



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Álgebras de Hopf débiles. Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Brais Ramos Pérez

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Álgebras de Hopf débiles. Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Brais Ramos Pérez

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Don José Manuel Fernández Vilaboa, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, informa que el Trabajo de Fin de Máster titulado

Álgebras de Hopf débiles. Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

fue realizado bajo su dirección por Don Brais Ramos Pérez para la consecución del Máster Universitario en Matemáticas. Estimando que el trabajo reúne los requisitos para la obtención de dicho grado, dan su conformidad para su presentación y defensa ante un tribunal.

En Santiago de Compostela, a 7 de julio de 2022.

El director:

El autor:

José Manuel Fernández Vilaboa

Brais Ramos Pérez

Índice

Resumen	III
Introducción	v
1. Categorías monoidales	1
1.1. Categorías y funtores	1
1.2. Categorías y funtores monoidales	7
1.3. Categorías monoidales <i>braided</i>	13
2. Álgebras de Hopf y álgebras de Hopf débiles	15
2.1. Álgebras, coálgebras, módulos y comódulos	16
2.2. Álgebras de Hopf	18
2.3. Álgebras de Hopf débiles	21
2.4. Producto <i>smash</i> y coproducto <i>cosmash</i>	26
3. Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf	31
4. Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf en el contexto débil	47
Bibliografía	63

Resumen

Las álgebras de Hopf débiles, que son una generalización de la estructura de álgebra de Hopf, fueron introducidas por Böhm, Nill y Szlachányi en la década de los 90 del siglo XX. Surgen en la literatura con el fin de ser las estructuras adecuadas para proporcionar soluciones de la Ecuación Dinámica de Yang-Baxter, de la misma manera que las álgebras de Hopf cuasitriangulares lo son para la Ecuación Cuántica.

En la obtención de las soluciones de estas ecuaciones son importantes los siguientes aspectos: el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf y la caracterización de las proyecciones de un álgebra de Hopf mediante el Teorema de Radford-Majid-Bespalov. Así, en la memoria de este Trabajo de Fin de Máster se comienza con la descripción de la estructura de álgebra de Hopf débil en el contexto monoidal, analizando en que aspectos difiere de la de álgebra de Hopf. A continuación, se desarrolla el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf y el Teorema de Radford-Majid-Bespalov para álgebras de Hopf en una categoría monoidal *braided* con idempotentes escindidos, para concluir con las respectivas generalizaciones de los resultados anteriores para álgebras de Hopf débiles.

Abstract

Weak Hopf algebras, which are a generalisation of the Hopf algebra structure, were introduced by Böhm, Nill and Szlachányi in the 1990s. They emerged from the literature in order to become suitable structures for providing solutions of the Dynamical Yang-Baxter Equation, in the same way that quasitriangular Hopf algebras are for the Quantum Equation.

In the process of obtaining the solutions of these equations, the following aspects are highly important: the Fundamental Theorem of Hopf Modules and the characterisation of Hopf algebra projections by means of the Radford-Majid-Bespalov Theorem. Therefore, this Master's thesis focuses first on the description of the weak Hopf algebra structure in the monoidal context, analysing in which aspects it differs from that of Hopf algebra. Then, the Fundamental Theorem of Hopf Modules and the Radford-Majid-Bespalov Theorem are developed for Hopf algebras in a monoidal braided category with split idempotents, to conclude with the respective generalisations of the previous results for weak Hopf algebras.

Introducción

Las álgebras de Hopf, así como sus generalizaciones (álgebras de Hopf débiles, cuasigrupos de Hopf, cuasigrupos de Hopf débiles, álgebras de Hopf cuasitriangulares, *Hopf braces*, *racks*, entre otros), han experimentado un notable desarrollo a lo largo de las últimas décadas debido fundamentalmente a sus conexiones con la física cuántica.

El origen de estas estructuras se remonta a los años 40 del siglo pasado cuando Heinz Hopf, topólogo y geómetra alemán, definió una cierta comultiplicación sobre determinados anillos de cohomología de grupos de Lie compactos [22]. Estos constituyen los primeros ejemplos conocidos de tales objetos. A pesar de todo, quien bautizó por primera vez estas estructuras como *álgebras de Hopf* fue Armand Borel [11] en honor a las importantes contribuciones de Hopf en los años previos. Paralelamente, Pierre Cartier, bajo el nombre de *hyperalgebra*, aportó la primera definición formal de álgebra de Hopf en sus publicaciones acerca de teoría de representaciones [14], inspirado en los trabajos de Jean Dieudonné sobre grupos algebraicos de característica positiva. Por lo tanto, las raíces de las álgebras de Hopf son, por un lado, topológicas y, por otro lado, algebraicas. Las diferentes definiciones se unificaron a lo largo de la década de los 60, culminando con la publicación del libro *Hopf algebras* [35] de Sweedler en el año 1969. A partir de este momento, las álgebras de Hopf comenzaron a ser objeto de estudio del álgebra abstracta y continuaron su desarrollo de tal manera que aparecen en multitud de campos de las matemáticas: teoría de números, geometría algebraica, teoría de Lie, teoría de Galois, teoría de representaciones, por citar algunos.

La importancia de las álgebras de Hopf sufrió un incremento considerable en los años 80 gracias a los avances en la búsqueda de soluciones de la *Ecuación Cuántica de Yang-Baxter* (abreviado QYBE, en referencia a las siglas de su nombre en inglés, *Quantum Yang-Baxter Equation*). Si V denota un \mathbb{K} -espacio vectorial, un automorfismo $c: V \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} V$ es una solución de QYBE si satisface la identidad siguiente:

$$(c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) = (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c). \quad (\text{QYBE})$$

Figura 1: Ecuación Cuántica de Yang-Baxter.

Esta ecuación surge para abordar problemas de la física cuántica, y fue propuesta por Yang [38] y por Baxter [7] entre finales de la década de los 60 y principios de la década de los 70 en el contexto de la mecánica estadística. En la actualidad está considerada una de las ecuaciones fundamentales de la física-matemática y, además, la clasificación completa de sus soluciones aún es un problema abierto, lo que la hace aún más atractiva. Drinfeld [15], en colaboración con Jimbo, introduce el concepto de *álgebra de Hopf cuasitriangular* (denominadas *grupos cuánticos* en su terminología) y prueba que la categoría de módulos sobre estos objetos permite obtener soluciones de QYBE [24, Capítulo 8, Sección 3]. Además propone un método universal para encontrar álgebras de Hopf cuasitriangulares a partir de un álgebra de Hopf de dimensión finita arbitraria, conocido como *Doble de Drinfeld*, y que se define como el producto bicruzado de dicha álgebra de Hopf con la opuesta de su dual [24, Capítulo 9]. Gracias a sus aportaciones, las aplicaciones físicas de la teoría de álgebras de Hopf crecen “generosamente” y provocan que la relevancia de estas estructuras sea mucho mayor.

En el año 1984, Gervais y Neveu [19] introducen una versión modificada de la QYBE conocida en la actualidad como la *Ecuación Dinámica de Yang-Baxter* (de nuevo se abreviará mediante DQYBE en referencia a las siglas de su nombre en inglés, *Dynamical Quantum Yang-Baxter Equation*). Si \mathfrak{h} denota un álgebra de Lie abeliana y V un módulo semisimple, una aplicación $R: \mathfrak{h}^* \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{h}}(V \otimes V)$ es una solución de DQYBE si verifica que:

$$R^{12}(\lambda - h^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda - h^{(1)}) = R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda - h^{(2)})R^{12}(\lambda). \quad (\text{DQYBE})$$

Los primeras soluciones de la ecuación anterior fueron los llamados *grupos cuánticos elípticos* propuestos por Felder [18] en 1995 que, a pesar de ser similares en muchos aspectos, no tenían necesariamente por qué verificar todos los axiomas de álgebra de Hopf. A raíz de este momento surgió la siguiente motivación en los investigadores del campo: al igual que los módulos sobre

álgebras de Hopf cuasitriangulares proporcionan soluciones de QYBE, ¿qué estructuras tipo Hopf son las adecuadas para obtener soluciones de DQYBE? La búsqueda del objeto apropiado para tal fin provocó la aparición de diversas generalizaciones de la estructura de álgebra de Hopf:

- **Candidato 1: cuasiálgebras de Hopf**, introducidas por Drinfeld en 1990 [16]. La diferencia fundamental entre estos objetos y la estructura de álgebra de Hopf reside en que la comultiplicación no es coasociativa. Sin embargo, el precio a pagar es aceptable para muchos investigadores, pues se adaptan correctamente en diversas teorías. Por ejemplo, las cuasiálgebras de Hopf son aquellas álgebras cuyas categorías de representación son precisamente monoidales. Además, los grupos cuánticos elípticos de Felder encajan correctamente en el marco de las cuasiálgebras de Hopf [17], lo que llevó a pensar que podrían ser el objeto adecuado para inducir soluciones de la DQYBE. A pesar de todo, estos candidatos iniciales siguen teniendo importantes deficiencias. En primer lugar, cabe mencionar que, en general, los algebristas no son partidarios de trabajar en contextos no asociativos, aunque este no es el principal defecto. Los fundamentales son los siguientes:
 - Los “cuasiobjetos” no permiten definir de manera natural una noción de módulo y comódulo sobre ellos.
 - Las cuasiálgebras de Hopf no son autoduales, es decir, el objeto natural que debería ser el dual de una cuasiálgebra de Hopf no adopta tal estructura.

Los problemas de autodualidad y coasociatividad llevan hacia el siguiente candidato.

- **Candidato 2: álgebras de Hopf débiles**. Las álgebras de Hopf débiles, también denominadas *grupoides cuánticos* en la terminología de Nikshych y Vainerman [31], fueron introducidas por Böhm, Nill y Szlachányi [10] como una generalización de la estructura de álgebra de Hopf y de las álgebras de grupoide. Estos objetos presentan estructura de álgebra y de cóalgebra simultáneamente, al igual que las álgebras de Hopf, pero las relaciones entre ellas se debilitan. Más concretamente, la comultiplicación y la counidad dejan de ser morfismos de álgebras y, además, el antípodo no verifica necesariamente que $\lambda_H * id_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = id_H * \lambda_H$, siendo ε_H y η_H los morfismos counidad y unidad, respectivamente, y $*$ el producto convolución. Algunos hechos que motivan el estudio de las álgebras de Hopf débiles son:
 - Al igual que las álgebras de grupo y sus duales son los ejemplos naturales de álgebras de Hopf, las álgebras de grupoide junto con sus respectivos duales lo son de las álgebras de Hopf débiles.
 - Las álgebras de Hopf débiles presentan una importante conexión con la teoría de extensiones algebraicas, teoría de cuerpos cuánticos y álgebras de operadores, así como aplicaciones en el estudio de “twists” dinámicos de álgebras de Hopf. También se

emplean como herramienta para el estudio de categorías de fusión en característica cero.

Destacan como ejemplos de tales estructuras las álgebras de Temperley-Lieb, las *face algebras* de Hayashi y las álgebras de Kac generalizadas propuestas por Yamanouchi ([31], [32]).

Por todo ello, las álgebras de Hopf débiles se han posicionado hasta el momento como la estructura más adecuada para obtener soluciones de DQYBE, ya que dan solución a los principales inconvenientes de las cuasiálgebras de Hopf. A pesar de todo, aún no es del todo claro que sean las idóneas. El estudio de las características de estos objetos será una de las temáticas principales en este Trabajo de Fin de Máster.

Dentro de la teoría de álgebras de Hopf, uno de los tópicos más estudiados son las proyecciones de un álgebra de Hopf. Dada H un álgebra de Hopf, una proyección de H es un álgebra de Hopf B junto con un par de morfismos de álgebras de Hopf

$$f: H \longrightarrow B, \quad g: B \longrightarrow H,$$

verificando que $g \circ f = id_H$. Esta situación se representará con el siguiente diagrama:

$$id_H \circlearrowleft H \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B.$$

En la caracterización de las proyecciones aparecen de manera natural el *producto smash* y el *coproducto cosmash*, los cuales son una generalización del producto semidirecto de grupos y del cuadrado cocartesiano de grupos algebraicos afines, respectivamente, al contexto de álgebras de Hopf ([9], [30]). En esta situación, un resultado clásico de Radford [33] establece condiciones equivalentes para que el producto tensorial $B \otimes H$, equipado con el producto *smash* y el coproducto *cosmash*, sea un álgebra de Hopf y caracteriza tales objetos mediante el concepto de proyección. Majid [29] interpreta el resultado previo de Radford en el contexto moderno de las categorías *braided* y establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de isomorfía de álgebras de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld, ${}^H_H\mathcal{YD}^1$, y el conjunto de clases

¹Un objeto en ${}^H_H\mathcal{YD}$ es una terna (M, φ_M, ρ_M) verificando que:

- (M, φ_M) es un H -módulo por la izquierda,
- (M, ρ_M) es un H -comódulo por la izquierda,
- $\rho_M = (\mu_H \otimes \varphi_M) \circ (id_H \otimes c_{H,H} \otimes id_M) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes \rho_M)$,
- $(\mu_H \otimes \varphi_M) \circ (id_H \otimes c_{H,H} \otimes id_M) \circ (\delta_H \otimes \rho_M) = (\mu_H \otimes id_M) \circ (id_H \otimes c_{M,H}) \circ ((\rho_M \circ \varphi_M) \otimes id_H) \circ (id_H \otimes c_{H,M}) \circ (\delta_H \otimes id_M)$.

Si M, N son objetos en ${}^H_H\mathcal{YD}$, $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de módulos de Yetter-Drinfeld si es de H -módulos y de H -comódulos, simultáneamente.

de isomorfía de proyecciones de álgebras de Hopf para H . Más concretamente, dada H un álgebra de Hopf, se tiene:

- Si $(B, f: H \rightarrow B, g: B \rightarrow H)$ es una proyección de H , el objeto de coinvariantes, B_H , definido como el igualador de los morfismos $(id_B \otimes g) \circ \delta_B$ e $id_B \otimes \eta_H$ es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$.
- Recíprocamente, si (D, φ_D, ρ_D) es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, entonces el objeto $D \otimes H$ junto con el producto *smash*, el coproducto *cosmash* y el antípodo

$$\lambda_{D \otimes H} := (\varphi_D \otimes id_H) \circ (id_H \otimes c_{H,D}) \circ (\delta_H \otimes id_D) \circ (\lambda_H \otimes \lambda_D) \circ (\mu_H \otimes id_D) \circ (id_H \otimes c_{D,H}) \circ (\rho_D \otimes id_H),$$

siendo c la trenza de la categoría, es un álgebra de Hopf. Además, la terna

$$(D \rtimes H^2, f := \eta_D \otimes id_H, g := \varepsilon_D \otimes id_H)$$

es una proyección de H .

Majid denominó al álgebra de Hopf $D \rtimes H$ la *bosonización* de D , y probó que la correspondencia anteriormente descrita es 1 – 1. Más tarde, Bespalov [8] generalizó este resultado en el contexto de categorías *braided* con la propiedad de idempotentes escindidos, es decir, categorías donde todo morfismo idempotente factoriza como composición de un epimorfismo y un monomorfismo.

El Teorema de Radford-Majid-Bespalov, nombre que recibirá de ahora en adelante el resultado anterior, admite generalizaciones a otras estructuras algebraicas tipo Hopf. Desde la versión para cuasiálgebras de Hopf, propuesta por Bulaco y Nauwelaerts [12] en 2002, hasta su reinterpretación en el contexto de los *Hopf braces* propuesta por González Rodríguez [20] en 2021. Por todo ello, una de las motivaciones de este Trabajo de Fin de Máster consistirá en detallar como las ideas y resultados clásicos anteriores se pueden extender para álgebras de Hopf débiles en una categoría monoidal *braided* simétrica con idempotentes escindidos, siguiendo fundamentalmente como referencia los artículos [2] y [6].

En base a los antecedentes expuestos, esta memoria se ha estructurado en cuatro capítulos donde se han desarrollado los siguientes contenidos:

- El Capítulo 1 es fundamentalmente introductorio y se puede considerar dividido en dos partes bien diferenciadas. En la primera de ellas se tratan conceptos generales de la teoría de categorías (funtores, transformaciones naturales, equivalencias e isomorfismos de categorías, así como las propiedades universales de ciertos diagramas como el igualador y el

² $D \rtimes H$ denota como objeto el producto tensorial de D con H , $D \otimes H$, dotado de estructura de álgebra con el producto *smash* y de cóalgebra con el coproducto *cosmash*.

coigualador), los cuales podrían ser adquiridos en cualquier curso de iniciación como puede ser la asignatura de Álgebra Categórica del Máster Universitario en Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. A pesar de ser básicas, estas nociones asientan los cimientos para el desarrollo de toda la teoría posterior. La segunda parte es ya un tanto más específica, pues en ella se aborda el estudio de un tipo particular de categorías, las conocidas como *categorías monoidales*, que serán el contexto en el que se trabajará durante el resto de la memoria. Se estudiarán sus propiedades y algunos resultados básicos que irán acompañados de ejemplos ilustrativos.

- El objetivo fundamental del Capítulo 2 es esclarecer las diferencias entre las álgebras de Hopf y las álgebras de Hopf débiles en una categoría monoidal, así como especificar de que manera las segundas generalizan las primeras. Para ello, se comenzará enunciando las principales características de los objetos clásicos con la finalidad de que la memoria sea autocontenida. A continuación, se define álgebra de Hopf débil y se detallan las propiedades que las caracterizan, haciendo especial énfasis en las cualidades del antípodo, λ_H , y de los morfismos idempotentes, \square_H^L y \square_H^R . Para concluir el capítulo, se tratará el concepto de módulo Cleft y se define el (co)producto cruzado, del cual se obtendrá como caso particular el (co)producto *(co)smash*.
- En el Capítulo 3 se generaliza el clásico *Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf*, propuesto por Larsson y Sweedler [26] a finales de la década de los 60, para álgebras de Hopf en el contexto de una categoría monoidal con idempotentes escindidos. Para ello, se comenzará definiendo la categoría de módulos de Hopf sobre un álgebra de Hopf H , \mathcal{M}_H^H , procediendo a continuación con el desarrollo de las distintas fases necesarias para la prueba del teorema. A continuación, se particularizará el resultado para una proyección (B, f, g) de un álgebra de Hopf H , concluyendo con la prueba del Teorema de Radford-Majid-Bespalov en el contexto monoidal. A lo largo del capítulo, se podrá observar la relevancia de los productos y coproductos cruzados, así como la aparición del producto *smash* y del coproducto *cosmash*.
- Se concluye la memoria de este Trabajo de Fin de Máster con el Capítulo 4. En él se han generalizado los resultados clásicos del capítulo previo, el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf y el Teorema de Radford-Majid-Bespalov, para álgebras de Hopf débiles. Se hará hincapié fundamentalmente en las diferencias que surgen al pasar de los resultados clásicos a sus versiones débiles.

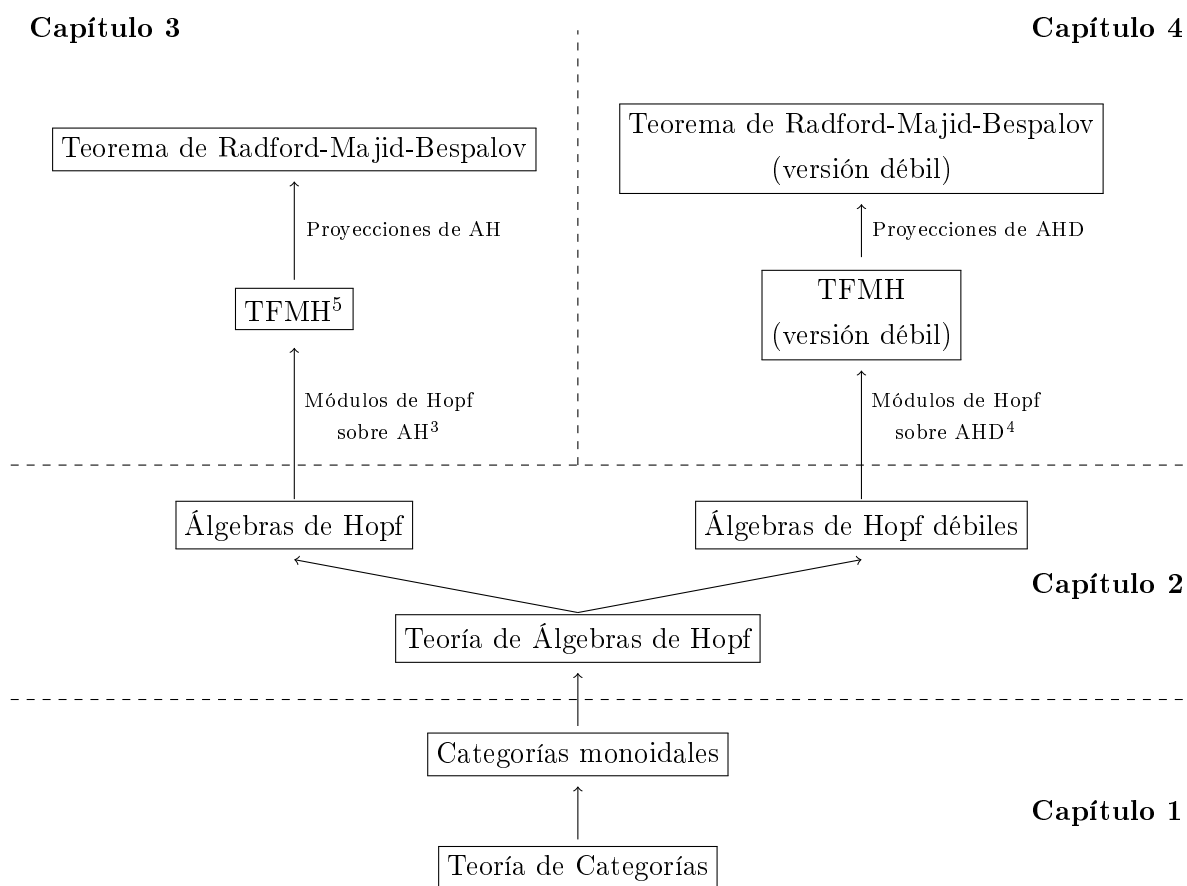


Figura 2: Estructura de la memoria.

³ Abreviatura de *álgebra de Hopf*.⁴ Abreviatura de *álgebra de Hopf débil*.⁵ Abreviatura de *Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf*.

Capítulo 1

Categorías monoidales

Las categorías monoidales juegan un papel importante en materias diversas como la teoría de computación, la teoría de cuerdas o la teoría de representaciones, aunque donde destacan fundamentalmente sus aplicaciones es en el campo de la física matemática. Estas son aquellas en las cuales es posible definir el objeto *producto tensorial* de dos objetos dados. Todas las características del producto tensorial, ya bien conocido en la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo y unitario, son extrapolables a dicho objeto. Su importancia reside principalmente en el campo de la física cuántica, ya que aportan el lenguaje adecuado para traducir fenómenos físicos a terminología matemática.

En esta primera sección se exponen los conceptos básicos de la teoría de categorías que serán necesarios para el desarrollo de esta memoria. Posteriormente, se dará la definición de categoría y funtor monoidal, haciendo particular énfasis en la subcategoría monoidal *braided* ya que, en los capítulos sucesivos, se trabajará en el contexto proporcionado por estas últimas.

Para su desarrollo se han utilizado las referencias [28] y [34] para la teoría general de categorías y [36], para la teoría de categorías monoidales.

1.1. Categorías y funtores

Definición 1.1. Una **categoría** \mathcal{C} consiste en:

- una colección $\text{Ob}(\mathcal{C})$ cuyos elementos se denominan **objetos** de la categoría,
- una colección $\text{Mor}(\mathcal{C})$ constituida por los **morfismos** de la categoría,

verificando los siguientes axiomas:

- $\exists id_X: X \rightarrow X$ el morfismo identidad $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- si $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces $\exists g \circ f: X \rightarrow Z \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ el morfismo composición. Además, la composición debe cumplir las siguientes propiedades:
 - si $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces $id_Y \circ f = f = f \circ id_X$,
 - es asociativa, es decir, si $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Dados $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, se denotará mediante $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a la subcolección de $\text{Mor}(\mathcal{C})$ tales que X es el dominio e Y es el codominio.

Definición 1.2. Sea \mathcal{C} una categoría. Se define la **categoría opuesta de \mathcal{C}** , \mathcal{C}^{op} , como aquella donde:

- la colección $\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- la colección $\text{Mor}(\mathcal{C}^{op})$ verifica que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Definición 1.3. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Se define la **categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$** como aquella donde:

- la colección $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{D})$,
- la colección $\text{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ verifica:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y') \quad \forall (X, Y), (X', Y') \in \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}).$$

Ejemplo 1.4.

1. La categoría de conjuntos, **Set**, donde los objetos son los conjuntos, y los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos.
2. La categoría de grupos, **Grp**, donde los objetos son los grupos y los morfismos, los homomorfismos de grupos. Se denota por **Ab** la subcategoría de **Grp** constituida por los grupos abelianos.
3. La categoría de anillos unitarios, **Ring**, donde los objetos son los anillos y los morfismos, los homomorfismos de anillos.
4. Sea R un anillo unitario. La categoría de módulos por la izquierda (resp. por la derecha), **$R\text{-Mod}$** (resp. **$\text{Mod-}R$**), donde los objetos son los R -módulos por la izquierda (resp. R -módulos por la derecha) y los morfismos, las aplicaciones lineales de R -módulos.

