



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TEOREMA FUNDAMENTAL DOS MÓDULOS DE HOPF

Brais Ares García

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TEOREMA FUNDAMENTAL DOS MÓDULOS DE HOPF

Brais Ares García

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Teorema fundamental dos módulos de Hopf
Breve descrición do contido
Un resultado clásico na teoría das álxebras de Hopf é o teorema fundamental dos módulos de Hopf. Neste TFG, para unha álgebra de Hopf H trátase de ver cando as estruturas de H -módulo e de H -comódulo son compatibles. Estudarase o concepto de módulo de Hopf e probarase o teorema fundamental destes obxectos.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Preliminares	1
2. Álxebras de Hopf	7
2.1. Álxebras e coálxebras	7
2.2. Biálxebras	14
2.3. Álxebras de Hopf	16
3. Módulos de Hopf	25
3.1. Módulos e comódulos	25
3.2. Módulos de Hopf	33
3.3. Aplicacións do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf	37
Bibliografía	45

Resumo

A teoría das álxebras de Hopf nace nos anos 40 do século pasado a raíz do traballo do topólogo alemán Heinz Hopf. Debido ás súas numerosas aplicacións, principalmente no ámbito da física cuántica, o interese por esta área de estudo incrementouse notablemente nas últimas décadas.

O obxectivo deste traballo é dar unha visión xeral desta teoría, coa intención de demostrar un dos seus resultados clásicos: o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf. En primeiro lugar, co propósito de definir o concepto de álgebra de Hopf, introducíranse as nocións de álgebra, coálgebra, biálgebra e antípoda, e estudáranse algunhas das súas propiedades básicas. Posteriormente, presentáranse as nocións de módulo sobre unha álgebra e de comódulo sobre unha coálgebra coa intención de, finalmente, establecer o concepto de módulo de Hopf e probar o xa mencionado teorema. Para concluír, ilustrárase a importancia deste resultado mediante algúns exemplos de aplicación do mesmo.

Abstract

Hopf algebra theory first appeared in the 1940s through the work of the German topologist Heinz Hopf. Due to its numerous applications, mainly in the field of quantum physics, interest in this area of study has notably increased over the last few decades.

The aim of this project is to provide a general overview of this theory, with the goal of proving a classic result: the Fundamental Theorem of Hopf Modules. Firstly, in order to define the concept of Hopf algebra, the notions of algebra, coalgebra, bialgebra and antipode are introduced, and some of their basic properties are studied. Subsequently, the notions of module over an algebra and comodule over a coalgebra are presented in order to establish the concept of Hopf module and prove the aforementioned theorem. Lastly, the importance of this result is showcased through some examples of application.

Introdución

A teoría das álxebras de Hopf é unha área das matemáticas que experimentou un gran desenvolvemento nas últimas décadas debido, principalmente, ás súas aplicacións na física cuántica. Estas álxebras deben o seu nome ao matemático alemán Heinz Hopf quen, en 1941, publicou no ámbito da topoloxía alxébrica o artigo que deu orixe a esta nova teoría matemática [9]. No seu traballo Hopf definiu un coproduto sobre aneis de cohomoloxía de grupos de Lie compactos, dando lugar a un caso particular do que hoxe en día se coñece como álgebra de Hopf. Porén, foi Armand Borel quen, en 1953 [4], se referiu por primeira vez con ese nome a estas estruturas, en recoñecemento ás importantes contribucións realizadas por Hopf nos anos anteriores. Non obstante, a primeira definición formal de álgebra de Hopf aparece baixo o nome de *hyperalgebra* nos traballos sobre teoría de representacións de Pierre Cartier [6], aínda que a súa formulación experimentou certas modificacións ao longo dos anos ata chegar á definición actual. Na década dos 60 a teoría das álxebras de Hopf atravesou un proceso de consolidación, culminando coa publicación do libro *Hopf Algebras* [18] de Sweedler no ano 1969. Este fito marcou o nacemento da teoría das álxebras de Hopf como un campo de estudo independente. A raíz deste proceso de desenvolvemento, foron descubertas aplicacións das álxebras de Hopf en numerosas áreas das matemáticas: teoría de Lie, combinatoria, teoría de Galois, teoría de números, xeometría alxébrica, por mencionar algunhas. A día de hoxe continúan aumentando as aplicacións das álxebras de Hopf, estendéndose incluso a áreas alleas ás matemáticas como, por exemplo, a lingüística [15].

O interese por este campo incrementouse nos anos 80 a raíz do descubrimento dun novo subtipo de álxebras de Hopf coñecidas como grupos cuánticos, termo que foi acuñado en 1986 por Drinfeld [8]. A importancia destes obxectos radica nas súas aplicacións na física, xa que permiten a obtención sistemática de solucións da Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, que ten a seguinte formulación: Se V denota un k -espazo vectorial, un automorfismo $c: V \otimes_k V \rightarrow V \otimes_k V$ é solución da Ecuación Cuántica de Yang-Baxter se satisfai a seguinte condición:

$$(c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) = (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c).$$

Esta ecuación foi proposta por Yang no ámbito da mecánica cuántica e por Baxter no da mecánica

estadística.

Por unha banda, en [20] Yang estuda a versión cuántica do clásico problema dos n -corpos en mecánica celeste. Neste, considerase un sistema de partículas microscópicas que interactúan entre si, entendendo por microscópicas que son o suficientemente pequenas como para que as leis da mecánica cuántica constitúan o marco adecuado para a descrición deste sistema. Yang estuda este problema nun espazo unidimensional, empregando o método ansatz de Bethe para calcular a función de onda asociada ao sistema. A Ecuación Cuántica de Yang-Baxter aparece neste contexto como unha das condicións que debe satisfacer esta función de onda.

Por outra banda, en [2] Baxter estuda o modelo dos oito vértices. No ámbito da mecánica estatística, os sistemas de partículas represéntase por medio de modelos de vértices, que consisten nunha construción reticular onde cada vértice se corresponde cunha partícula. Ademais, en cada un dos vértices represéntase o estado da partícula asociada mediante catro frechas, orientadas cara ou contra o vértice. En particular, no modelo que estudou Baxter admítense como válidas oito das dezaseis combinacións de frechas posibles, tendo en conta as distintas orientacións que poden tomar estas. No seu traballo Baxter busca a función de partición asociada a estes modelos, a partir da cal se poden derivar variables do sistema como a enerxía total, a enerxía libre de Gibbs, a entropía, a presión ou a temperatura. A Ecuación Cuántica de Yang-Baxter aparece neste contexto como unha das condicións que deben satisfacer certas matrices empregadas na obtención desta función de partición.

A maiores das seus usos orixinais, a relevancia desta ecuación continúa sendo elevada na actualidade, con aplicacións tanto na física, por exemplo na obtención de portas cuánticas [22], como nas matemáticas, por exemplo na teoría de nós ou no estudo de grupos de trenzas. É por isto que a obtención e clasificación de solucións da Ecuación Cuántica de Yang-Baxter é un problema de interese, que aínda segue aberto na actualidade.

Neste traballo preténdese introducir algúns dos conceptos básicos relativos á teoría das álgebras de Hopf, facendo fincapé nun dos seus resultados clásicos: o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, probado en 1969 por Larson e Sweedler [13]. Ademais, este é un resultado de gran relevancia tamén no contexto da Ecuación Cuántica de Yang-Baxter, debido a que os módulos de Hopf son unha ferramenta utilizada para a obtención de solucións desta ecuación. Co obxectivo de estudar este teorema, estruturouse esta memoria en tres capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 1 establécense as definicións dalgúns conceptos elementais e fíxase a notación que se empregará no resto do traballo. En particular, estúdase o produto tensorial de módulos e recompílanse algunhas das súas propiedades básicas, que serán esenciais ao longo da memoria.

O obxectivo do Capítulo 2 é definir o concepto de álgebra de Hopf, así como proporcionar

resultados que permitan afondar na comprensión destes obxectos. Con este propósito, preséntanse os conceptos duais de álgebra e coálgebra, e estúdase baixo que condicións son compatibles ambas estruturas, dando lugar a unha biálgebra. Na derradeira sección, caracterízanse as álgebras de Hopf como aquelas biálgebras que admiten un tipo de endomorfismo coñecido como antípoda. Ademais, ao longo do capítulo, estúdanse varios resultados básicos da teoría das álgebras de Hopf, facendo especial énfase nas propiedades de dualidade destes obxectos.

Por último, no Capítulo 3 defínense os módulos sobre unha álgebra e o seu concepto dual de comódulo sobre unha coálgebra. Tras analizar a súa relación de dualidade e proporcionar algúns exemplos, estúdase de que forma se poden compatibilizar ambas estruturas, dando lugar aos módulos de Hopf. Ademais, será neste capítulo onde se probe o resultado central deste traballo: o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf. Para finalizar a memoria, estúdanse dous casos de aplicación deste teorema, que pretenden ilustrar a súa importancia, así como ofrecer unha visión xeral dalgún tema de investigación que aínda continúa activo na actualidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo definirase o produto tensorial de módulos e estudaranse algunhas das súas propiedades básicas, que se utilizarán ao longo do traballo.

De aquí en adiante R denotará un anel conmutativo e unitario.

Definición 1.1. Un R -módulo é un grupo abeliano $(M, +)$ xunto cunha aplicación

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

satisfacendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} a(x + y) &= ax + ay, \\ (a + b)x &= ax + bx, \\ (ab)x &= a(bx), \\ 1x &= x, \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in M, \forall a, b \in R.$$

Definición 1.2. Sexan M e N R -módulos. Un **homomorfismo de R -módulos** (ou **aplicación R -lineal**) é unha aplicación $f: M \rightarrow N$ satisfacendo:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(ax) &= af(x), \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in M, \forall a \in R.$$

Definición 1.3. Sexan M , N e P R -módulos. Unha aplicación $f: M \times N \rightarrow P$ dise que é

R -bilineal se para todo $x \in M$ e para todo $y \in N$ as aplicacións

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & P \\ m & \longmapsto & f(m, y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & P \\ n & \longmapsto & f(x, n) \end{array}$$

son R -lineais.

Definición 1.4. Sexan M e N R -módulos. Considérese o R -módulo libre:

$$R^{M \times N} := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x_i, y_i) : a_i \in R, x_i \in M, y_i \in N, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e o submódulo S de $R^{M \times N}$ xerado por elementos das seguintes formas:

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y), \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \\ (ax, y) - a(x, y), \\ (x, ay) - a(x, y), \end{aligned}$$

onde $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ e $a \in R$. Nestas condicións, coñécese como **produto tensorial de M e N** ao R -módulo cociente

$$M \otimes_R N := R^{M \times N} / S.$$

Ademais, para todo $x \in M$ e $y \in N$, denótase á clase de equivalencia de (x, y) en $M \otimes_R N$ por $x \otimes y$.

Observación 1.5. Nótese que $M \otimes_R N$ está xerado como R -módulo polos elementos $x \otimes y$. En consecuencia, se $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$ son conxuntos de xeradores de M e N , entón $\{x_i \otimes y_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ é un conxunto de xeradores de $M \otimes_R N$.

A seguinte propiedade universal caracteriza ao produto tensorial de R -módulos.

Proposición 1.6 ([1], Proposition 2.12). *Sexan M e N R -módulos. Existe un par (T, g) , onde T é un R -módulo e $g: M \times N \rightarrow T$ unha aplicación R -bilineal, tal que para todo R -módulo P e toda aplicación R -bilineal $f: M \times N \rightarrow P$ existe unha única aplicación R -lineal $\hat{f}: M \otimes N \rightarrow P$ tal que $\hat{f} \circ g = f$. Ademais, se (T, g) e (T', g') son dous pares satisfacendo esta propiedade, entón existe un único isomorfismo $h: T \rightarrow T'$ tal que $h \circ g = g'$.*

Demostración. Para probar a existencia, tómesese $T = M \otimes_R N$ e $g: M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ a aplicación definida por $g(x, y) = x \otimes y$. Por definición, os $x \otimes y$ son tales que

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y,$$

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y',$$

$$ax \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes ay$$

para todo $x, x' \in M$; $y, y' \in N$ e $a \in R$. Polo tanto g é R -bilineal. Ademais, calquera aplicación $f: M \times N \rightarrow P$ pode extenderse por linealidade a un homomorfismo de R -módulos $f': R^{M \times N} \rightarrow P$. Se f é R -bilineal, f' anularase nos xeradores do submódulo S descrito na Definición 1.4, polo que f' induce unha aplicación R -lineal $\hat{f}: M \otimes_R N \rightarrow P$ tal que $\hat{f}(x \otimes y) = f(x, y)$. Como ademais os $x \otimes y$ son xeradores de $M \otimes_R N$ como R -módulo, a aplicación \hat{f} é única.

Para probar a unicidade, considérense dous pares (T, g) e (T', g') que satisfán a propiedade anterior. Entón, tomando $P = T'$ e $f = g'$, existe unha única aplicación R -lineal $h: T \rightarrow T'$ tal que $h \circ g = g'$. Analogamente, existe unha única aplicación R -lineal $h': T' \rightarrow T$ tal que $h' \circ g' = g$. Compoñendo con h e h' en cada igualdade:

$$h \circ h' \circ g' = h \circ g = g',$$

$$h' \circ h \circ g = h' \circ g' = g,$$

de onde $h \circ h' = id_{T'}$ e $h' \circ h = id_T$, polo que h é un isomorfismo de R -módulos. \square

Observación 1.7. Na proposición anterior, en lugar de aplicacións R -bilineais, poderíanse ter considerado aplicacións R -multilineais $f: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow P$, é dicir, aplicacións que son R -lineais en cada variable. Deste xeito obtense unha propiedade universal, análoga á da Proposición 1.6 anterior, que caracteriza ao **produto multitensoresial de R -módulos**, denotado por $M_1 \otimes_R M_2 \otimes_R \dots \otimes_R M_n$.

Notación 1.8. De agora en adiante, sempre que estea claro sobre que anel R se está considerando o produto tensoresial, empregárase a notación $M \otimes N := M \otimes_R N$.

Proposición 1.9. *Sexan M, N e P R -módulos. As seguintes aplicacións son isomorfismos de R -módulos:*

$$1. M \otimes R \longrightarrow M$$

$$x \otimes a \longmapsto ax$$

$$2. M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$$

$$x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

$$3. (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes N \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P)$$

$$(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes y \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$$

Demostración.

1. A aplicación

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (x, a) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

é R -bilineal. Entón, pola propiedade universal do produto tensorial (Proposición 1.6), induce unha aplicación R -lineal

$$\begin{aligned} f: M \otimes R &\longrightarrow M \\ x \otimes a &\longmapsto ax, \end{aligned}$$

que ten por inversa á aplicación definida por $f^{-1}(m) = m \otimes 1 \ \forall m \in M$.

2. A aplicación R -bilineal

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow N \otimes M \\ (x, y) &\longmapsto y \otimes x \end{aligned}$$

induce unha aplicación R -lineal $f: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ tal que $f(x \otimes y) = y \otimes x$, que ten por aplicación inversa a $f^{-1}(y \otimes x) = x \otimes y$.

