 9.2. Modelo en flexión: Teoría de Reissner-Mindlin



Las hipótesis de Reissner-Mindlin para el cálculo elástico de placas y láminas son:

- El material de la placa es elástico lineal.
- Los desplazamientos son pequeños respecto al espesor:  $u_i \ll h$ .
- Es un modelo válido cuando además de cargas transversales hay cargas en el plano de la superficie media.
- Las tensiones normales perpendiculares a la superficie media se desprecian, esto es,  $\sigma_{33} = 0$ .

- El desplazamiento vertical para los puntos del plano medio no depende de  $x_3$ :

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \hat{u}_3(x_1, x_2).$$

Las fibras rectas y normales a la superficie media antes de la deformación no cambian de longitud después de la deformación.

- Todos los puntos sobre un filamento normal a la superficie media antes de la deformación permanecen sobre una línea recta después de la deformación:

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \hat{u}_\alpha(x_1, x_2) - x_3\beta_\alpha; \quad \beta_\alpha = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_\alpha} - \gamma_\alpha,$$

donde  $\gamma_\alpha$  es el ángulo de rotación o corte -shearing angle-, el cual era cero para placas de Kirchhoff. Con este modelo, los puntos del plano medio no sólo sufren desplazamiento vertical sino también horizontal:

$$u_1(x_1, x_2, 0) = \hat{u}_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2, 0) = \hat{u}_2(x_1, x_2),$$

por lo cual la superficie media puede admitir movimiento extensional.

El modelo de placa de Reissner-Mindlin es el equivalente al de la viga de Timoshenko, mientras que el modelo de placa de Kirchhoff-Love es el equivalente al de la viga de Bernoulli-Euler. De hecho, existe un paralelismo entre los modelos de vigas y de placas.

### 9.2.1. Tensor de deformación

Con estas hipótesis el tensor de deformación es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha}; \quad \varepsilon_{33} = 0; \\ 2\varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \left( \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \beta_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha \neq \gamma; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - \beta_\alpha(x_1, x_2) = \gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Obsérvese, que esta igualdad refleja la interpretación dada para  $2\varepsilon_{\alpha 3}$ : la desviación respecto del ángulo recto debida a la deformación. Este tensor de deformación sobre la superficie media se simplifica a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha}; \quad \varepsilon_{33} = 0; \\ 2\varepsilon_{\alpha\gamma} &= \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha \neq \gamma; \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{\partial \hat{u}_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - \beta_\alpha(x_1, x_2) = \gamma_\alpha. \end{aligned}$$

Se observa una diferencia importante con respecto al modelo de Kirchhoff-Love, cuya superficie media ni sufre elongaciones ni deformaciones cortantes. Por otra parte, el modelo de Reissner-Mindlin admite cizallamiento en  $\alpha 3$  (aunque independiente de  $x_3$ ), y, por tanto, tensiones cortantes  $\sigma_{\alpha 3}$ , algo que el modelo de Kirchhoff no permitía.

### 9.2.2. Ecuaciones constitutivas

El modelo de Reissner-Mindlin, al igual que el Kirchhoff-Love considera  $\sigma_{33} = 0$ . La primera implicación es que no considera esfuerzos normales en la placa. En efecto, el vector de esfuerzos en  $z = cte$  es:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} (\pm \mathbf{e}_3) = \pm \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

por lo cual la tensión normal  $\sigma_n = \pm \sigma_{33} = 0$ .

Sin embargo, considerando la ley de Hooke 3D esto llevaría a:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{33} \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu) \varepsilon_{33} + \nu (\varepsilon_{\alpha\alpha})) = 0, \end{aligned}$$

es decir:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{\alpha\alpha},$$

la misma relación obtenida cuando el problema es de tensiones planas en el plano  $x_1x_2$ . Así, la hipótesis  $\sigma_{33} = 0$  nos lleva a asumir como válida esta expresión en el plano, ecuación que no se deduce directamente de la hipótesis sobre los desplazamientos del modelo de Reissner-Mindlin.

Para el resto de las tensiones, el modelo de Reissner-Mindlin considera la misma matriz de elasticidad de la **ley de comportamiento del modelo de tensiones planas** en el plano  $x_1x_2$ , y la ley de Hooke 3D para las componentes  $\alpha 3$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} - x_3 \frac{\partial \beta_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} \right) (1 - \delta_{\alpha\gamma}); \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \left( \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \beta_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right) \right); \\ \sigma_{\alpha 3} &= 2\mu \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la ley combina tensiones planas en las tres direcciones.

### 9.2.3. Fuerzas resultantes. Esfuerzos membranales y cor-tantes

Consideramos de nuevo los vectores de esfuerzos sobre cada corte transversal  $x_1 = cte$ ,  $x_2 = cte$ ,  $x_3 = cte$ , y calculamos su resultante en todo el espesor (hay que tener en cuenta que ahora el modelo permite esfuerzos en la dirección normal

para  $x_\alpha = cte$ , ya que  $\sigma_{\alpha 3}$  es no nulo).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \text{ sobre } x_1 = cte, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \text{ sobre } x_2 = cte. \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ sobre } x_3 = cte.\end{aligned}$$

Se define:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3.$$

Entre ellos hay que distinguir los **esfuerzos resultantes membranales**, que permanecen en planos paralelos a la sección media de la placa:

$$\begin{aligned}N_{\alpha\alpha} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\alpha} dx_3 \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right) dx_3 \\ &\quad + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} - x_3 \frac{\partial \beta_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} \right) (1 - \delta_{\alpha\gamma}) dx_3 \\ &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} (1 - \delta_{\alpha\gamma}) \right) \\ &= \kappa \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} (1 - \delta_{\alpha\gamma}) \right), \\ N_{\alpha\gamma} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\gamma} dx_3 \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} - x_3 \left( \frac{\partial \beta_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \beta_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right) \right) dx_3 \\ &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right) \\ &= \kappa(1-\nu) \left( \frac{\partial \hat{u}_\alpha(x_1, x_2)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \hat{u}_\gamma(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \right),\end{aligned}$$

siendo

$$\kappa = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}.$$

Por su parte, los **esfuerzos cortantes** -shear forces- son:

$$\begin{aligned} N_{\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha} dx_3 \\ &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha} = \varkappa(1-\nu) \frac{\gamma_{\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

#### 9.2.4. Momentos flectores

Se definen los momentos resultantes flexionales manteniendo el mismo convenio sobre el signo ya considerado en el modelo de Kirchhoff:

$$M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{ij} dx_3.$$

Entre ellos hay que distinguir los momentos flectores:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha} &= - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{\alpha\alpha} dx_3 \\ &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{(1-\nu^2)} x_3 \left( \frac{\partial \hat{u}_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} - x_3 \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} \right) dx_3 \\ &\quad - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} x_3 \left( \frac{\partial \hat{u}_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} - x_3 \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} \right) (1 - \delta_{\alpha\gamma}) dx_3 \\ &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} + \nu \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} (1 - \delta_{\alpha\gamma}) \right) \\ &= D \left( \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} + \nu \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} (1 - \delta_{\alpha\gamma}) \right); \\ M_{\alpha\gamma} &= - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{\alpha\gamma} dx_3 \\ &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ex_3}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \hat{u}_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial \hat{u}_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} - x_3 \left( \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} \right) \right) dx_3 \\ &= \frac{Eh^3}{2(1+\nu)12} \left( \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2} D (1-\nu) \left( \frac{\partial \beta_{\alpha}(x_1, x_2)}{\partial x_{\gamma}} + \frac{\partial \beta_{\gamma}(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} \right); \end{aligned}$$

siendo  $D$  la **rigidez flexional** de la placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

### 9.2.5. Ecuaciones de equilibrio

#### Ecuaciones de equilibrio membranal

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + q_1 = 0, \\ \frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + q_2 = 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

siendo  $q_\alpha$  la fuerza por unidad de superficie en cada punto de la superficie media de la placa.

En efecto, si se consideran las dos primeras ecuaciones de equilibrio:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial \sigma_{\alpha 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}}{\partial x_3} \right) dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} b_\alpha dx_3 = 0.$$

Teniendo en cuenta las definiciones de  $N_{\alpha i}$  se deducen las ecuaciones (9.18) sin más que tener en cuenta que  $\sigma_{\alpha 3}$  son independientes de  $x_3$ .

**Ecuaciones de equilibrio flexional** Las ecuaciones flexionales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + q_3 = 0, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = -Q_1, \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = -Q_2, \end{cases}$$

siendo  $Q_\alpha$  la fuerza cortante resultante en la dirección  $\alpha$ :  $Q_\alpha = N_{\alpha 3}$ .

La primera de ellas se deduce de la tercera ecuación de equilibrio de forma análoga a la utilizada para las ecuaciones membranales, mientras que las dos últimas se obtienen siguiendo el mismo procedimiento utilizado que para el modelo de Kirchhoff.

**Ecuaciones de equilibrio en función de desplazamientos y giros.**

$$\begin{cases} \kappa \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \kappa (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + q_1 = 0, \\ \kappa (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right) + \kappa \left( \frac{\partial^2 \hat{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + q_2 = 0, \\ \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\kappa(1-\nu)}{2} \gamma_\alpha \right) + q_3 = 0, \\ D \left( \frac{\partial^2 \beta_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{1}{2} D (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \beta_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \beta_2(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = -\frac{\kappa(1-\nu)}{2} \gamma_1, \\ \frac{1}{2} D (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \beta_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \beta_2(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \beta_2(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = -\frac{\kappa(1-\nu)}{2} \gamma_2, \\ \beta_\alpha = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_\alpha} - \gamma_\alpha. \end{cases} \end{cases}$$

Vemos que también el modelo de placas de Mindlin-Reissner es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales acopladas en función de cinco variables independientes,  $\hat{u}_i(x_1, x_2)$ ,  $\beta_\alpha(x_1, x_2)$ . El sistema es de segundo orden y, por consiguiente, los elementos tipo placa basados en esta teoría sólo requieren la continuidad de la solución y no de sus derivadas. Entonces, las usuales funciones de interpolación de Lagrange van bien para definir los elementos finitos asociados.

Este modelo, más completo que el de Kirchhoff, es incorporado por un buen número de aplicaciones comerciales como NASTRAN, ABAQUS, ANSYS o LS-DYNA.

### 9.3. Boletín 9

**Ejercicio 149** Considera una placa rectangular de dimensiones  $2m \times 4m$  y espesor  $h = 0,05m$ . Suponer que el material es elástico e isótropo con módulo de Young  $E = 2,0e11N/m^2$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$  y densidad  $\rho = 7850kg/m^3$ . Suponer que la placa está sometida a unas cargas por unidad de volumen en la dirección  $z$  negativa de densidad,

$$b_z = 1000N/m^3.$$

Suponer, además, que en la cara  $x = 0$  el desplazamiento es nulo, y que la rotación es  $\gamma_1 = 10^{-4}\pi/4$  rad,  $\gamma_2 = 0$  rad, mientras que la cara  $x = 2$  está sometida a cargas de densidad por unidad de superficie de valor:

$$g_z = 120N/m^2,$$

en la dirección  $z$  negativa, mientras que los momentos flectores de valor:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= 150N, \\ M_{xy} &= -500N. \end{aligned}$$

- i) Calcular la solución utilizando COMSOL con un modelo de placas de Reissner-Mindlin.
- ii) Verifica que este modelo lleva a una tensión normal en la dirección  $z$  nula.
- iii) Representa gráficamente las tensiones cortantes  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ .
- iv) Comprueba numéricamente que la carga total en la dirección  $z$  sobre la frontera  $x = 2$  es  $24N$  en la dirección  $z$  negativa.

## Capítulo 10

# Vibraciones

Este capítulo pretende dar una introducción muy sencilla a la vibración de estructuras. Para ello, hemos elegido el trabajo *Vibrations of Cantilever Beams: Deflection, Frequency, and Research Uses* del Prof. Negahban [11].

Una vibración es un movimiento cíclico y continuo de una estructura o de uno de sus componentes. En general, los ingenieros intentan evitar las vibraciones ya que pueden tener algunos efectos no deseados, tales como:

- Los movimientos cíclicos implican fuerzas cíclicas y, generalmente, éstas suelen producir daños por fatiga en los materiales.
- Incluso niveles modestos de vibración pueden disminuir la confortabilidad del usuario.
- Las vibraciones en general conllevan una pérdida de precisión en el control del mecanismo.
- Grandes vibraciones o vibraciones cíclicas de amplitud creciente pueden provocar daños estructurales, llegando a provocar grietas, o incluso la fractura de la estructura.
- Provocan el pandeo de una componente pudiendo provocar, no solo su daño, sino también inestabilidad en su entorno.

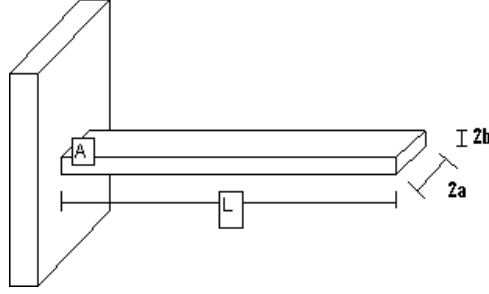
El estudio de este tipo de problemas de análisis estructural es de gran importancia para evitar efectos de resonancia en el caso de que exista algún tipo de fuerza excitadora sobre el sistema. Citamos, por ejemplo, el caso de una presa sometida al movimiento producido por ondas sísmicas, el comportamiento de un vehículo excitado por el movimiento del motor, o el de un puente colgante excitado por el viento.

Algunos ejemplos con solución analítica de vibración de estructuras simples pueden consultarse en Vinson ([15]).

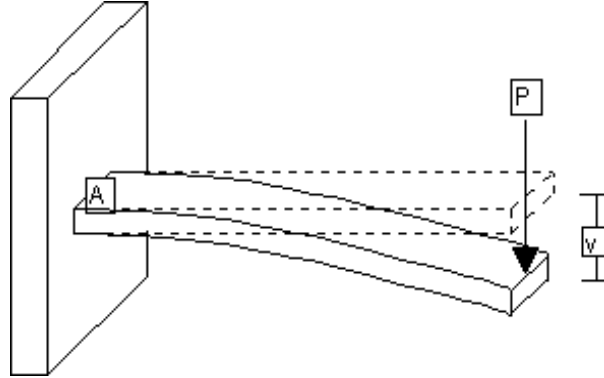
### 10.1. Vibraciones naturales en vigas

Para comprender la terminología más básica en el ámbito de las vibraciones, vamos a analizar las vibraciones de estructuras sencillas como las vigas. Consideremos una estructura tipo viga de longitud  $L$ , de sección rectangular constante

$\omega = [-a, a] \times [-b, b]$  y de área  $A = 4ab$ . Para fijar ideas supongamos que está en voladizo como en la figura: su extremo izquierdo está encastrado en un sólido rígido y el extremo derecho está libre. El origen de coordenadas se considera en el baricentro de su extremo izquierdo y se supone que el eje longitudinal se corresponde con el eje  $x_3$ .



**Deflexión de la viga** Si el extremo derecho de la viga se somete a una carga puntual  $P$  aplicada en el centro de cizallamiento y en la dirección del eje  $x_2$  negativo,  $\mathbf{P} = -P\mathbf{e}_2$  la viga deflexiona en una curva como puede verse en la figura, en la que la deflexión se representa por  $u_2(x_3)$ .



A mayor carga  $P$  mayor será la deflexión. Ya hemos analizado que, si suponemos pequeños desplazamientos, esto es, en el régimen elástico lineal, y la viga tiene sección uniforme, la tensión axial teniendo en cuenta que la carga va en la dirección negativa del eje  $\mathbf{e}_2$ , es (ver 7.10):

$$\sigma_{33} = \frac{P(L - x_3)x_2}{I_1},$$

siendo  $I_1$  el momento principal de inercia de la sección transversal  $\omega$  respecto al eje  $x_1$  (nótese que el origen de coordenadas debe tomarse en el centro de la sección):

$$I_1 = \int_{\omega} x_2^2 dx_1 dx_2 = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b x_2^2 dx_1 dx_2 = \frac{4ab^3}{3} m^4.$$

Además, el desplazamiento vertical es (ver 7.19):

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-\nu P(L - x_3)}{2EI_1}(x_2^2 - x_1^2) + \frac{(1 + \nu)c}{E}x_1x_3 - \frac{P(L - x_3)^3}{6EI_1} + \beta_{21}x_1 - \beta_{32}x_3 + B.$$

La deflexión en la línea neutra es:

$$u_2(0, 0, x_3) = -\frac{P(L - x_3)^3}{6EI_1} - \beta_{32}x_3 + B.$$

Debido al empotramiento en  $x_3 = 0$ , tanto el propio desplazamiento como la rotación debe ser nula:

$$u_2(0, 0, 0) = -\frac{PL^3}{6EI_1} + B = 0,$$

lo que implica:

$$B = \frac{PL^3}{6EI_1}.$$

También la rotación en  $x_3 = 0$ , debe ser nula, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(0, 0, x_3) &= \frac{3P(L - x_3)^2}{6EI_1} - \beta_{32}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(0, 0, 0) &= \frac{PL^2}{2EI_1} - \beta_{32} = 0,\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\beta_{32} = \frac{PL^2}{2EI_1}.$$

En consecuencia, el desplazamiento de la línea neutra es:

$$u_2(x_3) = -\frac{P(L - x_3)^3}{6EI_1} - \frac{PL^2}{2EI_1}x_3 + \frac{PL^3}{6EI_1}, \quad (10.1)$$

y la deflexión en el extremo de la viga es:

$$u_2(L) = -\frac{PL^3}{2EI_1} + \frac{PL^3}{6EI_1} = -\frac{PL^3}{3EI_1}.$$

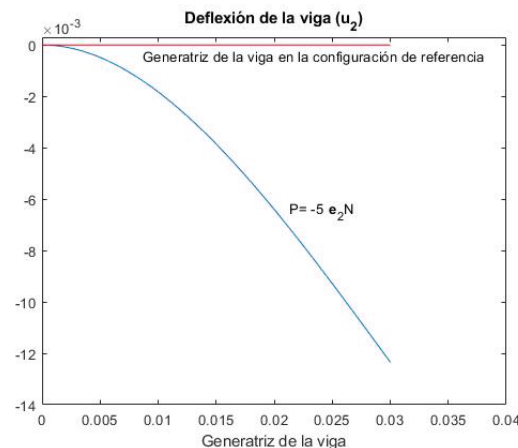
De este modo, podemos representar en MATLAB, la generatriz deformada:

```
>>L=30e-3;%m
>>a=2.5e-3;%m
>>b=2.5e-4;%m
>>I1=4*a*b^3/3;% m^4, Momento de inercia I1
>>z=linspace(0,L,100);% discretización del eje de la viga;
>>P=5;%Carga total -Pe_2
>>rho=2700;%Densidad, kg/m^3
>>E=7.e10;%Módulo de Young, Pa
```

```

>>u2=-P*(L-z).^3/(6*E*I1)-P*L^2*z/(2*E*I1)+P*L^3/(6*E*I1); %Deflexión
vertical
>>plot(z,u2)
>>title('Deflexión de la viga (u_2)')
>>xlabel('Generatriz de la viga')
>>gtext(['P= ', num2str(P), '\bf e_2', 'N'])
>>hold on
>>plot(z,0*z,'r')
>>axis([0,0.04,-0.014,3.e-4])
>>gtext('Generatriz de la viga en la configuración de referencia')
>>Def_max=sign(u2(length(u2)))*max(abs(u2))*1.e3; %máxima deflex-
ión, mm
>>disp(['Deflexión máxima vertical ',num2str(Def_max),'mm'])
>>Deflexión máxima vertical -12.3429mm

```



**Vibración de la viga** Cuando la carga  $\mathbf{P}$  se retira desde la viga flexionada, la viga volverá a su posición original. Sin embargo, y aún en ausencia de otras cargas, la inercia de la viga la hará vibrar entorno a su posición inicial. En este caso, la ecuación de la vibración para la segunda componente, de acuerdo con la segunda ley de Newton y el modelo de Bernoulli-Euler, será (ver 8.11):

$$\rho A \frac{\partial^2 u_2(x_3, t)}{\partial t^2} + EI_1 \frac{\partial^4 u_2(x_3, t)}{\partial x_3^4} = 0, \quad x_3 \in (0, L), t > 0. \quad (10.2)$$

El término  $\rho A$  se conoce con **densidad de masa lineal de la viga**, y se obtiene al integrar la densidad de masa del material en la sección  $\omega$  de la viga. Esta ecuación que debe verificar la deflexión vertical de la viga en ausencia de fuerzas externas permitirá calcular las frecuencias naturales de la viga si se completa con las condiciones de contorno:

- En el **extremo encastrado**  $x_3 = 0$  deben ser nulos los desplazamientos y sus pendientes, o lo que es lo mismo, la rotación de la sección:

$$u_2(0, t) = 0, \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x_3} = 0, \quad t > 0.$$

- En el **extremo libre**  $x_3 = L$  no debe haber momentos flectores ni esfuerzos cortantes:

$$\frac{\partial^2 u_2(L, t)}{\partial x_3^2} = 0, \frac{\partial^3 u_2(L, t)}{\partial x_3^3} = 0, \quad t > 0.$$

- La posición inicial será la correspondiente a la viga flexionada:

$$u_2(x_3, 0) = -\frac{P(L - x_3)^3}{6EI_1} - \frac{3PL^2}{6EI_1}x_3 + \frac{PL^3}{6EI_1}, \quad x_3 \in (0, L),$$

mientras que la velocidad inicial se supone nula:

$$\frac{\partial u_2(x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad x_3 \in (0, L).$$

Un modelo matemático análogo podría obtenerse para la componente  $u_1$ .

Para calcular la solución del modelo matemático obtenido para  $u_2$ , se puede aplicar el método de separación de variables, dado que  $x_3$  y  $t$  son variables independientes. Para ello, consideramos:

$$u_2(x_3, t) = Y(x_3) f(t),$$

lo que nos permite escribir la ecuación asociada a la vibración en la forma:

$$\frac{EI_1}{\rho AY(x_3)} \frac{\partial^4 Y(x_3)}{\partial x_3^4} = -\frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}, \quad x_3 \in (0, L), t > 0.$$

Puesto que  $x_3$  y  $t$  son variables independientes, debería existir una constante, que denotaremos por  $\lambda$  tal que:

$$\begin{aligned} \frac{EI_1}{\rho AY(x_3)} \frac{\partial^4 Y(x_3)}{\partial x_3^4} &= \lambda, \\ \frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Puede comprobarse que si  $\lambda = 0$ , la solución  $f(t)$  crecería linealmente con el tiempo, por lo que carece de interés físico (su energía sería no acotada) dado que estamos interesados en movimientos vibratorios. Si  $\lambda < 0$  la solución  $f(t)$  sería de tipo exponencial y conduciría a un movimiento no vibratorio con energía no acotada. Por lo tanto, se concluye que  $\lambda > 0$ , escribiendo entonces:

$$\begin{aligned} \frac{EI_1}{\rho AY(x_3)} \frac{\partial^4 Y(x_3)}{\partial x_3^4} &= \omega^2, \\ \frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} &= -\omega^2. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que  $\omega^2$  debe ser un número real y su valor ha de coincidir con las frecuencias naturales de la viga. En efecto, de la ecuación en  $f(t)$  se deduce:

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t), t > 0.$$

En paralelo, al considerar la ecuación a verificar por  $Y(x_3)$  se obtiene:

$$\frac{\partial^4 Y(x_3)}{\partial x_3^4} - \omega^2 \frac{\rho A}{EI_1} Y(x_3) = 0, \quad x_3 \in (0, L), \quad (10.3)$$

que se puede completar con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0, \quad Y'(0) = 0, \\ Y''(L) &= 0, \quad Y'''(L) = 0. \end{aligned}$$

Este procedimiento nos permite calcular una sucesión de soluciones  $Y_n$  y, en consecuencia, una sucesión de desplazamientos  $(u_2)_n$ :

$$\begin{aligned} Y_n(x_3) &= \frac{1}{2}[(\cos(k_n x_3) - \cosh(k_n x_3)) \\ &\quad + \left( \frac{-\cos(k_n L) - \cosh(k_n L)}{\operatorname{sen}(k_n L) - \sinh(k_n L)} \right) (\operatorname{sen}(k_n x_3) - \sinh(k_n x_3))], \\ k_n^4 &= \frac{\omega_n^2 \rho A}{EI_1}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u_2(x_3, 0) Y_n(x_3) dx_3 \\ &= \frac{-4PL}{EI_1 \rho A k_n^4 (\operatorname{sen}(k_n L) e^{k_n L} + e^{2k_n L} - 1)} [3 \operatorname{sen}(k_n L) (e^{2k_n L} + 1) \\ &\quad - 2(k_n L)^3 e^{k_n L} + \cos(k_n L) (3 - (k_n L)^3 (e^{2k_n L} + 1)) - 3e^{2k_n L}] \end{aligned}$$

$$(u_2)_n(x_3, t) = A_n Y_n(x_3) \cos(\omega_n t).$$

En estas relaciones, los valores de  $k_n$  son los correspondientes a las raíces de la ecuación:

$$\cos(k_n L) \cosh(k_n L) = -1,$$

ecuación obtenida al imponer las condiciones de contorno a  $Y$  sobre el extremo  $L$ .

