USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Humberto Plácido Gusmão de Moura

Tese de doutoramento

Análise das eleições e decisões dos estudantes quando enfrentam situações-problema de matemática: uma contribuição desde a didática fundamental da matemática

Departamento de Didática das Ciências Experimentais
Facultade de Ciencias da Educación

Santiago de Compostela
2015

Tese Doutoral

Análise das eleições e decisões dos estudantes quando enfrentam situações-problema de matemática: uma contribuição desde a didática fundamental da matemática

Humberto Plácido Gusmão de Moura

Departamento de Didática das Ciências Experimentais
Programa de Doutoramento RD778/1998

Santiago de Compostela
2015

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA
DAS CIENCIAS EXPERIMENTAIS
Av. Xoan XXIII, s/n. 15782
Santiago de Compostela
Tel. 981563100, Ext. 12062
Fax 981572681

AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR

Dna Mª TERESA FERNÁNDEZ BLANCO, Profesora do Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais,

Como Directora da Tese de Doutoramento titulada "*Análise das eleccións e decisións dos estudiantes cando se enfrontan a situacións-problema de matemáticas: unha aportación dende a Didáctica Fundamental da Matemática*".

Presentada por Humberto Plácido Gusmão de Moura, Alumno do Programa de Doutoramento en Didáctica das Ciencias Experimentais e da Matemática.

Autoriza a presentación da tese indicada, considerando que reúne os requisitos esixidos no artigo 34 do regulamento de Estudos de Doutoramento, e que como Director da mesma non incurre nas causas de abstención establecidas na lei 30/1992.

En Santiago de Compostela, a de noviembre de 2015

Dra. Mª Teresa Fernández Blanco

Profesora Titular de Didáctica de la Matemática.

AGRADECIMENTOS

Quero neste momento deixar meus mais sinceros agradecimentos a todos aqueles que colaboraram para realização deste trabalho, em especial:

Aos professores do Departamento de Didática das Ciências Experimentais e da Matemática da Universidade de Santiago de Compostela, aqui representado na pessoa de Drª Isabel García Rodeja (Diretora), por me acolherem tão carinhosamente todos estes anos.

Ao amigo Antón Labraña, que com seu incentivo, colaboração e idéias tornaram possível à confecção deste estudo.

Ao grande amigo José Antonio Cajaraville Pegito que mesmo diante das dificuldades nunca deixou de contribuir com este trabalho.

A minha diretora de tese Drª Maria Teresa Fernández Blanco que contribuiu grandiosamente de duas formas: primeiro por aceitar dirigir o trabalho e segundo pelo seu comprometimento no feito do mesmo.

E finalmente, aos meus grandes amores: Dona Ilza (in memerium), Izadorinha, Carolzinha e a minha amada esposa Tânia. É por vocês que faço isto, só por vocês, para terem sempre orgulho do seu filho, pai e esposo.

RESUMO
(Português)

O estudo de como os indivíduos tomam suas decisões tem sido interesse de muitas áreas de conhecimento. Nesta pesquisa, buscamos discutir a problemática de como os alunos escolhem/elegem suas estratégias e o que influenciam as suas decisões à luz de conceitos de teorias de modelos econômicos e de modelos didáticos. Pensamos ser possível uma interpretação de modelos econômicos – que se baseiam na premissa de que um indivíduo, dotado de uns determinados recursos e de uma capacidade de eleger e de tomar decisões, tratará sempre de maximizar a utilidade destes recursos – para o contexto educacional. Por exemplo, poderíamos hipoteticamente dizer que, por um lado, o professor, ante uma situação de ensino, buscará sempre maximizar os recursos didáticos na busca da melhor aprendizagem de seus alunos, por outro, alunos que, ante uma situação de aprendizagem, provavelmente, também procurarão maximizar os recursos adquiridos. Nesse contexto, este estudo tem por objetivo geral fazer uma interpretação de modelos econômicos, especificamente os que envolvem "eleição", "tomada de decisão" e "teoria de jogos", desde pressupostos das "estratégias ótimas", da "maximização dos benefícios" e "minimização dos custos e riscos" e do modelo da Teoria das Situações Didáticas para analisar a conduta matemática de estudantes, quando resolvem problemas em sala de aula. O estudo se enquadra dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa; no que tange aos objetivos, o percurso metodológico insere-se no contexto de uma pesquisa de tipo descritiva e, com respeito aos procedimentos de coleta de dados, toma o rumo de uma pesquisa naturalista ou de campo. Os sujeitos desta pesquisa foram estudantes da educação básica e universitários da Espanha e do Brasil, que responderam três problemas, dois de forma escrita e um oral. A análise dos dados foi feita segundo as teorias elucidadas. Os resultados apontam, entre outros fatores, que a conduta de decisão dos alunos esteve atrelada ora a contextos matemáticos ora a contextos extramatemáticos, com maior tendência para este último.

Palavras-chave: Eleição, Teoria da Decisão, Teoria de Jogos, Teoria das Situações Didáticas, Resolução de Problemas, Educação Matemática.

RESUMO
(Galego)

O estudio de cómo os indivíduos toman decisións, ten sido de interese para moitas áreas de coñecemento. Nesta investigación, tentamos discutir á problemática de cómo os estudiantes, escollen/elixen as súas estratexias e, o que influencian as súas decisións á luz de conceptos, de teorias de modelos económicos e de modelos didácticos. Pensamos que é posible unha interpretación de modelos econômicos –que se basean na premisa de que un individuo, dotado duns determinados recursos e dunha capacidade de elixir e de tomar decisións, tratará sempre de maximizar a utilidade de estes recursos- para o contexto educacional. Por exemplo, poderíamos decir, hipotéticamente, que, por un lado o profesor, diante dunha situación de ensino, buscará sempre maximizar os recursos didácticos, na busca da mellor aprendizaxe dos seus alumnos; e por outro, os estudiantes que, diante dunha determinada situación de aprendizaxe, probablemente tamén, procurarán maximizar os recursos adquiridos. Nese contexto, este estudio ten por obxectivo xeral, facer unha interpretación de modelos económicos, específicamente os que envolven "elección", "toma de decisións" e "teoria de xogos", desde presupostos das "estratexias óptimas" da "maximización de benefícios" e "minimización de custos e riscos", e do modelo da Teoría de Situacións Didácticas, para analisar a conducta matemática dos estudiantes, cando resolven problemas na aula. O estúdio encuádrase dentro dunha abordaxe cualitativa da investigación, no que atinxe ós obxectivos; o recurso metodolóxico, mergúllase no contexto dunha pesquisa de tipo descriptivo e, con respecto os procedimentos de recollida de datos, toma un rumbo dunha pesquisa etnográfica ou de campo. Os suxeitos desta investigación son estudiantes de educación básica e universitarios de España e Brasil, que responderon a tres problemas: dous por escrito e un de forma oral. A análise dos resultados foi feita seguindo ás teorias citadas. Os resultados apuntan, entre outros factores, que a conducta de decisión dos estudiantes estivo mediatizada, ora polo uso de contextos matemáticos, ora a contextos extra-matemáticos, con maior tendencia cara a este último.

Palabras chave: Elección, Teoría da Decisión, Teoría de Xogos, Teoría das Situacións Didácticas, Resolución de Problemas, Educación Matemática.

RESUMEN
(Espanhol)

El estudio de cómo los individuos toman decisiones, ha sido de interés para muchas áreas de conocimiento. En esta investigación, intentamos discutir la problemática de cómo los estudiantes, escogen/eligen sus estrategias y, lo que influencian sus decisiones a la luz de conceptos, de teorías de modelos económicos y didácticos, y de modelos didácticos. Pensamos que es posible una interpretación de modelos económicos –que se basan en la premisa de que un individuo, dotado de unos determinados recursos y de una capacidad de elegir y de tomar decisiones, tratará siempre de maximizar la utilidad de estos recursos- para el contexto educativo. Por ejemplo, podríamos decir, hipotéticamente, que, por un lado, el profesor, delante de una situación de enseñanza, buscará siempre maximizar los recursos didácticos, en la búsqueda del mejor aprendizaje de sus alumnos; y por otro, los estudiantes que, delante de una determinada situación de aprendizaje, probablemente también, procurarán maximizar los recursos adquiridos. En este contexto, este estudio tiene por objetivo general, hacer una interpretación de modelos económicos, específicamente los que envuelven "elección", "toma de decisiones" y "teoría de juegos", desde presupuestos de las "estrategias óptimas" de la "maximización de beneficios" y "minimización de costes y riesgos" y del modelo de la Teoría de Situaciones Didácticas, para analizar la conducta matemática de los estudiantes, cuando resuelven problemas en el aula. El estudio se enmarca dentro de un abordaje cualitativo de la investigación, en lo que atañe a los objetivos; el recurso metodológico, se sumerge en el contexto de una indagación de tipo descriptivo y, con respecto a los procedimientos de recogida de datos, toma el rumbo de una pesquisa etnográfica o de campo. Los sujetos de esta investigación son estudiantes de educación básica y universitarios de España y Brasil, que respondieron a tres problemas: dos por escrito y uno de forma oral. El análisis de los resultados fue hecho siguiendo las teorías citadas. Los resultados apuntan, entre otros factores, a que la conducta de toma de decisiones de los estudiantes estuvo mediatizada, ora por el uso de contextos matemáticos, ora por contextos extra-matemáticos, con mayor tendencia hacia este último.

Palabras clave: Elección, Teoría de la Decisión, Teoría de Juegos, Teoría de las Situaciones Didácticas, Resolución de Problemas, Educación Matemática.

ABSTRACT
(Inglês)

Many areas of knowledge have been interested on how the individuals make their decisions. In this study, we sought to discuss how the students choose/select their strategies and what influences their decisions, based on concepts of theories of economic and didactics models. We think that it is possible an interpretation of economic models - which are based on the premise that an individual who has certain resources and capacity to vote and to make decisions will always maximize the usefulness of these resources. Concerning the educational context and based on the Theory of Didactic Situations (BROUSSEAU, 1986), we can hypothetically say that on the one hand, the teacher before a teaching situation, will always seek to maximize the educational resources for their students' best learning, on the other hand, students who, before a learning situation, probably, will also try to maximize the acquired resources. In this context the general objective of the research is to interpret the economic models, specifically those involving "election", "decision-making" and "theory of games", from assumptions of "optimal strategies" of "maximizing the benefits" and "minimizing the costs and risks" and the Theory of Didactic Situations model to analyze the mathematical behavior of students when solving problems in the classroom. This work falls under a research qualitative approach, as far as the objectives, the methodological course, the fact of being in the context of a descriptive type of research and, concerning the data collection procedures, leads to a naturalistic or field research. The subjects in this study were students attending basic education and university students from Spain and Brazil, who responded to three issues: two in writing and one orally. The data analysis was made according to the elucidated theories. The results show, among other things, that the students' decision conduct had been linked either to mathematical contexts or to extra-mathematical contexts, with greater tendency for the latter.

Keywords: Election, Theory of Decision, Theory of Games, Theory of Situations, Didactics, Problem Solving. Mathematical Education.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Conta-se, em uma das histórias da bíblia, que duas mulheres que viviam em uma mesma casa deu à luz cada uma a um menino praticamente no mesmo dia. Certa noite, uma delas percebeu que seu filho estava morto e sem que ninguém percebesse, ela resolveu trocar os bebês. Ao amanhecer, a mãe do bebê vivo percebeu que aquele que estava do seu lado, sem vida, não era seu filho, mas a outra dizia que sim. Procuraram o rei Salomão para resolver o problema. Ao escutar a história o rei mandou vir uma espada e então ordenou para dividir o bebê ao meio, metade para cada uma das mulheres. Uma das mulheres concordou, mas a outra imediatamente gritou para deixar o bebê vivo e que pudesse entregá-lo a outra. A decisão sábia de Salomão fez com que ele identificasse a verdadeira mãe e, assim, entregou-lhe o bebê. O rei Salomão, personagem da bíblia, foi conhecido por sua grande inteligência.

Para Slovic (1990), a decisão é “a essência da inteligência”.

Essa história serve para ilustrar o quão a tomada de decisão faz parte de nossas vidas, de nossa história. Ninguém pode colocar em dúvida o enorme valor que representa para uma sociedade a tomada de decisão. Por isso, se diz que “viver implica em estar sempre decidindo”.

Constantemente nos perguntamos que decisão tomar, ou ainda, como tomar a melhor decisão, e percebemos que, às vezes, a resposta a essa questão é relativa (no tempo e no espaço); aquela que hoje pode ser uma boa decisão, amanhã pode resultar numa catástrofe e, o que vale para uma pessoa pode não valer para outra. Nesse contexto, podemos entender o processo de decisão como um esforço para tentar resolver problemas.

O processo de decisão implica a escolha/eleição de uma dentre várias alternativas, por exemplo, “ver o filho morto; entregar o filho à outra pessoa”. O estudo de como são tomadas as decisões tem sido de interesse de muitas áreas de conhecimento. Existe sim uma Teoria da Decisão e, esta, se consolidou como campo de conhecimento científico. Os economistas se centram nas decisões que proporcionam mais ganhos ou menos perdas; os psicólogos se interessam nos motivos subjacentes para saber, por exemplo, o que se esconde por trás de cada decisão do indivíduo; os administradores buscam analisar e aumentar a eficácia das decisões; os cientistas sociais e políticos analisam o comportamento decisório dos integrantes de uma sociedade. Entretanto, no contexto educacional, notamos uma quase inexistência de trabalhos que leve em conta os estudos sobre a Teoria da Decisão. Encontramos apenas três estudos que fazem uma tentativa de aproximar a Teoria de Jogos a Educação, um realizado por Flores (2000), outro realizado por Moura, Gusmão e Pegito (2009) e um terceiro de Moura, Fernández e Gusmão (2015b). Sendo que diferente de nosso objeto de estudo, Flores apenas utilizou os pressupostos de Elster (1984, 1989-92, 1995) para explicar a organização e gestão do sistema educativo.

Contudo, encontramos intenções nos currículos escolares, a exemplo do Real Decreto 1467/2007 da Espanha e dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil (Brasil, 1997) para o ensino da matemática, quando estabelecem a estrutura de um curso, fixam seu ensino mínimo e tem uma orientação no que se destina à resolução de conflitos pessoais, familiares e sociais.

Em específico na área de Educação Matemática, as pesquisas têm direcionado a atenção à compreensão dos processos de aprendizagem, à maneira como melhorar esses processos, à identificação das dificuldades e dos erros dos alunos etc. Nesse contexto, entendemos que a compreensão e a melhoria dos processos de aprendizagem de estudantes necessita passar pelo estudo da conduta destes estudantes, verificar como reagem, como se comportam diante de determinadas situações, quais são as suas prioridades, o que levam a escolher determinadas estratégias, o que os influenciam a adotar determinados comportamentos, a determinadas decisões.

Assim, como se diz que "viver implica em estar sempre decidindo", também se diz que "a vida se assemelha a um jogo" ou "que a vida é um grande jogo". O rei Salomão foi conhecido pelas sábias decisões que tomava, certamente, algumas delas foram conflituosas. A literatura, no contexto da decisão, ressalta que uma forma de resolver decisões conflituosas é por intermédio do jogo, no qual se estuda as interações entre os jogadores, se desenha estratégias, se analisa ganhos e perdas. Assim, trazendo para o contexto atual, as decisões conflituosas se correspondem com uma parte do que se conhece hoje como Teoria de Jogos. Normalmente, os tomadores de decisão utilizam conjuntamente a Teoria da Decisão e a Teoria de Jogos por considerá-las interligadas conceitualmente.

A experiência adquirida no marco do Programa em Estatística e Investigação Operativa, através do qual recebi o Diploma de Estudos Avançados (DEA), trabalhando com os modelos econômicos da teoria da eleição racional, teoria de jogos e tomada de decisões, junto com a experiência na docência e o incentivo do professor Dr. Antón Labraña, que dirigiu esta tese em sua primeira fase, fizeram-me refletir que muitas regras de condutas socialmente compartilhadas e explicadas por modelos econômicos se assemelham às executadas em sala de aula. Por exemplo, as tarefas e situações problemas formuladas podem ser vistas como um jogo e os alunos como os jogadores, as decisões dos alunos como decisões de jogadores, as regras de trabalho estabelecidas em sala de aula entre professor e alunos podem ser lidas como regras de condutas de jogadores etc. Desse modo, as condutas, as decisões de alunos podem ser interpretadas desde modelos econômicos, fazendo, assim, uma aproximação destes no contexto educacional, em específico na resolução de problemas de matemática.

De fato, são muitas as aplicações dos modelos econômicos a diversas áreas, entretanto, na área de Educação Matemática, ao realizarmos uma busca no banco de teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), órgão brasileiro de fomento à pesquisa, com as palavras "tomada de decisão e matemática", apenas encontramos dois trabalhos, um de Oliveira (2011), que buscou analisar como acontece um processo de formação profissional fundamentado numa categoria da vida cotidiana, chamada tomada de decisão; e o outro de Junior (2011), que buscou investigar como os indivíduos-consumidores se comportam e tomam suas decisões, quando se deparam com situações de consumo reais; utilizando os termos "teoria de jogos e matemática" não foi possível encontrar nenhum estudo; e utilizando conjuntamente as palavras "tomada de decisão, teoria de jogos e matemática" e ainda "conduta matemática" também não foi possível encontrar nenhum trabalho. Assim, ao não encontrar aplicação na área de Educação Matemática, cruzando as temáticas abordadas neste estudo, pensamos que a pesquisa se justifica, podendo ser interessante e inovador estender algumas idéias com a intenção de que possam trazer benefícios para o ensino e a aprendizagem de matemática.

Concretamente, pensamos que, ao nos aproximar de outra área de conhecimento, como é o caso das ciências sociais, por meio de alguns de seus modelos que discute os processos de decisões, eleições e teoria de jogos, traria um melhor entendimento sobre as condutas de decisões de alunos na sala de aula diante de situações-problema de matemática e, assim, uma melhor compreensão dos processos de aprendizagem.

Dessa forma, este estudo interliga três áreas aparentemente distintas. A Teoria de Jogos com alguns conceitos chaves como o de maximização dos ganhos, que pode ser traduzido como a maximização dos recursos para uma melhor aprendizagem. A Eleição por meio das noções de conjunto oportunidade e escolha racional, que podem ser associadas, por exemplo, à escolha que o aluno faz e que satisfará seu desejo ou o desejo do professor ou das regras de um contrato, ademais, esta escolha deve ser coerente, julgada como ótima e que vise alcançar os objetivos. A Teoria das Situações Didáticas, empregada para explicar processos de ensino-aprendizagem no contexto da matemática, que traz a noção de contrato didático e estuda as relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, pode ser interpretada para fazer uma leitura das regras de determinados processos de eleições e de jogos, ou seja, por um lado um professor ante uma situação de ensino, buscará sempre maximizar os recursos didáticos na busca da melhor aprendizagem de seus alunos; por outro, alunos que, ante uma situação de aprendizagem, provavelmente, também procurarão maximizar os recursos adquiridos. A tentativa de interligar estas áreas de estudo responde ao propósito de entender melhor as condutas de tomada de decisão de alunos, quando resolvem problemas de matemática.

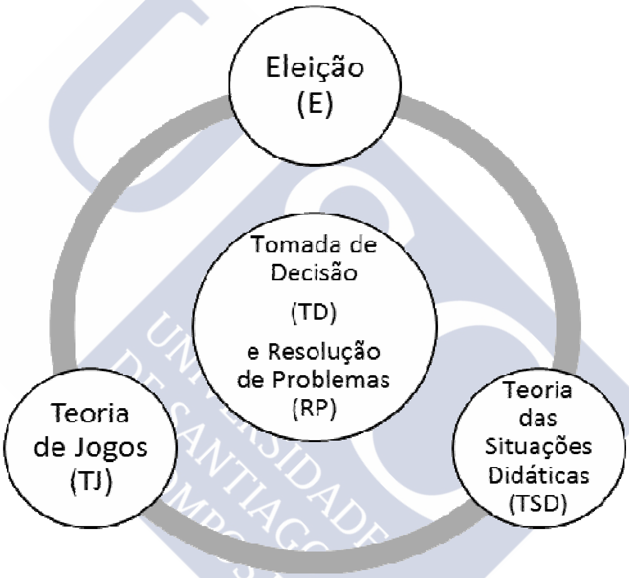
Como pergunta de investigação, formulamos: Quais e como são as condutas adotadas pelos alunos, quando resolvem problemas de matemática? Em quais situações e em que medida a conduta matemática de alunos, quando resolvem problemas, podem ser interpretadas desde modelos econômicos da Teoria de Jogos, da Eleição e da Tomada de Decisão aprendidos socialmente e do modelo da Teoria das Situações Didáticas, aprendido em sala de aula?

Tais questionamentos se enquadram no **objetivo central** desta pesquisa, qual seja: fazer uma interpretação de modelos econômicos, especificamente os que envolvem "eleição", "tomada de decisão" e "teoria de jogos", desde pressupostos das "estratégias ótimas", da "maximização dos benefícios" e "minimização dos custos e riscos" e do modelo da Teoria das Situações Didáticas para analisar a conduta matemática de estudantes, quando resolvem problemas em sala de aula.

A estrutura deste trabalho se faz em capítulos, assim distribuídos:

No primeiro capítulo, apresentamos a literatura revisitada, adentrando nos estudos sobre Eleições com Bueno (2004), Elster (1989, 2003 e 2013) entre outros; sobre Teoria de Jogos com Morton (1971), Peleg (1985), Owen (1995), entre outros; sobre Tomada de Decisão com Kahneman e Tvesky (1979), Carmona (1997), Bueno (2004), entre outros; Resolução de Problemas com Costermans (2001), García Higuera (2004), Polya (1965), entre outros; Teoria das Situações Didáticas com Brousseau (1986), entre outros. Especificamente, neste capítulo, realizamos uma revisão da literatura especializada que embasou este estudo e que foi organizada em dois eixos: Eleição e Teoria de Jogos (área de ciências sociais) e Teoria das Situações Didáticas (área de didática da matemática). Estes eixos juntos tratarão de discutir o tema central desta investigação: A tomada de decisões dos estudantes no processo de resolução de problemas. Assim sendo, a Tomada de Decisão está no centro das discussões, como se pode apreciar na figura 1, dada a continuação.

Fig 1: Esquema de construção do marco



Fonte: Própria do autor

No capítulo 2, trazemos o problema e a metodologia de pesquisa. Fundamentado numa abordagem qualitativa (Chizzotti, 2006), descrevemos os caminhos seguidos, comentando brevemente a experiência do pesquisador e justificativa do estudo; retomando a pergunta e o objetivo central para explicitar, a partir dele, a premissa e os objetivos específicos; apresentando o instrumento de coleta de dados constituído por três problemas, conhecidos como “os bueiros”, “onde está o carro” e “densidade demográfica”, que foram aplicados a estudantes da educação básica e a universitários no contexto brasileiro e espanhol; e explicando o método de análise dos dados.

No capítulo 3, apresentação, análise e discussão dos dados, buscamos de maneira detalhada analisar e discutir os dados da pesquisa, segundo as teorias elucidadas, procurando responder às questões norteadoras, atender os objetivos e verificar a hipótese/premissa de pesquisa, visando promover uma melhor compreensão do objeto investigado.

Para finalizar, tecemos as conclusões, apresentando nove condutas identificadas nas análises dos dados: 1) conduta ótima /de conhecimento institucional/de controle/avaliação; 2) conduta de conhecimento de mundo/de crenças; 3) conduta de satisfação pessoal/de utilidade; 4) conduta de sobrevivência escolar; 5) conduta econômica; 6) conduta evasiva; 7) conduta de não negociação; 8) conduta de conflito; 9) conduta ingênua. Fazemos uma síntese de cada uma dessas condutas, sob a luz do marco teórico, concluindo, entre outras coisas, que a conduta de decisão não é simplesmente o ato de eleger uma determinada alternativa, dentro de um contexto, é, portanto, um complexo processo, no qual estão envolvidos conhecimentos prévios, crenças, conhecimento de mundo, processos de eleição; conceitos implícitos da teoria de jogos, restrições das tarefas, regras de contrato didático etc.

CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

Neste capítulo, adentraremos nas temáticas da Eleição (E), Teoria de Jogos (TJ), Teoria das Situações Didáticas (TSD) que conjuntamente guiaram a proposta de marco teórico, e neste contexto parte-se do pressuposto de que as condutas, as decisões dos alunos ao tentar resolver uma situação problema, desenhada com um objetivo especifico, estarão atreladas a processos de eleição (relacionados ou não a conhecimentos prévios adquiridos em uma sala de aula ou fora dela etc), a conceitos da Teoria de Jogos (tais como: preferências e relação custo beneficio); e a conceitos da Teoria das Situações Didáticas (como o contrato didático, estabelecido em sala de aula entre professores e alunos).

1.1. ELEIÇÃO

O homem, como sujeito pertencente a uma comunidade, não é homogêneo em sua forma de pensar e dispõe de um entorno de liberdade, no qual lhe permite desenvolver suas atividades, desde as mais elementares até as mais complexas, e ao realizá-las, dada a heterogeneidade de suas *preferências*, faz emergir no indivíduo a necessidade de enfrentar estas atividades de uma forma diferente, obrigando-o a *eleger* entre várias possíveis alternativas ou *decidir* entre várias possíveis soluções, baseada em certa conduta racional[1].

1.1.1 . Preferência, Eleição e Decisão – Análise Conceitual

Quando se expõe a teoria da eleição, sempre se estará falando de eleição e de preferência. Muitas vezes, no desenvolvimento de uma exposição, ambos conceitos parecem ter o mesmo significado,

[1] Eiser (1989) assume que, a conduta é irracional, não somente em comparação com algum ideal lógico (já que a maior parte da conduta social se poderia chamar irracional desde este ponto de vista), mas no sentido de requerer uma classe diferente de explicação da conduta não problemática. Concebe também que, quaisquer que sejam as explicações que se dêem a estas condutas não serão nos contextos em que o juízo parece confirmado. Veremos mais adiante detalhes sobre a conduta racional.

entretanto, o primeiro representa uma ação e o segundo uma opinião. Assim, o que se observa não são as preferências dos agentes e sim as eleições e as decisões; a partir delas, infere-se suas preferências. Este pensamento supõe dois problemas explicativos: o primeiro deve-se ao fato de que, muitas vezes, as eleições e decisões não se correspondem com as preferências, podendo ocorrer que um sujeito prefira uma alternativa e, ao final, eleja outra diferente; o segundo é que, ao tentar dar conta das eleições e decisões em função das preferências, e como medida das preferências, se consideram as eleições e decisões. Nessa direção, concordamos com Martínez García (2004) que há uma confusão entre aquilo que se explica (*explanans)* e aquilo que se quer explicar (*explanandum)*, caracterizando uma dualidade entre a expressão e o conteúdo; e com Godino e Batanero (1998) que não só há que interpretar as entidades conceituais, senão também as situações problemáticas e os meios expressivos que desencadeiam os processos interpretativos. Dependendo do emissor e do destinatário das mensagens, bem como do momento e das circunstâncias, o significado adquire um caráter local sincrônico. É o conteúdo ao que se refere o emissor de uma expressão ou o conteúdo que interpreta o receptor. Em outras palavras, o que quer dizer uma pessoa e o que entende a outra.

As preferências dos indivíduos são formadas por uma série de crenças, desejos ou necessidades, algumas são mais elementares que outras; então, nestes casos, quando o indivíduo elege, é provável que seja mais fácil distinguir qual era a preferência que motivou a decisão por certa alternativa em detrimento da outra. (Bueno, 2004; Silva, 2001).

Segundo Bueno (2004), teoricamente, as preferências se definem como uma relação ordinal entre distintos estados sobre os quais o indivíduo poderá eleger, ou seja, dada uma alternativa entre dois ou vários elementos, o indivíduo saberá qual é o par da comparação que prefere. Este interesse por representar as preferências como uma ordenação, e não como uma relação cardinal, se deve a que, em uma ordenação, não se manifesta à intensidade das preferências, fazendo com que não seja necessário especificar uma magnitude indicativa de quantas vezes uma coisa é preferida em comparação à outra. Desse modo, as preferências, para permitir uma eleição, deverão cumprir com três condições, as quais nos permitirão ordená-las: ser reflexivas, completas e transitivas. Vejamos com Bueno (2004):

- *Reflexivas* - Cada elemento é comparável consigo mesmo. Condição trivial, mas axioma necessário para poder construir umas regras consistentes de eleição.

- *Completas* - Qualquer conjunto de elementos que se apresente é comparável, ou seja, qualquer conjunto possui alguma característica comum em maior ou menor medida. Entretanto, não está claro que tudo pode ser comparado, especialmente quando não se dispõe de informações suficientes para valorar adequadamente cada opção. Como por exemplo, a eleição dos estudos de graduação, Elster (1989a).

Numa situação como esta, a decisão passa a ser feita não pelo valor das alternativas incomensuráveis, mas por elementos associados a elas que são comparáveis, como por exemplo, se um grupo de amigos decide ou não cursar os mesmos estudos, proximidade da residência etc. Um problema ligeiramente distinto é que deverá ser comparada apenas uma característica comum para conjunto de elementos. Mas se existem mais de uma característica e não há uma dominância clara entre elas, pode resultar que este axioma não se ajuste bem à realidade, pois umas vezes se pode decantar por aplicar um critério de comparação e em outras, outro critério. Ademais, para que este axioma possa funcionar corretamente, também é necessário supor que as preferências são estáveis, pois em constante mudança, não se pode compará-las, já que no caso extremo, no tempo transcorrido entre uma comparação e outra, por breve que fosse, já havia variado as preferências.

- *Transitivas* – Se A é preferido a B e B é preferido a C, então, A é preferido a *C*, $\left(A>B \wedge B>C \Rightarrow A>C\right)$. Esta condição, junto com as duas anteriores, é logicamente necessária para poder ordenar preferências, se não se cumprir não se saberá qual a preferida, se A ou C.

A transitividade é a condição mais forte, pois sem ela não se podem ordenar as preferências e, portanto não pode haver uma eleição, já que não se sabe realmente qual será a melhor decisão. É forte também devido à outra questão: a independência das alternativas irrelevantes. Esta condição diz que fazer a comparação entre A e B, e preferir A, e logo comparar A, B e C, e se seguir preferindo A a B; a ordenação das alternativas não foi afetada por uma terceira.

Ainda que parece complicado entender a questão, parece óbvio que se um indivíduo tem fome, e prefere como ação comer; e se ele eleger entre as alternativas comer (torta ou pizza) ou não comer, então, ele vai tratar de satisfazer sua necessidade, e neste caso, ao eleger a alternativa "comer", estará exercendo uma ação sobre sua opinião com respeito a um conjunto de desejos, crenças e oportunidades.

Com este exemplo, está se afirmando que tanto as preferências como as eleições estão limitadas e condicionadas a dois grandes filtros. O primeiro está composto por todas as *restrições* físicas, econômicas, legais e psicológicas que enfrenta o indivíduo. As ações coerentes com essas restrições formam seu *conjunto oportunidade*. O segundo é um mecanismo que determina que ação está dentro do conjunto de oportunidade será realmente realizada (Elster, 1989a). Este mesmo pensamento tem Martínez García (2004), que também considera a existência de dois filtros: um objetivo (conjunto oportunidade) e outro subjetivo o qual é formado pelas preferências individuais, que poderão ser medidas através da utilidade que proporcionam determinadas decisões ao agente. Deixamos claro, que não compartilhamos de tal pensamento, uma vez que por Elster (ibid) as preferências estão restringidas ao conjunto oportunidade, então, as preferências (desejos) e as eleições (ações) se coincidem e não tem por que sê-lo. Ao voltar ao exemplo, ao eleger a torta, o sujeito o fez depois de ultrapassar os dois filtros, e nesta perspectiva a ação é explicada pelas oportunidades e os desejos, pelo que o indivíduo pode fazer (comer) e pelo que deseja fazer (comer).

Com Bueno (2004) pode-se inferir, então, que as oportunidades poderão ser mais fundamentais em uma eleição que as preferências. Para provar isso, suponha que o sujeito anterior não possua recursos para comprar uma torta ou uma pizza e tampouco o tenha para comprar os ingredientes, então, se vê claramente que as restrições ao conjunto oportunidade são tão rigorosas que não fica espaço para a operação do segundo filtro, reduzindo este a uma única ação, cuja explicação não tem cabida nem preferências nem eleição.

Esclarecidas essas condições de preferência, voltemos às *eleições* e às *decisões*. Embora estes dois vocábulos, desde um ponto de vista semântico sejam sinônimos, deve-se diferenciá-los, sabendo em cada momento qual das duas ações estará se realizando.

Para eleger ou decidir é preciso inicialmente a existência de um fenômeno ou algo susceptível de se manifestar em diversas alternativas; ou seja, não tem sentido a eleição ou a decisão em uma situação, na qual somente haja uma possível via de concretização do fenômeno.

Bueno (2004) apresenta dois exemplos de tais situações: se uma pessoa se encontra em um lugar deserto, começa a chover e não tem nenhum lugar onde se resguardar, imaginar o fato de decidir ou eleger entre molhar ou não molhar não é um problema de eleição ou decisão, posto que, com toda certeza se molhará, ou em um ou outro caso; se um réu encontra-se em um pelotão de fuzilamento, não existe a possibilidade de que decida ou eleja ser fuzilado ou não, nesses dois exemplos os sujeitos não podem atuar sobre um fenômeno, tanto o solitário como o réu somente tem uma única alternativa, molhar-se ou ser fuzilado, respectivamente, e não há eleição ou decisão possível que possam tomar estes sujeitos em relação aos fenômenos. Deste contexto, temos uma primeira premissa para a existência de um problema de eleição ou decisão: deve existir uma diversidade de alternativas susceptíveis de ser eleita livremente pelo sujeito.

Não obstante, a natureza da produção do fenômeno (determinista ou aleatória) o que nos importa é a percepção que cada sujeito realiza do fenômeno, posto que cada indivíduo realiza uma observação diferente, e em função de sua própria avaliação elegerá ou decidirá. Resumidamente, o que nos interessa é efetuar uma gradação da percepção de situações por parte dos distintos sujeitos, independente da natureza do fenômeno em si.

Assim, se faz necessário distinguir as possíveis atuações a serem realizadas por um sujeito ante uma determinada situação, segundo Bueno (2004), as atuações podem ser:

a) *Reflexo condicionado*[2] - É uma resposta do sujeito ante uma situação repetitiva do entorno, dito de outra forma, o indivíduo tem sempre a mesma resposta ante iguais estímulos.
b) *Impulso* - é o desejo de levar a cabo uma determinada atuação, neste caso o sujeito não sempre atuará da mesma forma ante uma situação similar, mas em um determinado momento, e está basicamente determinado por seu estado anímico.
c) *Indiferença* - é uma situação na qual o sujeito realiza um ato que para ele não tem consequências avaliáveis, quer dizer, uma vez apresentadas as alternativas, poderia escolher qualquer delas, sem que para isto faça nenhum processo de análise ou avaliação.
d) *Ação consciente* - é realizada pelo sujeito quando este detecta a existência de um problema de eleição ou decisão, e é consciente da existência de diversas alternativas e das possíveis consequências das mesmas, desde que, ao final, eleja uma delas, sem

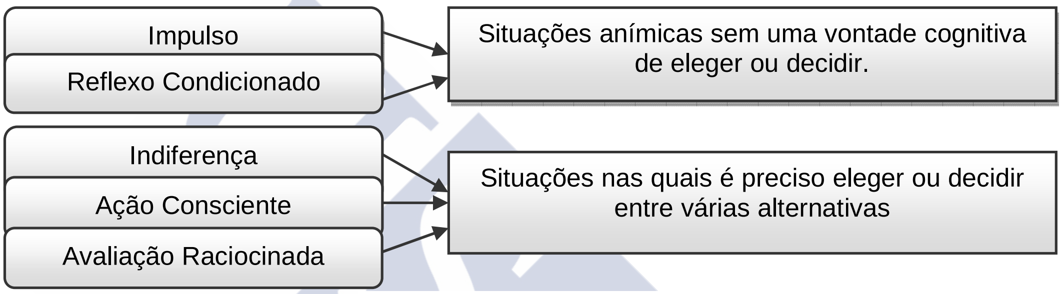
[2] Pávlov (1849-1936), formulou a lei do reflexo condicional, que por um erro de tradução foi chamado de reflexo condicionado. Esta diferença entre "condicionado" e "condicional" é importante, pois o termo "condicionado" se refere a um estado, enquanto que "condicional" se refere a uma relação.

que faça a mediação racional da situação.

e) *Avaliação raciocinada* - ocorre quando racionalmente o sujeito analisa todas as alternativas, todos os condicionantes, avaliam e valorizam todas as consequências, e ao final, mediante um processo de eleição ou decisão, toma a alternativa mais adequada.

Desta forma, podemos dividir as atuações anteriores, sem prejuízo de sua futura classificação como eleição ou decisão.