3. Para cada $p \in P$ fixado, a aplicación R -bilineal

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes y \otimes p \end{aligned}$$

induce unha aplicación R -lineal

$$\begin{aligned} f_p: M \otimes N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ x \otimes y &\longmapsto x \otimes y \otimes p. \end{aligned}$$

Polo tanto, a aplicación

$$\begin{aligned} (M \otimes N) \times P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (t, p) &\longmapsto f_p(t) = t \otimes p \end{aligned}$$

é tamén R -bilineal e induce unha aplicación R -lineal

$$\begin{aligned} f: (M \otimes N) \otimes P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (x \otimes y) \otimes p &\longmapsto x \otimes y \otimes p, \end{aligned}$$

que ten por inversa a $f^{-1}(x \otimes y \otimes p) = (x \otimes y) \otimes p$. Analogamente, próbase que a aplicación $g: M \otimes (N \otimes P) \rightarrow M \otimes N \otimes P$ definida por $g(x \otimes (y \otimes p)) = x \otimes y \otimes p$ é un isomorfismo. \square

Proposición 1.10. *Sean $f: M \rightarrow M'$ e $g: N \rightarrow N'$ homomorfismos de R -módulos. A aplicación*

$$\begin{aligned} f \otimes g: M \otimes N &\longrightarrow M' \otimes N' \\ x \otimes y &\longmapsto f(x) \otimes g(y). \end{aligned}$$

*é R -lineal. Esta aplicación denomínase **produto tensorial de f e g** .*

Demostración. A aplicación

$$\begin{aligned} f \times g: M \times N &\longrightarrow M' \times N' \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

é R -bilineal. Tamén o é, por construción, a proxección no produto tensorial $M' \times N' \rightarrow M' \otimes N'$, e, polo tanto, tamén a composición de ambas:

$$\begin{aligned} M \times N &\longrightarrow M' \otimes N' \\ (x, y) &\longmapsto f(x) \otimes g(y). \end{aligned}$$

Pola propiedade universal do produto tensorial (Proposición 1.6) conclúese a R -linealidade de $f \otimes g$. \square

Proposición 1.11. *Sean $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$ e $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$ homomorfismos de R -módulos. Entón*

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Demostración. Para todo $x \in M$ e $y \in N$

$$((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(x \otimes y) = f'(f(x)) \otimes g'(g(y)) = (f' \otimes g')(f(x) \otimes g(y)) = ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(x \otimes y).$$

Como os elementos da forma $x \otimes y$ son un conxunto de xeradores de $M \otimes N$, conclúese o resultado. \square

Sexa k un corpo. Nótese que os k -espazos vectoriais non son máis que k -módulos e, polo tanto, todo o visto neste capítulo tamén se aplica a eles. Ao longo do resto do traballo estudaranse obxectos cunha estrutura subxacente de k -espazo vectorial, e será especialmente relevante a noción de espazo dual, que se recorda a continuación: Dados k -espazos vectoriais V e W , denótase por $\text{Hom}_k(V, W)$ ao k -espazo vectorial formado polas aplicacións k -lineais de V en W . Como caso particular tense o **k -espazo vectorial dual**, $\text{Hom}_k(V, k)$, que se denotará por V^* .

Ademais, tamén será relevante o seguinte resultado sobre o produto tensorial de k -espazos vectoriais.

Proposición 1.12. *Se V e W son k -espazos vectoriais con bases $\{e_i\}_{i \in I}$ e $\{\tilde{e}_j\}_{j \in J}$, respectivamente, entón $\{e_i \otimes \tilde{e}_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ é unha base do k -espazo vectorial $V \otimes W$.*

Demostración. Supóñase que

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} e_i \otimes \tilde{e}_j = 0$$

con $\alpha_{i,j} \in k \forall i \in I, j \in J$. Sexan $i_0 \in I$ e $j_0 \in J$ arbitrarios, verase a continuación que necesariamente $\alpha_{i_0 j_0} = 0$. Considérese a seguinte aplicación k -bilineal:

$$\begin{aligned} V \times W &\rightarrow k \\ (v, w) &\mapsto v_{i_0} w_{j_0}, \end{aligned}$$

onde v_{i_0} e w_{j_0} se corresponden coa coordenada i_0 -ésima do vector v na base $\{e_i\}_{i \in I}$ e coa coordenada j_0 -ésima do vector w na base $\{\tilde{e}_j\}_{j \in J}$, respectivamente. Pola propiedade universal do produto tensorial, existe unha única aplicación k -lineal

$$\begin{aligned} f: V \otimes W &\rightarrow k \\ v \otimes w &\mapsto v_{i_0} w_{j_0}. \end{aligned}$$

En particular, $f(e_{i_0} \otimes \tilde{e}_{j_0}) = 1_k$ e $f(e_i \otimes \tilde{e}_j) = 0 \forall i \neq i_0, j \neq j_0$. Por ser f k -lineal:

$$0 = f \left(\sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,j} e_i \otimes \tilde{e}_j \right) = \alpha_{i_0 j_0}.$$

Pola Observación 1.5 conclúese o resultado. □

Como consecuencia directa deste resultado, para dous k -espazos vectoriais V e W calquera, $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

Capítulo 2

Álxebras de Hopf

O obxectivo principal deste capítulo é definir o concepto de álgebra de Hopf, así como estudar algunhas das propiedades básicas destes obxectos alxébricos. Con esta fin, iranse introducindo ao longo das diferentes seccións os conceptos requiridos para a súa construción: álgebras, coálgebras, biálgebras e antípoda. Como ao longo do capítulo se traballará con espazos vectoriais, de aquí en adiante k denotará sempre un corpo.

2.1. Álgebras e coálgebras

Nesta primeira sección dualizarase o concepto de álgebra para dar lugar a unha nova estrutura alxébrica: a coálgebra. Tamén se verán varios exemplos de ambas, e enunciaranse dous resultados que afondan no estudo da relación de dualidade entre ambos obxectos.

Definición 2.1. Unha k -álgebra é unha terna (A, η_A, μ_A) onde A é un k -espazo vectorial e $\mu_A: A \otimes A \rightarrow A$ e $\eta_A: k \rightarrow A$ son aplicacións k -lineais facendo conmutativos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A \otimes id_A} & A \otimes A \\
 \downarrow id_A \otimes \mu_A & & \downarrow \mu_A \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu_A} & A
 \end{array}$$

Diagrama 2.1: Asociatividade.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 \eta_A \otimes id_A & \nearrow & & \nwarrow & id_A \otimes \eta_A \\
 k \otimes A & & \downarrow \mu_A & & A \otimes k \\
 & \searrow \cong & & \swarrow \cong & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Diagrama 2.2: Unidade.

As aplicacións μ_A e η_A denomínanse **produto** e **unidade**, respectivamente.

Se ademais conmuta o seguinte diagrama dirase que a k -álgebra é **conmutativa**:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau_{A,A}} & A \otimes A \\ & \searrow \mu_A & \swarrow \mu_A \\ & A & \end{array}$$

Diagrama 2.3: Conmutatividade.

onde, dados dous k -espazos vectoriais A e B , $\tau_{A,B}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ denota a aplicación k -lineal definida por

$$\tau_{A,B}(a \otimes b) = b \otimes a$$

$\forall a \in A, b \in B$.

Notación 2.2. Cando non haxa posibilidade de confusión, usárase a seguinte notación para o produto:

$$ab := \mu_A(a \otimes b)$$

$\forall a, b \in A$.

Definición 2.3. Sexan (A, η_A, μ_A) e (B, η_B, μ_B) k -álgebras. Unha aplicación k -lineal $f: A \rightarrow B$ é un **morfismo de k -álgebras** se os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow \mu_A & & \downarrow \mu_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Diagrama 2.4: Preserva o produto.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta_A \swarrow & & \searrow \eta_B \\ & k & \end{array}$$

Diagrama 2.5: Preserva a unidade.

son conmutativos. É dicir, $f(ab) = f(a)f(b)$ e $f \circ \eta_A = \eta_B \forall a, b \in A$.

Exemplo 2.4. Algúns exemplos de álgebras son os seguintes:

1. Se k é un corpo equipado coa estrutura natural de k -espazo vectorial, entón é unha k -álgebra onde tanto o produto como a unidade son as propias do corpo.
2. Todo k -espazo vectorial $V \neq 0$ admite unha estrutura de k -álgebra. En efecto, tomando un vector $e \in V$ non nulo e ampliándoo a unha base $\{e, x_i\}_{i \in I} \subseteq V$, defínese o produto satisfacendo as relacións

$$ex_i = x_i = x_ie, \quad x_i x_j = 0$$

$\forall i, j \in I$, e a unidade verificando $\eta(1_k) = e$.

3. Sexa (A, η_A, μ_A) unha k -álgebra. Considerando o produto $\mu_A^{op} := \mu_A \circ \tau_{A,A}$ obtense unha nova estrutura de k -álgebra $A^{op} := (A, \eta_A, \mu_A^{op})$, que se coñece como **álgebra oposta**. Nótese que A será conmutativa se e só se $\mu_A = \mu_A^{op}$.
4. Sexan (A, η_A, μ_A) e (B, η_B, μ_B) k -álgebras. O espazo $A \otimes B$ é unha k -álgebra con produto $\mu_{A \otimes B} := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes \tau_{B,A} \otimes id_B)$ e unidade $\eta_{A \otimes B} := \eta_A \otimes \eta_B$.
5. Dado un monoide (X, \cdot) , considérese kX o k -espazo vectorial con base X . Pódese dotar a kX de estrutura de k -álgebra estendendo por linealidade a operación de X a todo o espazo. Ademais, a unidade corresponderase co neutro do monoide. En particular, deste xeito, pódese construír unha k -álgebra a partir dun grupo G calquera.

A continuación introdúcese o concepto de coálgebra, que se constrúe dualizando os diagramas da Definición 2.1.

Definición 2.5. Unha **k -coálgebra** é unha terna $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ onde C é un k -espazo vectorial e $\Delta_C: C \rightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon_C: C \rightarrow k$ son aplicacións k -lineais facendo conmutativos os seguintes diagramas:

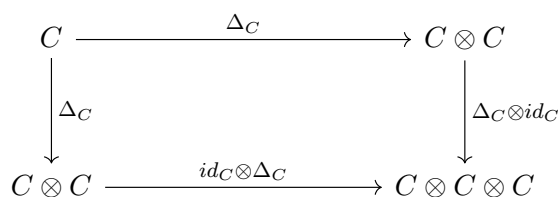


Diagrama 2.6: Coasociatividade.

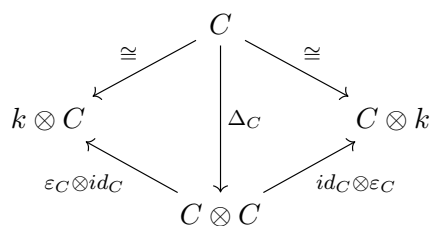


Diagrama 2.7: Counidade.

As aplicacións Δ_C e ε_C denomínanse **coproduto** e **counidade**, respectivamente.

Se ademais conmuta o seguinte diagrama dirase que a k -coálgebra é **coconmutativa**:

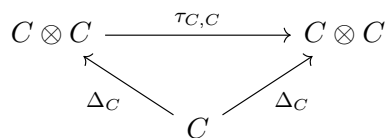


Diagrama 2.8: Coconmutatividade.

Exemplo 2.6. Amósanse a continuación algúns exemplos de coálgebras:

1. Sexa S un conxunto non baleiro e kS o k -espazo vectorial con base S . Podemos dotar a kS de estrutura de k -coálgebra coas aplicacións lineais definidas polas relacións

$$\Delta(s) = s \otimes s, \varepsilon(s) = 1_k$$

$\forall s \in S$. En particular, calquera corpo k é unha k -coálxebra con estas operacións.

2. Sexa $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ unha k -coálxebra. Considerando o coproduto $\Delta_C^{cop} := \tau_{C,C} \circ \Delta_C$ obtense unha nova estrutura de k -coálxebra $C^{cop} := (C, \varepsilon_C, \Delta_C^{cop})$, que se coñece como **coálxebra cooposta**. Nótese que C será coconmutativa se e só se $\Delta_C = \Delta_C^{cop}$.
3. Sexan $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ e $(D, \varepsilon_D, \Delta_D)$ k -coálxebras. O espazo $C \otimes D$ é unha k -coálxebra con coproduto $\Delta_{C \otimes D} := (id_C \otimes \tau_{C,D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e counidade $\varepsilon_{C \otimes D} := \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$.

Seguidamente introdúcense uns elementos destacados das coálxebras: os grouplike. Estudaranse algunhas das propiedades destes elementos na última sección do capítulo, onde se verá que papel xogan nas álxebras de Hopf.

Definición 2.7. Sexa $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ unha k -coálxebra. Un elemento $c \in C$ dise que é **grouplike** se se cumpre que

$$\begin{aligned}\Delta_C(c) &= c \otimes c, \\ \varepsilon_C(c) &= 1_k.\end{aligned}$$

O conxunto dos grouplike dunha coálxebra denótase por $\mathcal{G}(C)$.

Proposición 2.8 ([18], *Proposition 3.2.1*). *Se $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ é unha k -coálxebra, entón $\mathcal{G}(C)$ é un subconxunto linealmente independente de C .*

Demostración. Se $\mathcal{G}(C) = \emptyset$, entón é linealmente independente. Se $\mathcal{G}(C) \neq \emptyset$, pola linealidade de ε_C tense que $\varepsilon_C(0) = 0$ e, polo tanto, $0 \notin \mathcal{G}(C)$. En consecuencia, $\{g\}$ é un conxunto linealmente independente $\forall g \in \mathcal{G}(C)$. Polo tanto, se $\mathcal{G}(C)$ ten un único elemento, será un conxunto linealmente independente. A continuación considérase o caso no que $\mathcal{G}(C)$ ten 2 ou máis elementos.

Supóñase que $\mathcal{G}(C)$ non é linealmente independente, é dicir, que existe algún subconxunto finito de $\mathcal{G}(C)$ linealmente dependente. Sexa $n \in \mathbb{Z}^+$ o maior enteiro tal que todo subconxunto de n elementos de $\mathcal{G}(C)$ é linealmente independente e considérense $n + 1$ elementos distintos $g_1, g_2, \dots, g_{n+1} \in \mathcal{G}(C)$ formando un conxunto linealmente dependente. Entón:

$$g_{n+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$$

para certos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k - \{0\}$. Ademais, o conxunto $\{g_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^n$ é linealmente independente por selo $\{g_i\}_{i=1}^n$. Por outra parte, pola linealidade do coproduto, téñense as seguintes igualdades:

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j g_i \otimes g_j = g_{n+1} \otimes g_{n+1} = \Delta_C(g_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_C(g_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \otimes g_i,$$

de onde se deduce que

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 - \alpha_i) g_i \otimes g_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \alpha_i \alpha_j g_i \otimes g_j = 0 \implies \alpha_i^2 - \alpha_i = 0 = \alpha_i \alpha_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j.$$

Por ser os α_i non nulos $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\alpha_i \alpha_j \neq 0 \quad \forall i \neq j \implies n = 1 \implies g_2 = \alpha_1 g_1 \quad \text{e} \quad \alpha_1^2 = \alpha_1 \implies \alpha_1 = 1_k.$$

Como consecuencia tense que $g_2 = g_1$, o que contradí que os g_i sexan distintos. Polo tanto $\mathcal{G}(C)$ é un subconxunto linealmente independente de C . \square

Observación 2.9. Do resultado anterior dedúcese que para un conxunto S calquera, $\mathcal{G}(kS) = S$.

Introdúcese agora unha notación para o coproduto nunha coálgebra. Sexa $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ unha k -coálgebra. Dado un $c \in C$, escríbese a súa imaxe polo coproduto como

$$\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2,$$

que é un xeito de representar un elemento arbitrario de $C \otimes C$. Esta notación denomínase **notación de Sweedler**.

A verdadeira utilidade da notación de Sweedler dáse cando se opera repetidas veces co coproduto. Por exemplo, pola propiedade coasociativa (Diagrama 2.6)

$$\sum \Delta_C(c_1) \otimes c_2 = \sum (c_1)_1 \otimes (c_1)_2 \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes (c_2)_1 \otimes (c_2)_2 = \sum c_1 \otimes \Delta_C(c_2). \quad (*)$$

Aplicando a propiedade coasociativa iterativamente é fácil ver que todas as formas posibles de aplicar Δ_C $n-1$ veces sobre un $c \in C$ dan lugar ao mesmo elemento de $C^{\otimes n} := C \otimes C \otimes \dots \otimes C$, como se acaba de probar para $n=3$ en (*). Este elemento denotarase por

$$\Delta_C^{n-1}(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \dots \otimes c_n.$$

Con esta notación é posible expresar as propiedades da counidade (Diagrama 2.7) e da coconmutatividade (Diagrama 2.8) como segue:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon(c_1) c_2 &= c = \sum c_1 \varepsilon(c_2), \\ \sum c_1 \otimes c_2 &= \sum c_2 \otimes c_1. \end{aligned}$$

Definición 2.10. Sexan $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ e $(D, \varepsilon_D, \Delta_D)$ k -coálgebras. Un **morfismo de k -coálgebras** é unha aplicación k -lineal $f: C \rightarrow D$ que fai conmutativos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f} & D \\
 \downarrow \Delta_C & & \downarrow \Delta_D \\
 C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D
 \end{array}$$

Diagrama 2.9: Preserva o coproduto.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f} & D \\
 \searrow \varepsilon_C & & \swarrow \varepsilon_D \\
 & k &
 \end{array}$$

Diagrama 2.10: Preserva a counidade.