**Frecuencias naturales** La última de las ecuaciones anteriores se llama **ecuación en frecuencias**, y tiene infinitas soluciones. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se denota por  $k_n$  la longitud de onda correspondiente a la  $n$ -ésima solución (ordenadas por orden creciente); así,  $k_n$  indica el espacio que recorre la onda en cada período. A partir de ella, se obtienen longitudes de onda compatibles con las condiciones de contorno, y utilizando la relación (10.4), las

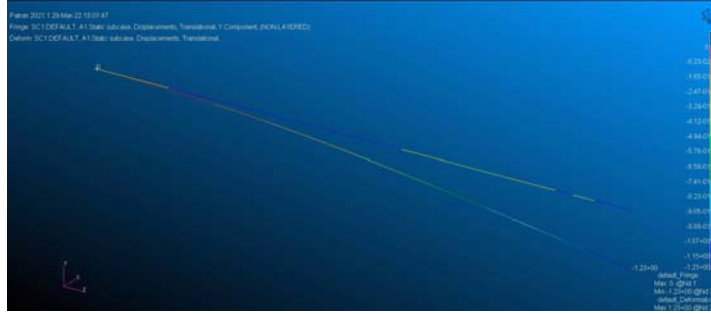


Figura 10.1: Deflexión viga calculada con Patran-Nastran

frecuencias naturales  $\omega_n$  de vibración. Utilizando, por ejemplo MATLAB, se pueden calcular las raíces de la ecuación en frecuencias:

| Índice  | $k_n L$ |
|---------|---------|
| $n = 1$ | 1,8751  |
| $n = 2$ | 4,6940  |
| $n = 3$ | 7,8547  |
| $n = 4$ | 10,9955 |
| $n = 5$ | 14,1371 |

Obsérvese que no dependen de la geometría ni del material de la viga considerada. Una vez calculadas las longitudes de onda, se calculan las frecuencias naturales que sí dependen ya de la geometría y del material considerado:

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\rho A}} = (k_n L)^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\rho AL^4}}.$$

**Cálculo de las frecuencias naturales de una viga** Consideremos una viga de longitud  $L = 30mm$ , de sección rectangular con  $2a = 5mm$  de ancho, y  $2b = 0,5mm$  de espesor, sometida inicialmente a una carga de  $-5N\mathbf{e}_2$ . Consideremos que el material tiene una densidad  $\rho = 2700kg/m^3$ .

En este caso, la máxima deflexión vertical es (ver (10.1)):

$$\begin{aligned} u_2(L) &= -\frac{PL^3}{3EI_1} = -\frac{5 \times 30e - 3}{3 \times 7e10 \times 5,2e - 14} \\ &= -0.012343, \end{aligned}$$

al tener en cuenta que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{4ab^3}{3} \\ &= \frac{4 \times 2,5e - 3 \times (0,25e - 3)^3}{3} = 5.2083e - 14. \end{aligned}$$

Los primeros 6 modos propios, amplitudes y frecuencias son (eliminamos el trivial  $k_n L = 0$ , pues la viga en ese caso estará en reposo):

$$n = 1, \omega_1 = (k_1 L)^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\rho A L^4}} = (1,8751)^2 \sqrt{\frac{7e10 \times 5,2e-14}{2700 \times 4ab \times (30e-3)^4}} = 2871 \text{ rad/s}.$$

Esto conlleva una frecuencia:

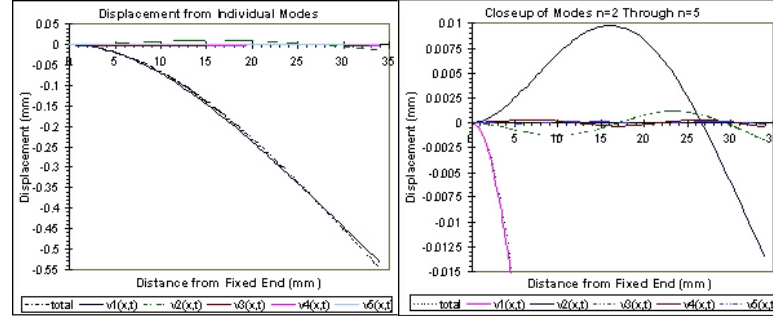
$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 456,9546 \text{ Hz}.$$

| $n$ | $k_n L$    | Amplitud (m) | Frec. (Hz) | Período (s) | Max $Y_n$ |
|-----|------------|--------------|------------|-------------|-----------|
| 1   | 1.8751041  | 2.25068e-04  | 456.95654  | 2.1884e-3   | 1.72555   |
| 2   | 4.6940911  | 4.27085e-04  | 2863.6977  | 3.4920e-4   | 1.73389   |
| 3   | 7.85475743 | 4.10425e-12  | 8018.4365  | 1.2471e-4   | 1.75184   |
| 4   | 10.9955407 | 1.44197e-5   | 15712.935  | 6.3642e-5   | 1.77881   |
| 5   | 14.1371684 | 1.06991e-18  | 25974.608  | 3.8499e-5   | 1.81511   |
| 6   | 17.2787595 | 2.47393e-06  | 38801.568  | 2.5772e-5   | 1.86102   |

Nótese que solamente los primeros modos de vibración tienen valores significativamente grandes de la amplitud. Es por ello por lo que, usualmente, en el análisis de vibración de estructuras los modos más altos pueden ignorarse. Para cada una de las frecuencias calculadas existe una vibración característica:

$$(u_2)_n(x_3, t) = A_n Y_n(x_3) \cos(\omega_n t).$$

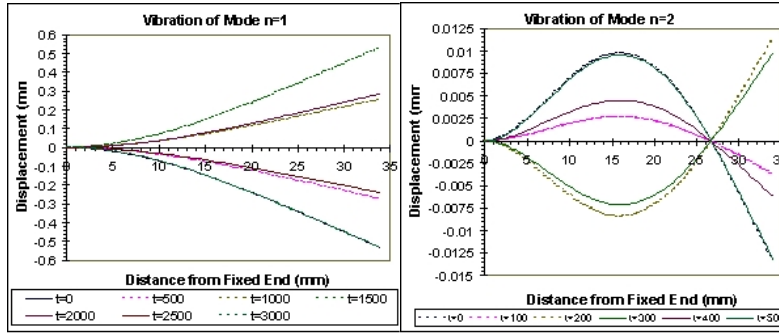
La siguiente figura muestra el desplazamiento inicial de cada modo en la línea neutra, incluido el desplazamiento inicial total de la viga correspondiente a la solución del problema estático. También se muestra un zoom entorno a línea media.



Se observa desde esta figura que incluso el tercer modo propio tiene un efecto muy pequeño sobre el desplazamiento total de la viga.

Para obtener el desplazamiento total  $u_2(x_3, t)$  basta con sumar los desplazamientos correspondientes a los primeros modos.

Cuando el tiempo avanza, cada modo vibrará en un entorno de la línea de desplazamiento nulo con la frecuencia mostrada en la tabla anterior. La siguiente figura muestra la vibración para los dos primeros modos con el tiempo expresado en milisegundos.



Así el movimiento total de la viga es muy complejo: cada modo característico vibra con una amplitud distinta, con distinta forma y frecuencia.

**Resolución en el dominio de frecuencias** Para analizar los modos de vibración de la viga anterior es habitual una resolución en el dominio de frecuencias. Esto es, suponer que la viga vibra en un modo de frecuencia  $\omega$ , y suponer entonces que la solución admite la expresión

$$u_2(x_3, t) = Y(x_3) e^{i\omega t}.$$

Al substituir en la ecuación (10.2) se deduce:

$$-\rho A \omega^2 Y(x_3) e^{i\omega t} + EI_1 e^{i\omega t} \frac{d^4 Y(x_3)}{dx_3^4} = 0,$$

ecuación que al tener en cuenta que  $e^{i\omega t}$  es siempre de módulo unidad se reduce a:

$$-\rho A \omega^2 Y(x_3) + EI_1 \frac{d^4 Y(x_3)}{dx_3^4} = 0.$$

Obsérvese que coincide con la ecuación (10.3) ya obtenida también con el método de variables separadas. Así, calcular los modos de vibración se reduce a calcular los valores propios del operador:

$$\frac{EI_1}{\rho A} \frac{d^4 Y(x_3)}{dx_3^4} = \omega^2 Y(x_3),$$

y calcular los correspondientes vectores propios. Este procedimiento, que ha conducido al mismo resultado que aplicar la hipótesis de variables separadas, ha permitido eliminar el tiempo de la ecuación de equilibrio. Si se acompaña de las condiciones de contorno asociadas al problema, permite obtener de hecho información muy importante sobre la vibración de la estructura. La formulación sobre la viga antes considerada es:

$$\frac{EI_1}{\rho A} \frac{d^4 Y(x_3)}{dx_3^4} = \omega^2 Y(x_3),$$

$$Y(0) = 0, \frac{dY(0)}{dx_3} = 0,$$

$$\frac{d^2 Y(L)}{dx_3^2} = 0, \frac{d^3 Y(L)}{dx_3^3} = 0.$$

Este modelo se conoce como formulación del cálculo de frecuencias propias en el dominio de frecuencias.

## 10.2. Boletín 10

**Ejercicio 150** Considerar una viga orientada en la dirección del eje  $z$  de longitud  $30\text{mm}$ , y sección en el plano  $XY$   $5\text{mm} \times 0,5\text{mm}$ . Considérese que la viga es de aluminio con módulo de Young  $E = 7e10\text{N/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,35$  y densidad  $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ . Suponer que la viga está encastrada en  $z = 0$  y que soporta aceleración derivada de la gravedad. Suponer además que en el instante inicial la viga está flexionada de acuerdo con la relación 10.1, con  $\mathbf{P} = -5\mathbf{e}_2\text{N}$ .

- i) ♣ Calcular con MATLAB el desplazamiento  $u_2$  a lo largo de la generatriz de la viga. Calcular la deflexión máxima obtenida en el extremo derecho de la viga. Calcular  $\sigma_{33}$  a lo largo de la generatriz.
- ii) Resolver con COMSOL el modelo estacionario correspondiente a los datos indicados. Representar gráficamente el error
- iii) Calcular las propiedades geométricas necesarias para imponer la condición inicial.
- ii) Calcular los tres primeros modos propios. Representar gráficamente la vibración de la viga asociada a cada modo de vibración y compara la amplitud del desplazamiento vertical en distintos pasos de tiempo.
- iii) Representar gráficamente las tensiones principales.
- iv) Visualizar la animación correspondiente a la vibración de la viga con los datos relativos a la tensión máxima de Von Mises.

# Anexo A. Boletines resueltos

En este anexo se resuelven algunos de los ejercicios propuestos en los distintos capítulos. Por norma general se pueden encontrar resueltos los marcados con un ♣.

## Boletín 1: Elastodinámica lineal

**Ejercicio 151** (♣ *Solución al Ejercicio 19*) Consideremos como configuración de referencia  $B$  un cilindro de base el círculo unidad y de altura unidad:

$$B = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p_1, p_2) \in D((0, 0), 1), 0 \leq p_3 \leq 1\}.$$

Supongamos que el material del cilindro tiene una densidad inicial  $\rho_0 = 2$ , y su ley constitutiva es  $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$ . Sobre el cuerpo material se imponen fuerzas de volumen de la forma:

$$\mathbf{b}(x, t) = (-2x_1 + 1, -2x_2 + 1, 0)^T.$$

- i) Comprobar que el movimiento  $(\mathbf{v}, \rho, \mathbf{T})$  asociado a este problema está definido en cada instante por la expresión:

$$X(p, t) = (r \cos(\theta + t), r \sin(\theta + t), p_3)^T$$

siendo  $r$ ,  $\theta$  el módulo y el argumento de  $(p_1, p_2)$  respectivamente, y el tensor de Cauchy  $\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}$  con

$$\pi(x, t) = (x_1 + x_2),$$

definido salvo una constante.

- ii) Calcular el gradiente de deformación.
- iii) Comprobar si el cuerpo puede ser elástico, homogéneo o isótropo.

- iv) Representar gráficamente la deformación de un plano  $P$  pasando por la generatriz del cilindro.
- v) Comprobar que la componente normal de la velocidad es nula en todo punto de la frontera.
- vi) Comprobar que no existen esfuerzos cortantes sobre la frontera.
- vii) Comprobar que la deformación es rígida.
- viii) Comprobar que el movimiento no es irrotacional y calcular el eje de rotación en cada punto  $(x, t)$ .
- ix) Escribir la densidad de fuerzas de volumen en coordenadas Lagrangianas.
- x) Calcular el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff asociado a  $\mathbf{T}$ .
- xi) Comprobar que  $\mathbf{X}$  verifica la ecuación del movimiento en la configuración de referencia:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{S}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } \mathcal{B}.$$

### Solución

- i) Se debe verificar el sistema de ecuaciones:

$$2\dot{\mathbf{v}} - \text{div}(\mathbf{T}) = \mathbf{b} \Rightarrow 2\dot{\mathbf{v}} + \text{grad}(\pi) = \mathbf{b}.$$

En esta ecuación se ha tomado como densidad  $\rho(x, t) = \rho_0$ , aunque su demostración se hará en el apartado ii). Dado el movimiento  $\mathbf{X}$ , es fácil calcular su **velocidad espacial**:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, t) &= \dot{\mathbf{X}}(p, t) = \frac{\partial \mathbf{X}(p, t)}{\partial t} \\ &= (-r \sin(\theta + t), r \cos(\theta + t), 0)^T, \end{aligned}$$

de forma que:

$$\mathbf{v}(x, t) = (-x_2, x_1, 0)^T.$$

Veamos que se verifica la **ecuación de equilibrio**:

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{v}} + \text{grad}(\pi) &= 2 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) + \text{grad}(\pi) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x_1 + 1 \\ -2x_2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Es importante observar que la **derivada total** de  $\mathbf{v}$  también podría calcularse al tener en cuenta:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(p, t), t) = (-r \sin(\theta + t), r \cos(\theta + t), 0)^T,$$

lo que implica:

$$\dot{\mathbf{v}}(x, t) = (-r \cos(\theta + t), -r \sin(\theta + t), 0)^T = (-x_1, -x_2, 0)^T.$$

■

ii) Calculemos el **gradiente de deformación**:

$$\mathbf{F}(p, t) = \text{Grad}(X(p, t)).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -r \text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f}{\partial p_3} \end{pmatrix},$$

se deduce:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f}{\partial p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\frac{\text{sen}(\theta)}{r} & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial p_3} \end{pmatrix}.$$

Dado que:

$$X(p, t) = (r \cos(\theta + t), r \text{sen}(\theta + t), p_3)^T,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} &= \cos(\theta) \cos(\theta + t) - \frac{\text{sen}(\theta)}{r} (-r \text{sen}(\theta + t)) \\ &= \cos(t). \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_2} &= -\text{sen}(t) \end{aligned}$$

y, en consecuencia:

$$\mathbf{F}(p, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \\ \text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Para comprobar que es **elástico** debemos encontrar una ley de comportamiento que exprese el tensor de Cauchy en la forma:

$$\mathbf{T}(x, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(p, t), p).$$

La **presión** se puede escribir en coordenadas Lagrangianas:

$$\begin{aligned} \pi(x, t) &= x_1 + x_2 \\ &= r \cos(\theta + t) + r \text{sen}(\theta + t) \\ &= r \cos(\theta) \cos(t) - r \text{sen}(\theta) \text{sen}(t) + r \text{sen}(\theta) \cos(t) + r \cos(\theta) \text{sen}(t) \\ &= p_1 \cos(t) - p_2 \text{sen}(t) + p_2 \cos(t) + p_1 \text{sen}(t) \\ &= (1, 1, 0) \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \\ \text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\pi_m(x, t) = (1, 1, 0) \mathbf{F}(p, t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = X(p, t).$$

Podemos elegir entonces como **ley de comportamiento**:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) = -(1, 1, 0) \mathbf{F} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{I}, \quad (11.1)$$

que corresponde a un **material elástico**.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Esta igualdad indica que no hay cambios relativos de longitud entre dos puntos del sólido a lo largo del movimiento; otra comprobación de ello se hará en el apartado vi).

El tensor de Cauchy (ver (11.1)) verifica la relación

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, p) = -(p_1 (\sin(t) + \cos(t)) + p_2 (\sin(t) - \cos(t))) \mathbf{I}.$$

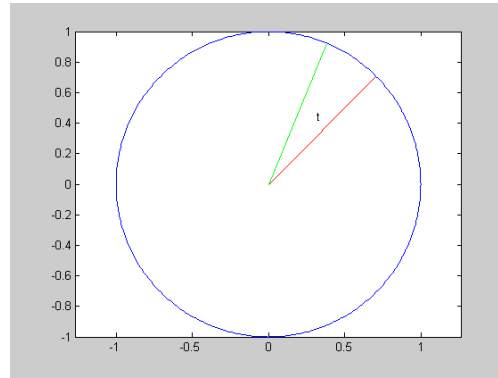
Se verifica entonces que

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(p, t), p) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{B}(p, t), p, t) = \beta_0(I_{\mathbf{B}}, p, t) \mathbf{I} + \beta_1(I_{\mathbf{B}}, p) \mathbf{B} + \beta_2(I_{\mathbf{B}}, p) \mathbf{B}^{-1}.$$

Tampoco es homogéneo pues, aunque la densidad es constante en todo punto y en todo instante:

$$\rho_0(p) = \det(\mathbf{F}(p, t)) \rho(x, t) = 2,$$

en cambio, la tensión sí cambia con el punto  $p$  del cuerpo. Puesto que cada elemento de volumen tiene la misma densidad a lo largo de la deformación se dice que ésta es incompresible:  $\det(\mathbf{F}(p, t)) = 1$ . ■



iv)

Será un plano  $P_t$  pasando también por la generatriz y girado un ángulo  $t$ . Obsérvese que la deformación dada es de **deformaciones planas y estacionaria**. Efectivamente, la configuración  $B_t$  coincide en todo instante con la de referencia  $B$ . ■

v) En efecto, sobre la **frontera lateral**:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (-x_2, x_1, 0)^T \cdot (x_1, x_2, 0)^T = 0.$$

Sobre las **tapas del cilindro**:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (-x_2, x_1, 0)^T \cdot (0, 0, \pm 1)^T = 0.$$

■

vi) En efecto, el **vector de esfuerzos en la frontera** es  $-\pi \mathbf{n}$ . Puesto que este vector lleva la dirección de la normal su **componente tangencial** es nula; por ello se dice que se trata de un **esfuerzo puramente normal**.

■

vii) Consideremos dos puntos  $p = (r_1 e^{i\theta_1}, p_3)$  y  $q = (r_2 e^{i\theta_2}, q_3)$  y comprobemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{X}(p, t) - \mathbf{X}(q, t)| = 0.$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(p, t) - \mathbf{X}(q, t)|^2 &= |(r_1 e^{i(\theta_1+t)} - r_2 e^{i(\theta_2+t)}, p_3 - q_3)|^2 \\ &= |(e^{it} (r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2}), p_3 - q_3)|^2 \\ &= |e^{it} (r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2})|^2 + |p_3 - q_3|^2 \\ &= |r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2}|^2 + |p_3 - q_3|^2 = |p - q|^2, \end{aligned}$$

**manteniéndose constante la distancia entre dos puntos cualesquiera en todo momento.** ■

viii)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{v} - \text{grad} \mathbf{v}^t) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

por tanto, el fluido **no es irrotacional**. Su **eje de rotación** es el vector  $\mathbf{e}$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \mathbf{e} &= \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow e_1 = e_2 = 0, \end{aligned}$$

es decir, el eje de rotación es el eje  $x_3$ . ■

ix)

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_m(p, t) &= \mathbf{b}(x, t) = (-2x_1 + 1, -2x_2 + 1, 0)^T \\ &= (-2r \cos(\theta + t) + 1, -2r \sin(\theta + t) + 1, 0)^T.\end{aligned}$$

Así la **densidad de fuerzas de volumen en la configuración de referencia** es:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0(p, t) &= \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{b}_m(p, t) \\ &= (1 - 2r \cos(\theta + t), 1 - 2r \sin(\theta + t), 0)^T \\ &= (1 - 2p_1 \cos(t) + 2p_2 \sin(t), 1 - 2p_1 \sin(t) - 2p_2 \cos(t), 0)^T,\end{aligned}$$

ya que  $\det(\mathbf{F}(p, t)) = 1$ . Puesto que  $\mathbf{b}_0$  no depende de la deformación, se trata de una fuerza muerta. ■

x)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(p, t) &= \det(\mathbf{F}(p, t)) \mathbf{T}_m(p, t) \mathbf{F}^{-T}(p, t) \\ &= -(1, 1, 0) \mathbf{F}(p, t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{F}^{-T}(p, t) \\ &= -(1, 1, 0) \mathbf{F}(p, t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(p_1 \cos(t) - p_2 \sin(t) + p_2 \cos(t) + p_1 \sin(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

■

xi) En efecto:

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{S}) &= 2(-r \cos(\theta + t), -r \sin(\theta + t), 0)^T - \\ &\quad - \begin{pmatrix} \cos(t)(-\cos(t) - \sin(t)) - \sin(t)(-\cos(t) + \sin(t)) \\ \sin(t)(-\cos(t) - \sin(t)) + \cos(t)(-\cos(t) + \sin(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2(-r \cos(\theta + t), -r \sin(\theta + t), 0)^T + (1, 1, 0)^T \\ &= (1 - 2r \cos(\theta + t), 1 - 2r \sin(\theta + t), 0)^T,\end{aligned}$$

que coincide con  $\mathbf{b}_0(p, t)$ . ■

**Ejercicio 152** (♣ *Solución al Ejercicio 20*) Se considera como configuración de referencia  $B$  un cilindro de base el círculo unidad y de altura  $h = 2m$ :

$$B = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p_1, p_2) \in D((0, 0), 1), 0 \leq p_3 \leq 2\}.$$

Se supone que el material del cilindro es elástico lineal homogéneo e isótropo con módulo de Young  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ . Además se supone que está sometido a una deformación estacionaria derivada de la densidad de fuerzas de volumen de la gravedad actuando en la dirección  $-x_3$ .

Indicar cuales de entre estos tensores verifica la ecuación de equilibrio en la configuración de referencia:

$$i) \boldsymbol{\sigma}_1 = \rho_0 g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}; \quad ii) \boldsymbol{\sigma}_2 = \rho_0 g x_3 \mathbf{I}; \quad iii) \boldsymbol{\sigma}_3 = \rho_0 g \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix};$$

$$iv) \boldsymbol{\sigma}_4 = \rho_0 g x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solución

La densidad de fuerzas de volumen es

$$\mathbf{b}_0(x) = (0, 0, -\rho_0 g)^T.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -Div(\boldsymbol{\sigma}_1) &= \mathbf{b}_0, \\ -Div(\boldsymbol{\sigma}_2) &= \mathbf{b}_0, \\ -Div(\boldsymbol{\sigma}_3) &= \rho_0 g (1, 1, 1)^T \neq \mathbf{b}_0, \\ -Div(\boldsymbol{\sigma}_4) &= \rho_0 g (1, 1, 1)^T \neq \mathbf{b}_0. \end{aligned}$$

En consecuencia, los tensores validos serían  $\boldsymbol{\sigma}_1$  y  $\boldsymbol{\sigma}_2$ .