Fig. 2: Atuações a serem realizadas por um sujeito ante uma determinada situação



Fonte: Adaptada de Bueno (2004)

Vejamos o exemplo apresentado por Bueno (2004): nos Estados Unidos existe um jogo chamado "Seven or Eleven" que consiste no lançamento de dois dados. Resumidamente, a regra do jogo é da seguinte forma: se a soma dos dois dados resultar em 7 (sete) ou 11 (onze) ganha a banca, agora se a soma for 2 (dois), 3(três) ou 12(doze), ganha o apostador, e se sair qualquer outra soma diferentemente desses números, a partida volta a se repetir até se ter um ganhador. Pois bem, imaginemos que se propusermos a um sujeito jogar este jogo, e apostar em relação com o resultado que se obtenha, ganhando ou perdendo $1, naturalmente, teremos duas alternativas mutuamente excludentes, e aqui reside a gênesis da diferença entre os conceitos de eleição e de decisão.

O primeiro passo para realizar este jogo é estabelecer um acordo, no qual se registrará as condições do mesmo, nesta fase não existe o processo de eleição, nem de decisão, senão negociação (na Teoria de Jogos se classificará em jogo de soma nula, como veremos mais adiante).

Agora, analisaremos a natureza de cada atuação dos sujeitos (o jogador 1 (apostador) e o jogador 2 (banca)). A primeira atuação é de participar ou não do jogo em que se enfrentam uma situação, na qual em cada lançamento se pode ganhar ou perder $1, se estivermos dispostos a realizar, no máximo, 100 lançamentos, de tal maneira que, ao final dos 100, o jogo finalizasse e desta forma, poderiam, num caso extremo, perder $100.

Deixando agora, de lado, os possíveis resultados do jogo, nos surge a questão de qualificar a atuação dos sujeitos no processo anterior de análise e posterior participação no jogo. Está claro que neste processo, foi realizada uma avaliação das alternativas e vistas suas possibilidades, uma vez estudado todo o planejamento do jogo, aceitaram participar. Resumindo, foi *tomada uma decisão*, sustentada na análise, em uma avaliação pensada.

Uma vez iniciado o jogo, o jogador 2 estará atuando passivamente até o final do mesmo. No entanto, o jogador 1 estará atuando como sujeito ativo, e como tal tem que lançar os dados a cada nova jogada, assim que se nos detemos na atuação do jogador 1 quando faz um lançamento, e supomos que eleja a opção de lançá-los com a mão esquerda haverá alguma razão justificada que ampare tal fato? Em que medida está o jogador sendo influenciado por suas crenças ou superstições acerca da ocorrência de um sucesso? Poderia ter elegido igualmente lançar com a mão direita? A resposta a estas questões se resume dizendo que é indiferente para o jogador eleger qual a mão lançará, posto que as consequências são idênticas, e as possibilidades de sucesso são iguais, ou seja, existem as mesmas possibilidades[3] de se ganhar lançando os dados com a mão direita que com a esquerda, neste caso, o jogador 1 está fazendo uma *eleição* entre várias alternativas.

Logo, no mesmo problema elementar, como é o lançamento de dados, um mesmo sujeito pode realizar simultaneamente eleições e decisões. Vamos caracterizar formalmente o que diferencia um de outro conceito.

Segundo Bueno (2004), um sujeito estará elegendo uma entre várias alternativas, quando for capaz de fazer uma análise qualitativa do problema, pensando em uma das opções como sendo melhor que a outra. Por exemplo, se uma senhora está trocando de roupa e, suponhamos que ela tenha a sua disposição cinco vestidos distintos entre si, está claro que ao final o fato dela vestir um dos vestidos, será fruto de uma eleição consciente ou não e que não significará uma avaliação de sua parte. Trata-se de uma simples eleição entre várias alternativas, a priori

[3] Por suposto, a probabilidade de sucesso (ganhar) do jogador 1 na primeira jogada é de 4/36 e a da banca (jogador 2) é de 8/36, contudo estas probabilidades com as jogadas seguintes e de acordo com a regra deste jogo as chances do jogador 1 passa a ser de 0,507 contra 0,493 do 2.

equiprováveis, e que a senhora a realiza, em função de suas preferências, que lhe parecerá a mais adequada no momento.

Não obstante ao fato de que o sujeito não seja capaz de quantificar, não significa que não seja capaz de avaliar as alternativas. Neste sentido, nos vemos obrigados a distinguir entre *funções de avaliação qualitativas* e *funções de avaliação quantitativas*. As primeiras serão características dos processos de eleição, enquanto as segundas, definirão os processos de decisão.

1.1.2. O Processo de Eleição

Foi visto no exemplo "Seven or Eleven" que o jogador tomou uma decisão sustentada na análise, e em uma avaliação raciocinada, podemos então supor que o sujeito escolheu de forma racional. Em outras palavras, significa que o sujeito elegeu uma alternativa, de acordo com uns parâmetros racionais, que lhe pareceu apresentar o melhor resultado, isto é, fez uma eleição racional.

Ao partir dos conceitos fundamentais dessa teoria, temos: primeiro, o agente representativo (responsável da decisão, pela ação e pelas consequências decorrentes dela) e segundo, os elementos passíveis de eleição ou escolha, que são chamados de *opções* ou *alternativas* e estas podem ser puras ou condicionadas a outras.

Com base nestes elementos, Freitas (1994) conclui que a situação de escolha ocorre quando há uma possibilidade e a necessidade de uma decisão entre opções, como também pela existência de um agente representativo dela, ou seja, quando existe algo a ser escolhido por alguém. Dentro da teoria da eleição racional, a eleição será um instrumento guiado pelo resultado esperado da ação. Suponhamos que existam duas opções quaisquer "*x* e *y*", esta teoria afirma que o sujeito elegerá aquela alternativa que acreditar que possui uma qualidade que ele deseje, e que a outra não apresenta ou apresenta em menor intensidade. Assim, se a alternativa *x* for a eleita, isto ocorre porque o sujeito acredita que ela (alternativa) suscita nele o desejo de obtê-la. Portanto, conforme afirma Freitas (1994) no primeiro capítulo de seu trabalho: "uma eleição é suscitada pelo desejo e saciá-lo é a finalidade da eleição". Essa eleição será feita em função da crença do sujeito de que a alternativa escolhida saciará seu desejo. As crenças e os desejos são chamados, consequentemente, critérios de escolha ou eleição, os quais devem satisfazer a condição de coerência (teoria da eleição racional), e estes por sua vez, serão coerentes se as crenças e os desejos o forem (os quais ocorrerão se e somente se existirem num universo, no qual satisfaçam certas restrições lógicas, físicas, econômicas e possam ser realizados). Por exemplo: a proposição, “não creio em fadas, mas que elas existem, ah existem!”, é uma crença incoerente; o desejo de "tomar certos alimentos que engordam conjugada com o de emagrecer", é uma situação em que os desejos se contradizem e não poderão ser saciados ao mesmo tempo.

Nesse contexto, chamamos de preferência a relação entre o sujeito (eleitor) e seu conjunto, oportunidades (alternativas), ou seja, a relação entre a escolha motiva o sujeito a eleger algo do conjunto oportunidade.

A relação de preferência é uma relação binária, a qual relacionará dois elementos quaisquer do conjunto de oportunidades do sujeito, que por sua vez expressará uma certa hierarquia. Atuar racionalmente neste caso significa eleger a alternativa com hierarquia mais alta e/ou mais baixa dentro de um grupo de alternativas possíveis (Elster 1990). Em outras palavras, o sujeito depois de ordenar as opções segundo seu critério de escolha, optará por aquela que apresentar mais intensamente a propriedade em que acredita que irá saciar seu desejo. Resumidamente, o sujeito realizará uma *avaliação qualitativa* das alternativas, depois ordenará e finalmente elegerá uma ou mais alternativas dentre elas.

Coincidimos com Bueno (2004), quando este afirma que uma função de *avaliação qualitativa* é o mecanismo pelo qual um sujeito é capaz de realizar uma análise qualitativa de uma situação, em que se darão várias alternativas e realizará uma gradação das mesmas, ou eleger uma delas, como a que mais se aproxima de seus planos.

Evidentemente, ao realizar uma gradação de alternativas se supõe a necessidade de estabelecer relações de *pré-ordem, ordem* ou de *equivalências* entre elas. Ou seja, o sujeito decisor deverá dispor de algum critério que induza uma classificação e ordenação das alternativas; assim que, dada uma relação binária “$\Re$”, diremos que é de *pré-ordem* quando simultaneamente for reflexiva e transitiva, isto é:

$$\forall x \in A / \left(x, x\right) \in A \times A \leftrightarrow x \Re x$$

$$x, y, z \in A / \left[(x, y) \in \mathbb{R} \wedge (y, z) \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \leftrightarrow \left[(x \Re y) \wedge (y \Re z)\right] \Rightarrow (x \Re z);$$

Por exemplo: A relação ser “tão alto como” cumpre a propriedade reflexiva, já que toda pessoa é tão alta como si mesma; e cumpre a transitiva, já que se uma pessoa é tão alta como outra, e esta é tão alta como uma terceira, logicamente a primeira é tão alta como a terceira.

De *ordem* quando simultaneamente é reflexiva antissimétrica e transitiva, ou seja:

$$\forall x \in A / \left(x, x\right) \in A \times A \leftrightarrow x \Re x$$

$$x, y \in A / \left[(x, y) \in \mathbb{R} \wedge (y, x) \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow x = y \leftrightarrow \left[(x \not\Re y \vee y \not\Re x)\right] \Rightarrow x \neq y$$

$$x, y, z \in A / \left[(x, y) \in \mathbb{R} \wedge (y, z) \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow (x, z) \in \mathbb{R} \leftrightarrow \left[(x \Re y) \wedge (y \Re z)\right] \Rightarrow (x \Re z)$$

Por exemplo: a relação “menor ou igual que” no conjunto dos números reais cumpre a propriedade reflexiva, já que todo número é menor ou igual a si mesmo; cumpre a antissimétrica, já que se um número é menor ou igual a outro, e o segundo é menor ou igual que o primeiro, a única possibilidade é que os dois sejam iguais; e cumpre a transitiva, já que se um número é menor ou igual a outro, e este é menor ou igual que um terceiro, o primeiro será menor ou igual ao terceiro.

De *equivalência* quando se dá simultaneamente as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva:

$$\forall x \in A / \left(x, x\right) \in A \times A \leftrightarrow x \Re x$$

$$x, y \in A / \left[(x, y) \in \mathbb{R} \wedge (y, x) \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow x = y \leftrightarrow \left[(x \Re y) \wedge (y \Re z)\right] \Rightarrow y = x$$

$$x, y, z \in A / \left[(x, y) \in \mathbb{R} \wedge (y, z) \in \mathbb{R}\right] \Rightarrow (x, z) \in \mathbb{R} \leftrightarrow \left[(x \Re y) \wedge (y \Re z)\right] \Rightarrow (x \Re z)$$

Por exemplo: A relação “de conterraneidade” que existe entre pessoas que pertencem a um determinado povoado: cumpre a propriedade reflexiva, já que todo sujeito é conterrâneo de si mesmo, cumpre a de simétrica, já que se um sujeito é conterrâneo de outro, e este é conterrâneo de um terceiro, o último será conterrâneo do primeiro; e cumpre a transitiva, já que todo sujeito é conterrâneo de outro, e este de um terceiro, o primeiro e o terceiro serão conterrâneos.

Segundo Bueno (2004), estas relações definidas sobre um conjunto de alternativas com resultados não quantificáveis devem ser capazes de estabelecer a preferência ou indiferença que, para um sujeito supõe a comparação entre alternativas. Portanto, uma primeira premissa que deve cumprir as alternativas é sua *comparabilidade* ou *completude*; não tem sentido eleger entre alternativas não comparáveis, posto que, neste caso, o sujeito não poderá avaliar as consequências. A garantia de comparabilidade tem como gênesis o momento em que surge o problema de eleição, posto que não existirá o citado problema se, *a priori*, as alternativas não são excludentes entre si. Se voltarmos a nossa atenção para o exemplo da senhora e os vestidos, em que ela tenha de eleger entre colocar um vestido e maquiar-se, o problema desaparece, pois não há o que se comparar, uma vez que poderá fazer as duas coisas simultaneamente.

Deste modo, temos um problema de eleição somente no caso em que todas as alternativas se referirem a um mesmo fenômeno, e as ditas alternativas sejam excludentes e comparáveis entre si.

Bueno (2004), observa que pode ocorrer o caso em que o sujeito não saiba comparar duas alternativas, ou bem porque desconheça suas consequências, ou bem porque considere que os efeitos das mesmas são semelhantes. Neste caso, se assumirá que tais alternativas são indiferentes para este sujeito. Desta maneira, estamos assumindo por hipótese a completude da relação de ordem ou de pré-ordem. E assim falta-nos apenas definir se uma relação é de pré-ordem ou de ordem e observando a definição, percebemos que a diferença entre as duas está no cumprimento ou não da propriedade antissimétrica, e ao ver o processo de eleição, e assumir a existência da propriedade antissimétrica, significará a eliminação das alternativas indiferentes, uma vez que se uma determinada alternativa a_i é preferida ou indiferente com a_j e a_i, é preferida ou indiferente com a_i ; temos que a_i e a_j teriam que ser a mesma alternativa, e não tem porque sê-lo, assim que, assumiremos que entre as alternativas de um problema de decisão está definida uma relação de pré-ordem, que denominaremos *relação de preferência* e que, portanto, terá todas as propriedades citadas anteriormente. Assim: $\succeq \Leftrightarrow$ " ao menos tão preferido como".

$$a_i \succeq a_j \Leftrightarrow \left(a_i \succ a_j\right) \vee (a_i \sim a_j); \forall\, a_i, a_j \in A,$$

sendo: $\succ \Leftrightarrow$ " é estritamente preferida", e $\sim \Leftrightarrow$ "é indiferente a".

Desta forma, toda relação de preferência poderá ser decomposta em duas relações: uma de preferência estrita e outra de indiferença; a primeira não é uma relação de ordem, posto que não é reflexiva; e a segunda, sendo uma relação de preferência não será completa, uma vez que não são comparáveis entre si. No entanto, a conjunção de ambas nos proporcionará a relação de pré-ordem de que necessitamos. Bueno (2004)

Portanto, estaremos ante um problema de eleição quando tenhamos definidas as alternativas em que se concreta o fenômeno, e sejamos capazes de realizar uma ordenação delas, no sentido de hierarquizar todas as alternativas em função de uma preferência ou indiferença, constituindo assim, um conjunto finito de alternativas:

$A:\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ as quais devem ser ordenadas com base na relação de preferência.

Daí se diz que o sujeito realizou uma eleição quando ordenou os elementos de *A*, com base na relação de preferência. Dado que temos garantido a comparabilidade de quaisquer dos elementos de "*A*", podemos afirmar que tal ordenação existe. A eleição já leva consigo uma identificação implícita de uma ou mais alternativas que são preferidas a todos as demais. Desta maneira, diremos que: a_i^* é um *elemento ótimo* de *A*, baseado na relação $\succsim$ de preferência, sendo:

$\nexists a_j \in A / a_j \succ a_i^*$, um elemento ótimo relativo, o que significa que não há nenhum elemento preferido a a_i^*, mas pode haver elementos indiferentes a ele. Assim, diremos que a_i^* é um elemento ótimo absoluto de *A*, quando, $\nexists a_j \in A / a_j \succsim a_i^*$ que significa que não há nenhum elemento nem preferido nem indiferente a a_i^*, ou seja, $\forall a_j \in A / a_i^* \succ a_j$. Obviamente, numa ordenação de alternativas pode não haver elemento ótimo absoluto, no caso de existir dois ou mais ótimos relativos. Do mesmo modo, pode ocorrer que todas as alternativas sejam indiferentes entre si. Não obstante a este fato, o sujeito sempre buscará a realização de uma escolha, e sempre existirá um ótimo absoluto, isto é, uma eleição sem paliativos.

Uma vez que tenhamos no conjunto *A* ao menos um ótimo relativo, este poderá ser ordenado hierarquicamente de acordo com uma relação de pré-ordem. De acordo com o que acabamos de citar, podemos definir o conceito de função de eleição como um caso particular da função de avaliação, para o caso em que a avaliação suponha uma análise qualitativa de alternativas do problema, ou seja, diremos que $F(A, \succsim)$ é uma função de eleição sobre as alternativas do conjunto finito *A*, sobre o qual se tem definida uma relação ($\succsim$) de pré-ordem, quando $F(A, \succsim)$ for uma função que permita hierarquizar os elementos de *A*, mediante uma ordem crescente ou decrescente em função da preferência ou indiferença.

A chave do processo de eleição radica na adequada construção de *F*. De fato, e *a priori*, cada sujeito tem sua própria função de eleição. Bueno (2004), coloca o seguinte exemplo: suponhamos que uma pessoa se desloque a fim de pegar um ônibus de sua casa até o trabalho, pelo que tem quatro opções de itinerário e ônibus, distribuídos da seguinte forma:

Ônibus	**A**	**B**	**C**	**D**
Tempo (min.)	30	40	25	32

A função acima atribuirá certo valor para cada alternativa de acordo com a preferência do sujeito; por exemplo, (4) para o ônibus C, e (1) para o B, para o caso de se escolher o itinerário mais rápido, ou poderá atribuir um valor (4) para o B, pois o trajeto é o que proporciona uma melhor paisagem, em ambos os casos, o escolhido será o de maior valor.

Como dito anteriormente, poderíamos afirmar que os sujeitos, perante a necessidade de eleger algo, o farão baseados na função de eleição associada, tomando sempre como referência a *relação de equivalência* definida por esta função. De acordo com este esquema, teremos tantas classes de equivalência como possibilidades de ordenação dos elementos que constituem o conjunto *A.* O mais importante, neste caso, é o mecanismo com os quais os sujeitos ordenam cada classe de equivalência; ou seja, a forma na qual são capazes de realizar esta avaliação qualitativa. Deste modo, Bueno (2004) distingue as seguintes possibilidades:

a) *Intuição* – É o mecanismo através do qual os sujeitos são capazes de eleger uma alternativa entre várias, sem que exista uma avaliação de resultados que permita "racionalmente" afirmar que alternativa se deve seguir. É como se ele elegesse uma alternativa porque "algo ou alguma coisa[4]" lhe apontasse para ela.

Evidentemente, a intuição é um passo adiante com relação ao reflexo condicionado, posto que com a intuição, o sujeito reflexiona.

b) *Contágio* – É a aceitação da avaliação de outro(s) sujeito(s) como válida à hora de assumir nossa própria eleição.

Neste caso, assumimos a responsabilidade da eleição, mas consideramos que outro(s) sujeito(s) tenha(m) mais experiência em situações similares, e irá (ão) realizar uma avaliação melhor que a nossa.

c) *Condicionamento* – É o processo pelo qual um sujeito não pode livremente expressar uma eleição de uma alternativa entre várias. O condicionamento pode ser:

[4] Alguns autores e investigadores apontam que esse algo ou alguma coisa é a derivados da própria experiência humana e é aposta em marcha através de mecanismos subconscientes.

- *Temporal – intrínseco* - Surge quando o sujeito conhece ou faz conjeturas sobre as possíveis consequências de sua eleição, de acordo com sua experiência acumulada ao longo do tempo e que pode condicionar as eleições.
- *Espacial* - É um condicionamento próprio de uma situação atual e por uns fatos concretos, que não se associa a sucessos passados. Tratar-se-ia, por exemplo, da eleição da tonalidade de um vestido por parte da senhora, que pode estar condicionada por sucessos tais, como o dia ser chuvoso ou não.

De fato, uma eleição pode estar condicionada simultaneamente por elementos classificáveis nos três tipos precedentes. Como no exemplo do vestido, a própria eleição deste teria: *Condicionantes temporais intrínsecos:* Aversão à cor azul, por exemplo; *Condicionantes temporais externos:* A pessoa com a qual vai sair tenha uma opinião negativa sobre o mesmo, e *Condicionantes espaciais:* O fato de chover ou não.

d) *Obrigatoriedade* - É a aceitação da avaliação de outro(s) sujeito(s), por um fato imperativo; ou seja, o sujeito renuncia por obrigação a exercer sua faculdade de eleição, assumindo a função de eleição de um terceiro.

Evidentemente, se trata de uma eleição não livre ou viciada, que se fundamenta na eleição prévia, a de submeter-se ou lutar contra uma situação ditatorial. De forma igual ao contágio, se produz uma função de eleição induzida, ainda que ao invés de ser a causa à delegação, o será a imposição. Pela imposição se simplificam os processos de eleição, de tal maneira que cada sujeito ou grupo, renunciando a sua teórica função de eleição, não tenha possibilidade de abstenção.

Até o momento, somente vimos casos em que o sujeito tenha que eleger uma alternativa, realizando uma única eleição. Para a situação em que o sujeito tenha que eleger entre várias alternativas ocorrendo *simultânea ou sequencialmente*, no mesmo momento ou ao longo do tempo, tem-se o que chamamos de “processo de eleições simultâneas”. Assim, um processo de *eleição simultânea* é aquele no qual se realizam várias eleições ao mesmo tempo, as quais se encontram relacionadas entre si, existindo uma interação “espacial” entre elas. Coloquialmente, poderíamos falar da necessidade de realizar um certo “pacote” de eleições, entre as existentes numa determinada interconexão. (Bueno, 2004).

A necessidade de se realizar duas ou mais eleições conjuntamente, nos obriga a analisar a influência mútua entre elas, ou seja, em que medida ao se efetuar uma eleição, altera-se o critério ou função de eleição do sujeito nas demais. Dessa análise se observa claramente a necessidade de contemplar simultaneamente todas as alternativas, quer dizer, a necessidade para o sujeito de ter uma função eleição conjunta, na que se incluam todas as possíveis eleições que tal sujeito terá de realizar, ao mesmo tempo. Bueno (2004)

Entretanto, tal função de eleição conjunta pode ter alguns problemas de construção, dada sua complexidade, por isso, é necessário ordenar adequadamente as alternativas, para poder - compará-las. Desta forma, ficará perfeitamente definida a função de avaliação conjunta do sujeito, por comparação simultânea de todas as alternativas de cada eleição individual. Observa-se que para este caso também haverá um elemento ótimo**.**

Ainda segundo Bueno (2004), uma característica dos processos de eleição simultânea é o fato de que a conjunção de eleições pode limitar o conjunto de alternativas do sujeito, ao desaparecer a liberdade de eleição existente nas eleições individuais. Agora o sujeito não pode eleger livremente sobre um problema individual, senão que deve avaliar qualitativamente as vantagens e inconvenientes que cada uma das eleições, que podem afetar as outras, que hão de se realizar ao mesmo tempo.

Evidentemente, a existência de alternativas conjuntas impossíveis, e sua lógica eliminação devido a sua incompatibilidade, alteram profundamente o problema de eleição, a resolução será em função das alternativas que permanecem existindo, portanto, haverá uma alteração da função de avaliação conjunta com respeito às individuais.

Vamos retornar ao exemplo da senhora e dos vestidos, se ela deve eleger entre várias alternativas com relação ao vestido para as festas de final de ano ou se deve comprá-lo ou alugá-lo para ir às festas. Suponhamos que não há nenhum tipo de restrição monetária, e que a senhora em questão deverá eleger simplesmente nestas duas situações simultaneamente, as alternativas serão:

$$1^{a}\text{ eleição}\begin{cases}\text{festa familiar,}\\ \text{baile no salão de festas,}\\ \text{festa na praça.}\end{cases}\qquad 2^{a}\text{ eleição}\begin{cases}\text{vestimenta informal,}\\ \text{traje,}\\ \text{traje de inverno.}\end{cases}$$

E, considerando que a eleição “festa na praça” e a “vestimenta informal” dentro de uma certa lógica, sejam incompatíveis, e não exista interação entre ambas, a avaliação conjunta da eleição produzirá mudanças importantes em relação às avaliações individuais, e inclusive, pode provocar mudanças na ordem teórica individual prévia.

No tocante às *eleições sequenciais*, neste caso especificamente, se tratam de eleições individuais tomadas em momentos distintos e tendo um denominador comum, no sentido de que todas as eleições se realizem dentro de um processo global; isto é, que o processo de eleição realizado ao mesmo tempo, com um objetivo comum, o qual exigirá uma coerência na eleição; ou seja, que quando um sujeito realiza uma eleição, terá consequências futuras, está prevendo em que medida afetará as eleições a serem realizadas no futuro. Bueno (2004)

Em todo o processo de eleição sequencial se incorporam às características próprias do condicionamento temporal, de tal maneira que a eleição das alternativas é uma eleição condicionada por eleições passadas e futuras, ademais, dos condicionamentos clássicos de experiência, influências externas etc.

De fato, este condicionamento estará alterando permanentemente a função de avaliação individual do sujeito, que passará a ser uma *função de avaliação condicionada*.

$$F\left(A,\succeq / E_1, E_2, ..., E_k : F_1, F_2, ..., F_l\right)$$

sendo: $E_1, E_2, ..., E_k$ eleições passadas.

$F_1, F_2, ..., F$ eleições potenciais futuras.

A maior ou menor influência das eleições passadas e futuras na presente dependerá da análise qualitativa que realize cada sujeito, em função de sua avaliação pessoal e da situação individual, não sendo possível realizar uma quantificação da relação existente entre a função de avaliação, a priori e a posteriori, isto é, sem ter e tendo em conta as outras eleições.

Para finalizar com o tema das interações entre eleições, faremos uma consideração do possível caráter estocástico (influência da probabilidade) desse processo. Na hora de analisar este caráter, devemos ter em conta a aleatoriedade intrínseca do fenômeno estudado, ademais, é a partir da ótica do observador que podemos considerar se um determinado fenômeno é ou não aleatório, ou seja, um fenômeno pode ser considerado aleatório se o sujeito o vê desde o exterior, enquanto que se trataria de um fenômeno não aleatório para este próprio sujeito do qual depende a realização da eleição de tal fenômeno.

O caso da senhora e dos vestidos, ao analisarmos desde o ponto de vista da senhora, não se trata de um fenômeno de azar, senão do estabelecimento de uma gradação ou ordenação de preferências que ela faz segundo sua pessoal capacidade de eleição, não existindo aleatoriedade. Não obstante, um observador externo que não conheça o que se passa pela cabeça da senhora, e que desconheça sua função de avaliação, ainda que pudesse intuí-la, poderá considerar que, no intervalo em que se está elegendo, como não se sabe qual será o resultado final, teríamos neste momento um processo com caráter aleatório.

O seguinte passo seria averiguar se esse caráter aleatório do processo de eleição, observado externamente, é estocástico. No suposto de que o fora, a probabilidade, obviamente, nunca seria objetiva, senão subjetiva, já que em um processo de eleição, as probabilidades que se podem aplicar ao resultado final do fenômeno, tendo em conta que o observador externo não participa do processo de eleição, variarão de um observador a outro, e serão meras conjecturas baseadas no grau de crença da eleição que se realizará ao final, mesmo que o fato de que essas probabilidades subjetivas possam ser atualizadas ou melhoradas, jamais deixarão de ter o conteúdo subjetivo que caracteriza tais probabilidades. Ademais, admitindo o caráter aleatório externo do fenômeno, as probabilidades subjetivas que se aplicam pelo sujeito observador, terão um aspecto dinâmico e não estático, posto que não há nenhuma regra que nos indique que as preferências vão se repetir permanentemente. Bueno (2004)

Assim, o processo de eleição tem que trazer associada uma função de avaliação concreta, com caráter permanente, através da qual se realizará uma classificação concreta das possíveis alternativas, existindo aleatoriedade somente para o caso de indiferença de elementos ótimos, cujo fato, parece razoável assumir a equiprobabilidade das alternativas, ou então condicionar a eleição ao resultado produzido num experimento aleatório construído sob medida, para resolver tal indiferença.

Ao continuar com o exemplo da senhora, e supondo que existam três cores de vestido, salmão, vermelho e verde, preferíveis aos demais, mas a senhora não saiba qual vestir, pode pegar um dado, de tal maneira que, se sair 1 ou 2, vestirá salmão; se 3 ou 4 vermelho, e 5 ou 6, verde, se não ser assim, perguntará a uma amiga, que deverá realizar uma nova avaliação pessoal sobre as três cores. Desde fora, e sem informação para a primeira senhora, não sabemos qual elegerá, pelo que será aleatória a eleição e equiprovável; desde dentro, a segunda senhora estabelecerá uma nova função de avaliação, podendo haver ou não indiferença entre os vestidos. Em caso contrário, a segunda senhora elegerá pela primeira, tal como havia sido pedido; se sim, teria que preparar outro experimento estocástico sob medida, e poderia se perguntar a uma terceira pessoa, para verificar se sua particular função de avaliação resolve a indiferença. Bueno (2004)

Podemos concluir, portanto, que intrinsecamente os processos de eleição não são processos estocásticos, e não existe aleatoriedade para o sujeito eleitor em tais processos.

Resta-nos agora, para encerrar com este tema, falar sobre a teoria da eleição racional, a qual trata de explicar a conduta humana[5], ela é em sua essência instrumental[6], ou seja, está guiada pelo resultado da ação[7] (Elster, 2003; Silva, 2001). Segundo Elster (1989, 1995 e 2003), a teoria da eleição racional é uma teoria que pode ser vista desde ângulos distintos, como uma teoria *normativa* e como uma teoria *descritiva*.

Como *normativa*, esta nos diz o que devemos fazer para lograr o melhor possível com relação a certas metas, ainda que quando não nos diz quais devem ser essas metas; como *descritiva*, sua missão é a de nos ajudar a predizer certas ações.

Partindo dos conceitos fundamentais dessa teoria, encontramos a figura do *agente representativo*, que é a unidade decisória responsável pela eleição ou decisão, pela ação e pelas consequências delas derivadas. O agente representativo, ao fazer uma eleição ou ao tomar uma decisão, está somente escolhendo uma entre diferentes alternativas ou opções (elementos passíveis da eleição), as quais podem ser puras ou condicionadas a outras eleições e/ou a outros eventos incertos. Ou seja, existe um agente representativo quando existe algo a ser eleito por alguém (Freitas, 1994; Silva, 2001), e quando isto ocorre temos uma *situação de eleição.* Neste sentido, segundo Bueno (2004) temos as seguintes dimensões:

---

[5] Em relação à ação humana, a racionalidade não é suficiente para assegurar os motivos da eleição, uma vez que nas decisões tomada baseada na deliberação se ignora a possibilidade delas serem bem sucedidas graças à adaptação circunstancial ou ao acaso. (Silva, 2001).

[6] Algumas formas de ação instrumental também podem ser decididamente irracionais.

[7] As ações são avaliadas e eleitas não por si mesmas senão como um meio mais ou menos eficiente para outro fim. Um exemplo simples é o empresário que deseja maximizar o lucro. Para lograr esse fim considera cuidadosamente quais produtos deve oferecer, quanto deve produzir e como produzi-los.

a) A que faz referência ao tipo de informação se perfeita (ocorre com menor frequência) ou imperfeita (ocorre com maior frequência), e que desta última se deriva: o risco e a incerteza.
   - *Risco* – É uma situação na qual se atribui certa probabilidade numérica as consequências de certos cursos de ação.
   - *Incerteza* - É uma situação em que o critério normativo para tomar uma decisão consiste em eleger a opção (que não se conhece) que maximize a utilidade esperada.

b) E a que existe entre decisões paramétricas e estratégicas.
   - *Paramétrica* – É quando o sujeito enfrenta restrições externas que já estão dadas. O sujeito primeiro estima as restrições e logo decide o que fazer.
   - *Estratégica* – É quando existe uma interdependência entre as decisões de distintos sujeitos. O sujeito, antes de tomar sua decisão tem que prever o que fará os demais, como também terá que prever o que os outros pensam que ele irá fazer. Poderíamos pensar que esta situação dá origem a um regresso ao infinito, mas isto não é bem assim, uma vez que se pode chegar a um ponto de equilíbrio. As situações estratégicas são o tópico da teoria de jogos, a qual é um elemento indispensável para a teoria da eleição racional.

É importante ressaltar que o conjunto de alternativas é o conjunto oportunidade do próprio agente.

Assim que, uma vez definido conceitos como: do agente representativo, situação de eleição e conjunto oportunidade, neste momento, percebemos a necessidade de conceituar outro elemento da teoria da eleição racional: *critérios da eleição*, que, todavia ainda não foi mencionado, e iremos fazê-lo através de um exemplo:

Sejam ***x*** e ***y*** duas alternativas quaisquer, a teoria da eleição racional nos afirmará que o agente elegerá aquela opção em que ele crê que possua uma qualidade que deseja, e que a outra opção não apresenta ou apresenta em menor intensidade. Pois bem, assim que, se a opção *x* for a escolhida, isto ocorrerá porque o agente acreditou que ela possui uma qualidade, isto fará emergir nele o desejo de obtê-la. Portanto, chegamos a uma conclusão de que "uma eleição é suscitada pelo desejo e saciá-lo é a finalidade da eleição" (Freitas, 1994). Naturalmente, esta eleição será sempre feita em função da crença do agente de que a alternativa escolhida saciará seu desejo. Deste modo, podemos classificar as crenças e os desejos como c*ritérios da eleição*. Assim que, um critério de eleição guardará uma relação direta entre ele e uma ação, isto é, o critério deverá motivar a ação para o qual é critério. Nota-se que tais critérios deverão satisfazer uma condição de coerência (no sentido próprio da teoria da eleição racional), e estes serão coerentes se as crenças e os desejos o forem (os quais ocorrerão se e somente se existirem no conjunto oportunidade).

Diante do exposto, concluímos que a racionalidade possui sua própria estrutura, a qual, por sua vez, está constituída por uma série de crenças e de desejos que, não só explicam a ação, como também tem uma cadeia causal que pode ser identificada. Elster (2003) afirma que tal identificação se logrará quando se cumprem três condições de otimalidade[8]:

a) A ação é a melhor maneira que tem o agente para satisfazer seus desejos, dados suas crenças.
b) A crença é o que melhor pode se formar, dada a evidência.
c) O montante da evidência recolhido é ótimo, dado seu desejo.
d) Pode-se dizer, resumidamente, que estes elementos são indispensáveis para poder falar de uma eleição racional.

Agora bem, a teoria da eleição racional também estabelece três axiomas básicos, nos quais se define todo o processo.

- *Axioma 1* – Estabelece-se, antes de todo, a existência de um critério decisivo de eleição. Esse critério reduzirá todos os outros a um único padrão. Admitirá, então, por hipótese, que o agente terá vários critérios de eleição, mas não haverá mais que um atuando sobre sua eleição.
- *Axioma 2* - Comparabilidade. Postula-se que o indivíduo é sempre capaz de comparar duas alternativas quaisquer de seu conjunto oportunidade – este axioma pressupõe um perfeito conhecimento do campo de eleição por parte do agente.

[8] É conveniente impor uma condição de otimalidade sobre a evidência que se pode recoletar antes que se forme uma crença.

- *Axioma 3* **–** O critério de eleição está inscrito numa relação de transitividade definida no conjunto oportunidade. Ou seja, se a opção *x* é tão boa quanto a *y*, e *y* é ao menos tão boa quanto a *z*, então *x* deve ser ao menos tão boa quanto a *z*.

Estes axiomas somente nos indicam que, para a teoria da eleição racional, o agente representativo consegue, baseado em um único critério de eleição, comparar todas suas opções e ademais disso, ordená-las.

Agora, depois da exposição dos conceitos fundamentais e dos três axiomas básicos, falta-nos somente descrever o processo de eleição racional propriamente dito.

Silva (2001), em sua analise do texto "seleção natural e social" de Elster (2003), nos diz que, a teoria da eleição racional afirma que um sujeito atuará racionalmente se diante de uma situação de eleição e uma vez dado o conjunto oportunidade e o conjunto de critérios, gerar "uma pré-ordenação das preferências sobre seu conjunto (oportunidade), baseada em padrões de critérios de eleição e depois disso eleger a opção mais preferida" (Silva, 2001). Portanto, atuar racionalmente significa eleger a alternativa com maior hierarquia dentro de um grupo de alternativas factíveis. No entanto, o fato de que o sujeito não eleja a alternativa com o status mais alto ou mais baixo dentro do grupo de alternativas não quer dizer que o sujeito atuou de forma não racional.

Queremos ainda tecer algumas considerações sobre a teoria da eleição racional.

Amartya Sem (1977), citado por Elster (2003), faz uma primeira crítica à teoria ao perguntar: quando um sujeito elege uma opção baseada na sua moral e em sua ética e não nos seus desejos e crenças, estará sendo irracional ou não racional? Se o indivíduo tem conhecimento que ao tomar uma atitude ética, esta lhe proporcionará menor satisfação do seu desejo/crença, ele estará sendo irracional ou não racional se o faz? Estas questões segundo Elster põem em dúvida a armadura desta teoria.