Empregando a notación de Sweedler, un morfismo de k -coálgebras $f: C \rightarrow D$ é aquel que cumpre que

$$\sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2)$$

e ademais

$$\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$$

$\forall c \in C$.

A continuación introdúcense dous resultados que exemplifican a relación dual entre álgebras e coálgebras. Pódense consultar ambos na *Proposition 1.3.6* e *Proposition 1.3.9* de [7].

Observación 2.11. Se V é un k -espazo vectorial e V^* o seu espazo dual, entón a aplicación lineal $\lambda: V^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes V)^*$ definida por

$$\lambda(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)g(v) \tag{2.1}$$

$\forall f, g \in V^*$ e $\forall u, v \in V$ é inyectiva. En efecto,

$$\lambda(f \otimes g) = 0 \iff \lambda(f \otimes g)(u \otimes v) = 0 \forall u, v \in V \iff f(u)g(v) = 0 \forall u, v \in V$$

$$\iff f(u) = 0 \forall u \in V \text{ ou } g(v) = 0 \forall v \in V \iff f = 0 \text{ ou } g = 0 \iff f \otimes g = 0.$$

Ademais, se V é de dimensión finita n , entón $\dim(V^* \otimes V^*) = n^2 = \dim((V \otimes V)^*)$ e polo tanto λ será un isomorfismo.

Proposición 2.12. *Se $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ é unha k -coálgebra, entón o espazo vectorial dual C^* admite estrutura de k -álgebra onde o produto e a unidade están determinadas polas aplicacións duais Δ_C^* e ε_C^* .*

Demostración. Sexa $\lambda: C^* \otimes C^* \rightarrow (C \otimes C)^*$ o monomorfismo lineal definido en (2.1). Probarase que as aplicacións $\mu_{C^*} := \Delta_C^* \circ \lambda$ e $\eta_{C^*} := \varepsilon_C^*$ definen unha estrutura de k -álgebra sobre o espazo dual, para o que é suficiente comprobar que os Diagramas 2.1 e 2.2 conmutan. Nótese que como as aplicacións μ_{C^*} e η_{C^*} son lineais, en lugar de comprobar a asociatividade para un elemento

xenérico do produto tensorial $C^* \otimes C^* \otimes C^*$, basta probalo para os elementos da forma $f \otimes g \otimes h$ con $f, g, h \in C^*$. Ademais, dados $c \in C$ e $f, g \in C^*$, tense que:

$$\mu_{C^*}(f \otimes g)(c) = \lambda(f \otimes g)(\Delta_C(c)) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

Aplicando a coasociatividade de Δ_C dedúcese a asociatividade de μ_{C^*} . En efecto, sexa $c \in C$ arbitrario:

$$\begin{aligned} & (\mu_{C^*} \circ (\mu_{C^*} \otimes id_{C^*}))(f \otimes g \otimes h)(c) \\ &= \mu_{C^*}(\mu_{C^*}(f \otimes g) \otimes h)(c) \\ &= \sum \mu_{C^*}(f \otimes g)(c_1)h(c_2) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)} \\ &= \sum f((c_1)_1)g((c_1)_2)h(c_2) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)} \\ &= \sum f(c_1)g((c_2)_1)h((c_2)_2) && \text{(coasociatividade de } \Delta_C\text{)} \\ &= \sum f(c_1)\mu_{C^*}(g \otimes h)(c_2) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)} \\ &= \mu_{C^*}(f \otimes \mu_{C^*}(g \otimes h))(c) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)} \\ &= (\mu_{C^*} \circ (id_{C^*} \otimes \mu_{C^*}))(f \otimes g \otimes h)(c). \end{aligned}$$

Por outro lado, a propiedade da unidade séguese de:

$$\begin{aligned} \mu_{C^*}(\eta_{C^*}(1_k) \otimes f)(c) &= \sum \eta_{C^*}(1_k)(c_1)f(c_2) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)} \\ &= \sum \varepsilon_C(c_1)f(c_2) && \text{(definición de } \eta_{C^*}\text{)} \\ &= f\left(\sum \varepsilon_C(c_1)c_2\right) && \text{(linealidade de } f\text{)} \\ &= f(c) && \text{(propiedade da counidade)} \\ &= f\left(\sum c_1\varepsilon_C(c_2)\right) && \text{(propiedade da counidade)} \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2) && \text{(linealidade de } f\text{)} \\ &= \sum f(c_1)\eta_{C^*}(1_k)(c_2) && \text{(definición de } \eta_{C^*}\text{)} \\ &= \mu_{C^*}(f \otimes \eta_{C^*}(1_k))(c) && \text{(definición de } \mu_{C^*}\text{)}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 2.13. *Sexa A un k -espazo vectorial de dimensión finita. Se (A, η_A, μ_A) é unha k -álgebra, entón existe unha estrutura de k -coálgebra sobre A^* onde o coproduto e a counidade están determinados polas aplicacións duais μ_A^* e η_A^* .*

Demostración. Como A ten dimensión finita, a aplicación lineal $\lambda: A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$ definida en (2.1) é un isomorfismo, e polo tanto pódense definir as aplicacións $\Delta_{A^*} = \lambda^{-1} \circ \mu_A^*$ e $\varepsilon_{A^*} = \eta_A^*$. Para probar que dotan ao espazo dual dunha estrutura de k -coálgebra será suficiente comprobar que os Diagramas 2.6 e 2.7 conmutan.

Nótese que para calquera $f \in A^*$, $\sum f_1 \otimes f_2 = \Delta_{A^*}(f) = \lambda^{-1}(f \circ \mu_A)$, e polo tanto

$$\sum f_1(a)f_2(b) = \lambda \left(\sum f_1 \otimes f_2 \right) (a \otimes b) = (f \circ \mu_A)(a \otimes b) = f(ab) \quad (2.2)$$

$\forall a, b \in A$. Empregando esta propiedade dedúcese a coasociatividade:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{A^*} \otimes id_{A^*})(\Delta_{A^*})(f)(a \otimes b \otimes c) \\ &= \left(\sum (f_1)_1 \otimes (f_1)_2 \otimes f_2 \right) (a \otimes b \otimes c) && \text{(definición de } \Delta_{A^*} \text{)} \\ &= \sum (f_1)_1(a)(f_1)_2(b)f_2(c) && \text{(multilinealidade do produto tensorial)} \\ &= \sum f_1(ab)f_2(c) && \text{(aplicando (2.2))} \\ &= f(abc) && \text{(aplicando (2.2) e a asociatividade)} \\ &= \sum f_1(a)f_2(bc) && \text{(aplicando (2.2) e a asociatividade)} \\ &= \sum f_1(a)(f_2)_1(b)(f_2)_2(c) && \text{(aplicando (2.2))} \\ &= \left(\sum f_1 \otimes (f_2)_1 \otimes (f_2)_2 \right) (a \otimes b \otimes c) && \text{(multilinealidade do produto tensorial)} \\ &= (id_{A^*} \otimes \Delta_{A^*})(\Delta_{A^*})(f)(a \otimes b \otimes c) && \text{(definición de } \Delta_{A^*} \text{)}. \end{aligned}$$

Por outra banda, aplicando (2.2) e a propiedade da unidade en (*):

$$\left(\sum \varepsilon_{A^*}(f_1)f_2 \right) (a) = \sum f_1(\eta_A(1_k))f_2(a) \stackrel{(*)}{=} f(a),$$

$$\left(\sum f_1 \varepsilon_{A^*}(f_2) \right) (a) = \sum f_1(a)f_2(\eta_A(1_k)) \stackrel{(*)}{=} f(a),$$

e polo tanto $(A^*, \varepsilon_{A^*}, \Delta_{A^*})$ é unha k -coálgebra. □

2.2. Biálgebras

A continuación introdúcese o concepto de biálgebra: un espazo vectorial que é simultaneamente unha álgebra e unha coálgebra satisfacendo certa condición de compatibilidade entre elas.

Proposición 2.14 ([11], *Theorem III.2.1*). *Se (B, η_B, μ_B) é unha k -álgebra e $(B, \varepsilon_B, \Delta_B)$ é unha k -coálgebra, entón os seguintes enunciados son equivalentes:*

- 1) Δ_B e ε_B son morfismos de k -álgebras.
- 2) μ_B e η_B son morfismos de k -coálgebras.

Demostración. Supóñase que Δ_B e ε_B son morfismos de k -álgebras. Téñense entón as seguintes igualdades:

$$\Delta_B \circ \mu_B \stackrel{(1)}{=} \mu_{B \otimes B} \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B) \stackrel{(2)}{=} (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (id_B \otimes \tau_{B,B} \otimes id_B) \circ (\Delta_B \otimes \Delta_B) \stackrel{(3)}{=} (\mu_B \otimes \mu_B) \circ \Delta_{B \otimes B},$$

$$\varepsilon_B \circ \mu_B \stackrel{(4)}{=} \varepsilon_B \otimes \varepsilon_B \stackrel{(5)}{=} \varepsilon_{B \otimes B}$$

onde (1) e (4) son consecuencia de que Δ_B e ε_B conservan o produto e (2), (3) e (5) das definicións de $\mu_{B \otimes B}$, $\Delta_{B \otimes B}$ e $\varepsilon_{B \otimes B}$, respectivamente. Como resultado, μ_B é un morfismo de k -coálxebras.

Do mesmo xeito:

$$\begin{aligned} \Delta_B \circ \eta_B &\stackrel{(1)}{=} \eta_{B \otimes B} \stackrel{(2)}{=} \eta_B \otimes \eta_B, \\ \varepsilon_B \circ \eta_B &\stackrel{(3)}{=} \eta_k \stackrel{(4)}{=} id_k \stackrel{(5)}{=} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

onde (1) e (3) son consecuencia de que Δ_B e ε_B conservan a unidade e, (2), (4) e (5) das definicións de $\eta_{B \otimes B}$, η_k e ε_k , respectivamente. Polo tanto, η_B é un morfismo de k -coálxebras.

A proba do recíproco é análoga. □

Definición 2.15. Unha k -biálxebra é unha 5-tupla $(B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \Delta_B)$ onde (B, η_B, μ_B) é unha k -álxebra, $(B, \varepsilon_B, \Delta_B)$ unha k -coálxebra e ademais μ_B e η_B son morfismos de k -coálxebras (ou, equivalentemente, Δ_B e ε_B son morfismos de k -álxebras).

Observación 2.16. A condición de que μ_B sexa un morfismo de k -coálxebras pódese escribir da seguinte forma, para todo $x, y \in B$:

$$\begin{aligned} \Delta_B(xy) &= \Delta_B(x)\Delta_B(y), \\ \varepsilon_B(xy) &= \varepsilon_B(x)\varepsilon_B(y). \end{aligned}$$

Definición 2.17. Unha aplicación entre k -biálxebras $f: B \rightarrow B'$ é un **morfismo de k -biálxebras** se é un morfismo tanto de k -álxebras como de k -coálxebras.

Exemplo 2.18. Son exemplos de biálxebras os seguintes:

1. Se $(B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \Delta_B)$ é unha k -biálxebra de dimensión finita, entón das Proposicións 2.12 e 2.13 dedúcese que $(B^*, \eta_{B^*}, \mu_{B^*}, \varepsilon_{B^*}, \Delta_{B^*})$ tamén o é.
2. Sexa $(B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \Delta_B)$ unha k -biálxebra. Entón tamén o son $B^{op} := (B, \eta_B, \mu_B^{op}, \varepsilon_B, \Delta_B)$, $B^{cop} := (B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \Delta_B^{cop})$ e $B^{opcop} := (B, \eta_B, \mu_B^{op}, \varepsilon_B, \Delta_B^{cop})$.
3. Sexa (X, \cdot) un monoide. Como se viu no apartado 5 do Exemplo 2.4 e no primeiro do Exemplo 2.6, kX ten estrutura tanto de k -álxebra como de k -coálxebra. Ademais, estas estruturas son compatibles e fan de kX unha k -biálxebra.

Observación 2.19. Nunha k -biálxebra $(B, \eta_B, \mu_B, \varepsilon_B, \Delta_B)$, como Δ_B e ε_B conservan o produto, tense que $\mathcal{G}(B)$ é un conxunto pechado para o produto da biálxebra. Polo tanto, $\mathcal{G}(B)$ é un monoide con neutro $\eta_B(1_k)$.

2.3. Álxebras de Hopf

Nesta sección introdúcese a noción de álgebra de Hopf: unha biálgebra que conta a maiores cun endomorfismo lineal, coñecido como antípoda, satisfacendo certa propiedade. Con este obxectivo introdúcese en primeiro lugar a operación convolución, que é necesaria para dar a definición deste morfismo. Ademais, probarase un importante resultado que explica o comportamento da antípoda coas outras operacións da álgebra de Hopf. Para rematar a sección, estudarase a súa invertibilidade e veranse algúns exemplos importantes de álxebras de Hopf.

Proposición 2.20 ([16], *Definition 1.4.1*). *Sexa (A, η_A, μ_A) unha k -álgebra e $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ unha k -coálgebra. O conxunto de homomorfismos k -lineais $\text{Hom}_k(C, A)$ ten estrutura de monoide coa operación **convolución**:*

$$f * g := \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C,$$

con neutro $\eta_A \circ \varepsilon_C$.

Observación 2.21. Coa notación de Sweedler pódese escribir a convolución como:

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$$

$\forall c \in C$.

Demostración. En primeiro lugar, comprobarase que a operación é asociativa. En efecto, dados $f, g, h \in \text{Hom}_k(C, A)$, $c \in C$

$$((f * g) * h)(c) = \sum (f * g)(c_1)h(c_2) = \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) = \sum f(c_1)(g * h)(c_2) = (f * (g * h))(c),$$

onde as igualdades se deducen da asociatividade de μ_A e coasociatividade de Δ_C .

Nótese ademais que, grazas á propiedade da unidade e da counidade, $\eta_A \circ \varepsilon_C \in \text{Hom}_k(C, A)$ é o neutro para a convolución:

$$((\eta_A \circ \varepsilon_C) * f)(c) = \sum \varepsilon_C(c_1)f(c_2) = f\left(\sum \varepsilon_C(c_1)c_2\right) = f(c),$$

$$(f * (\eta_A \circ \varepsilon_C))(c) = \sum f(c_1)\varepsilon_C(c_2) = f\left(\sum c_1\varepsilon_C(c_2)\right) = f(c),$$

de onde se conclúe o resultado. □

Definición 2.22. Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H)$ unha biálgebra. Coñécese como **antípoda** a un endomorfismo $S_H \in \text{Hom}_k(H, H)$ que é inverso da id_H con respecto á operación convolución, é dicir:

$$S_H * id_H = \eta_H \circ \varepsilon_H = id_H * S_H \tag{2.3}$$

ou, coa notación de Sweedler:

$$\sum S_H(h_1)h_2 = (\eta_H \circ \varepsilon_H)(h) = \sum h_1 S_H(h_2)$$

para todo $h \in H$.

Proposición 2.23. *Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H)$ unha k -biálgebra. Se a antípoda existe, é única.*

Demostración. Se existen dúas antípodas $S_H, S'_H \in \text{Hom}_k(H, H)$, entón:

$$S_H \stackrel{(1)}{=} S_H * (\eta_H \circ \varepsilon_H) \stackrel{(2)}{=} S_H * (id_H * S'_H) \stackrel{(3)}{=} (S_H * id_H) * S'_H \stackrel{(4)}{=} (\eta_H \circ \varepsilon_H) * S'_H \stackrel{(5)}{=} S'_H$$

onde (1) e (5) son consecuencia de que $\eta_H \circ \varepsilon_H$ é o neutro para a convolución, (2) e (4) séguense de 2.3 e (3) da asociatividade da convolución. \square

Definición 2.24. Unha k -álgebra de Hopf é unha 6-tupla $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ onde $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H)$ é unha k -biálgebra e S_H é a antípoda.

Ademais, dirase que H é **conmutativa** (respectivamente, **coconmutativa**) se o é a súa k -álgebra (respectivamente, k -coálgebra) subxacente.

Definición 2.25. Unha aplicación $f: H \rightarrow D$ entre k -álgebras de Hopf é un **morfismo de k -álgebras de Hopf** se é un morfismo de k -biálgebras.