## Boletín 2: Tensiones y esfuerzos

**Ejercicio 153** (**♣** *Solución al Ejercicio 22*) *Calcular los invariantes del tensor:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

*Indicar los esfuerzos normales principales, la base de direcciones principales, y representar el tensor en la base dada por las direcciones principales.*

### Solución

Los menores principales son:

■ De orden 1:  $|1| = 1, |5| = 5, |-9| = -9$ . Entonces,  $\theta_1 = 1 + 5 - 9 = -3$ .

■ De orden 2:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = -81, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -18, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Por tanto,  $\theta_2 = -(-81 - 18 + 1) = 98$ .

■ De orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = -18,$$

y, por tanto,  $\theta_3 = -18$ .

El polinomio característico asociado a esta matriz es:

$$-\sigma^3 - 3\sigma^2 + 98\sigma - 18 = 0.$$

Las raíces de este polinomio serán los esfuerzos normales principales:

$$\sigma_1 = 8,4050, \sigma_2 = 0,1848 \text{ y } \sigma_3 = -11,5898.$$

Para calcular las direcciones principales debemos calcular los vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Se obtienen de esta forma:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,3762 \\ 0,8540 \\ 0,3593 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -0,9104 \\ 0,4127 \\ -0,0278 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -0,1720 \\ -0,3166 \\ 0,9328 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que estos vectores son ortonormales (este hecho no es un accidente, se debe a que la matriz  $\mathbf{A}$  es simétrica). Si consideramos como nuevo sistema de referencia el dado por los vectores  $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$  el tensor representado

por  $\mathbf{A}$  se escribe:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8,4050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1848 & 0 \\ 0 & 0 & -11,5898 \end{pmatrix}.$

■

**Ejercicio 154** (**♣** *Solución al Ejercicio 28*) Considera el tensor de tensiones:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rota el sistema de coordenadas 60 grados entorno al eje  $p_1$  y expresa el tensor de tensiones con respecto a los nuevos ejes.

### Solución

En el nuevo sistema de coordenadas  $\mathbf{e}'_1$  coincide con  $\mathbf{e}_1$ ; además  $\mathbf{e}'_1$  sigue siendo ortogonal a  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  al igual que con  $\mathbf{e}'_2$  y  $\mathbf{e}'_3$ . Mientras el ángulo entre  $\mathbf{e}'_2$  y  $\mathbf{e}_2$  es  $\pi/3$  y entre  $\mathbf{e}'_2$  y  $\mathbf{e}_3$  es  $\pi/6$ . Así la matriz cambio de base es:

$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & \text{sen}(\pi/3) \\ 0 & -\cos(\pi/6) & \text{sen}(\pi/6) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia:

$$(\boldsymbol{\sigma}') = (\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{P})^T,$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= 5 \\ \sigma'_{21} &= 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,366 \\ \sigma'_{31} &= -3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2,098 \\ \sigma'_{22} &= 2 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3,5 \\ \sigma'_{32} &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,866 \\ \sigma'_{33} &= 2 + 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2,5 \end{aligned}$$

La expresión del tensor en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$(\boldsymbol{\sigma}') = \begin{pmatrix} 5,00 & 2,37 & -2,10 \\ 2,37 & 3,50 & 0,87 \\ -2,10 & 0,87 & 2,50 \end{pmatrix}.$$

■

**Ejercicio 155** (**♣** *Solución al Ejercicio 31*) Considera el tensor

$$\boldsymbol{\sigma}(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ p_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula su parte esférica, desviatoria y los invariantes escalares del tensor desviatorio.

**Solución**

$$\begin{aligned}\sigma_s(p_1, p_2, p_3) &= \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{I} = \mathbf{I}. \\ \sigma_d(p_1, p_2, p_3) &= \sigma - \sigma_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & p_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Sus invariantes escalares son:

$$\begin{aligned}J_1 &= \text{tr}(\sigma_d) = 0, \\ J_2 &= -\text{tr}(\text{cof}(\sigma_d)) = -\det(\sigma_d) \text{tr}(\sigma_d)^{-1} = \\ &\quad - \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & p_3 \\ p_3 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= 1 + p_3^2, \\ J_3 &= \det(\sigma_d) = -p_3^2.\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 156** (**♣** *Solución al Ejercicio 33*) ¿Qué relación hay entre los invariantes del tensor de tensiones y de su desviatorio? Demuéstralo para el segundo invariante.

**Solución**

Las relaciones son:

$$\begin{aligned}J_1 &= 0, \\ J_2 &= \theta_2 + \frac{1}{3}\theta_1^2, \\ J_3 &= \theta_3 + \frac{1}{3}\theta_1\theta_2 + \frac{2}{27}\theta_1^3.\end{aligned}$$

Veámoslo para el segundo invariante:

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2).$$

Ahora bien, puesto que la traza del desviatorio es nula, se verifica:

$$\begin{aligned}s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \Rightarrow (s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0 \\ \Rightarrow s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= -2(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3).\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}2J_2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = -2(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3) \\ &= -2((\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)) \\ &= -2(3\sigma_m^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_m(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)) \\ &= -2\left(\frac{1}{3}\text{tr}^2(\sigma) - \theta_2 - \frac{2}{3}\text{tr}^2(\sigma)\right) \\ &= 2\theta_2 + \frac{2}{3}\theta_1^2,\end{aligned}$$

lo que completa la demostración para el segundo invariante.

Para el tercer invariante la demostración se basa en utilizar la siguiente identidad de Gauss para números reales arbitrarios:

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 - 3s_1s_2s_3 = (s_1 + s_2 + s_3)(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - s_1s_2 - s_1s_3 - s_2s_3).$$

Dado que la traza del desviatorio es nulo, se deduce que:

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 - 3s_1s_2s_3 = 0,$$

y, por tanto:

$$3J_3 = 3s_1s_2s_3.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} s_1s_2s_3 &= (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_m(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ &\quad + \sigma_m^2 \operatorname{tr}(\sigma) - \sigma_m^3 \\ &= \theta_3 + \frac{1}{3}\theta_1\theta_2 + \frac{1}{9}\theta_1^3 - \frac{1}{27}\theta_1^3 \\ &= \theta_3 + \frac{1}{3}\theta_1\theta_2 + \frac{2}{27}\theta_1^3. \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$J_3 = \theta_3 + \frac{1}{3}\theta_1\theta_2 + \frac{2}{27}\theta_1^3.$$

■

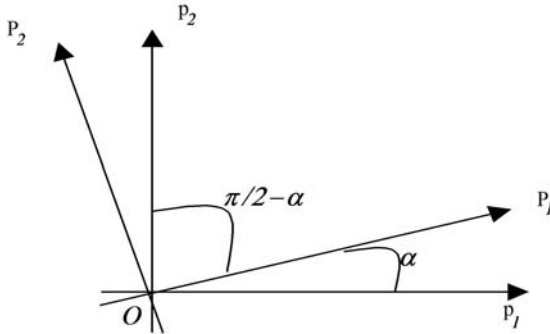
**Ejercicio 157** (♣ Solución al Ejercicio 34) Un punto  $O$  de un medio continuo se encuentra en el origen de los ejes ortonormales  $Op_1p_2p_3$  con vectores unitarios  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ . Se supone que los ejes principales en  $O$ ,  $OP_1P_2P_3$  se deducen de los anteriores por una rotación de ángulo  $\alpha$  entorno al eje  $\mathbf{e}_3$  (en consecuencia,  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{e}'_3$  coinciden y el ángulo  $\mathbf{e}_1$  con  $\mathbf{e}'_1$  es  $\alpha$ ). Conocidas las tensiones normales principales  $\sigma_1 = \sigma$  y  $\sigma_3 = 0$ , y la tensión normal  $\tau$  para la dirección  $\mathbf{e}_2$ , calcular en función de  $\alpha, \sigma$  y  $\tau$  la tensión normal principal  $\sigma_2$  y la tensión tangencial para la dirección  $\mathbf{e}_2$ .

### Solución

Puesto que  $\mathbf{e}_i$  es un vector unitario en la dirección  $\overrightarrow{Op_i}$ , al expresarlos en el sistema de coordenadas dado por las direcciones principales, se verifica:

$$\mathbf{e}_1 = (\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha), 0)^T = (\cos(\alpha), -\operatorname{sen}(\alpha), 0)^T, \text{ y}$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), 0\right)^T = (\operatorname{sen}(\alpha), \cos(\alpha), 0)^T.$$



El esfuerzo en la dirección  $\mathbf{e}_2$  es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(O) \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \operatorname{sen}(\alpha) \\ \sigma_2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\tau = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}(O) \mathbf{e}_2 = \sigma \operatorname{sen}^2(\alpha) + \sigma_2 \cos^2(\alpha).$$

Suponiendo que  $\alpha \neq \pi/2$  se deduce:

$$\sigma_2 = \frac{\tau - \sigma \operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \tau \sec^2(\alpha) - \sigma \operatorname{tag}^2(\alpha).$$

Por otra parte, se verifica:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}(O) \mathbf{e}_2 &= 0, \text{ y} \\ \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}(O) \mathbf{e}_2 &= (\cos(\alpha), -\operatorname{sen}(\alpha), 0) \begin{pmatrix} \sigma \operatorname{sen}(\alpha) \\ \sigma_2 \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\sigma - \sigma_2) \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \\ &= (\sigma - \tau \sec^2(\alpha) + \sigma \operatorname{tag}^2(\alpha)) \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) \\ &= (\sigma - \tau) \operatorname{tag}(\alpha).\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 158** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 35) *Mostrar que la tensión normal y la tangencial para una dirección que forma ángulos iguales con las tres direcciones principales del tensor de tensiones verifican:*

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_m, \\ \sigma_t^2 &= \frac{1}{9} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{2}{3} J_2,\end{aligned}$$

siendo  $\sigma_m$  la tensión normal media y  $J_2$  el segundo invariante del tensor deviatorio. Estos valores  $\sigma_n$  y  $\sigma_t^2$  en esta dirección se llaman **tensión normal** y **tangencial octaédrica** del tensor de tensiones.

### Solución

Sea  $\mathbf{k}$  un vector unitario en la dirección dada expresado en el sistema de coordenadas principal:

$$\mathbf{k} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T.$$

Entonces:

$$\sigma_n = \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k} = \sigma_1 k_1^2 + \sigma_2 k_2^2 + \sigma_3 k_3^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m.$$

Por otra parte,

$$\boldsymbol{\sigma}_t = (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{k} - \sigma_n \mathbf{k} = (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}) \mathbf{k}.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}) \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}) \mathbf{k} \\ &= (\sigma_1 - \sigma_m)^2 k_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 k_2^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 k_3^2 \\ &= \frac{1}{3} \left[ (\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3} [s_1^2 + s_2^2 + s_3^2] = \frac{2}{3} J_2, \end{aligned}$$

ya que los esfuerzos principales del desviatorio son  $s_i = (\sigma_i - \sigma_m)$ .

Si tenemos en cuenta que la traza del desviatorio es nula se deduce:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \Rightarrow (s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0 \\ &\Rightarrow s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = -2(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3). \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} J_2 &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} (2J_2 + J_2) = \frac{1}{3} \frac{2}{3} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - (s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3)) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \left[ (s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2 \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2 \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]. \end{aligned}$$

■

**Ejercicio 159** (♣ *Solución al Ejercicio 36*) Demostrar que el estado de cizallamiento en dos direcciones ortogonales es la superposición de un estado de tracción en la dirección de una de sus bisectrices y de un estado de compresión en la dirección de la otra.

### Solución

En efecto, consideremos un estado de cizallamiento en las direcciones  $\mathbf{x}_1$   $\mathbf{x}_2$ . Entonces el tensor de tensiones puede escribirse:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos un nuevo sistema de coordenadas correspondientes a las bisectrices del primero y segundo cuadrante en el plano  $\vec{x}_1$   $\vec{x}_2$ . Se verifica que los nuevos vectores unitarios en estas direcciones se escriben como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Siendo por tanto la matriz de cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

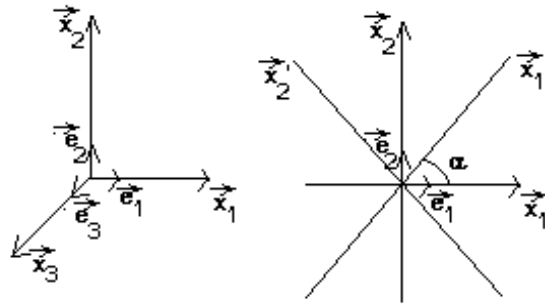


Figura 11.1: Combinación de esfuerzos.

Si escribimos el tensor de tensiones en términos del nuevo sistema de coordenadas obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (\sigma') &= P(\sigma)P^T \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \text{sen} \alpha & \sigma_{12} \cos \alpha & 0 \\ \sigma_{12} \cos \alpha & -\sigma_{12} \text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

puesto que  $\alpha = \pi/4$ , y en consecuencia:

$$2 \cos \alpha \text{sen} \alpha = 1, \text{ y } \cos \alpha = \text{sen} \alpha.$$

Por tanto, si  $\sigma_{12}$  es negativa tenemos una fuerza de compresión en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante y una fuerza de tracción en la bisectriz del segundo cuadrante. ■

### Boletín 3: Tensor de deformaciones

**Ejercicio 160** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 50) Considera un tensor de deformación de la forma:

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))(x_1, x_2, x_3) = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo  $\epsilon = 1.e - 5m^{-1}$ . Aproxima las variaciones relativas de longitud en la dirección  $x_3$  y el ángulo de cizallamiento o cortadura en las direcciones  $x_1x_3$ .

#### Solución

Puesto que  $\varepsilon_{33} = \epsilon$ , si consideramos un segmento  $OC$  en la dirección  $x_3$  en la configuración de referencia, sabemos que:

$$\epsilon = \varepsilon_{33} \simeq \frac{O'C' - OC}{OC},$$

siendo  $O'C'$  la longitud del segmento deformado. En consecuencia, la variación relativa de longitud en la dirección  $x_3$ , si los desplazamientos son pequeños, es  $\epsilon$  y, por tanto, la longitud del segmento deformado es aproximadamente la longitud del segmento de partida multiplicada por  $1.e - 5$ . Para comprobar si esto es así, podemos calcular el desplazamiento y analizar si la aproximación lineal es válida:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0 \Rightarrow u_1 = \hat{u}_1(x_2, x_3); \\ \varepsilon_{22} &= 2\epsilon \Rightarrow u_2 = 2\epsilon x_2 + \hat{u}_2(x_1, x_3); \\ \varepsilon_{33} &= \epsilon \Rightarrow u_3 = \epsilon x_3 + \hat{u}_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

De estas igualdades, si utilizamos el valor de las componentes extradiagonales del tensor de deformación, podemos deducir la expresión de las funciones  $\hat{u}_i$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1}(x_1, x_3) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2}(x_3) = -\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1}(x_3); \\ \varepsilon_{23} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3}(x_1, x_3) = -\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3}(x_1) = -\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_2}(x_1); \\ \varepsilon_{13} &= \epsilon x_3 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3}(x_2, x_3) = 2\epsilon x_3 - \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} = C_1, \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3}(x_2, x_3) = 2\epsilon x_3 - C_1 \\ &\Rightarrow \hat{u}_3 = C_1 x_1 + \tilde{u}_3(x_2), \hat{u}_1 = \epsilon x_3^2 - C_1 x_3 + \tilde{u}_1(x_2). \end{aligned}$$

Puesto que  $\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2}$  debe ser sólo una función de  $x_3$  se deduce:

$$\hat{u}_1 = \epsilon x_3^2 - C_1 x_3 + C_2 x_2 + a_1.$$

Además  $\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_2}$  debe ser sólo función de  $x_1$ , de donde se deduce:

$$\hat{u}_3 = C_1 x_1 + C_3 x_2 + a_3.$$

Por último:  $\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1}(x_3) = -C_2$  y  $\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3}(x_1) = -C_3$ , y, en consecuencia:

$$\hat{u}_2 = -C_2 x_1 - C_3 x_3 + a_2.$$

Así, el campo de desplazamientos asociado es:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= \epsilon x_3^2 - C_1 x_3 + C_2 x_2 + a_1, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= 2\epsilon x_2 - C_2 x_1 - C_3 x_3 + a_2, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= \epsilon x_3 + C_1 x_1 + C_3 x_2 + a_3, \end{aligned}$$

siendo  $a_i, C_i \in \mathbb{R}$ . Obsérvese que el desplazamiento puede escribirse como:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \epsilon \begin{pmatrix} x_3^2 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C_2 & -C_1 \\ -C_2 & 0 & -C_3 \\ C_1 & C_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

lo que permite concluir que las funciones  $\hat{u}_i$  han llevado a un desplazamiento del tipo (3.6), como ya era sabido del Apartado 3.3.1.

En el caso particular más sencillo en el que esta deformación adicional del tipo (3.6) sea nula, el gradiente de deformación es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\epsilon x_3 \\ 0 & 1+2\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\epsilon \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El tensor de Cauchy-Green por la derecha es:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\epsilon & 0 \\ 2\epsilon x_3 & 0 & 1+\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\epsilon x_3 \\ 0 & 1+2\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1+\epsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\epsilon x_3 \\ 0 & (1+2\epsilon)^2 & 0 \\ 2\epsilon x_3 & 0 & (1+\epsilon)^2 + (2\epsilon x_3)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y el tensor de Green-Saint Venant es:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) &= (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\epsilon x_3 \\ 0 & 4\epsilon(1+\epsilon) & 0 \\ 2\epsilon x_3 & 0 & \epsilon(2+\epsilon+4\epsilon x_3^2) \end{pmatrix} \\ &\simeq \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la elongación elemental en la dirección  $x_3$  viene dado por:

$$\begin{aligned} \sqrt{2E_{33} + 1} - 1 &= \sqrt{2 \times \frac{1}{2} \epsilon (2 + \epsilon + 4\epsilon x_3^2) + 1} - 1 \\ &= \underbrace{\sqrt{\epsilon (2 + \epsilon + 4\epsilon x_3^2) + 1}}_{f(\epsilon)} - 1 \simeq f(0) + f'(0) \epsilon - 1 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

lo que muestra que  $\varepsilon_{33} = \epsilon$  es una buena aproximación de la elongación en la dirección  $x_3$ .

En cuanto al ángulo de cizallamiento o cortadura en las direcciones  $x_1x_3$  se define como la desviación con respecto al ángulo recto de la deformación de los ejes  $x_1x_3$  y se demuestra que si el gradiente del desplazamiento es pequeño será aproximado por:

$$\alpha_{13} \simeq 2\varepsilon_{13} = 2\epsilon x_3. \quad (11.2)$$

Si lo calculamos a partir de la matriz de Green-Saint Venant:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha_{13}) &= \frac{2E_{13}}{\sqrt{2E_{11}+1}\sqrt{2E_{33}+1}} \\ &= \frac{2\epsilon x_3}{\sqrt{1}\sqrt{\epsilon(2+\epsilon+4\epsilon x_3^2)+1}} \\ &\simeq 2\epsilon x_3. \end{aligned}$$

Puesto que  $2\epsilon x_3$  es un valor pequeño, el seno está bien aproximado por el argumento, y por tanto, bien aproximado por  $2\varepsilon_{13}$  como se había propuesto.

■

**Ejercicio 161** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 51) Considérese el tensor  $(\mathbf{e})$  definido con respecto al sistema de coordenadas cartesiano por:

$$(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} a\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c\lambda \end{pmatrix},$$

siendo  $a, b, c$  constantes no nulas y  $\lambda$  una función del punto  $x$  y del instante  $t$ .

- i) Mostrar que para que  $(\mathbf{e})$  sea un tensor de deformación, asociado a un campo de desplazamientos, la función  $\lambda$  debe ser de la forma:

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta,$$

siendo  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  funciones de  $t$ .

- ii) Determinar todos los campos de desplazamiento  $\mathbf{u}$  que tienen  $(\mathbf{e})$  como tensor linealizado de deformación.

### Solución

- i) Consideremos las ecuaciones de compatibilidad para este caso:

$$e_{11,23} = (-e_{23,1} + e_{31,2} + e_{12,3})_{,1} \Rightarrow a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

$$e_{22,31} = (-e_{31,2} + e_{12,3} + e_{23,1})_{,2} \Rightarrow b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_3} = 0.$$

$$e_{33,12} = (-e_{12,3} + e_{23,1} + e_{31,2})_{,3} \Rightarrow c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

$$2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11} \Rightarrow a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} + b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} = 0.$$

$$2e_{23,23} = e_{22,33} + e_{33,22} \Rightarrow b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_3^2} + c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} = 0.$$

$$2e_{31,31} = e_{33,11} + e_{11,33} \Rightarrow c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} + a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_3^2} = 0.$$

En consecuencia:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = h(x_1, x_3),$$

y si tenemos en cuenta la segunda ecuación de compatibilidad  $h = \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = h(x_3)$ . Esto implica que:

$$\lambda = f(x_3) + g(x_1, x_2).$$

Al utilizar ahora la tercera ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \Rightarrow g(x_1, x_2) = g_1(x_1) + g_2(x_2),$$

y por tanto:

$$\lambda = f(x_3) + g_1(x_1) + g_2(x_2).$$

Utilicemos ahora las otras condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} + b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} &= 0 \Rightarrow a g_2''(x_2) = -b g_1''(x_1) \\ &\Rightarrow \begin{cases} g_2''(x_2) = \alpha_2, \\ g_1''(x_1) = \alpha_1, \\ a \alpha_2 + b \alpha_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_3^2} + c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} &= 0 \Rightarrow c g_2''(x_2) = -b f''(x_3) \\ &\Rightarrow \begin{cases} g_2''(x_2) = \alpha_2, \\ f''(x_3) = \alpha_3, \\ c \alpha_2 + b \alpha_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} + a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_3^2} &= 0 \Rightarrow c g_1''(x_1) + a f''(x_3) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} g_1''(x_1) = \alpha_1, \\ f''(x_3) = \alpha_3, \\ a \alpha_3 + c \alpha_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia, debe verificarse el siguiente sistema lineal homogéneo relativo a las incógnitas  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

El determinante de la matriz de coeficientes es  $2acb \neq 0$ , en consecuencia la única solución es la cero:

$$\alpha_i = 0, i = 1, 2, 3$$

y, por tanto,  $f, g_1$  y  $g_2$  son funciones afines relativas a sus variables, de donde se deduce:

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta.$$

ii) Veamos cómo calcular los desplazamientos asociados.

ii.1) Para ello, teniendo en cuenta el significado que deben tener las componentes del tensor  $(\mathbf{e})$ , que ahora ya podemos considerar como el tensor de deformación de un desplazamiento, podemos proceder por una integración componente a componente del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= a(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta) \\ \Rightarrow u_1 &= a\left(\alpha \frac{x_1^2}{2} + \beta x_2 x_1 + \gamma x_3 x_1 + \delta x_1\right) + F_1(x_2, x_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= b(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta) \\ \Rightarrow u_2 &= b\left(\alpha x_1 x_2 + \beta \frac{x_2^2}{2} + \gamma x_3 x_2 + \delta x_2\right) + F_2(x_1, x_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= c(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta) \\ \Rightarrow u_3 &= c\left(\alpha x_1 x_3 + \beta x_2 x_3 + \gamma \frac{x_3^2}{2} + \delta x_3\right) + F_3(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Para que las componentes cortantes del tensor de deformación sean nulas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow a\beta x_1 + \frac{\partial F_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\left(b\alpha x_2 + \frac{\partial F_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial F_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} &= -a\beta x_1 \text{ y } \frac{\partial F_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -b\alpha x_2 \\ \Rightarrow F_2(x_1, x_3) &= -a\beta \frac{x_1^2}{2} + f_2(x_3) \text{ y } F_1(x_2, x_3) = -b\alpha \frac{x_2^2}{2} + f_1(x_3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow a\gamma x_1 + \frac{\partial F_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} = -\left(c\alpha x_3 + \frac{\partial F_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial F_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} &= -c\alpha x_3 \text{ y } \frac{\partial F_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -a\gamma x_1 \\ \Rightarrow F_1(x_2, x_3) &= -b\alpha \frac{x_2^2}{2} - c\alpha \frac{x_3^2}{2} \text{ y } F_3(x_1, x_2) = -a\gamma \frac{x_1^2}{2} + f_3(x_2).\end{aligned}$$

Análisis similares muestran que:

$$\begin{aligned}F_2(x_1, x_3) &= -a\beta \frac{x_1^2}{2} - c\beta \frac{x_3^2}{2} \\ F_3(x_1, x_2) &= -a\gamma \frac{x_1^2}{2} - b\gamma \frac{x_2^2}{2}\end{aligned}$$

Los campos de desplazamientos se reducen entonces a:

$$\begin{aligned} u_1 &= a \left( \alpha \frac{x_1^2}{2} + \beta x_2 x_1 + \gamma x_3 x_1 + \delta x_1 \right) - \frac{\alpha}{2} (bx_2^2 + cx_3^2), \\ u_2 &= b \left( \alpha x_1 x_2 + \beta \frac{x_2^2}{2} + \gamma x_3 x_2 + \delta x_2 \right) - \frac{\beta}{2} (ax_1^2 + cx_3^2), \\ u_3 &= c \left( \alpha x_1 x_3 + \beta x_2 x_3 + \gamma \frac{x_3^2}{2} + \delta x_3 \right) - \frac{\gamma}{2} (ax_1^2 + bx_2^2). \end{aligned}$$

Además de este desplazamiento todos los obtenidos al sumarle una deformación del tipo (3.6) tienen el mismo tensor de deformación.