Em uma segunda crítica à teoria, Amartya Sem (1977 apud Elster 2003) afirma que quando as pessoas são racionais em alguma ocasião, e em outra não, a racionalidade poderá estar sendo violada em cada uma das correntes explicativas, a saber:

- *Na ação* - A irracionalidade se manifesta em casos como o da debilidade da vontade, na busca da utilidade não esperada, em formas de ação autodestrutivas etc.

- *Na formação de crenças* **–** Existe uma evidência de que as crenças estão influenciadas pelas formas de irracionalidade “fria” e “quente". Encontramos casos de irracionalidade quente quando o desejo determina a crença. O exemplo perfeito é o da fábula “a raposa e as uvas” que não podendo alcançar as uvas, a raposa decide que não as quer porque estão verdes. A irracionalidade fria ou cognitiva na formação de crenças se mostra nos casos como o de realizar generalizações a partir de poucos casos, e nos casos como tratar probabilidades como se fora somas.
- *Na acumulação da evidência* **-** Por outra parte, um caso de irracionalidade em nível da recoleção de evidências surge quando a quantidade de informação recoletada está abaixo ou acima do que deveria estar.

Outra dúvida sobre o poder explicativo e normativo da teoria, é que, a partir do fato de que os homens "tomam decisões" cada vez que se encontram diante de uma alternativa, e que essa poderia explicar as ações humanas em termos de normas sociais mais que de eleições individuais, mesmo sabendo que os seres humanos realizam ações por hábito, por tradição, por costume, por dever. Nestes casos, as normas sociais seriam, na ordem explicativa, anteriores às decisões individuais. Sem minimizar estes problemas, Elster (ibid) segue defendendo o papel normativo e o explicativo da teoria da eleição racional, por exemplo, para detectar formas de irracionalidade necessitamos de uma caracterização da racionalidade. Por outro lado, afirmar que muitas vezes atuamos de acordo com normas, hábitos ou deveres não está em desacordo com a teoria, já que uma pessoa pode eleger seguindo uma norma ou não, uma vez que a teoria não assume que toda nossa conduta se ajusta automaticamente às oportunidades imediatas.

Simplificadamente, no contexto desta pesquisa, entendemos por conduta, a maneira como os estudantes reagem ante uma situação problema que requer (implícita ou explicitamente) o uso de um raciocínio matemático, que pode ser observado por meio de suas respostas escritas ou orais dadas as situações.

1.2. A TOMADA DE DECISÕES

Decisão é sem dúvida uma das palavras mais populares e frequentemente usadas. Ao contrário do que ocorre com outros termos, pode-se afirmar que qualquer pessoa conhece perfeitamente seu significado e que ela (decisão) está intimamente ligada à natureza da atividade humana. O fato de que tomemos permanentemente decisões, as quais tanto podem afetar a nós mesmos quanto a quem está a nossa volta, a transforma no campo de maior transcendência para o ser humano (Moura e Labraña, 2005). Assim, podemos afirmar que o ser humano está caracterizado mais que qualquer outra coisa por sua capacidade de tomar decisões em tempo real, e isto faz deste feito algo inseparável de sua existência (Bueno, 2004). Slovic (1990) chamou-a de “a essência da inteligência”. Em outras palavras, somos humanos porque somos capazes de pensar e decidir em consequência de tal ato.

Pese ao feito de que seja tão natural decidir e que toda decisão vem sempre motivada pela existência de um problema detectado (de fácil ou difícil solução), podemos conceituar a eleição como uma possível solução entre vários cursos de ações alternativas.

Está claro que a necessidade de adotar decisões passa primeiro pela descoberta de um problema que até o momento não estava presente no entorno do sujeito, e depois pela existência de mais de uma alternativa para que se possa eleger (não é possível falar em tomada de decisão se existe apenas uma alternativa); até que isto não ocorra, não tem sentido formular conjecturas ou teorias sobre como se pode decidir (teoria matemática da decisão); ou como se deve decidir (teoria normativa), ou ainda, como realmente se decide (teoria descritiva). Ademais, o conjunto de alternativas deve ser perfeitamente conhecido do sujeito decisor (não tem sentido eleger alternativas que não conhecemos), e também é necessário que o decisor esteja disposto a dedicar certo tempo e recursos a analisá-lo, bem como suas possíveis soluções. A todo este processo que acabamos de descrever (detecção do problema, seleção e eleição das alternativas etc.) Carmona (1997) chamou de: “tomada de decisão”, ou “processo de decisão”, o qual por sua vez consiste em analisar um sistema de decisão.

Mas, o que motiva o interesse por formalizar, desenvolver e analisar sistemas de decisões? Podemos dizer que as decisões que tomamos são susceptíveis de serem melhoradas com a ajuda da análise. Ademais, a resolução de um problema não pode ser de qualquer maneira, porque há soluções que parecem gastar mais que outras, como também há alternativas que lhe parecem inaceitáveis por serem muito custosas, ou porque não se dão as condições necessárias para aplicá-las, ou por serem arriscadas ou porque afetam negativamente a outras pessoas etc, (Carmona 1997, pag.17).

O objetivo principal, não único, perseguido pela análise das decisões, segundo Carmona, é ajudar a selecionar a alternativa ótima, aquela em que podemos racionalmente esperar os melhores resultados, tendo presentes às limitações que são introduzidas, os recursos disponíveis, a incerteza e a dificuldade de quantificação. Muitas vezes, se faz uma má interpretação deste objetivo, convém não esquecer que um dos objetivos da tomada de decisão consiste em selecionar a melhor alternativa (incluindo a de não fazer nada), não o de estimar com precisão o resultado que se pode obter com cada uma delas ou aplicar métodos estatísticos muito sofisticados. Os métodos são uma ajuda, não um fim em si mesmo. É importante ter presente que uma boa decisão nem sempre assegura um bom resultado final. Isto somente ocorre num universo determinista onde não há lugar para os imprevistos e onde se possa dispor de todos os recursos necessários (informação, tempo etc.) para avaliar com absoluta precisão os resultados de todas as alternativas possíveis. No entanto, no mundo real há que aprender a conviver com as limitações de recursos e a incerteza, sempre presente em maior ou menor grau.

Tendo em conta todas estas circunstâncias mencionadas anteriormente, Carmona (1997) define como uma boa decisão aquela que foi tomada seguindo um processo correto. Mesmo que esta afirmação contrarie algumas filosofias econômicas e empresariais, por exemplo, segundo as quais o que conta são os resultados.

1.2.1. Elementos na Tomada de Decisões

Os elementos que constituem um processo de decisão são os seguintes:

1. Existência de um conjunto de opções ou alternativas (finito ou infinito) para abordar o problema:

$$A:\{a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n\}$$

2. Um ambiente ou contexto estrutural em que o problema é suscitado, e que se concretizará em um conjunto de estados da natureza que podem ser de *certeza*, *risco* e *incerteza*.

$$\Omega:\{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_j, ..., \theta_m\}$$

3. Uma função de avaliação dos resultados, que estabelece as consequências assignáveis da aplicação de cada opção ou alternativa nos diversos possíveis estados da natureza:

$$A \times \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Isto é, esta função é uma aplicação do produto cartesiano do conjunto de alternativas e do conjunto de estados da natureza, no conjunto dos números naturais; seus elementos serão:

$$f(a_i, \theta_j) = r_{ij}$$

A esta função de avaliação, denominada *função utilidade* dos resultados, dará origem a *matriz de decisão*, na qual estarão indicados as possíveis alternativas, os estados da natureza e os resultados da eleição de alternativas.

Tabela 1: Matriz de decisão em função da natureza e das alternativas

Estados da natureza

Alternativas	**A** \ Ω	θ_1	...	θ_j	...	θ_n
	a_1	r_{11}	$\cdots$	r_{1j}	$\cdots$	r_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	a_i	r_{i1}	$\cdots$	r_{ij}	$\cdots$	r_{in}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	a_m	r_{m1}	$\cdots$	r_{mj}	$\cdots$	r_{mn}

Fonte: Adaptada de Bueno (2004)

Na construção desta matriz é preciso ter em conta que o decisor se encontra habitualmente condicionado pelo seu entorno. Este entorno lhe facilita, umas vezes a informação, e em outras vezes, é fonte de coação ou restrição. A sua vez, o decisor é susceptível de condicionar o dito entorno, mediante atitudes reais que influenciam as decisões e avaliações de outros sujeitos. Também, há que considerar o fato de que podem existir fatores institucionais, como leis, ordenamento jurídico, práticas ou rotinas ordinárias etc., que podem restringir a liberdade de eleição ou decisão do indivíduo, e o sujeito decisor se verá obrigado a incorporar estes acontecimentos a seu modelo de decisão, avaliando o efeito que ele terá na função de avaliação que esteja considerando. Outra coisa para se ter em conta é que, na vida real, é praticamente impossível que um sujeito decisor possua informação completa sobre um determinado problema, cuja necessidade de resolver se haja manifestado.

Para falar mais um pouco sobre os ambientes nos quais se podem desenvolver a tomada de decisão, tem-se:

- *Ambiente de certeza* - Quando são conhecidos com certeza todas as alternativas e os resultados que delas derivam.
- *Ambiente de risco* - Se conhecem as possíveis alternativas, mas os resultados que delas derivam podem se manifestar de diferentes maneiras em função de uma determinada lei de probabilidade, supostamente conhecida. Trata-se, portanto, de um problema de natureza estocástica, ou seja, se corresponde com aquelas situações nas que o sujeito decisor pode atribuir probabilidade matemática aos fenômenos aleatórios. Um exemplo seria apostar nos lançamentos de dados.
- *Ambiente de incerteza* - É similar ao ambiente de risco, mas agora não somos capazes de estimar com que probabilidade cada possível estado da natureza pode acontecer quando se concretiza a situação. Isto é, se correspondem com as situações nas que o sujeito não pode atribuir as probabilidades. Um exemplo seria investir na Bolsa de Valores.

A pesar da diversidade de ambientes, matematicamente poderia ser atribuída uma lei de probabilidade a cada uma das alternativas nas que se podem concretizar um fenômeno:

- Quando ocorrer um problema em condições de certeza, toda alternativa terá uma probabilidade 1.
- Quando um problema ocorrer em ambiente de risco, toda alternativa terá vários possíveis efeitos ou consequências com suas respectivas probabilidades, as quais serão conhecidas *a priori*.
- Quando se tratar de um fenômeno “probabilizável” em ambiente de incerteza, ainda que não se conheçam as probabilidades objetivas, sempre será possível atribuir uma distribuição de probabilidades subjetivas às possíveis consequências, em função do grau de crença que o sujeito tenha acerca da ocorrência das mesmas.

- Quando se trate de um fenômeno não probabilizável, se atribuirá assim mesmo uma probabilidade subjetiva de caráter operativo, independentemente de sua falta de representatividade.

De fato, e ainda que não se corresponda com um pensamento muito ortodoxo, poderíamos classificar aos problemas de eleição e decisão em duas categorias:

1. Problemas com lei de probabilidade *objetiva:* aqueles que se desenvolvem em ambiente de certeza ou risco.
2. Problemas com lei de probabilidade *subjetiva*: aqueles que se desenvolvem em ambiente de incerteza. Já que toda probabilidade subjetiva comporta a existência de fatores hipotéticos ou conjecturas que impedem chegar a medir exatamente o fenômeno e suas consequências.

Depois de definir os distintos elementos da tomada de decisão, necessitamos formalizar o problema de decisão, propriamente dito. Para formalizá-lo, primeiro há que buscar atributos valoráveis nas alternativas, ou seja, é preciso avaliá-las de diferentes formas que reflitam sua proximidade ou distância do ótimo, para que possamos medir o grau de satisfação de cada um dos critérios selecionados, como também suas consequências. Nem sempre é fácil buscar ditos atributos, a dificuldade provêm da inexistência de aspectos mensuráveis diretamente relacionados com os critérios selecionados, pelo que às vezes será necessário recorrer a medidas indiretas. Alguns dos atributos selecionados serão *quantitativos*, podendo ser expressos de forma numérica, entretanto, frequentemente alguns atributos são *qualitativos*, e sua medida não pode ser expressa numericamente. Independentemente do desenvolvimento de algumas técnicas, as quais ajudam ao decisor na quantificação de suas preferências, devemos considerar um conceito chave neste processo, que é o *conceito de utilidade*[9].

1.2.2. Conceito de Utilidade

A eleição de uma determinada alternativa deve reportar ao decisor uma determinada utilidade, pois, em caso contrário, não teria sentido a sua decisão. Para eleger uma alternativa

9 Na teoria econômica, utilidade é a propriedade que os produtos tangíveis e serviços tem de satisfazer as necessidades e desejos humanos.

entre várias, deve existir uma motivação para o decisor. Esta motivação é simplesmente a utilidade que estas possíveis alternativas podem lhe trazer. Resumindo, os indivíduos não tomam decisões, em geral, segundo o valor esperado[10], senão segundo a utilidade que vão receber das distintas alternativas. Bueno (2004) chama a atenção para o fato de que atualmente as pessoas só são capazes de imaginar a "utilidade" como, por exemplo, uma determinada quantidade de dinheiro, se esquecendo de que pode haver outros pensamentos "utilitaristas[11]". Em suas palavras "parece que o dinheiro é a única motivação capaz de nos fazer tomar decisões" (p 98).

Entretanto, esta problemática da avaliação das alternativas deve ser abordada desde uma visão mais geral e desde esta perspectiva. Há autores como Freitas (1994) e Bueno (2004) que definem a utilidade como "a satisfação (mesmo que moral) que reporta ao sujeito decisor a cobertura de uma necessidade que este sujeito tinha previamente a adoção de uma decisão" (Bueno (2004), p.98). Unicamente se exige que esta satisfação seja susceptível de ser medida, pois, em caso contrário, seria impossível saber em que *medida* foi coberta a necessidade que o sujeito tinha, e seria impossível afirmar que uma alternativa é mais *útil* que outra para o dito sujeito.

Quando se analisa abstratamente um problema de decisão, fala-se dos "úteis" que representam para o sujeito decisor a eleição da alternativa a_j, e pelo contrário, quando se fala de situações concretas, podemos usar a medida adequada ao problema que nos ocupa, utilizando úteis de satisfação moral ou úteis monetários, por exemplo.

Desde o momento em que estabelecemos uma medida de utilidade, podemos falar de uma *relação de preferência entre utilidades*, isto é, uma medida de utilidade é uma simples escala, pela parte de cima as maiores e pela de baixo, as menores utilidades. Por exemplo, é preferida a utilidade r_{ij} (representada pela compra de um carro) a r_{kt} (representada pela compra de um barco).

[10] Valor esperado é a capacidade de uma coisa em saciar os desejos. Freitas (1994).
[11] O pensamento utilitarista se assenta em três pressupostos: o consequencialismo, o bem estar e o agregacionismo. O *consequencialista*, diz que o único padrão ético fundamental é a promoção imparcial do bem ou a realização de estados de coisas valiosas. O *bem estar*, é a satisfação das preferências pessoais, ou seja, é constituído por aqueles aspectos da vida que são bons para o próprio indivíduo. E o *agregacionista* acrescenta a esta imagem, para determinar o valor de um estado de coisas devemos somar o bem estar dos indivíduos em consideração.

Todavia, em igual, no caso do conjunto de alternativas, ante uma mesma tabela de utilidades, os sujeitos decisores podem responder de várias formas, e o que para uma pessoa tem uma grande utilidade, para outra não será, pelo que cada decisor terá associada intrinsecamente sua própria medida de utilidade. Desta forma, se estabelece uma escala de valoração num conjunto de alternativas, implicando assim na existência de uma *relação de preferência* entre seus elementos, de forma que:

Dada duas alternativas r_{ij} e r_{kt}, diremos que r_{ij} **p** r_{kt} se r_{ij} é *preferido* a r_{kt}. Diremos que r_{ij} **i** r_{kt}; se $r_{ij} \not{p}\, r_{kt}$ e $r_{kt} \not{p}\, r_{ij}$, portanto r_{ij} e r_{kt} são *indiferentes.*

r_{ij} e r_{kt} podem ser quaisquer pares de números do intervalo [0,1], por exemplo, cujas relações **p** e **i** ("preferência" e "indiferença"), satisfaçam os seguintes axiomas.

- r_{ij} **p** r_{kt}, r_{kt} **p** r_{ij}, ou r_{ij} **i** r_{kt};
- r_{ij} **i** r_{ij} para todo r_{ij};
- se r_{ij} **i** r_{kt}, então r_{kt} **i** r_{ij};
- se r_{ij} **p** r_{kt} e r_{kt} **p** r_{ls}, então r_{ij} **p** r_{ls};
- se r_{ij} **p** r_{kt} e r_{kt} **i** r_{ls}, então r_{ij} **p** r_{ls};
- se r_{ij} **i** r_{kt} e r_{kt} **p** r_{ls}, então r_{ij} **p** r_{ls}.

Em Owen (1995), vemos que estes axiomas representam a existência de uma *ordem sobre as alternativas*, desde a mais desejável até a menos, se r_{ij} **p** r_{kt}, quer dizer que a alternativa (r_{ij}) tem *maior utilidade* que (r_{kt}), entretanto, este fato não indica qual é a proporção desta diferença entre as alternativas, tampouco poderá descrever quais são estas possíveis "maiores utilidades", que justifique uma alternativa em detrimento de outra.

Assim como na eleição, no processo da tomada de decisões, também existe uma pré-ordem. Evidentemente, a decisão adequada para o sujeito decisor se corresponde com o *elemento maximal da pré-ordem de preferências;* quer dizer, aquela alternativa que mais utilidade proporciona ao sujeito. Este elemento do conjunto de alternativas, não é o mesmo para todos os sujeitos decisores, posto que a medida de úteis que reporta cada decisão é uma medida pessoal de utilidade intrínseca de cada sujeito.

Podemos observar que nem sempre as decisões são tomadas num ambiente de certeza, usualmente elas são tomadas em diferentes ambientes, influenciadas pela aleatoriedade do entorno, sendo preciso estabelecer uma matriz de decisão.

Tabela 2: Matriz de decisão em função do ambiente

P	$P(\theta_1)$	...	$P(\theta_j)$	...	$P(\theta_n)$
A \ Ω	θ_1	...	θ_j	...	θ_n
a_1	r_{11}	...	r_{1j}	...	r_{1n}
...	...	$\ddots$	...	$\ddots$	...
a_i	r_{i1}	...	r_{ij}	...	r_{in}
...	...	$\ddots$	...	$\ddots$	...
a_m	r_{m1}	...	r_{mj}	...	r_{mn}

Fonte: Adaptado de Bueno (2004).

Neste contexto, tomar uma decisão implica eleger um vetor fila da matriz de decisão, dentre o total de vetores fila indicados. Não obstante a diferença da simplicidade do caso anteriormente exposto, no que se estabelecia uma estrutura de pré-ordem entre elementos, agora, o problema é mais difícil de resolver, posto que a comparabilidade de dois vetores há de se basear nos seus componentes, podendo existir distintas combinações. Deste modo, a relação de preferência será entre vetores e passaria pela consideração dos conceitos de *vetor simplesmente dominado, vetor admissível* e *vetor dominante* ou *vetor ótimo*:

- *Vetor dominado* – É o vetor cujas coordenadas não foram preferidas às de outro vetor da matriz, ou seja:

  $$a_i \in A / \left(r_{kj} \preceq r_{ij}; \forall \theta_j \in \Omega\right) \wedge \left(r_{kj} \prec r_{ij}; \exists \theta_j \in \Omega\right).$$

- *Vetor admissível* - Um vetor será admissível se não existir outro vetor que lhe domine; ou seja, um vetor será admissível se não for um vetor dominado.
- *Vetor dominante* ou *vetor ótimo* - É um vetor admissível, cujas coordenadas foram preferidas às de qualquer outro vetor da matriz; um deles ao menos, em sentido estrito. O vetor ótimo no conjunto de resultados é:

  $$\forall a_i \in A^* / \left(r_{kj} \preceq r_{ij}; \forall \theta_j \in \Omega\right) \wedge \left(r_{kj} \prec r_{ij}; \exists \theta_j \in \Omega\right),$$

sendo $A^{*} = A - / \{a_k\}$.

Isto é, se elegerá a alternativa a_k, se qualquer que seja o estado da natureza, dita alternativa proporciona maior número de úteis que as demais.

Temos também, as situações (ex. em nossa vida cotidiana) onde tomamos algumas decisões sem conhecer realmente suas consequências. Se, no caso de querermos comprar um carro e decidimos pelo mais veloz, não sabemos se nos passará algo desagradável por conta de sua velocidade, assim que, a utilidade da compra será muito baixa, inclusive pode ser negativa. Resumindo, não é fácil fazer uma avaliação dos vetores da matriz de decisão, e o sujeito decisor, na vida real, muitas vezes avalia as suas consequências de forma intuitiva.

Em alguns dos pontos anteriores, ao fazer uma análise qualitativa, falamos dos resultados como se fossem de sua utilidade, e de utilidade como se estivéssemos analisando resultados. Está claro que não se podem identificar ambos conceitos, sendo necessário separar os resultados (causas) de suas utilidades (efeitos), mediante o que chamamos de *função utilidade*.

Se tivermos em conta que o sujeito decisor, tem consciência de que qualquer que seja o resultado obtido, sempre obterá um resultado mínimo r_m, pelo que sua verdadeira preocupação, virá dada por ver em que medida é capaz de obter $U(r_m)+U(r_x)$,e em como pode maximizar esta última utilidade $U(r_x)$. Por isso, vamos definir dois tipos de utilidade:

- *Utilidade do problema de decisão* - Será a utilidade que produz o resultado constituído pelo elemento minimal. Esta utilidade que receberá sempre o decisor, qualquer que seja a alternativa eleita.
- *Utilidade da alternativa eleita* - Será o valor acrescido à utilidade do problema de decisão pelo fato de eleger a alternativa a_i; ou seja, o complemento à utilidade do problema de decisão, até lograr a utilidade total obtida.

Pelo que antecede, podemos definir como utilidade real de uma alternativa, o incremento de utilidade que produz a um decisor o fato de preferir a_i a a_k, ou seja, a diferença de utilidade existente entre a utilidade total recebida e a alternativa não eleita.

Por conseguinte, definimos *utilidade* como a capacidade que um bem ou serviço possui para satisfazer as necessidades de um sujeito. De acordo com um critério básico de racionalidade, todo processo de adoção de decisões dever-se-ia encaminhar a lograr a maior utilidade possível para o sujeito.

Resumidamente, para que possamos classificar um problema como problema de decisão é necessário que o decisor avalie as consequências de suas ações em termos qualitativo ou quantitativo, e para isto se exige estabelecer o conceito de utilidade para qualquer indivíduo que tenha que tomar decisões individualmente. O caráter individual da decisão se manifesta pelo fato de que cada sujeito concebe o problema de uma maneira diferente, por muito objetivo que pareça. Observemos o exemplo a seguir para melhor entender o que já foi dito.

Exemplo adaptado de Bueno (2004) **-** Suponhamos um jogo de lançamento de um dado, observando o número que aparece na face superior com a seguinte regra: o jogador 1 (ativo) aposta \$50, e se sai qualquer número ≥ 4, recebe \$500, e se tira < 4, não ganha nada. Temos os seguintes resultados para o jogo:

Tabela 3: Valor esperado dos pagos do jogador

Resultados

Alternativas	***P***	$P \geq 4$	$P < 4$
	Ω / D	≥ 4	< 4
	Jogar	450	-50
	Não Jogar	0	0

Fonte: Adaptado de Bueno (2004)

Ao calcularmos a expectativa de beneficio, utilizando a esperança matemática, encontramos:

$$E(\text{jogar}) = (450 \times 0,5) + (-50 \times 0,5) = 200$$
$$E(\text{não jogar}) = (0 \times 0,5) + (0 \times 0,5) = 0$$

A priori, a expectativa de beneficio ou *utilidade esperada* é muito superior no caso de que decidamos jogar, pelo que se aplicarmos um critério racional de decisão, deveríamos concluir que temos que jogar este jogo.

Entretanto, a pergunta que fazemos é: todo decisor deveria jogar? Suponhamos que o sujeito somente dispõe de \$50 como capital e que, obviamente, tem que se alimentar. Neste caso, jogaria? É evidente que não é o mesmo ter \$50 que ter \$1000, de cara a jogar este jogo, o que nos confirma o caráter subjetivo da tomada de decisões. Ou seja, cada sujeito avaliará os resultados de um problema de decisão, individualmente, de acordo com a *utilidade das consequências* das decisões.

Assim, como em quase toda teoria, a da utilidade esperada também tem sua problemática baseada em diferentes critérios axiomáticos de decisão. Em um deles vemos, por exemplo, os axiomas de preferência de uma teoria de utilidade que, segundo Kahneman e Tvesky (1979), desde este ponto de vista são meramente predições. Estes investigadores nos muitos experimentos realizados indicaram que a maioria das teorias provadas não é boa para predizer o comportamento de uma eleição ou de uma tomada de decisão. Muitas pessoas cometem erros em relação à racionalidade de suas decisões na sua percepção da realidade, as quais podem ser precedidas e classificadas por categorias. De fato, os autores escreveram, “a expectativa das perdas e ganhos futuros esperados, não são tratados de forma simétrica pelos sujeitos decisores, que às vezes dão uma importância desproporcionada a riscos muito pequenos” (pág. 146). Isto provocou que estes pesquisadores formulassem e refinassem tais formulações, surgindo assim a “teoria das expectativas”, na qual tratam de explicar as violações da teoria da utilidade esperada por parte dos decisores. Para formular esta teoria eles assumiram como hipóteses que o sujeito não decide segundo os padrões racionais da teoria da utilidade esperada, mas por simples regras de comportamento, quando se tem que tomar uma decisão. As principais regras são:

- *Representatividade* - O sujeito atribui probabilidades aos sucessos e, em consequência, elege as alternativas em virtude da verossimilhança de cada sucesso; quanto mais se assemelhe um fato a outro conhecido por ele, mais provável será tal sucesso. Nesta regra se detecta uma incompreensão do tamanho amostral.

  Exemplo: Se lançamos 6 vezes seguidas uma moeda, que combinação de cara (C) e coroa (+) é mais provável: CC++C+ ou C+C+C+? Neste caso, se observa que há insensibilidade às probabilidades.
- *Capacidade de memorização ou recordo* - Facilidade para recordar situações análogas anteriores, de forma que quanto melhor o recordo do decisor de um determinado sucesso, maior probabilidade terá de acontecer. A verossimilhança de um sucesso dependeria diretamente da facilidade com que as situações venham à mente do sujeito. Este fato provocaria erros de quatro tipos:

- Os sucessos parecem mais prováveis quando se recordam com mais facilidades.
- Efetividade do conjunto de busca.
- Construção de um cenário mental.
- Correlação ilusória.

- *Necessidade de segurança* - Aparece quando o decisor efetua algum tipo de estimação, de forma que, ante o desconhecido, o sujeito se deixe guiar por conselhos de terceiros, ainda sendo consciente da arbitrariedade de determinados conselhos.

Os erros mais comuns são os derivados de um ajuste insuficiente e de um excesso de importância dado ao valor inicial:

Exemplo - Imagine que um sujeito aposte sobre os seguintes sucessos:

A- Extração de uma bola vermelha em uma urna composta por bolas vermelhas e brancas, em partes iguais.

B- Extração de uma bola vermelha sete vezes consecutivas com reposição, em uma urna com 90% de bolas vermelhas e 10% brancas.

C- Extração com reposição de uma bola vermelha ao menos uma vez, entre sete sucessivas, em uma urna com 10 % de bolas vermelhas e 90 % de bolas brancas.

Em seus experimentos, Kahneman e Tvesky (1979) constataram que a maioria das pessoas optou pela eleição (aposta) do sucesso A, frente ao sucesso C. Entretanto, a probabilidade de ganho é máxima (52 %) em C, e mínima (48 %) em B.

Ainda com respeito aos seus experimentos estes autores concluíram que as teorias que sinalizam como deveriam decidir os sujeitos, resultaram não serem válidas na prática, e isto foi comum nas pessoas, independentemente da sua cultura, ainda que se modifique a natureza do problema.

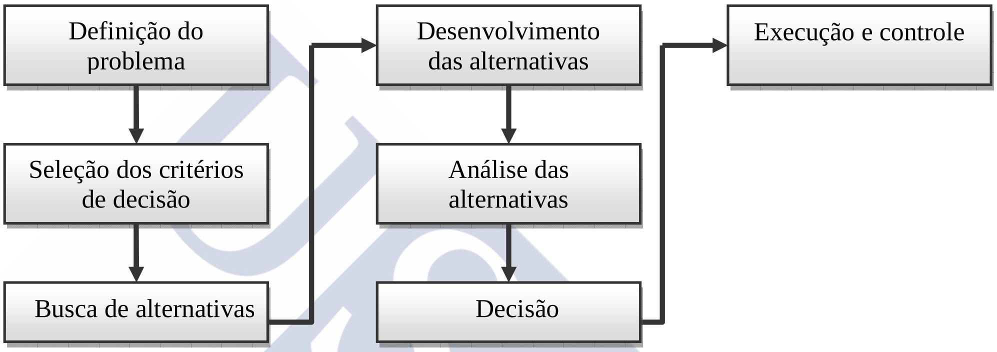
1.2.3. O Processo de Decisão

Uma vez que definimos os requisitos necessários para uma abordagem da tomada de decisões, vamos agora apresentar as distintas fases (Carmona, 1997) nas quais ela pode ocorrer, observando que a ordem em que elas se apresentam não são rígidas, podendo ocorrer de forma paralela, ou ainda ser retomada se durante o processo algum elemento novo aparecer. Estas fases segundo Carmona (1997) são:

- *Definição do problema* - Uma vez detectado o problema, é necessário dedicar certo tempo à busca de informação sobre o mesmo, de forma que possam emergir todos os distintos elementos, bem como as relações entre eles. Nesta fase é importante distinguir quais são os aspectos fundamentais e os acessórios, assim como quais as limitações que a situação impõe sobre as possíveis vias de solução. Toda situação problema incorpora um grande número de aspectos e detalhes que dificultam a visualização dos que são realmente relevantes, ao mesmo tempo em que são obstáculos para a formalização e analise posterior.
- *Seleção dos critérios* - Os critérios são as expressões dos objetivos que se busca alcançar com uma boa solução, ou seja, são as soluções ideais. O desejável é encontrar aquela solução que supõe o *melhor compromisso* entre todos os critérios, porém uma dificuldade é adicionada a isto, que é a de encontrar os atributos ou características mensuráveis que permitam valorar o grau de satisfação das alternativas em relação aos critérios selecionados.
- *Busca das alternativas* - É de grande importância fazer um esforço de imaginação e criatividade para gerar o maior número de soluções possíveis, uma vez que as soluções mais evidentes nem sempre são as melhores e inclusive aquelas que, em principio não parecem factíveis, merecem ser exploradas com a imaginação. Sempre correrá o risco de que a alternativa ótima se encontre entre aquelas que não se pensou, e aí o risco será reduzido caso o sujeito realize um esforço criativo nesta fase.
- *Análise*: Esta é uma fase de valoração de cada uma das distintas alternativas. É a medição dos distintos atributos que permitem expressar o grau de satisfação que cada alternativa alcança para cada critério. A distinção entre critérios quantitativos e qualitativos vai estabelecer a diferença de tratamento em cada caso. Existe um grande número de técnicas e métodos aplicáveis a este processo de avaliação, dependendo das características do problema, muitas delas fazem uso de instrumentos matemáticos e estatísticos, e seu conhecimento pode resultar em grande ajuda.

- *Decisão* - Finalmente, uma vez formalizado e analisado o problema de decisão, se requer a intervenção da(s) pessoa(s) que atuam como decisores.
- *Execução e controle*: Uma vez eleito o curso de ação que será levado adiante, é necessário por em jogo os recursos e os instrumentos necessários. O adequado controle da execução proporcionará informações e experiência muito úteis para posteriores tomadas de decisões relacionadas com o que se está executando.

Fig. 3: Configuração do processo de tomada de decisões



Fonte: Adaptado de Carmona (1997).

Na vida real, a cada momento que passa, revisamos nossas opiniões sobre diversos parâmetros da existência humana, com o que aprendemos sobre eles e com eles; e quando tomamos uma determinada decisão, obviamente o fazemos com base em nossas opiniões, dentro de um contexto determinado, no momento em que a alternativa deva ser eleita.

Ademais, o fato de tomarmos uma decisão num momento inicial, e logo tomarmos outra em um momento futuro, pode supor a existência de fatores externos que alterem as condições iniciais, produzindo efeitos das alterações nestas, ainda que permaneçam os objetivos iniciais como resultado da primeira decisão. Cada eleição que se faça não supõe um ato isolado, senão que se insere na trajetória de cada sujeito. Está claro também, que o maior ou menor poder para tomar decisões racionais, depende da maior ou menor informação que se tenha sobre o meio de mudanças. Senão se dá a devida atenção ao meio/ambiente, chegará um momento no que o decisor estará incapacitado para adotar decisões sobre sua própria atividade, posto que desconhecerá totalmente o meio onde está inserido.

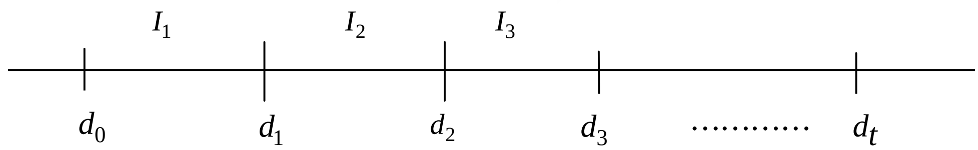
A atualização da informação que o sujeito possui, como afirma Carmona (1997), deve ser constante, e se o entorno varia, a informação deve atualizar-se, e em consequência, as decisões devem se modificar com o transcurso do tempo. Bueno (2004) define os problemas que o decisor deva considerar no futuro, fazendo planos apropriados para a correção de suas decisões de acordo com a variação da informação recebida do meio, como *problemas de decisão sequenciais*.

Obviamente, os movimentos que afetam uma decisão podem ser diversos. Entretanto, em todos estes movimentos deve existir um denominador comum: a existência de uma decisão inicial que desencadeia decisões futuras em forma sequencial.

Portanto, um processo de decisão sequencial é a concatenação temporal de um conjunto de decisões com um vínculo comum, que tenha como objetivo a resolução de um problema de decisão; isto é, que um sujeito decisor necessite tomar uma decisão em distintas fases, ou porque uma vez tomada a decisão, esteja obrigado a tomar outras decisões futuras; ou porque a resolução do problema lhe obrigue a tomar várias decisões em momentos distintos. Não obstante, o tempo é em si uma variável muito particular, influi no processo de decisão sequencial, a tomada de uma decisão não se adota em cada momento de tempo, senão vai desenvolvendo ao longo de um intervalo temporal, o que se denomina *intervalo de decisão*, pelo que a variável tempo tem um caráter discreto. (Bueno 2004).

Graficamente, podemos estabelecer um diagrama que represente o processo de decisão sequencial:

Fig. 4: Diagrama representativo do processo de decisão sequencial



Fonte: Adaptado de Bueno (2004)

O processo surge com a necessidade de resolver um problema de decisão. Este momento de reconhecimento também é o ponto de partida do processo d_0. A partir dai, se abre o primeiro intervalo de decisão I_1, ao longo do qual vai surgir a primeira decisão do processo d_1, que, a sua vez, desencadeia todas as decisões que se geram a continuação, balizadas pelos correspondentes intervalos necessários para a adoção das decisões.

Ao ser o tempo uma variável continua, o horizonte temporal do processo de decisão pode ser infinito, como de fato, em muitos casos assim será; contudo, se queremos efetuar uma análise adequada do problema, deveremos assumir que o processo será finito.

Bueno (ob.cit.) nos chama a atenção para o fato de que o processo nasce com a necessidade que experimenta o decisor de manifestar sua vontade ante um problema que surge. Esta origem d_0, *é* um momento de tempo, em que o sujeito percebe a existência do problema e a necessidade de resolvê-lo. Ademais, d_0 não desencadeia o processo de decisão, posto que não é ponto de decisão, senão é a partir do qual se começa a construir o processo em si mesmo; não tendo importância analítica, somente psicológica, no sentido de que a existência de uma origem do processo é totalmente necessária para que este exista, a descoberta de d_0 é vital para a solução do problema.

Como se pode observar, quanto antes se detecte o problema, maior será I_1, o primeiro intervalo de decisão, e quanto maior seja este, de maior tempo dispomos para nossas conjeturas iniciais, captar melhor a informação, fazer os cálculos que precisamos, em suma, termos todas as condições de melhor tomar a decisão d_1.

Quando estudamos a decisão desde o ponto de vista estático, assumimos dispor de um tempo ilimitado para tomar a decisão; poderíamos incorporar a informação ao modelo, simular as distintas probabilidades *a priori*, e sua incidência na decisão ótima etc. A realidade, contudo, é bem distinta, e de acordo com uma correta detecção do problema d_0, dispomos de um tempo limitado, no intervalo temporal I_1, daí a importância do papel da informação e dos estados da natureza.