Proposición 2.26. *Sexan $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ e $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \Delta_D, S_D)$ k -álgebras de Hopf. Se $f: H \rightarrow D$ é un morfismo de k -álgebras de Hopf, entón tense a seguinte igualdade:*

$$S_D \circ f = f \circ S_H.$$

Demostración. Por unha banda:

$$\begin{aligned} f * (S_D \circ f) &= \mu_D \circ (f \otimes (S_D \circ f)) \circ \Delta_H && \text{(definición de *)} \\ &= \mu_D \circ (id_D \otimes S_D) \circ \Delta_D \circ f && \text{(f morfismo de coálgebras)} \\ &= (id_D * S_D) \circ f && \text{(definición de *)} \\ &= \eta_D \circ \varepsilon_D \circ f && \text{((2.3) para } S_D) \\ &= \eta_D \circ \varepsilon_H && \text{(f morfismo de coálgebras).} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (f \circ S_H) * f &= \mu_D \circ ((f \circ S_H) \otimes f) \circ \Delta_H && \text{(definición de *)} \\ &= f \circ \mu_H \circ (S_H \otimes id_H) \circ \Delta_H && \text{(f morfismo de álgebras)} \\ &= f \circ (S_H * id_H) && \text{(definición de *)} \\ &= f \circ \eta_H \circ \varepsilon_H && \text{((2.3) para } S_H) \\ &= \eta_D \circ \varepsilon_H && \text{(f morfismo de álgebras).} \end{aligned}$$

Pola unicidade de inverso para a convolución en $\text{Hom}_k(H, D)$, conclúese o resultado. \square

Viuse no Exemplo 2.18 da sección anterior que o dual dunha biálgebra admite tamén estrutura de biálgebra, no caso de que esta sexa de dimensión finita. Resulta natural preguntarse se a biálgebra dual é tamén unha álgebra de Hopf, i. e., se admite antípoda. O seguinte resultado resolve esta cuestión.

Proposición 2.27 ([19], Proposition 3.1.12). *Se $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ é unha k -álgebra de Hopf de dimensión finita, entón a k -biálgebra dual $(H^*, \eta_{H^*}, \mu_{H^*}, \varepsilon_{H^*}, \Delta_{H^*})$ é unha k -álgebra de Hopf con antípoda S_H^* .*

Demostración. Sexa $h \in H, f \in H^*$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum S_H^*(f_1)f_2\right)(h) &= \sum S_H^*(f_1)(h_1)f_2(h_2) && \text{(definición de } \mu_{H^*}\text{)} \\
&= \sum f_1(S_H(h_1))f_2(h_2) && \text{(definición de aplicación dual)} \\
&= f\left(\sum S_H(h_1)h_2\right) && \text{(definición de } \Delta_{H^*}\text{)} \\
&= f((\eta_H \circ \varepsilon_H)(h)) && \text{((2.3) para } S_H\text{)} \\
&= (\varepsilon_H^* \circ \eta_H^*)(f)(h) && \text{(definición de aplicación dual).}
\end{aligned}$$

De xeito análogo demóstrase que $(id_{H^*} * S_H^*)(f) = (\eta_{H^*} \circ \varepsilon_{H^*})(f)$, o que proba o resultado. \square

O seguinte resultado describe de que forma interactúa a antípoda co resto de operacións da álgebra de Hopf.

Proposición 2.28 ([16], Proposition 1.5.10). *Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf. Tense que:*

1) S_H é un *antimorfismo de k -álgebras*, é dicir:

$$S_H \circ \mu_H = \mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (S_H \otimes S_H),$$

$$S_H \circ \eta_H = \eta_H.$$

2) S_H é un *antimorfismo de k -coálgebras*, é dicir:

$$\Delta_H \circ S_H = \tau_{H,H} \circ (S_H \otimes S_H) \circ \Delta_H,$$

$$\varepsilon_H \circ S_H = \varepsilon_H.$$

Demostración. Para probar a primeira igualdade de 1) defínense as seguintes aplicacións $\omega, \theta \in \text{Hom}_k(H \otimes H, H)$:

$$\omega := S_H \circ \mu_H, \quad \theta := \mu_H \circ \tau_{H,H} \circ (S_H \otimes S_H).$$

Entón, para todo $h, g \in H$ tense a seguinte cadea de igualdades:

$$\begin{aligned} (\omega * \mu_H)(h \otimes g) &= \sum \omega((h \otimes g)_1) \mu_H((h \otimes g)_2) && \text{(definición de *)} \\ &= \sum \omega(h_1 \otimes g_1) \mu_H(h_2 \otimes g_2) && \text{(definición de } \Delta_{H \otimes H}) \\ &= \sum S_H(h_1 g_1) h_2 g_2 && \text{(definición de } \omega) \\ &= \sum S_H((hg)_1) (hg)_2 && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras)} \\ &= (\eta_H \circ \varepsilon_H)(hg) && \text{((2.3) para } S_H) \\ &= (\eta_H \circ \varepsilon_{H \otimes H})(h \otimes g) && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras)}. \end{aligned}$$

Doutra banda,

$$\begin{aligned} (\mu_H * \theta)(h \otimes g) &= \sum \mu_H((h \otimes g)_1) \theta((h \otimes g)_2) && \text{(definición de *)} \\ &= \sum \mu_H(h_1 \otimes g_1) \theta(h_2 \otimes g_2) && \text{(definición de } \Delta_{H \otimes H}) \\ &= \sum h_1 g_1 S_H(g_2) S_H(h_2) && \text{(definición de } \theta) \\ &= \sum h_1 \eta_H(\varepsilon_H(g)) S_H(h_2) && \text{((2.3) para } S_H) \\ &= \eta_H(\varepsilon_H(h)) \eta_H(\varepsilon_H(g)) && (\eta_H \text{ unidade, (2.3) para } S_H) \\ &= \eta_H(\varepsilon_H(hg)) && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras, } \eta_H \text{ lineal)} \\ &= (\eta_H \circ \varepsilon_{H \otimes H})(h \otimes g) && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras)}. \end{aligned}$$

Como $(\text{Hom}_k(H \otimes H, H), *)$ é un monoide con neutro $\eta_H \circ \varepsilon_{H \otimes H}$, pola unicidade do inverso conclúese que $\omega = \theta$, como se quería demostrar.

A segunda igualdade dedúcese do seguinte:

$$\begin{aligned} S_H \circ \eta_H &= \mu_H \circ ((S_H \circ \eta_H) \otimes \eta_H) && (\eta_H \text{ unidade}) \\ &= \mu_H \circ (S_H \otimes id_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H) && \text{(Proposición 1.11)} \\ &= \mu_H \circ (S_H \otimes id_H) \circ \Delta_H \circ \eta_H && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras)} \\ &= (S_H * id_H) \circ \eta_H && \text{(definición de *)} \\ &= \eta_H \circ \varepsilon_H \circ \eta_H && \text{(2.3 para } S_H) \\ &= \eta_H && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras)}, \end{aligned}$$

co que queda probado 1).

Para a demostración de 2) defínense as aplicacións $\varphi, \nu \in \text{Hom}_k(H, H \otimes H)$

$$\varphi := \Delta_H \circ S_H, \quad \nu := \tau_{H,H} \circ (S_H \otimes S_H) \circ \Delta_H.$$

Dado $h \in H$,

$$\begin{aligned} (\varphi * \Delta_H)(h) &= \sum \Delta_H(S_H(h_1))\Delta_H(h_2) && \text{(definición de } * \text{ e de } \varphi) \\ &= \Delta_H \left(\sum S_H(h_1)h_2 \right) && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras}) \\ &= \Delta_H(\eta_H(\varepsilon_H(h))) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= (\eta_{H \otimes H} \circ \varepsilon_H)(h) && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras}). \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} (\Delta_H * \nu)(h) &= \sum (h_1 \otimes h_2)(S_H(h_4) \otimes S_H(h_3)) && \text{(definición de } * \text{ e de } \nu) \\ &= \sum h_1 S_H(h_4) \otimes h_2 S_H(h_3) && \text{(definición de } \mu_{H \otimes H}) \\ &= \sum h_1 S_H(h_3) \otimes \eta_H(\varepsilon_H(h_2)) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= \sum h_1 \varepsilon_H(h_2) S_H(h_3) \otimes \eta_H(1_k) && \text{(linealidade de } \eta_H) \\ &= \sum h_1 S_H(h_2) \otimes \eta_H(1_k) && (\varepsilon_H \text{ counidade}) \\ &= \eta_H(\varepsilon_H(h)) \otimes \eta_H(1_k) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= (\eta_{H \otimes H} \circ \varepsilon_H)(h) && \text{(definición de } \eta_{H \otimes H}). \end{aligned}$$

De novo, por ser $(\text{Hom}_k(H, H \otimes H), *)$ un monoide con neutro $\eta_{H \otimes H} \circ \varepsilon_H$, conclúese que $\varphi = \nu$.

Por último, tense que para calquera $h \in H$

$$\begin{aligned} \varepsilon_H(S_H(h)) &= \varepsilon_H \left(S_H \left(\sum \varepsilon_H(h_1)h_2 \right) \right) && (\varepsilon_H \text{ counidade}) \\ &= \varepsilon_H \left(\sum \varepsilon_H(h_1)S_H(h_2) \right) && \text{(linealidade de } S_H) \\ &= \sum \varepsilon_H(h_1)\varepsilon_H(S_H(h_2)) && \text{(linealidade de } \varepsilon_H) \\ &= \varepsilon_H \left(\sum h_1 S_H(h_2) \right) && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras}) \\ &= \varepsilon_H(\eta_H(\varepsilon_H(h))) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= \varepsilon_H(h) && (\varepsilon_H \text{ morfismo de álgebras}), \end{aligned}$$

e, polo tanto, o resultado queda probado. \square

Observación 2.29. Nótese que no enunciado da proposición interior a primeira condición é equivalente a que $S_H: H \rightarrow H^{op}$ sexa un morfismo de k -álgebras e a segunda a que $S_H: H \rightarrow H^{cop}$ sexa un morfismo de k -coálgebras. Como consecuencia, $S_H: H \rightarrow H^{op\,cop}$ é un morfismo de k -biálgebras.

Observación 2.30. Obsérvese que se H é unha álgebra de Hopf con antípoda S_H , a bialgebra H^{opcop} é tamén unha álgebra de Hopf con antípoda S_H . Sen embargo, para poder dotar a H^{op} e H^{cop} de estrutura de álgebra de Hopf, debe existir un morfismo $\bar{S}_H \in \text{Hom}_k(H, H)$ tal que

$$\sum \bar{S}_H(h_2)h_1 = (\eta_H \circ \varepsilon_H)(h) = \sum h_2\bar{S}_H(h_1) \quad (2.4)$$

$\forall h \in H$. Coñécese a \bar{S}_H como **antípoda retorcida** de H .

Proposición 2.31 ([16], Lemma 1.5.11). *Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf. A súa antípoda S_H é invertible se e só se existe \bar{S}_H a antípoda retorcida de H e, nese caso, $S_H^{-1} = \bar{S}_H$.*

Demostración. Súpoñase en primeiro lugar que S_H é invertible. Nese caso, o seu inverso S_H^{-1} será tamén un antimorfismo tanto de álgebras como de coálgebras. Isto débese a que un antimorfismo de álgebras e coálgebras non é máis que un morfismo de bialgebras de H en H^{opcop} , e os isomorfismos de bialgebras son precisamente os morfismos bixectivos. Tendo en conta isto:

$$\begin{aligned} \sum S_H^{-1}(h_2)h_1 &= \sum S_H^{-1}(h_2)S_H^{-1}(S_H(h_1)) && (S_H \text{ é bixectiva}) \\ &= S_H^{-1}\left(\sum S_H(h_1)h_2\right) && (S_H^{-1} \text{ antimorfismo de álgebras}) \\ &= S_H^{-1}(\eta_H(\varepsilon_H(h))) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= \eta_H(\varepsilon_H(h)) && (S_H^{-1} \text{ antimorfismo de álgebras}), \end{aligned}$$

e analogamente $\sum h_2S_H^{-1}(h_1) = (\eta_H \circ \varepsilon_H)(h)$, polo que S_H^{-1} é unha antípoda retorcida.

A continuación probarase que tamén se satisfai a outra implicación. Sexa S_H a antípoda de H e \bar{S}_H a antípoda retorcida. Para calquera $h \in H$

$$\begin{aligned} \bar{S}_H(S_H(h)) &= \sum \bar{S}_H(S_H(\varepsilon_H(h_2)h_1)) && (\varepsilon_H \text{ counidade}) \\ &= \sum \varepsilon_H(h_2)\bar{S}_H(S_H(h_1)) && (\text{linealidade de } S_H \text{ e } \bar{S}_H) \\ &= \sum h_3\bar{S}_H(h_2)\bar{S}_H(S_H(h_1)) && (2.4 \text{ para } \bar{S}_H) \\ &= \sum h_3\bar{S}_H(S_H(h_1)h_2) && (\bar{S}_H \text{ antimorfismo de álgebras}) \\ &= \sum h_2\bar{S}_H(\eta_H(\varepsilon_H(h_1))) && (2.3 \text{ para } S_H) \\ &= \sum \varepsilon_H(h_1)h_2 && (\bar{S}_H \text{ antimorfismo de álgebras}) \\ &= h && (\varepsilon_H \text{ counidade}). \quad \square \end{aligned}$$

Observación 2.32. Sexa H unha álgebra de Hopf con antípoda invertible S_H . Nótese que pola Proposición 2.28, tanto $S_H: H \rightarrow H^{opcop}$ como o seu inverso $S_H^{-1}: H^{op} \rightarrow H^{cop}$ son morfismos de

álxebras de Hopf e polo tanto $H \cong H^{opcop}$ e $H^{op} \cong H^{cop}$. Adicionalmente, se H é conmutativa ou coconmutativa, entón terase que $S_H^{-1} = S_H$ pola unicidade da antípoda, e en consecuencia $S_H^2 = id_H$.

Como último resultado, demostrarase unha proposición que xustifica o nome que se lles deu aos grouplike.

Proposición 2.33 ([11], *Proposition III.3.7*). *Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álxebra de Hopf. O conxunto dos grouplike $\mathcal{G}(H)$ ten estrutura de grupo.*

Demostración. Por ser H unha biálxebra, $\mathcal{G}(H)$ é un monoide. Agora ben, dado un $h \in \mathcal{G}(H)$ arbitrario, $S_H(h)$ tamén está en $\mathcal{G}(H)$ xa que

$$\begin{aligned}\Delta_H(S_H(h)) &= S_H(h) \otimes S_H(h), \\ \varepsilon_H(S_H(h)) &= \varepsilon_H(h) = 1_k,\end{aligned}$$

por ser S_H un antimorfismo de coálxebras. Ademais, pola definición de antípoda

$$S_H(h)h = hS_H(h) = \eta_H(\varepsilon_H(h)) = \eta_H(1_k)$$

polo que $S_H(h) = h^{-1} \in \mathcal{G}(H)$ e entón é un grupo. \square

Para finalizar o capítulo porporciónanse varios exemplos importantes de álxebras de Hopf:

Exemplo 2.34.

1. Considérese un grupo (G, \cdot) con neutro e . No Exemplo 2.18 viuse que o espazo vectorial kG ten estrutura de k -biálxebra, por ser G en particular un monoide. Neste caso a invertibilidade dos elementos de G permite definir un endomorfismo lineal S_{kG} tal que

$$S_{kG}(g) = g^{-1}$$

$\forall g \in G$. Deste xeito, como $S_{kG}(g)g = e = gS_{kG}(g) \forall g \in G$ e S_{kG} é lineal, satisfaise a propiedade (2.3) da antípoda. Polo tanto kG ten estrutura de k -álxebra de Hopf con antípoda S_{kG} . Nótese ademais que kG é coconmutativa, independentemente do grupo G , mentres que será conmutativa se e só se G é abeliano.