Definición 1.5. Sea \mathcal{C} una categoría.

- Un morfismo $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **monomorfismo** en \mathcal{C} si dado cualquier $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y cualesquiera $g, h: Z \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tales que $f \circ g = f \circ h$, entonces $g = h$.
- Un morfismo $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **epimorfismo** en \mathcal{C} si dado cualquier $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y cualesquiera $g, h: Y \rightarrow Z \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tales que $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$.
- Un morfismo $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **bimorfismo** en \mathcal{C} si es monomorfismo y epimorfismo en \mathcal{C} , simultáneamente.
- Un morfismo $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **isomorfismo** en \mathcal{C} si $\exists g: Y \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$. En este caso, se dice que g es el inverso de f y se denota por f^{-1} .

Observación 1.6. Todo isomorfismo en \mathcal{C} es un bimorfismo, pero no es cierto el recíproco. Un contraejemplo de este hecho es el siguiente. Sea **Top** la categoría de espacios topológicos, donde los morfismos son las aplicaciones continuas y los isomorfismos, los homeomorfismos entre espacios topológicos. Sea $Y \subsetneq X$ un subespacio denso en X y el morfismo inclusión $i: Y \rightarrow X$. Se verifica que dicho morfismo es un bimorfismo no homeomorfismo.

Definición 1.7. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Un **functor** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste en un par de aplicaciones:

$$F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) \text{ y } F: \text{Mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D}),$$

verificando las propiedades siguientes:

- $F(id_X) = id_{F(X)} \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- si $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces $F(f): F(X) \rightarrow F(Y) \in \text{Mor}(\mathcal{D})$,
- si $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se dice **covariante** si no invierte el sentido de los morfismos. En caso contrario, el functor F se dice **contravariante**, es decir, un functor contravariante $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor covariante $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Ejemplo 1.8.

1. El *functor de olvido* $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ que actúa:

$$\begin{array}{ll}
U: \text{Ob}(\mathbf{Grp}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Set}) & U: \text{Mor}(\mathbf{Grp}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathbf{Set}) \\
(G, *) \longmapsto G & [f: (G, *) \rightarrow (H, \cdot)] \longmapsto [f: G \rightarrow H].
\end{array}$$

2. Sean R un anillo unitario y $M \in \text{Ob}(R\text{-Mod})$. El funtor $\text{Hom}_R(M, -): R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que actúa:

$$\begin{array}{ll}
\text{Hom}_R(M, -): \text{Ob}(R\text{-Mod}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Ab}) \\
N \longmapsto \text{Hom}_R(M, N) := \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, N), \\
\text{Hom}_R(M, -): \text{Mor}(R\text{-Mod}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathbf{Ab}) \\
[f: N \rightarrow P] \longmapsto [\text{Hom}_R(M, f): \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, P)]
\end{array}$$

donde $\text{Hom}_R(M, f)(g) := f \circ g$.

Procediendo de manera análoga se define el funtor $\text{Hom}_R(-, M): R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que es un ejemplo de funtor contravariante.

3. Sean R un anillo unitario y $M \in \text{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$. El funtor $M \otimes_R -: R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ que actúa:

$$\begin{array}{ll}
M \otimes_R -: \text{Ob}(R\text{-Mod}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Ab}) \\
N \longmapsto M \otimes_R N, \\
M \otimes_R -: \text{Mor}(R\text{-Mod}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathbf{Ab}) \\
[f: N \rightarrow P] \longmapsto [M \otimes_R f := id_M \otimes_R f: M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R P].
\end{array}$$

Definición 1.9. Sean $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Una **transformación natural** $\alpha: F \Rightarrow G$ es una familia de morfismos en \mathcal{D}

$$\{\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

de tal manera que, dado cualquier $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, es conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
\downarrow \alpha_X & & \downarrow \alpha_Y \\
G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y).
\end{array}$$

Se dice que $\alpha: F \Rightarrow G$ es un **isomorfismo natural** si α_X es un isomorfismo en $\mathcal{D} \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} categorías. Se denotará mediante $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ el *functor identidad* de \mathcal{C} que actúa siendo la aplicación identidad en objetos y en morfismos. Además, sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor, se denotará por $id_F: F \Rightarrow F$ la *transformación natural identidad* del funtor F definida por la siguiente familia de morfismos en \mathcal{D} :

$$\{(id_F)_X: F(X) \rightarrow F(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

donde $(id_F)_X := id_{F(X)}$.

Definición 1.10. Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor.

- F es una **equivalencia de categorías** si $\exists G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor e isomorfismos naturales $\alpha: G \circ F \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ y $\beta: id_{\mathcal{D}} \Rightarrow F \circ G$. En este caso, se dice que las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son equivalentes.
- F es un **isomorfismo de categorías** si $\exists G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor tal que $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. En este caso, se dice que las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son isomorfas.

Se deduce directamente de la definición que todo isomorfismo de categorías es una equivalencia de categorías, pero el recíproco no es cierto en general.

Ejemplo 1.11. Sea \mathbb{K} un cuerpo arbitrario. Considérense las categorías:

- $\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$, la categoría de \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita, donde los morfismos son las aplicaciones \mathbb{K} -lineales.
- $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$, la categoría de matrices con entradas en el cuerpo \mathbb{K} , donde:
 - la colección de objetos, $\text{Ob}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}})$, es el conjunto \mathbb{N} de los números naturales,
 - un morfismo $n \xrightarrow{A} m$ se corresponde con una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

La composición de morfismos en $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 m & \xrightarrow{B \in \mathcal{M}_{r \times m}(\mathbb{K})} & r \\
 & \swarrow A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) & \nearrow B \circ A := B \cdot A \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{K}) \\
 & n & .
 \end{array}$$

Se definen los funtores:

- $F: \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$ que actúa:

$$F: \text{Ob}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}})$$

$$n \longmapsto F(n) := \mathbb{K}^n,$$

$$F: \text{Mor}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}})$$

$$[n \xrightarrow{A} m] \longmapsto [F(A): \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m],$$

donde $F(A)(v) = A \cdot v$.

- $G: \mathbf{FVect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ que actúa:

$$\begin{aligned} G: \text{Ob}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}) &\longrightarrow \text{Ob}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}) \\ V &\longmapsto G(V) := \dim_{\mathbb{K}}(V), \\ G: \text{Mor}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}) &\longrightarrow \text{Mor}(\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}) \\ [f: V \rightarrow W] &\longmapsto [G(f): \dim_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W)], \end{aligned}$$

donde $G(f) := (f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, matriz asociada a la aplicación \mathbb{K} -lineal f respecto de \mathbb{K} -bases \mathcal{B} de V y \mathcal{B}' de W prefijadas arbitrariamente.

Se define la familia de morfismos $\{\theta_V: V \rightarrow \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}\}_{V \in \text{Ob}(\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}})}$, con $\theta_V(\omega) = (\omega)_{\mathcal{B}}$ siendo $(\omega)_{\mathcal{B}}$ las coordenadas del vector $\omega \in V$ con respecto a la base \mathcal{B} . Se puede comprobar fácilmente que la colección anterior define un isomorfismo natural $\theta: id_{\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}} \Rightarrow (F \circ G)$ y $G \circ F = id_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}}$. Por lo tanto, las categorías $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ y $\mathbf{FVect}_{\mathbb{K}}$ son equivalentes.

Definición 1.12. Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor.

- Se dice que F es **fiel** (resp. **plenamente fiel**) si la aplicación

$$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

es inyectiva (resp. biyectiva).

- Se dice que F es **esencialmente sobreyectivo en objetos** si dado cualquier $W \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, $\exists X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $F(X)$ es isomorfo a W en \mathcal{D} .

Teorema 1.13 ([34], Teorema 1.5.9). *Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y solamente si F es plenamente fiel y esencialmente sobreyectivo en objetos.*

A continuación se introducen dos conceptos que tendrán mucha relevancia en lo sucesivo: el igualador y el coigualador de un par de morfismos paralelos.

Definición 1.14. Sea \mathcal{C} una categoría y $f, g: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$. El **igualador** de f y g es un par (E, e) , $E \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $e: E \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, verificando:

- $f \circ e = g \circ e$,
- si $\exists W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $h: W \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces $\exists! \rho: W \rightarrow E \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $e \circ \rho = h$. Esta se conoce como la **propiedad universal del igualador** y se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ & & \uparrow h & & \\ & \swarrow \rho & W & & \end{array}$$

Definición 1.15. Sea \mathcal{C} una categoría y $f, g: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$. El **coigualador** de f y g es un par (T, t) , $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $t: Y \rightarrow T \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, verificando:

- $t \circ f = t \circ g$,
- si $\exists P \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y $h: Y \rightarrow P \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $h \circ f = h \circ g$, entonces $\exists! \theta: T \rightarrow P \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ tal que $\theta \circ t = h$. Esta se conoce como la **propiedad universal del coigualador** y se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \xrightarrow{t} & T \\ & & \downarrow h & \swarrow \theta & \\ & & P & & \end{array}$$

Ejemplo 1.16. Sea \mathbf{Grp} la categoría de grupos y $f, g: G \rightarrow H \in \text{Mor}(\mathbf{Grp})$ un par de morfismos paralelos. El par $(\ker(f-g), i)$, donde $i: \ker(f-g) \hookrightarrow G$ es el morfismo inclusión, es el igualador de los morfismos f y g en \mathbf{Grp} , mientras que el par $(H/Q, p)$, siendo $Q := \langle \text{Im}(f-g) \rangle_N$ el menor subgrupo normal en H que contiene a $\text{Im}(f-g)$ y $p: H \rightarrow H/Q$ el epimorfismo canónico de proyección al cociente, es el coigualador.

1.2. Categorías y funtores monoidales

Sea \mathcal{C} una categoría y $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor que verifica:

- para cualquier $(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, $X \otimes Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- para cualesquiera $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow W \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, $f \otimes g: X \otimes Z \rightarrow Y \otimes W \in \text{Mor}(\mathcal{C})$,
- si $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow W, f': Y \rightarrow P$ y $g': W \rightarrow T \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, entonces

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

El funtor \otimes se denomina **funtor tensor**. Como ya se anticipó previamente, un funtor tensor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ generaliza las propiedades del producto tensorial en la categoría de R -módulos, $R\text{-Mod}$, siendo R un anillo unitario.

Nótese que si \otimes es un funtor tensor en una categoría \mathcal{C} y $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, entonces induce un funtor $X \otimes -: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que actúa:

$$\begin{array}{ll} X \otimes -: \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}) & X \otimes -: \text{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{C}) \\ Y \longmapsto X \otimes Y, & [f: Y \rightarrow Z] \longmapsto [X \otimes f: X \otimes Y \rightarrow X \otimes Z], \end{array}$$

donde $X \otimes f := id_X \otimes f$. Análogamente se puede definir el funtor inducido $- \otimes X$.

También es importante notar que, dado un morfismo $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$, se tiene una transformación natural $f \otimes -: X \otimes - \Rightarrow Y \otimes -$ definida por la siguiente familia de morfismos en \mathcal{C} :

$$\{(f \otimes -)_Z: X \otimes Z \rightarrow Y \otimes Z\}_{Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

siendo $(f \otimes -)_Z := f \otimes id_Z$. De la misma manera se podría definir la transformación natural $- \otimes f: - \otimes X \Rightarrow - \otimes Y$.

Definición 1.17. Sea \mathcal{C} una categoría y \otimes un funtor tensor en \mathcal{C} . Una **restricción de asociatividad** para \otimes es un isomorfismo natural $a: \otimes \circ (\otimes \times id_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \otimes \circ (id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$ definido por la siguiente colección de isomorfismos en \mathcal{C} :

$$\{a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

verificando que:

$$(f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{X,Y,Z} = a_{X',Y',Z'} \circ ((f \otimes g) \otimes h)$$

para cualesquiera $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y', h: Z \rightarrow Z' \in \text{Mor}(\mathcal{C})$.

Definición 1.18. Sea \mathcal{C} una categoría, \otimes un funtor tensor en \mathcal{C} y a una restricción de asociatividad para \otimes . Se dice que a verifica el **Axioma del Pentágono** si se cumple la siguiente identidad:

$$(id_X \otimes a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y \otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) = a_{X,Y,Z \otimes W} \circ a_{X \otimes Y,Z,W}, \quad (1.1)$$

$\forall X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 1.19. Sea \mathcal{C} una categoría, $K \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y \otimes un funtor tensor en \mathcal{C} . Una **restricción de unidad por la izquierda** respecto a K se trata de un isomorfismo natural $l: \otimes \circ (K \times id_{\mathcal{C}}) \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ definido por la siguiente familia de isomorfismos en \mathcal{C} :

$$\{l_X: K \otimes X \rightarrow X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

verificando que:

$$l_Y \circ (id_K \otimes f) = f \circ l_X$$

para cualquier $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$.

Análogamente, una **restricción de unidad por la derecha** respecto a K se trata de un isomorfismo natural $r: \otimes \circ (id_{\mathcal{C}} \times K) \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ definido por la siguiente familia de isomorfismos en \mathcal{C} :

$$\{r_X: X \otimes K \rightarrow X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

verificando que:

$$r_Y \circ (f \otimes id_K) = f \circ r_X$$

para cualquier $f: X \rightarrow Y \in \text{Mor}(\mathcal{C})$.

Definición 1.20. Sea \mathcal{C} una categoría, $K \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y \otimes un functor tensor en \mathcal{C} . Dados a , restricción de asociatividad para \otimes , l , restricción de unidad por la izquierda respecto a K , y r , restricción de unidad por la derecha respecto a K , se dice que verifican el **Axioma del Triángulo** si se cumple la siguiente identidad:

$$(id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,K,Y} = r_X \otimes id_Y \quad (1.2)$$

para cualesquiera $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 1.21. Una **categoría monoidal** $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ es una categoría \mathcal{C} dotada de un functor tensor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ junto con un objeto $K \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, llamado **unidad**, y restricciones de asociatividad para \otimes , a , y de unidad por izquierda y derecha con respecto a K , l y r respectivamente, verificando los Axiomas del Pentágono (1.1) y del Triángulo (1.2).

Una categoría monoidal se dice **estricta** si las restricciones de asociatividad y de unidad son identidades, es decir, $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ y $K \otimes X = X = X \otimes K$ para cualesquiera $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 1.22. Sea R un anillo conmutativo y unitario. La categoría $R\text{-Mod}$ es una categoría monoidal con functor tensor, \otimes_R , el functor producto tensorial y unidad el propio anillo R . Además, dados $M, N, P \in \text{Ob}(R\text{-Mod})$, existen isomorfismos canónicos entre:

- $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$ (restricción de asociatividad para \otimes_R),
- $M \otimes_R R \cong M \cong R \otimes_R M$ (restricciones de unidad con respecto a R).

Proposición 1.23 ([36], Lema 1.1). *Si $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ es una categoría monoidal, entonces se verifican las siguientes identidades:*

- $l_X \otimes id_Y = l_{X \otimes Y} \circ a_{K,X,Y}$,
- $r_{X \otimes Y} = (id_X \otimes r_Y) \circ a_{X,Y,K}$,

para cualesquiera $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Demostración. Se detallará la demostración de la primera identidad, siendo similar la segunda

- $\Phi_{-, -}$ denota la siguiente familia de morfismos en \mathcal{D} :

$$\{\Phi_{X,Y}: F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

verificando las identidades:

- $\Phi_{X,Y \otimes Z} \circ (id_{F(X)} \otimes \Phi_{Y,Z}) \circ a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \circ \Phi_{X \otimes Y,Z} \circ (\Phi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)})$,
- $F(l_X) \circ \Phi_{K,X} \circ (\Phi_0 \otimes id_{F(X)}) = l_{F(X)}$,
- $F(r_X) \circ \Phi_{X,K} \circ (id_{F(X)} \otimes \Phi_0) = r_{F(X)}$.

Definición 1.25. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ y $(\mathcal{D}, \otimes, I, a, l, r)$ categorías monoidales y $(F, \Phi_0, \Phi_{-, -})$ y $(F', \Phi'_0, \Phi'_{-, -})$ funtores monoidales. Se dice que $\alpha: (F, \Phi_0, \Phi_{-, -}) \Rightarrow (F', \Phi'_0, \Phi'_{-, -})$ es una **transformación natural monoidal** si:

- $\alpha: F \Rightarrow F'$ es una transformación natural definida por la familia de morfismos en \mathcal{D} $\{\alpha_X: F(X) \rightarrow F'(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$,
- $\Phi'_0 = \alpha_K \circ \Phi_0$,
- $\Phi'_{X,Y} \circ (\alpha_X \otimes \alpha_Y) = \alpha_{X \otimes Y} \circ \Phi_{X,Y}$.

Se dice que $\alpha: (F, \Phi_0, \Phi_{-, -}) \Rightarrow (F', \Phi'_0, \Phi'_{-, -})$ es un **isomorfismo natural monoidal** si $\alpha: F \Rightarrow F'$ es un isomorfismo natural.

Definición 1.26. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ y $(\mathcal{D}, \otimes, I, a, l, r)$ categorías monoidales y un funtor monoidal $(F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \Phi_0, \Phi_{-, -})$. Se dice que $(F, \Phi_0, \Phi_{-, -})$ es una **equivalencia de categorías monoidales** si $\exists F': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor monoidal y transformaciones naturales monoidales $\alpha: F' \circ F \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ y $\beta: id_{\mathcal{D}} \Rightarrow F \circ F'$.

El siguiente resultado afirma que toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una estricta. Gracias a esto es posible trabajar sin pérdida de generalidad con categorías monoidales estrictas.

Se define la categoría \mathcal{C}^{str} a partir de $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ como sigue a continuación. Sea \mathcal{S} la colección formada por todas las tuplas de longitud finita de objetos de \mathcal{C} , (X_1, \dots, X_k) , incluyendo la tupla vacía, \emptyset . Al entero k se le denomina longitud de la tupla. Por convenio, \emptyset es considerada de longitud 0. Dadas $S = (X_1, \dots, X_k)$, $S' = (X_{k+1}, \dots, X_{k+n}) \in \mathcal{S}$, se define la concatenación, $S * S'$, de la siguiente manera:

$$S * S' := (X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+n}) \in \mathcal{S}.$$

Por convenio, se considera que $S * \emptyset = S = \emptyset * S$.

Por otro lado, dada $S \in \mathcal{S}$, se define $F(S) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ de forma recursiva como sigue:

$$F(\emptyset) = K, F((X)) = X, F(S * (X)) = F(S) \otimes X. \quad (1.3)$$

Por ejemplo, si $S = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, entonces,

$$\begin{aligned} F(S) &= F((X_1, X_2, X_3) * (X_4)) = F(X_1, X_2, X_3) \otimes X_4 = F((X_1, X_2) * (X_3)) \otimes X_4 \\ &= (F((X_1, X_2)) \otimes X_3) \otimes X_4 = ((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes X_4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se define la categoría \mathcal{C}^{str} como aquella donde:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{str}) = \mathcal{S}$,
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{str}}(S, S') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(S), F(S')) \forall S, S' \in \mathcal{S}$.

A continuación, se asignará a \mathcal{C}^{str} estructura de categoría monoidal. Se define el funtor tensor en \mathcal{C}^{str} , \odot , de la siguiente manera:

- Sobre objetos, $S \odot S' := S * S'$.
- Sobre morfismos, será preciso considerar previamente el siguiente isomorfismo natural $\varphi: \otimes \circ F(-) \times F(-) \Rightarrow F(- \odot -)$, definido por la siguiente familia de morfismos en \mathcal{C} :

$$\varphi_{-, -} := \{\varphi_{S, S'}: F(S) \otimes F(S') \rightarrow F(S * S')\}_{S, S' \in \mathcal{S}},$$

los cuales verifican los siguientes axiomas:

- $\varphi_{\emptyset, S} = l_{F(S)}, \varphi_{S, \emptyset} = r_{F(S)}$,
- $\varphi_{S, (X)} = id_{F(S) \otimes X}$,
- $\varphi_{S, S' * (X)} = (\varphi_{S, S'} \otimes id_X) \circ a_{F(S), F(S'), X}^{-1}$.

Por lo tanto, si $f: S \rightarrow T, f': S' \rightarrow T' \in \text{Mor}(\mathcal{C}^{str})$, entonces:

$$f \odot f' := \varphi_{T, T'} \circ (f \otimes f') \circ \varphi_{S, S'}^{-1}.$$

Resulta claro que, con la estructura de categoría monoidal anterior, el funtor tensor \odot es asociativo en objetos y, definiendo la unidad en \mathcal{C}^{str} como $I := \emptyset, I \odot S = S = S \odot I$, es decir, las restricciones de unidad son identidades. Por lo tanto, \mathcal{C}^{str} es una categoría monoidal estricta.

Teorema 1.27. *Las categorías \mathcal{C} y \mathcal{C}^{str} son monoidalmente equivalentes.*

Demostración. La aplicación $F: \text{Ob}(\mathcal{C}^{str}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$ definida en (1.3) se extiende a un funtor $F: \mathcal{C}^{str} \rightarrow \mathcal{C}$ que actúa como la identidad sobre $\text{Mor}(\mathcal{C}^{str})$, teniendo en cuenta que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{str}}(S, S') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(S), F(S')).$$

Por lo tanto, se tiene que F es plenamente fiel.

Por otro lado, sea $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ arbitrario. Se verifica que $F((X)) = X$, por lo tanto, $F((X))$ y X son isomorfos en \mathcal{C} a través del morfismo id_X . Entonces, F es esencialmente sobreyectivo en objetos. Utilizando el Teorema 1.13, F es una equivalencia de categorías, siendo su inverso el funtor $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{str}$ que actúa:

- sobre objetos, $G(X) = (X) \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- sobre morfismos es la identidad.

Además, se satisface que:

- $F \circ G = id_{\mathcal{C}}$,
- se tiene una transformación natural $\theta: G \circ F \Rightarrow id_{\mathcal{C}^{str}}$ definida por los morfismos $\theta_S = id_{F(S)}$ $\forall S \in \mathcal{S}$.

La equivalencia de categorías anterior es monoidal considerando $\Phi_0 := id_K$ y $\Phi_{-, -} := \varphi_{-, -}$. □

1.3. Categorías monoidales *braided*

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ una categoría monoidal y $\tau: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor que actúa de la siguiente manera sobre objetos y morfismos:

$$\begin{aligned} \tau: \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \\ (X, X') &\longmapsto (X', X), \\ \tau: \text{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \\ (f, g) &\longmapsto (g, f). \end{aligned}$$

Un tal funtor se denomina **funtor de intercambio**.

Definición 1.28. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ una categoría monoidal y τ un funtor de intercambio. Una **restricción de conmutatividad** para τ es un isomorfismo natural $c: \otimes \Rightarrow \otimes \circ \tau$ definido por la siguiente colección de isomorfismos en \mathcal{C} :

$$\{c_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X\}_{X,Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$$

verificando que:

$$(g \otimes f) \circ c_{X,Y} = c_{X',Y'} \circ (f \otimes g)$$

para cualesquiera $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y' \in \text{Mor}(\mathcal{C})$.

Definición 1.29. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ una categoría monoidal, τ un funtor de intercambio y c una restricción de conmutatividad para τ . Se dice que c cumple el **Axioma del Hexágono** si se verifican las siguientes identidades:

$$(id_Y \otimes c_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (c_{X,Y} \circ id_Z) = a_{Y,Z,X} \circ c_{X,Y \otimes Z} \circ a_{X,Y,Z}, \quad (1.4)$$

$$a_{Z,X,Y}^{-1} \circ c_{X \otimes Y,Z} \circ a_{X,Y,Z}^{-1} = (c_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a_{X,Z,Y}^{-1} \circ (id_X \otimes c_{Y,Z}), \quad (1.5)$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

La restricción de conmutatividad para τ , c , se llamará **trenza** cuando satisface el Axioma del Hexágono.

Definición 1.30. Una **categoría monoidal braided** es una tupla $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ donde:

- $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r)$ es una categoría monoidal,
- c es una trenza en \mathcal{C} .

Si además $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$, es decir, $c_{Y,X} = c_{X,Y}^{-1} \forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, entonces $(\mathcal{C}, \otimes, K, a, l, r, c)$ se denomina **categoría monoidal braided simétrica**.

Observación 1.31. Nótese que si $(\mathcal{C}, \otimes, K, c)$ es estricta, entonces se verifican las siguientes identidades:

- $c_{X,Y \otimes Z} = (id_Y \otimes c_{X,Z}) \circ (c_{X,Y} \otimes id_Z)$,
- $c_{X \otimes Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes c_{Y,Z})$.

En lo sucesivo se trabajará dentro del contexto de una categoría monoidal *braided* simétrica y estricta, $(\mathcal{C}, \otimes, K, c)$. Además, de ahora en adelante se denotará el morfismo identidad de un objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mediante 1_X , o simplemente escribiendo el objeto, es decir, se cometerá el abuso de notación $id_X = X$.

Capítulo 2

Álgebras de Hopf y álgebras de Hopf débiles

Las álgebras de Hopf serán el objeto fundamental de estudio de este trabajo, haciendo un especial hincapié en las llamadas álgebras de Hopf débiles. A lo largo de este capítulo se introducirán estos objetos en el contexto monoidal, estudiando las diferencias entre ellos y analizando sus propiedades principales.