A *primeira decisão* se produzirá no momento em que o sujeito se vê obrigado materialmente a tomá-la. Com base na experiência acumulada ao longo do intervalo I_1 e baseados nos cálculos que designam a uma determinada alternativa como decisão ótima, adota e assume a possibilidade futura de suas consequências, as quais podem desencadear uma série de várias outras decisões, que inclusive podem ser simultâneas. Desde este ponto de vista, e com a finalidade de garantir a coerência e racionalidade do processo de decisão, é exigido do decisor o reconhecimento das possíveis interdependências nas decisões, evitando que as mesmas adotadas numa fase sejam contraditórias com relação às anteriores. Ademais, cada sequência vai acompanhada de um resultado, favorável ou não, mas que, qualquer que seja ele, modifica os supostos do processo, condiciona as decisões e resultados posteriores. Assim que, distinguimos dois tipos de consequências futuras:

- As provocadas por tomar uma decisão específica, as quais poderiam ter reflexos futuros positivos ou negativos;
- As provocadas por tomar uma decisão, e que por sua vez provocaram novas decisões as quais devem tomar o sujeito decisor pelo fato de haver adotado a primeira.

Esta última é o que caracteriza o processo de decisão sequencial; ou seja, transcorrido o intervalo I_1, o sujeito decisor toma várias decisões sobre "uns" tantos aspectos do problema de decisão, os quais a sua vez gera um conjunto de decisões com uns resultados futuros diversos.

Neste contexto, poderíamos perguntar, como se pode classificar de ótima uma primeira decisão, sem avaliar os resultados futuros desta, e as demais decisões surgidas? Como resposta, teríamos que a única possibilidade seria conhecer todos os resultados futuros, e seus correspondentes estados da natureza, como as alternativas ótimas, e efetuar o cálculo de "trás para frente", dentro do que se conhece por política estratégica ótima, que caracterizará todo problema de decisão analisado.

Evidentemente, a política estratégica ótima será, portanto, aquela que permita alcançar os fins propostos dentro das condições específicas do problema de decisão. Para isso, é preciso conhecer o horizonte temporal no qual nos movemos, já que para adotar a decisão d_1, é preciso desenvolver primeiro todo o diagrama, até a decisão d_t, produzida depois do intervalo I_t, com o que se finalizará o processo. Teremos ademais que simular todos os possíveis estados da natureza nas sucessivas etapas, e os resultados previsíveis, de forma que podamos obter as alternativas ótimas de cada fase do processo, e com elas, suas respectivas utilidades esperadas, que por agregação nos permitirão saber qual é a decisão ótima na primeira decisão d_1, que é aquela que produza uma maior utilidade esperada agregada.

Este horizonte temporal não tem porque coincidir com o final do processo, (inclusive pode não existir), uma vez que o horizonte temporal é uma cotação que faz o próprio sujeito para tomar sua primeira decisão.

Com o *segundo intervalo de decisão***,** começa verdadeiramente o processo, sendo o primeiro elemento diferenciador com respeito à decisão. Ao longo do segundo intervalo é que começa a busca de informações sobre aspectos relativos à tomada de uma segunda decisão, que foi provocada pela primeira, se obtém uma maior informação sobre o problema de decisão em estudo e ver as consequências que teve o meio com a adoção da primeira decisão; se mantém o conjunto dos estados, são outros estados os que afetarão a segunda decisão; caso de se manter, em que medida se modifica as probabilidades *a posteriori*, de acordo com a nova informação captada; se as alternativas consideráveis são as mesmas, distintas, uma parte, as iniciais, outras novas etc.

Não obstante, neste segundo intervalo, existe uma novidade com respeito ao primeiro, uma vez que neste caso, ademais da informação adicional procedente e já incorporada ao problema, surge à própria informação que nos traz o problema depois de tomada a primeira decisão, ou seja, deixará de supor uma utilidade esperada, para se transformar em uma utilidade real.

Uma vez realizada a nova recolhida de informação e sua atualização (partindo dos resultados conhecidos da primeira decisão), passa-se para a tomada da segunda decisão, e se reformulará novamente e totalmente o problema, como a própria segunda decisão d_2, a qual desencadeará ou não, a sua vez, novas decisões que podem anular total ou parcialmente as decisões planificadas inicialmente (d_1), e que ademais podem modificar o horizonte temporal de decisão, alongando-se ou encurtando-se, segundo o novo cenário no que se move o decisor, e à luz da nova informação captada e dos resultados da etapa anterior. Portanto, o processo de decisão sequencial estará submetido permanentemente a um *controle* e *reconsideração*, de forma que, em cada etapa o decisor reformulará o problema e voltará a planificar o futuro, confeccionando um novo diagrama de decisão, que a sua vez, será reconsiderado em etapas posteriores até que se finalize o processo. Neste momento conheceremos o resultado real de nosso problema de decisão. Evidentemente, se trata de uma avaliação a *posteriori*, a única que se pode fazer, e uma vez estabelecidos os parâmetros que identificam nosso problema, poderemos comparar com o plano inicial.

1.2.4. As Decisões Coletivas ou Grupais

Há também outro grupo de decisões as quais ainda não referimos, quais sejam, as decisões coletivas ou grupais. O sujeito decisor não tem porque ser único pode ser um conjunto deles ou para o caso das diferentes utilidades para eles representadas. Neste caso, surge a *função utilidade coletiva* (agregação de funções coletivas individuais), que por sua vez, se fará por uma confrontação entre os objetivos dos diversos sujeitos, os quais podem ser: total ou parcialmente coincidentes ou divergentes, espaciais ou temporais, fazendo surgir o conflito e posteriormente a negociação.

Nota-se que, mesmo diante da problemática das decisões coletivas, haverá que emergir uma única decisão a partir da interação entre a avaliação que se realiza dos resultados e os diferentes sujeitos que interagem em dito processo. Evidentemente, os elementos do grupo poderiam atuar com uma atitude de conflito, mas então não se trataria de uma decisão de grupo, senão de resolver um problema de Teoria de Jogos, no qual os integrantes competem entre si, tema que falaremos mais adiante.

No entendimento de Bueno (2004), um problema de decisão de grupo exige como premissa a atitude cooperativa dos integrantes, a fim de eleger uma alternativa que *maximize* sua utilidade conjunta. E essa forma de cooperação ou, em termos gerais, de interação, pode ser de diferentes formas:

Quadro 1**:** formas de interação de decisão em grupo e seus conceitos

Tipo de interação	**Conceito/Definição**
Democracia Total	Um sujeito, um voto; todos os elementos do grupo têm o mesmo peso específico sobre a decisão conjunta.
Democracia Parcial	Os indivíduos votam segundo sua categoria (divisão em classes), e tem pesos específicos. Os indivíduos têm associado um valor específico para cada um de seus votos.
Oligarquia	Somente uma parte dos sujeitos afetados tem direito a voto; o resto não, ou seja, só uma parte decide, e todos os afetados assumem as consequências da decisão.
Ditadura Total	Somente um indivíduo tem direito a voto, e, portanto, ele decide, mas as consequências afetam a todo um coletivo que as assumem.

Ditadura Parcial	Somente um indivíduo tem direito a voto, mas antes de eleger escuta aos outros indivíduos sem voto, cuja informação servirá para eleger a decisão que seja melhor para eles; apesar da decisão ser individual, se busca o proveito coletivo.
Ditadura Condicionada	O grupo deixa um indivíduo ser o ditador sempre, e quando os resultados são satisfatórios.

Fonte: Própria do autor

Numa primeira aproximação, poderíamos assimilar os repartos de resultado à influência de cada um dos membros, e, portanto considerar que em uma democracia total o resultado obtido se reparte equitativamente, e na ditadura, todo o resultado é recebido pelo ditador. Mas temos de ter em conta que isto nem sempre é certo. Em qualquer caso, os repartos dos resultados entre os integrantes de um grupo, devem se fixar a priori; isto é, no intervalo de decisão prévio a adoção da decisão. Resultaria impossível que os integrantes do grupo assumissem as consequências das decisões sem a existência de um pacto prévio, com base nos lucros ou prejuízos provenientes da decisão.

Tradicionalmente, os repartos de resultados tendem a estar indicado pelo risco que corre cada um dos integrantes do grupo; ou seja, para que um grupo obtenha uma utilidade, é preciso que aposte uma determinada quantidade, com a esperança de receber uma quantidade superior.

Até o momento, todos as formulações das tomadas de decisões ocorreram com base em monocritérios, ou seja, um critério por vez, entretanto, na vida real ocorre por diversas vezes, a possibilidade de utilização de vários critérios na hora de tomar decisões. De fato, o enfoque monocritério pode ser considerado, segundo Bueno (2004), como um caso particular do enfoque multicritério. Ademais, necessitamos detalhar alguns conceitos:

- *Atributo* - É qualquer valor que se possa medir e susceptível de ser objeto de otimização.
- *Objetivo* - É a direção em que se deseja otimizar um ou vários atributos (maximização ou minimização).
- *Nível de Aspiração* - É o nível de realização para um determinado atributo.
- *Meta* – É a combinação de um atributo com um nível de aspiração.
- *Critério* – Se entende por critério, a combinação dos atributos, objetivos ou metas que se considerem relevantes para um problema de decisão. Um critério, portanto, englobarão os três conceitos prévios: de atributo, objetivo e meta.

É importante, ainda, que façamos a distinção entre *meta* e *restrição.* Ainda que a formulação que desenvolveremos seja a mesma, o sentido da problemática decisional será diferente. Por exemplo, se estabelecemos como atributo o quadro de pessoal de uma empresa com o nível de aspiração, 200 pessoas, e como objetivo a minimização de tal quadro, ou seja, $(x_1 \leq 200)$, se esta expressão representa o nível mínimo que deva alcançar para se considerar possível a solução, e por nenhum motivo se possa superar, estaríamos falando de uma *restrição* que sempre deve ser cumprida.

Entretanto, se a expressão anterior representa um nível de aspiração relativo a uma *meta***,** o nível anterior pode ser alcançado ou não, no sentido de que pode sobrepassar dentro do contexto global do problema. Assim que, podemos dizer que uma meta é uma restrição branda que pode ser violada.

1.3. TEORIA DE JOGOS

Todos os problemas que vimos até este momento, sejam eles de eleição e/ou decisão são problemas nos quais não existem conflitos de interesses, decisões conflitivas ou competitivas. Quando aqui nos referimos a conflitos, nos referimos tanto aos individuais quanto aos coletivos.

Os conflitos surgem de forma natural, quando os diferentes sujeitos têm *distintas preferências* e os resultados da eleição supõem consequências antagônicas para eles. Ademais, é preciso exigir que os problemas possam ser analisados quantitativamente, (Bueno, 2004), pois em caso contrário, seria complicado chegar a encontrar a estratégia adequada para cada parte.

A problemática da eleição e da tomada de decisões, quando existe conflito entre diferentes sujeitos, surge do fato de que é preciso tomar uma ou várias decisões sem conhecer as reações dos outros perante elas, estes tipos de decisões se correspondem com uma parte do que conhecemos como *Teoria de Jogos* (TJ), na qual se formula a atuação de dois ou mais concorrentes, dos quais podemos conhecer ou não qual pode ser seu comportamento ante o problema suscitado. Contudo, em alguns dos casos também se pode pensar a atuação de um sujeito frente a ele mesmo, como por exemplo, um velocista que tenta bater um recorde.

Um dos objetivos da TJ é o estabelecimento de modelos matemáticos formulados para estudar situações nas quais existe conflito, e consequentemente uma negociação entre os diferentes participantes ou sujeitos intervenientes neste tipo de problema de decisão. Estes modelos englobam conceitos que se podem interpretar como propriedades de ações reais. Quando isto ocorre, temos um modelo matemático de uma situação real. Para Singleton e Tyndall (1977), a TJ possui as principais características requeridas por uma teoria matemática para que seja considerado um modelo de dita situação:

1. O estabelecimento de uma identificação que pareça intuitivamente satisfatória e que permaneça satisfatória à medida que se acumula um posterior conhecimento empírico, e como o sistema matemático, vai se desenvolvendo.
2. Que a mesma matemática contribua com a teoria em alguma forma, independente de sua mera clareza de expressão.
3. A inclusão de relações que satisfaçam nossa necessidade de explicação.

Atualmente, a TJ se ocupa, sobretudo, de analisar o que ocorre quando os homens se relacionam de forma racional. Para Rufasto (2003), a TJ é também a teoria das situações sociais e se ocupa de estudar interações entre seres pensantes. Para este autor, quiçá esta seja a descrição mais exata do que realmente trata esta teoria. Para Morton (1971), a TJ é um modelo matemático para tomar decisões em situações de conflito ou desequilíbrio, simplificando problemas, através de jogos, os quais estão inscritos num conjunto de regras (explicitas ou não, formais ou não), com o objetivo de se obter um certo beneficio, que permitirá compreender o conflito e suas possíveis soluções, ou seja, em situações complexas de rivalidade e de ação ou reação incertas, que podem ser transformadas por meio de ferramentas matemáticas em formulações simples e de análise direto.

Depois de nossas leituras sobre a TJ, tal e como definida por autores como Singleton e Tyndall (1977), Rufasto (2003), Morton (1971), por exemplo, podemos conceituá-la como uma maneira formal de predizer, por exemplo, qual será o resultado certo ou mais provável de uma disputa entre indivíduos que interagem de forma estratégica.

O quadro abaixo traz uma breve retrospectiva histórica da TJ desde sua origem até a concessão do Nobel de economia por trabalhos nesta área.

Quadro 2: Breve retrospectiva histórica da Teoria de Jogos

Autor	Estudos
Waldegrave (1713)	Contribui com a primeira solução a um jogo de estratégia bipessoal com o critério minimax.
Cournot (1838)	Utiliza como solução de um duopólio, o que mais tarde se denominou Equilíbrio de Nash.
Edgeworth (1881)	Propõe uma curva como solução ao problema de uma operação comercial entre dois sujeitos.
Zermelo (1913)	Demonstra o primeiro teorema da TJ, com relação ao jogo de xadrez.
Borel (1921-1927)	Contribui com a primeira formulação moderna de uma estratégia mista baseada na solução minimax.
Von Neumann (1928)	Consegue demonstrar o teorema minimax e aplica a TJ à ciência econômica.
Zeuthen (1930)	Propõe uma solução ao problema de negociação.
Von Neumann e Morgenstern (1944)	Formulam uma nova metodologia para a resolução dos problemas do comportamento humano e percebem que esta coincide com os princípios matemáticos aplicados para resolver os jogos de estratégia, atribuindo o nome de TJ a esta metodologia, também incorporam e sistematizam o conceito de função utilidade e introduzem o conceito de jogos cooperativos com transferência de utilidade.
Morse (1945)	Aplica a TJ à tomada de decisões na guerra com submarinos.
Tucker (1950)	Formula e introduz o conhecido jogo do Dilema do Prisioneiro.
Nash (1950-1953)	Realiza importantes contribuições à TJ nos jogos cooperativos e nos de negociação, provando a existência de um equilíbrio estratégico.
McKinsey (1952)	Publica o primeiro livro de texto sobre a TJ.
Shapley (1952-1953)	Demonstra que as estratégias ótimas dependem somente do jogo que se está jogando, e não da informação histórica anterior, ou seja, as estratégicas são estacionárias.
Shapley e Shubik (1954)	Publica as primeiras aplicações da TJ à economia política.
Braithwaite (1955)	Realiza as primeiras aplicações da TJ à filosofia.
Aumann e Peleg (1960)	Desenvolvem os jogos sem transferência de utilidade.

Lewontin (1961)	Desenvolve a primeira aplicação da TJ à biologia evolutiva.
Shubik (1962)	Formula as primeiras aplicações da TJ à distribuição de custos.
Elster (1983)	Formula a aplicação da TJ na conduta humana.
Elster (1989)	Publica o Jornal Games and Economic Behavior.
Braid e Gertner (1994)	Publica um livro em leis e economia que aproxima a TJ a outras leis.
(1994)	Nash, Harsanyi e Selten, ganham o Nobel de Economia.

Fonte**:** Própria do autor

1.3.1. Conceitos Básicos da Teoria de Jogos

Um dos primeiros conceitos básicos definidos nesta Teoria é o de *jogo*. Um jogo é considerado como um modelo quando duas ou mais pessoas atuam e tomam decisões, e cuja estrutura está inscrita em um conjunto de regras (explicitas ou não; formais ou não), com o propósito de obter certo beneficio. Cada decisão e ação combinadas determinarão uma *situação de decisão*.

Os conceitos importantes que entrevêem nesta definição e que podemos encontrar, por exemplo, nos estudos de Moura (2003) e também de Bueno (2004) são:

- *Jogadores* - São os indivíduos que levam a cabo as decisões. O objetivo de cada jogador é maximizar sua utilidade mediante ações para este fim.
- *Ações e estratégias* - Uma ação ou movimento, uma eleição que pode fazer um jogador, sendo que as ações são observáveis e as estratégias não. Quanto às estratégias, estas podem ser:
  - *Puras* **-** Implicam decisões que se tomam com certeza e;
  - *Mistas* **-** Implicam uma combinação de decisões tomadas de acordo a uma série de probabilidades, cuja soma deve ser 100%.
- *Pagos* - Cada situação particular oferece uma combinação de prêmios. Estes prêmios estão em conformidade com a utilidade que cada jogador recebe por cada uma das possíveis combinações de estratégias que puderam ser escolhidas.
- *Valor do jogo* - É o pago que um jogador tem garantido para receber de um jogo, do qual decide participar, independentemente do que façam os demais jogadores.

- *Função de utilidade* **-** A função de utilidade converte os pagos em bem estar.
- *Conduta de um jogador* - Se requer tipificar a conduta de cada jogador, de maneira que se possa saber de que forma provável ou certa como ele se comportará. A regra básica da análise de jogos é que "cada jogador buscará o máximo bem estar possível".
- *A solução e o valor da solução de um jogo* **-** É a combinação de ganhos ou perdas que dá o jogo. A TJ mostra que a interação dos jogadores gerará uma situação mais provável ou um conjunto de situações igualmente prováveis.
- *Equilíbrio* **-** Em sua forma mais axiomática, este conceito é introduzido como critério de solução dos jogos de duas pessoas ou de par. Supõe-se neste modelo que os jogadores enfrentam uma mesma situação de decisão, em que os mesmos estão envolvidos coletivamente e ademais, que cada um deva decidir sua atividade individualmente, mas as consequências estarão determinadas pela ação coletiva, ou seja, pelo par de atividades que empreendam os jogadores. O conceito de equilíbrio mais utilizado é o Equilíbrio de Nash.
    - *Equilíbrio de Nash* (formulado por John Nash) é um modo de obter uma estratégia ótima para jogos que envolvam dois ou mais jogadores. Se há um conjunto de estratégias tal que nenhum jogador se beneficia mudando-as, enquanto os outros não troquem as suas, então esse conjunto de estratégias e os ganhos correspondentes constituem um equilíbrio de Nash. Assim, por definição, se diz de uma combinação de estratégias (uma por jogador) que está em equilíbrio de Nash se nenhum jogador possa aumentar seus ganhos por uma troca *unilateral*[12] de estratégia. Assim, é bastante possível que em um equilíbrio de Nash a situação se possa melhorar para todos, por meio de uma troca simultânea de estratégia por parte de vários jogadores.
- *Ordem dos movimentos no jogo* **-** Um jogo pode ser de movimentos simultâneos ou sequenciais.
- *Representação dos jogos* **–** Os jogos podem ser representados de:

[12] Na definição de equilíbrio de Nash o adjetivo "unilateral" ocupa um lugar essencial, isso traduz o caráter *não cooperativo* das eleições individuais (o "cada qual por si").

- *Forma extensiva* – Quando a representação na forma extensiva mostra cada movimento individual que cada jogador pode fazer, especificando-se a ordem do jogo, a informação, as eleições disponíveis e as utilidades de cada jogador ante as diferentes combinações de estratégias.
- *Forma normal ou estratégica* - Quando uma descrição sintetizada de um jogo com dois jogadores que decide seu plano de ação em forma simultânea.

▪ *Ferramentas de análise da Teoria de Jogos* - existem diferentes ferramentas para modelar e analisar um jogo, entre elas se destacam:

- *Matriz de Pagos* – A análise matricial corresponde à expressão mediante matrizes das situações que possam ser geradas pelas alternativas de decisão e ação de dois jogadores, a qual apresentará as diversas opções de decisão e ação de cada jogador e as resultantes situações particulares. A combinação da alternativa eleita por um jogador e a alternativa eleita por outro cria um único ponto de coordenadas (decisão do jogador A, decisão do jogador B). A situação particular definida por esse ponto tem um valor, que é a combinação de prêmios obtida pelos dois jogadores.
- *Árvore de Resultados Sucessivos* – Um diagrama de árvore de resultados sucessivos se utiliza em jogos que implicam sequências de movimentos (um movimento é um binômio decisão-ação). Nesta árvore, se define um ponto de partida e a partir daí se estenderão ramas que representam os diferentes movimentos que podem realizar os jogadores, com cada um dos diferentes movimentos ou ramas definindo os resultados de pagos, os quais poderão servir como ponto de partida em novas decisões. O processo se repete até completar o número de movimentos que os jogadores podem realizar.

1.3.2. Tipos de Jogos

Em conformidade com Morton (1971), Peleg (1985), Owen (1995), Moura (2003) e também com Bueno (2004), entre outros, temos que a depender do que se pretenda modelar e dos diversos níveis de informação com que se conte, os jogos podem ser classificados em diferentes tipos:

- *Jogo Dinâmico* - Quando um jogador tem a possibilidade de observar os movimentos do outro e reagir em consequência, isto é, naqueles que ocorrem em mais de um período.
- *Jogo estático* - Quando as ações de ambos são tomadas simultaneamente.
- *Jogos Repetitivos* **-** Os modelos destes jogos estão desenhados para examinar a lógica da interação em longo prazo. Este tipo de modelo captura o fato de que um jogador atua tendo em conta que seu comportamento atual afeta o comportamento futuro dos outros jogadores. Ademais, busca explicar fenômenos, como a cooperação, a vingança e as ameaças.
- *Jogos de soma nula* **-** São jogos em que a soma total dos benefícios assegurados por todos os jogadores é sempre igual a zero (ou seja, um jogador somente pode ganhar se outro perder). O xadrez e o pôquer são bons exemplos, pois cada jogador ganha precisamente o que o outro perde.

No tocante às informações, podemos ter:

- *Informação completa* - Se a matriz de pago é conhecida de antemão pelos jogadores.
- *Informação incompleta* - Se ao menos algum deles não conhece com certeza as utilidades ou as diferentes estratégias que enfrenta.

Adicionalmente, dentro dos jogos dinâmicos, se podem diferenciar em jogos com:

- *Informação perfeita* - Quando o jogador conhece os movimentos do outro.
- *Informação imperfeita* - Quando o jogador não sabe qual foi à estratégia eleita pelo outro jogador.

Desta maneira, podemos ter muitas combinações entre o tipo de jogo e informação:

- *Jogos Dinâmicos com Informação Completa* **-** Um jogo extensivo ou dinâmico é uma descrição detalhada da estrutura sequencial dos problemas de decisão. Um jogo extensivo especifica a possível ordem dos eventos. Um jogador pode considerar seu plano de ação não só no começo do jogo, como também a qualquer momento em que tenha que tomar uma decisão.
- *Jogos Estáticos com Informação Completa* **-** Um jogo estratégico é um modelo de decisão no qual cada jogador decide seu plano de ação uma vez e para sempre, e estas decisões se fazem de forma simultânea.

- *Jogos Dinâmicos com Informação Incompleta* **–** Somente um dos jogadores possui a informação (privada), enquanto que o outro não.
- *Jogos Estáticos com Informação Incompleta* **–** O fato de a matriz de pagos não ser totalmente conhecida por, ao menos, um dos jogadores, incorpora um elemento de incerteza às estratégias que os agentes enfrentam, e a dita incerteza é capturada por uma medida de probabilidade do conjunto de possíveis estados. Estes jogos são conhecidos como jogos Bayesianos.

1.3.3. Classes de Jogos

A Teoria de Jogos se estrutura em duas grandes classes; os *jogos cooperativos* e os *não cooperativos.* Suas diferenças residem nos acordos vinculantes entre os indivíduos envolvidos numa situação e no tratamento que receberão.

A primeira estrutura fundamental para o estudo da TJ é a dos *jogos cooperativos* ou coalizacionais. Nessa estrutura se supõe que os jogadores dispõem de mecanismos que lhes permitam firmar acordos vinculantes, e se assume também que se podem obter algum beneficio de tal cooperação. O interesse radica então no resultado que os jogadores podem obter de forma individual e de forma conjunta, ainda que não se indique a forma pela qual se obterá o dito resultado. Concretamente, a questão central neste tipo de jogo está na definição de conceitos de solução, que indiquem como repartir, entre os jogadores, o ganho gerado pela cooperação entre todos eles. Por suposto, sob uma estrutura como a dos jogos cooperativos, um acordo de cooperação pode não ser a "solução", de maneira que os agentes devem ter uma estrutura de informação sobre certa valoração, a priori, das coalizões nesta valoração. Através da função característica (que atribuirá a cada coalizão o ganho que pode obter se seus membros decidem cooperar), é que se reconhece qual coalizão é a mais "valiosa" e qual não é. (Peleg, 1985), Owen (1995) e Moura (2003).

Dentro dos jogos cooperativos, distinguimos as seguintes classes:

a) *Jogos cooperativos com utilidade transferível (TU)* - Supor que a utilidade é transferível, quer dizer que os pagos de cada coalizão podem se distribuir de qualquer forma entre seus membros, e que o mais importante não é o fato de como se pode repartir, senão o que se pode repartir. Daí o nome utilidade transferível. (Peleg, 1985).

Exemplo - Suponha que três jogadores, A, B e C, tenham que repartir entre eles \$100. O sistema de reparto tem que ser uma das quatro possíveis coalizões vencedoras: ABC, AB, BC e AC, mas há infinitas formas de repartir os pagos entre os três jogadores.

b) *Jogos cooperativos sem utilidade transferível (NTU)* – Supor que a utilidade é não transferível é o mesmo que dizer que o pago de cada coalizão não se pode distribuir de qualquer forma entre seus membros. Quando se renuncia a utilidade transferível, já não resulta possível descrever os pagos de que dispõe uma coalizão em particular, como a soma da utilidade que esse grupo poderia obter, cabendo então, uma nova reformulação da função característica (Peleg, 1985).

Exemplo – Suponha que três jogadores, A, B e C, tenham que repartir entre eles uma casa. Acontece que este reparto não é possível, uma vez que os jogadores se veem na obrigação de renunciar a utilidade transferível para obtenção de seus pagos individualmente. A utilidade de uma sala ou de uma cozinha para o sujeito A, por exemplo, não é a mesma que para B, daí que o objeto em disputa não pode ser dividido e, portanto, não pode ser calculada a utilidade individual.

A segunda estrutura fundamental para a TJ (a mais dominante dentro do pensamento econômico) é a dos *jogos não cooperativos*, na qual, basicamente, temos um conjunto de jogadores, cada um com umas estratégias a sua disposição, e umas retribuições de pagos que recebem por levar adiante tais estratégias. A característica “não cooperativa” está na maneira de como elegem e no que sabem dos outros jogadores quando estes elegem também. Em geral, se supõe que os indivíduos tomam suas decisões independentemente uns dos outros, ainda que conhecendo seus oponentes e as possíveis estratégias que estes têm a sua disposição, isto é, são indivíduos egoístas, mas que tratam de prever o que os outros agentes farão. Nesta estrutura de análise, os agentes não alcançam nenhum nível de cooperação. Peleg, (1985), Owen (1995) e Moura (2003).

Vejamos o seguinte exemplo, ele é bem ilustrativo do *modus operandi* do tipo de modelo que acabamos de descrever, chama-se o *dilema do prisioneiro,* o qual foi formalizado e analisado pela primeira vez por Tucker, em 1950, e é possivelmente o jogo mais conhecido e estudado na TJ. Baseado nele foram elaboradas outras tantas variações, muitas delas com base na repetição do jogo.

Dilema do Prisioneiro: A história deste jogo se passa como segue: Dois delinquentes são detidos e encarcerados em celas isoladas, sem que haja comunicação entre eles. O delegado suspeita que eles participaram do roubo do banco, delito cuja pena é de dez anos de cárcere, mas não há provas que os incriminem. Somente tem provas e pode culpá-los de um delito menor, porte ilegal de arma de fogo, cujo castigo é de dois anos de cárcere. O delegado promete a cada um que reduzirá sua condenação, se algum deles proporcionar as provas para culpar o outro do roubo. A situação se resume na seguinte matriz de pagos. A estratégia "lealdade" consiste em permanecer em silêncio e não proporcionar provas para acusar ao companheiro. Chamaremos de "traição" a outra estratégia.

Tabela 4: Matriz de pagos para o jogo dilema do prisioneiro

Anos de prisão			
		Preso Y	
		Lealdade	Traição
Preso X	Lealdade	(2, 2)	(10, 0)
	Traição	(0, 10)	**(8, 8)**

Fonte: Adaptado de Owen (1995)

Ambos têm duas alternativas: cooperar (ser leal) ou não cooperar (trair). Eles sabem que se nenhum confessa, cada um irá à prisão por dois anos (pena pelo porte ilegal de arma). Mas, se um dos dois trair e o outro não, então o que traiu ficará livre e o que foi traído receberá a condenarão de 10 anos. Se ambos decidem trair mutuamente, os dois irão à prisão por oito anos.

A pergunta natural é: que farão os detidos? Cooperarão entre si (não confessarão) ou um entrega ao outro (confessarão)? Alguém desprevenido que esteja observando este jogo poderia pensar que os dois jogadores cooperarão (não confessarão), posto que nesse caso, ambos obteriam o menor castigo possível. Entretanto, a estrutura não cooperativa do problema faz que este acordo não seja pensado, se pactuarem a não confissão, ambos teriam incentivos particulares para rompê-lo, pois deixando ao outro em cumprimento do pacto de não confessar, e o outro confessando, o que rompe o pacto obtém a liberdade enquanto ao outro, o condenarão a 10 anos. E, similarmente, estudando as outras três possibilidades do jogo (ou seja, (l, t), (t, t), (t, 1)) observamos que o único acordo possível (que significa que nenhum dos dois queira romper o pacto unilateralmente porque perderia) é (t, t). Em definitivo, a previsão do que ocorrerá no jogo é que ambos confessem e permaneçam na cadeia por oito anos, determinando assim o equilíbrio de Nash (8,8).

A conclusão em situações similares a esta (muito comuns na vida cotidiana) é que a concorrência egoísta (Elster, 1989, 1995 e 2003) pode conduzir a estados que são inferiores (em termos de benefício pessoal e social) aos estados cooperativos, mas que estes últimos não poderão se implementar, a menos que existam reforços externos (contratos firmados por lei) que obriguem as partes a cumprir com o acordo de cooperação.

Esta é a ideia essencial de Nash ao definir o conceito de equilíbrio de um jogo, que é um acordo que nenhuma das partes pode romper a discrição sem perder. Quer dizer, se alguém quiser romper o pacto e o fizer unilateralmente, se arriscaria a ganhar por baixo do que houvesse ganhado dentro do pacto. Assim, ambos se delatariam mutuamente e cada um deles passaria 8 anos na prisão. É o único equilíbrio de Nash do jogo. Observa-se que existe uma forma de atuar dos dois jogadores, que melhora a ambos (que nenhum deles delate ao outro), mas, como ambos ganham se desviam unilateralmente dela, num contexto puramente não cooperativo, em que os acordos vinculantes são inviáveis, esse perfil de estratégias construtivo não ocorrerá na prática.

Evidentemente, se os prisioneiros tivessem previsto de antemão a possibilidade de serem capturados e houvessem estabelecido algum tipo de acordo, o jogo se converteria em cooperativo, e ambos se vinculariam ao não delatar o contrário e acabariam passando dois anos na prisão. Dito de outra forma, a cooperação favorece os interesses dos agentes, de forma individual e de forma conjunta.

Não obstante, podemos dizer que os dois enfoques, cooperativos e não cooperativos podem, e incluso devem, ser combinados. Neste sentido, Nash assegura que a TJ cooperativa e não cooperativa são complementares, já que cada uma ajuda a justificar e clarificar a outra. A esta combinação se denomina Programa de Nash. O Programa Nash busca a possibilidade da unificação teórica, ou seja, a obtenção de equilíbrios nos acordos vinculantes.

1.3.4. Estratégias de Jogos: Maximin e Minimax

A regra de decisão, que o conduzirá à eleição do maior dos valores mínimos em que pode resultar cada estratégia, se chamará *estratégia maximin*. Em contrapartida, se estes valores mínimos representarem para o outro jogador o maior dos piores dos pagos, sua eleição ótima será a estratégia que lhe proporcione a menor perda possível, ou seja, a *estratégia minimax*. (Bueno, 2004).

Exemplo - Considere um jogo de soma zero. Cada jogador dispõe de três estratégias possíveis as quais designaremos como A, B, e C. Os pagos consistem na distribuição de 10 moedas que se repartirão segundo as estratégias eleitas por ambos os jogadores, e se mostram na seguinte matriz de pagos. Para qualquer combinação de estratégias, os pagos dos jogadores somam dez. Então, se eu jogo C e o outro jogador elege B, então eu recebo 8 moedas e o outro jogador receberá 2. Observe que o que gana um jogador é exatamente o que deixa de ganhar o outro.

Uma forma de analisar o jogo para tomar minha decisão consiste em olhar qual é o *mínimo r*esultado que posso obter com cada uma de minhas cartas. Na seguinte matriz se acrescenta uma coluna indicando meus resultados mínimos.

Tabela 5: Matriz de pagos para estratégia minimax

		Estratégia do outro jogador			
		A	**B**	**C**	Mínimos
Minha estratégia	A	9	**1**	2	1
	<u>**B**</u>	6	5	**4**	<u>**4**</u>
	C	7	8	**3**	3

Fonte: Adaptado a Owen (1995),

Em efeito,

- Se eu elejo a opção A, posso obter 9, 1 ou 2, logo, como mínimo obterei um resultado de <u>1</u>.
- Se eu elejo a opção B, posso obter 6, 5 ou 4, logo, como mínimo obterei <u>4</u>.

- Se eu elejo a opção C, posso obter 7, 8 ou 3, logo, como mínimo obterei 3.

De todos esses possíveis resultados mínimos, o que prefiro é 4, já que é o *máximo dos mínimos*. A estratégia *maximin* consiste em eleger a opção B, já que essa estratégia me garante que, como mínimo, obterei 4.

A pergunta agora é: podemos prever a estratégia do outro jogador? Suponhamos que o outro jogador queira eleger também sua estratégia maximin. A matriz a seguir mostra somente os pagos atribuídos ao outro jogador, em que destacamos o pago mínimo que se pode obter para cada uma de suas estratégias.

Tabela 6: Matriz de pagos individual para estratégia minimax

		Estratégia do outro jogador		
		A	B	C
Minha estratégia	A	1	9	8
	B	4	5	6
	C	3	2	7
	Mínimos	1	2	6

Fonte: Adaptado a Owen (1995),

Em efeito,

- Se ele elege A, seu pior resultado seria se eu elejo A, com o que eu obteria 9 e ele 1.
- Se ele elege B, seu pior resultado seria se eu elejo C, com o que eu obteria 7 e ele 2.
- Se ele elege C, seu pior resultado seria se eu elejo B, com o que eu obteria 6 e ele 6.

Sua estratégia maximin consiste, portanto, em jogar C com o que se garantiria que, ao menos, obterá 6.