2. Sexa G un grupo finito. Acábase de ver que kG é unha k -álxebra de Hopf, e pola Proposición 2.27 tamén o será entón $(kG)^*$. A continuación descríbense as operacións desta k -álxebra de Hopf sobre os elementos dunha base. Considérese por exemplo $\{p_g\}_{g \in G}$, tales que $p_g(x) = \delta_{g,x} \forall g, x \in G$, onde $\delta_{g,g} = 1 \forall g \in G$ e $\delta_{g,x} = 0$ se $g \neq x$. Por definición de $\mu_{(kG)^*}$:

$$(p_g p_h)(x) = (p_g \otimes p_h)(\Delta_{kG}(x)) = p_g(x) p_h(x) = \delta_{g,x} \delta_{h,x}$$

$\forall g, h, x \in G$, e polo tanto $p_g^2 = p_g$ e $p_g p_h = 0$ se $g \neq h$. Ademais, por definición de $\Delta_{(kG)^*}$

$$\sum (p_g)_1(x)(p_g)_2(y) = p_g(xy) = \delta_{g,xy}$$

$\forall g, x, y \in G$, do que se deduce que

$$\Delta_{(kG)^*}(p_g) = \sum_{ht=g} p_h \otimes p_t.$$

Por outra parte

$$S_{(kG)^*}(p_g(x)) = S_{kG}^*(p_g(x)) = p_g(S_{kG}(x)) = p_g(x^{-1}) = \delta_{g,x^{-1}} = \delta_{g^{-1},x}$$

$\forall x \in G$ e entón $S_{(kG)^*}(p_g) = p_{g^{-1}}$. De igual maneira dedúcese que a unidade e counidade son tales que

$$\eta_{(kG)^*}(1_k) = \sum_{g \in G} p_g \quad \text{e} \quad \varepsilon_{(kG)^*}(p_g) = \delta_{g,e}.$$

Neste caso $(kG)^*$ é un exemplo de álgebra de Hopf conmutativa, que ademais será coconmutativa se e só se G é abeliano.

3. Para introducir o seguinte exemplo é preciso dar dúas definicións previas:

- Sexa V un k -espazo vectorial. Considérese o k -espazo

$$T(V) := \bigoplus_{k \geq 0} T^k(V),$$

onde $T^0(V) = k$ e $T^k(V) = V^{\otimes k} \forall k \geq 1$. Coñécese á k -álgebra $(T(V), \eta, \mu)$ como **k -álgebra tensorial de V** , onde μ e η son tales que $\forall s, r \geq 1$ e $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r \in V$

$$\mu((x_1 \otimes \dots \otimes x_s) \otimes (y_1 \otimes \dots \otimes y_r)) = x_1 \otimes \dots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_r,$$

$$\eta(1_k) = 1_k.$$

- Unha **k -álgebra de Lie** é un par $(\mathfrak{g}, [\ , \])$ onde \mathfrak{g} é un k -espazo vectorial e $[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ unha aplicación k -bilineal satisfacendo as seguintes propiedades:

- Antisimétrica:

$$[x, y] = -[y, x],$$

- Identidade de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Sexa $(\mathfrak{g}, [,])$ unha k -álgebra de Lie e $T(\mathfrak{g})$ a súa k -álgebra tensorial. Sexa $I(\mathfrak{g})$ o ideal bilátero de $T(\mathfrak{g})$ xerado polos elementos da forma

$$xy - yx - [x, y],$$

con $x, y \in \mathfrak{g}$. Coñécese como **k -álgebra envolvente universal de \mathfrak{g}** á k -álgebra cociente

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g}).$$

Ademais, pódese dotar a $U(\mathfrak{g})$ de estrutura de k -álgebra de Hopf mediante aplicacións ε , Δ e S que actúan sobre os elementos de \mathfrak{g} da seguinte forma:

$$\Delta(x) = x \otimes 1_k + 1_k \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0 \quad \text{e} \quad S(x) = -x.$$

Polo tanto $U(\mathfrak{g})$ é un exemplo de k -álgebra de Hopf coconmutativa. Para ver esta construción en máis detalle pódese consultar, por exemplo, [11].

4. Sexa k un corpo de característica distinta de 2 e considérese a k -álgebra

$$H = k\langle 1, x, g, xg : g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle.$$

Pódese dotar a H de estrutura de álgebra de Hopf mediante aplicacións ε_H , Δ_H e S_H tales que

$$\begin{aligned} \Delta_H(g) &= g \otimes g, & \Delta_H(x) &= x \otimes 1 + g \otimes x, \\ \varepsilon_H(g) &= 1_k, & \varepsilon_H(x) &= 0, \\ S_H(g) &= g, & S_H(x) &= -gx. \end{aligned}$$

Este exemplo foi introducido por primeira vez por Sweedler en [18], e trátase da álgebra de Hopf non conmutativa e non coconmutativa de menor dimensión. Este tipo de álgebras de Hopf coñécense como **grupos cuánticos**.

Capítulo 3

Módulos de Hopf

Neste capítulo introducirase o concepto de módulo de Hopf e probarase o teorema fundamental destes obxectos, que da nome a este traballo. Con este obxectivo introducirase o concepto de módulo sobre unha álgebra, así como o seu concepto dual: comódulo sobre unha coálgebra. Para finalizar, darase algún exemplo de aplicación deste resultado.

3.1. Módulos e comódulos

Nesta primeira sección definiranse os conceptos de módulo e comódulo, acompañados de exemplos e dun resultado de dualidade semellante aos vistos para álgebras e coálgebras na primeira sección do capítulo anterior. Ademais, para unha álgebra de Hopf H e un H -módulo M , introduciranse os conceptos de submódulos de invariantes e coinvariantes de H en M , sendo este último necesario para enunciar o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf na sección seguinte.

Definición 3.1. Sexa (A, η_A, μ_A) unha k -álgebra. Un A -módulo **pola esquerda** é un par (M, γ_M) onde M é un k -espazo vectorial e $\gamma_M: A \otimes M \rightarrow M$ unha aplicación k -lineal facendo conmutativos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{\mu_A \otimes id_M} & A \otimes M \\
 \downarrow id_A \otimes \gamma_M & & \downarrow \gamma_M \\
 A \otimes M & \xrightarrow{\gamma_M} & A
 \end{array}$$

Diagrama 3.1

$$\begin{array}{ccc}
 k \otimes M & \xrightarrow{\eta_A \otimes id_M} & A \otimes M \\
 & \searrow \cong & \downarrow \gamma_M \\
 & & M
 \end{array}$$

Diagrama 3.2

A aplicación γ_M denomínase **acción pola esquerda**.

De xeito análogo pódese definir o concepto de A -módulo pola dereita.

Notación 3.2. Cando sexa conveniente empregarase a seguinte notación para a acción de A -módulos:

$$a \cdot m := \gamma_M(a \otimes m)$$

$$\forall a \in A, m \in M.$$

Dualizando os diagramas anteriores obtense a definición de comódulo sobre unha coálgebra.

Definición 3.3. Sexa $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ unha k -coálgebra. Un C -**comódulo pola dereita** é un par (M, ρ_M) onde M é un k -espazo vectorial e $\rho_M: M \rightarrow M \otimes C$ unha aplicación k -lineal facendo conmutativos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & M \otimes C \\ \downarrow \rho_M & & \downarrow id_M \otimes \Delta_C \\ M \otimes C & \xrightarrow{\rho_M \otimes id_C} & M \otimes C \otimes C \end{array}$$

Diagrama 3.3

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho_M} & M \otimes C \\ & \searrow \cong & \downarrow id_M \otimes \varepsilon_C \\ & & M \otimes k \end{array}$$

Diagrama 3.4

A aplicación ρ_M denomínase **coacción pola dereita**.

De xeito análogo pódese definir o concepto de C -comódulo pola esquerda.

Observación 3.4. Nótese que todo A -módulo pola dereita (M, γ_M) da lugar a un A^{op} -módulo pola esquerda (M, γ'_M) con

$$\gamma'_M := \gamma_M \circ \tau_{A, M}.$$

De igual forma, todo C -comódulo pola esquerda (M, ρ_M) correspóndese cun C^{cop} -comódulo pola dereita (M, ρ'_M) con

$$\rho'_M := \tau_{C, M} \circ \rho_M.$$

En consecuencia, todo resultado que sexa certo para módulos pola esquerda (respectivamente, comódulos pola dereita) tamén o será para módulos pola dereita (comódulos pola esquerda). Polo tanto, ao longo desta sección consideraranse só módulos (comódulos) do primeiro tipo.

Sexa (M, ρ_M) un C -comódulo pola dereita. A imaxe dun $m \in M$ calquera pola aplicación ρ_M denotarase por

$$\rho_M(m) = \sum m_0 \otimes m_1,$$

con $m_0 \in M$, $m_1 \in C$. Empregando esta notación, o Diagrama 3.3 e o Diagrama 3.4 poden escribirse como segue:

$$\begin{aligned} \sum (m_0)_0 \otimes (m_0)_1 \otimes m_1 &= \sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2, \\ \sum \varepsilon_C(m_1)m_0 &= m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A propiedade (3.1) garante que, dado un $m \in M$, todas as formas posibles de aplicar ρ_M e Δ_C iterativamente $n - 1$ veces sobre $\rho_M(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ dan lugar ao mesmo elemento de $M \otimes C^{\otimes n}$. Este denotarase por

$$\sum m_0 \otimes m_1 \otimes m_2 \dots \otimes m_n,$$

onde $m_0 \in M$ e $m_i \in C \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 3.5. Sexan (M, γ_M) e (N, γ_N) A -módulos pola esquerda. Unha aplicación k -lineal $f: M \rightarrow N$ é un **morfismo de A -módulos pola esquerda** se o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{id_A \otimes f} & A \otimes N \\ \downarrow \gamma_M & & \downarrow \gamma_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Diagrama 3.5: A -linealidade de f .

é conmutativo. Equivalentemente, se se cumpre que

$$a \cdot f(m) = f(a \cdot m)$$

para todo $m \in M$ e $a \in A$.

Definición 3.6. Sexan (M, ρ_M) e (N, ρ_N) C -comódulos pola dereita. Unha aplicación k -lineal $f: M \rightarrow N$ é un **morfismo de C -comódulos pola dereita** se fai conmutativo ao seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \rho_M & & \downarrow \rho_N \\ M \otimes C & \xrightarrow{f \otimes id_C} & N \otimes C \end{array}$$

Diagrama 3.6: C -colinealidade de f .

ou, equivalentemente, se se cumpre que

$$\sum (f(m))_0 \otimes (f(m))_1 = \sum f(m_0) \otimes m_1$$

para todo $m \in M$.

Á vista da relación dual entre álxebras e coálxebras estudada no capítulo anterior, cabe preguntarse se a acción dunha álgebra sobre un espazo vectorial M induce unha coacción da súa coálgebra dual sobre M , e viceversa. Preséntase a continuación un resultado que da resposta a esta cuestión.

Observación 3.7. Sexa k un corpo e V e W k -espazos vectoriais. Entón a aplicación k -lineal $\sigma: V \otimes W^* \rightarrow \text{Hom}_k(W, V)$ definida por

$$\sigma(v \otimes f)(w) = f(w)v$$

$\forall w \in W$, é inxectiva. En efecto, para todo $f \in W^*$ e $v \in V$:

$$\sigma(v \otimes f) = 0 \iff \sigma(v \otimes f)(w) = f(w)v = 0 \forall w \in W \iff f(w) = 0 \forall w \in W \text{ ou } v = 0 \iff v \otimes f = 0.$$

Proposición 3.8 ([16], Lemma 1.6.4).

- 1) Se (M, ρ_M) é un C -comódulo pola dereita, entón M admite unha estrutura de C^* -módulo pola esquerda inducida por ρ_M .
- 2) Se (M, γ_M) é un A -módulo pola esquerda e A ten dimensión finita, entón M admite unha estrutura de A^* -comódulo pola dereita inducida por γ_M .

Demostración.

- 1) Considérese a aplicación lineal $\gamma: C^* \otimes M \rightarrow M$ satisfacendo

$$\gamma(f \otimes m) = \sum f(m_1)m_0$$

para todo $f \in C^*$, $m \in M$. (M, γ) é un C^* -módulo pola esquerda. En efecto, dados $f, g \in C^*$, $m \in M$ arbitrarios, aplicando a definición de γ en (1) e (3), a definición de μ_{C^*} en (2), e a conmutatividade do Diagrama 3.3 en (3):

$$\begin{aligned} \gamma(\mu_{C^*}(f \otimes g) \otimes m) &\stackrel{(1)}{=} \sum fg(m_1)m_0 \stackrel{(2)}{=} \sum f(m_1)g(m_2)m_0, \\ \gamma(f \otimes \gamma(g \otimes m)) &\stackrel{(1)}{=} \gamma\left(f \otimes \sum g(m_1)m_0\right) \stackrel{(3)}{=} \sum f(m_1)g(m_2)m_0, \end{aligned}$$

de onde se conclúe que γ satisfai a conmutatividade do Diagrama 3.1. Por outra parte, a propiedade do Diagrama 3.2 dedúcese da definición de η_{C^*} e de que ρ_M fai conmutativo ao Diagrama 3.4:

$$\gamma(\eta_{C^*}(1_k) \otimes m) = \sum \varepsilon_C(m_1)m_0 = m.$$

- 2) Fixado un $m \in M$, o k -espazo vectorial $A \cdot m := \{\gamma_M(a \otimes m) | a \in A\}$ ten dimensión finita, e polo tanto pódese tomar unha k -base da forma $\{m_i\}_{i=1}^n$. Entón $\forall a \in A$, $a \cdot m = \sum_{i=1}^n a_i m_i$ para certos $a_i \in k$. Esta relación determina unhas aplicacións $f_i \in A^*$ tales que $f_i(a) = a_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall a \in A$. Considérese a aplicación k -lineal $\rho: M \rightarrow M \otimes A^*$ definida por

$$\rho(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes f_i$$

para todo $m \in M$. Esta aplicación está ben definida, como se comproba a continuación: Sexa $m \in M$, sexan $\{m_i\}_{i=1}^n$ e $\{\tilde{m}_i\}_{i=1}^n$ bases distintas de $A \cdot m$, e $\{f_i\}_{i=1}^n, \{\tilde{f}_i\}_{i=1}^n \subseteq A^*$ as aplicacións lineais asociadas a cada base. Pola Observación 3.7 $\sigma: M \otimes A^* \rightarrow \text{Hom}_k(A, M)$ é inxectiva e, en consecuencia,

$$\sum_{i=1}^n f_i(a) m_i = a \cdot m = \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(a) \tilde{m}_i \quad \forall a \in A \implies \sum_{i=1}^n m_i \otimes f_i = \sum_{i=1}^n \tilde{m}_i \otimes \tilde{f}_i,$$

polo que ρ está ben definida.