En lo sucesivo, se denotará por $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \otimes, K, c)$ una categoría monoidal *braided* estricta y simétrica con la propiedad de idempotentes escindidos, es decir, todo morfismo idempotente $\nabla: X \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ($\nabla \circ \nabla = \nabla$) factoriza como composición de un epimorfismo y un monomorfismo. Es decir, se supondrá la equivalencia entre las siguientes condiciones:

1. $\nabla \circ \nabla = \nabla$.
2. $\exists Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}), p: X \rightarrow Z \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ epimorfismo e $i: Z \rightarrow X \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ monomorfismo tales que $i \circ p = \nabla$ e $p \circ i = 1_Z$.

Observación 2.1.

- Nótese que la implicación “2 \Rightarrow 1” es siempre cierta. En efecto:

$$\nabla \circ \nabla = (i \circ p) \circ (i \circ p) = i \circ (p \circ i) \circ p = i \circ 1_Z \circ p = i \circ p = \nabla.$$

Por lo tanto, basta con suponer que en \mathcal{C} se verifica “1 \Rightarrow 2”.

- En las condiciones previas, el objeto Z es único salvo isomorfismos. En efecto, sean Z' un

objeto en \mathcal{C} y morfismos $p': X \rightarrow Z'$, $i': Z' \rightarrow X$ verificando que $i' \circ p' = \nabla$ y $p' \circ i' = 1_{Z'}$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\nabla} & X \\
 & \searrow p & \nearrow i \\
 & & Z \\
 & \searrow p' & \nearrow i' \\
 & & Z' \\
 & & \downarrow \varphi \\
 & & Z'
 \end{array}$$

Si se define $\varphi := p' \circ i: Z \rightarrow Z'$ y $\psi := p \circ i': Z' \rightarrow Z$, entonces φ y ψ son inversos en \mathcal{C} . En efecto:

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \psi &= (p' \circ i) \circ (p \circ i') = p' \circ (i \circ p) \circ i' = p' \circ \nabla \circ i' = p' \circ (i' \circ p') \circ i' \\
 &= (p' \circ i') \circ (p' \circ i') = 1_{Z'} \circ 1_{Z'} = 1_{Z'}, \\
 \psi \circ \varphi &= (p \circ i') \circ (p' \circ i) = p \circ (i' \circ p') \circ i = p \circ \nabla \circ i = p \circ (i \circ p) \circ i \\
 &= (p \circ i) \circ (p \circ i) = 1_Z \circ 1_Z = 1_Z.
 \end{aligned}$$

- No supondrá pérdida de generalidad alguna suponer la equivalencia anterior en \mathcal{C} , pues toda categoría admite un embebimiento universal $\mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$, siendo $\hat{\mathcal{C}}$ una categoría con idempotentes escindidos. Dicha construcción se puede consultar en [23].

Previamente al estudio de las álgebras de Hopf se tratarán los conceptos subyacentes de álgebra y coálgebra, así como las estructuras de módulo y comódulo que estarán presentes en los resultados fundamentales de este trabajo. Estos objetos serán abordados a lo largo de la siguiente sección.

2.1. Álgebras, coálgebras, módulos y comódulos

Definición 2.2.

- Un **álgebra** en \mathcal{C} es una terna $A \equiv (A, \mu_A, \eta_A)$ donde A es un objeto en \mathcal{C} , $\mu_A: A \otimes A \rightarrow A$ es un morfismo en \mathcal{C} denominado *producto* y $\eta_A: K \rightarrow A$ es un morfismo en \mathcal{C} llamado *unidad* verificando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
 \mu_A \circ (\eta_A \otimes 1_A) &= 1_A = \mu_A \circ (1_A \otimes \eta_A) \quad (\text{Propiedad de la unidad}), \\
 \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) &= \mu_A \circ (1_A \otimes \mu_A) \quad (\text{Asociatividad del producto}).
 \end{aligned}$$

- Una **coálgebra** en \mathcal{C} es una terna $D \equiv (D, \delta_D, \varepsilon_D)$ donde D es un objeto en \mathcal{C} y morfismos *coproducto* $\delta_D: D \rightarrow D \otimes D$ y *counidad* $\varepsilon_D: D \rightarrow K$ verificando los siguientes axiomas:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_D \otimes 1_D) \circ \delta_D &= 1_D = (1_D \otimes \varepsilon_D) \circ \delta_D \quad (\text{Propiedad de la counidad}), \\
 (\delta_D \otimes 1_D) \circ \delta_D &= (1_D \otimes \delta_D) \circ \delta_D \quad (\text{Coasociatividad del coproducto}).
 \end{aligned}$$

Definición 2.3.

- Sean A y B álgebras en \mathcal{C} . Un morfismo $f: A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **morfismo de álgebras** si se verifican:

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f), \quad f \circ \eta_A = \eta_B.$$

- Sean D y E coálgebras en \mathcal{C} . Un morfismo $g: D \rightarrow E \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **morfismo de coálgebras** si se verifican:

$$(f \otimes f) \circ \delta_D = \delta_E \circ f, \quad \varepsilon_E \circ f = \varepsilon_D.$$

Lema 2.4.

1. Sean A y B álgebras en \mathcal{C} . $A \otimes B$ es un álgebra en \mathcal{C} con el producto y unidad siguientes:

$$\mu_{A \otimes B} := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (1_A \otimes c_{B,A} \otimes 1_B), \quad \eta_{A \otimes B} := \eta_A \otimes \eta_B.$$

2. Sean D y E coálgebras en \mathcal{C} . $D \otimes E$ es una coálgebra en \mathcal{C} con el coproducto y counidad siguientes:

$$\delta_{D \otimes E} := (1_D \otimes c_{D,E} \otimes 1_E) \circ (\delta_D \otimes \delta_E), \quad \varepsilon_{D \otimes E} = \varepsilon_D \otimes \varepsilon_E.$$

Observación 2.5. Sean A un álgebra y D una coálgebra en \mathcal{C} . Nótese que, gracias a la naturalidad de la trenza c , se verifican las identidades siguientes:

- $c_{A,X} \circ (\mu_A \otimes 1_X) = (1_X \otimes \mu_A) \circ c_{A \otimes A, X} = (1_X \otimes \mu_A) \circ (c_{A,X} \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes c_{A,X})$,
- $c_{X,A} \circ (1_X \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes 1_X) \circ c_{X, A \otimes A} = (\mu_A \otimes 1_X) \circ (1_A \otimes c_{X,A}) \circ (c_{X,A} \otimes 1_A)$,
- $(1_X \otimes \delta_D) \circ c_{D,X} = c_{D \otimes D, X} \circ (\delta_D \otimes 1_X) = (c_{D,X} \otimes 1_D) \circ (1_D \otimes c_{D,X}) \circ (\delta_D \otimes 1_X)$,
- $(\delta_D \otimes 1_X) \circ c_{X,D} = c_{X, D \otimes D} \circ (1_X \otimes \delta_D) = (1_D \otimes c_{X,D}) \circ (c_{X,D} \otimes 1_D) \circ (1_X \otimes \delta_D)$,

$\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 2.6. Sean D una coálgebra en \mathcal{C} , A un álgebra en \mathcal{C} y $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$. Se define el **producto convolución** de los morfismos f y g como sigue:

$$f * g := \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \delta_D.$$

Lema 2.7 ([24], Proposición III.3.1.). Sean D una coálgebra y A un álgebra en \mathcal{C} . $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$ es un monoide con el producto convolución. El elemento neutro de $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A), *)$ es $\varepsilon_D \otimes \eta_A$.

Se denotará por $\text{Reg}(D, A) := \{f: D \rightarrow A / \exists g: D \rightarrow A \text{ tal que } f * g = \varepsilon_D \otimes \eta_A = g * f\}$, es decir, $\text{Reg}(D, A)$ será la subcolección de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$ formada por los morfismos que son inversibles con respecto al producto convolución.

Definición 2.8. Sea A un álgebra en \mathcal{C} .

- Un **A -módulo por la derecha** en \mathcal{C} es un par $M \equiv (M, \varphi_M)$ donde M es un objeto en \mathcal{C} y $\varphi_M: M \otimes A \rightarrow M$ es un morfismo en \mathcal{C} llamado *acción* que satisface:

$$\varphi_M \circ (1_M \otimes \eta_A) = 1_M, \quad \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes 1_A) = \varphi_M \circ (1_M \otimes \mu_A).$$

- Sean M y N A -módulos por la derecha en \mathcal{C} . Un morfismo $f: M \rightarrow N$ en \mathcal{C} se dice **morfismo de A -módulos por la derecha** si satisface:

$$f \circ \varphi_M = \varphi_N \circ (f \otimes 1_A).$$

Definición 2.9. Sea D una coálgebra en \mathcal{C} .

- Un **D -comódulo por la derecha** en \mathcal{C} es un par $M \equiv (M, \rho_M)$ donde M es un objeto en \mathcal{C} y $\rho_M: M \rightarrow M \otimes D$ es un morfismo en \mathcal{C} denominado *coacción* que satisface las identidades siguientes:

$$(1_M \otimes \varepsilon_D) \circ \rho_M = 1_M, \quad (\rho_M \otimes 1_D) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_D) \circ \rho_M.$$

- Sean M y N D -comódulos por la derecha en \mathcal{C} . Un morfismo $g: M \rightarrow N$ en \mathcal{C} se dice **morfismo de D -comódulos por la derecha** si satisface:

$$\rho_N \circ g = (g \otimes 1_D) \circ \rho_M.$$

De manera totalmente análoga se podrían definir los conceptos anteriores “por la izquierda”.

2.2. Álgebras de Hopf

Definición 2.10. Un **álgebra de Hopf** en \mathcal{C} es un objeto H en \mathcal{C} que es simultáneamente álgebra y coálgebra en \mathcal{C} , $(H, \mu_H, \eta_H, \delta_H, \varepsilon_H)$, verificando:

- δ_H y ε_H son morfismos de álgebras en \mathcal{C} , es decir, se cumplen las identidades siguientes:

$$\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H}, \quad \delta_H \circ \eta_H = \eta_{H \otimes H},$$

$$\varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_{H \otimes H}, \quad 1_K = \varepsilon_H \circ \eta_H.$$

- $\exists \lambda_H: H \rightarrow H$ morfismo en \mathcal{C} llamado *antípodo* satisfaciendo la siguiente igualdad:

$$\lambda_H * 1_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = 1_H * \lambda_H,$$

es decir, un antípodo es un inverso con respecto al producto convolución de la identidad en H .

Además, H se dirá **conmutativa** si $\mu_H \circ c_{H,H} = \mu_H$ y **coconmutativa** si $c_{H,H} \circ \delta_H = \delta_H$.

Observación 2.11. Nótese que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. δ_H y ε_H son morfismos de álgebras.
2. μ_H y η_H morfismos de coálgebras.

Definición 2.12. Sean H y B álgebras de Hopf en \mathcal{C} . Un morfismo $f: H \rightarrow B$ en \mathcal{C} se dice **morfismo de álgebras de Hopf** si es un morfismo de álgebras y de coálgebras en \mathcal{C} , simultáneamente.

Lema 2.13. Sean H y B álgebras de Hopf en \mathcal{C} . Si $f: H \rightarrow B$ es un morfismo de álgebras de Hopf en \mathcal{C} , entonces $f \circ \lambda_H = \lambda_B \circ f$.

Demostración. Desarrollando las expresiones $f * (\lambda_B \circ f)$ y $(f \circ \lambda_H) * f$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \bullet f * (\lambda_B \circ f) &= \mu_B \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f)) \circ \delta_H \underset{f \text{ de coálgebras}}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes \lambda_B) \circ \delta_B \circ f \\ &\underset{1_B * \lambda_B = \varepsilon_B \otimes \eta_B}{=} \eta_B \circ \varepsilon_B \circ f \underset{f \text{ de coálgebras}}{=} \eta_B \circ \varepsilon_H = \varepsilon_H \otimes \eta_B, \\ \bullet (f \circ \lambda_H) * f &= \mu_B \circ ((f \circ \lambda_H) \otimes f) \circ \delta_H \underset{f \text{ de álgebras}}{=} f \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \\ &\underset{\lambda_H * 1_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H}{=} f \circ \eta_H \circ \varepsilon_H \underset{f \text{ de álgebras}}{=} \eta_B \circ \varepsilon_H = \varepsilon_H \otimes \eta_B. \end{aligned}$$

Es decir,

$$f * (\lambda_B \circ f) = \varepsilon_H \otimes \eta_B = (f \circ \lambda_H) * f.$$

Por lo tanto, por la unicidad del inverso para el producto convolución, $\lambda_B \circ f = f \circ \lambda_H$. \square

Proposición 2.14 (Propiedades del antípodo, [24], Teorema III.3.4.). *Sea H un Álgebra de Hopf en \mathcal{C} con antípodo λ_H . Se verifican:*

1. λ_H es único,
2. λ_H es antimultiplicativo, es decir, $\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H}$,
3. λ_H es anticomultiplicativo, es decir, $\delta_H \circ \lambda_H = c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H$,

4. λ_H preserva la unidad y la counidad, es decir,

$$\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H, \quad \varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H.$$

Ejemplo 2.15.

- Sea R un anillo unitario y $R\text{-Mod}$ la categoría de R -módulos por la izquierda. Los ejemplos naturales de álgebras de Hopf son las llamadas *álgebras de grupo* en $R\text{-Mod}$. Sea (G, \cdot) un grupo finito con elemento neutro e , un álgebra de grupo es la suma directa en $R\text{-Mod}$ siguiente:

$$R[G] := \bigoplus_{g \in G} Rg.$$

$R[G]$ es un álgebra de Hopf en $R\text{-Mod}$ junto con los siguientes morfismos:

$$\mu_{R[G]}(g \otimes g') = g \cdot g', \quad \delta_{R[G]}(g) = g \otimes g, \quad \lambda_{R[G]}(g) = g^{-1}.$$

Nótese que $R[G]$ es un álgebra de Hopf coconmutativa y, además, conmutativa si el grupo G es abeliano.

En estas condiciones, también se define la llamada *álgebra de Hopf dual* de $R[G]$ como la siguiente suma directa:

$$GR := \bigoplus_{g \in G} R f_g,$$

siendo $f_g: R[G] \rightarrow R$, $h \mapsto f_g(h) := \delta_g^h \forall g \in G$. GR es un álgebra de Hopf junto con los siguientes morfismos:

$$\mu_{GR}(f_g \otimes f_h) := \delta_g^h f_g, \quad \delta_{GR}(f_g) := \sum_{h \in G} f_{g \cdot h^{-1}} \otimes f_h, \quad \lambda_{GR}(f_g) := f_{g^{-1}}.$$

A diferencia de la anterior, GR es conmutativa, sin embargo, no es coconmutativa en general.

- ([37], Ejemplo 3.1.5) Sea \mathbb{K} un cuerpo de característica $\neq 2$. Considérese H la \mathbb{K} -álgebra generada por los elementos $\{1_{\mathbb{K}}, x, g, gx\}$, $x, g \in \mathbb{K}$, junto con las relaciones:

$$g^2 = 1_{\mathbb{K}}, \quad x^2 = 0_{\mathbb{K}}, \quad xg = -gx.$$

H es un álgebra de Hopf junto con la siguiente comultiplicación, counidad y antípodo:

$$\begin{array}{lll} \delta_H: H \longrightarrow H \otimes_{\mathbb{K}} H & \varepsilon_H: H \longrightarrow \mathbb{K} & \lambda_H: H \longrightarrow H \\ g \longmapsto g \otimes g & g \longmapsto 1_{\mathbb{K}} & g \longmapsto g \\ x \longmapsto x \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes x, & x \longmapsto 0_{\mathbb{K}}, & x \longmapsto -gx. \end{array}$$

Esta álgebra de Hopf se conoce como *álgebra de Hopf de Sweedler* y tiene la peculiaridad de que no es ni conmutativa ni coconmutativa.

Estos ejemplos sirven para ilustrar la gran variedad de estas estructuras. Otros de gran interés son: el *álgebra de Taft*, $T(n)$, que se trata de una generalización del álgebra de Hopf de Sweedler, la envolvente universal de un álgebra de Lie, $U(\mathfrak{g})$, o las distintas estructuras de álgebra de Hopf sobre el anillo de polinomios.

2.3. Álgebras de Hopf débiles

Las álgebras de Hopf débiles nacen como una generalización de las estructuras clásicas estudiadas en la sección previa. Introducidas por Böhm, Nill y Szlachányi [10], surgen con la finalidad de convertirse en los objetos idóneos para la obtención de soluciones de la Ecuación Dinámica de Yang-Baxter [19], que se trata de una modificación de la bien conocida Ecuación Cuántica. El objetivo fundamental de este apartado es definir estos nuevos objetos, analizar las principales diferencias con las álgebras de Hopf y demostrar sus propiedades fundamentales. Para el desarrollo de la sección se han utilizado fundamentalmente las siguientes referencias [10], [21] y [31].

Definición 2.16. Un **álgebra de Hopf débil** H es un objeto en \mathcal{C} que es simultáneamente un álgebra, (H, μ_H, η_H) , y una coálgebra, $(H, \delta_H, \varepsilon_H)$, en \mathcal{C} y además verifica los siguientes axiomas:

$$(a1) \quad \delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H},$$

$$(a2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes 1_H) &= (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes \delta_H \otimes 1_H) \\ &= (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes (c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes 1_H), \end{aligned}$$

$$(a3) \quad \begin{aligned} (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \circ \eta_H &= (1_H \otimes \mu_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \\ &= (1_H \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}) \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H), \end{aligned}$$

(a4) $\exists \lambda_H: H \rightarrow H \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ llamado *antípodo* verificando:

$$(a4.1) \quad 1_H * \lambda_H = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H),$$

$$(a4.2) \quad \lambda_H * 1_H = (1_H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

$$(a4.3) \quad \lambda_H = \lambda_H * 1_H * \lambda_H = \mu_H \circ (\mu_H \otimes 1_H) \circ (\lambda_H \otimes 1_H \otimes \lambda_H) \circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H.$$

Además, H se dirá **conmutativa** si $\mu_H \circ c_{H,H} = \mu_H$ y **coconmutativa** si $c_{H,H} \circ \delta_H = \delta_H$.

Como se puede observar en la definición anterior, estos nuevos objetos no verifican que la comultiplicación, δ_H , y la counidad, ε_H , son morfismos de álgebras en \mathcal{C} , lo cual resultará especialmente relevante en lo sucesivo. La única condición que se preserva con respecto a las álgebras de Hopf es la compatibilidad de δ_H con μ_H , es decir, el axioma (a1). Además, el antípodo λ_H para un álgebra de Hopf débil deja de ser inverso de 1_H para el producto convolución. La siguiente tabla trata de recoger de manera más explícita estas diferencias.

Álgebras de Hopf clásicas	Álgebras de Hopf débiles
$\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H}$	(a1)
$\delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H$	(a3)
$\varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H$	(a2)
$\lambda_H * 1_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = 1_H * \lambda_H$	(a4.1)-(a4.3)

Figura 2.1: Álgebras de Hopf vs. álgebras de Hopf débiles.

Como ya se comentó previamente, las álgebras de Hopf en el contexto débil “generalizan” los objetos clásicos. Pero, ¿en qué sentido se produce esta generalización? El resultado siguiente trata de dar respuesta a esta pregunta.

Proposición 2.17. *Sea H un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} . Son equivalentes:*

1. H es un álgebra de Hopf en \mathcal{C} .
2. $\delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H$.
3. ε_H es un morfismo de álgebras en \mathcal{C} , es decir, $\varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H$.

Demostración. Las implicaciones “1 \Rightarrow 2” y “1 \Rightarrow 3” son consecuencia inmediata de la definición de álgebra de Hopf (Definición 2.10).

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ De (a2) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes \delta_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \eta_H \otimes 1_H) &= \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \eta_H \otimes 1_H) \\
\text{Hipótesis: } \delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H &\implies (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes \eta_H \otimes \eta_H \otimes 1_H) = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \eta_H \otimes 1_H) \\
\mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H = \mu_H \circ (1_H \otimes \eta_H) &\implies \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H = \varepsilon_H \circ \mu_H \quad (*).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ε_H es un morfismo de álgebras en \mathcal{C} .

Falta comprobar que λ_H es el inverso de 1_H para la convolución. De (a4.1) se deduce:

$$\begin{aligned}
id_H * \lambda_H &= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H) \\
&= (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ (\eta_H \otimes \eta_H \otimes 1_H) \\
\delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H, (*) &\implies \\
\text{Naturalidad de } c, \varepsilon_H \circ \eta_H = 1_K &\implies \varepsilon_H \otimes \eta_H.
\end{aligned}$$

De (a4.2) y razonando de modo análogo se tiene que $\lambda_H * 1_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$. Por lo tanto, se concluye que H es un álgebra de Hopf.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Del axioma (a3) se deduce:

$$\begin{aligned}
(1_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \circ \eta_H &= (1_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \mu_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \\
\text{Hipótesis: } \varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H &\implies (1_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (1_H \otimes \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H) \\
(1_H \otimes \varepsilon_H) \circ \delta_H = 1_H = (\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H &\implies \delta_H \circ \eta_H = \eta_H \otimes \eta_H.
\end{aligned}$$

Entonces, de la igualdad anterior junto con el axioma (a1) se obtiene que δ_H es un morfismo de álgebras en \mathcal{C} .

Finalmente, utilizando argumentos análogos a los empleados en la prueba de la implicación anterior se tiene que $\lambda_H * 1_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H = 1_H * \lambda_H$ y, por lo tanto, H es un álgebra de Hopf. \square

Notación 2.18. Sea H un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} . De ahora en adelante se utilizarán las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned}\square_H^L &:= ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H), \\ \square_H^R &:= (1_H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)).\end{aligned}$$

Nótese que, por los axiomas (a4.1) y (a4.2), se verifica que:

$$1_H * \lambda_H = \square_H^L, \quad \lambda_H * 1_H = \square_H^R.$$

Ejemplo 2.19. Al igual que las álgebras de grupo y sus duales son ejemplos de álgebras de Hopf (ver Ejemplo 2.15), las *álgebras de grupoide* y sus duales son ejemplos de álgebras de Hopf débiles.

Un **grupoide** es una categoría \mathcal{G} en la cual todo morfismo es un isomorfismo. Si R es un anillo conmutativo y unitario y \mathcal{G} un grupoide finito, el **álgebra de grupoide** $R[\mathcal{G}]$ se define como la suma directa en la categoría de R -módulos

$$R[\mathcal{G}] := \bigoplus_{\beta \in \text{Mor}(\mathcal{G})} R\beta.$$

Si se consideran las siguientes aplicaciones, denominadas *source map* y *target map*,

$$s: \text{Mor}(\mathcal{G}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{G}) \quad (\text{Source}) \quad t: \text{Mor}(\mathcal{G}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{G}) \quad (\text{Target})$$

$$[f: X \rightarrow Y] \longmapsto X, \quad [f: X \rightarrow Y] \longmapsto Y.$$

entonces, $R[\mathcal{G}]$ es un álgebra de Hopf débil con los morfismos siguientes:

$$\begin{aligned}\mu_{R[\mathcal{G}]}: R[\mathcal{G}] \otimes_R R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R[\mathcal{G}] & \delta_{R[\mathcal{G}]}: R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R[\mathcal{G}] \otimes_R R[\mathcal{G}] \\ \beta \otimes \sigma &\longmapsto \begin{cases} \beta \circ \sigma & \text{si } t(\sigma) = s(\beta) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} & \beta &\longmapsto \beta \otimes \beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{R[\mathcal{G}]}: R &\longrightarrow R[\mathcal{G}] & \varepsilon_{R[\mathcal{G}]}: R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R \\ 1_R &\longmapsto \sum_{X \in \text{Ob}(\mathcal{G})} 1_X, & \beta &\longmapsto 1_R,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{R[\mathcal{G}]}: R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R[\mathcal{G}] \\ \beta &\longmapsto \beta^{-1},\end{aligned}$$

$\forall \beta, \sigma \in \text{Mor}(\mathcal{G})$. Es sencillo comprobar que los morfismos previos verifican los axiomas (a1)-(a3) y, si se definen:

$$\begin{aligned} \sqcap_{R[\mathcal{G}]}^L: R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R[\mathcal{G}] & \sqcap_{R[\mathcal{G}]}^R: R[\mathcal{G}] &\longrightarrow R[\mathcal{G}] \\ \beta &\longmapsto \beta \circ \beta^{-1} = 1_{t(\beta)}, & \beta &\longmapsto \beta^{-1} \circ \beta = 1_{s(\beta)}, \end{aligned}$$

$\forall \beta \in \text{Mor}(\mathcal{G})$, entonces también se satisfacen (a4.1)-(a4.3). Por lo tanto, $R[\mathcal{G}]$ es un álgebra de Hopf débil. Sin embargo, no es un álgebra de Hopf ya que se no se cumple ninguna de las condiciones de la Proposición 2.17.

Proposición 2.20 (Propiedades del antípodo, [10], Teorema 2.10). *Sea H un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} . El antípodo λ_H verifica:*

1. λ_H es único,
2. λ_H es antimultiplicativo, es decir, $\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H}$,
3. λ_H es anticomultiplicativo, es decir, $\delta_H \circ \lambda_H = c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H$,
4. λ_H preserva tanto la unidad como la counidad, es decir,

$$\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H, \quad \varepsilon_H \circ \lambda_H = \varepsilon_H.$$

Demostración.