Obsérvese que este procedimiento ha servido para obtener el desplazamiento en todo punto del dominio.

- ii.2) Sin embargo, hay una forma más general de proceder. A partir de la fórmula (3.11):

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

se calcula fácilmente el gradiente de cada componente del tensor de rotación. Dado que las componentes diagonales ya sabemos que son nulas (por haber verificado las ecuaciones de compatibilidad), nos centramos solo en las extradiagonales:

$$\begin{aligned} \nabla \omega_{12} &= (a\beta, -b\alpha, 0)^T, \\ \nabla \omega_{13} &= (a\gamma, 0, -c\alpha)^T, \\ \nabla \omega_{32} &= (0, -b\gamma, c\beta)^T. \end{aligned}$$

Una vez conocido el gradiente, se puede obtener el valor del tensor de rotación:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= a\beta x_1 - b\alpha x_2 + H_{12}, \\ \omega_{13} &= a\gamma x_1 - c\alpha x_3 + H_{13}, \\ \omega_{32} &= -b\gamma x_2 + c\beta x_3 + H_{32}, \end{aligned}$$

siendo  $H_{ij}$  constantes de integración. A continuación, se puede obtener el gradiente del desplazamiento utilizando la fórmula (3.10):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

Veamos, por ejemplo, el cálculo de  $u_1$ :

$$\nabla u_1 = (a(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta), a\beta x_1 - b\alpha x_2 + H_{12}, a\gamma x_1 - c\alpha x_3 + H_{13})^T,$$

deduciéndose de forma más directa que:

$$\begin{aligned} u_1 &= a\alpha \frac{x_1^2}{2} + a\beta x_1 x_2 + a\gamma x_1 x_3 - b\alpha \frac{x_2^2}{2} - c\alpha \frac{x_3^2}{2} + a\delta x_1 + H_{12}x_2 + H_{13}x_3 + A_1 \\ &= a \left( \alpha \frac{x_1^2}{2} + \beta x_2 x_1 + \gamma x_3 x_1 + \delta x_1 \right) - \frac{\alpha}{2} (bx_2^2 + cx_3^2) + H_{12}x_2 + H_{13}x_3 + A_1, \end{aligned}$$

siendo  $A_1$  constante. Obsérvese que esta expresión coincide con la obtenida con el procedimiento anterior, con la salvedad de que el movimiento rígido aparece ya incorporado con el término  $H_{12}x_2 + H_{13}x_3 + A_1$ .

■

## Boletín 4: Elasticidad lineal

**Ejercicio 162** (**♣** *Solución al Ejercicio 65*) En la página WEB [www.matweb.com](http://www.matweb.com) se encuentran para el Aluminio los siguientes datos:

*Yield Strength, 400MPa*

*Tensile Strength, Ultimate 455MPa*

*Modulus of Elasticity 68,0GPa*

*Poisson Ratio 0,420*

*Shear Modulus 25,0GPa*

- i) *Deducir el orden máximo de los desplazamientos en el régimen elástico lineal para el aluminio.*
- ii) *Calcular los parámetros de Lamé en el SI a partir los datos proporcionados.*

### Solución

- i) El cociente  $\sigma_{\text{máx}}/E$  indica el orden de magnitud de la dilatación

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}}/E$$

por debajo de la cual la idealización elástica lineal tiene un significado físico. Para el aluminio:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{E} = \frac{400\text{e}6\text{Pa}}{68,0\text{e}9\text{Pa}} = 0,0059,$$

lo que significa que por cada metro de longitud podemos tener una dilatación máxima de  $5,9\text{mm}$  para que el aluminio pueda seguirse considerando elástico lineal. ■

- ii) El parámetro de Lamé  $\mu$  coincide con el módulo de cortadura:

$$\mu = 25,0\text{GPa} = 25,0\text{e}9\text{Pa}.$$

Debe observarse que los datos de la base de datos no son totalmente compatibles, ya que este parámetro podría calcularse desde el módulo de Young y el coeficiente de Poisson:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{68,0\text{GPa}}{2(1+0,420)} = 23,94\text{e}9\text{Pa}$$

El parámetro de Lamé

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{68,0\text{GPa} \times 0,420}{(1-2 \times 0,420)(1+0,420)} \\ &= 1,25\text{e}11\text{Pa}.\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 163** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 67) Se considera un material elástico lineal, homogéneo e isótropo, con módulo de Young  $E$ , módulo de cortadura  $G$  y coeficiente de Poisson  $\nu$ , sometido a la tensión

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Identifica entre los siguientes el tensor de deformación asociado:

$$\begin{aligned} i) \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{\rho_0 g x_3}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad ii) \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \rho_0 g x_3 \mathbf{I}; \quad iii) \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ iv) \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{\rho_0 g x_3}{2G(1+\nu)} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Solución

El tensor de deformación asociado es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \\ &= \rho_0 g x_3 \left( \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} \mathbf{I} \right) \\ &= \frac{\rho_0 g x_3}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tensor que se corresponde con el dado en i). Por otra parte, si se tiene en cuenta que:

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

se concluye que iv) también es el tensor de deformación asociado. ■

**Ejercicio 164** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 68) Considerar la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

y cuyo material verifica la ley de Hooke. Considerar el campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, y^2, z^2)^T.$$

- i) Calcular el tensor de rotación.
- ii) Calcular el ángulo de cizallamiento o cortadura en cada punto del sólido en las direcciones  $yz$ .
- iii) Calcular la elongación en la dirección de la bisectriz del octante  $yz$  positivo en el punto  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y en el punto  $(0, 1, 1)$ . Relacionar las elongaciones obtenidas con la variación relativa de longitud entre los puntos deformados y los de partida.

iv) Calcular las fuerzas de superficie aplicadas sobre la cara lateral del cilindro correspondientes al desplazamiento  $\mathbf{u}$ . Indicar un punto donde el esfuerzo sea a compresión y otro donde sea a tracción.

v) Estudiar si existe fricción sobre la cara lateral.

### Solución

i)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{Rot}(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

entonces el movimiento es irrotacional. ■

ii) Puesto que los elementos extradiagonales del tensor de deformación son nulos

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix},$$

el ángulo de cizallamiento es nulo: no hay desviaciones respecto al ángulo recto después de la deformación. ■

iii) El vector unitario en la dirección de la bisectriz del octante  $yz$  positivo es:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T.$$

Por tanto, la elongación en esta dirección es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})|_{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &= \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \mathbf{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} 2 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p})|_{(0, 1, 1)} &= \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(0, 1, 1) \mathbf{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} 4 = 2. \end{aligned}$$

La deformación en estos puntos es:

$$\begin{aligned} X \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ X(0, 1, 1) &= (0, 1, 1) + (0, 1, 1) = (0, 2, 2). \end{aligned}$$

Entonces la distancia entre los puntos deformados es:

$$|X(0, 1, 1) - X \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)| = \left| \left(0, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \right| = \frac{5}{2\sqrt{2}},$$

mientras que su distancia en la configuración de referencia es:

$$|(0, 1, 1) - \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)| = \left| \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La variación relativa de longitud entre los puntos deformados y los de partida es, por tanto:

$$\frac{|\frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}|}{|\frac{1}{\sqrt{2}}|} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Esta variación relativa de longitud sólo es aproximada por la elongación en el punto si el tensor de deformación es pequeño comparado con la unidad, cosa que no es cierta en los puntos dados, presentando una peor aproximación cuanto más grande es la magnitud de este tensor. ■

iv) Sobre la cara lateral el vector normal es:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{1}{2}(0, y, z)^T.$$

Entonces las fuerzas de superficie serán:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) \mathbf{n}(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2(y+z) \lambda \mathbf{I} + 2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y(\lambda(y+z) + 4\mu y) \\ 2z(\lambda(y+z) + 4\mu z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \\ z^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos calcular ahora su proyección sobre la normal exterior unitaria:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, y, z) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \\ z^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ((y^3 + z^3)(\lambda + 2\mu) + \lambda(y^2z + yz^2)). \end{aligned}$$

Así, tomando el punto  $(0, -2, 0)$  la fuerza es de compresión:

$$\sigma_n(0, -2, 0) = \frac{1}{2}((-8)(\lambda + 2\mu)) = -4(\lambda + 2\mu) < 0,$$

pues los parámetros de Lamé deben ser positivos. Mientras que si tomamos el punto  $(0, 2, 0)$  la fuerza es de tracción:

$$\sigma_n(0, 2, 0) = \frac{1}{2}(8(\lambda + 2\mu)) = 4(\lambda + 2\mu) > 0.$$

■

v) Veamos la tensión tangencial sobre la cara lateral:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t(x, y, z) &= \sigma(x, y, z) \mathbf{n}(x, y, z) - \sigma_n(x, y, z) \mathbf{n}(x, y, z) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ y^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \\ z^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{4}((y^3 + z^3)(\lambda + 2\mu) + \lambda(y^2z + yz^2)) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ y^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \\ z^2(\lambda + 2\mu) + \lambda yz \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ (y^4 + yz^3)(\lambda + 2\mu) + \lambda(y^3z + y^2z^2) \\ (y^3z + z^4)(\lambda + 2\mu) + \lambda(y^2z^2 + yz^3) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vemos que en general este valor es no nulo; por ejemplo, en  $(0, 1, 0)$  se obtiene:

$$\sigma_t(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda + 2\mu) - \frac{1}{4}(\lambda + \mu) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + 2\mu \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Puesto que la tensión tangencial es no nula existe por tanto fricción sobre esta superficie. ■

**Ejercicio 165** (♣ *Solución al Ejercicio 71*) Se considera la viga sólida cuya configuración de referencia es (en el SI):

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\},$$

siendo  $a[m]$  una constante positiva dada y  $b = 2a$ . Sean  $\Gamma^+ = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 10\}$  y  $\Gamma^- = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\}$  las tapas superior e inferior del cilindro respectivamente y sea  $\Gamma_L$  su superficie lateral. Se supone que el sólido está formado por un material elástico con coeficientes:

$$E = 7. \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, \nu = 0,3$$

i) Sabiendo que

$$(\varepsilon(x, y, z)) = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma(x, y, z)) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma(x, y, z)) \mathbf{I} \quad (11.3)$$

Obtener el valor de la tensión en función del tensor de deformación indicando sus unidades.

ii) Calcular los módulos de Lamé, de compresibilidad y cortadura del material. Indicar sus unidades.

iii) Tomar sobre la viga un test de cizallamiento en las direcciones  $yz$  distribuido uniformemente de intensidad  $\sigma$ . Escribir el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones, el ángulo de cizallamiento y el campo de desplazamientos asociado.

- iv) Representar gráficamente la deformación obtenida en el apartado anterior sobre una sección transversal del cilindro.
- v) Calcular la desviación respecto del ángulo recto para dos segmentos que antes de la deformación formasen un ángulo recto en el plano  $yz$ .
- vi) Calcular la elongación relativa de un segmento que se encuentra en el eje  $z$  antes de la deformación?
- vii) Calcular el vector de rotación.
- viii) Usar COMSOL para resolver el problema 3D correspondiente al modelo considerado en iii) y iv), para el caso particular  $\sigma = 1.08[N/m^2]$ , con fuerzas de superficie aplicadas sobre su frontera lateral,  $\Gamma_L$ , y sobre la base,  $\Gamma^-$ . Calcular el error máximo del primer valor principal del tensor de tensiones cuando se compara con el calculado analíticamente. Calcular la norma  $L^2(\Omega)$  del error.
- ix) Calcular el máximo de la tensión equivalente de Von Mises y de las tensiones principales. Sabiendo que el yield stress es  $\sigma_y = 7.5e8 N/m^2$ , calcular el coeficiente de seguridad de esta componente estructural.
- x) Calcular la fuerza total ejercida sobre cada frontera por las fuerzas aplicadas. Comparar las obtenidas numérica y analíticamente.
- xi) Representar la deformación y la tensión equivalente de Von Mises sobre el plano transversal correspondiente a  $x = 5$ .

#### Solución

- i) De la relación dada se deduce que:

$$\begin{aligned}
 3\frac{\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1+\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma}) - tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 \Rightarrow \left(3\frac{\nu}{E} - \frac{1+\nu}{E}\right)tr(\boldsymbol{\sigma}) &= -tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 \left(-\frac{1-2\nu}{E}\right)tr(\boldsymbol{\sigma}) &= -tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 tr(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{E}{1-2\nu}tr(\boldsymbol{\varepsilon})
 \end{aligned}$$

Se deduce entonces de la relación (2.3) que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\nu}{E}(\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) &= (\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)) + \frac{\nu}{E} \frac{E}{1-2\nu} tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \\
 \Rightarrow (\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) &= \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

El tensor de deformación es adimensional y el tensor de tensiones tiene unidades  $N/m^2$ . ■

- ii) Puesto que conocemos que la ley de Hooke en términos de los coeficientes de Lamé del material se escribe:

$$\sigma(x, y, z) = 2\mu\varepsilon(x, y, z) + \lambda \text{tr}(\varepsilon) I,$$

podemos deducir:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ y } \mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \nu}.$$

Al substituir en esta expresión los valores dados para el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0,3 \times 7.e10}{(1 + 0,3)(1 - 0,6)} = \frac{2,1e10}{0,52} = 4,038e10 N/m^2, \\ \mu &= \frac{1}{2} \frac{7.e10}{1 + 0,3} = 2,6923e10 N/m^2. \end{aligned}$$

El módulo de compresibilidad se define como

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{7.e10}{3(1 - 2 \times 0,3)} N/m^2 = 5,83e10 N/m^2.$$

Finalmente, el módulo de cortadura  $G$  coincide con el parámetro de Lamé  $\mu$ , por tanto:

$$G = 2,6923e10 N/m^2.$$

■

- iii) El tensor de tensiones sería:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix} N/m^2,$$

y el correspondiente tensor de deformación:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix} = 1,857e-11 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

El ángulo de cizallamiento en los ejes  $yz$  es:

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = 3,714e-11 \sigma.$$

Dado que  $\mathbf{e}$  es un tensor constante verifica las condiciones de compatibilidad y, por tanto, es compatible con un tensor de deformación,  $\mathbf{e} = \varepsilon(\mathbf{u})$ , siendo  $\mathbf{u}$  el campo de desplazamientos asociados. Para calcular  $\mathbf{u}$  caben dos opciones.

- iii.1) La primera consiste en utilizar directamente la relación entre  $\varepsilon(\mathbf{u})$  y  $\mathbf{u}$ , integrar las relaciones, y conservar todas las constantes de inte-

gración. Así, debe tenerse en cuenta:

$$\varepsilon_{xx} = 0 \Rightarrow u_1(x, y, z) = \hat{u}_1(y, z); \quad (11.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \Rightarrow u_2(x, y, z) = \hat{u}_2(x, z); \quad (11.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \Rightarrow u_3(x, y, z) = \hat{u}_3(x, y); \quad (11.6)$$

$$\varepsilon_{xy} = 0 \Rightarrow \partial_y \hat{u}_1(y, z) = -\partial_x \hat{u}_2(x, z); \quad (11.7)$$

$$\varepsilon_{xz} = 0 \Rightarrow \partial_z \hat{u}_1(y, z) = -\partial_x \hat{u}_3(x, y); \quad (11.8)$$

$$2\varepsilon_{yz} = 3,714e - 11\sigma = \partial_z \hat{u}_2(x, z) + \partial_y \hat{u}_3(x, y). \quad (11.9)$$

En particular, de la última relación se deduce que:

$$0 = \partial_y (\partial_z \hat{u}_2(x, z) + \partial_y \hat{u}_3(x, y)) = \partial_{yy} \hat{u}_3(x, y);$$

$$0 = \partial_x (\partial_z \hat{u}_2(x, z) + \partial_y \hat{u}_3(x, y)) = \partial_{xz} \hat{u}_2(x, z) + \partial_{xy} \hat{u}_3(x, y);$$

$$0 = \partial_z (\partial_z \hat{u}_2(x, z) + \partial_y \hat{u}_3(x, y)) = \partial_{zz} \hat{u}_2(x, z).$$

En consecuencia:

$$\hat{u}_3(x, y) = f_3(x)y + g_3(x);$$

$$\hat{u}_2(x, z) = f_2(x)z + g_2(x);$$

y usando de nuevo (11.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} 3,714e - 11\sigma &= \partial_z \hat{u}_2(x, z) + \partial_y \hat{u}_3(x, y) \\ &= f_2(x) + f_3(x). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Teniendo en cuenta por otra parte (11.7) se deduce:

$$\partial_y \hat{u}_1(y, z) = -(f_2'(x)z + g_2'(x)). \quad (11.11)$$

Puesto que el primer miembro es independiente de  $x$  se deduce que:

$$f_2'(x) = C_1 \text{ y } g_2'(x) = C_2,$$

o lo que es lo mismo

$$f_2(x) = C_1x + C_3 \text{ y } g_2(x) = C_2x + C_4.$$

En todo lo que sigue  $C_i$  representa una constante arbitraria. En consecuencia, de (11.11):

$$\hat{u}_1(y, z) = -(C_1zy + C_2y) + f_1(z).$$

Análogamente de (11.8) se deduce:

$$\partial_z \hat{u}_1(y, z) = -C_1y + f_1'(z) = -(f_3'(x)y + g_3'(x)).$$

Por lo tanto:

$$f_1'(z) = C_5, \quad f_3'(x) = C_1 \text{ y } g_3'(x) = C_5,$$

de donde se deduce

$$f_1(z) = C_5z + C_6, \quad f_3(x) = C_1x + C_7 \text{ y } g_3(x) = C_5x + C_8.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la relación (11.10):

$$3,714e - 11\sigma = f_2(x) + f_3(x) = 2C_1x + C_3 + C_7,$$

se deduce:

$$C_1 = 0 \text{ and } C_3 + C_7 = 3,7e - 11\sigma.$$

En resumen, renombrando las constantes, el desplazamiento es de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= (C_5z - C_2y, C_3z + C_2x, (3,714e - 11\sigma - C_3)y + C_5x)^T \\ &\quad + (C_6, C_4, C_8)^T. \end{aligned}$$

Renombrando las constantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= (C_1z - C_2y, C_3z + C_2x, (3,714e - 11\sigma - C_3)y + C_1x)^T \\ &\quad + (C_4, C_5, C_6)^T \\ &= (0, 0, 3,714e - 11\sigma y)^T + \mathbf{w}, \end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{w}$  el desplazamiento rígido:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 & -C_2 & C_1 \\ C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & -C_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}.$$

- iii.2) La segunda opción para calcular el campo de desplazamientos es considerar la forma más general de proceder: primero calcular el tensor de rotación, para a continuación construir el gradiente del desplazamiento, a partir del cual se obtiene el desplazamiento directamente. A partir de la fórmula (3.11):

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

se calcula fácilmente el gradiente de cada componente del tensor de rotación. Dado que las componentes diagonales ya sabemos que son nulas (por haber verificado las ecuaciones de compatibilidad), nos centramos solo en las extradiagonales, que también van a ser nulas ya que el tensor  $\varepsilon(\mathbf{u})$  es constante:

$$\begin{aligned} \nabla \omega_{12} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \omega_{13} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \omega_{32} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Una vez conocido el gradiente, se puede obtener el valor del tensor de rotación:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= H_{12}, \\ \omega_{13} &= H_{13}, \\ \omega_{32} &= H_{32}, \end{aligned}$$

siendo  $H_{ij}$  constantes de integración. A continuación, se puede obtener el gradiente del desplazamiento utilizando la fórmula (3.10):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

Veamos, por ejemplo, el cálculo de  $u_1$ :

$$\nabla u_1 = (0, H_{12}, H_{13})^T,$$

deduciéndose de forma más directa que:

$$u_1 = H_{12}y + H_{13}z + A_1,$$

siendo  $A_1$  constante. Análogamente,

$$\nabla u_2 = (-H_{12}, 0, 1,857e-11\sigma-H_{32})^T, \quad \nabla u_3 = (-H_{13}, 1,857e-11\sigma+H_{32}, 0)^T,$$

deduciéndose que:

$$u_2 = -H_{12}x + (1,857e-11\sigma - H_{32})z + A_2, \quad \text{y} \quad u_3 = -H_{13}x + (1,857e-11\sigma + H_{32})y + A_3$$

siendo  $A_i, 1 \leq i \leq 3$  constantes. Obsérvese que esta expresión coincide con la obtenida con el procedimiento anterior,  $\mathbf{u} = 1,857e-11\sigma(0, z, y)^T + \mathbf{w}$ , donde el desplazamiento rígido  $\mathbf{w}$  está definido por.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\omega) \mathbf{x} + \mathbf{A} = \\ &\begin{pmatrix} 0 & H_{12} & H_{13} \\ -H_{12} & 0 & -H_{32} \\ -H_{13} & H_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

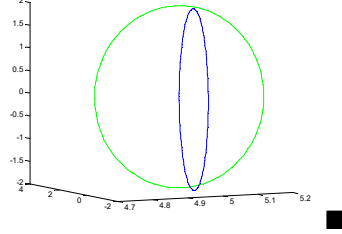
Así:  $H_{12} = -C_2$ ,  $H_{32} = 1,857e-11\sigma - C_3$  y  $H_{13} = C_1$ .