Um dos jogos em que também se pode calcular as estratégias maximin e minimax são os *jogos de soma não nula* e os *jogos de negociação*. Para os primeiros, tem-se que são os jogos em que o triunfo de um jogador não supõe exatamente a derrota dos demais jogadores, ou seja, os jogadores podem ganhar ou perder algo, ambos ao mesmo tempo. A criação de riquezas ou de um excedente de produção são exemplos de jogos de soma não nula. O dilema do prisioneiro, tal como foi descrito, também é um jogo de soma não nula. Já os *jogos de negociação* representam o conjunto dos resultados das utilidades alcançáveis pelas partes implicadas, junto com um certo resultado de desacordo correspondente, quando na negociação os envolvidos não são capazes de um acordo unânime. Nestes jogos, dois ou mais jogadores buscam ganhar através da cooperação, mas devem negociar o procedimento e a forma que dividirão os ganhos desta cooperação (ELSTER, 2003). Um exemplo dos jogos é a “a guerra dos sexos”. Vejamos:

Existem dois jogadores: “ele” e “ela”. Cada um deles pode eleger entre duas possíveis estratégias as que chamaremos “futebol” e “teatro”. Suponhamos que a ordem de preferências dele é a seguinte:

- Ele e ela elegem futebol. (O mais preferido)
- Ele e ela elegem teatro.
- Ele elege futebol e ela elege teatro.
- Ele elege teatro e ela elege futebol. (o menos preferido)
- E a dela é a seguinte:
- Ele e ela elegem teatro. (O mais preferido)
- Ele e ela elegem futebol.
- Ele elege futebol e ela elege teatro.
- Ele elege teatro e ela elege futebol. (o menos preferido)

A matriz de pagos é como segue:

Tabela 7: Matriz de pagos para o jogo simétrico guerra dos sexos

		ELA	
		Futebol	Teatro
ELE	Futebol	1/2	3/3
	Teatro	4/4	2/1
Os pagos representam a ordem de preferências			

Fonte: Adaptado a Owen (1995),

Este jogo, tal como descrito, é um jogo sem repetição e sem transferência de utilidade. Sem repetição significa que só se joga uma vez, pelo que não é possível tomar decisões em função da eleição que tenha feito o outro jogador em jogos anteriores. Sem transferência de utilidade, significa que não há comunicação prévia pelo que não é possível chegar a um acordo, negociar nem acordar pagos secundários (se vier ao teatro comigo te pago a entrada). O problema que se formula é simplesmente um problema de negociação. Trata-se de se por de acordo na eleição. No caso de não haver comunicação prévia, é possível que o resultado não seja ótimo. Se cada um dos jogadores elege sua estratégia maximin, o pago que receberão será (3/3). Mas, essa solução não é um equilíbrio de Nash, já que os jogadores estão tentados a mudar sua eleição: quando ela chegar do teatro e observar que ele foi ao futebol, sentirá o desejo de mudar de estratégia para obter um pago maior, e com ele ocorrerá o mesmo.

O modelo anterior é um jogo simétrico, já que os jogadores ou a estratégias são intercambiáveis sem que os resultados variem. Podemos introduzir uma interessante modificação no jogo convertendo-o em assimétrico, quando o aproximarmos do mundo real. Suponhamos que as posições 2 e 3 na ordem de preferências dele se inverta, ele prefere ir sozinho ao futebol mais do que ir com ela ao teatro, passamos a ter, então, a seguinte matriz de pagos:

Tabela 8: Matriz de pagos para o jogo assimétrico guerra dos sexos

		ELA	
		Futebol	Teatro
ELE	Futebol	1/2	2/3
	Teatro	4/4	3/1
Os pagos representam a ordem de preferências.			

Fonte: Adaptado a Owen (1995)

Se ela conhece a matriz de pagos, ou seja, a preferência dele, o problema desaparecerá. Está claro que ele elegerá sempre a estratégia futebol, seja qual for à eleição dela. Em uma das soluções deste jogo (muito machista) se apresenta que ela elegerá sempre a estratégia futebol também, já que prefere estar com ele, ainda que seja no futebol, do que estar sozinha no teatro. Se a estratégia maximin de ambos jogadores coincidem, teremos o que se conhece por *ponto de silla*[13]. Se esta suposição se concretiza, o resultado é um ótimo, uma solução estável, um equilíbrio de Nash. Para este caso, a negociação, evidentemente, é a comunicação, se percebe que nos casos de alguns jogos de duas pessoas com soma diferente de zero (como é a guerra do sexo),

[13] Matematicamente se define como sendo um ponto de uma função na que a primeira derivada é nula, enquanto que o sinal da segunda derivada (curvatura) depende da direção em que se calcule. Se em um ponto de uma função de duas variáveis f(x,y) o gradiente é zero, só pode tratar de um máximo ou de um mínimo.

se pode chegar a uma negociação de acordo com algum padrão de distribuição equitativa, baseado na posição estratégica dos jogadores, ainda quando a utilidade não seja transferível.

1.4. UM POUCO SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Diversas vezes, resulta-nos difícil entender que todos os eventos vividos guardam certa relação com a tomada de decisões, e sempre há que se ter em conta que cada pessoa enfrenta a resolução de problemas de uma forma diferente. Na maioria das situações, há muitas soluções possíveis que variam segundo o grau de complexidade e de dedução do sujeito. Deste modo, as situações problemas oferecem inúmeras facetas, cada uma das quais pode implicar mais e mais problemas.

1.4.1. Algumas Definições

Sobre o que vem a ser um problema, Polya (1965) o define como "a busca de forma consciente, uma ação apropriada para lograr um objetivo claramente concebido, mas não alcançável de forma imediata". Outros estudiosos vão nessa mesma direção ressaltando o fato de que o problema só é problema quando não se tem um método ou um recurso ou uma estratégia ou um algoritmo para a sua solução (García Cruz, 2004; Vianna, 2002).

Há uma diferença básica entre o conceito de exercício e problema. Uma coisa é aplicar um algoritmo de forma mecânica, evitando as dificuldades que introduz a aplicação de regras complexas, e outra, resolver um problema, dar uma explicação coerente a um conjunto de dados relacionados dentro do contexto. A resposta costuma ser única, mas a estratégia resolvedora está determinada por fatores de maturidade ou de outro tipo. (Perales, 2000)

Perales (2000) compreende que a grande finalidade da Resolução de Problemas (RP) é a de possibilitar ao sujeito a incorporação de argumentos sociais, aproximando sua atividade acadêmica à vida real, fonte de contínuas "situações problemáticas", e incluindo a própria tomada de decisões, aspectos essenciais para a integração plena dos sujeitos nos contextos sociais, culturais e do trabalho.

Perales (op. cit.) e García Cruz (2004) entendem que a RP é a capacidade que tem uma pessoa de empregar os processos cognitivos, afetivos ou sensomotores para enfrentar e resolver situações interdisciplinares reais, em que a via de solução não resulta óbvia de modo imediato, e nas quais as áreas de conhecimento ou curriculares aplicáveis não se modulam dentro de uma única área da matemática, ciências ou leitura.

Para estes autores, resolver um problema não é mais que levar a situação real e desejada a um mesmo ponto, e que a decisão é o primeiro passo para a ação e constitui a ponte que converte os desejos em realidades.

Para continuar com a conceituação da RP, Perales (1998) nos apresenta outros termos interligados a esta, tais como: análise do problema, solução, resultado, problemas cotidianos e problemas acadêmicos. Centralizando nestes dois últimos termos, podemos construir um quadro comparativo, em conformidade com Perales (1998), das principais diferenças entre ambos.

Quadro 3: Problemas acadêmicos *versus* problemas cotidianos

Resolução de problemas acadêmicos	**Resolução de problemas cotidianos**
1. O surgimento do problema é intencionado;	1. O surgimento do problema é espontâneo;
2. A solução ou resultado costuma ser conhecido antecipadamente;	2. A solução ou resultado é desconhecido ou nem sequer sabe se existe;
3. Os dados de partida do problema são conhecidos;	3. Não se conta com todos os dados iniciais, pelo que se devem buscar expressamente;
4. As diferenças entre veteranos/novatos não costumam serem grandes.	4. As diferenças entre veteranos/novatos possuem uma magnitude maior.

Fonte: Perales (1998)

Daí, Perales (1998) encontra algumas semelhanças entre os processos de RP, nestes dois âmbitos:

a) Que as possíveis consequências negativas de uma deficiente capacidade para resolver problemas estão presentes em ambos.
b) Que os requisitos mínimos para a RP são basicamente os mesmos, ou seja, o conhecimento declarativo, o procedimental e o atitudinal.

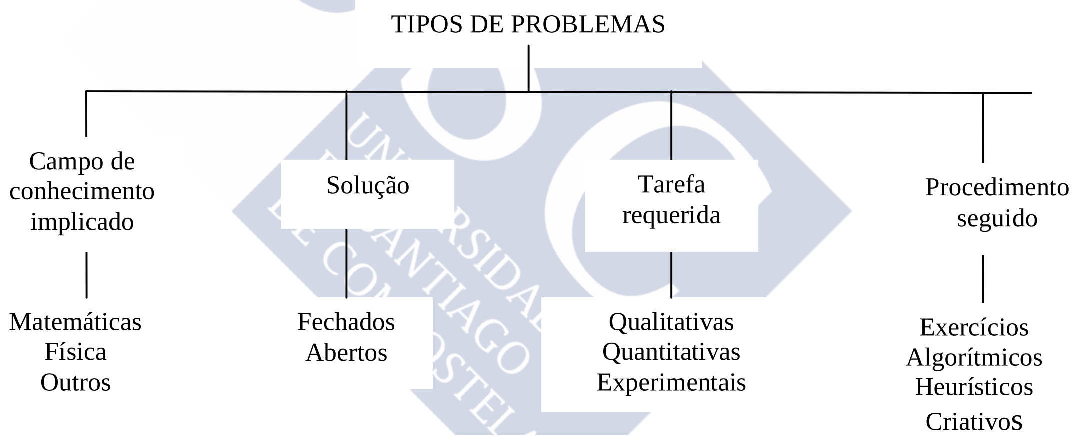
Outro autor, García Higuera (2004) ressalta que a RP é a exibição de qualquer conduta que traga como resultado a satisfação dos desejos, que não parecem ser alcançados quando eles surgem.

No contexto da tomada de decisão, Montes (2005) e García Higuera (2004) observam que a tomada de decisões para resolver problemas está implícita numa teoria geral: a resolução de problemas do ser humano, a qual busca entender:

- Diferentes tipos de gente com problemas (veteranos/novatos, aprendizes com baixo ou alto rendimento, infantis e adultos).
- Distintos tipos de problemas (relacionados com um domínio ou domínios gerais, familiares ou não, com adversários ou sem eles). Busca-se treinar os novatos nos tipos e domínios específicos e em habilidades gerais para enfrentar problemas com maior ou menor criatividade.

Ao pensarmos em uma classificação dos problemas e de sua resolução, podemos nos referir a García Cruz (2004), que nos apresenta o seguinte esquema:

Fig. 5: Esquema de classificação dos problemas



Fonte: García Cruz (2004)

- Campo de conhecimento implicado – Refere-se à disciplina que se esteja abordando.
- Número de soluções - Se costuma falar de *problemas fechados* quando se tem uma única solução, não se admite dúvidas quanto sua validez. No outro extremo teríamos os chamados *problemas abertos*, que são aqueles que admitem várias soluções que normalmente deverão ser avaliadas em termos de probabilidade ou de utilidade. Estes últimos problemas são mais frequentes nas áreas de economia, psicologia e ecologia.
- Tarefa requerida para sua resolução – Se refere à classe de raciocínio lógico-matemático colocada em prática por parte do resolutor. Se preferentemente mental e

não precise de um resultado numérico como solução, se falará em *problema qualitativo*, se recorre a procedimentos gráficos ou de cálculo matemático, se falará de *problemas quantitativos.*

- Procedimento seguido em sua resolução - São as estratégias postas em jogo pelo resolutor e que são promovidas pelos problemas. Assim, podemos encontrar:
  - Problemas de aplicação direta - Só requerem operações matemáticas simples (por exemplo, substituição de dados das variáveis de uma equação e isolamento da incógnita) e costuma-se denominar "exercícios”.
  - Problemas algorítmicos - Implicam o seguimento de uma sequência de operações fechadas (algoritmo) que garanta a consecução de sua solução, (Costermans, 2001).
  - Problemas heurísticos - Estes problemas costumam necessitar de uma estratégia com uma planificação consciente prévia. Em Polya (1965), se constatam quatro fases bem diferenciadas: informação prévia, elaboração de um plano de resolução, resolução e revisão do processo (neste grupo podem se enquadrar a maioria dos problemas clássicos). Costermans (ob. cit) nos afirma que uma heurística é uma sequência de operações que somente conduz a solução com uma certa probabilidade.
  - Problemas criativos - Permitem a adoção de estratégias de resolução que não costumam se ajustar a nenhum padrão predeterminado (admitindo-se inclusive, a resolução por intuição), ainda que não se possa garantir que todos os sujeitos podem encontrar uma solução, nem que esta seja a ótima.

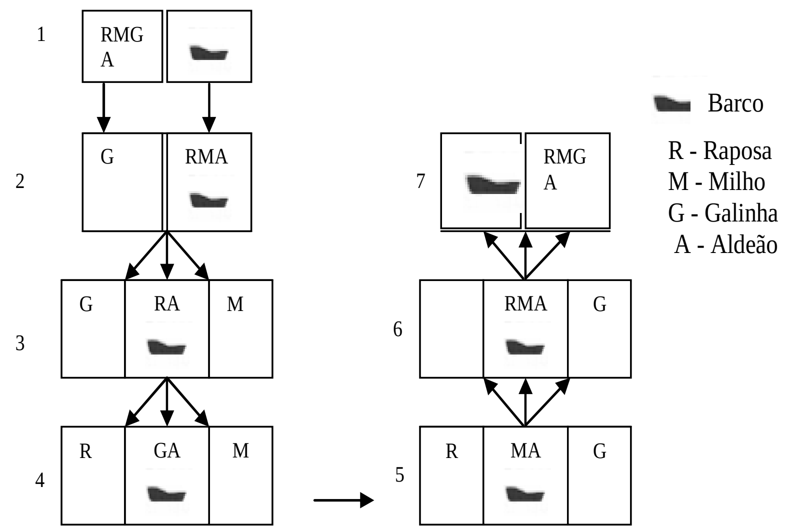
Costermans (2005), também classifica os problemas de acordo com seu processo de resolução:

1) *Problemas estritamente definidos* – Problemas, cujo espaço pode ser exaustivamente descrito.

A noção de espaço do problema – Introduzida por Newell e Simon (1972) é a representação de um problema compreendendo três componentes: Um estado inicial; Um estado final ou um estado fim (que coincide com a solução do problema); e um conjunto de operadores disponíveis, que define os movimentos lícitos, isto é, as transformações autorizadas podendo conduzir do estado inicial ao final, mediante uma série de estados intermediários.

Exemplo: O dilema do aldeão – Um aldeão se encontra à beira de um rio de posse de uma raposa, uma galinha e um saco de milho, e tem que fazer a travessia, se servindo somente de um bote muito pequeno, o qual só lhe permite transportar, no máximo, três coisas de cada vez, ou seja, ele e duas coisas mais. Ademais, em nenhum momento pode haver, em qualquer lado do rio uma coisa que pode comer a outra, quer dizer: galinha e o milho, a raposa e a galinha.

Fig. 6: Esquema de resolução do problema do aldeão



Fonte: Adaptado de Costermans (2005).

O passo 1 representa o estado inicial; O passo 7 representa o estado final e os passos 2-6 representam todos os estados intermediários que são possíveis de se obter pela aplicação de movimentos que respeitam o enunciado do problema: Não mais que o aldeão e duas coisas por vez no barco, e nunca ficar uma coisa que possa comer a outra em um dos lados do rio.

Na análise deste exemplo, feita por Costermans (2005), ele observou que os sujeitos diante deste tipo de problema propuseram diferentes tipos de estratégias: *Estratégia por ensaio e erro*, em que o sujeito aplica aleatoriamente qualquer tipo de transformação autorizada e percorre o espaço do problema até que encontra o estado-fim; *Reduzir passo a passo a distância relativa ao estado-fim*, o resolutor escolhe, entre dois ou mais movimentos, aquele que conduz ao estado mais próximo do estado-fim; *Decompor os fins em subfins*, quando o estado-fim representa uma situação complexa, é vantajoso decompô-la em um conjunto de situações mais simples.

2) *Problemas isomorfos e resolução por analogia* – São os problemas (mesmo os estritamente definidos) que representam, em principio, situações inéditas que requerem uma resposta original, muitas vezes pode fazer apelo à familiaridade do sujeito com problemas similares. Entre os problemas similares, podemos considerar:
   - Os problemas isomorfos – São os que mesmo aparentando uma diferente roupagem, relevam espaços com a mesma estrutura.
   - A resolução por analogia – Aplicação de uma estratégia desenvolvida para resolver um dado problema em outro similar, isomorfo ou percebido como tal.
3) *Problemas com forte conteúdo de conhecimento pericial* – É conhecimento declarativo especifico do domínio a que respeita a resolução de um problema não estritamente definido. Podem ter aspectos formais e estratégicos, por exemplo, conhecendo o estado inicial, se conhece também as transformações autorizadas, mas não se conhece seu estado final. Vejamos um exemplo:
   - O xadrez – Este jogo é o melhor exemplo deste tipo de problemas, em que se conhece o estado inicial (a organização das peças no tabuleiro), se conhecem as transformações autorizadas (as regras do jogo), mas não se conhece o estado final (quem ganha), evidentemente, o fim é ganhar, mas o problema é que isto não corresponde a uma posição definida das peças.

1.4.2. A Resolução de Problemas no contexto do ensino

Começamos com o modelo clássico e bem conhecido desenvolvido por Polya (1965) e que consiste de quatro:

Quadro 4: Etapas de resolução de problemas

Primeira etapa	**Compreender o problema**
É necessário compreender o problema (ver claramente o que se pede)	- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? - Encontrar a relação entre os dados e as incógnitas. Pode-se e deve-se fazer um esquema ou desenho da situação.

Segunda etapa	**Estabelecimento de um plano**
Traçar um plano (captar as relações entre os elementos do problema para encontrar as chaves da solução)	- Este problema é parecido a outros que já conhecemos? - Pode-se formular o problema de outra forma? - Imaginar um problema parecido, porém mais simples. - Ao supor que o problema já está resolvido; como se relaciona à situação de chegada com a de partida? - Utilizam-se todos os dados quando se faz o plano?
Terceira etapa	**Execução do plano**
Executar o plano idealizado	- Ao executar o plano deve-se comprovar cada um dos passos. - Pode-se ver claramente que cada passo é correto? - Antes de fazer algo se deve pensar: que se consegue com isto?
Quarta etapa	**Examinar a solução obtida**
Voltar atrás (revisar e comprovar a solução encontrada)	- Ler de novo o enunciado e comprovar que o que se pede é o que se averiguou. - Devemos nos fixar na solução. Parece logicamente possível? - Pode-se comprovar a solução? - Há algum outro modo de resolver o problema? - Pode-se encontrar alguma outra solução? - Deve-se utilizar o resultado obtido e o processo seguido para formular novos problemas.

Fonte: Polya (1965)

Essas etapas caracterizam claramente o resolutor ideal. Cada uma é acompanhada de uma série de perguntas, cuja intenção é atuar como guia para a ação. Os trabalhos de Polya (1965) podem ser considerados como um intento de descrever a maneira de atuar de um resolutor ideal.

Schoenfeld (1985), outro autor convergente com as idéias de Polya, propõe um marco com quatro componentes que servem para a análise da complexidade do comportamento na resolução de problemas.

1. *Recursos cognitivos* **-** Conjunto de fatos e procedimentos à disposição do resolutor.
2. *Controle* **-** Aquele que permite um uso eficiente dos recursos disponíveis.
3. *Sistema de crenças* - É a perspectiva com respeito à natureza da matemática e como

trabalhar com ela.

4. *Heurísticas* **-** Regras para progressão em situações dificultosas.

Cada um desses componentes explica as carências, o pouco êxito na RP dos seus resolutores. Schoenfeld, observando estudantes resolvendo problemas, constatou que ainda que os estudantes tenham recursos, conheçam as heurísticas para resolver problemas, são incapazes de aplicá-las/utilizá-las com êxito se desconhecerem suas capacidades para regular/controlar seus pensamentos, indicando com isso, ausência de um bom *controle* ou uma boa gestão dos recursos disponíveis. Também observa que o conhecimento de como utilizar as heurísticas e ter um bom controle podem não ser suficientes para resolver um problema, se este lhe exige um algoritmo ou procedimento específico, por exemplo, do domínio matemático que ele desconhece, faltando-lhe *recursos cognitivos* para seguir adiante. Por outro lado, a maior parte das vezes se carece de heurísticas para resolver um problema, pois embora se disponha de conhecimentos específicos do tema e de um bom controle, a falha está no conhecimento de regras para superar as dificuldades na tarefa. Nesses estudos ainda se observa que um bom controle pode levar ao êxito em uma dada solução, ainda que tenham poucos recursos. (Schoenfeld, 1985 *apud* Gusmão, 2006)

Pode ser também que todo o anterior esteja presente na mente do resolutor, mas suas crenças do que é resolver problemas em matemáticas ou da própria concepção sobre a matemática faça que não progrida na resolução. A explicação para esta falha é contemplada por Schoenfeld no quarto elemento, as *crenças*.

Em se tratando especificamente das heurísticas, tem que estas são as operações mentais tipicamente úteis na RP, são como regras ou modos de comportamentos que favorecem o êxito no processo de resolução, sugestões gerais que ajudam ao indivíduo ou ao grupo a compreender melhor o problema e a fazer progressos para sua solução.

Existe uma ampla, possivelmente incompleta, lista de heurísticas. Entre as mais importantes, caberia citar: Buscar um problema relacionado; Resolver um problema similar mais simples; Dividir o problema em partes; Considerar um caso particular; Fazer uma tabela; Buscar regularidades; Começar o problema desde o fim; Variar as condições do problema.

Para Fernández (1992), as heurísticas mais frequentes que se costumam utilizar na RP, dentro de um contexto de ensino de matemática são: Ensaio-erro; Começar pelo fácil, resolver um problema semelhante mais simples; Manipular e experimentar manualmente; Decompor o problema em pequenos problemas (simplificar); Resolver problemas análogos (analogia); Fazer esquemas, tabelas, recontagem (contagem); Analisar os casos limite; Reformular o problema; Supor que não (redução ao absurdo); Começar pelo final (dar o problema por resolvido).

No processo de resolução, Schoenfeld (1985) mostrou que tão importante como as heurísticas é o controle do processo, através de *decisões executivas*, cuja característica mais importante é que tem consequências globais para a evolução do processo.

As *decisões executivas* determinam a eficiência dos conhecimentos e dos recursos. São decisões executivas: Fazer um plano; Selecionar objetivos centrais e específicos; Buscar os recursos conceituais e heurísticos que parecem adequados para o problema; Avaliar o processo de resolução à medida que evoluem; Revisar ou abandonar planos quando sua avaliação indicar.

Miguel de Guzmán (1991), partindo das idéias de Polya (1965), Mason (1988) e Schoenfeld (1985), elaborou um modelo que inclui tanto as decisões executivas, as de controle, como as de heurísticas. A finalidade de tal modelo é que o resolutor examine e remodele seus próprios métodos de pensamento de forma sistemática, a fim de eliminar obstáculos e de se chegar a estabelecer hábitos mentais eficazes, é o mesmo que Polya denominou de pensamento produtivo. A saber:

1. *Familiarizar-se com o problema:* entender a fundo a situação; resolvê-la com calma, serenidade etc.
2. *Busca de estratégias:* Começar pelo mais fácil, fazer um esquema, uma figura, um diagrama, escolher uma linguagem adequada, buscar um problema semelhante etc.
3. *Levar adiante sua estratégia:* Seleciona e leva adiante as melhores ideias que pensou, atuando com flexibilidade etc.
4. *Revisar o processo e perceber as consequências dele:* Examina a fundo o caminho que seguiu, trata de entender não só que a coisa funciona, senão, porque funciona etc.

Ainda dentro do contexto da RP, Perales (2000), nos apresenta alguns fatores com suas respectivas dificuldades.

a) *O enunciado*: Em todo esse contexto de RP ainda vale a pena ressaltar que a natureza do enunciado de qualquer problema responde a uma estrutura sintática, isto é, elaborada seguindo uns padrões de relação entre os elementos gramaticais, próprios da língua, uma estrutura semântica que permita a este ser compreensível; e uma estrutura funcional própria do campo de conhecimento ao que corresponde ao problema em questão. Assim, para resolver um problema, não basta compreender o seu enunciado, há outros elementos importantes. (Perales, 2000, p.301).

b) *Contexto da resolução*: Esta parte reúne um conjunto heterogêneo de variáveis, a saber: a) interação do aluno com materiais reais, o que aproximaria esta tarefa à realização de trabalhos práticos; b) dispor livremente de material de consulta, usado, por exemplo, para resolver tarefas em casa, mas não normalmente nas sessões de avaliação; c) dispor ou não do algoritmo para resolver um problema pode constituir em um fator determinante na informação fornecida ao sujeito para lhe ajudar na tomada de decisões; d) limitação do tempo de resolução, por exemplo, num contexto de avaliação, pode ser uma variável geradora de ansiedades; a variável individual/grupal durante o processo de resolver um problema.

c) *Resolutor:* Nesta parte, Perales se refere ao agente ativo do processo. Este necessita dispor de umas ferramentas cognitivas, as quais poderiam se agrupar em torno do seu conhecimento teórico, suas habilidades e destrezas, assim como certa predisposição (atitude) à tarefa, como afirma o autor. A elas se acrescentam outras de distinta natureza, tais como, as relativas ao caráter, a idade, ao sexo. No tocante ao fator *conhecimento teórico,* este autor enfatiza a necessidade de que o resolutor possua um domínio dos conhecimentos teóricos para resolver problemas de um modo eficiente; e com respeito ao *conhecimento procedimental,* é o *saber fazer* frente ao *saber* característico do conhecimento teórico, isto é, o domínio por parte dos indivíduos de determinadas habilidades cognitivas e sua possível influência na RP. Este conhecimento vai desde uma pormenorização de habilidades particulares a construtos que tratam de modelar o funcionamento cognitivo dos sujeitos ou determinadas propriedades singulares do pensamento.

1.5. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A forma como os indivíduos aprendem tem sido objeto de estudo por parte de importantes pessoas ligadas à área educacional, como é o caso de Guy Brousseau (1986), considerado um pioneiro da Didática da Matemática. Brousseau desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas (TSD) que se baseia no princípio de que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação.

Professor e pesquisador do Instituto de Investigação do Ensino de Matemática de Bourdeaux (IREM), Brousseau propõe o estudo das condições que engendram a constituição dos conhecimentos, bem como o acompanhamento dessas condições a fim de reproduzir e otimizar os processos de aquisição do conhecimento (Gálvez, 1996).

É preocupação de Brousseau compreender as relações existentes entre alunos, professores e o meio onde acontece o aprendizado. Considerada uma teoria de ensino, a TSD busca as condições para uma gênese artificial dos conhecimentos matemáticos, sob a hipótese de que os mesmos não se constroem de maneira espontânea, e está sustentada em uma concepção construtivista - no sentido piagetiano - da aprendizagem. Assim, também na visão desse teórico, todo conhecimento se constrói por interação constante entre o sujeito e o meio que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios etc., este saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta por respostas novas que são prova da sua aprendizagem. A TSD se distingue de outras teorias construtivistas pelo seu modo de enfrentar a relação aluno-saber (Godino, 1999).

Da TSD apresentamos uma síntese de seus conceitos e termos básicos e alguns que estão relacionados ou que se aproximam da Teoria de Jogos. Assim, nos aproximaremos ao significado de conceitos chaves como: situação didática, situação adidática, contrato didático e os tipos de situações didáticas, estas últimas, vinculadas mais intimamente com a resolução de problemas.

1.5.1. Situação Didática e Situação Adidática

Para Brousseau (1986), uma *situação didática* é uma situação construída intencionalmente com o fim de que os alunos adquiram um saber determinado. Ela é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre a tríade professor-aluno-meio, com a finalidade de desenvolver atividades para a aprendizagem e o ensino de um determinado conteúdo. A situação didática também pode ser compreendida como o processo no qual o docente proporciona o meio didático onde o estudante constrói seu conhecimento, consistindo na inter-relação dos três elementos que a compõe.

Especificamente, Brousseau (*apud* Gálvez, 1996) define uma situação didática como:

> Um conjunto de relações explícita e /ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos e objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (Gálvez, 1996, p.28).

Essas relações são estabelecidas por uma negociação entre professor e alunos, resultando num sistema denominado de *contrato didático* (conceito que definiremos mais adiante).

A relação assimétrica do saber entre professor e aluno deve ser superada por uma relação didática, a fim de promover uma mudança do quadro inicial do aluno face ao saber, conferindo um papel fundamental do professor: o acesso ao conhecimento científico.

Em contrapartida, a atividade do professor não deve se consolidar na comunicação ou reprodução de um saber. Ao professor cabe a responsabilidade de apresentar um “bom problema” que seria o desencadeador para a busca de um novo saber, e ao aluno ter condição para a resolução do problema, dando início ao processo de aprendizagem.

Para isso necessita lançar mão de uma série de situações reprodutíveis, que abarcam fatores determinantes para o desenvolvimento do comportamento epistêmico do aluno, criando condições favoráveis para que o professor promova situações didáticas de ensino e de aprendizagem.

O reconhecimento da necessidade de momentos de aprendizagem deu lugar à noção de *situação adidática*, também definida por Brousseau (1986), como sendo as decisões que toma o aluno (boas ou más) sem intervenção do professor, mas com a posta em prática dos conhecimentos ou do saber anteriormente aprendidos. Ou seja, uma situação a-didática é o processo no qual o docente propõe ao estudante um problema que se assemelha a situações da vida real e que poderá ser abordado através de seus conhecimentos prévios, permitindo-lhe a geração de hipóteses e conjecturas que se assemelham ao trabalho realizado no meio institucional. Em outras palavras, o aluno se encontrará diante de determinadas situações, e sem a intervenção direta do professor, irá tentar resolvê-las com o propósito de, posteriormente, institucionalizar o saber adquirido. (Moura, Fernández e Gusmão, 2015a)

Vimos que a situação didática contém intrinsecamente a intenção de que alguém aprenda algo. Esta intencionalidade não desaparece na situação adidática, o que ocorre também é a não intencionalidade contida neste conceito e se refere ao fato de que o aluno deva relacionar-se ao problema, buscando respostas com base em seus conhecimentos, motivado pelo problema, e não para satisfazer um desejo do docente, ou seja, o docente não intervém diretamente na resolução do problema, somente colabora em sua solução final. Daí se deduz que a situação didática engloba as situações adidáticas.

> Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (Brousseau, 1986, apud Pais, 2002, p.68)

Em síntese, a interação entre os sujeitos da situação didática acontece no meio didático que o docente elaborou para que se realize a construção do conhecimento (situação didática) e possa o estudante, a sua vez, enfrentar aqueles problemas inscritos nesta dinâmica, sem a participação do docente (situação adidática).

1.5.2. Tipos de Situações Didáticas

Em se tratando do conhecimento matemático e, dada a especificidade que este envolve, como conceitos, sistemas de representação, procedimentos de desenvolvimento e validação (Godino, 1999), Brousseau ressalta que será preciso considerar outros tipos de situações didáticas, a saber: situações de ação, situações de formulação, situações de validação e situações de institucionalização.

- *Situações de Ação*: são aquelas que favorecem ao aluno o uso de procedimentos mais imediatos para a resolução de uma tarefa, sem necessidade de realizar explicações teóricas sobre os argumentos ou procedimentos utilizados. Assim sendo, são situações marcadas pela produção/aquisição de um conhecimento mais experimental e intuitivo do que teórico, que pode explicar, em parte, a ausência de argumentos por parte de nossos alunos, quando encontram a solução correta e não sabem explicar os procedimentos por eles seguidos;
- *Situações de Formulação*: são situações que favorecem a aquisição de modelos teóricos e metodológicos que antes não eram exigidos na situação anterior. O que

marca essas situações é o fato de o estudante construir afirmações e poder até explicá-las, mas não tem a intenção de julgar a validade do conhecimento;

- *Situações de Validação*: são aquelas em que há necessidade de validar o conhecimento; de fazer uso de mecanismos de provas; de explicar teorias. O saber começa a ser utilizado com a finalidade essencialmente teórica. O que marca uma situação de validação é que os argumentos são racionais e o que se quer é a veracidade do conhecimento;
- *Situações de Institucionalização*: são aquelas que têm a finalidade de dar um carácter oficial/universal aos conhecimentos trabalhados na sala de aula e que devem ser retidos para um trabalho posterior. O conhecimento sai da esfera do particular e individual para uma dimensão histórica e cultural do saber científico. O que marca uma situação de institucionalização é que o saber passa a ter um estatuto de referência para o aluno.

Brousseau não planificou essas situações para favorecer um ensino-aprendizagem tradicional, sua vontade foi de criar uma teoria que permitisse explicar as situações ocorridas em sala de aula, e potenciasse uma adequada inter-relação da tríade professor-aluno-saber, a fim de que o estudante compreendesse plenamente os conhecimentos e enfrentasse os problemas sem uma intervenção didática direta. (Moura, Fernández, Farias e Gusmão, 2015)

1.5.3. Devolução da Aprendizagem

Ao propor uma situação didática para que o aluno construa o conhecimento, é preciso antes que este se interesse pessoalmente pela solução do problema. A esta implicação do aluno na situação, Brousseau (1986) chamou de “devolução”. Para ele, a devolução da aprendizagem pode se dar por etapas:

- *Primeira etapa: aproximação puramente lúdica*

Os alunos não compreendem que, entre as soluções para um problema, umas são desejáveis e outras não. Os estudantes resolvem a questão sem se importar se faz sentido ou não a sua resposta e ficam felizes com as suas ações, sejam quais forem (Brousseau, 1986).

- *Segunda etapa: Devolução de uma preferência*

Os alunos compreendem o efeito desejado do problema, da situação, mas atribuem os resultados, bons ou ruins, a uma espécie de fatalidade ou casualidade. "Esta classe de interpretação é adequada para numerosos jogos, como, por exemplo: 'a batalha' ou os 'cavalinhos', o prazer nasce da espera do que lhe reserva a sorte, enquanto que o jogador não toma nenhuma decisão" (Brousseau, 1986, p.17).

- *Terceira etapa: Devolução de uma responsabilidade e de uma causalidade*

A devolução de uma responsabilidade se dá quando o aluno se sente responsável pelas escolhas que ele mesmo faz entre diversas possibilidades que lhe são oferecidas e então, considera a relação de causalidade existente entre as decisões que toma e os resultados consequentes delas; mediante um processo de revisão, é possível lembrar-se de suas ações e considerar que poderia ter feito diferente. Esta devolução é delicada, pois embora os alunos estejam dispostos a aceitar a responsabilidade pelo resultado, o professor deve dar a eles os meios de assumi-la e, em caso de não alcançar o desejado, não conseguindo relacionar suas ações aos resultados alcançados, deve renegociá-la com os alunos, sob pena de provocar-lhes sentimentos de culpabilidade e de injustiça, prejudiciais nas aprendizagens posteriores e na noção de causalidade propriamente dita (Brousseau, 1986).

- *Quarta etapa: Devolução da antecipação*

Segundo Brousseau, a relação entre a decisão e o resultado consequente dela deve ser visualizada antes da decisão final. "O aluno toma, a seu cargo, antecipações que excluem toda intervenção oculta. Inclusive se não está de tudo sob controle, a antecipação é considerada como responsabilidade cognitiva do jogador e não somente sua responsabilidade social" (Brousseau, 1986, p.17).

- *Quinta etapa: Devolução da situação a-didática*

Para resolver um problema, o aluno deve fazê-lo não "por casualidade", "é necessário que saiba reproduzi-lo espontaneamente e em circunstâncias variadas. É necessário que seja consciente do que está fazendo e que tenha um conhecimento, ao menos intuitivo, das condições que lhe permitam boas possibilidades de êxito" (Brousseau, 1986, p.17). Ainda nesta etapa, este teórico ressalta que a devolução não se faz sobre o objeto de ensino e sim sobre as situações que o caracterizam, em suas palavras, “o que o aluno sabe fazer, não lhe foi nomeado, identificado e, sobretudo, não lhe foi descrito como um procedimento ‘fixo’” (p.17).

1.5.4. O Contrato Didático

A finalidade do professor é lograr a aprendizagem de seus alunos, modificar ou ampliar os seus sistemas de conhecimento. Para isto, se faz necessário avaliar e comprovar em que medida esta aprendizagem está se dando, ou seja, em que medida os objetivos educativos propostos, os procedimentos e os recursos adotados estão sendo alcançados. A informação que se tem desta avaliação proporcionará ao professor referências para que o mesmo adote medidas de mudanças, seja na apresentação dos conteúdos, nas escolhas das técnicas de ensino ou, por exemplo, nas atitudes tanto dele e dos alunos.

Nesta perspectiva, entendemos que quem melhor explicará esse processo de avaliação e mudanças será o *contrato didático*, visto por Brousseau (1986) como um conjunto de propostas, intenções didáticas usadas para ajudar o estudante a compreender melhor a disciplina estudada. Em um contexto geral, o contrato didático é concebido em dois sentidos diferenciados, mas inter-relacionados: como produto para lograr o ensino-aprendizagem e como processo do próprio ensino-aprendizagem, no tocante às atividades de planejamento, supervisão e regulação desse processo.

O Contrato Didático (CD) se refere à relação entre professor e aluno, de forma a estabelecer o conjunto de comportamentos que o professor espera do aluno e o conjunto de comportamentos que o aluno espera do docente. O sentido deste contrato leva a necessidade de explicar, em detalhes, as regras implícitas e explícitas das relações na sala de aula entre o professor, o aluno e o saber.