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ son antípodos para H , entonces $\lambda_1 = \lambda_2$. En efecto:

$$\lambda_1 \stackrel{(a4.3)}{=} \lambda_1 * 1_H * \lambda_1 \stackrel{(a4.1)}{=} \lambda_1 * 1_H * \lambda_2 \stackrel{(a4.2)}{=} \lambda_2 * 1_H * \lambda_2 \stackrel{(a4.3)}{=} \lambda_2.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \lambda_H \circ \mu_H &= \mu_H \circ (\mu_H \otimes 1_H) \circ (\lambda_H \otimes 1_H \otimes \lambda_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_{H \otimes H \otimes H}) \\ &\circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \\ &= \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \sqcap_H^L) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes \sqcap_H^L) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \\ &= \mu_H \circ (1_H \otimes \mu_H) \circ (\lambda_H \otimes \mu_H \otimes \lambda_H) \circ (\mu_H \otimes 1_H \otimes \sqcap_H^L \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes c_{H,H}) \\ &\circ (1_{H \otimes H} \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \delta_H \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \\ &= \mu_H \circ (1_H \otimes \mu_H) \circ (\sqcap_H^R \otimes \lambda_H \otimes \lambda_H) \circ (\mu_H \otimes c_{H,H}) \circ (\sqcap_H^R \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \\ &= \mu_H \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ ((\mu_H \circ (1_H \otimes \sqcap_H^R)) \otimes 1_{H \otimes H \otimes H}) \circ (\lambda_H \otimes c_{H,H} \otimes \lambda_H \otimes \lambda_H) \\ &\circ (\delta_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ c_{H,H} \\ &= \mu_H \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ ((\mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H) \otimes \lambda_H \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H) \otimes \lambda_H) \\ &\circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ c_{H,H} = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H}. \end{aligned}$$

Con argumentos similares se prueba la anticomultiplicatividad de λ_H .

4.

$$\begin{aligned}\varepsilon_H \circ \lambda_H &= \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \delta_H = \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \square_H^L) \circ \delta_H \\ &= \varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = \varepsilon_H \circ \square_H^R = \varepsilon_H\end{aligned}$$

Empleando razonamientos semejantes se obtendría la identidad $\eta_H = \lambda_H \circ \eta_H$. \square

Por lo tanto, el antípodo λ_H satisface exactamente las mismas propiedades tanto para los objetos clásicos como para los débiles.

En los resultados siguientes se ponen de manifiesto una serie de propiedades de los morfismos \square_H^L y \square_H^R : compatibilidad con μ_H y δ_H , relación con λ_H y carácter idempotente.

Proposición 2.21 ([13], Proposición 4.3-4.4). *Sea H un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} . Se verifican:*

1. $(1_H \otimes \square_H^L) \circ \delta_H = (\mu_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H)$,
2. $(\square_H^R \otimes 1_H) \circ \delta_H = (1_H \otimes \mu_H) \circ (c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$,
3. $\mu_H \circ (1_H \otimes \square_H^L) = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes 1_H)$,
4. $\mu_H \circ (\square_H^R \otimes 1_H) = (1_H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes \delta_H)$.

Proposición 2.22 ([31], Proposición 2.2.1.(i)). *Si H un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} , entonces \square_H^L y \square_H^R son idempotentes.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\square_H^L \circ \square_H^L &\stackrel{\text{Naturalidad de } c}{=} ((\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \square_H^L)) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H) \\ &\stackrel{\text{Proposición 2.21. Identidad 3}}{=} (((\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H})) \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H) \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c, \text{ propiedad de la counidad}}{=} ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H) = \square_H^L.\end{aligned}$$

Similarmente se probaría el carácter idempotente de \square_H^R . \square

Proposición 2.23 ([31], Proposición 2.3.2). *Si H es un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} , entonces se verifican las siguientes identidades:*

$$\lambda_H \circ \square_H^R = \square_H^L \circ \square_H^R = \square_H^L \circ \lambda_H, \quad \square_H^R \circ \lambda_H = \square_H^R \circ \square_H^L = \lambda_H \circ \square_H^L.$$

Demostración. Por un lado, se tiene:

$$\begin{aligned}\square_H^L \circ \lambda_H &\stackrel{\lambda_H = \lambda_H * 1_H * \lambda_H = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \square_H^L) \circ \delta_H}{=} \square_H^L \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \square_H^L) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\square_H^L \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \square_H^L) = \square_H^L \circ \mu_H}{=} \square_H^L \circ \mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = \square_H^L \circ \square_H^R.\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \lambda_H \circ \square_H^R & \stackrel{\lambda_H = \lambda_H * 1_H * \lambda_H = \mu_H \circ (\square_H^R \otimes \lambda_H) \circ \delta_H}{=} \mu_H \circ (\square_H^R \otimes \lambda_H) \circ \delta_H \circ \square_H^R \\ & \stackrel{(\square_H^R \otimes 1_H) \circ \delta_H \circ \square_H^R = \delta_H \circ \square_H^R}{=} \mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H \circ \square_H^R = \square_H^L \circ \square_H^R. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\square_H^L \circ \lambda_H = \square_H^L \circ \square_H^R = \lambda_H \circ \square_H^R.$$

De manera similar se prueba la igualdad $\square_H^R \circ \lambda_H = \square_H^R \circ \square_H^L = \lambda_H \circ \square_H^L$. \square

Definición 2.24. Sean H y B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} . Un morfismo $f: H \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ se dice **morfismo de álgebras de Hopf débiles** en \mathcal{C} si es un morfismo de álgebras y de coálgebras en \mathcal{C} , simultáneamente.

Lema 2.25 ([6], Proposición 1.4). *Sean H y B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} . Si $f: H \rightarrow B$ es un morfismo de álgebras de Hopf débiles, entonces, f conmuta con el antípodo, es decir, $\lambda_B \circ f = f \circ \lambda_H$.*

Demostración. Nótese que los morfismos idempotentes \square_H^L y \square_H^R conmutan con f , es decir, $\square_B^L \circ f = f \circ \square_H^L$ y $\square_B^R \circ f = f \circ \square_H^R$. Como consecuencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} f \circ \lambda_H & \stackrel{\lambda_H = \mu_H \circ (\square_H^R \otimes \lambda_H) \circ \delta_H}{=} f \circ \mu_H \circ (\square_H^R \otimes \lambda_H) \circ \delta_H \stackrel{f \text{ de álgebras}}{=} \mu_B \circ ((f \circ \square_H^R) \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H \\ & \stackrel{f \circ \square_H^R = \square_B^R \circ f}{=} \mu_B \circ ((\square_B^R \circ f) \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H = \mu_B \circ ((\lambda_B \circ f) \otimes (f \circ \square_H^L)) \circ \delta_H \\ & \stackrel{f \circ \square_H^L = \square_B^L \circ f}{=} \mu_B \circ ((\lambda_B \circ f) \otimes (\square_B^L \circ f)) \circ \delta_H \stackrel{f \text{ de coálgebras}}{=} \mu_B \circ (\lambda_B \otimes \square_B^L) \circ \delta_B \circ f \\ & \stackrel{\mu_B \circ (\lambda_B \otimes \square_B^L) \circ \delta_B = \lambda_B}{=} \lambda_B \circ f. \end{aligned}$$

\square

2.4. Producto *smash* y coproducto *cosmash*

Una vez tratados los conceptos de álgebra de Hopf y álgebra de Hopf débil se introducen a continuación las estructuras de producto *smash* y coproducto *cosmash*. Estos generalizan el producto y coproducto habitual sobre el objeto producto tensor (Lema 2.4) y tendrán relevancia en lo sucesivo para el desarrollo de la memoria. Previamente será necesario definir las siguientes estructuras:

Definición 2.26. Sea H un álgebra de Hopf, A un álgebra y D una coálgebra en \mathcal{C} .

- Se dice que $A \equiv (A, \varphi_A, \mu_A, \eta_A)$ es un H -módulo álgebra por la izquierda en \mathcal{C} si se verifican las propiedades siguientes:

- $(A, \varphi_A: H \otimes A \rightarrow A)$ es un H -módulo por la izquierda.
- μ_A y η_A son morfismos de H -módulos por la izquierda, es decir, se verifican las siguientes igualdades:

$$\varphi_A \circ (1_H \otimes \mu_A) = \mu_A \circ \varphi_{A \otimes A}, \quad \varphi_A \circ (1_H \otimes \eta_A) = \varepsilon_H \otimes \eta_A,$$

$$\text{siendo } \varphi_{A \otimes A} := (\varphi_A \otimes \varphi_A) \circ (1_H \otimes c_{H,A} \otimes 1_A) \circ (\delta_H \otimes 1_A \otimes 1_A).$$

- Se dice que $A \equiv (A, \rho_A, \mu_A, \eta_A)$ es un H -comódulo álgebra por la izquierda en \mathcal{C} si se verifican las siguientes propiedades:

- $(A, \rho_A: A \rightarrow H \otimes A)$ es un H -comódulo por la izquierda.
- μ_A y η_A son morfismos de H -comódulos por la izquierda, es decir, se satisfacen las siguientes identidades:

$$\rho_A \circ \mu_A = (1_H \otimes \mu_A) \circ \rho_{A \otimes A}, \quad \rho_A \circ \eta_A = \eta_H \otimes \eta_A,$$

$$\text{siendo } \rho_{A \otimes A} := (\mu_H \otimes 1_A \otimes 1_A) \circ (1_H \otimes c_{A,H} \otimes 1_A) \circ (\rho_A \otimes \rho_A).$$

- Se dice que $D \equiv (D, \varphi_D, \delta_D, \varepsilon_D)$ es un H -módulo coálgebra por la izquierda en \mathcal{C} si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $(D, \varphi_D: H \otimes D \rightarrow D)$ es un H -módulo por la izquierda.
- δ_D y ε_D son morfismos de H -módulos por la izquierda, es decir, se verifican las siguientes igualdades:

$$\delta_D \circ \varphi_D = \varphi_{D \otimes D} \circ (1_H \otimes \delta_D), \quad \varepsilon_D \circ \varphi_D = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_D.$$

- Se dice que $D \equiv (D, \rho_D, \delta_D, \varepsilon_D)$ es un H -comódulo coálgebra por la izquierda en \mathcal{C} si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $(D, \rho_D: D \rightarrow H \otimes D)$ es un H -comódulo por la izquierda.
- δ_D y ε_D son morfismos de H -comódulos por la izquierda, es decir, son ciertas las igualdades siguientes:

$$(1_H \otimes \delta_D) \circ \rho_D = \rho_{D \otimes D} \circ \delta_D, \quad (1_H \otimes \varepsilon_D) \circ \rho_D = \eta_H \otimes \varepsilon_D.$$

De modo análogo se podrían definir los conceptos anteriores “por la derecha”.

Proposición 2.27. *Sea H un álgebra de Hopf y $(A, \varphi_A, \mu_A, \eta_A)$ un H -módulo álgebra por la izquierda en \mathcal{C} . El **producto smash** de A con H , $A \sharp H$, es un álgebra en \mathcal{C} con los morfismos producto y unidad siguientes:*

$$\mu_{A \sharp H} := (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes \varphi_A \otimes 1_H \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes 1_H \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_A \otimes 1_H),$$

$$\eta_{A \sharp H} := \eta_A \otimes \eta_H.$$

Demostración. Es inmediato comprobar la propiedad de la unidad:

$$\mu_{A\sharp H} \circ (\eta_{A\sharp H} \otimes 1_{A\otimes H}) = 1_{A\otimes H} = \mu_{A\sharp H} \circ (1_{A\otimes H} \otimes \eta_{A\sharp H}).$$

Se probará a continuación que $\mu_{A\sharp H}$ es asociativo. En efecto:

$$\begin{aligned} \mu_{A\sharp H} \circ (\mu_{A\sharp H} \otimes 1_{A\otimes H}) &\stackrel{(1)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes \mu_A \otimes 1_{H\otimes H}) \circ (1_A \otimes \varphi_A \otimes \varphi_A \otimes 1_{H\otimes H}) \circ (1_{A\otimes H\otimes A\otimes H} \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \\ &\quad \circ (1_{A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H} \otimes \varphi_A \otimes \mu_H) \circ (1_{A\otimes H} \otimes c_{H,A} \otimes 1_{H\otimes H} \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \\ &\quad \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes c_{H,A} \otimes 1_{H\otimes H\otimes A\otimes H}) \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_A \otimes \delta_H \otimes 1_{A\otimes H}) \\ &\stackrel{(2)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes \varphi_A \otimes 1_{H\otimes H}) \circ (1_{A\otimes H} \otimes \mu_A \otimes 1_{H\otimes H}) \circ (1_{A\otimes H\otimes A} \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \\ &\quad \circ (1_{A\otimes H\otimes A\otimes H} \otimes \varphi_A \otimes \mu_H) \circ (1_{A\otimes H\otimes A\otimes H\otimes H} \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_A \otimes \delta_H \otimes 1_{A\otimes H}) \\ &\stackrel{(3)}{=} \mu_{A\sharp H} \circ (1_{A\otimes H} \otimes \mu_{A\sharp H}). \end{aligned}$$

donde:

- La igualdad (1) es consecuencia de la naturalidad de c , la condición de compatibilidad de δ_H con μ_H , $\delta_H \otimes \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H\otimes H}$, la asociatividad y coasociatividad de μ_H , μ_A y δ_H y la igualdad $\varphi_A \circ (1_H \otimes \varphi_A) = \varphi_A \circ (\mu_H \otimes 1_A)$, que se tiene por ser (A, φ_A) un H -módulo por la izquierda.
- La igualdad (2) es consecuencia de la identidad $\mu_A \circ \varphi_{A\otimes A} = \varphi_A \circ (1_H \otimes \mu_A)$, es decir, por ser μ_A un morfismo de H -módulos por la izquierda.
- (3) se deduce de la naturalidad de c . □

Observación 2.28. Como ya se anticipó previamente, el producto *smash*, $\mu_{A\sharp H}$, generaliza el producto $\mu_{A\otimes H}$. En efecto, si se considera sobre A la estructura de H -módulo por la izquierda trivial, es decir, $\varphi_A = \varepsilon_H \otimes 1_A$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu_{A\sharp H} &= (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes \varepsilon_H \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_{A\otimes H}) \\ &\stackrel{(\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = 1_H}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) = \mu_{A\otimes B}. \end{aligned}$$

Definición 2.29. Sea H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} , (A, φ_A) un H -módulo por la izquierda y $\mu_{A\sharp\sigma H}$ el morfismo

$$\begin{aligned} \mu_{A\sharp\sigma H} &:= (\mu_A \otimes 1_H) \circ (\mu_A \otimes \sigma \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes \varphi_A \otimes \delta_{H\otimes H}) \\ &\quad \circ (1_{A\otimes H} \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_{A\otimes H}), \end{aligned}$$

donde $\sigma \in \text{Reg}(H \otimes H, A)$. Si $(A \otimes H, \mu_{A\sharp\sigma H}, \eta_{A\sharp\sigma H} := \eta_A \otimes \eta_H)$ es un álgebra en \mathcal{C} , entonces esta estructura se denomina **producto cruzado** de A con H . En esta situación, el morfismo σ se denomina *cociclo*.

Observación 2.30. Si $\sigma = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes \eta_A$, entonces el producto cruzado se reduce al producto *smash*.

Proposición 2.31. Sea H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} y $(D, \rho_D, \delta_D, \varepsilon_D)$ un H -comódulo coálgebra por la izquierda. El **coproducto cosmash** de D con H , $D \ominus H$, es una coálgebra en \mathcal{C} con el coproducto y counidad siguientes:

$$\begin{aligned}\delta_{D \ominus H} &:= (1_D \otimes \mu_H \otimes 1_{D \otimes H}) \circ (1_{D \otimes H} \otimes c_{D,H} \otimes 1_H) \circ (1_D \otimes \rho_D \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (\delta_D \otimes \delta_H), \\ \varepsilon_{D \ominus H} &:= \varepsilon_D \otimes \varepsilon_H.\end{aligned}$$

Demostración. Similar a 2.27. □

Definición 2.32. Sea H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} , (D, ρ_D) un H -comódulo por la izquierda y $\delta_{D \ominus \alpha H}$ el morfismo

$$\begin{aligned}\delta_{D \ominus \alpha H} &:= (1_D \otimes \mu_H \otimes 1_{D \otimes H}) \circ (1_{D \otimes H} \otimes c_{D,H} \otimes 1_H) \circ (1_D \otimes \rho_D \otimes \mu_{H \otimes H}) \\ &\circ (\delta_D \otimes \alpha \otimes \delta_H) \circ (\delta_D \otimes 1_H),\end{aligned}$$

donde $\alpha \in \text{Reg}(D, H \otimes H)$. Si $(D \otimes H, \delta_{D \ominus \alpha H}, \varepsilon_{D \ominus \alpha H} := \varepsilon_D \otimes \varepsilon_H)$ es una coálgebra en \mathcal{C} , entonces esta estructura se denomina **coproducto cruzado** de D con H . En esta situación, el morfismo α se denomina *cocociclo*.

Observación 2.33. Al igual que ocurría en el caso anterior, se tiene:

1. El coproducto *cosmash*, $\delta_{D \ominus H}$, es una generalización del coproducto $\delta_{D \otimes H}$ considerando sobre D la estructura de H -comódulo trivial, $\rho_D = \eta_H \otimes 1_D$.
2. El coproducto cruzado es una generalización del coproducto *cosmash* considerando el cocociclo trivial $\alpha = \eta_H \otimes \eta_H \otimes \varepsilon_D$.

Se finaliza esta sección con los conceptos de H -comódulo álgebra Cleft y de H -módulo coálgebra Cleft. A pesar de que ambos objetos serán considerados “por la derecha”, estos se definen de forma análoga “por la izquierda”.

Definición 2.34. Sea H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} .

- Sea $(A, \rho_A, \mu_A, \eta_A)$ un H -comódulo álgebra por la derecha. Se dice que A es un **H -comódulo álgebra Cleft por la derecha** si existe un morfismo de H -comódulos por la derecha $f: H \rightarrow A \in \text{Reg}(H, A)$.
- Sea $(D, \varphi_D, \delta_D, \varepsilon_D)$ un H -módulo coálgebra por la derecha. Se dice que D es un **H -módulo coálgebra Cleft por la derecha** si existe un morfismo de H -módulos por la derecha $g: D \rightarrow H \in \text{Reg}(D, H)$.

Ejemplo 2.35. Si H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} , entonces, H es un H -comódulo álgebra Cleft por la derecha. En efecto:

- H es un H -comódulo por la derecha con la coacción trivial dada por $\rho_H := 1_H \otimes \eta_H$.
- μ_H y η_H son morfismos de H -comódulos por la derecha, considerando sobre H la estructura de comódulo anterior. Por lo tanto, $(H, \rho_H = 1_H \otimes \eta_H, \mu_H, \eta_H)$ es un H -comódulo álgebra por la derecha.
- $\lambda_H: H \rightarrow H \in \text{Reg}(H, H)$, pues es el inverso de 1_H con respecto al producto convolución. Además, λ_H es un morfismo de H -comódulos por la derecha. Por lo tanto,

$$(H, \rho_H := 1_H \otimes \eta_H, \mu_H, \eta_H, \lambda_H)$$

es un H -comódulo álgebra Cleft por la derecha.

Análogamente se puede comprobar que H es un H -módulo coálgebra Cleft por la derecha con la acción $\varphi_H := 1_H \otimes \varepsilon_H$ y $\lambda_H \in \text{Reg}(H, H)$.

Lema 2.36. *Sea H un álgebra de Hopf en \mathcal{C} . Si $(A, \rho_A, \mu_A, \eta_A, f)$ es un H -comódulo álgebra Cleft con f^{-1} el inverso de f con respecto al producto convolución, entonces,*

$$\rho_A \circ f^{-1} = (f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H.$$

Demostración. Basta comprobar que tanto $\rho_A \circ f^{-1}$ como $(f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H$ son inversos del morfismo $\rho_A \circ f$ con respecto del producto convolución. Por un lado:

$$\begin{aligned} (\rho_A \circ f^{-1}) * (\rho_A \circ f) &= (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\mu_A \text{ de } H\text{-comódulos}}{=} \rho_A \circ \mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_A}{=} \rho_A \circ \eta_A \circ \varepsilon_H \\ &\stackrel{\eta_A \text{ de } H\text{-comódulos}}{=} \eta_A \otimes \eta_H \otimes \varepsilon_H. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (\rho_A \circ f) * ((f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H) &= (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ ((\rho_A \circ f) \otimes ((f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H)) \circ \delta_H \\ &\stackrel{f \text{ de } H\text{-comódulos, naturalidad de } c}{=} ((\mu_A \circ (f \otimes f^{-1})) \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H))) \\ &\circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_{H \otimes H} \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\text{Coasociatividad de } \delta_H}{=} ((\mu_A \circ (f \otimes f^{-1})) \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H))) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \\ &\circ (1_{H \otimes H} \otimes c_{H,H}) \circ (1_H \otimes \delta_H \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c}{=} ((\mu_A \circ (f \otimes f^{-1})) \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \\ &\circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \\ &\stackrel{1_H * \lambda_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H}{=} ((\mu_A \circ (f \otimes f^{-1})) \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H)) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ (\delta_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c}{=} (\mu_A \circ (f \otimes f^{-1}) \circ \delta_H) \otimes \eta_H \\ &\stackrel{f \in \text{Reg}(H,A)}{=} \varepsilon_H \otimes \eta_A \otimes \eta_H. \end{aligned}$$

Es decir, $(\rho_A \circ f^{-1}) * (\rho_A \circ f) = (\rho_A \circ f) * ((f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H)$. Por lo tanto, por la unicidad del inverso para el producto convolución, $\rho_A \circ f^{-1} = (f^{-1} \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H$. \square

Capítulo 3

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf

Sea \mathbb{K} un cuerpo y $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ la categoría de \mathbb{K} -espacios vectoriales. Dados H un álgebra de Hopf en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ y (V, φ_V, ρ_V) un \mathbb{K} -espacio vectorial con estructura de H -módulo y H -comódulo, se dice que V es un H -módulo de Hopf si se verifica una determinada relación de compatibilidad entre la acción, φ_V , y la coacción, ρ_V (ver Definición 3.1). Además, un morfismo entre H -módulos de Hopf es una aplicación que es H -lineal y H -colineal, simultáneamente. En este contexto, Larson y Sweedler [26] probaron que V es isomorfo al producto tensorial $V^{coH} \otimes_{\mathbb{K}} H$ como H -módulos de Hopf, siendo V^{coH} el objeto de coinvariantes de V . Este resultado clásico es conocido como el *Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf*. El objetivo principal de este capítulo consistirá en desarrollar el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf sobre una categoría monoidal *braided* simétrica y estricta, $\mathcal{C} \equiv (\mathcal{C}, \otimes, K, c)$, con la propiedad de idempotentes escindidos.

A lo largo del capítulo, H denotará un álgebra de Hopf en \mathcal{C} . Se comenzará definiendo el concepto de H -módulo de Hopf en el contexto monoidal.

Definición 3.1. Sea $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Se dice que $M \equiv (M, \varphi_M, \rho_M)$ es un **H -módulo de Hopf por la derecha** si se verifican las propiedades siguientes:

- (M, φ_M) es un H -módulo por la derecha,
- (M, ρ_M) es un H -comódulo por la derecha,
- $\rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)$, condición de compatibilidad entre la acción y la coacción.

¹En el teorema original de Larson, se define $V^{coH} := \{v \in V : \rho_V(v) = 1_H \otimes v\}$.

Definición 3.2. Sean M y N H -módulos de Hopf por la derecha en \mathcal{C} . Un morfismo $f: M \rightarrow N$ en \mathcal{C} se dice **morfismo de H -módulos de Hopf por la derecha** si es de H -módulos y de H -comódulos por la derecha, simultáneamente.

Observación 3.3.

- Se denotará mediante \mathcal{M}_H^H la categoría de H -módulos de Hopf por la derecha.
- Los conceptos anteriores podrían haber sido definidos de manera análoga “por la izquierda”, lo que daría lugar a la categoría de H -módulos de Hopf por la izquierda, ${}^H_H\mathcal{M}$.

Dado $(M, \varphi_M, \rho_M) \in \text{Ob}(\mathcal{M}_H^H)$, se considera el siguiente morfismo:

$$q_M := \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M: M \rightarrow M.$$

Proposición 3.4. q_M es idempotente.

Demostración.

$$\begin{aligned} q_M \circ q_M &\stackrel{(1)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H) \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(2)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes (c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(3)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes \lambda_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ ((\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H) \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(4)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes \lambda_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ ((\eta_H \circ \varepsilon_H) \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(5)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M = q_M, \end{aligned}$$

siendo la cadena de igualdades previa consecuencia de los hechos siguientes:

- En (1) se ha empleado la condición de compatibilidad entre φ_M y ρ_M :

$$\rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H).$$

- (2) es consecuencia de la propiedad del antípodo $\delta_H \circ \lambda_H = c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H$.
- En (3) se han utilizado: la naturalidad de c , la coasociatividad de δ_H y el axioma de H -comódulo, $(\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M$.
- (4) es consecuencia de la identidad $\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$.
- Por último, en (5) se han empleado la naturalidad de c , la propiedad de la counidad, $(\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = 1_H$, y el axioma de H -módulo, $\varphi_M \circ (1_M \otimes \eta_H) = 1_M$. \square

Entonces, debido al carácter idempotente del morfismo q_M , existen $M^{coH} := \text{Im}(q_M) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, objeto de coinvariantes de M , $p_M: M \rightarrow M^{coH}$ epimorfismo e $i_M: M^{coH} \rightarrow M$ monomorfismo verificando la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q_M} & M \\ & \searrow p_M & \nearrow i_M \\ & M^{coH} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M^{coH} & \xrightarrow{1_{M^{coH}}} & M^{coH} \\ & \searrow i_M & \nearrow p_M \\ & M & \end{array} .$$

Proposición 3.5. *El diagrama*

$$M^{coH} \xrightarrow{i_M} M \begin{array}{c} \xrightarrow{\rho_M} \\ \xrightarrow{1_M \otimes \eta_H} \end{array} M \otimes H \quad (D1)$$

es un diagrama igualador. Asimismo, el diagrama

$$M \otimes H \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_M} \\ \xrightarrow{1_M \otimes \varepsilon_H} \end{array} M \xrightarrow{p_M} M^{coH} \quad (D2)$$

es un diagrama coigualador.