■

- iv) Se puede hacer la representación con MATLAB. Consideramos la expresión del desplazamiento obtenida con la opción iii.1) anterior. A continuación, se incluyen los comandos necesarios para representar gráficamente la deformación de la sección transversal del cilindro correspondiente al corte  $x=5$  tomando los semiejes  $a=1, b=2$ , y las constantes del desplazamiento:  $C_1=0$ ,  $C_2=2.e-1$ ,  $C_3=3.e-2$ ,  $C_4=C_5=C_6=0$ , y  $\sigma=1.e8$ .

```
>> a=1; b=2*a; sigma=1.e8;
>> teta=0:pi/80:2*pi;
>> y=a*cos(teta);z=b*sin(teta);x=5*ones(1,length(z));
>> plot3(x,y,z)
>> C1=0; C2=2.e-1; C3=3.e-2; C4=0; C5=0; C6=0;
>> xd=x+C1*z-C2*y+C4; yd=y+C3*z+C2*x+C5;
>> zd=z+(3.7e-11*sigma-C3)*y+C1*x+C6;
```

```
>> hold on
>> plot3(xd,yd,zd,'g')
```



v) La desviación con respecto al ángulo recto se corresponde con el ángulo de cizallamiento ya calculado en el apartado anterior:  $3,714e - 11\sigma$  radianes. ■

vi) La elongación relativa de un segmento que se encuentre en el eje  $z$  es nula ya que  $\varepsilon_{zz} = 0$ . ■

vii)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \text{Rot}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} 3.714e - 11 \sigma \mathbf{i} + (-C_3, -C_1, C_2)^T.\end{aligned}$$

Nótese que el primer término es el vector de rotación asociado al cizallamiento, mientras que el segundo se corresponde con la rotación asociada al desplazamiento rígido  $\mathbf{w}$ . ■

viii) Para considerar el modelo 3d necesitamos calcular los datos correspondientes a las fuerzas de volumen y de superficie. Puesto que la intensidad  $\sigma$  es constante, la divergencia del tensor de tensiones es nula, de modo que la densidad de fuerzas de volumen es cero,  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ . Con respecto a las fuerzas de superficie aplicadas sobre la base, hay que tener en cuenta que su normal es  $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)^T$ , y por tanto

$$\mathbf{g}_0 = (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma^-.$$

Sobre la superficie lateral, el vector normal al conjunto de nivel de la función  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$  toma la dirección de su gradiente. Por consiguiente:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{A} \left( 0, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{b^2} \right)^T,$$

donde  $A = \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}$ . En consecuencia, la densidad de fuerzas sobre  $\Gamma_L$  es:

$$\mathbf{g}_0 = (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} = \frac{\sigma}{A} \left( 0, \frac{z}{b^2}, \frac{y}{a^2} \right)^T \text{ sobre } \Gamma_L.$$

Puesto que el vector normal es representado en COMSOL como:

$$\mathbf{n} = (nx, ny, nz)^T,$$

La condición de contorno puede imponerse como:

$$\mathbf{g}_0 = \sigma(0, nz, ny)^T \text{ sobre } \Gamma_L.$$

Para completar la definición del problema, consideramos, por ejemplo,  $a=0.1m$ , y  $\sigma=1.e8N/m^2$ . Entonces el problema 3D a resolver es:

$$-Div(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \quad (11.12)$$

$$(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma^-, \quad (11.13)$$

$$(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} = \frac{\sigma}{A} \left(0, \frac{z}{b^2}, \frac{y}{a^2}\right)^T \text{ sobre } \Gamma_L, \quad (11.14)$$

$$\mathbf{u} = (0, 0, 3.7142857e - 11\sigma y)^T \text{ sobre } \Gamma^+. \quad (11.15)$$

Una vez resuelto el modelo con COMSOL usando 120816 grados de libertad, los errores absolutos de sus valores principales fueron:

$$\mathbf{Error} \text{ (N/m}^2\text{)} \quad \begin{array}{ccc} |\sigma_1 - \sigma|_{\text{máx}} & |\sigma_2|_{\text{máx}} & |\sigma_3 + \sigma|_{\text{máx}} \\ 2.9787e - 5 & 6.9455e - 5 & 2.9638e - 5 \end{array}$$

y el valor numérico de su norma  $L^2$  fue:

$$\left( \int_{\Omega} (\sigma_1 - \sigma)^2 dV \right)^{1/2} = (5.5951e - 13)^{1/2} = 7.48e - 7N.$$

Para obtener estos errores ha sido necesario incluir en el bloqueo  $u_z = \sigma y/\mu$ , sino los decimales omitidos en (11.15) inciden de forma importante en los resultados. ■

ix) El máximo de la tensión equivalente de Von Mises fue:

$$(\sigma_{vm})_{\text{máx}} = 1.7321e8N/m^2.$$

Y la máxima tensión principal:

$$\begin{aligned} (\sigma_1)_{\text{máx}} &= 1.0e8N/m^2; \\ (\sigma_2)_{\text{máx}} &= 6.541e - 5N/m^2; \\ (|\sigma_3|)_{\text{máx}} &= 1.0e8N/m^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente, estos cuatro valores característicos de la deformación son más pequeños que el *yield stress* del material, y, por tanto, el material está trabajando en régimen elástico. El factor de seguridad es:

$$FoS = \frac{\sigma_y}{\max\{(\sigma_{vm})_{\text{máx}}, (|\sigma_i|)_{\text{máx}}\}} = \frac{7.5e8}{1.7321e8} = 4.3287.$$

Una estructura con factor de seguridad 1 soportará solamente la carga de diseño y no más. Cualquier carga adicional causaría el fallo de la estructura. Una estructura con un factor de seguridad mayor que 4 resistirá hasta 4 veces la carga de diseño. En este caso el margen de seguridad es:

$$MoS = FoS - 1 = 3.3287$$

■

x) Las fuerzas de reacción son:

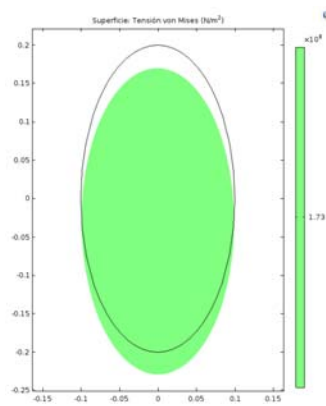
$$\mathbf{g}_r = - \int_{\Gamma^+} (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{0} \text{ N.}$$

El valor numérico obtenido es:

$$(-2.6939e-8, 2.3439e-8, -5.0245e-8)^T \text{ N.}$$

■

xi) La representación gráfica obtenida es:



Deformación y tensión equivalente de Von Mises sobre el plano transversal correspondiente a  $x = 5$ .

■

## Boletín 5: Problemas planos

**Ejercicio 166** (**♣** *Solución al Ejercicio 98*) Consideremos la viga sólida del ejercicio 68 cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

y cuyo material verifica la ley de Hooke. Considera que bajo la acción de las fuerzas calculadas en el ejercicio 68, el desplazamiento en cada punto es:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, y^2, z^2)^T.$$

i) Estudiar si se trata de un estado de deformaciones planas.

ii) Estudiar si se trata de un estado de tensiones planas.

### Solución

i) Obsérvese que la generatriz del cilindro corresponde con el eje  $x$ , que la componente  $x$  del desplazamiento es nula y que las otras dos componentes sólo dependen de la variable  $y, z$ ; con lo cual efectivamente se corresponde con un estado de deformaciones planas. ■

ii) Obsérvese que el tensor de deformación es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix},$$

y, por tanto, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(y+z)\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda(y+z) + 2\mu y) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda(y+z) + 2\mu z) \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $\sigma_{11}$  es no nulo el estado no es de tensiones planas. ■

**Ejercicio 167** (**♣** *Solución al Ejercicio 99*) Consideremos la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 4\},$$

siendo  $a > 0$  una constante dada y  $b = 2a$ , con parámetros de Lamé asociados:

$$\begin{aligned} \lambda &= 4,0e10N/m^2, \\ \mu &= 2,7e10N/m^2. \end{aligned}$$

Se considera un sistema de equilibrio para el cual el tensor de deformaciones es

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y/2 \\ 0 & y/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Calcular el tensor de rotación.<sup>1</sup>
- ii) Calcular los campos de desplazamientos asociados.
- iii) Comprobar si alguno de los campos de desplazamientos obtenido se corresponde a un problema de deformaciones planas. Si es el caso definir el problema bidimensional asociado considerando sobre la superficie lateral fuerzas de tracción.

### Solución

i)

$$\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{1k}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{k2}}{\partial x_1} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 1 \\ 0, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{si } k = 3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \omega_{13}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{1k}}{\partial x_3} - \frac{\partial e_{k3}}{\partial x_1} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 1 \\ 0, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{si } k = 3 \end{cases}.$$

$$\frac{\partial \omega_{23}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{2k}}{\partial x_3} - \frac{\partial e_{k3}}{\partial x_2} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } k = 2 \\ 0, & \text{si } k = 3 \end{cases}.$$

Entonces el tensor de rotación es:

$$\omega(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & A & C \\ -A & 0 & y/2 + B \\ -C & -y/2 - B & 0 \end{pmatrix}.$$

■

ii)

$$du_i = \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j.$$

$$du_1 = A dy + C dz \Rightarrow u_1 = Cz + Ay + D.$$

$$du_2 = -A dx + z dy + \frac{y}{2} dz + \left(\frac{y}{2} + B\right) dz \Rightarrow u_2 = -Ax + zy + Bz + E.$$

$$du_3 = -Cx + \frac{y}{2} dy + dz + \left(-\frac{y}{2} - B\right) dy \Rightarrow u_3 = -Cx + z - By + F.$$

En resumen:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (Cz + Ay + D, -Ax + zy + Bz + E, -Cx + z - By + F),$$

siendo  $B$  y  $C$  constantes arbitrarias. ■

- iii) Aunque su tensor de deformación es tal que  $\varepsilon_{1k} = 0$  y las otras componentes dependen sólo de las variables  $y, z$  esto no garantiza que el problema sea de deformaciones planas en el plano  $yz$  correspondiente a la sección media de la viga. Efectivamente, si observamos los campos de desplazamientos obtenidos en el ítem anterior vemos que sólo si  $u_1 = 0$ , es decir,

---

1

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}.$$

sólo si  $A = C = D = 0$ , el problema será de deformaciones planas. En este caso el desplazamiento queda:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, zy + Bz + E, z - By + F).$$

Sobre las tapas veamos cómo es la componente normal del desplazamiento:

$$\mathbf{u}(x, y, z) \cdot (\pm 1, 0, 0) = \pm (Cz + Ay + D),$$

que sólo es nula de nuevo para los campos correspondientes a las constantes  $A = C = D = 0$ . En consecuencia, los campos de desplazamientos:

$$\mathbf{u}^1(x, y, z) = (0, zy + Bz + E, z - By + F),$$

se corresponden a un problema de deformaciones planas. Para estos desplazamientos, el tensor de tensiones asociado es:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}^1)(x, y, z) &= 2\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & y/2 \\ 0 & y/2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda(z+1)\mathbf{I} \\ &= 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2z & y \\ 0 & y & 2 \end{pmatrix} + 4,0e10(z+1)\mathbf{I} \\ &= \begin{pmatrix} 4,0e10(z+1) & 0 & 0 \\ 0 & 9,4e10z + 4,0e10 & 2,7e10y \\ 0 & 2,7e10y & 4,0e10z + 9,4e10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La ecuación de equilibrio bidimensional será:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0, \text{ sobre } \omega \\ -\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -(2,7e10 + 4,0e10) = -6,7e10 \text{ sobre } \omega, \end{aligned}$$

siendo  $\omega$  el círculo de centro el origen y radio 2. La ley de comportamiento se escribe:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 4,0e10\varepsilon_{\gamma\gamma} + 5,4e10\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{1\alpha} = 0, \sigma_{11} = 0,3\sigma_{\gamma\gamma}$$

donde los índices griegos toman sus valores en el conjunto  $\{2, 3\}$ . La condición de contorno sobre la superficie lateral se toma sobre los esfuerzos, y por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4,0e10(z+1) & 0 & 0 \\ 0 & 9,4e10z + 4,0e10 & 2,7e10y \\ 0 & 2,7e10y & 9,4e10 + 4,0e10z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (9,4e10z + 4,0e10)y + (2,7e10y)z \\ 2,7e10y^2 + (9,4e10 + 4,0e10z)z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 12,1e10zy + 4,0e10y \\ 2,7e10y^2 + 9,4e10z + 4,0e10z^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la condición de tracción sobre la superficie lateral sería:

$$\sigma \mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12,1e10zy + 4,0e10y \\ 2,7e10y^2 + 9,4e10z + 4,0e10z^2 \end{pmatrix},$$

sobre la frontera del círculo. ■

**Ejercicio 168** (♣ *Solución al Ejercicio 106*) Considerar un problema de tensiones planas en el plano  $x_1x_2$  cuyas fuerzas de volumen derivan de un potencial  $V$ . Utilizando la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

deducir la ecuación diferencial asociada a la función de Airy.

### Solución

Para un problema de tensiones planas el tensor de tensiones toma la forma:

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{22}A(x_1, x_2) + V & -\partial_{12}A(x_1, x_2) & 0 \\ -\partial_{21}A(x_1, x_2) & \partial_{11}A(x_1, x_2) + V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1) \quad (11.16)$$

y el correspondiente tensor de deformación será:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} \begin{pmatrix} \partial_{22}A(x_1, x_2) + V & -\partial_{12}A(x_1, x_2) & 0 \\ -\partial_{21}A(x_1, x_2) & \partial_{11}A(x_1, x_2) + V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{\nu}{E} (\Delta A(x_1, x_2) + 2V) \mathbf{I} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{E} (\partial_{22}A - \nu \partial_{11}A) + \frac{1-\nu}{E} V & -\frac{1+\nu}{E} \partial_{12}A & 0 \\ -\frac{1+\nu}{E} \partial_{21}A & \frac{1}{E} (\partial_{11}A - \nu \partial_{22}A) + \frac{1-\nu}{E} V & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} (\Delta A(x_1, x_2) + 2V) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para que se verifique la ecuación de compatibilidad indicada debe verificarse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \partial_{22} \left( \frac{1}{E} (\partial_{22}A - \nu \partial_{11}A) + \frac{1-\nu}{E} V \right) + \partial_{11} \left( \frac{1}{E} (\partial_{11}A - \nu \partial_{22}A) + \frac{1-\nu}{E} V \right) \\ &\quad - 2 \partial_{12} \left( -\frac{1+\nu}{E} \partial_{12}A \right) = 0. \end{aligned}$$

Esto implica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} (\partial_{1111}A + \partial_{2222}A) + \left( -\frac{2\nu}{E} + 2\frac{1+\nu}{E} \right) \partial_{1122}A &= -\frac{1-\nu}{E} \Delta V \\ \frac{1}{E} \Delta^2 A &= -\frac{1-\nu}{E} \Delta V \\ \Delta^2 A &= -(1-\nu) \Delta V. \end{aligned}$$

■

**Ejercicio 169** ( $\clubsuit$  Solución al Ejercicio 107) Considerar una tensión correspondiente a un cizallamiento en las direcciones  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

- i) Obtener condiciones sobre el cizallamiento para que admita un campo de desplazamientos asociado.
- ii) Demostrar que corresponde a un estado de deformaciones planas.
- iii) Calcular un campo de desplazamientos plano asociado.

**Solución**

- i) Sabemos que el tensor de tensiones correspondiente a un cizallamiento en las direcciones  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  tiene la expresión:

$$(\boldsymbol{\sigma})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1\tilde{\mathbf{e}}_2\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y que el candidato a tensor de deformación toma entonces la forma:

$$(\mathbf{e})_{(0/\tilde{\mathbf{e}}_1\tilde{\mathbf{e}}_2\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}$ . Si consideramos el cizallamiento independiente de  $x_3$ , y si  $e_{12,12} = 0$ , las ecuaciones de compatibilidad

$$\begin{cases} e_{11,23} = (-e_{23,1} + e_{31,2} + e_{12,3})_{,1} \\ e_{22,31} = (-e_{31,2} + e_{12,3} + e_{23,1})_{,2} \\ e_{33,12} = (-e_{12,3} + e_{23,1} + e_{31,2})_{,3} \\ 2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11} \\ 2e_{23,23} = e_{22,33} + e_{33,22} \\ 2e_{31,31} = e_{33,11} + e_{11,33} \end{cases}$$

se verifican. Por ello, condiciones suficientes para que se pueda obtener un campo de desplazamientos asociado, de forma que  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ , es que  $\sigma_{12}$  sea independiente de  $x_3$ , y si  $e_{12,12} = 0$ . Consideraremos estas hipótesis para realizar los siguientes apartados del ejercicio. ■

- ii) Dado que  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  solo tiene no nulas las componentes 12 y que además son independientes de  $x_3$  se trata de un estado de deformaciones planas en el plano  $x_1x_2$ , si en la expresión del desplazamiento asociado se eligen desplazamientos tales que  $u_3 = 0$ .
- iii) Para calcular el desplazamiento asociado, se calcula primero el tensor de rotación, para a continuación construir el gradiente del desplazamiento, a partir del cual se obtiene el desplazamiento directamente. A partir de la fórmula (3.11):

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial e_{kj}}{\partial x_i}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

se calcula fácilmente el gradiente de cada componente del tensor de rotación. Dado que las componentes diagonales ya sabemos que son nulas (por haber

verificado las ecuaciones de compatibilidad), nos centramos solo en las extradiagonales, que también van a ser nulas ya que el tensor  $\varepsilon(\mathbf{u})$  es constante:

$$\begin{aligned}\nabla\omega_{12} &= \left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_1}, \frac{\partial e_{12}}{\partial x_2}, 0\right)^T = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}, \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}, 0\right)^T, \\ \nabla\omega_{13} &= \mathbf{0}, \\ \nabla\omega_{32} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Una vez conocido el gradiente, se puede obtener el valor del tensor de rotación:

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= \frac{1}{2\mu} \left(-\sigma_{12} + H_{12}(x_2) + \sigma_{12} + \tilde{H}_{12}(x_1)\right) = \frac{1}{2\mu} \left(H_{12}(x_2) + \tilde{H}_{12}(x_1)\right), \\ \omega_{13} &= H_{13}, \\ \omega_{32} &= H_{32},\end{aligned}$$

siendo  $H_{13}$  y  $H_{32}$  constantes de integración. A continuación, se puede obtener el gradiente del desplazamiento utilizando la fórmula (3.10):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

Veamos, por ejemplo, el cálculo de  $u_1$ :

$$\nabla u_1 = \left(0, \frac{\sigma_{12} + H_{12}(x_2) + \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu}, H_{13}\right)^T,$$

deduciéndose que:

$$u_1 = \int \left( \frac{\sigma_{12} + H_{12}(x_2) + \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu} \right) dx_2 + H_{13}x_3 + A_1,$$

siendo  $A_1$  constante. Análogamente, se calcularían el resto de las componentes de  $\mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned}\nabla u_2 &= \left( \frac{\sigma_{12} - H_{12}(x_2) - \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu}, 0, -H_{32} \right)^T, \\ \nabla u_3 &= \left( -H_{13}, H_{32}, 0 \right)^T,\end{aligned}$$

deduciéndose que:

$$\begin{aligned}u_2 &= \int \left( \frac{\sigma_{12} - H_{12}(x_2) - \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu} \right) dx_1 - H_{32}x_3 + A_2, \\ u_3 &= -H_{13}x_1 + H_{32}x_2 + A_3,\end{aligned}$$

siendo  $A_i$  constantes. Para ser un desplazamiento plano en el plano  $x_1$  y  $x_2$  deben elegirse  $H_{13} = H_{32} = A_3 = 0$ , en cuyo caso:

$$\mathbf{u} = \left( \int \left( \frac{\sigma_{12} + H_{12}(x_2) + \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu} \right) dx_2 + A_1, \int \left( \frac{\sigma_{12} - H_{12}(x_2) - \tilde{H}_{12}(x_1)}{2\mu} \right) dx_1 + A_2, 0 \right)^T$$

Tenemos así una expresión general de campos de desplazamientos asociados a un cizallamiento simple. Para considerar un campo de desplazamiento particular, podemos elegir un cizallamiento uniforme, esto es  $\sigma_{12}$  constante, y  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $H_{12}(x_2) = 0$ ,  $\tilde{H}_{12}(x_1) = 0$ . En cuyo caso el campo de desplazamientos asociado es:

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\sigma_{12}x_2}{2\mu}, \frac{\sigma_{12}x_1}{2\mu}, 0 \right)^T.$$

■

## Boletín 6: Modelos con simetría

**Ejercicio 170** (**♣** *Solución al Ejercicio 111*) *Considera un planeta bajo su propia atracción gravitatoria. Idealiza el planeta como una esfera sólida de radio  $a$  sometida a las siguientes cargas:*

- *Un campo de fuerzas  $\mathbf{b} = -g_a^r \mathbf{e}_r$  por unidad de masa, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera.*
- *La superficie del planeta está libre de esfuerzos.*

*Considerar además que la componente normal de la tensión en la dirección radial debe estar acotada en el centro del planeta.*

- i) Calcular los campos de desplazamientos verificando la ecuación de equilibrio.*
- ii) A partir de la ley de Hooke deducir la correspondiente componente normal de la tensión en la dirección radial.*
- iii) Utilizar las condiciones de contorno para determinar la deformación y la tensión en cada punto del planeta.*

### Solución

- i) En este caso la ecuación a resolver es:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u(r)) \right) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r}{a}.$$

En consecuencia:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u(r)) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r^2}{2a} + C_0.$$

De tal forma que:

$$r^2 u(r) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r^5}{10a} + C_0 \frac{r^3}{3} + C_1.$$

La componente radial del desplazamiento admite la expresión general:

$$u(r) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r^3}{10a} + C_0 r + \frac{C_1}{r^2}.$$

■

ii)

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r) &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{du(r)}{dr} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u(r)}{r} \\
&= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{3r^2}{10a} + C_0 - \frac{2C_1}{r^3} \right) \\
&\quad + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r^2}{10a} + C_0 + \frac{C_1}{r^3} \right) \\
&= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\rho_0 g}{10aE(1-\nu)} r^2 \left( \frac{3E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\
&\quad + C_0 \left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\
&\quad + \frac{C_1}{r^3} \left( \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} - \frac{2E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \right) \\
&= \frac{\rho_0 g(3-\nu)}{10a(1-\nu)} r^2 + C_0 \frac{E}{(1-2\nu)} - \frac{C_1}{r^3} \frac{2E(1-2\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}.
\end{aligned}$$

■

iii) Este tensor debe ser finito cuando  $r \rightarrow 0$ , lo cual sólo es posible si  $C_1 = 0$ . Por otra parte la superficie del planeta debe estar libre de tracciones, esto es:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(a) &= \frac{\rho_0 g(3-\nu)}{10(1-\nu)} a + C_0 \frac{E}{(1-2\nu)} = 0 \\
\Rightarrow C_0 &= -\frac{\rho_0 g(3-\nu)(1-2\nu)}{10E(1-\nu)} a.
\end{aligned}$$

Así, el desplazamiento  $u(r)$  toma la expresión:

$$\begin{aligned}
u(r) &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \rho_0 g \frac{r^3}{10a} - \frac{\rho_0 g(3-\nu)(1-2\nu)}{10E(1-\nu)} ar \\
&\quad - \frac{(1-2\nu)}{10aE(1-\nu)} \rho_0 g r ((1+\nu)r^2 - (3-\nu)a^2).
\end{aligned}$$

Para finalizar, se calculan el tensor de deformación y el tensor de tensiones utilizando las expresiones indicadas en la sección anterior. ■

**Ejercicio 171** (♣ *Solución al Ejercicio 114*) Se considera el sólido semiesférico:

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; 1/4 \leq z \leq 1\},$$

de densidad constante  $\rho_0 = 2750 \text{ Kg/m}^3$ , sometido a la deformación:

$$X((x, y, z), t) = (-tx, y, z),$$

cuyo desplazamiento asociado en metros es:

$$\mathbf{u}((x, y, z), t) = (x(-t-1), 0, 0).$$

i) Comprobar si es una transformación rígida.

ii) Calcular el tensor de tensiones utilizando la ley de Hooke para

$$\lambda = 10e5MPa, \quad \mu = 8e4MPa,$$

escribiendo el resultado en  $N/m^2$ .

iii) Calcular el tensor desviatorio en  $t = 0,01s$  y expresar el resultado en  $Pa$ .

iv) Calcular la densidad de fuerzas de volumen y la densidad de fuerzas de superficie sobre su frontera para que el desplazamiento dado y el tensor de tensiones calculados sean solución del problema elastodinámico lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b}_0 \text{ en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \text{ en } \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ en } \partial \mathcal{B}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ en } \mathcal{B}. \end{array} \right.$$

Indicar las unidades de las fuerzas. Indicar en qué casos se tienen esfuerzos normales, tangenciales, de tracción o de compresión.

v) Planteado el problema elastodinámico en la forma anterior con los datos calculados ¿Estaría bien planteado para calcular, por ejemplo, con el ordenador su solución?

vi) ¿Crees que este problema se podría reducir a uno evolutivo de deformaciones o tensiones planas, esto es, que para cada  $t$  el problema asociado pueda plantearse sobre una sección bidimensional?

vii) ¿Tiene este problema simetría esférica?

viii) ¿Y simetría cilíndrica?