Por último, compróbase que (M, ρ) é un A^* -comódulo pola dereita. Denotando $\rho(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes f_i$ e $\rho(m_i) = \sum_{j=1}^{n_i} m'_j \otimes f'_j$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, tense que

$$\begin{aligned} ((\rho \otimes id_{A^*}) \circ \rho)(m) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} m'_j \otimes f'_j \otimes f_i, \\ ((id_M \otimes \Delta_{A^*}) \circ \rho)(m) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} m_i \otimes (f_i)_1 \otimes (f_i)_2. \end{aligned}$$

Sexan $\lambda: M \otimes A^* \otimes A^* \rightarrow M \otimes (A \otimes A)^*$ e $\sigma: M \otimes (A \otimes A)^* \rightarrow \text{Hom}_k(A \otimes A, M)$ os monoformismos definidos nas Observacións 2.1 e 3.7, respectivamente. Aplicándolle a súa composición $\sigma \circ \lambda$ ás dúas expresións anteriores e avaliando en $a \otimes b \in A \otimes A$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(b) \sum_{j=1}^{n_i} f'_j(a) m'_j &= a \cdot \sum_{i=1}^n f_i(b) m_i = a \cdot (b \cdot m), \\ \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=1}^{n_i} (f_i)_1(a) (f_i)_2(b) &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n m_i f_i(ab) = (ab) \cdot m, \end{aligned}$$

onde todas as igualdades son consecuencia da definición de ρ e $(*)$ da definición de Δ_{A^*} . Como γ satisfai o Diagrama 3.1 e $\sigma \circ \lambda$ é inxectiva, conclúese que ρ fai conmutativo ao Diagrama 3.3. Por outra parte, a propiedade do Diagrama 3.4 dedúcese directamente da definición de ε_{A^*} :

$$((id_M \otimes \varepsilon_{A^*}) \circ \rho)(m) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \varepsilon_{A^*}(f_i) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes f_i(\eta_A(1_k)) \stackrel{(**)}{=} m,$$

onde $(**)$ se debe a que $\sum_{i=1}^n f_i(\eta_A(1_k)) m_i = \eta_A(1_k) \cdot m = m$, pola definición de ρ_M . \square

Observación 3.9. Para unha álgebra (A, η_A, μ_A) de dimensión finita, sexa (M, γ_M) un A -módulo pola esquerda e (M, ρ) o A^* -comódulo pola dereita inducido pola proposición anterior. Nótese que, por construción, a coacción ρ está caracterizada pola seguinte propiedade:

$$a \cdot m = \sum m_1(a)m_0$$

$\forall a \in A, m \in M.$

Exemplo 3.10. Os seguintes son exemplos de módulos e comódulos:

1. Toda k -álgebra (A, η_A, μ_A) é un A -módulo pola esquerda coa acción $\gamma_A := \mu_A$. De igual xeito, toda k -coálgebra $(C, \varepsilon_C, \Delta_C)$ é un C -comódulo pola dereita coa coacción $\rho_C := \Delta_C$.
2. Dada unha k -álgebra de Hopf $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$, todo k -espazo vectorial M admite unha estrutura de H -módulo pola esquerda, que ven dada pola acción

$$\gamma_M(h \otimes m) := \varepsilon_H(h)m$$

$\forall m \in M, h \in H.$ Coñécese a (M, γ_M) como **H -módulo trivial pola esquerda.**

3. Dada unha k -álgebra de Hopf $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$, todo k -espazo vectorial M admite unha estrutura de H -comódulo pola dereita mediante a coacción

$$\rho_M(m) := m \otimes \eta_H(1_k)$$

$\forall m \in M.$ Coñécese a (M, ρ_M) como **H -comódulo trivial pola dereita.**

4. Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf e $(M, \gamma_M), (N, \gamma_N)$ H -módulos pola esquerda. Entón $M \otimes N$ é un H -módulo pola esquerda coa acción

$$\gamma_{M \otimes N} := (\gamma_M \otimes \gamma_N) \circ (id_H \otimes \tau_{H,M} \otimes id_N) \circ (\Delta_H \otimes id_{M \otimes N}),$$

ou, en termos de elementos,

$$h \cdot (m \otimes n) = \sum (h_1 \cdot m) \otimes (h_2 \cdot n)$$

$\forall h \in H, m \in M$ e $n \in N.$ Nótese ademais que, se H é coconmutativa,

$$\begin{aligned} (\gamma_{N \otimes M} \circ (id_H \otimes \tau_{M,N}))(h \otimes m \otimes n) &= \sum (h_1 \cdot n) \otimes (h_2 \cdot m) \\ &= \sum (h_2 \cdot n) \otimes (h_1 \cdot m) \\ &= (\tau_{M,N} \circ \gamma_{M \otimes N})(h \otimes m \otimes n) \end{aligned}$$

e polo tanto $\tau_{M,N}: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ é un isomorfismo de H -módulos pola esquerda.

5. Analogamente, se $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ é unha k -álgebra de Hopf, (M, ρ_M) e (N, ρ_N) H -comódulos pola dereita, entón $M \otimes N$ é un H -comódulo pola dereita coa coacción

$$\rho_{M \otimes N} := (id_{M \otimes N} \otimes \mu_H) \circ (id_M \otimes \tau_{H, N} \otimes id_H) \circ (\rho_M \otimes \rho_N),$$

ou, con outra notación:

$$\rho_{M \otimes N}(m \otimes n) = \sum m_0 \otimes n_0 \otimes m_1 n_1$$

para todo $m \in M$, $n \in N$. De forma análoga ao exemplo anterior, se H é conmutativa cúmprese a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} (\rho_{N \otimes M} \circ \tau_{M, N})(m \otimes n) &= \sum n_0 \otimes m_0 \otimes n_1 m_1 \\ &= \sum n_0 \otimes m_0 \otimes m_1 n_1 \\ &= ((\tau_{M \otimes N} \otimes id_H) \circ \rho_{M \otimes N})(m \otimes n), \end{aligned}$$

polo que $\tau_{M, N}: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ é un isomorfismo de H -comódulos pola dereita.

6. Considérese a k -álgebra de Hopf kG descrita no Exemplo 2.34. Verase a continuación que un k -espazo vectorial M admite estrutura de kG -comódulo pola dereita se e só se M é un k -espazo vectorial G -graduado, é dicir, se existe unha colección de subespazos de M $\{M_g: g \in G\}$ tal que $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$.

En primeiro lugar, se (M, ρ_M) é un kG -comódulo pola dereita, entón pódese escribir a coacción sobre un $m \in M$ da seguinte forma:

$$\rho_M(m) = \sum_{g \in G} m_g \otimes g.$$

Como ρ_M satisfai o Diagrama 3.3, cúmprense as seguintes igualdades:

$$\sum_{g, h \in G} (m_g)_h \otimes h \otimes g = \sum_{g \in G} \rho_M(m_g) \otimes g = \sum_{g \in G} m_g \otimes \Delta_{kG}(g) = \sum_{g \in G} m_g \otimes g \otimes g,$$

de onde se deduce que $(m_g)_h = \delta_{g, h} m_g \forall g, h \in G$ e polo tanto

$$\rho_M(m_g) = m_g \otimes g.$$

Para cada $g \in G$ considérese o conxunto $M_g = \{m_g: g \in G\}$, que é un subespazo de M por ser ρ_M k -lineal. Entón, dados $h \neq g$ de G e $m_g \in M_g$, $m_h \in M_h$ non nulos, $\rho_M(m_g) \neq \rho_M(m_h) \Rightarrow m_g \neq m_h$ e polo tanto a suma dos M_g é directa. Ademais, como ρ_M satisfai o Diagrama 3.4,

$$m \otimes 1_k = ((id_M \otimes \varepsilon_{kG}) \circ \rho_M)(m) = \sum_{g \in G} m_g \otimes \varepsilon_{kG}(g) = \sum_{g \in G} m_g \otimes 1_k$$

$\forall m \in M$, co que $\bigoplus_{g \in G} M_g = M$.

Para probar a outra implicación, dado un k -espazo vectorial $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$, chega con considerar a aplicación lineal definida por

$$\rho_M(m_g) = m_g \otimes g$$

$\forall m_g \in M_g$. Tendo en conta como actúan Δ_{kG} e ε_{kG} sobre os elementos de G , é inmediato probar que ρ_M fai conmutativos os Diagramas 3.3 e 3.4.

A continuación introdúcense, para unha álgebra de Hopf H e un H -módulo M , os conceptos de submódulos de invariantes e coinvariantes de H en M , que serán de importancia na seguinte sección.

Definición 3.11. Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf.

- 1) Dado un H -módulo pola esquerda (M, γ_M) , coñécense como **invariantes de H en M** aos elementos de

$$M^H := \{m \in M : h \cdot m = \varepsilon_H(h)m, \forall h \in H\}.$$

- 2) Dado un H -comódulo pola dereita (M, ρ_M) , coñécense como **coinvariantes de H en M** aos elementos de

$$M^{coH} := \{m \in M : \rho_M(m) = m \otimes \eta_H(1_k)\}.$$

De xeito análogo tamén se poden considerar os invariantes dun H -módulo pola dereita ou os coinvariantes dun H -comódulo pola esquerda, para os que se emprega a mesma notación.

Exemplo 3.12. Estúdase agora a relación dual entre estes dous conceptos, así como o caso particular dos invariantes en kG -módulos e dos coinvariantes en kG -comódulos.

1. Considérese unha k -álgebra de Hopf $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ de dimensión finita. Sexa (M, γ_M) un H -módulo pola esquerda e (N, ρ_N) un H -comódulo pola dereita, con (M, ρ_M) e (N, γ_N) o H^* -comódulo e H^* -módulo asociados, dacordo coa construción da Proposición 3.8. Entón os invariantes e coinvariantes de H e H^* están relacionados do seguinte xeito:

$$M^H = M^{coH^*}, \quad N^{H^*} = N^{coH}.$$

En efecto, para un $m \in M^H$

$$h \cdot m = \varepsilon_H(h)m \quad \forall h \in H \xrightarrow{(*)} \rho_M(m) = m \otimes \varepsilon_H = m \otimes \eta_{H^*}(1_k),$$

e para un $m' \in M^{coH^*}$

$$\rho_M(m') = m' \otimes \eta_{H^*}(1_k) = m' \otimes \varepsilon_H \xrightarrow{(*)} h \cdot m' = \varepsilon_H(h)m' \quad \forall h \in H,$$

onde (*) é consecuencia da definición de ρ_M que se deu na demostración de 2) na Proposición 3.8.

Analogamente, se $n \in N^{coH}$, entón, aplicando en (**) a construción de γ_N vista na demostración de 1) na Proposición 3.8,

$$\rho_N(n) = n \otimes \eta_H(1_k) \xrightarrow{(**)} \gamma_N(f \otimes n) = f(\eta_H(1_k))n = \varepsilon_{H^*}(f)n \quad \forall f \in H^*$$

e se $n \in N^{H^*}$,

$$\sum f(n_1)n_0 \stackrel{(**)}{=} \gamma_N(f \otimes n) = \varepsilon_{H^*}(f)n = f(\eta_H(1_k))n \quad \forall f \in H^*,$$

de onde se deduce que $\rho_N(n) = n \otimes \eta_H(1_k)$.

2. Sexa kG a k -álgebra de Hopf descrita no Exemplo 2.34.

Considérese un kG -módulo pola esquerda (M, γ_M) . Como $\varepsilon_{kG}(g) = 1_k \quad \forall g \in G$, os invariantes de kG en M son os elementos que permanecen invariantes baixo a acción restrinxida ao grupo G . É dicir,

$$M^{kG} = \{m \in M : g \cdot m = m, \quad \forall g \in G\}.$$

Por outra parte, se (N, ρ_N) é un kG -comódulo pola dereita, probouse no Exemplo 3.10 que $N = \bigoplus_{g \in G} N_g$ e $\rho_N(n_g) = n_g \otimes g \quad \forall n_g \in N_g$. Polo tanto $M^{co kG} = M_e$, onde e é o neutro de G .

3.2. Módulos de Hopf

Nesta sección definirase o concepto de módulo de Hopf: un k -espazo vectorial con estrutura tanto de módulo como de comódulo satisfacendo ambas certa condición de compatibilidade. Ademais, probarase o principal resultado deste traballo, o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf.

Definición 3.13. Dada unha k -álgebra de Hopf $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$, un H -módulo de Hopf pola dereita é unha terna (M, γ_M, ρ_M) onde

- 1) (M, γ_M) é un H -módulo pola dereita,
- 2) (M, ρ_M) é un H -comódulo pola dereita,
- 3) ρ_M é un morfismo de H -módulos pola dereita, é dicir

$$\sum (m \cdot h)_0 \otimes (m \cdot h)_1 = \sum m_0 \cdot h_1 \otimes m_1 h_2.$$

Observación 3.14. Nótese que a condición 3) é equivalente a que γ_M sexa un morfismo de H -comódulos pola dereita.

Observación 3.15. Analogamente tamén se poderían definir os módulos de Hopf pola esquerda e os módulos de Hopf mixtos, é dicir, con estrutura de módulo pola esquerda e comódulo pola dereita ou de módulo pola dereita e comódulo pola esquerda, modificando a relación 3) de compatibilidade de xeito adecuado.

Definición 3.16. Sexan (M, γ_M, ρ_M) e (N, γ_N, ρ_N) H -módulos de Hopf. Unha aplicación $f: M \rightarrow N$ é un **morfismo de H -módulos de Hopf pola dereita** se é tanto un morfismo de H -módulos pola dereita como de H -comódulos pola dereita.

Exemplo 3.17. Os seguintes son exemplos de módulos de Hopf:

1. Se $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ é unha k -álgebra de Hopf, entón (H, μ_H, Δ_H) é un H -módulo de Hopf.
2. Se (M, γ_M) é un H -módulo pola dereita, entón $(M \otimes H, \gamma_{M \otimes H}, id_M \otimes \Delta_H)$ é un H -módulo de Hopf, xa que $id_M \otimes \Delta_H$ é un morfismo de H -módulos pola dereita:

$$\begin{aligned}
& \gamma_{M \otimes H \otimes H}((id_M \otimes \Delta_H \otimes id_H)(m \otimes h \otimes g)) \\
&= \gamma_{M \otimes H \otimes H} \left(\sum m \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes g \right) \\
&= \sum \gamma_{M \otimes H}(m \otimes h_1 \otimes g_1) \otimes h_2 g_2 && \text{(definición de } \gamma_{M \otimes H \otimes H}) \\
&= \sum m \cdot g_1 \otimes h_1 g_2 \otimes h_2 g_3 && \text{(definición de } \gamma_{M \otimes H}) \\
&= \sum m \cdot g_1 \otimes (h_1 g_2)_1 \otimes (h_1 g_2)_2 && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras}) \\
&= (id_M \otimes \Delta_H)(\gamma_{M \otimes H}(m \otimes h \otimes g)) && \text{(definición de } \gamma_{M \otimes H}),
\end{aligned}$$

para todo $m \in M$ e $h, g \in H$. Adicionalmente, se (M, γ_M) é o H -módulo trivial pola dereita (ver Exemplo 3.10), dirase que $M \otimes H$ é un H -módulo de Hopf trivial. Dito doutro xeito, $(M \otimes H, \gamma, \rho)$ é un **H -módulo de Hopf trivial** se e só se

$$(m \otimes h) \cdot g = m \otimes hg \quad \text{e} \quad \rho(m \otimes h) = m \otimes \Delta_H(h)$$

para todo $m \in M$ e $h, g \in H$.

3. Sexa kG a k -álgebra de Hopf descrita no Exemplo 2.34 e (M, γ_M, ρ_M) un kG -módulo de Hopf pola dereita. Probouse no Exemplo 3.10 que $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ e que $\rho_M(m_g) = m_g \otimes g \forall m_g \in M_g$. A continuación estudarase como actúa γ_M sobre os M_g . Como ρ_M é un morfismo de kG -módulos:

$$\rho_M(m_g \cdot h) = (m_g \otimes g) \cdot h = m_g \cdot h_1 \otimes gh_2 = m_g \cdot h \otimes gh,$$

e polo tanto $m_g \cdot h \in M_{gh} \forall g, h \in G, \forall m_g \in M_g$. Entón $M_g \cdot h \subseteq M_{gh} \forall g, h \in G$ e ademais, como γ_M satisfai os Diagramas 3.2 (*) e 3.1 (**),

$$M_{gh} \cdot h^{-1} \subseteq M_g \Rightarrow M_{gh} \stackrel{(*)}{=} M_{gh} \cdot (h^{-1}h) \stackrel{(**)}{=} (M_{gh} \cdot h^{-1}) \cdot h \subseteq M_g \cdot h,$$

co que $M_g \cdot h = M_{gh} \forall g, h \in G$. En particular $M_g = M_e \cdot g \forall g \in G$.

Observación 3.18. Nótese que a definición de H -módulo de Hopf pode xeneralizarse sen ningún cambio ao caso no que H é unha biálgebra calquera. Non obstante, a conveniencia de que H admita unha antípoda queda patente no seguinte resultado.