Demostración. Se detallará que (D1) es un igualador. Mediante argumentos similares se comprobaría la propiedad de coigualador del diagrama (D2).

1. $\rho_M \circ i_M = (1_M \otimes \eta_H) \circ i_M$. Como p_M es un epimorfismo, basta con comprobar la igualdad $\rho_M \circ q_M = (1_M \otimes \eta_H) \circ q_M$. En efecto:

$$\begin{aligned} \rho_M \circ q_M &= (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H) \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M \\ &= (\varphi_M \otimes \mu_M) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes (c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &= (\varphi_M \otimes 1_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ ((\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H) \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &= (\varphi_M \otimes 1_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ ((\eta_H \circ \varepsilon_H) \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &= (\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H \circ 1_H, \text{ naturalidad de } c \quad q_M \otimes \eta_H, \end{aligned}$$

donde la cadena de igualdades previa es similar a la de la Proposición 3.4 anterior.

2. Propiedad universal del igualador. Si $t: Z \rightarrow M$ es un morfismo verificando la igualdad $\rho_M \circ t = (1_M \otimes \eta_H) \circ t$ y $\theta := p_M \circ t$, entonces:

$$\begin{aligned} i_M \circ \theta &= i_M \circ p_M \circ t = q_M \circ t = \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M \circ t \\ &= \rho_M \circ t = (1_M \otimes \eta_H) \circ t \quad \varphi_M \circ (1_M \otimes (\lambda_H \circ \eta_H)) \circ t \\ &= \lambda_H \circ \eta_H = \eta_H, \quad \varphi_M \circ (1_M \otimes \eta_H) = 1_M \quad t. \end{aligned}$$

Además, por ser i_M un monomorfismo, se concluye (D1) es un diagrama igualador. \square

La demostración del siguiente lema es consecuencia inmediata de la definición de los morfismos que intervienen.

Lema 3.6. $M^{coH} \otimes H$ es un H -módulo de Hopf por la derecha junto con la acción y coacción siguientes:

$$\begin{aligned}\varphi_{M^{coH} \otimes H} &:= 1_{M^{coH}} \otimes \mu_H, \\ \rho_{M^{coH} \otimes H} &:= 1_{M^{coH}} \otimes \delta_H.\end{aligned}$$

Se definen los siguientes morfismos:

$$\begin{aligned}\omega &:= \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H): M^{coH} \otimes H \rightarrow M \\ \omega' &:= (p_M \otimes 1_H) \circ \rho_M: M \rightarrow M^{coH} \otimes H.\end{aligned}$$

Proposición 3.7. Con la estructura de H -módulo de Hopf por la derecha sobre $M^{coH} \otimes H$ definida en el Lema 3.6, ω y ω' son morfismos en la categoría \mathcal{M}_H^H .

Demostración.

1. ω es un morfismo en \mathcal{M}_H^H .

- ω es un morfismo de H -módulos por la derecha.

$$\begin{aligned}\omega \circ \varphi_{M^{coH} \otimes H} &= \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \mu_H) \\ &= \varphi_M \circ ((\varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H)) \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (\omega \otimes 1_H).\end{aligned}$$

- ω es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\begin{aligned}\rho_M \circ \omega &= \rho_M \circ \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H) \\ &\stackrel{\text{Compatibilidad entre } \varphi_M \text{ y } \rho_M}{=} (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H) \circ (i_M \otimes 1_H) \\ &\stackrel{i_M \text{ igualador}}{=} (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \eta_H \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c, \mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H}{=} (\varphi_M \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \delta_H) = (\omega \otimes 1_H) \circ \rho_{M^{coH} \otimes H}.\end{aligned}$$

2. ω' es un morfismo en \mathcal{M}_H^H .

- ω' es un morfismo de H -módulos por la derecha.

$$\begin{aligned}\omega' \circ \varphi_M &= (p_M \otimes 1_H) \circ \rho_M \circ \varphi_M \\ &\stackrel{\text{Compatibilidad entre } \varphi_M \text{ y } \rho_M}{=} (p_M \otimes 1_H) \circ (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{p_M \text{ coigualador}}{=} (p_M \otimes \varepsilon_H \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c, (\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = 1_H}{=} (p_M \otimes \mu_H) \circ (\rho_M \otimes 1_M) = \varphi_{M^{coH} \otimes H} \circ (\omega' \otimes 1_H)\end{aligned}$$

- ω' es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\begin{aligned}(\omega' \otimes 1_H) \circ \rho_M &= (p_M \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M}{=} (p_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M = \rho_{M^{coH} \otimes H} \circ \omega'.\end{aligned} \quad \square$$

Teorema 3.8 (Fundamental de los Módulos de Hopf). *Sea (M, φ_M, ρ_M) un H -módulo de Hopf por la derecha. Los objetos M y $M^{coH} \otimes H$ son isomorfos en la categoría \mathcal{M}_H^H .*

Demostración. Por un lado se tiene:

$$\begin{aligned}
\omega \circ \omega' &= \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H) \circ (p_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = \varphi_M \circ (q_M \otimes 1_H) \circ \rho_M \\
&= \varphi_M \circ ((\varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H)) \circ \rho_M) \otimes 1_H \circ \rho_M \\
&= (\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M, \varphi_M \otimes (\varphi_M \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (1_M \otimes \mu_H) \quad \varphi_M \circ (1_M \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\
&= \mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H \quad \varphi_M \circ (1_M \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H)) \circ \rho_M \\
&= \varphi_M \circ (1_M \otimes \eta_H) = 1_M, (1_M \otimes \varepsilon_H) \circ \rho_M = 1_M \quad 1_M \circ 1_M = 1_M.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como i_M es un monomorfismo, comprobar que $\omega' \circ \omega = 1_{M^{coH} \otimes H}$ es equivalente a demostrar que $(i_M \otimes 1_H) \circ \omega' \circ \omega = i_M \otimes 1_H$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(i_M \otimes 1_H) \circ \omega' \circ \omega &= (q_M \otimes 1_H) \circ \rho_M \circ \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H) \\
&\stackrel{(1)}{=} ((\varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H)) \otimes 1_H) \circ (\varphi_M \otimes \mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_{H \otimes H \otimes H}) \\
&\circ (\rho_M \otimes \delta_H \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ ((\rho_M \circ i_M) \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(2)}{=} ((\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H)) \circ c_{H,H})) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)) \otimes \mu_H) \\
&\circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \eta_H \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(3)}{=} ((\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H)) \circ c_{H,H})) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H)) \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(4)}{=} ((\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H)) \circ c_{H,H})) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (1_M \otimes \delta_H \otimes \delta_H)) \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \eta_H \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(5)}{=} ((\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes \lambda_H) \circ (1_M \otimes \delta_H)) \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(6)}{=} ((\varphi_M \circ (1_M \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H))) \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \delta_H) \\
&\stackrel{(7)}{=} ((\varphi_M \circ (1_M \otimes (\eta_H \circ \varepsilon_H))) \otimes 1_H) \circ (i_M \otimes \delta_H) \stackrel{(8)}{=} i_M \otimes 1_H,
\end{aligned}$$

siendo:

- (1) consecuencia de la condición de compatibilidad entre φ_M y ρ_M :

$$\rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H),$$

- (2) consecuencia del igualador i_M y la antimultiplicatividad del antípodo,

$$\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H},$$

- (3) consecuencia de la propiedad de la unidad, $\mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H$, y de la naturalidad de la trenza c ,
- (4) consecuencia del igualador i_M ,
- (5) consecuencia de la naturalidad de c , el hecho de que λ_H preserva la unidad, es decir, $\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$, y la propiedad de la unidad $\mu_H \circ (1_H \otimes \eta_H) = 1_H$,

- (6) consecuencia del axioma de H -módulo $\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (1_M \otimes \mu_H)$,
- (7) consecuencia de que λ_H es el inverso de 1_H para la operación convolución, es decir, $1_H * \lambda_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$,
- (8) consecuencia de la propiedad de la counidad $(\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = 1_H$ y el axioma de H -módulo, $\varphi_M \circ (1_M \otimes \eta_H) = 1_M$. \square

Caso particular 3.9 (Proyección de un álgebra de Hopf). Considérense B y H álgebras de Hopf en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf en \mathcal{C} verificando:

$$1_H \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} H \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B.$$

En esta situación, B es un H -módulo de Hopf por la derecha en \mathcal{C} con las siguientes acción y coacción:

$$\varphi_B := \mu_B \circ (1_B \otimes f): B \otimes H \rightarrow B, \quad \rho_B := (1_B \otimes g) \circ \delta_B: B \rightarrow B \otimes H.$$

En efecto:

1. (B, φ_B) es un H -módulo por la derecha.

$$\begin{aligned} \varphi_B \circ (\varphi_B \otimes 1_H) &= \mu_B \circ (\mu_B \otimes 1_B) \circ (1_B \otimes f \otimes f) \\ &\stackrel{\text{Asociatividad de } \mu_B}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ (f \otimes f))) \\ &\stackrel{f \text{ de álgebras}}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \mu_H)) = \varphi_B \circ (1_B \otimes \mu_H). \end{aligned}$$

$$\varphi_B \circ (1_B \otimes \eta_H) = \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \eta_H)) \stackrel{\eta_B = f \circ \eta_H}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes \eta_B) = 1_B.$$

2. (B, ρ_B) es un H -comódulo por la derecha.

$$\begin{aligned} (\rho_B \otimes 1_H) \circ \rho_B &= (1_B \otimes g \otimes g) \circ (\delta_B \otimes 1_B) \circ \delta_B \\ &\stackrel{\text{Coasociatividad de } \delta_B}{=} (1_B \otimes ((g \otimes g) \circ \delta_B)) \circ \delta_B \\ &\stackrel{g \text{ de coálgebras}}{=} (1_B \otimes (\delta_H \circ g)) \circ \delta_B = (1_B \otimes \delta_H) \circ \rho_B. \end{aligned}$$

$$(1_B \otimes \varepsilon_H) \circ \rho_B = (1_B \otimes (\varepsilon_H \circ g)) \circ \delta_B \stackrel{\varepsilon_H \circ g = \varepsilon_B}{=} (1_B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B = 1_B.$$

3. Compatibilidad entre φ_B y ρ_B .

$$\begin{aligned} \rho_B \circ \varphi_B &= (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (1_B \otimes f) \\ &\stackrel{\delta_B \circ \mu_B = (\mu_B \otimes \mu_B) \circ \delta_{B \otimes B}}{=} (1_B \otimes g) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (1_B \otimes f) \\ &\stackrel{f \text{ de álgebras, } g \text{ de coálgebras}}{=} (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes g \otimes g) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (1_{B \otimes B} \otimes f \otimes f) \circ (\delta_B \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{g \circ f = 1_H}{=} (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes g \otimes 1_H) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes f \otimes 1_H) \circ (\delta_B \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c}{=} ((\mu_B \circ (1_B \otimes f)) \otimes \mu_H) \circ (1_B \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ ((1_B \otimes g) \circ \delta_B) \otimes \delta_H \\ &= (\varphi_B \otimes \mu_H) \circ (1_B \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_B \otimes \delta_H). \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf (Teorema 3.8), se puede afirmar la existencia de un objeto en \mathcal{C} , B_H , el denominado *objeto de coinvariantes* de B , verificando que B es isomorfo a $B_H \otimes H$ en la categoría \mathcal{M}_H^H .

Además, se tiene que:

1. Como consecuencia de la Proposición 3.4,

$$q_B := \varphi_B \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_B = \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ \delta_B: B \rightarrow B$$

es idempotente. Por lo tanto, existen $p_B: B \rightarrow B_H$ epimorfismo e $i_B: B_H \rightarrow B$ monomorfismo verificando que:

$$i_B \circ p_B = q_B, \quad p_B \circ i_B = 1_{B_H}.$$

2. Por la Proposición 3.5, el diagrama

$$B_H \xrightarrow{i_B} B \begin{array}{c} \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} \\ \xrightarrow{1_B \otimes \eta_H} \end{array} B \otimes H \quad (\text{D1}^*)$$

es un igualador. De igual modo, el diagrama

$$B \otimes H \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu_B \circ (1_B \otimes f)} \\ \xrightarrow{1_B \otimes \varepsilon_H} \end{array} B \xrightarrow{p_B} B_H \quad (\text{D2}^*)$$

es un coigualador.

3. $B_H \otimes H$ es isomorfo a B en \mathcal{M}_H^H a través del morfismo

$$\omega_B := \mu_B \circ (i_B \otimes f): B_H \otimes H \rightarrow B,$$

con inverso

$$\omega'_B := (p_B \otimes g) \circ \delta_B: B \rightarrow B_H \otimes H.$$

De ahora en adelante se trabajará en la situación siguiente: sean H y B álgebras de Hopf en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf tales que

$$1_H \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} H \rightarrow B.$$

Proposición 3.10. B_H es un álgebra en \mathcal{C} con las siguientes operaciones:

$$\mu_{B_H} := p_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B),$$

$$\eta_{B_H} := p_B \circ \eta_B.$$

Además, B_H es una coálgebra en \mathcal{C} con la comultiplicación y counidad que se definen a continuación:

$$\delta_{B_H} := (p_B \otimes p_B) \circ \delta_B \circ i_B,$$

$$\varepsilon_{B_H} := \varepsilon_B \circ i_B.$$

En efecto, $(1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \eta_B = (1_B \otimes \eta_H) \circ \eta_B$:

$$(1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \eta_B \underset{\eta_B \otimes \eta_B = \delta_B \circ \eta_B}{=} (1_B \otimes g) \circ (\eta_B \otimes \eta_B) \underset{\eta_H = g \circ \eta_B}{=} \eta_B \otimes \eta_H.$$

Entonces, por la propiedad universal del igualador, $\exists!$ $\nu: K \rightarrow B_H$ verificando que $i_B \circ \nu = \eta_B$. De nuevo, componiendo con p_B se obtiene lo siguiente:

$$p_B \circ i_B \circ \nu = p_B \circ \eta_B \underset{p_B \circ i_B = 1_{B_H}}{\implies} \nu = p_B \circ \eta_B = \eta_{B_H}.$$

Finalmente, la terna $(B_H, \mu_{B_H}, \eta_{B_H})$ verifica los axiomas de álgebra en \mathcal{C} .

1. $\mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \eta_{B_H}) = 1_{B_H} = \mu_{B_H} \circ (\eta_{B_H} \otimes 1_{B_H})$.

Se comprobará la igualdad $\mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \eta_{B_H}) = 1_{B_H}$ siendo la prueba análoga para la igualdad $\mu_{B_H} \circ (\eta_{B_H} \otimes 1_{B_H}) = 1_{B_H}$. Como i_B es un monomorfismo, será equivalente comprobar que $i_B \circ \mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \eta_{B_H}) = i_B$. En efecto:

$$i_B \circ \mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \eta_{B_H}) = \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \circ (1_{B_H} \otimes \eta_{B_H}) = \mu_B \circ (i_B \otimes \eta_B) \underset{\mu_B \circ (1_B \otimes \eta_B) = 1_B}{=} i_B.$$

2. $\mu_{B_H} \circ (\mu_{B_H} \otimes 1_{B_H}) = \mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_{B_H})$.

De nuevo, por ser i_B monomorfismo, será equivalente comprobar que

$$i_B \circ \mu_{B_H} \circ (\mu_{B_H} \otimes 1_{B_H}) = i_B \circ \mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_{B_H}).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} i_B \circ \mu_{B_H} \circ (\mu_{B_H} \otimes 1_{B_H}) &= \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \circ (\mu_{B_H} \otimes 1_{B_H}) = \mu_B \circ (\mu_B \otimes 1_B) \circ (i_B \otimes i_B \otimes i_B) \\ &\underset{\text{Asociatividad de } \mu_B}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B) \circ (i_B \otimes i_B \otimes i_B) = \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \circ (1_{B_H} \otimes \mu_{B_H}) \\ &= i_B \circ \mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_{B_H}). \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3.11. Nótese que δ_{B_H} y ε_{B_H} son las factorizaciones, a través del coigualador (D2*), de los morfismos $(p_B \otimes p_B) \circ \delta_B$ y ε_B , respectivamente.

Como B_H tiene estructura de álgebra y de coálgebra en \mathcal{C} , parece natural plantearse la siguiente cuestión: ¿son los morfismos ω_B y ω'_B de álgebras y de coálgebras? Si se dota al objeto $B_H \otimes H$ del producto $\mu_{B_H \otimes H} = (\mu_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (1_{B_H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H)$, ni ω_B ni ω'_B son morfismos de álgebras, excepto que se requiera alguna hipótesis adicional como la conmutatividad o la coconmutatividad de B . Lo mismo ocurre si se trata de probar que ω_B y ω'_B son morfismos de coálgebras dotando a $B_H \otimes H$ de la comultiplicación $\delta_{B_H \otimes H} = (1_{B_H} \otimes c_{B_H, H} \otimes 1_H) \circ (\delta_{B_H} \otimes \delta_H)$. Una vez observados estos hechos, el objetivo pasa a ser el siguiente: ¿existe alguna estructura de álgebra (coálgebra) sobre $B_H \otimes H$ de tal manera que los morfismos ω_B y ω'_B sean de álgebras (coálgebras)? Los resultados sucesivos tratan de responder a esta cuestión.

Proposición 3.12 ([1], Proposición 1.2). *Si $(A, \rho_A, \mu_A, \eta_A, f)$ es un H -comódulo álgebra Cleft por la derecha en \mathcal{C} y A_H es el igualador del siguiente diagrama:*

$$A_H \xrightarrow{i_A} A \underset{1_A \otimes \eta_H}{\overset{\rho_A}{\rightrightarrows}} A \otimes H,$$

entonces:

1. A_H es un álgebra en \mathcal{C} .
2. Existe una acción $\varphi_{A_H}: H \otimes A_H \rightarrow A_H$.
3. $A_H \#_{\sigma} H$ es un producto cruzado, siendo el cociclo σ la factorización a través del igualador del morfismo $(\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H)$.
4. Existe un isomorfismo $\zeta: A_H \#_{\sigma} H \rightarrow A$ de H -comódulo álgebras.

Demostración.

1. La prueba de que A_H es un álgebra en \mathcal{C} es análoga a la ya realizada en la Proposición 3.10.
2. φ_{A_H} es la factorización por i_A del morfismo

$$\mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A,A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes i_A) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H}).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \rho_A \circ \mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A,A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes i_A) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H}) &\stackrel{(1)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes ((\mu_A \otimes \mu_H) \\ &\circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ c_{A,A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes 1_A) \circ (\delta_H \otimes i_A) \\ &\stackrel{(2)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \mu_A \otimes 1_H) \circ (1_{A \otimes A} \otimes \rho_A) \circ (1_A \otimes c_{A,A}) \\ &\circ (f \otimes f^{-1} \otimes 1_A) \circ (\delta_H \otimes i_A) \\ &\stackrel{(3)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_{A \otimes H} \otimes (c_{H,A} \circ (1_H \otimes \mu_A) \circ (1_H \otimes c_{A,A}))) \\ &\circ (f \otimes 1_H \otimes \lambda_H \otimes f^{-1} \otimes 1_A) \circ (((\delta_H \otimes \delta_H) \circ \delta_H) \otimes i_A) \\ &\stackrel{(4)}{=} (\mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A,A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes 1_A) \circ (\delta_H \otimes i_A)) \otimes \eta_H, \end{aligned}$$

siendo cada una de las igualdades previas consecuencia de los siguientes hechos:

- (1) se debe a que μ_A es morfismo de H -comódulos por la derecha, es decir, se satisface la identidad $\rho_A \circ \mu_A = (\mu_A \otimes \mu_A) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A)$,
- (2) se debe a la naturalidad de c , a que i_A es el igualador de ρ_A y $1_A \otimes \eta_H$, y a la propiedad de la unidad $\mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H$,
- (3) es consecuencia de la naturalidad de c , el hecho de que f sea morfismo de H -comódulos por la derecha y la igualdad $\rho_A \circ f^{-1} = c_{H,A} \circ (\lambda_H \otimes f^{-1}) \circ \delta_H$,
- En (4) se ha empleado la naturalidad de la c , la igualdad $\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$ y la propiedad de la counidad $(1_H \otimes \varepsilon_H) \circ \delta_H = 1_H$.

Entonces, por la propiedad universal del igualador $\exists! \varphi_{A_H}: H \otimes A_H \rightarrow A_H$ verificando que $i_A \circ \varphi_{A_H} = \mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A,A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes i_A) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H})$.

3. En primer lugar se probará que el cociclo σ es la factorización a través de i_A del morfismo

$$(\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \rho_A \circ [(\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H)] &\stackrel{(1)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ ((\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H)) \\ &\quad \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \otimes (\rho_A \circ f^{-1}) \circ (f \otimes f \otimes \mu_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \\ &\stackrel{(2)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_{A \otimes H} \otimes (\rho_A \circ f^{-1})) \\ &\quad \circ ((\mu_A \circ (f \otimes f)) \otimes \mu_H \otimes \mu_H) \circ (1_{H \otimes H} \otimes \delta_{H \otimes H}) \circ \delta_{H \otimes H} \\ &\stackrel{(3)}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_{A \otimes H} \otimes (c_{H,A} \circ (\lambda_H \otimes f^{-1}))) \\ &\quad \circ (1_A \otimes \delta_H \otimes 1_H) \circ ((\mu_A \circ (f \otimes f)) \otimes (\delta_H \circ \mu_H)) \circ \delta_{H \otimes H} \\ &\stackrel{(4)}{=} [(\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H)] \otimes \eta_H, \end{aligned}$$

donde:

- (1) es consecuencia de que μ_A es un morfismo de H -comódulos,
- (2) se debe a que f es morfismo de H -comódulos por la derecha, a la naturalidad de c y a la coasociatividad de $\delta_{H \otimes H}$,
- (3) es consecuencia de la igualdad $\rho_A \circ f^{-1} = c_{H,A} \circ (\lambda_H \otimes f^{-1}) \circ \delta_H$, de la compatibilidad entre μ_H y δ_H , $(\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H} = \delta_H \circ \mu_H$, y la coasociatividad de δ_H ,
- (4) es consecuencia de la naturalidad de c , la igualdad $1_H * \lambda_H = \varepsilon_H \otimes \eta_H$ y la propiedad de la counidad $(\varepsilon_H \otimes 1_H) \circ \delta_H = 1_H$.

Por lo tanto, por la propiedad universal del igualador, $\exists! \sigma: H \otimes H \rightarrow A_H$ verificando que $i_A \circ \sigma = (\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H)$. Además, con argumento similares a los previos, se puede comprobar que $\sigma \in \text{Reg}(H \otimes H, A_H)$ con inverso para la convolución el morfismo que se obtiene por la factorización a través del igualador de $(f \circ \mu_H) * (\mu_B \circ c_{B,B} \circ (f^{-1} \otimes f^{-1}))$.

Es fácil comprobar que la terna $(A_H \sharp_{\sigma} H, \mu_{A_H \sharp_{\sigma} H}, \eta_{A_H \sharp_{\sigma} H})$ verifica los axiomas de álgebra, siendo los morfismos $\mu_{A_H \sharp_{\sigma} H}$ y $\eta_{A_H \sharp_{\sigma} H}$ los de la Definición 2.29.