### Solución

i) El tensor de deformación asociado a  $\mathbf{u}$  es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}((x, y, z), t)) = \begin{pmatrix} (-t-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que el tensor de deformación es no nulo no puede ser una transformación rígida. ■

ii)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t})) &= (-t-1) \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-t-1)e + 10 \begin{pmatrix} 116 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} N/m^2. \end{aligned}$$

■

iii) El tensor desviatorio se define como:

$$\begin{aligned}
 \sigma^D(\mathbf{u}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t})) &= \sigma(\mathbf{u}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t})) - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma(\mathbf{u}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t}))) \mathbf{I} \\
 &= (-t-1) \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(-t-1)(3\lambda+2\mu) \mathbf{I} \\
 &= (-t-1) \begin{pmatrix} \lambda+2\mu-\lambda-\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda-\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda-\frac{2}{3}\mu \end{pmatrix} \\
 &= (-t-1) \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En  $t = 0,01s$  se obtiene:

$$\sigma^D(\mathbf{u}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t})) = (-1,01)e + 10 \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix} Pa.$$

■

iv) En este caso particular el término de inercia es nulo. Entonces la densidad de fuerzas de volumen es:

$$\mathbf{b}_0 = -\text{Div}(\sigma) = \mathbf{0} \text{ N/m}^3.$$

La segunda ecuación es trivial pues el tensor encontrado antes es efectivamente simétrico y, al ser obtenido por la ley de Hooke, también verifica la cuarta relación que recoge esta ley de comportamiento. Quedan por calcular las fuerzas de superficie en la frontera. Sobre las tapas de la superficie el vector normal es  $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3$ , entonces:

$$\sigma \mathbf{n} = \pm (-t-1)e + 12\mathbf{e}_3 \text{ N/m}^2.$$

Para  $t > 0$ ,  $\pm(-t-1) \leq 0$ . Entonces en la cara superior el esfuerzo es puramente normal y de compresión y en la cara inferior es también puramente normal, pero de tracción. En la frontera lateral el vector normal es:  $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(x, y, z)$ , entonces:

$$\mathbf{g} = \sigma \mathbf{n} = (-t-1)e + 10 \begin{pmatrix} 58x \\ 50y \\ 50z \end{pmatrix} \text{ N/m}^2.$$

La tensión normal es:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= (-t-1)e + 10(58x^2 + 50y^2 + 50z^2) \\
 &= (-t-1)e + 10(58x^2 + 50(4-x^2)) \\
 &= \frac{8}{3}(-t-1)e + 10(8x^2 + 200) \text{ N/m}^2.
 \end{aligned}$$

La tensión normal para  $t > 0$ , es  $(-t-1) < 0$ . Entonces, en la superficie lateral el esfuerzo no es puramente normal y es de compresión. También hay tensiones tangenciales. ■

v) El problema no estaría bien planteado pues al no tener una condición Dirichlet sobre un trozo de su frontera de medida positiva no habrá unicidad de solución. Además, habrá que indicar las condiciones iniciales en el desplazamiento y la velocidad. ■

vi) Para que en cada instante se considerase un problema de deformaciones planas en la sección transversal  $z = cte$  debemos tener un tensor de deformación con  $\varepsilon_{i3} = 0$  y  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  independiente de  $z$ ; estas propiedades se verifican en el ejemplo anterior. Aun así el dominio no es cilíndrico y estamos obligados a imponer fuerzas en la superficie lateral no planas: por tanto no se puede reducir a un problema de deformaciones planas en cada instante.

Tampoco se puede considerar su reducción como problema de tensiones planas ya que  $\sigma_{33} \neq 0$  sobre las tapas. ■

vii) Para tener simetría esférica debería verificarse:

- El vector de posición  $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ .
- El campo de desplazamientos  $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$ .
- Las fuerzas de volumen  $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{e}_r$ .

Vemos que en nuestro ejemplo no se cumplen ninguna de las tres condiciones. ■

viii) Para tener simetría cilíndrica debería verificarse:

- El vector de posición

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z.$$

- El campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_z(r, z)\mathbf{e}_z,$$

donde  $u_r(r, z)$  se llama desplazamiento radial y  $u_z(r, z)$  desplazamiento axial.

- Las fuerzas de volumen admitidas son:

$$\mathbf{b}_0(r, z) = b_r(r, z)\mathbf{e}_r + b_z(r, z)\mathbf{e}_z.$$

De nuevo estas propiedades no se verifican en nuestro modelo. ■

**Ejercicio 172** (♣ Solución al Ejercicio 115) Considera un cilindro hueco,  $C_h$ , con un espesor de 0.125m, siendo la sección transversal exterior de radio 0.25m, con altura 3m y con generatriz correspondiente al eje  $oy$ .

- i) Escribir para esta geometría un modelo matemático correspondiente a un problema 3D que admita una hipótesis de simetría cilíndrica. Considerar que las fuerzas de volumen son nulas, y fuerzas superficiales impuestas en sus superficies laterales (interior y exterior) y en su base. Detallar la expresión analítica de todos los datos del modelo para que tenga una solución única.

- ii) Consultar el sitio WEB: [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y elegir para una aleación de acero los parámetros necesarios para completar los datos del modelo considerado. Considerar todos los datos en el sistema internacional de unidades.
- iii) Resolver el problema 3D en COMSOL. Calcule el error máximo en la componente y del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta.
- iv) Calcular el máximo de la tensión equivalente de Von Mises y de las tensiones principales.
- v) Calcular la carga total aplicada en la tapa superior  $y = 3$ . Comparar su valor con el calculado numéricamente.

### Solución

- i) Escribir para esta geometría un modelo matemático correspondiente a un problema 3D que admita una hipótesis de simetría cilíndrica. Considerar que las fuerzas de volumen son no nulas, y fuerzas superficiales impuestas en sus superficies laterales (interior y exterior) y en su base. Detallar la expresión analítica de todos los datos del modelo para que tenga una solución única.

Primero consideramos como solución analítica un desplazamiento compatible con una hipótesis de simetría cilíndrica. Por ejemplo:

$$\mathbf{u} = \left( \epsilon xy, -\frac{1}{2} \rho g \delta (y-3)^2, \epsilon zy \right),$$

siendo  $\epsilon = 1.e - 3m^{-1}$ ,  $\delta = 1.e - 4 \text{ ms}^2/kg$ ,  $\rho$  la densidad del material y  $g$  la aceleración de la gravedad. Para este desplazamiento, el tensor de deformación es:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon y & \frac{1}{2} \epsilon x & 0 \\ \frac{1}{2} \epsilon x & -\rho g \delta (y-3) & \frac{1}{2} \epsilon z \\ 0 & \frac{1}{2} \epsilon z & \epsilon y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El tensor de tensión asociado será:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{I}) + 2\mu (\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (11.17)$$

$$= (2\lambda \epsilon y - \rho g \delta (y-3)) (\mathbf{I}) + 2\mu (\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (11.18)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) \epsilon y & \mu \epsilon x & 0 \\ \mu \epsilon x & 2\lambda \epsilon y & \mu \epsilon z \\ 0 & \mu \epsilon z & 2(\lambda + \mu) \epsilon y \end{pmatrix} \quad (11.19)$$

$$- \begin{pmatrix} \lambda \rho g \delta (y-3) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \rho g \delta (y-3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \rho g \delta (y-3) \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

siendo

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \text{ y } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

En particular, este campo de desplazamiento corresponderá a una densidad de fuerzas volumétricas de valor:

$$\mathbf{b}_0(x, y, z) = -\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = -(0, 2(\mu + \lambda)\epsilon - (\lambda + 2\mu)\rho g\delta, 0)^T.$$

En las superficies laterales los vectores normales son:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_e &= \frac{1}{R_e}(x, 0, z)^T, \\ \mathbf{n}_i &= -\frac{1}{R_i}(x, 0, z)^T.\end{aligned}$$

Por tanto, las fuerzas superficiales aplicadas son:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_e(x, y, z) &= (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}_e \\ &= \frac{2(\lambda + \mu)\epsilon y}{R_e}(x, 0, z)^T + (0, \mu\epsilon R_e, 0)^T \\ &\quad - \frac{\lambda\rho g\delta(y - 3)}{R_e}(x, 0, z)^T \text{ sobre } \Gamma_e^L,\end{aligned}$$

siendo  $\Gamma_e^L$  definida por  $x^2 + z^2 = R_e^2$  y

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_i(x, y, z) &= (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}_i \\ &= -\frac{2(\lambda + \mu)\epsilon y}{R_i}(x, 0, z)^T - (0, \mu\epsilon R_i, 0)^T \\ &\quad + \frac{\lambda\rho g\delta(y - 3)}{R_i}(x, 0, z)^T \text{ sobre } \Gamma_i^L,\end{aligned}$$

siendo  $\Gamma_i^L$  definida por  $x^2 + z^2 = R_i^2$ .

En la tapa inferior del cilindro, asumimos fuerzas superficiales aplicadas:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_b(x, y, z) &= (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}_b = (\boldsymbol{\sigma})(0, -1, 0)^T \\ &= (-\mu\epsilon x, -2\lambda\epsilon y + (\lambda + 2\mu)\rho g\delta(y - 3), -\mu\epsilon z)^T \\ &= (-\mu\epsilon x, -3[m](\lambda + 2\mu)\rho g\delta, -\mu\epsilon z)^T \text{ sobre } \Gamma^-.\end{aligned}$$

Finalmente, sobre la tapa superior se impondrán los desplazamientos prescritos, con

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_D(x, 3, z) &= \left(\epsilon xy, -\frac{1}{2}\rho g\delta(y - 3)^2, \epsilon zy\right)_{|y=3} \\ &= (3\epsilon x, 0, 3\epsilon z).\end{aligned}$$

En resumen, el modelo matemático 3D se puede escribir como:

$$\begin{aligned}-\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{b}_0, \text{ en } C_h, \\ (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} &= \mathbf{g}_e, \text{ sobre } \Gamma_e^L, \\ (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} &= \mathbf{g}_i, \text{ sobre } \Gamma_i^L, \\ (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} &= \mathbf{g}_b, \text{ sobre } \Gamma^-, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D, \text{ sobre } \Gamma^+.\end{aligned}$$

■

- ii) Consultar el sitio WEB: [www.matweb.com](http://www.matweb.com) y elegir para una aleación de acero los parámetros necesarios para completar los datos del modelo considerado. Considerar todos los datos en el sistema internacional de unidades. El material elegido es una aleación de acero, Acero AISI 1345, con las siguientes propiedades físicas:

$$\begin{aligned}\rho &= 7.85 \text{ g/cc} = 7.85 \times \frac{10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ E &= 205 \text{ GPa} = 205 \times 10^9 \text{ Pa}, \\ \nu &= 0.29.\end{aligned}$$

A partir de estos valores podemos calcular los parámetros de Lamé:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} = 1.0973e + 11 \text{ N/m}^2, \text{ y} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 7.9457e + 10 \text{ N/m}^2.\end{aligned}$$

■

- iii) Resolver el problema 3D en COMSOL. Calcule el error máximo en la componente  $y$  del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta. El error máximo para la componente  $y$  del desplazamiento fue de  $3e - 3m$ .

■

- iv) Calcular el máximo de la tensión equivalente de Von Mises y de las tensiones principales.

La tensión equivalente de Von Mises tiene como máximo  $3.67e12 \text{ Pa}$ . ■

- v) Calcular la carga total aplicada en la tapa superior  $y = 3$ . Comparar su valor con el calculado numéricamente.

La carga total aplicada en la tapa superior se puede calcular como:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_u &= \int_{\Gamma^+} \mathbf{g}_u d\Gamma = \int_{\Gamma^+} (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n}_u d\Gamma = \int_{\Gamma^+} (\boldsymbol{\sigma}) (0, 1, 0)^T d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^+} (\mu\epsilon x, 2\lambda\epsilon y - (\lambda + 2\mu) \rho g \delta(y - 3), \mu\epsilon z)^T d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^+} (\mu\epsilon x, 6\lambda\epsilon, \mu\epsilon z)^T d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r (\mu\epsilon r \cos(\theta), 6\lambda\epsilon, \mu\epsilon r \sin(\theta)) dr d\theta \\ &= - (0, 6\lambda\epsilon\pi (R_e^2 - R_i^2), 0) N.\end{aligned}$$

El error cuando comparamos esta carga total con la calculada con COMSOL fue:

$$(0.10276, 1.1818e7, 1.3432e6) N.$$

El error relativo en la segunda componente de la carga fue: 0.0159. ■

**Ejercicio 173** (**♣** *Solución al Ejercicio 116*) Considerar la geometría y el modelo considerado en el Ejercicio 115.

- i) Escribir el modelo matemático 3D correspondiente en coordenadas cilíndricas.
- ii) Escribir los tensores de deformación y tensión en coordenadas cilíndricas.
- iii) Considerar la misma aleación de acero que en el Ejercicio 115 y escribir el modelo 2D asociado, en términos del desplazamiento, en un plano vertical del cilindro aprovechando la simetría cilíndrica del problema 3D propuesto.
- iv) Resolver el problema de simetría axial 2D en COMSOL. Calcular el error máximo en la componente radial del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta.
- v) Comparar el valor de la carga total aplicada a la tapa superior  $y = 3$  con la obtenida de la simulación 2D.
- vi) Calcular el máximo de la tensión de Von Mises y de las tensiones principales utilizando la simulación 2D y compararlas con las calculadas previamente en la simulación 3D.

### Solución

- i) Escribir el modelo matemático 3D correspondiente en coordenadas cilíndricas.

Recordamos que el desplazamiento considerado fue:

$$\mathbf{u} = \left( \epsilon xy, -\frac{1}{2} \rho g \delta (y-3)^2, \epsilon zy \right),$$

siendo  $\epsilon = 1.e - 3m^{-1}$ ,  $\delta = 1.e - 4ms^2/kg$ ,  $\rho$  la densidad de masa del material y  $g$  la aceleración de la gravedad. El desplazamiento  $\mathbf{u}$  se puede escribir usando coordenadas cilíndricas como:

$$\mathbf{u} = u_r(r, y) \mathbf{e}_r + u_z(r, y) \mathbf{e}_y,$$

siendo

$$\begin{aligned} u_r(r, y) &= \epsilon y r \\ u_y(r, y) &= -\frac{1}{2} \rho g \delta (y-3)^2. \end{aligned}$$

El modelo matemático en coordenadas cartesianas fue:

$$\begin{aligned} -Div(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{b}_0, \text{ en } C_h, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_e, \text{ sobre } \Gamma_i^L, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_i, \text{ sobre } \Gamma_i^L, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_b, \text{ sobre } \Gamma^-, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D, \text{ sobre } \Gamma^+. \end{aligned}$$

Por tanto, se puede escribir utilizando coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned} -\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{b}_0, \text{ en } C_h, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_e, \text{ sobre } \Gamma_e^L, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_i, \text{ sobre } \Gamma_i^L, \\ (\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} &= \mathbf{g}_b, \text{ sobre } \Gamma^-, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D, \text{ sobre } \Gamma^+, \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} C_h &= \{(r, y, \theta) : R_i < r < R_e, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < y < 3\}, \\ \Gamma_e^L &= \partial C_h \cap (r \equiv R_e), \\ \Gamma_i^L &= \partial C_h \cap (r \equiv R_i), \\ \Gamma^- &= \partial C_h \cap (y \equiv 0), \\ \Gamma^+ &= \partial C_h \cap (y \equiv 3). \end{aligned}$$

Los datos restantes para completar el modelo son:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0(r, y, \theta) &= -(2(\mu + \lambda)\epsilon - (\lambda + 2\mu)\rho g \delta) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{g}_e(r, y, \theta) &= (2(\lambda + \mu)\epsilon y - \lambda \rho g \delta(y - 3)) \mathbf{e}_r + \mu \epsilon R_e \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{g}_i(r, y, \theta) &= -(2(\lambda + \mu)\epsilon y - \lambda \rho g \delta(y - 3)) \mathbf{e}_r - \mu \epsilon R_i \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{g}_b(r, y, \theta) &= -\mu \epsilon \mathbf{e}_r - 3[m](\lambda + 2\mu)\rho g \delta \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{u}_D(x, y, z) &= 3\epsilon r \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

■

ii) Para este desplazamiento, el tensor de deformación es:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}) &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon y & \frac{1}{2}\epsilon x & 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon x & -\rho g \delta(y - 3) & \frac{1}{2}\epsilon z \\ 0 & \frac{1}{2}\epsilon z & \epsilon y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

cuya expresión en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{ry} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{ry} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{\theta y} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta y} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon y & \frac{1}{2}\epsilon r & 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon r & -\rho g \delta(y - 3) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El tensor de tensiones en coordenadas cilíndricas será:

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\sigma}) &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{ry} & 0 \\ \sigma_{ry} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} \\
 &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &= \lambda (2\epsilon y - \rho g \delta (y-3)) \mathbf{I} + 2\mu \begin{pmatrix} \epsilon y & \frac{1}{2}\epsilon r & 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon r & -\rho g \delta (y-3) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon y \end{pmatrix} \\
 &= -\rho g \delta \lambda (y-3) \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) \epsilon y & \mu \epsilon r & 0 \\ \mu \epsilon r & 2(\lambda \epsilon y - \mu \rho g \delta (y-3)) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda + \mu) \epsilon y \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

■

- iii) Considerar la misma aleación de acero que en el Ejercicio 115 y escribir el modelo 2D asociado, en términos del desplazamiento, en un plano vertical del cilindro aprovechando la simetría cilíndrica del problema 3D propuesto.

Las ecuaciones de equilibrio en términos de tensiones son:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{ry}}{\partial y} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + b_r &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{ry})}{\partial r} + b_y &= 0,
 \end{aligned}$$

Ambas deben verificarse en  $S_{ry}$ , la sección vertical del cilindro:

$$S_{ry} = \{(r, y) : R_i < r < R_e, 0 < y < 3\}.$$

Teniendo en cuenta que las tensiones se pueden escribir en términos de desplazamientos gracias a la ley de Hooke:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{u_r}{r}, \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
 \sigma_{ry} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r} \right),
 \end{aligned}$$

entonces las ecuaciones de equilibrio admiten las expresiones:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} r \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{r} \left( \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r} \right) \right) + b_r \frac{(1+\nu)}{E} = 0, \text{ en } S_{ry},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Er}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial r} \right) \right) + b_y = 0, \text{ en } S_{ry}. \end{aligned}$$

■

- iv) Resolver el problema de simetría axial 2D en COMSOL. Calcular el error máximo en la componente radial del desplazamiento a partir de la solución exacta propuesta.

El error máximo en la componente radial del desplazamiento fue:  $4.69e - 12$ . ■

- v) Comparar el valor de la carga total aplicada a la tapa superior  $y = 3$  con la obtenida de la simulación 2D.

La carga total calculada fue:

$$(2.2752E6\mathbf{e}_r + 9.695e7\mathbf{e}_y) N,$$

siendo el error:

$$(0.0066113\mathbf{e}_r + 0.038129e7\mathbf{e}_y) N.$$

■

- vi) Calcular el máximo de la tensión de Von Mises y de las tensiones principales utilizando la simulación 2D y compararlas con las calculadas previamente en la simulación 3D.

La tensión máxima de Von Mises calculada con el modelo 2D fue  $3.6713e12 Pa$ , muy similar a la obtenida con el modelo 3D:  $3.67e12 Pa$ . ■

## Boletín 7: Torsión y flexión de vigas

**Ejercicio 174** (**♣** *Solución al Ejercicio 125*) Indicar si el problema de torsión elástica sobre una barra cilíndrica de sección circular se puede considerar de deformaciones planas.

### Solución

No, pues el desplazamiento es de la forma:

$$\mathbf{u} = (-\alpha x_2 x_3, \alpha x_1 x_3, 0),$$

siendo su tensor de deformación:

$$\varepsilon(\mathbf{u})(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que las componentes 23 y 13 son ambas no nulas en general e involucran las otras dos variables independientes del sistema,  $x_1$  y  $x_2$ : la deformación es distinta en cada sección del cilindro y depende también del punto en la sección en que nos encontremos.

■

**Ejercicio 175** (**♣** *Solución al Ejercicio 128*) Se considera la viga sólida cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\},$$

siendo  $a > 0$  una constante dada y  $b = 2a$ . Sean  $\Gamma^+ = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 10\}$  y  $\Gamma^- = \{(x, y, z) \in \partial\Omega : x = 0\}$  las tapas superior e inferior del cilindro, respectivamente, y  $\Gamma_L$  su superficie lateral. El sólido está formado por un material elástico con coeficientes:

$$E = 7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, \nu = 0,3$$

i) Sabiendo que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)) \mathbf{I}, \quad (11.21)$$

obtener el valor de la tensión en función del tensor de deformación y calcular los coeficientes de Lamé del material indicando sus unidades.

ii) Considerar un problema de torsión pura sobre esta viga cilíndrica de sección elipsoidal. Calcular los semiejes de la elipse para que la función

$$\theta(y, z) = -\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) + 1,$$

se la función de Prandtl asociada.

iii) Calcular la función de alabeo asociada.

iv) Para  $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$  demostrar que el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left( \frac{3}{5}zy, -xz, yx \right) \quad (11.22)$$

es solución de un problema de torsión puro sobre la viga con fuerzas de volumen nulas. Calcular el momento total aplicado en la cara superior.

v) Para  $a = 1$ , demostrar que el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, -xz, yx) \quad (11.23)$$

es solución de un problema de torsión puro sobre la viga con fuerzas de volumen nulas. Calcular el momento total aplicado en la cara superior.

vi) Verificar la ecuación de Lamé Navier para el campo de desplazamientos definido en (7.25).

### Solución

i) De la relación dada se deduce que:

$$\begin{aligned} 3\frac{\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1+\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma}) - tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \Rightarrow \left(3\frac{\nu}{E} - \frac{1+\nu}{E}\right)tr(\boldsymbol{\sigma}) &= -tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \left(-\frac{1-2\nu}{E}\right)tr(\boldsymbol{\sigma}) &= -tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ tr(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{E}{1-2\nu}tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned}$$

Se deduce entonces de la relación (11.21) que:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) &= \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) + \frac{\nu}{E}\frac{E}{1-2\nu}tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) &= \frac{E}{1+\nu}\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Puesto que conocemos que la ley de Hooke en términos de los coeficientes de Lamé del material se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) + \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I},$$

podemos deducir:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ y } \mu = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}.$$

Al substituir en esta expresión los valores dados para el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0,3 \times 7.e10}{(1+0,3)(1-0,6)} = \frac{2,1e10}{0,52} \simeq 4.e10N/m^2 \\ \mu &= \frac{1}{2}\frac{7.e10}{1+0,3} \simeq 2,7e10N/m^2 \end{aligned}$$

■

ii) Sabemos que la función de Prandtl debe ser la solución del problema:

$$\begin{aligned}\Delta\theta(y, z) &= -2 \text{ sobre } \omega, \\ \theta(y, z) &= 0 \text{ sobre } \gamma,\end{aligned}$$

siendo  $\omega$  el dominio elipsoidal correspondiente a la sección transversal del cilindro y  $\gamma$  su frontera. Consideremos

$$\theta(y, z) = -\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{4a^2}\right) + 1,$$

que verifica la condición de contorno y cuyo laplaciano es:

$$\Delta\theta(y, z) = -\left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{4a^2}\right) = -\frac{2}{a^2}\left(\frac{5}{4}\right) = -2,$$

sólo si  $a^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . La elipse será entonces:

$$\frac{4y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1,$$

o lo que es lo mismo:

$$4y^2 + z^2 = 5.$$

La función de Prandtl será:

$$\theta(y, z) = -\left(\frac{4y^2}{5} + \frac{z^2}{5}\right) + 1.$$

■

iii) Asociada a la función  $\theta$  construimos

$$\begin{aligned}\chi &= \theta + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \\ &= -\left(\frac{4y^2}{5} + \frac{z^2}{5}\right) + 1 + \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \\ &= -\frac{3}{10}y^2 + \frac{3}{10}z^2 + 1.\end{aligned}$$

Puesto que, de las ecuaciones de Cauchy Riemann,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{3}{5}z; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{3}{5}y$$

obtenemos:

$$\varphi(y, z) = \frac{3}{5}zy + C,$$

siendo  $C$  una constante. ■

iv) Calculemos en primer lugar el tensor de deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{u})(x, y, z) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -z + \frac{3}{5}z & y + \frac{3}{5}y \\ -z + \frac{3}{5}z & 0 & 0 \\ y + \frac{3}{5}y & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -z & 4y \\ -z & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y, en consecuencia, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x, y, z) = \frac{2}{5}\mu \begin{pmatrix} 0 & -z & 4y \\ -z & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,08e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & 4y \\ -z & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 \end{pmatrix} Pa.$$

La ecuación de equilibrio asociada permite calcular las fuerzas de volumen aplicadas:

$$\mathbf{f} = -Div(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0},$$

que son efectivamente nulas. Para tratarse de un problema de torsión sobre un dominio de sección cilíndrica no circular debemos probar además que:

- Las componentes segunda y tercera del desplazamiento son nulas en su cara inferior:  $x = 0$ . Efectivamente:

$$\mathbf{u}(0, y, z) = \left( \frac{3}{5}zy, 0, 0 \right).$$

- La superficie lateral está libre de fuerzas. Esta superficie tiene de ecuación  $\frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{5}z^2 = 1$ . Sabemos que un vector normal a la superficie es el vector gradiente:

$$\mathbf{N} = \left( 0, \frac{8}{5}y, \frac{2}{5}z \right)^T,$$

para que sea unitario debemos tomar:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{N}|} \left( 0, \frac{8}{5}y, \frac{2}{5}z \right)^T.$$

El vector de esfuerzos en esta superficie será:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{|\mathbf{N}|} 1,08e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & 4y \\ -z & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5}y \\ \frac{2}{5}z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

- Se verifican las ecuaciones de compatibilidad, para lo que basta tener en cuenta que el tensor de tensiones se ha deducido del campo de desplazamientos, lo cual garantiza automáticamente las ecuaciones de compatibilidad.
- Sobre la cara superior las cargas aplicadas son equivalentes a un par en la dirección  $x$ . Sobre esta cara el vector normal es  $(1, 0, 0)^T$  y, por tanto, el vector de esfuerzos es:

$$\mathbf{g} = 1,08e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & 4y \\ -z & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,08e10 \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 4y \end{pmatrix} N/m^2.$$

Si calculamos la resultante de las fuerzas sobre esta cara encontramos:

$$\int_{\Gamma^+} 1,08e10 \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 4y \end{pmatrix} d\Gamma = \mathbf{0},$$

al integrar sobre un dominio simétrico respecto al origen funciones impares. El momento resultante será:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} 1,08e10 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & -z & 4y \end{vmatrix} d\Gamma &= 1,08e10 \int_{\Gamma^+} \begin{pmatrix} 4y^2 + z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\Gamma \\ &= 1,08e10 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 5r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{5}{2} r dr d\theta \\ &= \begin{pmatrix} 6,75\pi e10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Nm. \end{aligned}$$

■

v) Calculemos en primer lugar el tensor de deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(x, y, z) = \mu \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de equilibrio asociada permite calcular las fuerzas de volumen aplicadas:

$$\mathbf{f} = -\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0},$$

que son efectivamente nulas. Para tratarse de un problema de torsión debemos probar además que:

- La viga está encastrada en su cara inferior:  $x = 0$ . Efectivamente:

$$\mathbf{u}(0, y, z) = \mathbf{0}.$$

- Veamos cuál es la carga sobre la superficie lateral. Esta superficie tiene de ecuación  $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ . Sabemos que un vector normal a la superficie es el vector gradiente:

$$\left(0, 2y, \frac{z}{2}\right)^T.$$

Para que sea unitario debemos tomar:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+3y^2}} \left(0, 2y, \frac{z}{2}\right)^T.$$

El vector de esfuerzos en esta superficie será:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{1}{\sqrt{1+3y^2}} 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-3}{2\sqrt{1+3y^2}} 2,7e10 \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{1+3y^2}} 4,05e10 \begin{pmatrix} yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N/m^2. \end{aligned}$$

Observamos que localmente la superficie lateral no está libre de esfuerzos, si bien la carga total sobre la superficie es nula.