Teorema 3.19 (Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf). *Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf e (M, γ_M, ρ_M) un H -módulo de Hopf pola dereita. Entón, M é isomorfo a $M^{coH} \otimes H$ como H -módulos de Hopf pola dereita, onde $M^{coH} \otimes H$ ten estrutura de H -módulo de Hopf trivial.*

Demostración. Considérense as aplicacións lineais $\phi: M^{coH} \otimes H \rightarrow M$ e $\psi: M \rightarrow M \otimes H$ tales que:

$$\phi(m' \otimes h) = m' \cdot h \quad \text{e} \quad \psi(m) = \sum m_0 \cdot S_H(m_1) \otimes m_2$$

para todo $h \in H, m \in M$ e $m' \in M^{coH}$. Verase a continuación que estas aplicacións son unha a inversa da outra e que definen un isomorfismo de H -módulos de Hopf pola dereita entre M e $M^{coH} \otimes H$. Nótese en primeiro lugar que $\rho_M(\sum m_0 \cdot S_H(m_1)) = \sum m_0 \cdot S_H(m_1) \otimes \eta_H(1_k) \forall m \in M$ e polo tanto $\psi(M) \subseteq M^{coH} \otimes H$. En efecto, para todo $m \in M$

$$\begin{aligned} & \rho_M \left(\sum m_0 \cdot S_H(m_1) \right) \\ &= \sum (m_0 \cdot S_H(m_1))_0 \otimes (m_0 \cdot S_H(m_1))_1 \\ &= \sum (m_0)_0 \cdot (S_H(m_1))_1 \otimes (m_0)_1 (S_H(m_1))_2 && (\rho_M \text{ morfismo de módulos}) \\ &= \sum m_0 \cdot (S_H(m_2))_1 \otimes m_1 (S_H(m_2))_2 && (\rho_M \text{ coacción (Diagrama 3.3)}) \\ &= \sum m_0 \cdot S_H(m_3) \otimes m_1 S_H(m_2) && (S_H \text{ antimorfismo de coálgebras}) \\ &= \sum m_0 \cdot S_H(m_2) \otimes \eta_H(\varepsilon_H(m_1)) && ((2.3) \text{ para } S_H) \\ &= \sum m_0 \cdot S_H(\varepsilon_H(m_1)m_2) \otimes \eta_H(1_k) && (\text{linealidade } S_H) \\ &= \sum m_0 \cdot S_H(m_1) \otimes \eta_H(1_k) && (\varepsilon_H \text{ counidade}), \end{aligned}$$

como se quería ver. A continuación probarase que ϕ é a inversa de ψ e viceversa. Sexa $m \in M$:

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi)(m) &= \sum (m_0 \cdot S_H(m_1)) \cdot m_2 \\
&= \sum m_0 \cdot (S_H(m_1)m_2) && (\gamma_M \text{ acción (Diagrama 3.1)}) \\
&= \sum m_0 \cdot \eta_H(\varepsilon_H(m_1)) && (S_H \text{ antípoda (2.3)}) \\
&= \sum \varepsilon_H(m_1)m_0 && (\gamma_M \text{ acción (Diagrama 3.2)}) \\
&= m && (\rho_M \text{ coacción (Diagrama 3.4)}),
\end{aligned}$$

co que $\phi \circ \psi = id_M$. Por outro lado, tomando $m' \in M^{coH}$ e $h \in H$:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi)(m' \otimes h) &= \sum (m' \cdot h)_0 \cdot S_H((m' \cdot h)_1) \otimes (m' \cdot h)_2 \\
&= \sum (m' \cdot h)_0 \cdot S_H(((m' \cdot h)_1)_1) \otimes ((m' \cdot h)_1)_2 && (\rho_M \text{ coacción (Diagrama 3.3)}) \\
&= \sum (m'_0 \cdot h_1) \cdot S_H((m'_1 h_2)_1) \otimes (m'_1 h_2)_2 && (\rho_M \text{ morfismo de módulos}) \\
&= \sum (m'_0 \cdot h_1) \cdot S_H(m'_1 h_2) \otimes m'_2 h_3 && (\Delta_H \text{ morfismo de álgebras}) \\
&= (m' \cdot h_1) \cdot S_H(h_2) \otimes h_3 && (m' \in M^{coH}) \\
&= m' \cdot h_1 S_H(h_2) \otimes h_3 && (\gamma_M \text{ acción (Diagrama 3.1)}) \\
&= m' \cdot \eta_H(\varepsilon_H(h_1)) \otimes h_2 && (S_H \text{ antípoda (2.3)}) \\
&= m' \otimes \varepsilon_H(h_1) h_2 && (\gamma_M \text{ acción (Diagrama 3.2)}) \\
&= m' \otimes h && (\varepsilon_H \text{ counidade}),
\end{aligned}$$

de onde se conclúe que $\psi \circ \phi = id_M$. Só falta comprobar que ϕ é un morfismo de H -módulos de Hopf pola dereita. Por unha banda, dados $m' \in M^{coH}$, $h, g \in H$:

$$\phi((m' \otimes h) \cdot g) \stackrel{(1)}{=} \phi(m' \otimes hg) = m' \cdot (hg) \stackrel{(2)}{=} (m' \cdot h) \cdot g = \phi(m' \otimes h) \cdot g,$$

aplicando en (1) que $M^{coH} \otimes H$ ten estrutura de H -módulo de Hopf trivial e en (2) que γ_M é unha acción, polo que se pode aplicar a conmutatividade do Diagrama 3.1. Por último, tamén se cumpren as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
((\phi \otimes id_H) \circ \rho_{M^{coH} \otimes H})(m' \otimes h) &\stackrel{(3)}{=} (\phi \otimes id_H) \left(\sum m' \otimes h_1 \otimes h_2 \right) = \sum m' \cdot h_1 \otimes h_2, \\
(\rho_M \circ \phi)(m' \otimes h) &= \sum (m' \cdot h)_0 \otimes (m' \cdot h)_1 \stackrel{(4)}{=} \sum m'_0 \cdot h_1 \otimes m'_1 h_2 \stackrel{(5)}{=} \sum m' \cdot h_1 \otimes h_2,
\end{aligned}$$

onde (3) se deduce da estrutura de H -módulo de Hopf trivial para $M^{coH} \otimes H$, (4) de que ρ_M é un morfismo de H -módulos pola dereita e (5) de que m' está en M^{coH} . \square

Observación 3.20. O teorema anterior tamén é certo para H -módulos de Hopf pola esquerda, sendo a demostración análoga á que se acaba de ver. Sen embargo, no caso dos H -módulos de Hopf mixtos, é necesaria a hipótese adicional de que a antípoda de H sexa invertible. Para a

demostración, no caso de que M sexa, por exemplo, un H -módulo pola esquerda e H -comódulo pola dereita, chegaría con definir $\psi'(m) = \sum S_H^{-1}(m_1) \cdot m_0 \otimes m_2$ en lugar de ψ e empregar cando sexa preciso que S_H^{-1} é unha antípoda retorcida satisfacendo a igualdade (2.4), resultando a demostración análoga á xa vista.

Observación 3.21. No caso dos kG -módulos de Hopf pola dereita (M, γ_M, ρ_M) , viuse no Exemplo 3.12 que $M^{\text{cok}G} = M_e$. Entón, polo Teorema Funcamental dos Módulos de Hopf, existe un isomorfismo de kG -módulos de Hopf $\phi: M_e \otimes kG \xrightarrow{\cong} M$. Ademais, como o produto tensorial conmuta coa suma directa ([11], *Proposition II.1.4*), tense que $M_e \otimes kG \cong \bigoplus_{g \in G} (M_e \otimes g)$, e viuse antes que $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$, co que $\bigoplus_{g \in G} (M_e \otimes g) \cong \bigoplus_{g \in G} M_g$. Como ϕ é en particular un morfismo de comódulos, para calquera $m_e \in M_e$, $g \in G$

$$\rho_M(\phi(m_e \otimes g)) = (\phi \otimes id_{kG})(\rho_{M_e \otimes kG}(m_e \otimes g)) = (\phi \otimes id_{kG})((id_{M_e} \otimes \Delta_{kG})(m_e \otimes g)) = \phi(m_e \otimes g) \otimes g,$$

polo que $\phi(m_e \otimes g) \in M_g$ e polo tanto as compoñentes da suma directa son isomorfas como k -espazos vectoriais, $M_e \otimes g \cong M_g \forall g \in G$. Tendo en conta a construción de ϕ que se deu na demostración do Teorema 3.19, $M_g = \phi(M_e \otimes g) = M_e \cdot g$, que é a mesma conclusión á que se chegou no apartado 3 do Exemplo 3.17.

3.3. Aplicacións do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf

Nesta sección trataranse dous casos de aplicación do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf (ver Teorema 3.19). No primeiro empregárase o teorema para estudar as propiedades das k -álxbras de Hopf de dimensión finita. En particular, demostrarase que a antípoda dunha k -álxebra de Hopf de dimensión finita é sempre un isomorfismo. No segundo, estudarase o caso particular das proxeccións de álxbras de Hopf.

En primeiro lugar, enunciarase un resultado para k -álxbras de Hopf de dimensión finita probado por Larson e Sweedler en [13]. Antes de enunciar o teorema en cuestión, será preciso introducir os conceptos de integral e de álxebra de Frobenius. Ademais, tamén será necesario dar un resultado previo, onde, para unha k -álxebra de Hopf H de dimensión finita, se dota ao seu espazo dual H^* de estrutura de H -módulo de Hopf.

Definición 3.22. Sexa $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álxebra de Hopf. Unha **integral pola esquerda de H** é un elemento $h \in H$ tal que

$$th = \varepsilon_H(t)h$$

$\forall t \in H$. Análogamente, unha **integral pola dereita de H** é un elemento $h' \in H$ tal que

$$h't = \varepsilon_H(t)h'$$

$\forall t \in H$. Ademais, as integrais pola esquerda de H conforman un k -espazo vectorial, que se denota por \int_H^l , e o mesmo ocorre coas integrais pola dereita de H , que conforman o k -espazo \int_H^r . En efecto, se $h, h' \in \int_H^l$,

$$t(h + h') = th + th' = \varepsilon_H(t)h + \varepsilon_H(t)h' = \varepsilon_H(t)(h + h'),$$

$$t(\alpha h) = \alpha(th) = \alpha\varepsilon_H(t)h = \varepsilon_H(t)\alpha h,$$

$\forall t \in H$, $\alpha \in k$, como consecuencia da linealidade de μ_H , polo que \int_H^l é un k -espazo vectorial. Realizando as comprobacións análogas dedúcese que \int_H^r tamén o é.

Observación 3.23. Nótese que, se se considera o par (H, μ_H) como un H -módulo pola dereita, entón $H^H = \int_H^r$. Se pola contra se considera (H, μ_H) como H -módulo pola esquerda, $H^H = \int_H^l$.

Definición 3.24. Sexa (A, η_A, μ_A) unha k -álgebra de dimensión finita e $\beta: A \otimes A \rightarrow k$ unha aplicación k -lineal.

- Dise que β é **asociativa** se cumpre que, para todo $a, b, c \in A$,

$$\beta(ab \otimes c) = \beta(a \otimes bc).$$

- Dise que β é **non dexenerada** se satisfai a seguinte condición:

$$\beta(a, b) = 0 \quad \forall b \in A \Rightarrow a = 0.$$

Definición 3.25. Sexa A un k -espazo vectorial de dimensión finita. Unha **k -álgebra de Frobenius** é unha k -álgebra (A, η_A, μ_A) equipada cunha aplicación k -lineal

$$(\ , \): A \otimes A \rightarrow k$$

non dexenerada e asociativa.

Esta clase de álgebras son de gran interese en áreas como a teoría de representacións ou a teoría topolóxica cuántica de campos. Pódese consultar máis información acerca destes obxectos no segundo capítulo de [12]. No Teorema 3.27 probarase que toda álgebra de Hopf de dimensión finita admite unha estrutura de álgebra de Frobenius.

Proposición 3.26. Sexa H un k -espazo vectorial de dimensión finita e $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf. Considérese o H^* -módulo pola esquerda (H^*, μ_{H^*}) , e sexa ρ a coacción pola dereita de H sobre H^* inducida pola Proposición 3.8. Entón (H^*, γ, ρ) é un H -módulo de Hopf pola dereita, onde a acción γ é tal que $\forall f \in H^*$ e $\forall h \in H$

$$\gamma(f \otimes h) = \sum f_2(S_H(h))f_1.$$

Demostración.

- (H^*, γ) é un H -módulo pola dereita:

En efecto, γ fai conmutativo ao Diagrama 3.1:

$$\begin{aligned}
 (\gamma \circ (\gamma \otimes id_H))(f \otimes h \otimes t) &= \sum \gamma(f_2(S_H(h))f_1 \otimes t) && \text{(definición de } \gamma) \\
 &= \sum f_3(S_H(h))f_2(S_H(t))f_1 && \text{(definición de } \gamma) \\
 &= \sum f_2(S_H(t)S_H(h))f_1 && \text{(definición de } \Delta_{H^*}) \\
 &= \sum f_2(S_H(ht))f_1 && (S_H \text{ antimorfismo de álxebras}) \\
 &= \gamma(f \otimes ht) && \text{(definición de } \gamma) \\
 &= (\gamma \circ (id_{H^*} \otimes \mu_H))(f \otimes h \otimes t),
 \end{aligned}$$

e ao Diagrama 3.2:

$$\begin{aligned}
 (\gamma \circ (id_{H^*} \otimes \eta_H))(f \otimes 1_k) &= \sum f_2((S_H \circ \eta_H)(1_k))f_1 && \text{(definición de } \gamma) \\
 &= \sum f_2(\eta_H(1_k))f_1 && (S_H \text{ antimorfismo de álxebras}) \\
 &= f && \text{(definición de } \Delta_{H^*}, \eta_H \text{ unidade),}
 \end{aligned}$$

para todo $f \in H^*$ e $h, t \in H$.

- (H^*, ρ) é un H -comódulo pola dereita:

Considérese o H^* -módulo pola esquerda (H^*, μ_{H^*}) . Pola Proposición 3.8, (H^*, ρ) é un H -comódulo, onde, por construción, ρ é tal que

$$gf = \sum g(f_1)f_0$$

$\forall g \in H^*$.

- (H^*, γ, ρ) é un H -módulo de Hopf pola dereita:

Para probar que ρ é un morfismo de H -módulos pola dereita, hai que ver que se cumpre a seguinte igualdade:

$$\rho(f \cdot h) = \sum (f_0 \cdot h_1) \otimes f_1 h_2$$

$\forall h \in H, f \in H^*$. Como a coacción ρ está caracterizada por ser tal que $gf = \sum g(f_1)f_0 \forall g \in H^*$ (ver Observación 3.9), isto é equivalente a probar que $\forall g \in H^*$ se satisfai:

$$g(f \cdot h) = \sum g(f_1 h_2)(f_0 \cdot h_1).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
g(f \cdot h)(t) &= g\left(\sum f_2(S_H(h))f_1\right)(t) && \text{(definición de } \gamma) \\
&= \sum f_2(S_H(h))g(t_1)f_1(t_2) && \text{(definición de } \mu_{H^*}) \\
&= \sum f_2(S_H(h))g_2(\eta_H(1_k))g_1(t_1)f_1(t_2) && \text{(definición de } \Delta_{H^*}, \eta_H \text{ unidade)} \\
&= \sum f_2(S_H(h))g_2(\eta_H(1_k))g_1f_1(t) && \text{(definición de } \mu_{H^*}) \\
&= \sum f_2(S_H(\varepsilon_H(h_2)h_1))g_2(\eta_H(1_k))g_1f_1(t) && \text{(} \varepsilon_H \text{ counidade)} \\
&= \sum f_2(S_H(h_1))g_2((\eta_H \circ \varepsilon_H)(h_2))g_1f_1(t) && \text{(linealidad de } S_H, f_2, g_2, \eta_H) \\
&= \sum f_2(S_H(h_1))g_2(S_H(h_2)h_3)g_1f_1(t) && \text{(2.3 para } S_H) \\
&= \sum f_2(S_H(h_1))g_3(h_3)g_2(S_H(h_2))g_1f_1(t) && \text{(definición de } \Delta_{H^*}) \\
&= \sum f_2((S_H(h_1))_2)g_3(h_2)g_2((S_H(h_1))_1)g_1f_1(t) && \text{(} S_H \text{ antimorfismo de coálgebras)} \\
&= \sum g_3(h_2)g_2f_2(S_H(h_1))g_1f_1(t) && \text{(definición de } \mu_{H^*}) \\
&= \sum g_2(h_2)(g_1f)_2(S_H(h_1))(g_1f)_1(t) && \text{(} \Delta_{H^*} \text{ morfismo de álgebras)} \\
&= \sum g_2(h_2)(g_1(f_1)f_0)_2(S_H(h_1))(g_1(f_1)f_0)_1(t) && \text{(definición de } \rho) \\
&= \sum g_2(h_2)g_1(f_1)(f_0)_2(S_H(h_1))(f_0)_1(t) && \text{(linealidad de } \Delta_{H^*}) \\
&= \sum g(f_1h_2)(f_0)_2(S_H(h_1))(f_0)_1(t) && \text{(definición de } \Delta_{H^*}) \\
&= \sum g(f_1h_2)(f_0 \cdot h_1)(t) && \text{(definición de } \gamma),
\end{aligned}$$

para todo $t \in H$ e $g \in H^*$. □

Teorema 3.27 ([16], Theorem 2.1.3). *Sea H un k -espazo vectorial de dimensión finita e $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ unha k -álgebra de Hopf. Entón:*

- 1) S_H é bixectiva.
- 2) \int_H^l e \int_H^r son k -espazos de dimensión 1.
- 3) H admite estrutura de H^* -módulo tanto pola esquerda como pola dereita, de forma que está xerado por un único elemento.
- 4) H admite unha estrutura de k -álgebra de Frobenius.

Demostración.