4. $\zeta := \mu_A \circ (i_A \otimes f): A_H \otimes H \rightarrow A$ es un isomorfismo en \mathcal{C} con inverso $\chi := (P \otimes 1_H) \circ \rho_A$, siendo P el morfismo que se obtiene por la factorización a través del igualador del morfismo $\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A$. En efecto:

$$\begin{aligned} \rho_A \circ \mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A &= (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A \\ &\stackrel{\rho_A \circ f^{-1} = c_{H,A} \circ (\lambda_H \otimes f^{-1}) \circ \delta_H}{=} (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes (c_{H,A} \circ (\lambda_H \otimes f^{-1}) \circ \delta_H)) \circ \rho_A \\ &\stackrel{\text{Naturalidad de } c, (\rho_A \otimes 1_H) \circ \rho_A = (1_A \otimes \delta_H) \circ \rho_A}{=} (\mu_A \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes (c_{H,A} \circ ((\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H)) \\ &\quad \circ \delta_H) \otimes f^{-1}) \circ \delta_H)) \circ \rho_A = (\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A) \otimes \eta_H \end{aligned}$$

De nuevo, por la propiedad universal del igualador, existirá un único $P: A \rightarrow A_H$ verificando que $i_A \circ P = \mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A$.

a) ζ y χ son inversos en \mathcal{C} .

$$\begin{aligned}\zeta \circ \chi &= \mu_A \circ ((i_A \circ P) \otimes f) \circ \rho_A = \mu_A \circ ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A) \otimes f) \circ \rho_A \\ &= \mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_A)) \circ \delta_A \\ &= \mu_A \circ (1_A \otimes (\eta_A \circ \varepsilon_A)) \circ \delta_A = 1_A\end{aligned}$$

Dado que i_A es un igualador, i_A es un monomorfismo en \mathcal{C} . Por lo tanto, probar que $\chi \circ \zeta = 1_{A_H \otimes H}$ es equivalente a ver que $(i_A \otimes 1_H) \circ \chi \circ \zeta = i_A \otimes 1_H$. En efecto:

$$\begin{aligned}(i_A \otimes 1_H) \circ \chi \circ \zeta &= ((i_A \circ P) \otimes 1_H) \circ \rho_A \circ \mu_A \circ (i_A \otimes f) = ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A) \otimes 1_H) \circ \rho_A \circ \mu_A \circ (i_A \otimes f) \\ &= \mu_A \text{ de } H\text{-comódulos } ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A) \otimes 1_H) \circ (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \\ &\circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (i_A \otimes f) \\ &= i_A \text{ igualador } ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A) \otimes 1_H) \circ (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes \eta_H \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= \text{Naturalidad de } c, \mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H \quad ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ \rho_A \circ \mu_A) \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= \mu_A \text{ de } H\text{-comódulos } ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A)) \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= i_A \text{ igualador } ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \eta_H \otimes \rho_A)) \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes \eta_H \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= \text{Naturalidad de } c, \mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H \quad ((\mu_A \circ (1_A \otimes f^{-1}) \circ (\mu_A \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \rho_A)) \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= f \text{ de } H\text{-comódulos, } (\rho_A \otimes 1_H) \circ \rho_A = (1_A \otimes \delta_H) \circ \rho_A \quad ((\mu_A \circ (\mu_A \otimes f^{-1})) \otimes 1_H) \\ &\circ (i_A \otimes ((f \otimes \delta_H) \circ \delta_H)) \\ &= \mu_A \text{ asociativa, } \delta_H \text{ coasociativa } ((\mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ (f \otimes f^{-1}) \circ \delta_H))) \otimes 1_H) \circ (i_A \otimes \delta_H) \\ &=_{f \in \text{Reg}(H,A)} ((\mu_A \circ (1_A \otimes (\eta_A \circ \varepsilon_H))) \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H) = i_A \otimes 1_H.\end{aligned}$$

b) ζ y χ son morfismos de H -comódulos. Nótese $A_H \otimes H$ es un H -comódulo con la coacción $\rho_{A_H \otimes H} := 1_{A_H} \otimes \delta_H$ (Lema 3.6). Se probará que ζ es de H -comódulos por la derecha, siendo los razonamientos análogos para χ .

$$\begin{aligned}\rho_A \circ \zeta &= \rho_A \circ \mu_A \circ (i_A \otimes f) \\ &= \mu_A \text{ de } H\text{-comódulos } (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (i_A \otimes f) \\ &= i_A \text{ igualador } (\mu_A \otimes \mu_H) \circ (1_A \otimes c_{H,A} \otimes 1_H) \circ (i_A \otimes \eta_H \otimes (\rho_A \circ f)) \\ &= \text{Naturalidad de } c, \mu_H \circ (\eta_H \otimes 1_H) = 1_H \quad ((\mu_A \circ (1_A \otimes f)) \otimes 1_H) \circ (i_A \otimes \delta_H) = (\zeta \otimes 1_H) \circ \rho_{A_H \otimes H}.\end{aligned}$$

c) ζ y χ son morfismos de álgebras con el producto cruzado de A_H con H .

$$\zeta \circ \eta_{A_H \# \sigma H} = \mu_A \circ (i_A \otimes f) \circ (\eta_{A_H} \otimes \eta_H) \underset{i_A \circ \eta_{A_H} = \eta_A, \eta_A = f \circ \eta_H}{=} \mu_A \circ (\eta_A \otimes \eta_A) = \eta_A.$$

$$\begin{aligned}
\zeta \circ \mu_{A_H} \sharp_{\sigma} H &= \mu_A \circ (i_A \otimes f) \circ (\mu_{A_H} \otimes 1_H) \circ (\mu_{A_H} \otimes \sigma \otimes \mu_H) \circ (1_{A_H} \otimes \varphi_{A_H} \otimes \delta_{H \otimes H}) \\
&\circ (1_{A_H \otimes H} \otimes c_{H, A_H} \otimes 1_H) \circ (1_{A_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{A_H \otimes H}) \\
&\stackrel{(1)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes f) \circ ((i_A \circ \mu_{A_H}) \otimes (\mu_A \circ ((\mu_A \circ (f \otimes f)) \otimes (f^{-1} \circ \mu_H))) \circ \delta_{H \otimes H}) \otimes \mu_H) \\
&\circ (1_{A_H} \otimes \varphi_{A_H} \otimes \delta_{H \otimes H}) \circ (1_{A_H \otimes H} \otimes c_{H, A_H} \otimes 1_H) \circ (1_{A_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{A_H \otimes H}) \\
&\stackrel{(2)}{=} \mu_A \circ (\zeta \otimes \mu_A) \circ (1_{A_H \otimes H} \otimes f \otimes (\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H \circ \mu_H)) \circ (\mu_{A_H} \otimes \delta_{H \otimes H}) \\
&\circ (1_{A_H} \otimes \varphi_{A_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_{A_H \otimes H} \otimes c_{H, A_H} \otimes 1_H) \circ (1_{A_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{A_H \otimes H}) \\
&\stackrel{(3)}{=} \mu_A \circ (\zeta \otimes \mu_A) \circ (1_{A_H \otimes H} \otimes f \otimes (\eta_A \circ (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H))) \circ (\mu_{A_H} \otimes \delta_{H \otimes H}) \\
&\circ (1_{A_H} \otimes \varphi_{A_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_{A_H \otimes H} \otimes c_{H, A_H} \otimes 1_H) \circ (1_{A_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{A_H \otimes H}) \\
&\stackrel{(4)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) \circ (i_A \otimes f \otimes 1_A) \circ (\mu_{A_H} \otimes 1_H \otimes 1_A) \circ (1_{A_H} \otimes \varphi_{A_H} \otimes 1_H \otimes 1_A) \\
&\circ (1_{A_H \otimes H} \otimes c_{H, A_H} \otimes 1_A) \circ (1_{A_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{A_H} \otimes f) \\
&\stackrel{(5)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes f) \circ (\mu_A \otimes f \otimes 1_H) \circ (i_A \otimes ((\mu_A \otimes 1_H) \circ (1_A \otimes \mu_A \otimes 1_H)) \circ (1_A \otimes c_{A, A} \otimes 1_H)) \\
&\circ (f \otimes f^{-1} \otimes i_A \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes c_{H, A_H}) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H}) \otimes 1_H) \\
&\stackrel{(6)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) \circ (i_A \otimes (\mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A, A}))) \circ (f \otimes (\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H) \otimes i_A) \\
&\circ (\delta_H \otimes 1_{A_H})) \otimes f) \\
&\stackrel{(7)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) \circ (i_A \otimes (\mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A, A}))) \circ (f \otimes (\eta_A \circ \varepsilon_H) \otimes i_A) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H})) \otimes f) \\
&\stackrel{(8)}{=} \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \mu_A \otimes 1_A) \circ (i_A \otimes f \otimes i_A \otimes f) \\
&\stackrel{(9)}{=} \mu_A \circ (\zeta \otimes \zeta),
\end{aligned}$$

siendo:

- (1) consecuencia de las identidades

$$i_A \circ \mu_{A_H} = \mu_A \circ (i_A \otimes i_A) \text{ y } i_A \circ \sigma = (\mu_A \circ (f \otimes f)) * (f^{-1} \circ \mu_H),$$

- (2) consecuencia de la asociatividad de μ_A , la coasociatividad de $\delta_{H \otimes H}$ y la igualdad $(\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H} = \delta_H \circ \mu_H$,
- (3) se debe a la igualdad $\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_A$ y $\varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H$,
- (4) consecuencia de la naturalidad de c y de las propiedades de la unidad y la counidad, $\mu_A \circ (1_A \otimes \eta_A) = 1_A$ y $(1_H \otimes \varepsilon_H) \circ \delta_H = 1_H$,
- (5) consecuencia de las identidades $i_A \circ \mu_{A_H} = \mu_A \circ (i_A \otimes i_A)$ y

$$i_A \circ \varphi_{A_H} = \mu_A \circ (1_A \otimes (\mu_A \circ c_{A, A})) \circ (f \otimes f^{-1} \otimes i_A) \circ (\delta_H \otimes 1_{A_H}),$$

- (6) se debe a la naturalidad de c y a la asociatividad de μ_A ,
- (7) se debe a la igualdad $\mu_A \circ (f^{-1} \otimes f) \circ \delta_H = \varepsilon_H \otimes \eta_A$,
- (8) se debe a la naturalidad de c , la propiedad de la unidad, $\mu_A \circ (1_A \otimes \eta_A) = 1_A$, y la propiedad de la counidad, $(1_H \otimes \varepsilon_H) \circ \delta_H = 1_H$,
- Por último, (9) es consecuencia de la asociatividad de μ_A .

Similarmente se prueba el resultado para χ . □

La siguiente proposición se obtiene mediante razonamientos análogos a los previos.

Proposición 3.13 ([1], Proposición 2.2). *Si $(D, \varphi_D, \delta_D, \varepsilon_D, g)$ es un H -módulo coálgebra Cleft por la derecha y D_H es el coigualador del siguiente diagrama,*

$$D \otimes H \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_D} \\ \xrightarrow{1_D \otimes \varepsilon_H} \end{array} D \xrightarrow{c_D} D_H,$$

entonces:

1. D_H es una coálgebra en \mathcal{C} .
2. Existe una coacción $\rho_{D_H}: D_H \rightarrow H \otimes D_H$.
3. $D_H \ominus_\alpha H$ es un coproducto cruzado, siendo $\alpha: D_H \rightarrow H \otimes H$ la factorización a través del coigualador c_D del morfismo $((g \otimes g) \circ \delta_D) * (\delta_H \circ g^{-1})$.
4. Existe un isomorfismo de H -módulo coálgebras por la derecha $\kappa: D_H \ominus_\alpha H \rightarrow D$.

Particularizando los resultados anteriores se obtiene el conocido *Teorema de Radford-Majid-Bespalov*, introducido por Radford [33] a mediados de la década de los 80 del siglo pasado y con el que se da respuesta a la pregunta planteada previamente: ¿existe alguna estructura de álgebra (coálgebra) sobre $B_H \otimes H$ de tal manera que los morfismos ω_B y ω'_B sean de álgebras (coálgebras)?

Corolario 3.14 (Teorema de Radford-Majid-Bespalov). *Sean H y B álgebras de Hopf en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf tal que $g \circ f = 1_H$. En esta situación, $B_H \rtimes H := (B_H \otimes H, \eta_{B_H \sharp H}, \mu_{B_H \sharp H}, \varepsilon_{B_H \ominus H}, \delta_{B_H \ominus H})$ es isomorfo a B . Más concretamente:*

1. $B_H \otimes H$ es isomorfo a B en \mathcal{M}_H^H , es decir, son isomorfos como H -módulos de Hopf por la derecha,
2. $B_H \sharp H$ es isomorfo a B como álgebras en \mathcal{C} ,
3. $B_H \ominus H$ es isomorfo a B como coálgebras en \mathcal{C} .

Demostración. En primer lugar se prueba que $(B, \rho_B := (1_B \otimes g) \circ \delta_B, \mu_B, \eta_B, f)$ es un H -comódulo álgebra Cleft por la derecha.

1. (B, ρ_B) es un H -comódulo por la derecha (Caso particular 3.9).
2. μ_B es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\begin{aligned} (\mu_B \otimes 1_H) \circ \rho_{B \otimes B} &= (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes g \otimes g) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \\ &\stackrel{g \text{ de álgebras}}{=} (1_B \otimes g) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \\ &= (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B = \rho_B \circ \mu_B. \end{aligned}$$

3. η_B es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\rho_B \circ \eta_B = (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \eta_B = (1_B \otimes g) \circ (\eta_B \otimes \eta_B) \stackrel{g \circ \eta_B = \eta_H}{=} \eta_B \otimes \eta_H.$$

4. f es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\rho_B \circ f = (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ f \stackrel{f \text{ de } \text{c} \circ \text{álgebras}}{=} (f \otimes (g \circ f)) \circ \delta_H = (f \otimes 1_H) \circ \delta_H.$$

5. $f \in \text{Reg}(H, B)$ con inverso $f^{-1} := f \circ \lambda_H$.

$$\mu_B \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H \stackrel{f \text{ de } \text{álgebras}}{=} f \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H = f \circ \eta_H \circ \varepsilon_H = \varepsilon_H \otimes \eta_B.$$

Análogamente se verifica que $(f \circ \lambda_H) * f = \varepsilon_H \otimes \eta_B$.

Además, en el *Caso particular* 3.9 se ha concluido que el diagrama (D1*)

$$B_H \xrightarrow{i_B} B \begin{array}{c} \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} \\ \xrightarrow{1_B \otimes \eta_H} \end{array} B \otimes H$$

es un igualador. Entonces, se verifican las hipótesis de la Proposición 3.12. Por lo tanto, se tiene:

- Existe una acción $\varphi_{B_H} : H \otimes B_H \rightarrow B_H$ verificando que

$$i_B \circ \varphi_{B_H} = \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes i_B) \circ (\delta_H \otimes 1_{B_H}).$$

En este caso, (B_H, φ_{B_H}) es un H -módulo por la izquierda. En efecto:

- $\underline{\varphi_{B_H} \circ (\eta_H \otimes 1_{B_H}) = 1_{B_H}}$.

$$\begin{aligned} i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (\eta_H \otimes 1_{B_H}) &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes i_B) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_{B_H}) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes i_B) \circ (\eta_H \otimes \eta_H \otimes 1_{B_H}) = i_B \end{aligned}$$

donde la última igualdad de la cadena anterior se debe a las siguientes propiedades: f es un morfismo de álgebras, la naturalidad de c , la propiedad de la unidad,

$$\mu_B \circ (\eta_B \otimes 1_B) = 1_B = \mu_B \circ (1_B \otimes \eta_B),$$

y al hecho de λ_H preservar la unidad, es decir, $\lambda_H \circ \eta_H = \eta_H$. Por lo tanto, como i_B es un monomorfismo, se concluye que $\varphi_{B_H} \circ (\eta_H \otimes 1_{B_H}) = 1_{B_H}$.

- $\underline{\varphi_{B_H} \circ (1_H \otimes \varphi_{B_H}) = \varphi_{B_H} \circ (\mu_H \otimes 1_{B_H})}$. Como i_B es un monomorfismo, resultará equivalente probar que $i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (1_H \otimes \varphi_{B_H}) = i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (\mu_H \otimes 1_{B_H})$.

$$\begin{aligned} i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (1_H \otimes \varphi_{B_H}) &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes i_B) \circ (\delta_H \otimes \varphi_{B_H}) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (1_{B \otimes B} \otimes (\mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B}))) \\ &\quad \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes i_B) \circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H}) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (\mu_H \otimes 1_{B_H}) &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (((f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H \circ \mu_H) \otimes i_B) \\
&= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (((f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ (\mu_H \otimes \mu_H)) \\
&\quad \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)) \otimes i_B) \\
&= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (\mu_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B}) \otimes i_B) \\
&\quad \circ (((1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)) \otimes 1_{B_H})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la naturalidad de c , se deduce la igualdad.

- $B_H \sharp_{\sigma} H$ es un producto cruzado con $\sigma \in \text{Reg}(H \otimes H, B_H)$ verificando que

$$i_B \circ \sigma = (\mu_B \circ (f \otimes f)) * ((f \circ \lambda_H) \circ \mu_H).$$

En este caso, se verifica que $\sigma = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes \eta_{B_H}$, por lo tanto, según la *Observación 2.30*, se tiene que $\mu_{B_H \sharp_{\sigma} H} = \mu_{B_H \sharp H}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
i_B \circ \sigma &= (\mu_B \circ (f \otimes f)) * (f \circ \lambda_H \circ \mu_H) \stackrel{f \text{ de álgebras}}{=} \mu_B \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H \otimes H} \\
&\stackrel{f \text{ de álgebras}}{=} f \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H \circ \mu_H = f \circ \eta_H \circ \varepsilon_H \circ \mu_H \\
&\stackrel{f \circ \eta_H = \eta_B}{=} \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes \eta_B \stackrel{\eta_B = i_B \circ \eta_{B_H}}{=} \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes (i_B \circ \eta_{B_H})
\end{aligned}$$

De donde, por ser i_B un monomorfismo, se concluye la igualdad $\sigma = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H \otimes \eta_{B_H}$.

- $\omega_B = \mu_B \circ (i_B \otimes f): B_H \sharp H \rightarrow B$ es un isomorfismo de H -comódulo álgebras con inverso $\chi = (P \otimes 1_H) \circ \rho_B: B \rightarrow B_H \sharp H$. Además, $\chi = \omega'_B$. Para demostrarlo, únicamente hay que comprobar que $P = p_B$. Por la Proposición 3.12, es conocido que $P: B \rightarrow B_H$ es el único morfismo verificando que $i_B \circ P = \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \rho_B$. Entonces, si se demuestra que p_B también cumple la identidad previa, por unicidad, se concluiría que $P = p_B$. En efecto:

$$i_B \circ p_B = q_B = \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ \delta_B = \mu_B \circ (1_B \otimes f^{-1}) \circ \rho_B.$$

Por lo tanto, ω_B es un isomorfismo de H -comódulo álgebras con inverso ω'_B .

También se comprueba fácilmente que $(B, \varphi_B := \mu_B \circ (1_B \otimes f), \delta_B, \varepsilon_B, g)$ es un H -módulo coálgebra Cleft, siendo el inverso de $g \in \text{Reg}(B, H)$ con respecto al producto convolución el morfismo definido como $g^{-1} := g \circ \lambda_B$. Además, como consecuencia de *Caso particular 3.9*, el diagrama (D2*)

$$\begin{array}{ccccc}
B \otimes H & \xrightarrow{\mu_B \circ (1_B \otimes f)} & B & \xrightarrow{p_B} & B_H \\
& \xrightarrow{1_B \otimes \varepsilon_H} & & &
\end{array}$$

es un coigualador. Por lo tanto, por la Proposición 3.13, se tiene:

- Existe una coacción $\rho_{B_H}: B_H \rightarrow H \otimes B_H$. Además, en este caso particular, el par (B_H, ρ_{B_H}) es un H -comódulo por la izquierda.
- $B_H \ominus_{\alpha} H$ es un coproducto cruzado, pero como $\alpha = \eta_H \otimes \eta_H \otimes \varepsilon_{B_H}$, entonces se tiene que $\delta_{B_H \ominus_{\alpha} H} = \delta_{B_H \ominus H}$.
- $\omega_B: B_H \ominus H \rightarrow B$ es un isomorfismo de H -módulo coálgebras con inverso ω'_B . □

Capítulo 4

Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf en el contexto débil

Una vez demostrado el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf sobre una categoría monoidal *braided* estricta y simétrica con idempotentes escindidos, es natural plantearse si cabe la posibilidad de generalizar este resultado para álgebras de Hopf débiles. Böhm, Nill y Szlachányi introdujeron en [10] la categoría de módulos de Hopf por la derecha sobre un álgebra de Hopf débil H , \mathcal{M}_H^H , y enunciaron la versión débil del Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf, la cual se desarrollará a lo largo de este capítulo. A diferencia de lo que ocurre si H es un álgebra de Hopf, en el contexto débil no se tiene por qué satisfacer la condición de que $\omega' \circ \omega = 1_{M^{coH} \otimes H}$. Esto obligará a introducir un nuevo objeto que, en el caso de que H sea un álgebra de Hopf, coincide con $M^{coH} \otimes H$.

A continuación, se considerará el caso particular de álgebras de Hopf con proyección:

$${}_{1_H} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ H \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B.$$

En este contexto, se prueba que también es generalizable para álgebras de Hopf débiles el Teorema de Radford-Majid-Bespalov y, sobre todo, que los morfismos ω_B y ω'_B son inversos si y solamente si H es un álgebra de Hopf, resultado del cual sólo se conocía la implicación en uno de los sentidos vista en el anterior capítulo.

En lo que sigue, \mathcal{C} seguirá denotando una categoría monoidal *braided* estricta y simétrica con la propiedad de idempotentes escindidos, mientras que H denotará un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} . Se comenzará definiendo el concepto de módulo de Hopf sobre un álgebra de Hopf débil en \mathcal{C} .

Definición 4.1. Sea $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Se dice que $M \equiv (M, \varphi_M, \rho_M)$ es un **H -módulo de Hopf por la derecha** en \mathcal{C} si se satisfacen las propiedades siguientes:

- (M, φ_M) es un H -módulo por la derecha y (M, ρ_M) es un H -comódulo por la derecha.
- Se verifica la condición de compatibilidad siguiente entre la acción y la coacción:

$$\rho_M \circ \varphi_M = (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes \delta_H).$$

Como se puede observar, las condiciones previas coinciden con los axiomas de la Definición 3.1 en el contexto clásico, lo único que ha variado es que H es ahora un álgebra de Hopf débil. Además, $f: M \rightarrow N$ es un **morfismo H -módulos de Hopf por la derecha** si es de H -módulos y de H -comódulos por la derecha, coincidiendo nuevamente con la Definición 3.2.

Dado (M, φ_M, ρ_M) un H -módulo de Hopf por la derecha en \mathcal{C} , se considera el morfismo $q_M = \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M$.

Proposición 4.2. q_M es idempotente.

Demostración. En primer lugar se verifica que

$$\rho_M \circ q_M = (1_M \otimes \square_H^L) \circ \rho_M \circ q_M. \quad (4.1)$$

En efecto, por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho_M \circ q_M &\stackrel{(1)}{=} (\varphi_M \otimes \mu_H) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \circ (c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(2)}{=} (\varphi_M \otimes 1_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ (\square_H^L \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M, \end{aligned}$$

donde se han utiliza las siguientes identidades:

- en (1) la condición de compatibilidad entre la acción y la coacción junto la anticommutatividad del antípodo λ_H ,
- en (2) se ha empleado la condición de H -comódulo, $(\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M$, la coasociatividad de δ_H , la naturalidad de c y la igualdad $\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H = \square_H^L$.

Por otro lado, utilizando los mismos argumentos que en la cadena de igualdades previa, se tiene que

$$(1_M \otimes \square_H^L) \circ \rho_M \circ q_M = (\varphi_M \otimes \square_H^L) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ (\square_H^L \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M.$$

Por lo tanto, por la naturalidad de c y el carácter idempotente del morfismo \square_H^L , se concluye (4.1).

Entonces, utilizando la igualdad anterior se tiene que q_M es idempotente. En efecto:

$$\begin{aligned}
q_M \circ q_M &\stackrel{(4.1)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes (\lambda_H \circ \Pi_H^L)) \circ \rho_M \circ q_M \\
&\stackrel{(1)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes (\lambda_H \circ \Pi_H^L \circ \mu_H)) \circ (1_M \otimes c_{H,H} \otimes 1_H) \circ (\rho_M \otimes (c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\
&\stackrel{(2)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes (\lambda_H \circ \Pi_H^L)) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ (\Pi_H^L \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\
&\stackrel{(3)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes \lambda_H) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ (\Pi_H^L \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\
&\stackrel{(4)}{=} \varphi_M \circ (\varphi_M \otimes \Pi_H^R) \circ (1_M \otimes (c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\
&\stackrel{(5)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes (\mu_H \circ (1_H \otimes \Pi_H^R) \circ \delta_H \circ \lambda_H)) \circ \rho_M \\
&\stackrel{(6)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M = q_M,
\end{aligned}$$

siendo:

- (1) consecuencia de la condición de compatibilidad entre la acción y la coacción y la antimultiplicatividad de λ_H ,
- (2) consecuencia del axioma de H -comódulo, $(\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M$, la coasociatividad de δ_H , la naturalidad de c y la identidad $\mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \delta_H = \Pi_H^L$,
- (3) consecuencia de la naturalidad de c y del carácter idempotente del morfismo Π_H^L ,
- (4) consecuencia de la identidad $\lambda_H \circ \Pi_H^L = \Pi_H^R \circ \lambda_H$,
- (5) consecuencia de la antimultiplicatividad de λ_H y el axioma de H -módulo siguiente:
 $\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (1_M \otimes \mu_H)$,
- (6) consecuencia de la identidad $\mu_H \circ (1_H \otimes \Pi_H^R) \circ \delta_H = 1_H$. □

Por ser q_M un morfismo idempotente en \mathcal{C} , existirán $M^{coH} := \text{Im}(q_M)$, objeto de coinvariantes en \mathcal{C} , $p_M: M \rightarrow M^{coH}$ epimorfismo e $i_M: M^{coH} \rightarrow M$ monomorfismo verificando que $i_M \circ p_M = q_M$ y $p_M \circ i_M = 1_{M^{coH}}$, es decir, son conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{q_M} & M \\
& \searrow p_M & \nearrow i_M \\
& & M^{coH}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
M^{coH} & \xrightarrow{1_{M^{coH}}} & M^{coH} \\
& \searrow i_M & \nearrow p_M \\
& & M
\end{array}$$

Proposición 4.3. *El diagrama*

$$M^{coH} \xrightarrow{i_M} M \xrightarrow[\substack{\rho_M \\ (1_M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M}]{\rho_M} M \otimes H \tag{DD1}$$

es un diagrama igualador. Asimismo, el diagrama

$$M \otimes H \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_M} \\ \xrightarrow{\varphi_M \circ (1_M \otimes \Pi_H^L)} \end{array} M \xrightarrow{p_M} M^{coH} \quad (\text{DD2})$$

es un diagrama coigualador.