- Ya que el tensor de tensiones se deduce del campo de desplazamientos no es necesario comprobar las ecuaciones de compatibilidad.
- Sobre la cara superior las cargas aplicadas son equivalentes a un par en la dirección  $x$ . En efecto, sobre esta cara el vector normal es  $(1, 0, 0)^T$  y, por tanto, el vector de esfuerzos es:

$$\mathbf{g} = 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} N/m^2.$$

Si calculamos la resultante de las fuerzas sobre esta cara encontramos:

$$\int_{\Gamma^+} 2,7e10 \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} d\Gamma = \mathbf{0},$$

al integrar sobre un dominio simétrico respecto al origen funciones impares. El momento resultante será:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} 2,7e10 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y & z \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} d\Gamma &= 2,7e10 \int_{\Gamma^+} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\Gamma \\ &= 2,7e10 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{pmatrix} r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 2r dr d\theta \\ &= \begin{pmatrix} 6,75e10\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Nm. \end{aligned}$$

■

vi) La ecuación de Lamé Navier es:

$$(\lambda + \mu) \nabla \text{Div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Pero:

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{u} &= \text{Div} (0, -xz, yx) = 0 \\ \Delta \mathbf{u} &= \Delta (0, -xz, yx) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

y, por tanto, la ecuación de Lamé se verifica para fuerzas de volumen nulas.

■

## Boletín 8: Problemas unidimensionales en vigas

**Ejercicio 176** (♣ *Solución al Ejercicio 140*) ¿Identificas la expresión

$$\int_0^L EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} v(x) dx - EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \frac{d}{dx} v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{d}{dx} \left( EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \right) v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} = \int_0^L q_y(x) v(x) dx?$$

¿Sabrías indicar qué expresa cada término y cada coeficiente que aparece en ella?

### Solución

Se trata de la formulación variacional del problema unidimensional de vigas en flexión de acuerdo con la teoría de Bernoulli Euler correspondiente a la relación entre el momento flector en la dirección  $z$  y el esfuerzo cortante en la dirección  $y$  y cuya formulación diferencial es:

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} - q_y(x) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \right) = q_y(x).$$

Se considera que la sección de la viga se encuentra en el plano  $yz$ . Los términos que aparecen en la ecuación dada son:

- $E$ : Módulo de Young.
- $I_z$ : es el momento de inercia asociado a la flexión de la sección transversal:

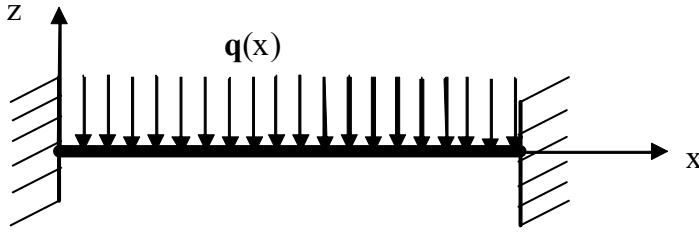
$$I_z = \int_{\omega} y^2 dA.$$

- $u_{yo}(x)$ : componente  $y$ -ésima del desplazamiento que se supone constante en toda la sección y depende únicamente de la variable  $x$ .
- $u_{zo}(x)$ : componente  $z$ -ésima del desplazamiento que se supone constante en toda la sección y depende únicamente de la variable  $x$ .
- $v(x)$ : función test.
- $q_y(x)$ : componente  $y$  de la fuerza por unidad de longitud.
- $EI_z \frac{d^2 u_{yo}(x)}{dx^2} \frac{d}{dx} v(x) \Big|_{x=0}^{x=L}$  y  $\frac{d}{dx} \left( EI_z \frac{d^2 u_{zo}(x)}{dx^2} \right) v(x) \Big|_{x=0}^{x=L}$  permiten incorporar distintas condiciones de contorno sobre los extremos de la viga: borde fijo, libre de fuerzas o extremo articulado.

■

**Ejercicio 177** (♣ *Solución al Ejercicio 141*) Consideremos una viga de sección cuadrada de lado  $2h$  y de longitud  $L$  con eje longitudinal el eje  $x$ . Se supone empotrada en sus extremos  $x = 0$  y  $x = L$  y sometida a una carga uniforme de resultante en cada punto  $x$ ,  $\mathbf{q}(x) = -q_0 \mathbf{e}_3 N/m$ .

- i) Calcular el desplazamiento vertical máximo y la tensión axial máxima.
- ii) Calcular los momentos flectores para cada  $x$ .
- iii) Resolver el modelo 1D de Bernoulli en COMSOL considerando  $h = 0,09m$ ,  $L = 2m$ , y una densidad de carga sobre su cara superior de valor  $\mathbf{g}_0 = -g_0\mathbf{e}_3$ , siendo  $g_0 = -5000N/m^2$ . Considerar que el módulo de Young es  $E = 7.e10N/m^2$ , y el coeficiente de Poisson es  $\nu = 0,3$ . El material de la viga tiene una densidad  $\rho = 2700kg/m^3$ , por lo que la viga está sometida a la acción de la gravedad en la dirección  $z$  negativa.
- iv) Resolver el modelo 1D de Timoshenko asociado.
- v) Programa en MATLAB la representación de las soluciones calculadas en los apartados i) y iv) para los datos considerados en el apartado iii).
- vi) Comparar los resultados de la simulación en COMSOL de los apartados iii) y iv) con el modelo 3D.



### Solución

- i) El tipo de cargas aplicadas permite una buena aproximación con el modelo de Bernoulli Euler. Puesto que en  $x = 0$  y en  $x = L$  se impone un empotramiento debe verificarse

$$\begin{aligned} u_{y_0}(0) &= u_{z_0}(0) = 0; \quad u_{y_0}(L) = u_{z_0}(L) = 0, \\ \frac{du_{y_0}}{dx}(0) &= \frac{du_{z_0}}{dx}(0) = 0; \quad \frac{du_{y_0}}{dx}(L) = \frac{du_{z_0}}{dx}(L) = 0. \end{aligned}$$

Además, debe verificarse el sistema:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_z \frac{d^2 u_{y_0}(x)}{dx^2} \right) = 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 u_{z_0}(x)}{dx^2} \right) = -q_0. \end{cases}$$

En particular  $u_{y_0}(x) = 0$  y puesto que

$$I_y = \int_{\omega} z^2 dx = \int_{-h}^h \int_{-h}^h z^2 dy dz = \frac{4}{3} h^4 m^4$$

se deduce:

$$\frac{d^4 u_{z_0}(x)}{dx^4} = -\frac{q_0}{EI_y} = -\frac{3q_0}{4Eh^4} m^{-3}.$$

En consecuencia:

$$u_{zo}(x) = -\frac{3q_0}{96Eh^4}x^4 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Puesto que  $u_{z_0}(0) = 0$ ,  $C_4 = 0$ . Además,  $\frac{du_{z_0}(0)}{dx} = 0$  lo que implica  $C_3 = 0$ . De la condición  $u_{z_0}(L) = 0$  se deduce:

$$\begin{aligned} u_{zo}(L) &= -\frac{3q_0}{96Eh^4}L^4 + C_1\frac{L^3}{6} + C_2\frac{L^2}{2} = 0, \\ \Rightarrow \frac{3q_0}{48Eh^4}L^2 - C_1\frac{L}{3} &= C_2 \end{aligned}$$

Análogamente debe verificarse:

$$\begin{aligned} \frac{du_{z_0}(L)}{dx} &= -\frac{3q_0}{24Eh^4}L^3 + C_1\frac{L^2}{2} + C_2L = 0 \\ \Rightarrow \frac{3q_0}{24Eh^4}L^2 - C_1\frac{L}{2} &= C_2. \end{aligned}$$

Se deduce fácilmente:

$$C_1 = \frac{3q_0L}{8Eh^4}, \quad C_2 = -\frac{3q_0L^2}{48Eh^4},$$

y,

$$\begin{aligned} u_{zo}(x) &= -\frac{3q_0x^2}{96Eh^4}(x^2 - 2Lx + L^2)m \\ &= -\frac{3q_0x^2}{96Eh^4}(x - L)^2m \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \left( -z\frac{\partial u_{z_0}(x)}{\partial x}, 0, u_{z_0}(x) \right) \\ &= \left( -\frac{3q_0zx}{96Eh^4}(4x^2 - 6Lx + 2L^2), 0, -\frac{3q_0x^2}{96Eh^4}(x - L)^2 \right)m. \end{aligned}$$

Así la deflexión vertical es siempre proporcional a la carga aplicada e inversamente proporcional a la rigidez a flexión:  $EI_y$ . Puede demostrarse que la máxima deflexión se obtiene en  $L/2$ :

$$\begin{aligned} u_{zo}\left(\frac{L}{2}\right) &= -\frac{3q_0L^2}{384Eh^4}\left(\frac{L^2}{4} - L^2 + L^2\right) \\ &= -\frac{3q_0L^4}{1536Eh^4}m. \end{aligned}$$

La tensión axial es:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, z) &= -E\left(y\frac{d^2u_{yo}(x)}{dx^2} + z\frac{d^2u_{zo}(x)}{dx^2}\right) \\ &= -Ez\frac{d^2u_{zo}(x)}{dx^2} = \frac{3q_0z}{48h^4}(6x^2 - 6Lx + L^2)N/m^2. \end{aligned}$$

El valor máximo de la tensión se obtiene para  $x = L/2$ , y  $z = \pm h$ :

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx})_{\text{máx}} &= \sigma_{xx} \left( \frac{L}{2}, \pm h \right) \\&= \pm \frac{3q_0}{48h^3} \left( \frac{3}{2}L^2 - 3L^2 + L^2 \right) \\&= \mp \frac{3q_0}{96h^3} L^2 N/m^2\end{aligned}$$

■

ii) Para calcular los momentos flectores debe tenerse en cuenta que:

$$\begin{aligned}M_y &= \int_{\omega} z \sigma_{xx} dA = \int_{\omega} z \left( -E \left( y \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} + z \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \right) \right) dA = -EI_2 \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \\&= EI_2 \frac{3q_0}{96Eh^4} \frac{d}{dx} \left( x^2 2(x-L) + 2x(x-L)^2 \right) \\&= I_2 \frac{3q_0}{48h^4} \left( 4x(x-L) + x^2 + (x-L)^2 \right) Nm; \\M_z &= - \int_{\omega} y \sigma_{xx} dA = - \int_{\omega} y \left( -E \left( y \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} + z \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \right) \right) dA \\&= EI_z \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} = 0 Nm.\end{aligned}$$

iii) Resolver el modelo 1D de Bernoulli en COMSOL considerando  $h = 0,09m$ ,  $L = 2m$ , y una densidad de carga sobre su cara superior de valor  $g = 5000N/m^2$ . Considerar que el módulo de Young es  $E = 7.e10N/m^2$ , y el coeficiente de Poisson es  $\nu = 0,3$ .

### Solución

Se deja al lector la realización de este apartado.

iv) Calcular la solución analítica del modelo 1D de Timoshenko asociado. Resolver el modelo con COMSOL.

El modelo de Timoshenko a resolver sería:

$$EI_z \frac{d^2 \theta_z(x)}{dx^2} + GAk \left( \frac{du_y(x)}{dx} - \theta_z(x) \right) = 0, \quad (11.24)$$

$$EI_y \frac{d^2 \theta_y(x)}{dx^2} - GAk \left( \frac{du_z(x)}{dx} + \theta_y(x) \right) = 0, \quad (11.25)$$

$$GAk \left( \frac{d^2 u_y(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_z(x)}{dx} \right) + q_y(x) = 0, \quad (11.26)$$

$$GAk \left( \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} + \frac{d\theta_y(x)}{dx} \right) + q_z(x) = 0, \quad (11.27)$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}u_y(0) &= 0, u_z(0) = 0, u_y(L) = 0, u_z(L) = 0, \\ \theta_y(0) &= 0, \theta_z(0) = 0, \theta_y(L) = 0, \theta_z(L) = 0.\end{aligned}$$

Así la solución para el sistema definido por (11.24) y (11.26) con incógnitas  $u_y, \theta_z$  es homogéneo con condiciones de contorno también homogéneas, por lo que la solución es  $u_y(x) = 0, \theta_z(x) = 0$ . Por otra parte, integrando la ecuación (11.27) y teniendo en cuenta que  $q_z(x) = -q_0$ , y las condiciones de contorno en  $x = 0$ , se deduce:

$$\theta_y(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{GAk} q_0 - \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} \right) dx = \frac{1}{GAk} q_0 x - \frac{du_z(x)}{dx} + \frac{du_z(0)}{dx}. \quad (11.28)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (11.25) se deduce la ecuación de tercer orden en el desplazamiento:

$$\begin{aligned} 0 &= EI_y \frac{d^2 \theta_y(x)}{dx^2} - GAk \left( \frac{du_z(x)}{dx} + \theta_y(x) \right) \\ &= -EI_y \frac{d^3 u_z(x)}{dx^3} - GAk \left( \frac{du_z(x)}{dx} + \frac{1}{GAk} q_0 x - \frac{du_z(x)}{dx} + \frac{du_z(0)}{dx} \right) \\ &= -EI_y \frac{d^3 u_z(x)}{dx^3} - q_0 x - GAk \frac{du_z(0)}{dx} \\ &= -EI_y \frac{d^3 u_z(x)}{dx^3} - q_0 x + C_1, \end{aligned}$$

en la que para simplificar la escritura denotamos por  $C_1 = -GAk \frac{du_z(0)}{dx}$ . Esta ecuación puede integrarse directamente gracias a las condiciones de contorno y a que  $q_0$  es constante:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^x EI_y \frac{d^3 u_z(x)}{dx^3} dx - q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x \\ &= -EI_y \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} - q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + EI_y \frac{d^2 u_z(0)}{dx^2} \\ &= -EI_y \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} - q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \end{aligned}$$

siendo  $C_2 = EI_y \frac{d^2 u_z(0)}{dx^2}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x \left( -EI_y \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} - q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) dx \\ &= -EI_y \frac{du_z(x)}{dx} - q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + EI_y \frac{du_z(0)}{dx} \\ &= -EI_y \frac{du_z(x)}{dx} - q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \end{aligned}$$

siendo  $C_3 = EI_y \frac{du_z(0)}{dx}$ . En consecuencia  $C_1$  y  $C_3$  están relacionadas:

$$C_1 = -GAk C_3 / EI_y. \quad (11.29)$$

Finalmente, con una nueva integración:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x \left( -EI_y \frac{du_z(x)}{dx} - q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \right) dx \\ &= -EI_y u_z(x) - q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x, \end{aligned}$$

ya que  $u_z(0) = 0$ . Por tanto:

$$u_z(x) = \frac{1}{EI_y} \left( -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x \right). \quad (11.30)$$

A continuación, fijaremos las constantes gracias a las condiciones de contorno aún no usadas. Para que  $u_z(L) = 0$  podemos escribir:

$$0 = u_z(L) = \frac{1}{EI_y} \left( -q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} + C_3 L \right),$$

lo que implica:

$$-q_0 \frac{L^3}{24} + C_1 \frac{L^2}{6} + C_2 \frac{L}{2} + C_3 = 0,$$

de donde se deduce:

$$C_3 = q_0 \frac{L^3}{24} - C_1 \frac{L^2}{6} - C_2 \frac{L}{2}.$$

Teniendo en cuenta además (11.29) obtenemos:  $C_1 = -GAkC_3/EI_y$

$$C_3 = q_0 \frac{L^3}{24} + C_3 \frac{GAkL^2}{6EI_y} - C_2 \frac{L}{2},$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} C_3 \left( 1 - \frac{GAkL^2}{6EI_y} \right) &= q_0 \frac{L^3}{24} - C_2 \frac{L}{2}, \\ C_3 &= \frac{6EI_y}{6EI_y - GAkL^2} \left( q_0 \frac{L^3}{24} - C_2 \frac{L}{2} \right). \end{aligned} \quad (11.31)$$

Finalmente, el valor de  $C_2$  puede deducirse a partir del de  $\theta_y(L) = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_y(L) = \frac{1}{GAk} q_0 L - \frac{du_z(L)}{dx} + \frac{du_z(0)}{dx} \\ &= \frac{L}{GAk} q_0 - \frac{1}{EI_y} \left( -q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L + C_3 \right) + \frac{1}{EI_y} C_3 \\ &= \frac{L}{GAk} q_0 + q_0 \frac{L^3}{6EI_y} + \frac{GAkL^2}{2E^2 I_y^2} C_3 - \frac{L}{EI_y} C_2 \\ &= \frac{L}{GAk} q_0 + q_0 \frac{L^3}{6EI_y} + \frac{GAkL^2}{2E^2 I_y^2} \frac{6EI_y}{(6EI_y - GAkL^2)} \left( q_0 \frac{L^3}{24} - C_2 \frac{L}{2} \right) - \frac{L}{EI_y} C_2 \\ &= \frac{L}{GAk} q_0 + q_0 \frac{L^3}{6EI_y} + \frac{3GAkL^2}{EI_y (6EI_y - GAkL^2)} \left( q_0 \frac{L^3}{24} - C_2 \frac{L}{2} \right) - \frac{L}{EI_y} C_2 \\ &= q_0 \left( \frac{L}{GAk} + \frac{L^3}{6EI_y} \left( 1 + \frac{3GAkL^2}{4(6EI_y - GAkL^2)} \right) \right) - C_2 \left( \frac{L}{EI_y} + \frac{3GAkL^3}{2EI_y (6EI_y - GAkL^2)} \right) \\ &= q_0 \left( \frac{L}{GAk} + \frac{L^3}{24EI_y} \frac{(24EI_y - GAkL^2)}{(6EI_y - GAkL^2)} \right) - C_2 \left( \frac{2L(6EI_y - GAkL^2) + 3GAkL^3}{2EI_y (6EI_y - GAkL^2)} \right) \\ &= q_0 \left( \frac{L}{GAk} + \frac{L^3}{24EI_y} \frac{24EI_y - GAkL^2}{(6EI_y - GAkL^2)} \right) - C_2 \left( \frac{(12EI_y L + GAkL^3)}{2EI_y (6EI_y - GAkL^2)} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} C_2 &= q_0 \left( \frac{L}{GAk} + \frac{L^3}{24EI_y} \frac{24EI_y - GAkL^2}{(6EI_y - GAkL^2)} \right) \frac{2EI_y (6EI_y - GAkL^2)}{(12EI_yL + GAkL^3)} \\ &= q_0 \left( \frac{2EI_y (6EI_y - GAkL^2)}{(12EI_y + GAkL^2)GAk} + \frac{24EI_yL^2 - GAkL^4}{12(12EI_y + GAkL^2)} \right). \end{aligned}$$

A partir de ella se pueden calcular las restantes constantes gracias a las relaciones (11.29) y (11.31). Construidas las constantes, la componente  $z$  del desplazamiento se obtiene de (11.30). La correspondiente rotación  $\theta_y(x)$  se construye usando (11.28) y que:

$$\frac{du_z(0)}{dx} = -\frac{C_1}{GAk}.$$

Obsérvese que a partir del valor de las constantes es muy fácil calcular las derivadas de la componente  $z$  del desplazamiento en  $x = 0$ . ■

- v) Programa en MATLAB la representación de las soluciones calculadas en los apartados i) y iv) para los datos considerados en el apartado iii).

Los comandos necesarios para la representación son:

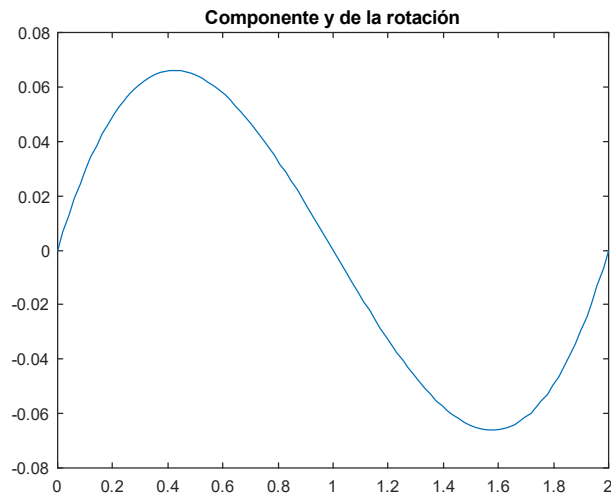
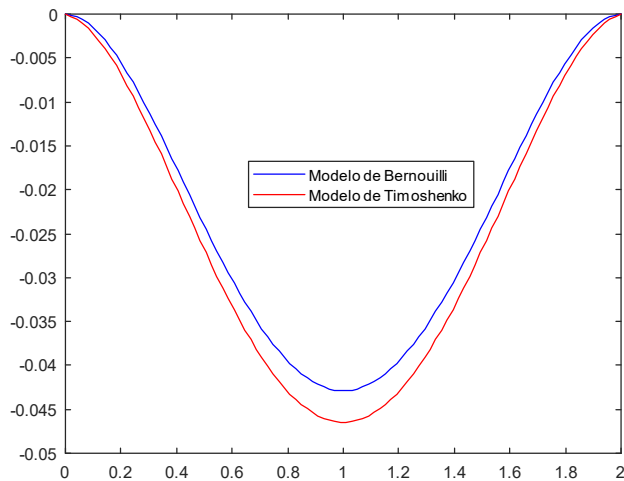
```
%Datos geométricos
L=2;h=0.09;A=(2*h)^2;Iy=4*h^4/3;

%Datos del material
k=5/6; E=1.e7;q0=5000*2*h; nu=0.3;G=E/2/(1+nu);

%Solución del modelo de Bernoulli
x=linspace(0,L,100);
uzb=((-3*q0.*x.^2)/(96*E*h^4)).*(x-L).^2;
figure(1)
title(['Componente z del desplazamiento'])
plot(x,uzb,'b')
hold on

%Solución del modelo de Timoshenko
C21=6*E*Iy-G*A*k*L^2; C22=12*E*Iy+G*A*k*L^2;
C23=24*E*Iy*L^2-G*A*k*L^4;
C2=(2*C21*E*Iy/(C22*G*A*k)+C23/(12*C22))*q0;
C3=6*E*Iy/C21*(q0*L^3/24-C2*L/2);
C1=-G*A*k*C3/(E*Iy);
uzt=1/(E*Iy)*(-q0/24*x.^4+C1*x.^3/6+C2*x.^2/2+C3*x);
plot(x,uzt,'r')
legend('Modelo de Bernoulli', 'Modelo de Timoshenko')
hold off
```

```
figure(2)
titay=q0/(G*A*k)*x-1/(E*Iy)*(-q0/6*x.^3+C1*x.^2/2+C2*x+C3)+C3/(E*Iy);
plot(x,titay)
title('Componente y de la rotación')
```



Obsérvese que para analizar el efecto de los parámetros geométricos o del material basta con modificar el valor correspondiente en la primera o segunda línea de comandos, respectivamente. ■

- vi) Comparar los resultados de la simulación en COMSOL de los apartados iii) y iv) con el modelo 3D.