- 1) Tomando a estrutura de H -módulo de Hopf sobre H^* descrita na Proposición 3.26, polo Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf existe un isomorfismo de H -módulos de Hopf

$\phi: (H^*)^{coH} \otimes H \rightarrow H^*$. Sexa $f \in (H^*)^{coH}$ non nulo e $h \in \text{Ker}(S_H)$, por definición de ϕ en (1) e de γ en (2), e por linealidade de f_2 en (3) tense que

$$\phi(f \otimes h) \stackrel{(1)}{=} f \cdot h \stackrel{(2)}{=} \sum f_2(S_H(h))f_1 \stackrel{(3)}{=} 0$$

e, como ϕ é inxectiva, tense que $f \otimes h = 0$. Entón, por ser $f \neq 0$, necesariamente $h = 0$. Polo tanto S_H é un endomorfismo k -lineal inxectivo. Como ademais H é de dimensión finita, S_H é bixectiva.

- 2) De novo, polo Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, H^* e $(H^*)^{coH} \otimes H$ son isomorfos como H -módulos de Hopf pola dereita e en consecuencia $(H^*)^{coH}$ é necesariamente un k -espazo vectorial de dimensión 1. Ademais, como se viu no Exemplo 3.12,

$$(H^*)^{coH} = (H^*)^{H^*} = \{f \in H^* : gf = \varepsilon_{H^*}(g)f, \forall g \in H^*\} = \int_{H^*}^l.$$

Simplemente tomando H^* en lugar de H obtense que \int_H^l é un subespazo de dimensión 1. Por outra parte, se h pertence a \int_H^l , aplicando en (1) que S_H é un antimorfismo de k -álxebras, en (2) a definición de \int_H^l , en (3) a linealidade de S_H e en (4) que S_H é un antimorfismo de k -coálxebras:

$$S_H(h)S_H(t) \stackrel{(1)}{=} S_H(th) \stackrel{(2)}{=} S_H(\varepsilon_H(t)h) \stackrel{(3)}{=} \varepsilon_H(t)S_H(h) \stackrel{(4)}{=} \varepsilon_H(S_H(t))S_H(h),$$

$\forall t \in H$ polo que, tendo en conta que polo apartado 1) $S_H(H) = H$, tense que $S_H(h) \in \int_H^r$ e $S_H(\int_H^l) \subseteq \int_H^r$. Ademais, de novo polo apartado 1), existe S_H^{-1} e, para todo $h \in \int_H^r$, satisfaise a seguinte cadea de igualdades, aplicando en (5) que S_H^{-1} é un antimorfismo de k -álxebras, en (6) a definición de \int_H^r , en (7) a linealidade de S_H^{-1} e en (8) que S_H^{-1} é un antimorfismo de k -coálxebras:

$$S_H^{-1}(t)S_H^{-1}(h) \stackrel{(5)}{=} S_H^{-1}(ht) \stackrel{(6)}{=} S_H^{-1}(\varepsilon_H(t)h) \stackrel{(7)}{=} \varepsilon_H(t)S_H^{-1}(h) \stackrel{(8)}{=} \varepsilon_H(S_H^{-1}(t))S_H^{-1}(h),$$

$\forall t \in H$, de onde se conclúe que $S_H(\int_H^l) = \int_H^r$ e polo tanto ambos espazos teñen dimensión 1.

- 3) Tomando $f \in (H^*)^{coH}$, $f \neq 0$ e $\phi: (H^*)^{coH} \otimes H \rightarrow H^*$ o isomorfismo do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, como $f \otimes H$ e H^* son k -espazos coa mesma dimensión, $\phi(f \otimes H) = H^*$. Como por definición $\phi(f \otimes H) = f \cdot H$, H^* está xerado como H -módulo pola dereita por f . Adicionalmente, pódese considerar (H^*, Δ_{H^*}) como H^* -comódulo pola dereita que, pola Proposición 3.8 induce unha estrutura de H -módulo pola esquerda sobre H^* mediante a acción:

$$\tilde{\gamma}(h \otimes f) = \sum f_2(h)f_1.$$

Entón, H^* está xerado como H -módulo pola esquerda por f , xa que, aplicando o apartado 1) en (*)

$$H^* = \gamma(f \otimes H) = \tilde{\gamma}(S_H(H) \otimes f) \stackrel{(*)}{=} \tilde{\gamma}(H \otimes f),$$

e polo tanto H^* está xerado como H -módulo pola esquerda por f .

4) Sexa $f \in (H^*)^{\text{co}H}$, $f \neq 0$ e considérese a seguinte aplicación:

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot): H \otimes H &\longrightarrow k \\ h \otimes t &\longmapsto (h, t) := f(ht). \end{aligned}$$

É unha aplicación k -lineal por ser composición de aplicacións k -lineais, e é asociativa por selo μ_H . Ademais, é non dexenerada, xa que, se para algún $h \in H$ se ten que $(h, H) = 0$, entón

$$0 = (h, H) = f(hH) \stackrel{(1)}{=} \sum f_2(H)f_1(h) \stackrel{(2)}{=} \tilde{\gamma}(H \otimes f)(h) \stackrel{(3)}{=} H^*(h),$$

e polo tanto $h = 0$, onde (1) é consecuencia da definición de Δ_{H^*} , (2) da definición de $\tilde{\gamma}$ e (3) do apartado 3). \square

Como segundo caso de aplicación estudaranse as proxeccións de álxebras de Hopf, un dos problemas máis estudados dentro da teoría das álxebras de Hopf.

Definición 3.28. Sexan $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \Delta_H, S_H)$ e $(D, \eta_D, \mu_D, \varepsilon_D, \Delta_D, S_D)$ k -álxebras de Hopf e $f: H \rightarrow D$ e $g: D \rightarrow H$ morfismos de k -álxebras de Hopf tales que $g \circ f = \text{id}_H$. Nesta situación dise que a 4-tupla (H, D, f, g) é unha **proxección de k -álxebras de Hopf**.

Proposición 3.29. Sexa (H, D, f, g) unha proxección de k -álxebras de Hopf. Entón (D, γ_D, ρ_D) é un H -módulo de Hopf pola dereita coa acción $\gamma_D := \mu_D \circ (\text{id}_D \otimes f)$ e coacción $\rho_D := (\text{id}_D \otimes g) \circ \Delta_D$.

Demostración.

- (D, γ_D) é un H -módulo pola dereita:

γ_D é k -lineal por ser composición de aplicacións k -lineais. Ademais satisfai as propiedades dos H -módulos, tanto a do Diagrama 3.1

$$\begin{aligned} (\gamma_D \circ (\gamma_D \otimes \text{id}_H))(d \otimes h \otimes t) &= \gamma_D(df(h) \otimes t) && \text{(definición de } \gamma_D) \\ &= (df(h))f(t) && \text{(definición de } \gamma_D) \\ &= d(f(h)f(t)) && \text{(asociatividade de } \mu_D) \\ &= df(ht) && \text{(} f \text{ morfismo de álxebras)} \\ &= \gamma_D(d \otimes ht) && \text{(definición de } \gamma_D) \\ &= (\gamma_D \circ (\text{id}_D \otimes \mu_H))(d \otimes h \otimes t), \end{aligned}$$

como a do Diagrama 3.2

$$(\gamma_D \circ (\text{id}_D \otimes \eta_H))(d \otimes 1_k) \stackrel{(1)}{=} d(f \circ \eta_H)(1_k) \stackrel{(2)}{=} d\eta_D(1_k) \stackrel{(3)}{=} d$$

para todo $d \in D$ e $h \in H$, onde (1) é consecuencia da definición de γ_D , (2) de que f é un morfismo de k -álxebras e (3) da propiedade da unidade de D .

- (D, ρ_D) é un H -comódulo pola dereita:

ρ_D é k -lineal por ser composición de aplicacións k -lineais. Ademais satisfai as propiedades dos H -comódulos, tanto a do Diagrama 3.3

$$\begin{aligned}
 ((\rho_D \circ id_H) \circ \rho_D)(d) &= (\rho_D \otimes id_H) \left(\sum d_1 \otimes g(d_2) \right) && \text{(definición de } \rho_D) \\
 &= \sum d_1 \otimes g(d_2) \otimes g(d_3) && \text{(definición de } \rho_D) \\
 &= \sum d_1 \otimes g(d_2)_1 \otimes g(d_2)_2 && (g \text{ morfismo de coálxebras}) \\
 &= (id_D \otimes \Delta_H) \left(\sum d_1 \otimes g(d_2) \right) \\
 &= ((id_D \otimes \Delta_H) \circ \rho_D)(d) && \text{(definición de } \rho_D),
 \end{aligned}$$

como a do Diagrama 3.4

$$((id_D \otimes \varepsilon_H) \circ \rho_D)(d) \stackrel{(1)}{=} (id_D \otimes \varepsilon_H) \left(\sum d_1 \otimes g(d_2) \right) \stackrel{(2)}{=} \sum d_1 \otimes \varepsilon_D(d_2) \stackrel{(3)}{=} d$$

$\forall d \in D$, onde (1) é consecuencia da definición de ρ_D , (2) de que g é un morfismo de k -coálxebras e (3) da propiedade da counidade de D .

- ρ_D é un morfismo de H -módulos pola dereita:

Para calquera $d \in D$ e $h \in H$:

$$\begin{aligned}
 (\rho_D \circ \gamma_D)(d \otimes h) &= \rho_D(df(h)) && \text{(definición de } \gamma_D) \\
 &= \sum (df(h))_1 \otimes g((df(h))_2) && \text{(definición de } \rho_D) \\
 &= \sum d_1 f(h)_1 \otimes g(d_2 f(h)_2) && (\Delta_D \text{ morfismo de álxebras}) \\
 &= \sum d_1 f(h_1) \otimes g(d_2 f(h_2)) && (f \text{ morfismo de coálxebras}) \\
 &= \sum d_1 f(h_1) \otimes g(d_2) g(f(h_2)) && (g \text{ morfismo de álxebras}) \\
 &= \sum d_1 f(h_1) \otimes g(d_2) h_2 && (g \circ f = id_H) \\
 &= (\gamma_D \otimes \mu_H) \left(\sum d_1 \otimes h_1 \otimes g(d_2) \otimes h_2 \right) && \text{(definición de } \gamma_D) \\
 &= ((\gamma_D \otimes \mu_H) \circ \tau_{H,H} \circ (\rho_D \otimes \Delta_H))(d \otimes h) && \text{(definición de } \rho_D).
 \end{aligned}$$

Polo tanto (D, γ_D, ρ_D) é un H -módulo de Hopf pola dereita. \square

Como consecuencia deste resultado e do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, D e $D^{coH} \otimes H$ son isomorfos como H -módulos de Hopf pola dereita, onde $D^{coH} \otimes H$ ten a estrutura de H -módulo de Hopf trivial. Tendo en conta que D e H son k -álxebras de Hopf, resulta natural preguntarse se é posible dotar a $D^{coH} \otimes H$ dunha estrutura de k -álgebra de Hopf de xeito que D e $D^{coH} \otimes H$ sexan isomorfas como álxebras de Hopf. Radford da resposta a esta pregunta

en [17], onde, para dúas k -álxebras de Hopf H e D , considera unha estrutura de k -álgebra de Hopf sobre o seu produto tensorial $D \otimes H$ mediante o produto smash e o coproduto cosmash, que son unha xeneralización do produto semidirecto de grupos e do cocadrado cartesiano de grupos alxébricos afíns, respectivamente, e interpreta esta estrutura no contexto das proxeccións de álxebras de Hopf. Máis concretamente, se $D \otimes H$ é unha k -álgebra de Hopf con esta estrutura, entón existe unha proxección de k -álxebras de Hopf (H, D, f, g) , e para toda proxección de k -álxebras de Hopf (H, D, f, g) , D é isomorfa a $D^{\text{co}H} \otimes H$ dotada do produto smash e do coproduto cosmash. Posteriormente, en [14] Majid interpretou o resultado previo de Radford no contexto das categorías trezadas. Nesta memoria considerouse a estrutura de álgebra de Hopf unicamente na categoría dos k -espazos vectoriais, que constitúe un caso particular de categoría trezada. No traballo de Majid, considéranse as álxebras de Hopf na categoría dos módulos de Yetter-Drinfeld, unha estrutura alxébrica introducida por Yetter en [21], e establece unha equivalencia categórica entre estas e as proxeccións de álxebras de Hopf. Máis adiante, Bespalov [3] estendeu estes resultados ao caso das categorías monoidais trezadas con idempotentes escindidos. Dadas as contribucións dos autores mencionados previamente, este resultado é coñecido na actualidade coma o Teorema de Radford-Majid-Bespalov.

Ademais das álxebras de Hopf, tamén son de interese outros obxectos alxébricos “de tipo Hopf”, é dicir, estruturas nas que se relaxan algunhas das condicións da definición que se deu neste traballo, como poden ser as cuasiálxebras de Hopf ou as álxebras de Hopf débiles. Debido á importancia do Teorema de Radford-Majid-Bespalov na teoría das álxebras de Hopf, a xeneralización deste resultado a outras estruturas é un tema de investigación atractivo e aínda activo na actualidade. Por exemplo, unha versión para cuasiálxebras de Hopf foi proposta por Bulaco e Nauwelaerts no 2002 [5]. Ademais, tamén son de interese outro tipo de estruturas que xeneralizan a noción de álgebra de Hopf como, por exemplo, os Hopf braces, para os que unha reinterpretación do resultado anterior foi proposta por González Rodríguez no 2021 [10].

Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G. (1969). Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley.
- [2] Baxter, R.J. (1972). Partition function of the eight-vertex lattice model. *Annals of Physics*, 70(1), 193-228.
- [3] Bespalov, Y.N. (1997). Crossed modules and quantum groups in braided categories. *Applied categorical structures*, 5(2), 155-204.
- [4] Borel, A. (1953). Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Annals of Mathematics*, 87, 115-207.
- [5] Bulacu, D., & Nauwelaerts, E. (2002). Radford's biproduct for quasi-Hopf algebras and bosonization. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 174(1), 1-42.
- [6] Cartier, P. (1957). Hyperalgèbres et groupes de Lie formels. Simposio llevado a cabo en el Séminaire Sophus Lie, Université de Paris, Faculté des sciences.
- [7] Dascalescu, S., Nastasescu, C., & Raianu, S. (2000). Hopf algebras: An introduction. CRC Press.
- [8] Drinfeld V.G. (1989). Quantum groups. En *Proceedings of International Congress of Mathematics*, 789-820. Berkeley.
- [9] Hopf, H. (1941). Über die topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer verallgemeinerungen. *Ann. Math.*, 42, 22-52.
- [10] González Rodríguez, R. (2021). The fundamental theorem of Hopf modules for Hopf braces. *Linear and Multilinear Algebra*, 70(20), 5146–5156.
- [11] Kassel, C. (2012). *Quantum groups (Vol. 155)*. Springer Science & Business Media.
- [12] Kock, J. (2004). *Frobenius algebras and 2-d topological quantum field theories (No. 59)*. Cambridge University Press.

-
- [13] Larson, R. G., & Sweedler, M. E. (1969). An Associative Orthogonal Bilinear Form for Hopf Algebras. *American Journal of Mathematics*, 91(1), 75–94.
- [14] Majid, S. (1994). Cross products by braided groups and bosonization. *Journal of algebra*, 163(1), 165-190.
- [15] Marcolli, M., Berwick, R. C., & Chomsky, N. (2023). Old and New Minimalism: a Hopf algebra comparison. arXiv preprint arXiv:2306.10270.
- [16] Montgomery, S. (1993). Hopf algebras and their actions on rings (No. 82). American Mathematical Soc..
- [17] Radford, D.E. (1985). The structure of Hopf algebras with a projection. *Journal of Algebra*, 92(2), 322-347.
- [18] Sweedler, M. E. (1969). Hopf algebras (Vol. 44). W. A. Benjamin.
- [19] Underwood, R. G. (2015). *Fundamentals of Hopf algebras*. Springer.
- [20] Yang, C.N. (1967). Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Physical Review Letters*, 19(23), 1312-1315.
- [21] Yetter, D. N. (1990). Quantum groups and representations of monoidal categories, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 108, 261-290.
- [22] Zhang, K., Yu, K., Hao, K., & Korepin, V. (2024). Optimal Realization of Yang–Baxter Gate on Quantum Computers. *Advanced Quantum Technologies*, 7(4), 2300345.