Demostración. Se seguirá el esquema de demostración llevado a cabo en la Proposición 3.5, por lo que se comprobará únicamente que (DD1) es un igualador. Los argumentos son similares para probar que (DD2) es un coigualador.

1. $\rho_M \circ i_M = (1_M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M \circ i_M$. Es consecuencia inmediata de la identidad (4.1) y de que p_M es un epimorfismo.
2. Propiedad universal del igualador. Si $t: Z \rightarrow M$ es un morfismo verificando la identidad $\rho_M \circ t = (1_M \otimes \Pi_H^L) \circ \rho_M \circ t$ y $\theta := p_M \circ t$, entonces:

$$\begin{aligned} i_M \circ \theta &= i_M \circ p_M \circ t = q_M \circ t = \varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M \circ t \\ &= \varphi_M \circ (1_M \otimes (\lambda_H \circ \Pi_H^L)) \circ \rho_M \circ t \\ &= \varphi_M \circ (1_M \otimes (\Pi_H^R \circ \Pi_H^L)) \circ \rho_M \circ t \\ &= \varphi_M \circ (1_M \otimes \Pi_H^R) \circ \rho_M \circ t \\ &= \varphi_M \circ (1_M \otimes \Pi_H^R) \circ \rho_M \circ t \\ &= t. \end{aligned}$$

Además, por ser i_M un monomorfismo, se concluye que (DD1) es un diagrama igualador. \square

Si se consideran los morfismos $\omega = \varphi_M \circ (i_M \otimes 1_H)$ y $\omega' = (p_M \otimes 1_H) \circ \rho_M$, entonces se tiene que $\omega \circ \omega' = 1_M$. En efecto:

$$\begin{aligned} \omega \circ \omega' &= \varphi_M \circ ((i_M \circ p_M) \otimes 1_H) \circ \rho_M = \varphi_M \circ (q_M \otimes 1_H) \circ \rho_M \\ &= \varphi_M \circ ((\varphi_M \circ (1_M \otimes \lambda_H) \circ \rho_M) \otimes 1_H) \circ \rho_M \\ &= \varphi_M \circ (1_M \otimes (\mu_H \circ (\lambda_H \otimes 1_H) \circ \delta_H)) \circ \rho_M \\ &\stackrel{(\star)}{=} \varphi_M \circ (1_M \otimes \Pi_H^R) \circ \rho_M = 1_M, \end{aligned}$$

siendo la igualdad (\star) consecuencia del axioma de H -módulo, $\varphi_M \circ (\varphi_M \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (1_M \otimes \mu_H)$, y de H -comódulo, $(\rho_M \otimes 1_H) \circ \rho_M = (1_M \otimes \delta_H) \circ \rho_M$. Por lo tanto, el morfismo

$$\nabla_M := \omega' \circ \omega: M^{coH} \otimes H \rightarrow M^{coH} \otimes H$$

es idempotente. En efecto:

$$\nabla_M \circ \nabla_M = (\omega' \circ \omega) \circ (\omega' \circ \omega) = \omega' \circ (\omega \circ \omega') \circ \omega = \omega' \circ 1_M \circ \omega = \omega' \circ \omega = \nabla_M.$$

Por lo tanto, existen $M^{coH} \times H := \text{Im}(\nabla_M) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $p_{M^{coH} \times H}: M^{coH} \otimes H \rightarrow M^{coH} \times H$ epimorfismo e $i_{M^{coH} \times H}: M^{coH} \times H \rightarrow M^{coH} \otimes H$ monomorfismo verificando la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& \omega \nearrow & & \searrow \omega' & \\
M^{coH} \otimes H & \xrightarrow{\nabla_M} & & & M^{coH} \otimes H \\
& \searrow p_{M^{coH} \times H} & & \nearrow i_{M^{coH} \times H} & \\
& & M^{coH} \times H & & \\
& & & & , \\
M^{coH} \times H & \xrightarrow{1_{M^{coH} \times H}} & & & M^{coH} \times H \\
& \searrow i_{M^{coH} \times H} & & \nearrow p_{M^{coH} \times H} & \\
& & M^{coH} \otimes H & & .
\end{array}$$

El siguiente lema afirma que el objeto $M^{coH} \times H$ es un H -módulo de Hopf por la derecha. La demostración es inmediata por las propiedades de los morfismos que intervienen.

Lema 4.4.

1. $M^{coH} \times H$ es un H -módulo por la derecha con la acción

$$\varphi_{M^{coH} \times H} := p_{M^{coH} \times H} \circ (1_{M^{coH}} \otimes \mu_H) \circ (i_{M^{coH} \times H} \otimes 1_H).$$

2. $M^{coH} \times H$ es un H -comódulo por la derecha con la coacción

$$\rho_{M^{coH} \times H} := (p_{M^{coH} \times H} \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \times H}.$$

3. $M^{coH} \times H$ es un H -módulo de Hopf por la derecha.

Considérense los morfismos α_M y α'_M definidos como sigue:

$$\alpha_M := \omega \circ i_{M^{coH} \times H}: M^{coH} \times H \rightarrow M,$$

$$\alpha'_M := p_{M^{coH} \times H} \circ \omega': M \rightarrow M^{coH} \times H.$$

Proposición 4.5. Con la estructura de H -módulo de Hopf por la derecha definida en el Lema 4.4, α_M y α'_M son morfismos en la categoría \mathcal{M}_H^H .

Demostración. Se llevará a cabo la demostración de que α_M es un morfismo de H -módulos de Hopf por la derecha y se omitirán los detalles para α'_M , ya que los argumentos son similares.

- α_M es un morfismo de H -módulos por la derecha.

$$\begin{aligned}
\alpha_M \circ \varphi_{M^{coH} \times H} &= \omega \circ i_{M^{coH} \times H} \circ p_{M^{coH} \times H} \circ (1_{M^{coH}} \otimes \mu_H) \circ (i_{M^{coH} \times H} \otimes 1_H) \\
&= \omega \circ \omega' \circ \omega \circ (1_{M^{coH}} \otimes \mu_H) \circ (i_{M^{coH} \times H} \otimes 1_H) \\
&= \omega \circ (1_{M^{coH}} \otimes \mu_H) \circ (i_{M^{coH} \times H} \otimes 1_H) \\
&= \varphi_M \circ ((\omega \circ i_{M^{coH} \times H}) \otimes 1_H) = \varphi_M \circ (\alpha_M \otimes 1_H).
\end{aligned}$$

- α_M es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\begin{aligned}
(\alpha_M \otimes 1_H) \circ \rho_{M^{coH} \times H} &= ((\omega \circ i_{M^{coH} \times H} \circ p_{M^{coH} \times H}) \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \times H} \\
&= i_{M^{coH} \times H} \circ p_{M^{coH} \times H} \circ \nabla_{M=\omega' \circ \omega} ((\omega \circ \omega' \circ \omega) \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \times H} \\
&=_{\omega \circ \omega' = 1_M} (\omega \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \delta_H) \circ i_{M^{coH} \times H} \\
&=_{(\omega \otimes 1_H) \circ (1_{M^{coH}} \otimes \delta_H) = \rho_{M \circ \omega}} \rho_M \circ \omega \circ i_{M^{coH} \times H} = \rho_M \circ \alpha_M. \quad \square
\end{aligned}$$

Se prueba a continuación el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf en el contexto débil.

Teorema 4.6 (Fundamental de los Módulos de Hopf para álgebras de Hopf débiles). *Si H es un álgebra de Hopf débil y (M, φ_M, ρ_M) es un H -módulo de Hopf por la derecha, entonces, $M^{coH} \times H$ y M son objetos isomorfos en la categoría \mathcal{M}_H^H .*

Demostración. Basta comprobar que α_M y α'_M son inversos en \mathcal{C} . En efecto:

- $\alpha_M \circ \alpha'_M = \omega \circ i_{M^{coH} \times H} \circ p_{M^{coH} \times H} \circ \omega' = \omega \circ \nabla_M \circ \omega'$
 $= \omega \circ \omega' \circ \omega \circ \omega' = 1_M \circ 1_M = 1_M,$
- $\alpha'_M \circ \alpha_M = p_{M^{coH} \times H} \circ \omega' \circ \omega \circ i_{M^{coH} \times H} = p_{M^{coH} \times H} \circ \nabla_M \circ i_{M^{coH} \times H}$
 $= p_{M^{coH} \times H} \circ i_{M^{coH} \times H} \circ p_{M^{coH} \times H} \circ i_{M^{coH} \times H}$
 $= 1_{M^{coH} \times H} \circ 1_{M^{coH} \times H} = 1_{M^{coH} \times H}.$

Por consiguiente, $\alpha_M: M^{coH} \times H \rightarrow M$ es un isomorfismo en \mathcal{M}_H^H con inverso α'_M . \square

Se considerará a partir de ahora la situación de álgebras de Hopf débiles con proyección: sean H y B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf débiles verificando que $g \circ f = 1_H$, es decir:

$$1_H \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \hookrightarrow \end{array} H \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B.$$

En este contexto se tiene que $(B, \varphi_B := \mu_B \circ (1_B \otimes f), \rho_B := (1_B \otimes g) \circ \delta_B)$ es un H -módulo de Hopf por la derecha (prueba análoga a *Caso particular 3.9*). Por lo tanto, por el Teorema 4.6 se puede afirmar que existe un objeto B_H en \mathcal{C} , *objeto de coinvariantes* de B , verificando que $B_H \times H$ es isomorfo a B en la categoría \mathcal{M}_H^H . Además, se tiene que:

1. Por la Proposición 4.2,

$$q_B = \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ \delta_B: B \rightarrow B$$

es un morfismo idempotente. Así, existen $p_B: B \rightarrow B_H$ epimorfismo e $i_B: B_H \rightarrow B$ monomorfismo verificando que

$$i_B \circ p_B = q_B, \quad p_B \circ i_B = 1_{B_H}.$$

2. Por la Proposición 4.3 se tiene que los diagramas

$$B_H \xrightarrow{i_B} B \begin{array}{c} \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} \\ \xrightarrow{(1_B \otimes (\Gamma_H^L \circ g)) \circ \delta_B} \end{array} B \otimes H \quad (\text{DD1}^*)$$

$$B \otimes H \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu_B \circ (1_B \otimes f)} \\ \xrightarrow{\mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \Gamma_H^L))} \end{array} B \xrightarrow{p_B} B_H \quad (\text{DD2}^*)$$

son de igualador y coigualador, respectivamente.

3. Los morfismos

$$\begin{aligned} \omega_B &:= \mu_B \circ (i_B \otimes f): B_H \otimes H \rightarrow B, \\ \omega'_B &:= (p_B \otimes g) \circ \delta_B: B \rightarrow B_H \otimes H, \end{aligned}$$

satisfacen que $\omega_B \circ \omega'_B = 1_B$, y por lo tanto, el morfismo $\nabla_B := \omega'_B \circ \omega_B$ es idempotente, lo que implica que existe $B_H \times H$ objeto en \mathcal{C} , $p_{B_H \times H}: B_H \otimes H \rightarrow B_H \times H$ epimorfismo e $i_{B_H \times H}: B_H \times H \rightarrow B_H \otimes H$ monomorfismo satisfaciendo que:

$$i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} = \nabla_B, \quad p_{B_H \times H} \circ i_{B_H \times H} = 1_{B_H \times H}.$$

Entonces, en la situación del diagrama siguiente,

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \nearrow \omega_B & & \nwarrow \omega'_B & \\ B_H \otimes H & \xrightarrow{\nabla_B} & & \xrightarrow{\omega'_B} & B_H \otimes H \\ & \searrow p_{B_H \times H} & & \nearrow i_{B_H \times H} & \\ & & B_H \times H & & \end{array},$$

los morfismos $\alpha_B := \omega_B \circ i_{B_H \times H}$ y $\alpha'_B := p_{B_H \times H} \circ \omega'_B$ son inversos en \mathcal{C} . Además, dotando a $B_H \times H$ de estructura de H -módulo de Hopf por la derecha (Lema 4.4) junto con la acción y coacción siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi_{B_H \times H} &:= p_{B_H \times H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (i_{B_H \times H} \otimes 1_H), \\ \rho_{B_H \times H} &:= (p_{B_H \times H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H) \circ i_{B_H \times H}, \end{aligned}$$

α_B y α'_B son morfismos de H -módulos de Hopf por la derecha (como consecuencia de la Proposición 4.5). Por lo tanto, $B_H \times H$ es isomorfo a B en la categoría \mathcal{M}_H^H .

Proposición 4.7 ([6], Proposición 2.10). *Sean H y B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf débiles tal que $g \circ f = 1_H$. Son equivalentes:*

1. $\omega'_B \circ \omega_B = 1_{B_H \otimes H}$, es decir, ω_B es un isomorfismo en \mathcal{C} ,

2. H es un álgebra de Hopf.

Demostración. ■ Si H es un álgebra de Hopf, ya se ha demostrado en el capítulo anterior que ω_B es un isomorfismo con inverso ω'_B .

■ Si $\omega'_B \circ \omega_B = (p_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes f) = 1_{B_H \otimes H}$, entonces:

$$\begin{aligned} \eta_{B_H} \otimes \varepsilon_H &= (p_B \otimes (\varepsilon_H \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ ((i_B \circ \eta_{B_H}) \otimes f) \\ &=_{i_B \circ \eta_{B_H} = \eta_B, \varepsilon_H \circ g = \varepsilon_B} (p_B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (\eta_B \otimes f) \\ &=_{(1_B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B = 1_B, \mu_B \circ (\eta_B \otimes 1_B) = 1_B} p_B \circ f \end{aligned}$$

Componiendo con i_B se obtiene:

$$i_B \circ p_B \circ f = (i_B \circ \eta_{B_H}) \otimes \varepsilon_H \stackrel{i_B \circ \eta_{B_H} = \eta_B}{=} \eta_B \otimes \varepsilon_H.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} i_B \circ p_B \circ f &= q_B \circ f \stackrel{f \text{ de coálgebras}}{=} \mu_B \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H \circ g \circ f)) \circ \delta_H \\ &=_{g \circ f = 1_H} \mu_B \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H \\ &=_{f \text{ de álgebras}} f \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \lambda_H) \circ \mu_H = f \circ \square_H^L. \end{aligned}$$

Igualando, se tiene que $f \circ \square_H^L = \eta_B \otimes \varepsilon_H$. Entonces, utilizando la definición de \square_H^L :

$$\square_H^L := ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_H) \circ (1_H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H),$$

se tiene que:

$$((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes 1_B) \circ (1_H \otimes c_{B,H}) \circ (((1_H \otimes f) \circ \delta_H \circ \eta_H) \otimes 1_H) = \eta_B \otimes \varepsilon_H. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, para que (4.2) se cumpla, necesariamente se tiene que verificar la identidad $\varepsilon_H \circ \mu_H = \varepsilon_H \otimes \varepsilon_H$, es decir, ε_H es un morfismo de álgebras. Entonces, por la Proposición 2.17 se concluye que H es un álgebra de Hopf. \square

Proposición 4.8 ([6], Proposición 2.4). *Sean H y B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf débiles tales que $g \circ f = 1_H$. En esta situación, se verifica:*

1. B_H es un álgebra en \mathcal{C} con la multiplicación y unidad siguientes:

$$\begin{aligned} \mu_{B_H} &:= p_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B), \\ \eta_{B_H} &:= p_B \circ \eta_B. \end{aligned}$$

2. B_H es una cóalgebra en \mathcal{C} con la comultiplicación y counidad siguientes:

$$\begin{aligned}\delta_{B_H} &:= (p_B \otimes p_B) \circ \delta_B \circ i_B, \\ \varepsilon_{B_H} &:= \varepsilon_B \circ i_B.\end{aligned}$$

Demostración. Se detallará únicamente la prueba de 1. pues 2. se demuestra utilizando argumentos similares. Basta comprobar que μ_{B_H} es la factorización a través del igualador (DD1*) del morfismo $\mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$ y que η_{B_H} es la factorización por el morfismo η_B .

$$\begin{array}{ccc} B_H & \xrightarrow{i_B} & B \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} B \otimes H \\ & \swarrow \exists! \theta (\equiv \mu_{B_H}) & \uparrow \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \\ & & B_H \otimes B_H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_H & \xrightarrow{i_B} & B \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} B \otimes H \\ & \swarrow \exists! \nu (\equiv \eta_{B_H}) & \uparrow \eta_B \\ & & K \end{array}$$

- μ_{B_H} es la factorización a través del igualador i_B del morfismo $\mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$. Por un lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}(1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) &= (1_B \otimes g) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (i_B \otimes i_B) \\ &\stackrel{g \text{ de álgebras}}{=} (\mu_B \otimes (\mu_H \circ (g \otimes g))) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (i_B \otimes i_B) \\ &\stackrel{i_B \text{ igualador}}{=} (\mu_B \otimes \mu_H) \circ (1_B \otimes g \otimes g \circ (\Pi_H^L \circ g)) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \\ &\quad \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (i_B \otimes i_B).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}(1_B \otimes (\Pi_H^L \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) &= (1_B \otimes (\Pi_H^L \circ g)) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (i_B \otimes i_B) \\ &\stackrel{g \text{ de álgebras}}{=} (\mu_B \otimes (\Pi_H^L \circ \mu_H \circ (g \otimes g))) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \\ &\quad \circ (i_B \otimes i_B) \\ &\stackrel{i_B \text{ igualador}}{=} (\mu_B \otimes (\Pi_H^L \circ \mu_H \circ (g \circ (\Pi_H^L \circ g)))) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \\ &\quad \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (i_B \otimes i_B).\end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la identidad:

$$\Pi_H^L \circ \mu_H \circ (1_H \otimes \Pi_H^L) = \Pi_H^L \circ \mu_H,$$

se tiene que $(1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) = (1_B \otimes (\Pi_H^L \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$.

Por la propiedad universal del diagrama igualador (DD1*), existe un único morfismo $\theta: B_H \otimes B_H \rightarrow B_H$ verificando que $i_B \circ \theta = \mu_B \circ (i_B \otimes i_B)$. Así, componiendo con p_B , se obtiene:

$$p_B \circ i_B \circ \theta = p_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \xrightarrow{p_B \circ i_B = 1_{B_H}} \theta = p_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) = \mu_{B_H}.$$

- η_{B_H} es la factorización a través del igualador i_B del morfismo η_B . En efecto:

$$\begin{aligned}
(1_B \otimes (\Gamma_H^L \circ g)) \circ \delta_B \circ \eta_B &\stackrel{\Gamma_H^L \circ g = g \circ \Gamma_B^L}{=} (1_B \otimes (g \circ \Gamma_B^L)) \circ \delta_B \circ \eta_B \\
&\stackrel{\text{Proposición 2.21, Identidad 1}}{=} (\mu_B \otimes g) \circ (1_B \otimes c_{B,B}) \circ ((\delta_B \circ \eta_B) \otimes \eta_B) \\
&\stackrel{\text{Naturalidad } c, \mu_B \circ (1_B \otimes \eta_B) = 1_B}{=} (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \eta_B.
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del igualador, existe un único morfismo $\nu: K \rightarrow B_H$ verificando que $i_B \circ \nu = \eta_B$. De nuevo, componiendo con p_B se obtiene lo siguiente:

$$p_B \circ i_B \circ \nu = p_B \circ \eta_B \stackrel{p_B \circ i_B = 1_{B_H}}{\implies} \nu = p_B \circ \eta_B = \eta_{B_H}.$$

Por último, la prueba de que la terna $(B_H, \mu_{B_H}, \eta_{B_H})$ verifica los axiomas de álgebra es similar a la realizada en la Proposición 3.10. \square

De ahora en adelante el objetivo será probar que el isomorfismo α_B no es solo un morfismo de H -módulos de Hopf, sino que también es de (co)álgebras con el (co)producto (co)smash al igual que ocurría en el marco clásico con ω_B (ver Teorema de Radford-Majid-Bespalov, Corolario 3.14).

Proposición 4.9 ([6], Proposición 2.5). *Si H y B son álgebras de Hopf débiles y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ son morfismos de álgebras de Hopf débiles tales que $g \circ f = 1_H$, entonces:*

1. $(B_H, \varphi_{B_H} := p_B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_B))$ es un H -módulo por la izquierda.
2. $(B_H, \rho_{B_H} := (g \otimes p_B) \circ \delta_B \circ i_B)$ es un H -comódulo por la izquierda.

Demostración. De nuevo, sólo será detallado el punto 1., siendo similares los argumentos para probar 2. Para ver 1. únicamente hay que comprobar que φ_{B_H} es la factorización a través del igualador i_B del morfismo

$$y_B := \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B) \circ (\delta_H \otimes i_B).$$

$$\begin{array}{ccccc}
B_H & \xrightarrow{i_B} & B & \xrightarrow{(1_B \otimes g) \circ \delta_B} & B \otimes H \\
& & & \xrightarrow{(1_B \otimes (\Gamma_H^L \circ g)) \circ \delta_B} & \\
& \swarrow \exists! \theta (\equiv \varphi_{B_H}) & \uparrow y_B & & \\
& & H \otimes B_H & &
\end{array}$$

Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
(1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ y_B &= (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B) \circ (\delta_H \otimes i_B) \\
&\stackrel{(1)}{=} (\mu_B \otimes (\mu_H \circ (g \otimes g))) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (1_{B \otimes B} \otimes \mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_{B \otimes B \otimes B} \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \\
&\circ (\delta_B \otimes \delta_B \otimes \delta_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B}) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B) \circ (\delta_H \otimes i_B) \\
&\stackrel{(2)}{=} ((\mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B)) \otimes \mu_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes c_{H,B} \otimes \mu_H) \circ (1_B \otimes c_{H,B} \otimes c_{H,B} \otimes 1_H) \\
&\circ (((f \otimes 1_H) \circ \delta_H) \otimes ((1_B \otimes g) \circ \delta_B) \otimes (c_{H,B} \circ (\lambda_H \otimes (f \circ \lambda_H)) \circ \delta_H)) \circ (1_H \otimes c_{H,B}) \circ (\delta_H \otimes i_B) \\
&\stackrel{(3)}{=} ((\mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B)) \otimes 1_H) \circ (1_{B \otimes B} \otimes (c_{H,B} \circ (\mu_H \otimes 1_B) \circ (\mu_H \otimes 1_{H \otimes B}))) \\
&\circ (f \otimes c_{H,B} \otimes (\prod_H^L \circ g) \otimes (\lambda_H \otimes (f \circ \lambda_H))) \circ (\delta_H \otimes \delta_B \otimes \delta_H) \circ (1_H \otimes c_{H,B}) \circ (\delta_H \otimes i_B) =: \Omega
\end{aligned}$$

siendo:

- (1) consecuencia de la condición de compatibilidad entre δ_B y μ_B y el hecho de que g es un morfismo de álgebras,
- (2) consecuencia de la naturalidad de c , la anticomultiplicatividad de λ_H , el hecho de que f es morfismo de coálgebras y g de álgebras y la hipótesis $g \circ f = 1_H$,
- (3) consecuencia del igualador i_B y de la naturalidad de c .

Entonces, por ser \prod_H^L idempotente, se tiene que:

$$(1_B \otimes \prod_H^L) \circ \Omega = \Omega \implies (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ y_B = (1_B \otimes (\prod_H^L \circ g)) \circ \delta_B \circ y_B.$$

Por lo tanto, gracias a la propiedad universal del igualador, existe un único $\theta: H \otimes B_H \rightarrow B_H$ verificando que $i_B \circ \theta = y_B$ (\clubsuit). Para concluir que $\varphi_{B_H} = \theta$ basta ver que φ_{B_H} también satisface (\clubsuit). En efecto:

$$\begin{aligned}
i_B \circ \varphi_{B_H} &= i_B \circ p_B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_B) \stackrel{i_B \circ p_B = q_B}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ \delta_B \circ \mu_B \circ (f \otimes i_B) \\
&= \mu_B \circ (1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ (\mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (\delta_B \otimes \delta_B) \circ (f \otimes i_B) \\
&\stackrel{(4)}{=} \mu_B \circ (\mu_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B} \circ (f \otimes f) \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ (g \otimes g))) \circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \\
&\circ (f \otimes f \otimes \delta_B) \circ (\delta_H \otimes i_B) \\
&\stackrel{(5)}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ (\mu_B \otimes 1_B) \circ (1_B \otimes c_{B,B}) \circ (c_{B,B} \otimes 1_B))) \\
&\circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \circ (\delta_H \otimes (\delta_B \circ i_B)) \\
&\stackrel{(6)}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes \mu_B) \circ (\delta_H \otimes 1_B \otimes (f \circ \prod_H^R \circ \prod_H^L \circ g)) \circ (1_H \otimes (\delta_B \circ i_B)) \\
&\stackrel{(7)}{=} \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes \mu_B) \circ (\delta_H \otimes 1_B \otimes \prod_B^R) \\
&\circ (1_H \otimes (\delta_B \circ i_B)) \stackrel{(8)}{=} y_B,
\end{aligned}$$

siendo:

- (4) consecuencia de que f y g son morfismos de álgebras, de que f es morfismo de coálgebras y de la antimultiplicatividad de λ_H ,

- (5) consecuencia de la naturalidad de c y de la hipótesis $g \circ f = 1_H$,
- (6) consecuencia de la naturalidad de c , del igualador i_B y de la igualdad $\lambda_H \circ \prod_H^L = \prod_H^R \circ \prod_H^L$,
- (7) consecuencia del igualador i_B y de la identidad $f \circ \prod_H^R \circ g = \prod_B^R$,
- (8) consecuencia de la igualdad $\mu_B \circ (1_B \otimes \prod_B^R) \circ \delta_B = 1_B$.