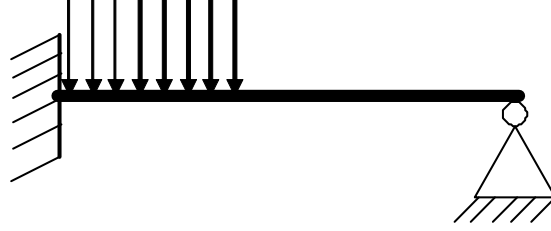
Se deja el ejercicio al lector. ■

**Ejercicio 178** (♣ *Solución al Ejercicio 142*) Considerar una viga de sección rectangular y de longitud  $L$  con eje longitudinal el eje  $x$ . Se supone empotrada

en su extremo  $x = 0$ , y simplemente apoyada en  $x = L$ . Sobre su frontera superior se aplica una carga de resultante:

$$\mathbf{q}(x) = \begin{cases} -q_0 \mathbf{e}_3, & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

Calcular el desplazamiento vertical.



### Solución

El tipo de cargas aplicadas permite una buena aproximación con el modelo de Bernoulli Euler. Puesto que en  $x = 0$  se impone un empotramiento debe verificarse

$$u_{y_0}(0) = u_{z_0}(0) = 0; \quad \frac{du_{y_0}}{dx}(0) = \frac{du_{z_0}}{dx}(0) = 0.$$

En  $x = L$  la condición de apoyo simple impone las siguientes relaciones:

$$u_{y_0}(L) = u_{z_0}(L) = 0; \quad \frac{d^2 u_{y_0}}{dx^2}(L) = \frac{d^2 u_{z_0}}{dx^2}(L) = 0.$$

Dado que las fuerzas no tienen componente en la dirección  $y$  se deduce que:

$$u_{y_0}(x) = 0.$$

Además:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 u_{z_0}(x)}{dx^2} \right) = \begin{cases} -q_0, & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ 0, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

lo que implica:

$$u_{z_0}(x) = \frac{1}{EI_y} \begin{cases} -q_0 \frac{x^4}{24} + C_{11} \frac{x^3}{6} + C_{12} \frac{x^2}{2} + C_{13}x + C_{14}, & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ C_{21} \frac{x^3}{6} + C_{22} \frac{x^2}{2} + C_{23}x + C_{24}, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

La determinación de las ocho constantes se lleva a cabo utilizando las condiciones de contorno y la continuidad de  $u_{z_0}$  y sus derivadas hasta el orden 3 en  $x = l$ :

$$\begin{array}{ll} u_{z_0}(0) = 0 & \Rightarrow C_{14} = 0 \\ \frac{\partial u_{z_0}}{\partial x}(0) = 0 & \Rightarrow C_{13} = 0 \\ u_{z_0}(L) = 0 & \Rightarrow C_{21} \frac{L^3}{6} + C_{22} \frac{L^2}{2} + C_{23}L + C_{24} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_{z_0}}{\partial x^2}(L) = 0 & \Rightarrow C_{21}L + C_{22} = 0 \\ u_{z_0}(l^-) = u_{z_0}(l^+) & \Rightarrow -q_0 \frac{l^4}{24} + C_{11} \frac{l^3}{6} + C_{12} \frac{l^2}{2} = C_{21} \frac{l^3}{6} + C_{22} \frac{l^2}{2} + C_{23}l + C_{24} \\ \frac{du_{z_0}}{dx}(l^-) = \frac{du_{z_0}}{dx}(l^+) & \Rightarrow -q_0 \frac{l^3}{6} + C_{11} \frac{l^2}{2} + C_{12}l = C_{21} \frac{l^2}{2} + C_{22}l + C_{23} \\ \frac{d^2 u_{z_0}}{dx^2}(l^-) = \frac{d^2 u_{z_0}}{dx^2}(l^+) & \Rightarrow -q_0 \frac{l^2}{2} + C_{11}l + C_{12} = C_{21}l + C_{22} \\ \frac{d^3 u_{z_0}}{dx^3}(l^-) = \frac{d^3 u_{z_0}}{dx^3}(l^+) & \Rightarrow -q_0l + C_{11} = C_{21} \end{array}$$

lo que implica:

$$u_{z_0}(x) = -q_0 \frac{1}{24EI_y} \begin{cases} x^4 - 4x^3l + \frac{4x^3l^2}{L} + 4Lxl^2 + \frac{xl^4}{L} - xl^3, & \text{si } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{2x^3l^2}{L} - 6x^2l^2 + 4Lxl^2 - \frac{xl^4}{L} - l^4, & \text{si } x > l. \end{cases}$$

■

**Ejercicio 179** (♣ *Solución al Ejercicio 143*) Considerar la viga sólida de aluminio cuyas características corresponden a las dadas en el Problema 65, y cuya configuración de referencia es:

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 0,25\}.$$

Suponer que no hay fuerzas de volumen aplicadas y que la fuerza de superficie sobre su superficie lateral es nula. Considerar además una carga total  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{e}_2$  sobre la cara  $x = 10$ , y suponer que la resultante de los momentos es nula sobre esta cara.

- i) Calcular el momento principal de inercia de su sección transversal con respecto al eje  $z$ . ¿Cuál sería el valor con respecto al eje  $y$ ?
- ii) Escribir el modelo matemático 3D asociado suponiendo que en  $x = 0$  el desplazamiento es nulo sobre las direcciones de los ejes de la sección.
- iii) Escribir la componente normal del vector de esfuerzos asociado al problema 3D anterior en cada sección transversal.
- iv) Escribir el modelo de Bernoulli asociado al problema 3D anterior, ecuaciones de equilibrio y condiciones de contorno, planteado sobre la generatriz del cilindro.
- v) Indicar cuál es la tensión normal calculada con el modelo de Bernoulli en cada punto de la generatriz.

### Solución

- i) El momento principal de inercia es:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\omega} y^2 dydz = \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2(\theta) r d\theta dr \\ &= \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{1/2} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \frac{1}{2^4} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= \frac{1}{4^3} \pi = 0,0491 m^4. \end{aligned}$$

El valor de  $I_2$  sería el mismo al ser simétrico el papel de  $y$  y  $z$  en el círculo.

■

- ii) Se trata de un modelo de flexión. El modelo 3D asociado es:

$$\begin{cases} -\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_L, \\ \mathbf{u}(0, y, 0) = \mathbf{0}; \mathbf{u}(0, 0, z) = \mathbf{0}, \\ \int_{\omega_{10}} \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_2; \int_{\omega_{10}} \vec{\sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \end{cases}$$

siendo  $\Gamma_L$  la frontera lateral del cilindro:

$$\Gamma_L = \{(x, y, z) : 0 < x < 10, y^2 + z^2 = 0,25\},$$

y  $\omega_{10}$  la tapa correspondiente a  $x = 10$ . ■

- iii) El problema anterior es de flexión puro, por lo que la tensión normal en cada sección transversal es:

$$\sigma_{11} = -\frac{2(10-x)y}{I_3} = -40,744(10-x)yN/m^2.$$

■

- iv)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_3 \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \right) = 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_2 \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (11.32)$$

siendo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} &u_2(0) = 0, u_3(0) = 0, \\ &\frac{du_2}{dx}(0) = 0, \frac{du_3}{dx}(0) = 0, \\ &-\frac{d}{dx} \left( EI_3 \frac{d^2 u_2}{dx^2}(10) \right) = 2, \\ &\frac{d}{dx} \left( EI_2 \frac{d^2 u_3}{dx^2}(10) \right) = 0, \\ &\frac{d^2 u_3}{dx^2}(10) = 0, \frac{d^2 u_2}{dx^2}(10) = 0. \end{aligned}$$

■

- v) Integrando las ecuaciones de equilibrio en el modelo 1D de Bernoulli se obtiene:

$$\begin{aligned} EI_3 \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} &= A_2 x + B_2, \\ EI_2 \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} &= A_3 x + B_3. \end{aligned}$$

Con lo cual, teniendo en cuenta que  $I_2 = I_3$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -E \left( y \frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + z \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right) \\ &\quad \frac{1}{I_3} (y(A_2 x + B_2) + z(A_3 x + B_3)). \end{aligned}$$

Puesto que sobre la cara  $x = 10$ , la resultante de las fuerzas debe ser  $\mathbf{Q} = 2\mathbf{e}_2$ , debe verificarse:

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dx} \left( EI_3 \frac{d^2 u_2}{dx^2}(10) \right) = 2, \\ &\frac{d}{dx} \left( EI_2 \frac{d^2 u_3}{dx^2}(10) \right) = 0, \\ &\frac{d^2 u_3}{dx^2}(10) = 0, \frac{d^2 u_2}{dx^2}(10) = 0. \end{aligned}$$

Lo que conlleva:

|                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|
| $A_2 = -2,$<br>$A_3 = 0,$<br>$B_3 = 0, \frac{1}{EI_3} (10A_2 + B_2) = 0.$ |
| $\Rightarrow B_2 = 20.$                                                   |

En consecuencia:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{I_3} (y (-2x + 20)) = -\frac{2(10 - x)y}{I_3} = -40,744(10 - x)yN/m^2,$$

resultado que coincide con el dado por el modelo de flexión. ■

## Boletín 10: Vibraciones

**Ejercicio 180** Considerar una viga orientada en la dirección del eje  $z$  de longitud  $30\text{mm}$ , y sección en el plano  $XY$   $5\text{mm} \times 0,5\text{mm}$ . Considérese que la viga es de aluminio con módulo de Young  $E = 7 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,35$  y densidad  $\rho = 2700 \text{kg/m}^3$ . Suponer que la viga está encastrada en  $z = 0$  y que soporta aceleración derivada de la gravedad. Suponer además que en el instante inicial la viga está flexionada de acuerdo con la relación 10.1, con  $\mathbf{P} = -5\mathbf{e}_2 \text{N}$ .

- i) Calcular con MATLAB el desplazamiento  $u_2$  a lo largo de la generatriz de la viga. Calcular la deflexión máxima obtenida en el extremo derecho de la viga. Calcular  $\sigma_{33}$  a lo largo de la generatriz.
- ii) Resolver con COMSOL el modelo estacionario correspondiente a los datos indicados. Representar gráficamente el error
- iii) Calcular las propiedades geométricas necesarias para imponer la condición inicial.
- ii) Calcular los tres primeros modos propios. Representar gráficamente la vibración de la viga asociada a cada modo de vibración y compara la amplitud del desplazamiento vertical en distintos pasos de tiempo.
- iii) Representar gráficamente las tensiones principales.
- iv) Visualizar la animación correspondiente a la vibración de la viga con los datos relativos a la tensión máxima de Von Mises.

### Solución

- i) Consideramos de acuerdo con la ecuación 10.1 el siguiente script de MATLAB:
 

```

L=30e-3; %m
a=2.5e-3; %m;
b=2.5e-4; %m
I1=4*a*b^3/3; % m^4, Momento de inercia I1
z=linspace(0,L,100); % discretización del eje de la viga;
P=5; %Carga total -Pe_2
rho=2700; %Densidad, kg/m^3
E=7.e10; %Módulo de Young, Pa
u2=-P*(L-z).^3/(6*E*I1)-P*L^2*z/(2*E*I1)+P*L^3/(6*E*I1); %Deflexión
vertical
plot(z,u2)
title('Deflexión de la viga (u_2)')
xlabel('Generatriz de la viga')
gtext(['P= ', num2str(P), '\bf e}_2', 'N'])

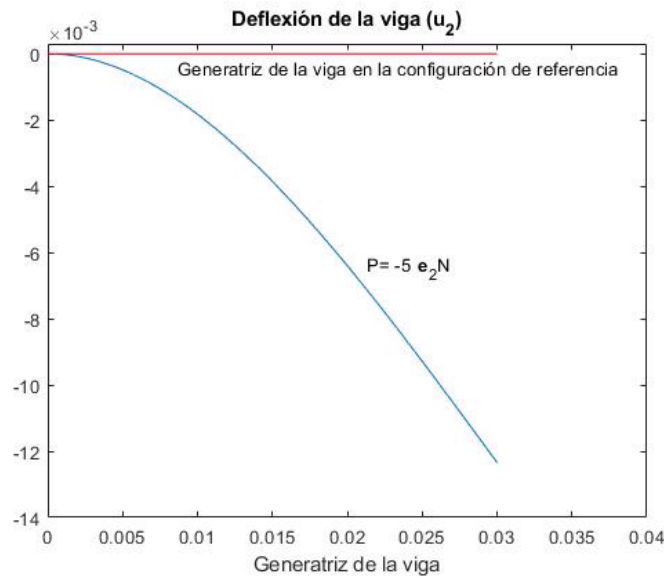
```

```

hold on
plot(z,0*z,'r')
axis([0,0.04,-0.014,3.e-4])
gtext('Generatriz de la viga en la configuración de referencia')
Def_max=sign(u2(length(u2)))*max(abs(u2))*1.e3; %máxima deflexión, mm
disp(['Deflexión máxima vertical ',num2str(Def_max),'mm'])

```

El resultado de su ejecución es la figura siguiente:



La deflexión máxima obtenida es de  $-12,3429mm$ . La componente  $\sigma_{33}$  viene dada por la fórmula:

$$\sigma_{33} = \frac{P(L-z)y}{I_1},$$

por lo que es nula a lo largo de la generatriz ya que  $y = 0$ .

Las primeras frecuencias de vibración pueden calcularse utilizando MATLAB con un cálculo sencillo:

```

a=0.0025; b=0.00025; I1=a*b^3/12; A=4*a*b; L=0.03;
E=7.e10; rho= 2700;
k_1L=1.8751; omega_1= k1L^2*sqrt(E*I1/(rho*A*L^4));
fre1=omega_1/(2*pi) % Frecuencia
fre1= 114.2386
k_2L=4.6940; omega_2= k2L^2*sqrt(E*I1/(rho*A*L^4));
fre2=omega_2/(2*pi) % Frecuencia
fre2= 715.8966

```

# Índice alfabético

- Ángulo de cizallamiento, 42
- Ángulo de cortadura, 42
- Ángulo unidad de torsión, 130
- Cambio de coordenadas
  - Coordenadas cilíndricas, 116
  - Coordenadas esféricas, 110
  - Tensores, 27
- Centro de cizallamiento, 148
- Cizallamiento simple, 35
- Coefficiente de Poisson, 57
- Combinación de esfuerzos, 36
- Condiciones de Contorno, 13
- Condiciones de contorno
  - Contacto, 23
  - Dirichlet, 13
  - Neumann, 13
- Configuración de referencia, 22
- Coordenadas Eulerianas, 9
- Coordenadas Lagrangianas, 10
- Densidad de fuerzas
  - Superficie, 14
  - Volumen, 11
- Desplazamiento rígido, 45
- Dilatación cúbica, 43
- Direcciones principales, 28
- Ecuación de Beltrami-Michell, 72
- Ecuación de Lamé-Navier, 70
- Ecuaciones de compatibilidad, 44, 50
- Cuasi-estática, 22
- Estática, 22
- Estacionaria, 22
- Elastodinámica lineal, 15
- Elongación unitaria, 44
- Energía de deformación, 66
- Esfuerzo de cizallamiento, 63, 108, 247
- Esfuerzo normal, 33
- Esfuerzo normal medio, 31
- Esfuerzo puramente normal, 64
- Esfuerzo uniaxial, 34, 58, 61
- Cizallamiento, 25
- Componentes normales, 25
- Normales, 24
- Esfuerzos cortantes, 43
- Esfuerzos de cizallamiento, 59
- Esfuerzos normales
  - Principales, 28
- Flexión de vigas, 138
- Fuerza axial, 124
- Fuerza cortante, 124
- Fuerzas de presión, 14
- Fuerzas gravitatorias, 12
- Fuerzas muertas, 12, 14
- Función de Airy, 77, 92
- Función de alabeo, 133
- Función de Prandtl, 136
- Función de St. Venant, 133
- Función de Timoshenko, 142
- Invariantes
  - Ángulo de Lode, 30
  - Angular, 30, 32
  - escalares, 29, 32
- Invariantes principales, 10
- Ley de Hooke, 56
- Leyes constitutivas, 9
  - Ley de Hooke, 56
  - Materiales elásticos, 10
  - Materiales isotropos, 10
- Materiales elásticos, 9
- Leyes de conservación
  - Coordenadas Eulerianas, 7
  - Coordenadas Lagrangianas, 12
- Módulo de cizallamiento, 63
- Módulo de compresión hidrostática, 61
- Módulo de compresibilidad, 61, 64
- Módulo de cortadura, 63

- Módulo de elasticidad transversal, 131
- Módulo de Young, 57
- Módulo resistente a la torsión, 132
- Módulos de Lamé, 57
- Materiales isótropos, 9
- Matriz cofactor, 10
- Matriz de elasticidad, 58
- Modelos de placas, 179
  - Modelo de Kirchhoff, 181
    - Coefficiente de rigidez isotrópico, 187
    - Coefficientes de rigidez, 185
    - Desplazamiento, 182
    - En términos de los momentos, 190
    - En términos del desplazamiento, 191
    - Fuerzas resultantes, 185
    - Inconsistencias, 188
    - Ley constitutiva, 184
    - Momentos flectores, 185
    - Tensiones máximas, 187
    - Tensor de deformación, 183
  - Modelo de Reissner Mindlin, 192
    - Ecuaciones de equilibrio, 197
    - Esfuerzos cortantes, 194
    - Esfuerzos membranales, 194
    - Fuerzas resultantes, 194
    - Ley constitutiva, 194
    - Momentos flectores, 196
    - Tensor de deformación, 193
- Modelos de vigas
  - Modelo de Bernoulli - Euler, 157
    - Condiciones de contorno, 164
    - Deformación y tensión, 159
    - Desplazamiento, 159
    - Ecuaciones de equilibrio, 161
    - Fórmulas de Jourawski-Colignon, 165
    - Formulación variacional, 164
    - Momentos flectores, 160
    - Rotación sólida local, 159
    - Tensiones cortantes, 165
  - Modelo de Timoshenko, 167
    - Coefficiente de corte de Timoshenko, 171
    - Condiciones de contorno, 173
    - Energía potencial de deformación, 169
    - Esfuerzos de corte, 170
    - Fórmulas de Jourawski-Colignon, 171
    - Modelo matemático, 172
    - Momentos flectores, 170
    - Principio de los trabajos virtuales, 169
    - Tensiones cortantes, 171
    - Tensor de deformación, 168
  - Modelos unidimensionales, 154
    - Barras, 155
      - Condiciones de contorno, 157
      - Ecuación de equilibrio axial, 156
      - Esfuerzo normal total, 156
      - Fibras neutras, 155
      - Formulación variacional, 157
      - Ley de Hooke unidimensional, 156
      - Superficies neutras, 155
  - Modulo de Young
    - Interpretación física, 61
  - Momento cuadrático polar, 131
  - Momento de flexión, 125
  - Momento de torsión, 126
  - Parámetros de Lamé, 17
  - Principio de los trabajos virtuales, 68
  - Problema de elastodinámica lineal, 19
  - Problemas axialmente simétricos, 109
  - Problemas axisimétricos
    - Función de Airy, 100
  - Problemas esféricamente simétricos, 109
  - Problemas planos, 82
    - Deformación plana, 84
    - Tensiones planas, 87
  - Rigidez a la torsión, 131
  - Rigidez geométrica a torsión, 135, 138
  - Rotación sólida local, 48
  - Simetría cilíndrica, 114
  - Simetría de Cauchy, 26
  - Simetría esférica, 109
  - Tensión
    - Normal, 26
  - Cortadura, 26
  - Tensión de von Mises, 31
  - Tensión normal, 38, 220
  - Tensión normal máxima, 65
  - Tensión tangencial, 132

- Tensión tangencial octaédrica, 38, 220
- Tensiones de Maxwell, 76
- Tensiones normales, 25
- Tensiones planas, 36
- Tensiones tangenciales, 25
- Tensor cilíndrico, 28
- Tensor de elasticidad, 16, 58
- Tensor de Green-Saint Venant, 40
- Tensor de Piola Kirchhoff
  - Primero, 11
  - Segundo, 12
- Tensor de rotación, 47
- Tensor desviatorio, 31, 60
- Tensor esférico, 28, 31, 33, 60
- Tensor linealizado de deformación, 18, 39
- Teorema de Cauchy, 8
- Torsión de barras, 124
  - Sección anular, 132
  - Sección circular, 129
  - Sección simplemente conexa, 133
- Torsión elástica, 126
  - Torsión pura, 126
- Trabajo
  - Externo, 67
  - Interno, 69
- Vibraciones, 199
  - Dominio de frecuencias, 207
  - Ecuación en frecuencias, 204
  - Frecuencias naturales, 204
  - vigas, 199
- Viga, 124

# Bibliografía

- [1] Altenbach, H. y Sadowski Editors. Failure and Damage Analysis of Advanced Materials. CISM International Centre for Mechanical Sciences 560. Springer.
- [2] Barber, J. R. *Elasticity*. Kluwer Academic Publishers. 2002.
- [3] Bermúdez, A. Continuum Thermomechanics. Progress in Mathematical Physics. Birkhäuser. 2005.
- [4] Bower, A. F. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press. Taylor & Francis. 2010.
- [5] Ciarlet, P.G. *Élasticité Tridimensionnelle*. Masson.1985.
- [6] Ciarlet, P.G. y Rabier, P. *Les Equations de von Kármán*. Lecture Notes in Mathematics, 826. Springer-Verlag. 1980.
- [7] Fraeijns de Veubeke. *A Course in Elasticity*. Applied Mathematical Sciences, 29. Springer-Verlag 1979.
- [8] Gurtin, M.E. An introduction to Continuum Mechanics. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 158. Academic Press. 1981.
- [9] Gurtin M.E., Fried, E. y Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press. 2010.
- [10] Henry, J.-P. y Parsy F. Cours d'Élasticité. Dunod Université. 1982.
- [11] Negahban. Vibrations ob cantilever beams: deflection, frecuency and research uses. 1999. <http://em-ntserver.unl.edu/Mechanics-Pages/Scott-Whitney/325hweb/Beams.htm>
- [12] Omran M.E. y Karani, A. H. Cable loss performance investigation of cable-stayed bridge equipped with Roll-N-Cage isolator. Structures, Volume 41, 2022, 1329-1344, <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.05.016>.
- [13] Song, G., Zhi, X., Fan, F., Wang, W. y Wang, P. Cooling performance of cylinder-frustum natural draft dry cooling tower. Applied Thermal Engineering, Volume 180, 2020, 115797, <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115797>.
- [14] Sokolnikoff, I.S. Mathematical theory of elasticity. Krieger Publishing Company. McGraw-Hill. 1956.

- [15] Vinson, J.R. *The Behavior of Thin Walled Structures, Beams, Plates and Shells*. Kluwer academic publishers. 1989.