Para Brousseau (Op. cit.), estas regras procuram, de alguma maneira, estabelecer as responsabilidades que cada um tem perante o outro, com o objetivo de viabilizar práticas que possibilitem a apropriação do conhecimento constituído ou em via de constituição, pelo aluno. Com este pensamento Brousseau define contrato didático como:

> A relação que determina - explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente - aquilo que cada participante, professor e aluno tem a

> responsabilidade de gerir e do qual ele será, de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro. (Brousseau, 1986, p. 16).

Parafraseando Brousseau, Henry (1991) acrescenta que o CD é “o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno, e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor” (p.49). Este é um aspecto relevante se considerarmos que as expectativas dos participantes fazem parte ou se encontram previstos nas “cláusulas” estabelecidas em cada contrato, que pode ser constantemente renovado, adaptado e repactuado a cada nova etapa, em função da aquisição do saber. (Henry, 1991).

O CD também delimita os papéis a serem representados pelo professor e pelos alunos na relação didática, cabendo ao professor criar as condições para o aluno se apropriar dos conhecimentos, e ao aluno, satisfazer tais condições de apropriação; ao professor aceitar a responsabilidade dos resultados e assegurar os meios efetivos para aquisição do conhecimento; ao aluno, a responsabilidade de resolver problemas dos quais não lhe foi ensinada a solução. Contudo, o professor não pode fornecer todos os recursos necessários à assimilação de determinado conteúdo, cabendo uma "parcela" desse processo ao aluno, sob pena de o ensino não se concretizar. De modo geral, a adesão ou aceitação das regras é uma condição para a existência do contrato didático.

No ambiente escolar as regras para aceitação do CD nem sempre são facilmente identificadas, devido ao fato de que muitas delas estão implícitas no processo e isso altera toda a dinâmica do ensino e da aprendizagem, fazendo-se necessário que o professor saiba e tenha consciência de que existe um contrato entre ele o seu aluno.

Ao falar de contrato didático, nos interessa particularmente entrar na questão relativa à ruptura do contrato e suas consequências. Assim, para Brousseau (1986) o contrato didático normalmente se manifesta (ou é melhor percebido) quando há uma transgressão por um dos integrantes da relação didática, ou seja, quando não há o cumprimento de uma determinada regra. Segundo esse teórico, em muitos destes casos é preciso que haja a ruptura e a posterior negociação e renegociação do mesmo para que haja avanço do aprendizado, acrescentando que o mais importante não é tentar explicar a totalidade das regras que constituem um CD, mas delinear alguns de seus possíveis pontos de ruptura.

> Em particular, as cláusulas de ruptura e de realização do contrato não podem ser descritas com anterioridade ou a priori, o conhecimento será justamente o que resolverá a crise nascida destas rupturas, que não podem estar pré-definidas. Não obstante, no momento destas rupturas tudo passa como se um contrato implícito unira o professor ao aluno: surpresa do aluno que não sabe resolver o problema e que se rebela porque o professor não lhe ajuda a ser capaz de resolvê-lo; surpresa do professor que estima suas prestações razoavelmente suficientes; rebelião; negociação; busca de um novo contrato que depende do novo estado dos saberes adquiridos e apontados. Assim, pois, não deve haver um conceito (bom ou mau, verdadeiro ou falso) para um contrato, mas sim o processo da busca de um contrato hipotético. (Brousseau, 1986, p. 68).

Assim, a ruptura do contrato sempre leva a uma tomada de consciência tanto por parte do professor, como dos alunos das normas que estão em jogo na construção do saber e, portanto, pode ser visto como um ponto positivo, já que deveria levar a reformulações do conhecimento.

Pais (2001, p.80-82) nos apresenta alguns exemplos de ruptura de um contrato: 1) quando o aluno não adquire um novo saber que foi proposto pelo professor. Assim, abrem-se dois processos: o aluno não fez o que esperava o professor e o professor não fez o que teria que ser feito. É necessário, entretanto, que o professor aceite a responsabilidade dos resultados e que assegure ao aluno os meios efetivos da aquisição de conhecimentos. Esta segurança é falsa, mas indispensável para permitir ao aluno se fazer responsável. Do mesmo modo, é necessário que o estudante aceite a responsabilidade de resolver os problemas, cujas soluções não lhe foram ensinadas, ainda que não veja, a priori, as opções que lhe propõem e as suas consequências; 2) quando o professor propicia um novo conhecimento e o aluno se apropria dele, rompe-se o contrato antigo já que o mesmo cumpriu a sua função; 3) quando há desinteresse ou não envolvimento do aluno pelas atividades e problemas propostos; 4) quando, por exemplo, a atividade proposta pelo professor não é compatível com o nível dos alunos.

1.5.5. Aproximações da Teoria das Situações Didáticas a Teoria de Jogos

Para finalizar, gostaríamos de tecer algumas considerações a respeito da relação que pode haver entre a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Jogos.

Em sua teoria Brousseau faz uma tentativa de modelizar a noção de "situação" pela noção de "jogo" e nesse sentido, percebemos uma aproximação da TSD a TJ. Vejamos o exemplo apresentado por Brousseau:

> Em um jogo de computador, algumas crianças (5 anos), com um lápis ótico, devem conduzir um a um, coelhos a um campo e patos a uma lagoa. As regras da manipulação não apresentam maiores dificuldades para a idade das crianças. As crianças podem interpretar que o desaparecimento e posterior aparecimento de um animal em outro lugar, corresponde a um deslocamento. Mas logo passa a ser outra coisa mais que uma manipulação segundo uma regra: o professor quer que o aluno assinale todos os coelhos um a um e somente uma vez, antes de dirigi-los até o campo, com o objetivo de desenvolver nele a enumeração de uma coleção. A sucessão das operações a serem efetuadas não se dá nos comandos, está a cargo do aluno. A devolução desta tarefa se faz por etapas (Brousseau, 1986, p.84, *tradução nossa*).

Com o exemplo apresentado ao tratar das devoluções, e ainda com o sentido dado ao contrato didático, podemos perceber algumas relações, vejamos:

a) *Jogadores* – Os alunos cujo objetivo é maximizar sua utilidade mediante ações para este fim, tal maximização pode ser pensada "como a forma de ganhar o jogo com a maior velocidade possível".

b) *As Ações e estratégias* – que são as eleições ou movimentos observáveis que fazem os alunos, as estratégias puras (100% de certeza) e as mistas (dúvidas).

c) *Pagos* – Vencer o jogo (levar todos os coelhinhos ao prado).

d) *Valor do jogo* – Satisfação do aluno em conseguir chegar ao final.

e) *Função de utilidade* **-** A função de utilidade converte os pagos em bem estar.

f) *Conduta do jogador* – a conduta será inicialmente de vencer o jogo, uma vez que consiga esse objetivo, depois é de resolvê-lo no menor tempo possível.

g) *A solução e o valor da solução de um jogo* **–** Para o aluno, levar todos os animais ao prado. Para o professor, introduzir o sistema de numeração.

h) *Equilíbrio* – Levar todos os animais com mais rapidez, sem que haja esquecimento ou atraso na má condução destes.

i) *Ordem dos movimentos no jogo* **–** Faz parte da regra do jogo, levar um a um todos os coelhos ao prado.

j) *Representação do jogo* **–** É de forma extensiva - mostra cada movimento do aluno, se especificando a ordem, as eleições, as tomadas de decisão, muito bem definida em suas etapas (ver fig.4), e as utilidades de cada estudante ante as diferentes combinações de estratégias.

Nesse contexto, podemos entender a educação como parte do sistema social e a escola enquanto uma organização social onde se planifica e se toma de decisões. Assim, encontramos na escola um conjunto de dimensões, as quais tem que ver com a conduta que se realiza no campo de intencionalidades, em que a maximização dos esforços responde a decisões estratégicas.

Flores (2000) nos apresenta o seguinte exemplo: Em uma escola, inicialmente devemos ver os diretores, docentes e alunos como os atores sociais acadêmicos, os quais interagem e estão situados entre o plano organizacional e de suas ideologias. Esta dicotomia está situada no campo das decisões, em que se busca chegar a um ponto de equilíbrio (conjunto de estratégias no qual a estratégia de cada ator é ótima frente à dos outros, Elster, 1984).

Também uma possível aproximação desde pressupostos de ambas às teorias ao contexto educacional pode ser observada em Moura e Labranã (2005a) quando ressaltam: na *organização* - os sujeitos implementam decisões estratégicas, as quais devem coincidir ordens e ideologias, num sentido de otimização e de equilíbrio; na *academia* - professores, por exemplo, fazer acordos relacionados aos programas acadêmicos ou de formação e é o cenário natural da tensão estratégica de decisões: entre poder e saber, entre recursos e necessidades, entre dirigir e fazer, e entre ser e reconhecer; na *prática da sala de aula* - a relação entre docente e aluno sintetiza um conjunto de dimensões: pedagógicas, socioeconômicas, políticas, culturais e ideológicas, que produzem redes de decisões entre todos os envolvidos. O docente com o propósito ensinar maximiza seus recursos: didáticos, pedagógicos e de conhecimento e enfrenta o problema da decisão, quais conteúdos, métodos, tempo, recursos e avaliação para que seus alunos logrem a aprendizagem desejada, ou seja, há que equilibrar seus desejos e preferências de ensino para regular sua eleição e que esta logre a sua maximização (Moura, Fernández e Gusmão, 2015).

Nesse contexto pode-se definir o docente como o agente decisor, cuja tarefa é definir e planejar estrategicamente a maximização do processo de ensino, aprendizagem etc; e a sala de aula é o cenário onde convergem decisões institucionais, dos alunos e da sociedade.

A seguir, apresentamos um quadro comparativo a fim de melhor sintetizar essas possíveis aproximações:

Quadro 5: Teoria de Jogos *versus* Teoria das Situações Didáticas

Estratégias de otimização	
Teoria de Jogos	**Teoria das Situações Didáticas**
Encontrar as estratégias ótimas que proporcione o maior ganho médio.	Encontrar as estratégias ótimas que proporcionem um melhor ensino[14] e aprendizagem.
Considerações - Ganhar consiste em obter o melhor resultado que esteja ao alcance dos jogadores. Na TJ ganhar significa a obtenção do maior lucro ou no pior dos casos a menor perda, já na TSD ganhar é a apropriação do conhecimento por parte do aprendiz.	
Comportamento dos sujeitos	
Teoria de Jogos	**Teoria das Situações Didáticas**
Atuam em cooperação ou não, mas sempre em beneficio próprio. Cada um conhece sua própria forma de atuar, mas ignora ou conhece pouco a do rival.	Os jogadores atuam em cooperação com os esforços individuais e os benefícios coletivos. Cada um conhece perfeitamente qual é sua própria forma de atuar, mas ignora ou conhece só em parte a dos outros.
Considerações - A cooperação é fator principal numa situação didática, em que os jogadores não são tratados como rivais, sua própria conduta individual é conhecida, enquanto que a do outro só de forma provável, ás vezes, necessita-se de alguma representação, como por exemplo, na resolução de exercícios pensando na prova.	

Fonte: Própria do autor

Em síntese, no sentido da TJ, Brousseau compara o processo de resolução de problemas como um jogo de estratégias e um processo de tomada de decisão. No conjunto de estratégias, existirá uma ou algumas que levará ou levarão a solução do problema, mas também que levará o aluno a construir o conhecimento. Será este conhecimento o ganho do aluno, no sentido da TJ. O aluno, o resolvedor do problema, será o decisor, aquele que busca a estratégia ótima para solucionar o problema.

[14] O ensino é por excelência o meio institucional do que se dota à sociedade para fazer conhecer o saber, a cultura etc., a todos seus membros. (Brousseau, 1990).

CAPÍTULO 2: PROBLEMA DE PESQUISA E METODOLOGIA

Nosso estudo se enquadra dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa e, em alguns momentos, fazemos uso de métodos quantitativos para complementar e enriquecer as análises.

> A abordagem qualitativa realiza uma aproximação fundamental e de intimidade entre sujeito e objeto, uma vez que ambos são da mesma natureza: ela se volve com empatia aos motivos, às intenções, aos projetos dos atores, a partir dos quais as ações, as estruturas e as relações tornam-se significativas (Minayo 1993, p.244).

Ao entender que a pesquisa qualitativa possibilita uma partilha com pessoas, fatos e locais, o que permite extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que não são possíveis apenas com a utilização da abordagem quantitativa (Chizzotti, 2006), iniciaremos com um breve relato de nossa experiência e trajetória que nos levou à escolha do objeto de estudo, a fim de situar e substanciar a problemática deste estudo. Em seguida, apresentaremos os objetivos, os participantes, o contexto, os instrumentos e os critérios de coleta e análise dos dados da pesquisa.

2.1. EXPERIÊNCIA, PAPÉIS DO PESQUISADOR E JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Em 2001 recebi o título de Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), na cidade de Vitória da Conquista, Bahia, Brasil. Neste mesmo ano, passei a exercer a função de professor, ministrando aulas na Educação Básica em colégios particulares e no Ensino Superior, este último, como professor substituto na mesma universidade em que me formei e depois na Faculdade Independente do Nordeste, onde mantenho vínculo até o presente momento.

Em 2003 recebi o Diploma de Estudos Avançados (DEA), defendendo o trabalho intitulado "O Núcleo de distintas classes de Jogos Cooperativos desde um ponto de vista axiomático" no Programa de Doutorado em Estatística e Investigação Operativa da Universidade de Santiago de Compostela (USC), Espanha, sob a orientação da professora Drª Balbina Casas Méndez.

Em 2004, entrei no Programa de Doutorado do Departamento de Didática das Ciências Experimentais e da Matemática da USC, onde me propus dar seguimento ao trabalho realizado no Programa anterior sobre a Teoria de Jogos, agora aplicada à Educação. Neste atual Programa, fui orientado inicialmente pelo professor Dr. Antón Labraña, que trouxe contribuições importantes para a primeira fase deste trabalho. Com seu apoio pude pensar em como aplicar os conhecimentos adquiridos no programa de estatística, mas especificamente no que se refere à Teoria de Jogos e voltá-los para a educação; também com este professor pude pensar nos instrumentos de coleta de dados para seguir esta pesquisa. Em uma segunda etapa, pude contar com a valiosíssima orientação do professor Dr. José Antonio Cajaraville, que muito me fez refletir sobre as influências que levam os alunos a escolherem e tomarem certas decisões em detrimento de outras. Com o seu conhecimento vasto e sólido no campo da Educação Matemática, Dr. Cajaraville me apresentou a Teoria das Situações Didáticas e juntos travamos muitas discussões em torno das análises deste trabalho; e em sua etapa final, com a professora doutora Teresa Fernández Blanco, pude, por fim, refinar esta proposta que aqui apresento.

A Teoria de Jogos, a Eleição e a Tomada de Decisão foram temas que despertou meu interesse durante os estudos do DEA, quando percebi uma similaridade de pensamentos entre estas teorias e comportamentos de alunos em sala de aula. Então conhecendo os estudos da Teoria das Situações Didáticas, pude por fim refletir melhor sobre o assunto e, por meio das leituras de Elster (1984), Bueno (2004), Brousseau (1986), entre outros, pude perceber que é possível discutir e pensar a Teoria de Jogos aplicada à Educação.

Nessa perspectiva, levantamos para este estudo as seguintes questões: Quais e como são as condutas adotadas pelos alunos, quando resolvem problemas de matemática? Em quais situações e em que medida a conduta matemática de alunos, quando resolvem problemas, se aproxima dos modelos econômicos da Teoria de Jogos, da Eleição e da Tomada de Decisão aprendida socialmente e do modelo da Teoria das Situações Didáticas, aprendido em sala de aula?

2.2. OBJETIVOS E HIPÓTESE/PREMISSA DA PESQUISA

Concretamente, este estudo teve como **objetivo central** fazer uma interpretação de modelos econômicos, especificamente os que envolvem "eleição", "tomada de decisão" e "teoria de jogos", desde pressupostos das "estratégias ótimas", da "maximização dos benefícios" e "minimização dos custos e riscos" e do modelo da Teoria das Situações Didáticas para analisar a conduta matemática de estudantes, quando resolvem problemas em sala de aula. Nesse sentido, direcionamos nossa atenção aos caminhos que levaram os alunos/participantes da pesquisa a escolher uma determinada opção de resposta e se estas são influenciadas por modelos econômicos ou do sistema educacional.

E nesse contexto, partimos da seguinte **premissa**:

- A conduta de estudantes ao resolver problemas que fogem a rotina matemática da sala de aula, tendem a se aproximar mais de modelos econômicos socialmente aprendidos (custo-benefício, estratégia ótima, maximização dos ganhos, minimização das perdas, grau de satisfação ou utilidade esperada) de modo formal ou informal, fora do ambiente escolar, que de modelos de referência supostamente aprendidos na sala de aula, mesmo visando atender as regras de um contrato didático entre professor-aluno-saber.

E como **objetivos específicos**, pretendemos:

- Analisar a conduta matemática de estudantes na resolução de problemas, desde pressupostos de modelos Econômicos à Teoria das Situações Didáticas;
- Verificar em que medida os procedimentos usados por estudantes para resolver problemas são influenciados por conhecimentos de modelos econômicos, socialmente compartilhados fora do contexto escolar, e por conhecimentos compartilhados no contexto escolar, sob o olhar da Teoria das Situações Didáticas;
- Verificar como os modelos econômicos (Eleição, Tomada de Decisão e Teoria de Jogos) e o da Teoria das Situações Didáticas se aproximam para explicar os conflitos surgidos durante o processo de resolução de problemas.

Assim, no que tange aos objetivos, nosso percurso metodológico se insere no contexto de uma pesquisa de tipo descritiva e no que tange aos procedimentos de coleta de dados toma o rumo de uma pesquisa naturalista ou de campo. A análise dos dados foi feita em bloco, segundo as teorias elucidadas nesta pesquisa. De modo geral, pretendemos neste capítulo apresentar o passo a passo desse nosso percurso, que levou em conta as orientações de Fiorentini e Lorenzato (2009), Batanero (2003), Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001), Luna (1998), Crespo (1993), Ludke e André (1986), Badin (2009), dentre outros, que nos apresentam as etapas de um processo de pesquisa educativa.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p.70) e no que se refere aos objetivos, uma pesquisa descritiva "é aquela que pretende descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema". Pretendemos, na medida do possível, descrever minuciosamente as etapas que seguimos, mostrando os encaminhamentos, as escolhas pelos instrumentos e outros detalhes para se alcançar os objetivos pretendidos.

No que concerne à coleta de dados, esta foi realizada diretamente na sala de aula, tomando a característica de uma pesquisa de campo. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009), o que marca esta modalidade de pesquisa é o fato de os dados serem coletados diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece, podendo se dar por diferentes modos de coletas como, por exemplo, entrevistas, aplicação de questionários e testes.

> [...] Se a questão de investigação só pode ser efetivamente respondida mediante a realização de um experimento ou da coleta de informações/dados empíricos ou de inserção/intervenção no ambiente a ser estudado, então dizemos que a pesquisa será de campo ou de laboratório (Fiorentini e Lorenzato, 2009, p. 61).

Nesta pesquisa, os dados foram coletados por meio de testes contendo questões que foram respondidas por escrito, por grupos de estudantes e por meio de um processo de instrução realizado em uma aula de matemática.

2.3. PARTICIPANTES E CONTEXTO DO ESTUDO

Segundo Luna (1998), os participantes de uma pesquisa, além de possuírem a informação, devem ser capazes de disponibilizá-la para o pesquisador. Assim, os participantes que, de modo direto e indireto, gentilmente e, de maneira dedicada, cederam as informações que serão analisadas nesta pesquisa, foram divididos em três grupos:

- O primeiro respondeu ao conjunto de questões que vem do banco de dados da tese de Gusmão (2006), que comentaremos mais adiante, e que foi constituído da seguinte forma: 185 estudantes, sendo 15 cursando o 3º/4º ano da Educação Secundária Obrigatória (ESO) da Educação de Adultos do Estado Espanhol, com média de idade de 18 anos e; 170 estudantes de 3º de ESO também de escolas públicas do Estado Espanhol, com média de idade de 14 anos. Esses estudantes responderam 15 questões de maneira escrita, uma dessas questões: "o problema dos bueiros" (não analisado por Gusmão), será objeto de nossas análises sob a ótica de modelos econômicos e de educação;
- O segundo grupo é composto por 53 alunos da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, sendo 18 do curso de Ciências da Computação, 23 da Licenciatura em Matemática e 15 da Licenciatura em Física. Estes alunos responderam individualmente e de maneira escrita o problema: "onde está o carro?", questão escolhida por mim e pelo professor Antón Labraña. Na ocasião da aplicação, pudemos contar com a colaboração de professores que ministravam disciplinas nos referidos cursos;
- O terceiro e último grupo diz respeito a um processo de instrução desenvolvido por um professor de matemática em uma turma do ensino médio na cidade de Barcelona, Espanha. Os estudantes responderam em equipe um problema sobre densidade demográfica e, desse processo de instrução, analisamos um pequeno episódio. Não fizemos parte dessa coleta de dados, os quais fizeram parte dos estudos de Font, Planas e Godino (2010), que gentilmente nos autorizaram o seu uso neste trabalho.

Ainda em relação ao primeiro e segundo grupos, observamos que estes gentilmente aceitaram responder sem qualquer tipo de consulta às questões que trazemos para análise.

Embora tenhamos grupos distintos de participantes para essa pesquisa, isso não trouxe nenhuma interferência em nossas análises, haja vista que o nosso interesse foi na direção de analisar a conduta matemática de estudantes, quando resolvem problemas, segundo determinados modelos econômicos; e as influências das situações didáticas, especificamente o contrato didático, independentemente de idade ou nível escolar.

2.4. CENÁRIO, INSTRUMENTOS E PROCESSO DE COLETA DE DADOS

Nossa pesquisa foi realizada com estudantes de 3º e 4º curso da Educação Secundária Obrigatória (ESO) e do Ensino Médio do Estado Espanhol e com estudantes da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Brasil. Os alunos espanhóis da ESO, correspondem no Brasil ao 8º e 9º ano do Ensino Fundamental II. Ambos os contextos, ou cenários, foram escolhidos intencionalmente, primeiro pela facilidade de acesso que tivemos nas escolas espanholas, graça ao contato intermediado por professores da Universidade de Santiago de Compostela e, no caso do contexto brasileiro, a coleta aconteceu em um período em que atuávamos como professores. A esse respeito, Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001) observam:

> [...] a escolha do campo onde serão colhidos os dados, bem como dos participantes, é proposital, isto é, o pesquisador os escolhe em função das questões de interesse do estudo e também das condições de acesso e permanência no campo e disponibilidade dos sujeitos (2001, p.162).

Dentro de uma abordagem qualitativa, os dados foram obtidos no contato direto com a situação estudada, se preocupando mais com o processo do que com o produto (Lüdke; André, 1986) e, como instrumentos e técnicas de coleta de dados, utilizamos testes (um conjunto de questões) e de um processo de instrução em que não participamos, mas que tivemos acesso à parte de seus dados.

Especificamente, sobre os dados coletados diretamente por nós, podemos dizer que esse processo se deu de dois modos:

1) Utilizando-se do banco de dados de Gusmão (2006) que, na ocasião de sua coleta (ou construção), participamos como colaborador, acompanhando todo o processo de coleta, seja na aplicação de seus instrumentos, seja no apoio das gravações em áudio e vídeo. Por conhecer este banco de dados e a forma como foi construído nos pareceu conveniente utilizá-lo. Outra razão para a escolha desse banco de dados é por considerar que suas questões, de caráter aberto, força/forçou os alunos que a responderam a tomar decisões e a construir matizes de respostas que é de interesse dessa pesquisa analisar. Concretamente, desse banco de dados utilizamos, como já mencionado anteriormente, uma de suas questões;

2) Por meio de uma questão muito conhecida, como “onde está o carro?” – uma adaptação do famoso dilema de Monty Hall. A escolha desta questão foi uma decisão conjunta com o professor Dr. Antón Labraña, então orientador na época. A escolha foi motivada pelo interesse em estudar a conduta dos alunos diante de uma situação de risco, ou seja, “tudo ou nada” e se estes utilizariam alguma ferramenta matemática para resolvê-la, se alguém ou alguma coisa poderia influenciar na sua eleição e decisão, como também analisar seus conhecimentos matemáticos.

As questões por nós escolhidas, incluindo a do processo de instrução, não se baseiam em questões rotineiras e, portanto, as respostas dadas a elas não deveriam ter, a princípio, um automatismo. Estas questões forçam o resolutor a tomar decisões, fazer eleições, julgamentos e a se expressar, de certo modo, livremente, fugindo em alguns momentos de respostas estereotipadas. São questões que, de modo geral, requer que o aluno justifique sempre sua eleição ou decisão.

Em seguida, teceremos os comentários concernentes a cada questão:

O PROBLEMA DOS BUEIROS

Antigamente os bueiros eram cobertos com tampas retangulares (imagem 1); depois, por conta de alguns inconvenientes, mudou-se para tampas quadradas (imagem 2); mas continuaram aparecendo novos inconvenientes, e daí decidiu-se fazer tampas circulares (imagem 3). De qual inconvenientes se tratava?

Ao mudar a “forma”, a resposta deveria se referir a ela em algum sentido, que não teria por que ser necessariamente matemático. “Para que é relevante a forma?”, é uma formulação implícita da questão. A resposta pode se dar por razões intrínsecas à forma, por adequação a determinados tipos de ações, por evolução das tubulações etc.

Durante a aplicação dessa questão, foram prestadas as explicações relativas aos objetivos da pesquisa; foi atribuído um momento para leitura e exposição de dúvidas e ainda esclarecido que deveriam escrever/expressar o máximo que podiam sobre sua linha de raciocínio.

ONDE ESTÁ O CARRO?

Em um concurso televisivo:

O concursante pode eleger entre três portas: atrás de uma delas há um carro e atrás de cada uma das outras há uma cabra.

Uma vez realizada a eleição, o apresentador, que sabe onde está o carro, abre uma das portas não escolhidas, atrás da qual existe, naturalmente, uma cabra.

Agora o apresentador dá ao concursante a possibilidade de mudar a porta escolhida anteriormente pela que ainda está por abrir.

Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

Justifique a sua opção, respondendo:

Considera provável resolver o problema em um tempo breve?

Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema?

Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema?

Seria fácil de explicar a sua escolha?

"Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso mudar de porta". Assim perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto?

"Prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ela retifique seus argumentos". Você concorda com estes estudiosos?

O problema *onde está o carro* tem sua origem nos anos 70 em um concurso televisivo americano e ficou conhecido como Dilema de Monty Hall, nome dado ao apresentador do concurso. O objetivo é escolher uma das portas, ganhando o prêmio que ela esconde.

De modo geral, com esta atividade pretendemos abordar a representação do comportamento do resolutor diante do risco, ou da incerteza, estudando o seu comportamento racional. Não pretendemos que o estudante responda utilizando a probabilidade condicional "Teorema de Bayes", mas sim que resolva utilizando métodos e ferramentas por eles conhecidas.

No momento da abertura de uma das portas, pode ser afastada qualquer dominação de uma das partes (apresentador ou concursante) através da inteligência, indução, força, habilidade, conhecimento ou experiência, surgindo a questão sorte como poder equalizador, ou seja, o acaso acaba se tornando, de uma maneira ou de outra, um instrumento de justiça com uma grande vantagem sobre qualquer outro. Para sua resolução, o estudante pode fazer uma leitura racional do problema e adotar procedimento matemático estatístico, podendo ser influenciado por outras pessoas de elevado conhecimento na matéria ou tomar sua própria decisão, baseando em seus conhecimentos próprios, ou utilizando alguma ferramenta matemática de análise.

O PROBLEMA DA DENSIDADE DEMOGRÁFICA

Abaixo segue a população e a área de dois bairros da cidade de Barcelona, Espanha.

Bairro 1 (N1)	*Bairro 2 (N2)*
65 075 habitantes	*190 030 habitantes*
7 km^2	*5 km*^{2}

(i) *Discuta em qual desses dois lugares as pessoas vivem mais espaçosamente.*

(ii) *Encontre quantas pessoas deveriam locomover-se de um bairro a outro para que todos vivam em uma mesma distribuição de espaço.*

Este problema fez parte de um processo de instrução, uma aula de matemática, composta por 21 estudantes do ensino médio de uma escola da rede pública da cidade de Barcelona, Espanha. O professor apresentou a questão em uma folha de papel para que seus alunos pudessem responder em pequenos grupos para, logo após, compartilhar suas resoluções e dúvidas. As aulas desse professor foram objeto de estudo e os detalhes desse processo de instrução estão em Font, Planas e Godino (2010). Diferentemente dos objetivos desses autores, iremos analisar o episódio de resolução desse problema (descrito no capítulo de análise) com fins a estudar a conduta matemática destes estudantes.

A atividade refere-se à densidade demográfica de dois bairros conhecidos da cidade de Barcelona. Para resolvê-la, o estudante deverá fazer uso, por exemplo, de conhecimentos sobre proporcionalidade e equações.

O fato de trazer um episódio de aula para análise vem do interesse de, também, observar nosso objeto de estudo diretamente em um processo de instrução, no qual pudéssemos por meio das falas entre alunos e entre estes e o professor ter uma melhor percepção da conduta matemática de estudantes resolvendo problemas.

2.5. CRITÉRIOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Para a análise dos dados, tivemos em conta os protocolos escritos, tantos dos testes como do processo de instrução e, em um primeiro momento, realizamos uma análise do conteúdo das informações, segundo Badin (2009), que resultou em uma organização das respostas, como descritas no próximo capítulo. Em seguida, iniciamos uma análise cuidadosa dessas respostas, observando, por exemplo, o raciocínio, a tomada de decisão e as estratégias utilizadas, segundo os modelos econômicos e o da teoria das situações didáticas apresentados no marco teórico da pesquisa e, nesse sentido, todo o procedimento de análise está diretamente relacionado a este marco.

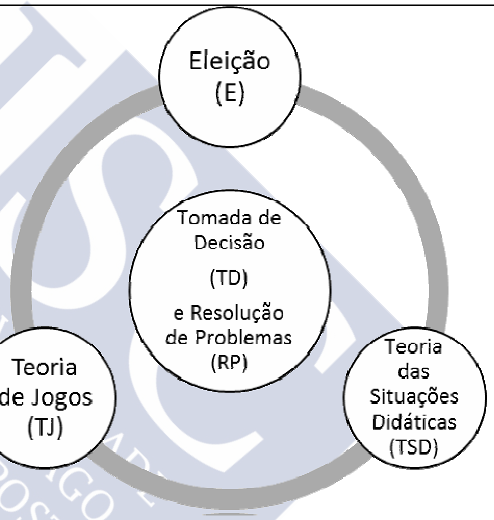
Sabemos que os dados não falam por si só, para dar-lhes sentido contam com suposições e crenças do pesquisador e, claro, com suas ferramentas de análises.

Como o rigor de uma pesquisa também está ligado à objetividade, cabe aqui ressaltar que buscamos refinar o processo metodológico apresentando, em ocasiões, algumas tabelas, resumos dos dados analisados.

Neste contexto, esclarecemos, ainda, que as respostas, cujo raciocínio, em ocasiões, não tivemos condições de analisá-lo, foram agrupadas em uma categoria, na qual chamamos “não analisadas”.

CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO, ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo apresentaremos as análises e discussão dos dados da pesquisa, os quais foram organizados em torno dos três problemas propostos no estudo: 1) Os Bueiros, 2) Onde está o carro e 3) Densidade demográfica. Estes problemas foram analisados segundo as teorias elucidadas neste estudo, a fim de promover a discussão e a compreensão do objeto investigado. Sinteticamente, estruturamos as análises da seguinte forma:

Problemas	Eixos de Análises
1) Os Bueiros	
2) Onde está o carro	
3) Densidade	

3.1. PROBLEMA 1: OS BUEIROS

O PROBLEMA DOS BUEIROS

Antigamente os bueiros eram cobertos com tampas retangulares (imagem 1); depois, por conta de alguns inconvenientes, mudou-se para tampas quadradas (imagem 2); mas continuaram aparecendo novos inconvenientes, e daí decidiu-se fazer tampas circulares (imagem 3). De qual inconvenientes se tratava?

3.1.1 Considerações Iniciais

Ao mudar a “forma”, a resposta deveria se referir a ela em algum sentido, que não teria por que ser necessariamente matemático. “Para que é relevante a forma?”, é uma formulação implícita da questão. A resposta pode se dar por razões intrínsecas à forma, por adequação a determinados tipos de ações, por evolução das tubulações etc.

Em nosso meio, estamos rodeados de objetos, formas, desenhos e transformações, de tal forma que a Geometria é a linguagem adequada para descrevê-los. Este fenômeno faz com que as propriedades geométricas se tornem cada vez mais accessíveis, visíveis e presentes na vida cotidiana, fazendo parte, inclusive, de nossa cultura. Desde a infância já se experimenta diretamente as formas de objetos, sejam em jogos ou até em utensílios domésticos. Paulatinamente, agregamos valores e formas, nos apropriamos do espaço, orientando-nos, analisamos formas e buscamos relações espaciais de situação, de função ou simplesmente de contemplação. Desta maneira, passa-se a adquirir conhecimento direto de nosso meio, particularmente, do meio espacial. (Alsina et al, 1997)

Os bueiros como parte deste meio, no seu sentido mais amplo, poderão estar sujeitos a uma caracterização, a partir de diferentes pontos de vistas ou enfoques, tais como: físico, psicológico, social, geométrico, arquitetônico etc.

Na formulação do problema aparecem expressões relativas a conceitos comuns de nível social, tais como as formas dos bueiros acompanhadas de registros gráficos que servem de representações geométricas destas formas. A característica principal destas expressões é que origina a possibilidade de diversos enfoques interpretativos por parte do resolutor, ao perguntar explicitamente pelos “inconvenientes” que podem modificar cada tipo de forma, o que abre a situação à subjetividade de interpretações diversas, enriquecendo o conjunto de opções ou alternativas (Elster, 1989) a serem construídas por parte do resolutor.

Uma *solução de referência* para este problema poderia levar em conta considerações de tipo matemático-econômico e de tipo físico.

De tipo matemático-econômico, as formas retangular e quadrada adotadas para a construção das tampas dos bueiros apresentam, pelo menos, dois problemas básicos: 1) O primeiro é devido a que, ao ser a diagonal de ambas as formas de maior comprimento que qualquer de seus lados, existe o risco de que as tampas, ao ser objeto de manipulação, caiam pelo buraco do bueiro, com o correspondente prejuízo pela quebra ou no melhor dos casos, o incômodo de ter que baixar para buscá-las no fundo do bueiro. Já as tampas na forma de círculo, ao ter diâmetro constante, se são construídas com um diâmetro levemente superior ao dos canos/tubos de deságue, não cabem por dito tubo e, portanto, é impossível que se caiam por ele mesmo, seja qual for a posição que se coloquem ou manipulem. 2) Contudo, a razão matemática de maior peso é a que está relacionada com a *otimização*: A quantidade de águas pluviais que podem entrar pela boca do tubo é máxima, a perímetro constante, se adotamos a forma circular e, assim dita forma otimiza a missão principal para que foram construídas. Para maiores detalhes ver anexo 1, onde apresentamos uma solução de referência e uma ampliação matemática do problema segundo a perspectiva de "maior área a perímetro fixo".

Do tipo físico, tem-se que a construção circular reparte equitativamente as tensões que podem produzir sobre a zona perimetral de contato com a boca do bueiro, fazendo-se mais resistente à quebra ou deformação provocada pela pressão que se origina quando passa veículos e outros objetos pesados sobre ela. No caso das formas retangular e quadrada, é mais fácil quebrar ou deformar as esquinas da tampa, ao não repartir as tensões de maneira uniforme sobre sua fronteira.

3.1.2. Análise desde a Eleição

O enunciado da tarefa se refere especificamente a três tipos de formas geométricas susceptíveis de diversas interpretações. Nosso olhar sobre as respostas dadas pela amostra pesquisada, nos permitiu perceber, sobretudo, uma atenção para os enfoques *matemático, físico e social*. Assim, enquadraremos nossa análise nesses enfoques.

Desde a perspectiva das eleições, foi possível construir, por meio das respostas dos estudantes, *um conjunto de opções ou alternativas (conjunto oportunidade)*, que esteve, inicialmente, relacionado aos três enfoques.

Desde o enfoque matemático: Evitar que a tampa caia pelo seu próprio buraco; Melhor encaixe (raio constante); otimização da capacidade de recepção de água a perímetro constante.

Desde o enfoque físico: resistência (maior resistência nas bordas); facilitar a entrada de água; impedir que a água escape pelas bordas; repartir forças; estabilidade; equilíbrio; menor peso; adaptação às tubulações; evitar entupimentos.

Desde o enfoque social: facilidade de construção; comodidade, praticidade; economia com respeito à construção, economia de materiais; evitar furos nos pneus dos carros; facilidade de limpeza dos bueiros (caso necessário); facilidade de manipulação; evitar acidentes.