Por último, (B_H, φ_{B_H}) es un H -módulo por izquierda.

- $\varphi_{B_H} \circ (\eta_H \otimes 1_{B_H}) = 1_{B_H}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{B_H} \circ (\eta_H \otimes 1_{B_H}) &= p_B \circ \mu_B \circ ((f \circ \eta_H) \otimes i_B) \stackrel{f \circ \eta_H = \eta_B}{=} p_B \circ \mu_B \circ (\eta_B \otimes i_B) \\ &\stackrel{\mu_B \circ (\eta_B \otimes 1_B) = 1_B}{=} p_B \circ i_B = 1_{B_H}. \end{aligned}$$

- $\varphi_{B_H} \circ (\varphi_{B_H} \otimes 1_H) = \varphi_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H)$. Por un lado se tiene:

$$\begin{aligned} i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (\varphi_{B_H} \otimes 1_H) &= y_B \circ (\varphi_{B_H} \otimes 1_H) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes (q_B \circ \mu_B)) \circ (\delta_H \otimes f \otimes i_B) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (1_{B \otimes B} \otimes (\mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B) \circ (\mu_B \circ c_{B,B}))) \\ &\circ (1_{B \otimes B \otimes B} \otimes c_{B,B} \otimes 1_B) \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B \otimes (f \circ \lambda_H \circ g)) \\ &\circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes (\delta_B \circ i_B)) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (1_{B \otimes B} \otimes \mu_B) \circ (1_{B \otimes B \otimes B} \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \\ &\circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes f \otimes (f \circ \lambda_H) \otimes 1_B) \circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes i_B). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H) &= y_B \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H) = \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes 1_B) \circ ((\delta_H \circ \mu_H) \otimes i_B) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes 1_B) \circ (\mu_H \otimes \mu_H \otimes 1_B) \circ (1_H \otimes c_{H,H} \otimes 1_{H \otimes B}) \\ &\circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes i_B) \\ &= \mu_B \circ (1_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B})) \circ (\mu_B \otimes (\mu_B \circ c_{B,B}) \otimes 1_B) \\ &\circ (1_B \otimes c_{B,B} \otimes 1_{B \otimes B}) \circ (f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes f \otimes (\lambda_B \circ f) \otimes 1_B) \circ (\delta_H \otimes \delta_H \otimes i_B). \end{aligned}$$

Entonces, por la naturalidad de c se deduce que

$$i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (\varphi_{B_H} \otimes 1_H) = i_B \circ \varphi_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H).$$

Por lo tanto, como i_B es un monomorfismo, se tiene que

$$\varphi_{B_H} \circ (\varphi_{B_H} \otimes 1_H) = \varphi_{B_H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H). \quad \square$$

Dado que α_B es un isomorfismo en \mathcal{C} con inverso α'_B , se deducen las siguientes afirmaciones:

- $(B_H \times H, \mu_{B_H \times H} := \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B), \eta_{B_H \times H} := \alpha'_B \circ \eta_B)$ es un álgebra en \mathcal{C} . En efecto:

$$\begin{aligned} \mu_{B_H \times H} \circ (\eta_{B_H \times H} \otimes 1_{B_H \times H}) &= \alpha'_B \circ \mu_B \circ ((\alpha_B \circ \alpha'_B \circ \eta_B) \otimes \alpha_B) \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\eta_B \otimes \alpha_B) \\ &\stackrel{\mu_B \circ (\eta_B \otimes 1_B) = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \alpha_B = 1_{B_H \times H}. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $\mu_{B_H} \circ (1_{B_H} \times H \otimes \eta_{B_H} \times H) = 1_{B_H} \times H$.

$$\begin{aligned} \mu_{B_H} \circ (\mu_{B_H} \times H \otimes 1_{B_H} \times H) &= \alpha'_B \circ \mu_B \circ ((\alpha_B \circ \alpha'_B \circ \mu_B) \otimes 1_B) \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B \otimes \alpha_B) \\ &\stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\mu_B \otimes 1_B) \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B \otimes \alpha_B) \\ &\stackrel{\text{Asociatividad de } \mu_B}{=} \alpha'_B \circ \mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B) \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B \otimes \alpha_B) \\ &\stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \mu_B \circ (1_B \otimes (\alpha_B \circ \alpha'_B \circ \mu_B)) \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B \otimes \alpha_B) \\ &= \mu_{B_H} \times H \circ (1_{B_H} \times H \otimes \mu_{B_H} \times H). \end{aligned}$$

- α_B y α'_B son morfismos de álgebras considerando en $B_H \times H$ la estructura de álgebra anterior.

- α_B es un morfismo de álgebras.

$$\alpha_B \circ \eta_{B_H} \times H = \alpha_B \circ \alpha'_B \circ \eta_B \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \eta_B.$$

$$\alpha_B \circ \mu_{B_H} \times H = \alpha_B \circ \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B) \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B).$$

- α'_B es un morfismo de álgebras. Es claro, por definición, que $\eta_{B_H} \times H = \alpha'_B \circ \eta_B$.

$$\mu_{B_H} \times H \circ (\alpha'_B \otimes \alpha'_B) = \alpha'_B \circ \mu_B \circ ((\alpha_B \circ \alpha'_B) \otimes (\alpha_B \circ \alpha'_B)) \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \mu_B.$$

- $(B_H \times H, \rho_{B_H} \times H := (\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B)$ es un H -comódulo por la derecha.

$$\begin{aligned} (1_{B_H} \times H \otimes \varepsilon_H) \circ \rho_{B_H} \times H &= (\alpha'_B \otimes (\varepsilon_H \circ g)) \circ \delta_B \circ \alpha_B \stackrel{\varepsilon_H \circ g = \varepsilon_B}{=} (\alpha'_B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B \circ \alpha_B \\ &\stackrel{(1_B \otimes \varepsilon_B) \circ \delta_B = 1_B}{=} \alpha'_B \circ \alpha_B = 1_{B_H} \times H. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho_{B_H} \times H \otimes 1_H) \circ \rho_{B_H} \times H &= (((\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B \circ \alpha'_B) \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B \\ &\stackrel{\text{Coasociatividad de } \delta_B, \alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} (\alpha'_B \otimes ((g \otimes g) \circ \delta_B)) \circ \delta_B \circ \alpha_B \\ &\stackrel{g \text{ de coálgebras}}{=} (1_{B_H} \times H \otimes \delta_H) \circ (\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B = (1_{B_H} \times H \otimes \delta_H) \circ \rho_{B_H} \times H. \end{aligned}$$

- α_B y α'_B son morfismos de H -comódulos por la derecha considerando sobre $B_H \times H$ la estructura de H -comódulo anterior.

- α_B es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$(\alpha_B \otimes 1_H) \circ \rho_{B_H} \times H = ((\alpha_B \circ \alpha'_B) \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} (1_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B = \rho_B \circ \alpha_B.$$

- α'_B es un morfismo de H -comódulos por la derecha.

$$\rho_{B_H} \times H \circ \alpha'_B = (\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B \circ \alpha'_B \stackrel{\alpha_B \circ \alpha'_B = 1_B}{=} (\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B = (\alpha'_B \otimes 1_H) \circ \rho_B.$$

Por lo tanto, con las estructuras previas, α_B es un isomorfismo de álgebras y de H -comódulos por la derecha en la categoría \mathcal{C} . De forma similar se puede comprobar que se verifican los resultados siguientes:

- $(B_H \times H, \delta_{B_H \times H} := (\alpha'_B \otimes \alpha'_B) \circ \delta_B \circ \alpha_B, \varepsilon_{B_H \times H} := \varepsilon_B \circ \alpha_B)$ es una coálgebra en \mathcal{C} . Con esta estructura, α_B y α'_B son morfismos de coálgebras en \mathcal{C} .
- $(B_H \times H, \varphi_{B_H \times H} := \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\alpha_B \otimes f))$ es un H -módulo por la derecha. Con esta estructura, α_B y α'_B son morfismos de H -módulos por la derecha en \mathcal{C} .

Considérense los morfismos:

$$\begin{aligned} \mu_{B_H \sharp H} &:= p_{B_H \times H} \circ (\mu_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (1_{B_H} \otimes \varphi_{B_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_{B_H \otimes H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H) \\ &\quad \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}), \\ \eta_{B_H \sharp H} &:= p_{B_H \times H} \circ (\eta_{B_H} \otimes \eta_H), \\ \rho_{B_H \sharp H} &:= (p_{B_H \times H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H) \circ i_{B_H \times H}. \end{aligned}$$

Teorema 4.10 ([2], Teorema 2.8 y Corolario 2.11). *Si H y B son álgebras de Hopf débiles y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ son morfismos de álgebras de Hopf débiles tales que $g \circ f = 1_H$, entonces:*

1. $(B_H \times H, \mu_{B_H \sharp H}, \eta_{B_H \sharp H})$ es un álgebra en \mathcal{C} ,
2. $(B_H \times H, \rho_{B_H \sharp H})$ es un H -comódulo por la derecha en \mathcal{C} ,
3. $\alpha_B: B_H \sharp H \rightarrow B$ es un isomorfismo de álgebras y de H -comódulos por la derecha con inverso $\alpha'_B: B \rightarrow B_H \sharp H$.

Demostración. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, para probar este teorema basta con comprobar que:

$$\mu_{B_H \sharp H} = \mu_{B_H \times H}, \quad \eta_{B_H \sharp H} = \eta_{B_H \times H} \text{ y } \rho_{B_H \sharp H} = \rho_{B_H \times H}.$$

- $\eta_{B_H \sharp H} = \eta_{B_H \times H}$.

$$\begin{aligned} i_{B_H \times H} \circ \eta_{B_H \sharp H} &= i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} \circ (\eta_{B_H} \otimes \eta_H) = \omega'_B \circ \omega_B \circ (\eta_{B_H} \otimes \eta_H) \\ &= \omega'_B \circ \mu_B \circ (i_B \otimes f) \circ (\eta_{B_H} \otimes \eta_H) \stackrel{i_B \circ \eta_{B_H} = \eta_B, f \circ \eta_H = \eta_B}{=} \omega'_B \circ \mu_B \circ (\eta_B \otimes \eta_B) \\ &\stackrel{\mu_B \circ (\eta_B \otimes 1_B) = 1_B}{=} \omega'_B \circ \eta_B \stackrel{i_{B_H \times H} \circ \alpha'_B = i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} \circ \omega'_B = \omega'_B \circ \omega_B \circ \omega'_B = \omega'_B}{=} i_{B_H \times H} \circ \alpha'_B \circ \eta_B \\ &\stackrel{\alpha'_B \circ \eta_B = \eta_{B_H \times H}}{=} i_{B_H \times H} \circ \eta_{B_H \times H}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por ser $i_{B_H \times H}$ un monomorfismo, se concluye que $\eta_{B_H \sharp H} = \eta_{B_H \times H}$.

- $\rho_{B_H \sharp H} = \rho_{B_H \times H}$. Nótese que, en las condiciones del enunciado, se cumple la igualdad:

$$(\omega'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \omega_B = (1_{B_H} \otimes \delta_H) \circ \omega'_B \circ \omega_B. \quad (\boxtimes)$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
\rho_{B_H \times H} &= (\alpha'_B \otimes g) \circ \delta_B \circ \alpha_B = ((p_{B_H \times H} \circ \omega'_B) \otimes g) \circ \delta_B \circ \omega_B \circ i_{B_H \times H} \\
&\stackrel{(\mathfrak{K})}{=} (p_{B_H \times H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H) \circ \omega'_B \circ \omega_B \circ i_{B_H \times H} \\
&= \omega'_B \circ \omega_B = i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} \\
&= p_{B_H \times H} \circ i_{B_H \times H} = 1_{B_H \times H} \quad (p_{B_H \times H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H) \circ i_{B_H \times H} = \rho_{B_H \sharp H}.
\end{aligned}$$

■ $\mu_{B_H \sharp H} = \mu_{B_H \times H}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_B \circ \mu_{B_H \sharp H} &= \omega_B \circ i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} \circ (\mu_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (1_{B_H} \otimes \varphi_{B_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (1_{B_H \otimes H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H) \\
&\circ (1_{B_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) \\
&= \omega_B \circ i_{B_H \times H} \circ p_{B_H \times H} = \omega_B \quad \mu_B \circ (i_B \otimes f) \circ (\mu_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (1_{B_H} \otimes \varphi_{B_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \\
&\circ (1_{B_H \otimes H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) \\
&= i_B \circ \mu_{B_H} = \mu_B \circ (i_B \otimes i_B) \quad \mu_B \circ (\mu_B \otimes f) \circ (i_B \otimes i_B \otimes \mu_H) \circ (1_{B_H} \otimes \varphi_{B_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \\
&\circ (1_{B_H \otimes H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H) \circ (1_{B_H} \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) \\
&= i_B \circ \varphi_{B_H} = \varphi_B, f \text{ de álgebras} \quad \mu_B \circ ((\mu_B \circ (1_B \otimes \mu_B)) \otimes 1_B) \circ (1_{B \otimes B} \otimes (\mu_B \circ c_{B, B}) \otimes 1_B) \\
&\circ (1_B \otimes ((f \otimes (\lambda_B \circ f)) \circ \delta_H) \otimes i_B \otimes (\mu_B \circ (f \otimes f))) \circ (1_{B \otimes H} \otimes c_{H, B_H} \otimes 1_H) \\
&\circ (i_B \otimes \delta_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) \\
&= \mu_B \circ (\mu_B \otimes 1_B) \circ (1_B \otimes \mu_B \otimes \mu_B) \circ (1_{B \otimes B} \otimes (c_{B, B} \circ (\Gamma_B^R \otimes 1_B)) \otimes 1_B) \\
&\circ (i_B \otimes (\delta_B \circ f) \otimes i_B \otimes f) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) \\
&= \mu_B \circ (\omega_B \otimes \omega_B) \circ (i_{B_H \times H} \otimes i_{B_H \times H}) = \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B).
\end{aligned}$$

Entonces, componiendo con el inverso de α_B , α'_B , se deduce lo siguiente:

$$\alpha'_B \circ \alpha_B \circ \mu_{B_H \sharp H} = \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B) \stackrel{\alpha'_B \circ \alpha_B = 1_{B_H \times H}}{\implies} \mu_{B_H \sharp H} = \alpha'_B \circ \mu_B \circ (\alpha_B \otimes \alpha_B) = \mu_{B_H \times H}. \quad \square$$

Además, si se definen:

$$\begin{aligned}
\delta_{B_H \ominus H} &:= (p_{B_H \times H} \otimes p_{B_H \times H}) \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H \otimes 1_{B_H \otimes H}) \circ (1_{B_H \otimes H} \otimes c_{B_H, H} \otimes 1_H) \\
&\circ (1_{B_H} \otimes \rho_{B_H} \otimes 1_{H \otimes H}) \circ (\delta_{B_H} \otimes \delta_H) \circ i_{B_H \times H}, \\
\varepsilon_{B_H \ominus H} &:= (\varepsilon_{B_H} \otimes \varepsilon_H) \circ i_{B_H \times H}, \\
\varphi_{B_H \ominus H} &:= p_{B_H \times H} \circ (1_{B_H} \otimes \mu_H) \circ (i_{B_H \times H} \otimes 1_H),
\end{aligned}$$

se verifica el siguiente resultado, del cual se prescinde de los detalles pues la demostración es similar a la anterior.

Teorema 4.11 ([2], Teorema 3.1 y Corolario 3.2). *Si H y B son álgebras de Hopf débiles y $f: H \rightarrow B$, $g: B \rightarrow H$ son morfismos de álgebras de Hopf débiles tales que $g \circ f = 1_H$, entonces:*

1. $(B_H \times H, \delta_{B_H \ominus H}, \varepsilon_{B_H \ominus H})$ es una coálgebra en \mathcal{C} ,
2. $(B_H \times H, \varphi_{B_H \ominus H})$ es un H -módulo por la derecha en \mathcal{C} ,

3. $\alpha_B: B_H \ominus B \rightarrow B$ es un isomorfismo de coálgebras y de H -módulos por la derecha en \mathcal{C} con inverso α'_B .

Observación 4.12. Para llevar a cabo la demostración bastaría con comprobar que:

$$\delta_{B_H \ominus H} = \delta_{B_H \times H}, \quad \varepsilon_{B_H \ominus H} = \varepsilon_{B_H \times H} \text{ y } \varphi_{B_H \ominus H} = \varphi_{B_H \times H}.$$

Entonces, reescribiendo los Teoremas 4.10 y 4.11 se obtendría como corolario la versión débil del Teorema de Radford-Majid-Bespalov:

Corolario 4.13 (Teorema de Radford-Majid-Bespalov versión débil). *Sean H, B álgebras de Hopf débiles en \mathcal{C} y $f: H \rightarrow B, g: B \rightarrow H$ morfismos de álgebras de Hopf débiles tal que $g \circ f = 1_H$. En esta situación, $B_H \times H := (B_H \times H, \eta_{B_H \sharp H}, \mu_{B_H \sharp H}, \varepsilon_{B_H \ominus H}, \delta_{B_H \ominus H})$ es isomorfo a B . Más concretamente:*

1. $B_H \times H$ es isomorfo a B en \mathcal{M}_H^H ,
2. $B_H \sharp H$ es isomorfo a B como álgebras en \mathcal{C} ,
3. $B_H \ominus H$ es isomorfo a B como coálgebras en \mathcal{C} .

A modo de conclusión, a pesar de las sustanciales diferencias entre las álgebras de Hopf y las álgebras de Hopf débiles, tanto el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf como el Teorema Radford-Majid-Bespalov admiten su respectiva versión en el contexto débil, como se ha podido contemplar a lo largo de este último capítulo. Para álgebras de Hopf con proyección, a diferencia de lo que ocurre para álgebras de Hopf, en el caso débil el objeto relevante no es $B_H \otimes H$, sino la imagen del morfismo idempotente $\nabla_B, B_H \times H$, que será en este caso el isomorfo a B . Además, progresivamente a lo largo de la memoria, han cobrado una gran relevancia el producto *smash* y el coproducto *cosmash*. A pesar de su motivación en el producto semidirecto de grupos aparecen en esta situación de forma natural y permiten afirmar que el isomorfismo obtenido, tanto en el contexto clásico como en el marco débil, no es solo de H -módulos de Hopf, sino también de álgebras y de coálgebras con tales estructuras.

Una pregunta que puede surgir una vez llegados a este punto es: *¿Cuál es el siguiente paso que abordar?* Para dar respuesta a esta cuestión cabe preguntarse en primer lugar cuáles son las similitudes entre las álgebras de Hopf y las álgebras de Hopf débiles. Entre estas se puede destacar que μ_H es asociativa y δ_H coasociativa para ambas estructuras. Si se suprimen estas condiciones de asociatividad y coasociatividad se obtienen los llamados *Cuasigrupos de Hopf* introducidos por Klim y Majid en [25], así como los *Cuasigrupos de Hopf débiles* definidos por Alonso, Fernández y González en [3]. Además, el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf admite sus respectivas versiones en este contexto no asociativo, las cuales no han sido objeto de estudio de este trabajo, pero que pueden ser consultadas en las siguientes referencias: ver [27] para cuasigrupos de Hopf, mientras que para cuasigrupos de Hopf débiles consultar [3], [4], [5].

Bibliografía

- [1] Alonso Álvarez, J.N., & Fernández Vilaboa, J.M. (2000). Cleft extensions in braided categories. *Communications in Algebra*, 28(7), 3185-3196.
- [2] Alonso Álvarez, J.N., & González Rodríguez, R. (2004). Crossed products for weak Hopf algebras with coalgebra splitting. *Journal of Algebra*, 281(2), 731-752.
- [3] Alonso Álvarez, J.N., Fernández Vilaboa, J.M., & González Rodríguez, R. (2014). Weak Hopf quasigroups. *Asian Journal of Mathematics*, 20(4).
- [4] Alonso Álvarez, J.N., Fernández Vilaboa, J.M., & González Rodríguez, R. (2015). Strong Hopf modules for weak Hopf quasigroups. *arXiv preprint arXiv:1505.04586*.
- [5] Alonso Álvarez, J.N., Fernández Vilaboa, J.M., & González Rodríguez, R. (2016). Cleft and Galois extensions associated with a weak Hopf quasigroup. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(3), 1002-1034.
- [6] Alonso Álvarez, J.A., Fernández Vilaboa, J.M., González Rodríguez, R., López López, M.P., & Villanueva Novoa, E. (2003). Weak Hopf algebras with projection and weak smash bialgebra structures. *Journal of Algebra*, 269(2), 701-725.
- [7] Baxter, R.J. (1972). Partition function of the eight-vertex lattice model. *Annals of Physics*, 70(1), 193-228.
- [8] Bespalov, Y.N. (1997). Crossed modules and quantum groups in braided categories. *Applied categorical structures*, 5(2), 155-204.
- [9] Blattner, R.J., Cohen, M., & Montgomery, S. (1986). Crossed products and inner actions of Hopf algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 298(2), 671-711.
- [10] Böhm, G., Nill, F., & Szlachányi, K. (1999). Weak Hopf algebras: I. Integral theory and C^* -structure. *Journal of Algebra*, 221(2), 385-438.
- [11] Borel, A. (1953). Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Annals of Mathematics*, 87, 115-207.

- [12] Bulacu, D., & Nauwelaerts, E. (2002). Radford's biproduct for quasi-Hopf algebras and bosonization. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 174(1), 1-42.
- [13] Caenepeel, S., & De Groot, E. (2000). Modules over weak entwining structures. *Contemporary Mathematics*, 267, 31-54.
- [14] Cartier, P. (1957). Hyperalgèbres et groupes de Lie formels. Simposio llevado a cabo en el *Séminaire Sophus Lie*, Université de Paris, Faculté des sciences.
- [15] Drinfeld V.G. (1989). Quantum groups. En *Proceedings of International Congress of Mathematics*, 789-820. Berkeley.
- [16] Drinfeld, V.G. (1989). Quasi-hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 1(6), 114-148.
- [17] Enriquez, B., & Felder, G. (1998). Elliptic Quantum Groups $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{sl}_2)$ and Quasi-Hopf Algebras. *Communications in mathematical physics*, 195(3), 651-689.
- [18] Felder, G. (1995). Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves. En *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1247-1255. Zurich.
- [19] Gervais, J.L., & Neveu, A. (1984). Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory. *Nuclear Physics B*, 238(1), 125-141.
- [20] González Rodríguez, R. (2021). The fundamental theorem of Hopf modules for Hopf braces. *Linear and Multilinear Algebra*, DOI: 10.1080/03081087.2021.1904814.
- [21] Henker, H. (2011). *Module categories over quasi-Hopf algebras and weak Hopf algebras and the projectivity of Hopf modules* (Doctoral dissertation, lmu).
- [22] Hopf, H. (1941). Über die topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer verallgemeinerungen. *Ann. Math.*, 42, 22-52.
- [23] Karoubi, M. (1971). *K-théorie* (Vol. 36). Les Presses de l'Université de Montréal.
- [24] Kassel, C. (2012). *Quantum groups* (Vol. 155). Springer Science & Business Media.
- [25] Klim, J., & Majid, S. (2010). Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere. *Journal of Algebra*, 323(11), 3067-3110.
- [26] Larson, R.G., & Sweedler, M. (1969). An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras. *American Journal of Mathematics*, 91(1), 75-94.
- [27] López López, M.P., & Villanueva Nóvoa, E. (2013). The antipode and the (co)invariants of a finite Hopf (co)quasigroup. *Applied Categorical Structures*, 21(3), 237-247.

-
- [28] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [29] Majid, S. (1994). Cross products by braided groups and bosonization. *Journal of algebra*, 163(1), 165-190.
- [30] Molnar, R.K. (1977). Semi-direct products of Hopf algebras. *Journal of Algebra*, 47(1), 29-51.
- [31] Nikshych, D., & Vainerman, L. (2002). Finite quantum groupoids and their applications. *Math. Sci. Res. Inst. Publ*, 43(1), 211-262.
- [32] Nill, F. (1998). Axioms for weak bialgebras. *arXiv preprint math/9805104*.
- [33] Radford, D.E. (1985). The structure of Hopf algebras with a projection. *Journal of Algebra*, 92(2), 322-347.
- [34] Riehl, E. (2017). *Category theory in context*. Courier Dover Publications.
- [35] Sweedler, M. (1969). *Hopf algebras*. W.A. Benjamin Inc., New York.
- [36] Turaev, V., & Virelizier, A. (2017). *Monoidal categories and topological field theory* (Vol. 322). Basel: Birkhäuser.
- [37] Underwood, R. G. (2015). *Fundamentals of Hopf algebras*. Springer.
- [38] Yang, C.N. (1967). Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Physical Review Letters*, 19(23), 1312-1315.