Entretanto, este conjunto de alternativas não veio explícito no problema. A ambiguidade, consciente com que é formulada a tarefa em termos de "inconvenientes", permitiu que os alunos imaginassem e formulassem todo um conjunto de alternativas, incentivando-os, a partir de então, a realizar eleições e tomar decisões.

A tabela seguinte resume a frequência das respostas, segundo os enquadramentos propostos para a análise.

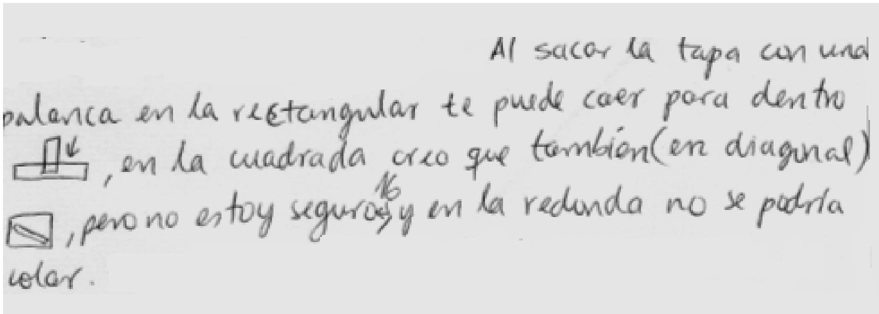
Tabela 9 – Frequência e percentual de eleição segundo análises

Enquadramento de Análise	Frequência	%
Enfoque Matemático	12	6,5
Enfoque Físico	73	39,2
Enfoque Social	67	36,0
Não analisadas	8	4,3
Sem eleição	26	14,0
Total	186	100

Fonte: Própria do autor

Do ponto de vista de um *enfoque matemático*, o que para um especialista resultaria relevante seria a relação entre a forma escolhida e os pontos de apoio, que teriam esta forma quando fossem utilizados para tampar um buraco. Com este critério, a análise se baseia em detectar qual das formas, ao ser manipulada, é mais improvável que se caia dentro do próprio buraco. A geometria dos três tipos de formas implicados nos permite assegurar que é o círculo, por ter diâmetro constante, a única das três formas que não pode cair dentro do próprio buraco, a partir de qualquer manipulação que façamos com ela, sempre que o diâmetro da tampa seja ligeiramente superior ao diâmetro do buraco em questão.

Ao analisar as respostas dadas pelos 186 estudantes do 3º e 4º da ESO, ao problema dos bueiros, em função de um enfoque matemático, observamos que apenas 6,5% (12 estudantes) elegeram tal enfoque, atribuindo ao mesmo um raciocínio semelhante ao descrito anteriormente, ou seja, as respostas se referem em algum sentido ao fato de a tampa circular ser a única que não cai pelo buraco. Um exemplo prototípico de resposta é dado a seguir.


Al sacar la tapa con una palanca en la retangular te puede caer para dentro , en la cuadrada creo que tambión (en diagonal) , pero no estoy seguro(s) y en la redonda no se podría colar.

Ao retirar a tampa com uma ferramenta, a retangular pode cair para dentro, a quadrada creio que também (em diagonal), mas não estou certo, e a redonda não cairia.

Ao analisarmos o problema desde um *enfoque físico*, podemos, por exemplo, observar soluções que se ligam à capacidade de facilitar a entrada de líquidos e à questão da resistência para suportar pesos de diferentes objetos, que poderão se apoiar ou se sobrepor na tampa. Com respeito à capacidade, a forma circular é a que maximiza a área de um recinto a perímetro fixo, pelo qual parece ser a de custo mais econômico para permitir a entrada de certa quantidade de líquido. Com respeito à resistência, ainda que esta dependa da qualidade de construção da tampa, podemos afirmar, por exemplo, que a disposição radial das tensões que ocorrem ao submeter os três tipos de tampa a uma carga, também nos permite concluir que é a forma circular a que melhor se adapta para repartir estas tensões, de forma equilibrada sobre cada um dos seus pontos exteriores.

Dos 186 estudantes da amostra, 39,2% se enquadram no enfoque físico. Suas eleições remetem ou a questão da resistência, se referindo, por exemplo, ao fato de que a circular não tem esquinas, já que esquinas deixam as outras formas mais frágeis porque podem se quebrar, ou elegem, por exemplo, em função de facilitar a entrada de água. Um exemplo prototípico é dado a seguir:

Si el agua va en una pendiente desalojaria más agua una alcantarilla circular

Se a água desce de uma ladeira despejaria mais água em um bueiro circular

A análise desde problema, a partir de um enfoque *social*, pode levar em conta, por exemplo, a acessibilidade dos bueiros para permitir determinados trabalhos dentro deles. De modo que se revela a forma cilíndrica como a mais adaptada para introduzir o corpo humano, como também diversos objetos partindo de uma superfície fixa determinada.

36,0% do total da amostra de 186 estudantes se enquadram no enfoque social, atribuindo suas respostas à acessibilidade, ao movimento dentro do buraco para fazer limpeza, como também pelo fato de que as circulares evitam furar os pneus dos carros, conforme ilustração a seguir.

Las ruedas de lo carros podrian atascarse en incluso romperse con las rectangulares, con las tapas cuadradas ya era más difícil y con la circular creo que sería más complicado

As rodas dos carros podem ficar presas e inclusive furar com as retangulares, com as quadradas já é mais difícil e com a circular seria muito mais complicado.

Seja pelo enfoque que for, a solução ótima do problema se constitui no uso das tampas circulares, por serem as que apresentam menos inconvenientes desde os três raciocínios mencionados.

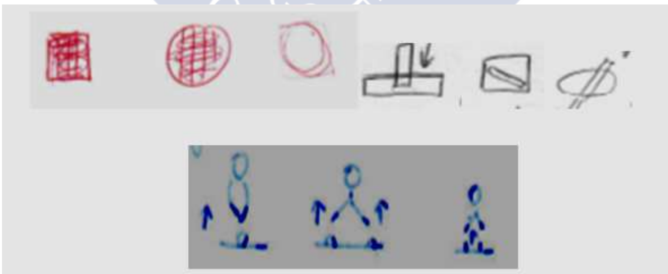
Poderíamos considerar, ainda, que as formas das tampas não deveriam ser diferentes das formas das tubulações dos bueiros (forma circular). Neste caso, a tampa de forma circular mostra, desde o ponto de vista matemático, ser a única que não se cairia pelo buraco, por ser seu diâmetro maior que a diagonal do quadrado ou do retângulo. Neste sentido, desde os enfoques físico e social, seria mais difícil justificar a tampa circular como solução ótima, mas para este caso, se trataria de uma generalização complexa do problema ao que não pretendemos abarcar neste momento.

Ainda entre as respostas, estão 4,3% que apresentam rasuras, inelegíveis, sem focos ou as do tipo, não sei e que classificamos numa categoria chamada “não analisadas”. Em 14,0% das respostas, estão as que não se enquadram em nenhum dos três enfoques, proposições do tipo: porque as anteriores não apresentavam utilidade da forma como estavam, que classificamos como “sem eleição”.

De modo geral, nos dados apresentados, encontramos que uma parcela significativa de nossa amostra, aproximadamente 18% (4,3% + 14,0%), configura-se entre os que não elegeram ou aqueles que não conseguimos identificar entre as suas escolhas algum enfoque. Enquanto isso, podemos observar que, aproximadamente 82% optaram pelos enfoques matemático, físico e social, e que a grande maioria, quase 76% deles, escolheram os dois últimos, restando praticamente 6% para os que elegeram o enfoque matemático.

A impressão inicial que apresenta os dados é de uma forte tendência à escolha dos enfoques físico e social, deixando em um segundo plano o matemático.

Ainda dentro da perspectiva das eleições, contudo partindo desde a origem das preferências, podemos afirmar que a percepção espacial do sujeito pode interferir em sua eleição por um dos enfoques anteriormente descritos (Alsina et al 1997). Nas respostas dos estudantes, observamos várias tentativas de representar a situação por meio de um desenho, como uma forma de contextualização de sua percepção espacial. Os desenhos e esquemas dos bueiros, feitos pelos alunos podem assumir um papel para facilitar ou dificultar a resolução.



3.1.3. Análise desde a Teoria de Jogos

Desde a teoria de jogos uma otimização no tocante ao custo/benefício seria encontrar o caminho mais curto, desde a eleição de um dos enfoques até a resposta, com incógnitas, tais como: maior capacidade de recordo (memória), necessidade de cálculos, conhecimentos prévios de um bueiro, menor tempo para a resolução, maior estímulo etc., deverão influenciar na decisão do resolutor.

No tocante aos teoremas minimax e maxmin da TJ, a dificuldade se radica na determinação dos pesos de cada alternativa associados aos coeficientes de segurança, assim, toda vez que se for escolher um enfoque, teremos a construção de uma tabela "mental" formada imediatamente depois da leitura do problema, e cuja velocidade de montagem será proporcionalmente aos conhecimentos prévios e às crenças do resolutor, conjuntamente com seu nível de segurança de cada um dos enfoques eleitos.

Suponhamos que o aluno se depare com a seguinte situação: A fila é formada pelos enfoques matemático, físico e social, enquanto que a coluna é formada pelos conhecimentos associados ao nível de segurança, por cada transformação provocada pelos inconvenientes. O quadro seguinte fornece a probabilidade de acerto de cada enfoque *vs* conhecimento e segurança. Nota-se que, nesse caso, os pagos são representados pelas probabilidades que conseguirão o resolutor, ao eleger um determinado enfoque.

Quadro 6 – Pagos/Probabilidade de acerto de enfoque X segurança

	Segurança		
Enfoques	**Retangular – quadrada**	**Quadrada – circular**	**Retangular – circular**
Matemático	0,5	0,3	0,6
Físico	0,6	0,7	0,8
Social	0,8	0,5	0,9

Fonte: Própria do autor

A analise feita pelos teoremas Minmax e Maxmin, para este exemplo, deverá obedecer a critérios diferentes dos tradicionalmente utilizados pela teoria, se na TJ utilizamos o mínimo do máximo, que seria o valor 0,6 (retangular – circular) e o máximo dos mínimos 0,6 (retangular – quadradas). Observa-se, claramente, que devemos mudar de estratégia de análise, uma vez que as descrições dos inconvenientes estariam ligadas somente às probabilidades individuais de cada enfoque, o que não é visto na tabela anterior, desta maneira, a análise deve ser feita ponderando cada alternativa à sua respectiva possibilidade de êxito, ou seja, a descrição dos inconvenientes deverá estar subordinada a sua chance de acerto.

Assim, nossa analise pelos teoremas toma uma nova forma e passa da tradicional para uma das fases; explicando melhor, se na descrição dos inconvenientes das tampas retangulares para quadradas, o resolutor opta pelo enfoque social (maior ganho = possibilidade de acerto), na segunda transformação, a mesma probabilidade se vê prejudicada diante do menor ganho, de modo que, se utilizarmos a regra da multiplicação de probabilidades, obteremos um novo quadro de valores, como se segue:

Quadro 7 – Novos Pagos/Probabilidade de enfoques X segurança

	Segurança	
Enfoques	**Retangular – quadrada**	**Quadrada – circular**
Matemático	0,5	0,15
Físico	0,6	0,42
Social	0,8	0,40

Fonte: Própria do autor

Logo, podemos concluir que a melhor opção é pelo enfoque físico, o qual proporcionará melhor chance de êxito. De não ser assim, se o resolutor se propõe descrever os inconvenientes diretamente, a melhor escolha recairá sobre o enfoque social.

3.1.4. Análise desde a Teoria das Situações Didáticas

Desde a TSD, inicialmente iremos analisar as decisões dos alunos ao problema dos bueiros, a partir das devoluções adidáticas.

O problema dos bueiros, desde seu enunciado, está marcado pela intencionalidade de se por em jogo a devolução de uma situação didática, frente a uma situação real, isto é, o visto e conhecido na sala de aula e sua aplicação direta em uma situação real. Tal fato leva o estudante a uma oportunidade de abordar seus conhecimentos e suas crenças prévias, permitindo-lhe assim, gerar conjeturas e hipóteses. O que se pede no enunciado é a descrição dos inconvenientes (concebendo-se a existência deles), ademais, a sucessão das operações, bem como, as descrições dos inconvenientes estão a cargo individual do resolutor, esta descrição é que chamamos de devolução e, esse problema, se dá em três etapas: 1) *aproximação puramente imaginativa - ingênua*; 2) *devolução de uma preferência;* 3) *a situação didática e a devolução de uma situação a-didática*.

Ao classificar as respostas dos estudantes de nossa amostra, segunda essas etapas, temos a seguinte tabela de frequência:

Tabela 10 – Frequência das devoluções didáticas

Etapa	Alunos	%
Primeira	53	28,6
Segunda	61	33,0
Terceira	47	25,4
Não se enquadra	24	13,0
Total	185	100,0

Fonte: Própria do autor

Em cada etapa também podemos organizar as tipologias de resoluções apresentadas segundo as etapas e enfoques eleitos, que dá origem a um novo quadro.

Quadro 8**:** Tipologias de resposta em função das etapas e dos enfoques

Etapa	Tipologia de resolução	Enfoque
Primeira	Facilita a entrada de água, impede que se perca pelas esquinas.	Físico e social
Primeira	Estética, ocupa menos espaço.	Social
Primeira	Menor tamanho	Matemático
Segunda	Facilidade de manipulação da própria tampa, acessibilidade (movimentos) em seu interior,...	Físico e social
Segunda	Adaptam-se às encanações (mas não se percebe que podem estar pensando que antes foram retangulares ou quadradas, respectivamente, sem o qual esta resposta perde solidez) Adequação a outro conhecimento.	Matemático, físico e social
Terceira	Evitar que se caia pelo seu próprio buraco	Matemático
Terceira	Resistência (as esquinas seriam mais frágeis), se ganha estabilidade.	Físico e social

Fonte: Própria do autor

Em se tratando da primeira etapa, *aproximação puramente imaginativa – ingênua*, inicialmente, o aluno cria em sua mente a situação dos bueiros, imaginando-os, como algo que não tivesse tampas e como seria o buraco para, a partir de então, imaginá-los com as respectivas tampas retangulares, quadradas ou circulares, sem atribuir a mudança destas aos inconvenientes, daí a aproximação ingênua. Vejamos um raciocínio atribuído por um dos estudantes:

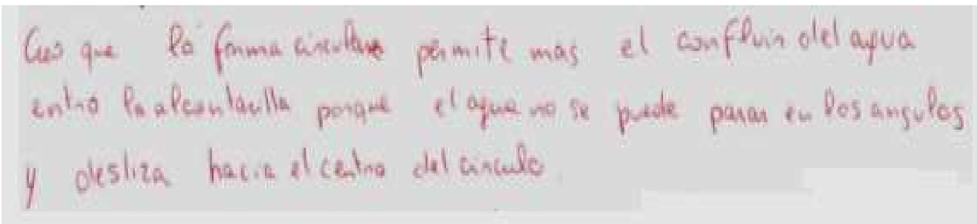
> Lo primero que pensé, es que los incon-
> venientes de las tapas rectangulares
> y cuadradas dejarían restos de por-
> quería en las esquinas o en las
> juntas de las tapas.
>
> *A primeira coisa que pensei foi que os inconvenientes das tampas retangulares e quadradas deixariam restos de porcarias nas esquinas ou na junção das tampas.*

28,6% (53 estudantes) se enquadram nessa etapa de aproximação ingênua. Os exemplos de respostas fogem à obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática, que poderiam gerar, conforme Alsina et al (1997), uma ambiguidade de pensamentos, redundância, uso de metáforas e criação de termos semiológicos novos. Ao invés disso, modificam a linguagem, adaptando-a as informações que querem comunicar. Assim, também os alunos falam que os inconvenientes são porque as tampas “são mais econômicas!” ou que “são mais bonitas!”, ou seja, as respostas são muito simples: ao olhar para um bueiro já se podem ver os inconvenientes que se quer descrever. De tal modo que a sua resposta pode ser associada à falta de conhecimento do que venha a ser um bueiro ou por ignorar sua funcionalidade.

Já na segunda etapa, *devolução de uma preferência*, os alunos compreenderam que se trata o problema e começa a trabalhar com os contextos em uma experimentação seletiva, isto é, experimentar em função do contexto do que se pede e dos instrumentos disponíveis, elegendo e comparando entre si as tampas, entretanto a devolução de uma preferência em uma eleição entre as tampas retangular e quadrada pode não ser os mesmos da escolha entre a quadrada e a circular.

Para explicar melhor, vejamos o exemplo: se a preferência de uma resposta de um inconveniente entre as tampas retangular e quadrada recair pelo enfoque físico (maior resistência) entre as tampas quadrada e circular, pode ser que recaia pelo enfoque social (facilidade de acesso pelas tubulações), temos uma configuração não linear para as devoluções de uma preferência, não obstante, a existência de uma relação transitiva de preferência e da função utilidade, conforme podemos observar nas respostas dadas pelos estudantes de nossa amostra ao se referir à facilidade de manipulação da tampa e de acessibilidade no interior das tubulações ou ainda porque as tampas se adaptam às tubulações/encanações.

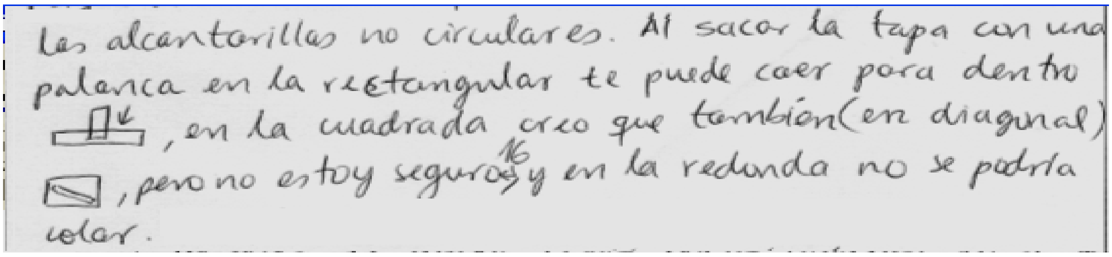
A devolução de preferência pode se dar de forma linear ou não por parte do aluno, ele pode fazer passo a passo à descrição dos inconvenientes, descrevendo, em primeiro lugar, os inconvenientes que transformaram os bueiros retangulares em quadrados para depois descrever aqueles que transformaram quadradas para circulares, ou então, pode fazer de uma só vez, isto é, transformando de retangulares diretamente para circulares. Neste caso, a devolução da preferência não se faz de forma linear, se não de forma abrupta, o que leva a dois pensamentos, ou bem a um erro primário ou ingênuo, ou bem necessitará o resolutor de um nível de conhecimento prévio elevado e, portanto, um nível de segurança também elevado. No exemplo a seguir podemos observar como a devolução se dá de uma forma não linear, apresentando um erro primário de raciocínio.


Creo que la forma circular permite mas el confluir del agua entro la alcantarilla porque el agua no se puede parar en los angulos y desliza hacia el centro del circulo

Acredito que a forma circular permite mais o fluir da água entrar no bueiro porque a água não pode parar nos ângulos e desliza até o centro do circulo.

De modo geral, nesta segunda etapa, se enquadraram um terço 33% (61 estudantes) da amostra, em sua maioria apresentando uma estratégia não linear.

Na terceira etapa de devolução deste problema, *a situação didática e a devolução de uma situação a-didática*, o aluno entende que para se obter uma resposta convincente deverá descrever os inconvenientes confrontando-os um a um (naturalmente que estamos trabalhando com a hipótese da devolução ser de forma sequencial) dentro de cada fase do processo, até que esteja plenamente convencido de que tenha realizado uma boa eleição, do contrário, sua resposta certamente apresentará um baixo nível de segurança, o que significará (para o caso que tenha acertado) que seu acerto foi fruto da "casualidade". Assim sendo, na segunda fase (transformação da tampa quadrada em circular), seu nível de segurança cairá ainda mais, a tal ponto que a tal casualidade deixará de existir, isto é, o resolutor terá um grau de incerteza tão grande que, pode ao relatar o inconveniente optar pelo mesmo anteriormente eleito, ou seja, se a primeira escolha recair pelo enfoque físico (uma maior resistência) na descrição do inconveniente que transformara as tampas retangulares em quadradas (mesmo que seja fruto da casualidade), este também deverá ser o inconveniente escolhido que transformara a tampa quadrada em circular.


Las alcantorillas no circulares. Al sacar la tapa con una palanca en la retangular te puede caer para dentro, en la cuadrada creo que también (en diagonal), pero no estoy seguro 16 y en la redonda no se podría colar.

Os bueiros não circulares. Ao se tirar à tampa com uma ferramenta não retangular você pode deixar cair para dentro [desenho], na quadrada acredito que também (em diagonal) [desenho], mas não tenho certeza, e na redonda não poderia cair.

Neste exemplo de resposta temos um raciocínio que se dá de modo sequencial, confrontando uma tampa com a outra e está claro a escolha pelo enfoque matemático e a certeza de que a tampa circular não cairá pelo buraco. Entretanto, podemos notar também, certo grau de incerteza quando o estudante analisa a tampa quadrada, impedindo ele de afirmar que a circular seria a única que não cairia.

25,4% dos estudantes se enquadram nesta etapa de devolução, sendo a maioria de suas respostas referentes à questão de resistência e a estabilidade, dentro de um contexto mais físico que social.

Percebe-se com o exemplo de resposta, explicitado anteriormente, como a devolução se dá do didático ao a-didático, que há uma reprodução do que se aprendeu em sala de aula (situação didática), do uso de um conhecimento prévio e de uma transposição para uma situação real (situação a-didática), dando indícios de que o resolvedor é conhecedor das regras (implícitas) impostas pela questão. Assim, a devolução não se faz sobre o objeto de ensino, mas sobre as situações que o caracteriza. Pensando na devolução tal como Brousseau conceituou, esta tarefa foi concebida de maneira a provocar o aparecimento dos conhecimentos prévios dos alunos em suas respostas (espontâneas ou não). A intencionalidade didática de se verificar um conteúdo (os inconvenientes), sem demonstrar visivelmente esta relação, está cedendo ao estudante uma parte da responsabilidade pela aprendizagem.

No geral, tem-se que 87% dos alunos responderam a questão, encontrando de alguma forma uma resposta para a mesma, 58,4% delas que demonstram certo conhecimento sobre os bueiros ou sobre sua funcionalidade, buscando meios de justificar a sua linha de raciocínio, embora pouco algorítmica, mas que vão além de uma simples informação ou de dar um sentido estético; 28,6% deles, não examinaram seu sentido e sua validade. Os estudantes, nesta situação, mostraram certo conhecimento, mas não, necessariamente, o saber, consequência de um processo de instrução anterior ou até mesmo da situação apresentada, que segundo Brousseau (1986) só evolui em função das decisões e de suas consequências, em que o aluno reflete e simula tentativas ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, através da interação com o “meio”, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema.

Ainda dentro da TSD, faremos uma breve análise olhando para a questão do contrato didático, especificamente para a ruptura do mesmo.

Nessa questão do bueiro, observamos um grande contrato didático, cuja temática é a resolução de problemas. Com a proposição da tarefa não standard, estamos propondo a quebra de um paradigma, e se instala aí uma ruptura do contrato, o problema pede uma estratégia de resolução que não está ao alcance imediato do aluno, não compatível com seus estudos no momento, uma vez que, em uma prática pedagógica normal, espera-se que os problemas propostos tenham uma lógica de solução próxima ao conteúdo estudado. Talvez este tipo de problema induza o estudante ao seguinte entendimento: como a atividade não apresenta números em seu enunciado, então sua resposta não necessariamente será matemática, uma prova deste raciocínio é o de que, aproximadamente, 6% dos alunos optaram pelo enfoque matemático.

Em um segundo momento de ruptura, podemos encontrar nos 18,3% (14% + 4,3%) dos estudantes da tabela 4.1 - que não mostraram interesse em resolver a questão - apresentando respostas evasivas, do tipo: “não sei” ou “porque não tinha utilidade da forma como estavam”.

Uma terceira e também muito interessante ruptura é a de que o aluno seja um sujeito epistêmico (que atua por exigência da situação, com base em razões intelectuais) e que prevaleça sobre o sujeito didático (que atua conforme as pressões do professor, por razões didáticas), isto é demonstrado por 75,2% (39,2%+36%) dos estudantes da tabela 4.1, que optaram pelos enfoques físico e social.

Uma quarta possível ruptura poderia ter se dada, mas que, infelizmente, não nos foi possível provar: o fato de o problema ser um desencadeador de um novo saber. Ao aceitar o desafio de responder o problema, pode ter se desencadeado, no aluno, um processo de aprendizagem. Infelizmente, não foi possível verificar se houve uma extrapolação de uma situação didática para uma situação a-didática.

3.1.5. Análise desde a Tomada de Decisão

Ao considerar neste estudo a Tomada de Decisão como o centro das discussões e como pressuposto de que as decisões dos alunos - ao tentar resolver uma situação-problema, estarão atreladas a processos de eleição, a conceitos da Teoria de Jogos e a conceitos da Teoria das Situações Didáticas – faremos, inicialmente, uma análise desde a tomada de decisão em si, para, em seguida, tecer algumas considerações sobre o modo pelo qual percebemos o enlace dos processos de decisões com esses eixos teóricos.

No processo de decisão, as ações postas em jogo estiveram, inicialmente, relacionadas aos enfoques matemático, físico e social, dado o enunciado aberto do problema e, em um segundo momento, estiveram subordinadas a um conjunto de fases próprias do processo de decisão. Ou seja, as condições definidas no problema, os critérios subordinados a cada um dos enfoques, a busca e análise de alternativas em função dos critérios eleitos, formaram o conjunto oportunidade (Elster, 1989). A partir daí, a decisão que toma o aluno é colocada em execução, valorando, simultaneamente, se os objetivos são alcançados e se as utilidades previstas são satisfeitas. Por exemplo, desde o ponto de vista matemático e desde a fase de seleção dos critérios, as ações estiveram relacionadas com o critério de maior ou menor probabilidade de que a tampa pudesse cair pela tubulação, elegendo entre as três alternativas disponíveis (retângulo, quadrado e círculo), aquela que por ter a propriedade de possuir diâmetro constante (círculo), proporciona a forma ótima para resolver o problema. Esta decisão está relacionada com o fato de que, se a tampa cair pela encanação, deve-se ao diâmetro (ou diagonais) das três formas. Já no enfoque físico e, novamente tendo em conta a fase de seleção de critérios, os estudantes consideraram ao menos as ações que lhe permitissem levar em consideração os critérios de capacidade de escoamento (superfície aberta à entrada de líquido), e de resistência, ao suportar pesos. Desde o enfoque social e à seleção de critérios, os procedimentos estiveram dirigidos para a análise da eficácia das formas consideradas para facilitar a acessibilidade de entrada e saída dos bueiros, assim como ao custo econômico da construção de tais tampas e da adaptação das mesmas às formas dos canos ou tubulações. Também podemos considerar como critérios ou atributos importantes a se ter em conta, neste tipo de problema, as seguintes propriedades: a) o círculo possui um diâmetro constante; b) existindo igual perímetro, o círculo é a forma que abrange maior área (daí tem-se que a forma circular é a que permite melhor acessibilidade; c) a resistência a cargas ou tensões que se exerce sobre a forma circular se reparte equilibradamente em todos os pontos de seu perímetro.

Entre os elementos constitutivos de um processo de decisão, neste problema, se encontram: o *conjunto oportunidade*, o *ambiente ou contexto estrutural* e a *função de utilidade (ou avaliação dos resultados)*.

Dada a existência do conjunto de alternativas (conjunto oportunidade), destacado na análise do eixo das eleições, iremos tratar aqui dos outros dois elementos restantes.

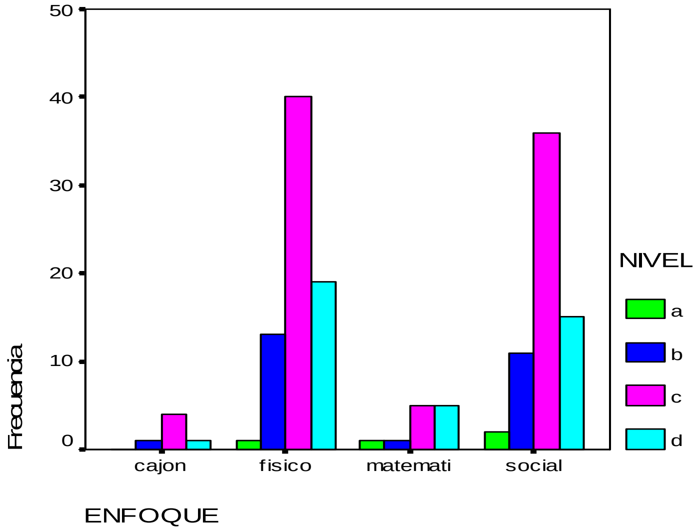
O ambiente ou contexto estrutural, tal e como foi indicado no marco teórico, se trata de uma situação de incerteza, caracterizada não somente pela presença de certo grau de risco (acerto ou erro), como também pelo nível de segurança da resposta à eleição do enfoque[15]. Uma vez eleito o enfoque, existem propriedades físico-matemáticas ou convenções de caráter social que permitem atribuir um valor de maior certeza ou falsidade a cada uma das eleições ou tomada de decisões que adote o aluno. Ou seja, se optar pelo enfoque matemático, o valor de probabilidade subjetivo associado à solução “tampa circular”, tenderia a um valor superior aos outros. Ao não ser por uma maior certeza ou falsidade, há caso em que o valor probabilístico será dado pelo grau de segurança baseado em seus conhecimentos prévios, de igual forma, este procedimento será usado também para o enfoque físico. Entretanto, com relação ao social, este valor pode ter umas diferenças menos acentuadas que nos anteriores, sobretudo, se nos referimos ao critério de custo econômico, em que o círculo, apesar de exigir uma menor

[15] Escolhe-se o enfoque no qual se obtenha maior probabilidade de acerto, baseado na crença ou experiência anterior.

demanda de material para permitir maior afluência da água, pode ter um custo maior, devido a, por exemplo, o pouco aproveitamento das sobras de material. Esta mesma impressão é demonstrada com relação à incerteza pelo grau de segurança, nos levando a crer que o aluno pode ter mais confiabilidade nas eleições do enfoque social, que nos demais enfoques.

Um estudo sobre o nível de segurança dos estudantes, ao responderem esta questão, foi feito. Logo após responderem a questão, era lhes solicitado para assinalar o nível de segurança após respondê-la: a) muito seguro; b) bastante seguro; c) pouco seguro; d) nada seguro. No gráfico, a seguir, é possível observar uma ligeira diferença entre o número de alunos que se sentiram muito seguros (opção a) na decisão pelo enfoque social, quando se comparado aos outros dois enfoques.

Gráfico 1 – Representação dos dados da eleição por enfoque e nível de segurança



Fonte: Própria do autor

Ainda nesse gráfico, é possível claramente perceber o contexto de insegurança gerado pela questão, quando o estado de segurança das respostas da grande maioria dos estudantes ronda pelas alternativas c e d, respectivamente: pouco e nada seguros.

Seja por propriedades físico-matemáticas ou convenções de caráter social, o fato é que está representada uma situação de incertezas, estando o conjunto de alternativas influenciado por variáveis subjetivas que podem ser incorporadas às decisões dos sujeitos, variáveis da ordem das crenças e experiências sociais relacionadas, por exemplo, ao saneamento urbano ou outras experiências que podem condicionar as suas respostas. De modo geral, isso refletiu no nível de segurança, dada a questão, independentemente de seu enfoque, em que se nota um índice de, praticamente, 70% (47,3% + 22,6%) de estudantes que se sentiram pouco ou nada seguros, conforme pode ser apreciado na tabela a seguir:

Tabela 11 – Tabela do nível de segurança geral dada à questão dos bueiros

Nível	Frequência	%
A	5	2,7
B	26	14,0
C	88	47,3
D	42	22,6
Sem especificação[1]	25	13,4
Total	186	100

Fonte: Própria do autor

Nesse contexto, vale ressaltar que no processo de resolução de problemas, muitas vezes, o conhecimento ou experiências anteriores acabam servindo de entraves para o desenvolvimento de outras alternativas de respostas e de outras estratégias de raciocínio. Para este caso, em particular, as experiências sociais e crenças são entraves quando se percebe que os inconvenientes se dão em virtude dos enfoques físico e social, e não do matemático.

Ao fazermos uma análise desde a *função de utilidade (ou avaliação dos resultados)*, podemos perceber alguns de seus elementos: eleger como alternativa a tampa circular porque não tem esquinas e assim evitar acidentes com os carros, isto é, a utilidade vista pelo aluno, nesta alternativa, pode estar associada a uma apreciação pessoal condicionada por seu meio ou, em outras palavras, por perceber que esta alternativa satisfaz a uma necessidade vinculada a este meio. Tendo em conta o critério básico de racionalidade, em que todo processo de adoção de decisões deveria ser encaminhado a alcançar a maior utilidade possível para o sujeito, o valor das alternativas eleitas será dado, portanto, pela eleição que se faz; desta forma, e considerando que em um contexto de tomada de decisões, se tem um conjunto de alternativas para se eleger, deverá ser estabelecida uma relação de preferência baseada nas utilidades percebidas por ele.

Assim, teremos para esta questão a seguinte relação transitiva de preferência:

Se $t_{circular}\ \mathbf{p}\ t_{quadrada}$ e $t_{quadrada}\ \mathbf{p}\ t_{\text{retangular}}$; então, $t_{circular}\ \mathbf{p}\ t_{\text{retangular}}$.

Desse modo, a decisão adequada para o sujeito decisor corresponde ao elemento maximal**,** cuja alternativa é a que mais *úteis* reportam a ele. Está claro que este elemento não foi o mesmo para todos os alunos que responderam à questão do bueiro, posto que é uma medida pessoal de utilidade intrínseca de cada um, e parece estar influenciada por variáveis, como crenças, experiências e conhecimentos prévios, como já vimos. Desta forma, é possível construir a seguinte matriz, em que a eleição ou a tomada de decisão recai sobre o elemento maximal da matriz.

Tabela 12: Matriz representativa do elemento maximal

Tipos de Tampas

	A \ P	$P(t_{cir})$	$\cdots$	$P(t_{qua})$	$\cdots$	$P(t_{ret})$
	E_m	**1**	**…**	**0**	**…**	**0**
	:	**:**	**…**	**:**	**…**	**:**
Enfoques	E_f	**1**	**…**	**0**	**…**	**0**
	:	**:**	**…**	**:**	**…**	**:**
	E_s	**1**	**…**	**0**	**…**	**0**

Fonte: Própria do autor

Sendo que, o número 1 representa a totalidade das utilidades para cada um dos enfoques.

A partir dessa matriz, observamos que a resposta em qualquer dos contextos/enfoques, sempre estará condicionada a uma solução de preferência, e assim sendo, teremos a mesma relação de preferência anteriormente dada, ou seja, se:

$t_{circular}\ \mathbf{p}\ t_{quadrada}$ e $t_{quadrada}\ \mathbf{p}\ t_{\text{retangular}}$; então, $t_{circular}\ \mathbf{p}\ t_{\text{retangular}}$.

Ao fazer uma análise dos processos de decisões, e buscando uma relação destes com o contexto da teoria de jogos, foi possível observar que a pouca familiaridade com o problema, fez com que o resolutor decidisse pelo enfoque que lhe exigiu menos esforço (de leitura, de organização, de raciocínio etc), aquele que lhe trouxe o maior custo-benefício, sendo o *custo* representado pelo esforço e chances de êxito e *benefício* pela solução efetiva do problema. Estando o resolutor com um propósito de assegurar algo bom ou evitar algo mal, tem um problema de *maxmin* (Tolman, 1959). Assim, o que se vê é que 130 estudantes (70% do total) não se sentiam bastantes seguros para decidir por um enfoque, quando este exigia um grau de trabalho maior, especificamente, o enfoque matemático.

Em se tratando de perceber as aproximações entre a perspectiva da tomada de decisão e a Teoria das Situações Didáticas, é possível, para o caso específico desta questão, dizer que, desde a infância os alunos são *treinados* a adivinhar as intenções do seu entorno, eles são hábeis em dar respostas esperadas perante as circunstâncias didáticas e diante de outras questões, mesmo sem examinar seu sentido e sua validade. Assim, este problema trouxe traços de uma intenção didática determinada pelas respostas dos estudantes, o que nos permitiu encontrar evidencias, tanto do contrato didático, como de uma transposição de uma situação didática em uma a-didática e vice-versa.

Embora esta questão dê margem a inferir que, tanto as eleições como as tomadas de decisões estiveram mais condicionadas ao cotidiano fora do ambiente escolar, as respostas apresentaram evidências de regras de um contexto educacional. Assim, encontramos nas respostas dos estudantes ao problema dos bueiros, um conjunto de alternativas em função dos enfoques matemático, físico e social e em função da devolução didática (descrição dos inconvenientes), operação realizada nas três etapas (*aproximação puramente imaginativa- ingênua, devolução de uma preferência* e *a situação didática e a devolução de uma situação a-didática*).

Ao falar de conflitos de decisões, é possível perceber outras aproximações entre as teorias tratadas aqui. Os conflitos dos estudantes não se relacionam apenas às possíveis causalidades das eleições, das decisões ou na busca do resultado ótimo, mas também entre o pensamento do aluno e resposta esperada pelo professor. Vimos que os conflitos podem ser explicados, sobretudo, pela Teoria de Jogos e pela Teoria das Situações Didáticas, tendo sua origem tanto em contextos de conhecimentos prévios e crenças, como no contrato didático presente na relação professor-aluno.

Finalmente, ao dirigir nosso olhar para o contexto geral de Resolução de Problemas, conforme mencionado por Polya (1965), observamos que, em uma primeira fase de desenvolvimento do problema, os estudantes - apesar de reconhecer (implicitamente) que o problema possuía muitas alternativas ou sugestões de respostas para os “inconvenientes” - apresentavam soluções, em sua grande maioria, derivadas dos enfoques físico e social, influenciadas por crenças ou conhecimentos prévios, e assim, restringiram a interpretação/leitura do enunciado do problema, gerando ademais, dificuldades no estabelecimento dos pesos e valores para cada alternativa e centrando suas ações em justificar argumentos baseados em suposições não explícitas no enunciado, abdicando da construção do conjunto oportunidade. Tudo isso contribuiu, inicialmente, para condicionar as decisões dos alunos. Para aqueles que traçaram um plano e buscaram estabelecer relações entre os elementos do problema, houve um incremento de possibilidades de novas propostas, ainda que baseadas em um modelo não matemático.

3.2. PROBLEMA 2: ONDE ESTÁ O CARRO

ONDE ESTÁ O CARRO?

Em um concurso televisivo:

- *O concursante pode eleger entre três portas: atrás de uma delas há um carro e atrás de cada uma das outras há uma cabra.*
- *Uma vez realizada a eleição, o apresentador, que sabe onde está o carro, abre uma das portas não escolhidas, atrás da qual existe, naturalmente, uma cabra.*
- *Agora o apresentador dá ao concursante a possibilidade de mudar a porta escolhida anteriormente pela que ainda está por abrir.*

Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

Justifique a sua opção, respondendo:

e) *Considera provável resolver o problema em um tempo breve?*
f) *Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema?*
g) *Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema?*
h) *Seria fácil de explicar a sua escolha?*

"Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso mudar de porta". Assim perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto?

"Prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ela retifique seus argumentos". Você concorda com estes estudiosos?

3.2.1. Considerações Iniciais

Como dito no capítulo da metodologia, o problema *onde está o carro*, também conhecido como Dilema de Monty Hall, foi apresentado pela primeira vez em um concurso televisivo, a proposta era de um concursante escolher uma das três portas, ganhando o prêmio que nela se esconde. Ao apresentar essa questão para os estudantes, pretendemos que eles respondam utilizando métodos e ferramentas por eles conhecidos. De modo geral, os estudantes podem fazer uma leitura racional do problema e adotar procedimento(s) matemático(s) e/ou estatístico(s), serem influenciados por outras pessoas de elevado conhecimento na matéria ou tomar decisões segundo conhecimentos próprios.

Essa questão foi por nós escolhida, pois nela se encontra um contexto de riscos e incertezas (e, portanto, a utilização implícita da teoria de jogos), bastante apropriado para observarmos o comportamento racional dos estudantes ao resolvê-la.

A questão *onde está o carro*, tal como apresentada originalmente, se encerra com a pergunta: “Para você, é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?”. Entretanto, com a pretensão de conhecer melhor as decisões dos alunos, acrescentamos um conjunto de perguntas às quais são apresentadas na continuação da original, forçando o resolutor a fazer uma série de justificativas dos caminhos ou das condutas de raciocínio por eles seguidos.

Dessa forma, ao resolver esse problema, o aluno deverá descrever:

“Qual (is) o (s) caminho (s) que lhe levaram a escolher esta opção?”.

Neste item, é pedido ao estudante explicitar quais as opções ou conjunto de alternativas que o levaram a sua escolha.

Com a intenção de ajudar a construção do conjunto oportunidade, propusemos algumas justificativas para a escolha anterior, quais foram:

a) Considera provável resolver o problema em um tempo breve?
b) Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema?
c) Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema?
d) Seria fácil de explicar a sua escolha?

Nossa intenção com esta série de perguntas é averiguar quais fatores internos (didático) ou externos (conhecimentos prévios, crenças etc) têm influenciado na eleição.

Nas perguntas seguintes, a primeira, marcada pela citação de Buescu (2002), dizia: "Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso cambiar de porta"; perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto? E na segunda, marcada pela afirmativa, "prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ele retifique seus argumentos". Você concorda com estes estudiosos?

Neste caso, a intenção é saber se a opinião de algum especialista tem poder de influência nas escolhas pessoais de cada aluno.

Queremos ainda ressaltar que por se tratar de um problema que gerou (e ainda gera) muitas polêmicas e como não é nosso objetivo observar erros e acertos nas resoluções dos problemas, segundo modelos institucionais de referência, e sim conhecer as condutas, as reações de alunos diante de determinadas situações, não abordaremos aqui uma solução de referência para o problema *onde está o carro*. Para maiores detalhes sobre dita polêmica e modos de interpretá-la e resolvê-la apresentamos no anexo 02 um texto de autoria de Labraña (2001).

3.2.2. Análise desde a Eleição

De imediato, o problema força o resolutor a tomar uma decisão: fazer uma escolha tendo em conta o seguinte conjunto de alternativas:

A={Mudar de porta, Continuar com a porta escolhida, Ser indiferente}.

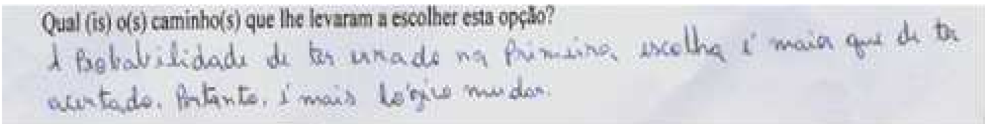
A frequência das respostas para o conjunto de alternativa pode ser apreciado a seguir:

Tabela 13: Frequência e percentual dos dados

Ação	Frequência	%
Mudar de porta	16	30
Continuar com a porta	11	21
Indiferente	26	49
Total	53	100

Fonte: Própria do autor

No tocante à *eleição mudar* de porta, identificamos, no total das 16 respostas, um destaque para duas estratégias de resolução: a primeira, respondida por 9 (nove) estudantes que perceberam vantagens com a mudança, ou seja, perceberam de início que a probabilidade de se obter êxito na eleição da porta que contém o carro é menor do que a probabilidade de escolher a porta com a cabra. Entretanto, apenas dois desses estudantes fizeram uso do cálculo formal, ou seja, $P(\text{carro}) = {}^{1}\!/_{3}$ e $P(\text{cabra}) = {}^{2}\!/_{3}$. Os demais justificam tais estratégias sem apresentar cálculos, como mostra o exemplo a seguir:

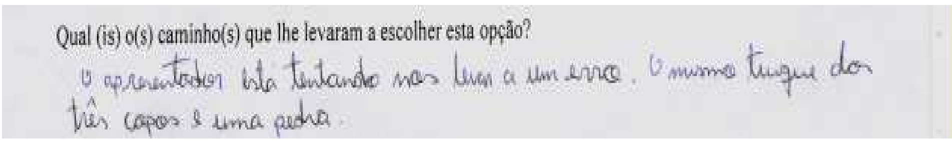

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
A probabilidade de ter errado na primeira escolha é maior que de ter acertado. Portanto, é mais lógico mudar.

A probabilidade de ter errado na primeira escolha é maior que de ter acertado. Portanto, é mais lógico mudar.

Na outra estratégia, que é realizada por 3 estudantes, estes apenas mencionaram que é por estudos probabilísticos, sem apresentar qualquer tipo de cálculo. Poderíamos interpretar tais raciocínios dizendo que os alunos se abstêm de uma avaliação "racional" dos resultados, que se dão mediante processos intuitivos, elegendo uma alternativa porque "algo ou alguma coisa" aponta para ela (Bueno, 2004).

Ainda nesta categoria de ação, 2 (dois) alunos atribuíram a que o apresentador está tentando enganá-los, um não justificou e uma resposta não tivemos condições de analisar.

Para os 11 estudantes que decidiram *continuar com a porta escolhida*, 3 (três), embora pareceram perceber um raciocínio probabilístico, suas respostas se atêm a suas crenças, a reflexões psicológicas ou a experiências prévias. 6 (seis) atribuíram a sua escolha ao fato de o apresentador persuadir ou tentar enganar o jogador; um diz não encontrar caminhos lógicos; e um atribui à lógica.

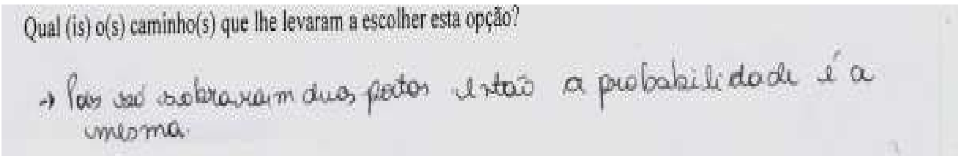

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
O apresentador esta tentando nos levar a um erro. O mesmo truque dos três copos e uma pedra.

O apresentador está tentando nos levar a um erro. O mesmo truque dos três copos e uma pedra.

O exemplo dado, faz-nos refletir que, condicionados por experiências prévias, os alunos fazem a conexão do problema dado com outras situações já conhecidas por eles, e tal conexão acaba influenciando seus raciocínios, impedindo-lhes, por exemplo, de fazer outras análises.

E no tocante à eleição *ser indiferente*, embora 26 alunos (49%) tenham escolhido esta opção, 12 argumentaram apenas que a escolha foi pela probabilidade, demonstrando perceber tal raciocínio probabilístico, mas sem apresentar qualquer tipo de cálculo; 4 (quatro) estudantes justificaram a sua eleição usando poucas expressões de cálculos (porcentagem e probabilidade); 5 (cinco) atribuíram suas respostas à sorte; 2 (dois) à lógica; 2 (dois) apresentaram raciocínios confusos que não tivemos condições de analisá-los; e um deixou em branco. De modo geral, podemos classificar suas ações em três importantes estratégias de resolução: a primeira é a de que o resolutor pareceu perceber um raciocínio probabilístico na resolução do problema, mas não apresenta cálculos; a segunda é que além de perceber tal raciocínio, utilizavam poucos cálculos para solucioná-lo, e a terceira, atribuíram a resolução à sorte. Os exemplos 1, 2 e 3 ilustram respectivamente tais estratégias.

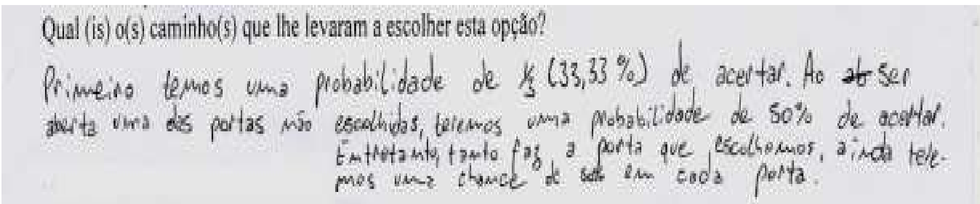
Exemplo 1:


Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

→ Pois só sobraram duas portas então a probabilidade é a mesma.

Pois só sobraram duas portas então a probabilidade é a mesma.

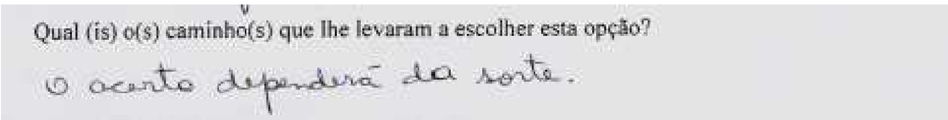
Exemplo 2:


Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

Primeiro temos uma probabilidade de 1/3 (33,33%) de acertar. Ao ~~ab~~ ser aberta uma das portas não escolhidas, teremos uma probabilidade de 50% de acertar. Entretanto, tanto faz a porta que escolhemos, ainda teremos uma chance de 50% em cada porta.

Primeiro temos uma probabilidade de 1/3 (33,33%) de acertar. Ao ser aberta uma das portas não escolhida, teremos uma probabilidade de 50% de acertar. Entretanto, tanto faz a porta que escolhemos, ainda temo suma chance de 50% em cada porta.

Exemplo 3:


Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

O acerto dependerá da sorte.

O acerto dependerá da sorte.

Seja qual for às escolhas que fazem, as justificativas que dão, embora aparentam perceber o raciocínio probabilístico por trás do problema, não apresentam estratégias de cálculos para resolver o problema.

Em concordância com Freitas (1994), ao falar da eleição racional, podemos dizer que o processo de eleição foi realizado em função da crença do sujeito de que a alternativa escolhida saciaria seu desejo. Portanto, as preferências (formadas pelas crenças) se constituíram em critérios para a eleição, influenciando, assim, as escolhas realizadas pelos alunos.

Para finalizar, a análise das respostas dadas aos dois últimos itens apresentados no problema do carro, que dizem respeito às afirmativas de Von Savant e dos matemáticos e estatísticos, aponta uma avaliação qualitativa (típica do processo de eleição), realizada pelos alunos, de que não houve possibilidade de contágio (Bueno, 2004) de respostas de terceiro, ou seja, não houve aceitação da avaliação de outro(s) sujeito(s) como válida à hora de assumir a própria eleição.

3.2.3. Análise desde a Teoria de Jogos

O problema onde está o carro (Dilema de Monty Hall) se refere a um tipo de informação imperfeita a qual deriva em uma situação de risco (atribuir certas probabilidades numéricas às consequências de certas ações) e também de incerteza (o critério normativo para tomar uma decisão consiste em eleger a opção, que não se conhece, que maximize a utilidade esperada). No problema, interpretado desde a TJ, os alunos buscarão alcançar o resultado ótimo para suas ações: encontrar o carro.

Este problema, como já dito, está sustentado na teoria da probabilidade, em um simples *jogo de azar*, no qual a natureza do jogo é considerada ela própria como o único jogador com o qual o concursante terá que defrontar, bastando apenas apurar a utilidade esperada (não tão fácil de perceber) com base no cálculo das chances de um resultado acontecer; do mesmo modo, foi informado sobre o ambiente de risco que envolve o problema, o qual deverá ser levado em conta no momento da escolha da porta.

Para as nossas análises agora, serão objetos de atenção às informações (respostas) disponibilizadas nos itens *a*, *b*, *c* e *d* do problema onde está o carro, especificamente as *estratégias* dos alunos, reconhecidas como suas ações ou atuações para resolver o problema, descrevendo o caminho por eles percorrido. Nesse sentido, primeiramente apresentaremos as respostas dadas pelos estudantes, que foram agrupadas conforme quadro a seguir; depois serão construídas as matrizes de pagos e a árvore de decisão; também serão calculados o equilíbrio de Nash para as estratégias mistas, bem como o valor esperado.

Quadro 9**:** Resposta de estudantes aos itens a, b, c e d do problema onde está o carro

Itens	**Sim**	**Não**	**Talvez**	**Em branco**	**Total**
a) Considera provável resolver o problema em um tempo breve.	32	12	6	3	53
b) Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema	32	18	0	3	53
c) Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema	25	22	1	5	53
d) Seria fácil de explicar a sua escolha	24	22	2	5	53

Fonte: Própria do autor

Somados os 32 estudantes que disseram “sim” com os 12 que disseram “não”, ao primeiro item, apenas 9 justificaram suas respostas, considerando que a agilidade na resolução se deve ao domínio (ou não) de conhecimentos de probabilidade ou de lógica.

Para o segundo item, dos 32 estudantes que disseram sim, 15 justificaram dizendo que recordaram conteúdos de porcentagem, lógica, estatística e probabilidade. Para os que disseram não, apenas 2 justificaram dizendo que suas escolhas foram no “chute”.

Para o terceiro item, apenas 8 dos 25 estudantes que disseram sim justificaram, considerando a sua forma de resolução como engenhosa e econômica.

No último item, 24 estudantes disseram ser fácil explicar a escolha e apenas 5 justificaram dizendo que ao abrir uma das portas as chances aumentavam ou porque era uma questão de lógica ou, ainda, que a oportunidade dada ao participante conduzia ao erro. E entre os que responderam que não é fácil explicar, 6 apresentaram justificativas dizendo que se trata de uma questão muito abstrata ou que fez uma escolha aleatória ou que formalmente não é fácil de explicar.

De modo geral, as respostas são pouco elucidativas, uma vez que quase na totalidade são de forma monossilábica (sim, não), com poucos alunos propondo uma contestação mais elaborada.

Para fazer encontrar a matriz de pagos, equilíbrios de Nash e a árvore de decisão, iremos considerar a existência de três portas: A, B e C, das quais o resultado ótimo é o carro, quando deverá receber o valor da unidade (1); e o não desejado é a cabra, quando deverá perder uma unidade (-1); e ainda que ao se abrir uma das portas não há pagamento algum (0) e dado que as opções mudar de porta e não mudar de porta não alteram a configuração da tabela de pagos, teremos as seguintes representações:

Tabela 14: Matriz de pagos por eleição

		Porta com o carro		
		A	**B**	**C**
Porta Escolhida	**A**	1	-1	0
	B	0	1	-1
	C	-1	0	1

Fonte: Própria do autor

O primeiro que podemos observar, se atentarmos para a tabela e sua matriz de pagos, é que não existe uma estratégia dominante nem dominada, já que, olhando o todo, os pagos para qualquer das estratégias serão os mesmos. Entretanto, podemos, ao se eliminar os pagos relativos à porta aberta (0), com a primeira eleição, ir atribuindo os valores de 1 para o caso de encontrar o carro e -1 para o caso de encontrar uma cabra, e considerando, ainda, que o concursante e o apresentador são dois jogadores: um ativo e o outro passivo, respectivamente, a nova tabela terá a seguinte configuração:

Tabela 15: Nova matriz de pagos por eleição

		Apresentador	
		Mudar	Não mudar
Concursante	Porta A	**(-1, 1)**	**(1, -1)**
	Porta B	**(1, -1)**	**(-1, 1)**

Fonte: Própria do autor

Podemos fazer a leitura desta tabela da seguinte forma: considere inicialmente que ao concursante é facultado o direito de mudar ou não de porta escolhida. Os pagos serão:

- O par ordenado (-1, 1) significa que o carro estando em A e a porta escolhida inicialmente também é A, ao mudá-la, o concursante perde, e o apresentador ganha, caso contrário, se mantém a escolha inicial (não mudar) ganha, representado pelo par (1,-1). Ou seja, caso o concursante escolha a porta que contenha o carro ganha um ponto e o apresentador perde um ponto. Com isso, nota-se que o problema continua sem uma estratégia dominante.

O problema onde está o carro tem as características de um jogo não-cooperativo, mais especificamente de um jogo de *soma nula*. Sendo assim, um olhar mais cuidadoso nos revela que nas estratégias puras (implicam decisões que se tomam com certeza, olhando a tabela anterior temos o ganho representado por “1” e a perda por “-1”) não há equilíbrios de Nash (EN), ou seja, nenhum dos jogadores tem incentivo (ganha) mudando sua estratégia unilateralmente. Com a ausência dos EN nas estratégias puras e considerando que a solução do jogo é por este equilíbrio, devemos, então, analisar as estratégias mistas (implicam em uma combinação de decisões tomadas de acordo a uma série de probabilidades, cuja soma deve ser 100%).

Devemos, inicialmente, supor que o concursante eleja as seguintes estratégias, considerando p a probabilidade do concursante escolher uma porta e $q=1-p$ é a probabilidade de mudar ou não de porta, para uma nova tabela:

Tabela 16: Matriz de pagos com a respectiva probabilidade

		q	*1-q*
	Porta escolhida	*Mudar*	*Não mudar*
P	A	**-1 , 1**	**1 , -1**
1-*p*	B	**1 , -1**	**-1 , 1**

Fonte: Própria do autor

A tabela acima pode ser assim entendida: a opção A (*mudar*) tem a probabilidade *pq*, já para A (*não mudar*), a probabilidade é *p*(1-*q*). Para encontramos as estratégias mistas, chamaremos a escolha da porta A pelo concursante de A_1 e a da porta B de B_1 e, assim, teremos a seguinte função de resposta:

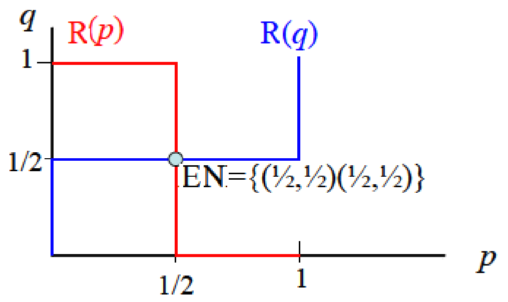
– Se o concursante escolhe $A_1 = q\,(1) + (1-q)\,(-1) = 2q-1$;
– Se o concursante escolhe $B_1 = q\,(-1) + (1-q)\,(1) = 1-2q$; daí temos:
– Se $A_1 \gtrless B_1$ ou se $2q-1 \gtrless 1-2q$, ou se $q \gtrless \frac{1}{2}$.

E com isso temos o seguinte esquema de equações:

$$R(q)=\begin{cases} p=1 & se\ q>\frac{1}{2};\\ p\in[0,1] & se\ q=\frac{1}{2};\\ p=0 & se\ q<\frac{1}{2}.\end{cases} \quad \text{e} \quad R(p)=\begin{cases} q=0 & se\ p>\frac{1}{2};\\ q\in[0,1] & se\ p=\frac{1}{2};\\ q=1 & se\ p<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Portanto, a única solução para o sistema de equações é $p=R(q)$ e $q=R(p)$, com $p=q=\frac{1}{2}$, e o $EN=\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$. A função de melhor resposta é representada a seguir:

Gráfico 2**:** Equilíbrio de Nash do problema 2

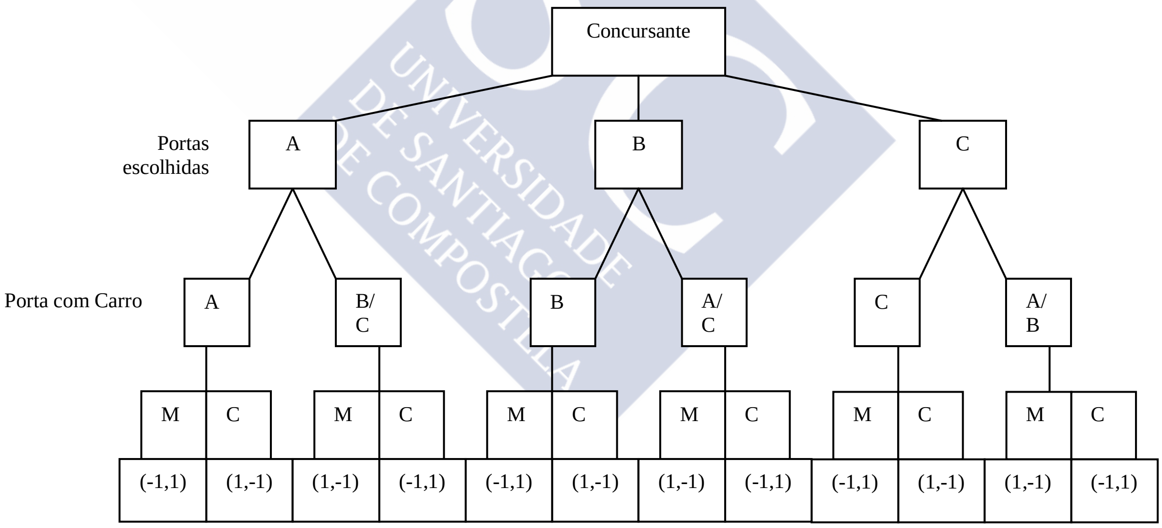


Fonte: Própria do autor

Com respeito ao Equilíbrio de Nash, ainda cabe os seguintes esclarecimentos: A solução deste problema deve ser aqui entendida como sendo a previsão sobre um resultado, e este nos aponta como $EN = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$, isso indica que estamos diante de uma loteria. Especificamente, o EN das estratégias mistas deste problema é escolher aleatoriamente cada estratégia pura (mudar, não mudar) com uma probabilidade de ½ cada. Portanto, o cálculo do EN indica o conjunto de técnicas para análise do problema, não indicando ao concursante como jogá-lo, mas apontando o que acontece, quando se adota esta ou aquela estratégia, assim, como as estratégias mais indicadas e os resultados predominantes.

Desde a teoria de jogos, encontramos outras ferramentas para analisar este problema, qual seja, a árvore de decisão ou árvore de resultados sucessivos, que se utiliza em jogos que implicam sequências de movimentos, definindo um ponto de partida e cada movimento será representado por uma rama.

Fig. 7: Árvore da decisão



Fonte**:** Própria do autor

No processo de decisão, o aluno pode construir a árvore intuitivamente.

Vejamos como podemos fazer a leitura deste diagrama:

a) São dois os jogadores (concursante e apresentador);
b) O concursante tem três opções de escolha: portas A, B e C;
c) O concursante escolhe uma das três portas.

d) Cada porta tem uma combinação de ação (mudar ou continuar).

e) Os pagos são representados pelo par ordenado: 1 se ganha, e -1 se perde.

f) Por último, admite-se que o concursante deseja ganhar o carro e o apresentador fará de tudo para que ele perca (no sentido de que o concursante não receberá ajuda alguma por parte deste).

Portanto, qual a melhor decisão? Moreira (2008) orienta para a utilização do critério de Laplace (critério ou método da razão insuficiente) que deverá ser usado sempre e quando as probabilidades não são conhecidas ou se elas são supostamente iguais, ou seja, a probabilidade associada a cada estado da natureza é sempre igual à unidade dividida pelo número de estados da natureza e, após assumir probabilidades iguais, calcula-se o valor esperado para cada alternativa, escolhendo-se a que conduzir ao melhor valor esperado.

Para o cálculo do valor esperado temos que:

a) Atribuir uma probabilidade a cada acontecimento (mutuamente excludente);

b) Calcular os valores esperados de cada ação, multiplicando cada valor consequente pela correspondente probabilidade, e somando esses produtos;

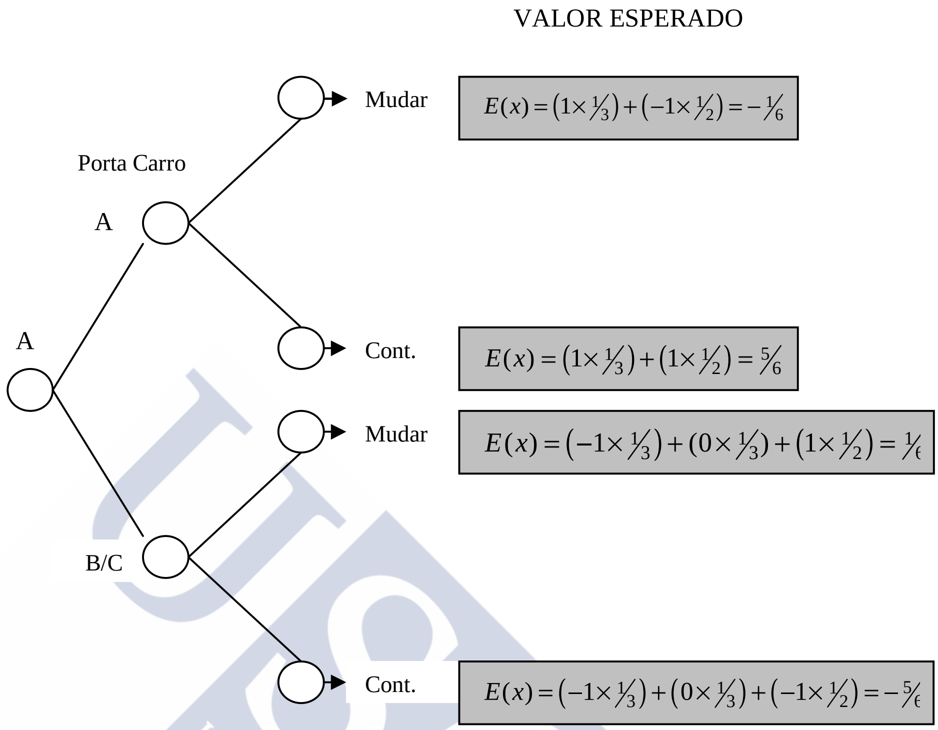
c) Escolher uma ação cujo valor esperado seja máximo.

O cálculo do valor esperado é entendido como $E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$, em que:

$$x_{i=} \begin{cases} -1, \text{ se a porta contém uma cabra;} \\ \quad 0, \text{ para a } 1^{a} \text{ porta aberta;} \\ \ \ 1, \text{se a porta contém um carro.} \end{cases} \quad \text{e} \quad P(x_i) \begin{cases} \dfrac{1}{3}, \text{ para a } 1^{a} \text{ eleição} \\ \dfrac{1}{2}, \text{ para a } 2^{a} \text{ eleição} \end{cases}$$

Retornemos a árvore de decisão do problema (figura 4.7), a partir daí supõe-se que a porta escolhida pelo concursante seja A, dessa maneira, o cálculo do valor esperado é representado pelo seguinte diagrama:

Fig. 8: Diagrama de árvore do valor esperado



Fonte: Própria do autor

De modo análogo para as portas B e C.

Como podemos observar, o cálculo do valor esperado $E(x)$ nem sempre apresenta um resultado que imaginamos, de fato, temos que o valor esperado, quando há eleição, por exemplo, é continuar com a porta escolhida, inicialmente será igual 5/6. Esse valor na verdade significa que se um concursante participasse do concurso um grande número de vezes e depois calculássemos a média aritmética dos vários resultados, esperaríamos que essa média ficasse próxima de 5/6 para esta opção.

Para outras opções também podemos o seguinte:

– Se a porta escolhida conter o carro – “*mudar*” significa perder e o valor esperado é -1/6;
– Se a porta escolhida conter o carro – “*continuar*” significa ganhar e o valor esperado é 5/6;
– E finalmente, se a porta escolhida conter uma cabra – “*continuar*” significa perder.

3.2.4. Análise desde a Teoria das Situações Didáticas

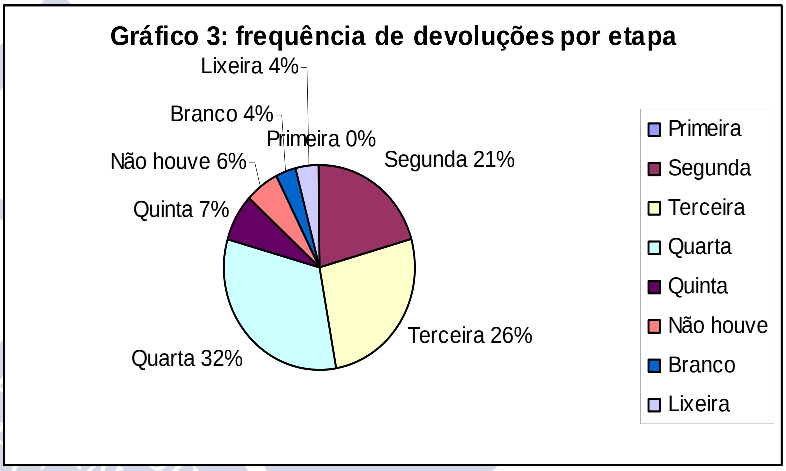
Assim como foi com o problema dos bueiros, este problema está marcado pela intencionalidade de se por em jogo a devolução de uma situação didática frente a uma situação real. Para este problema, fazer a escolha e tomar a decisão de qual porta abrir está a cargo individual do resolutor.

Na tabela de frequência e no gráfico a seguir, é possível apreciar, de modo geral, como se agrupam as respostas dos estudantes, segundo as etapas de devoluções:

Tabela 17**:** frequência de devoluções por etapa

Devoluções por etapas	**Freq**	**%**
Primeira	0	0,00%
Segunda	11	20,80%
Terceira	14	26,40%
Quarta	17	32,10%
Quinta	4	7,50%
Não houve	3	5,70%
Branco	2	3,80%
Lixeira	2	3,80%
TOTAL	53	100%

Fonte: Própria do autor



Fonte: Própria do autor

Entendemos que, para haver a devolução de uma aprendizagem, o aluno não somente deve se implicar na tarefa, com desejo de resolvê-la, como também deve demonstrar indícios de apropriação do conhecimento que se espera. Assim não nos sentimos à vontade para classificar três das respostas apresentadas como sendo de uma etapa de aproximação puramente lúdica ou de raciocínio ingênuo, pois, embora os alunos tenham se comprometido em resolver o problema, suas respostas podem mascarar debilidades ou se houve de fato compreensão ou não do problema por parte deles. Assim, justificamos na tabela a frequência 0% para a primeira etapa e 5,7% para a categoria “Não houve”, no sentido de que não houve devolução da aprendizagem. A seguir, apresentamos os três raciocínios dados pelos alunos.

Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?

Indiferente

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

Não há fatos fortes o suficiente para induzir uma mudança.

Justifique a sua opção, respondendo:

a) Considera provável resolver o problema em um tempo breve?

Sim

b) Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema?

não

c) Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema?

não

d) Seria fácil de explicar a sua escolha?

sim

"Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso mudar de porta". Assim perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto?.

não, (risos)

Ele é paranormal?

"Prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ele retifique seus argumentos". Você concorda com estes estudiosos?

Argumentos?

Sou indiferente.

Indiferente
Não há fatos fortes o suficiente para induzir uma mudança
Sim
Não
Não
Sim

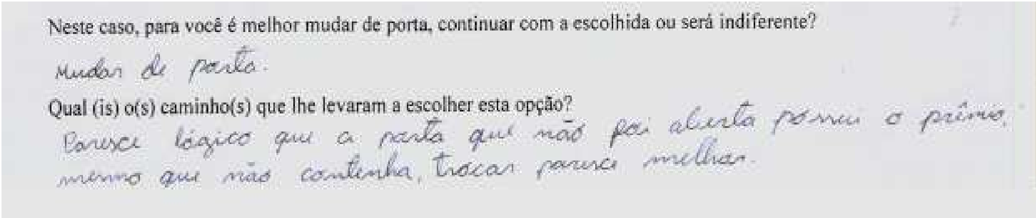
Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?

Será indiferente.

Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?

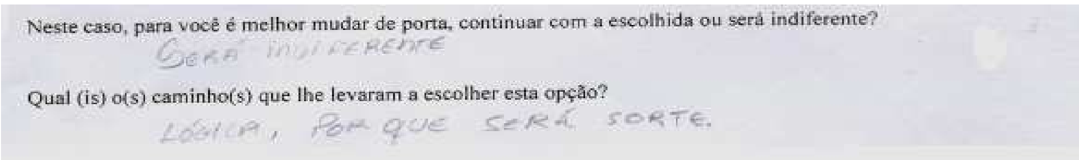
Porque não tem um tecnica para encontrar a porta correta.

Será indiferente
Porque não tem uma técnica para encontrar a porta correta

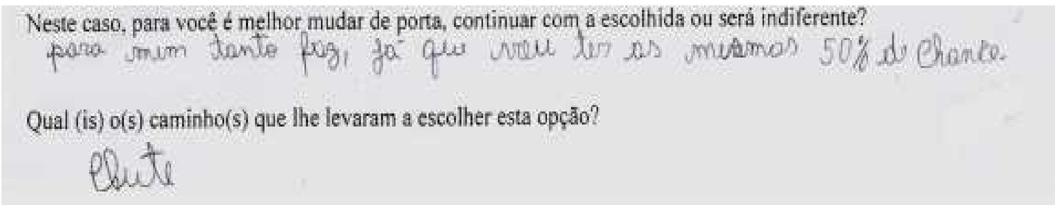

Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
Mudar de porta.
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Parece lógico que a porta que não foi aberta possui o prêmio, mesmo que não contenha, trocar parece melhor.

Mudar de porta
Parece lógico que a porta que não foi aberta possui o premio mesmo que não contenha, trocar parece melhor.

Seguindo com as análises dos dados apresentados na tabela e respectivo gráfico, observamos que aproximadamente 21% dos estudantes deram respostas que se enquadram na segunda etapa de devolução de uma preferência, apresentando indícios de compreensão do problema, até mesmo fazendo alguns cálculos, mas, todavia, atribuem o resultado à sorte ou ao "chute", conforme mencionado por alguns deles, talvez para se desviar de uma formulação mais matemática ou por não se dar conta de que poderiam usar de ferramentas de cálculo para justificar a sua opção de resposta.

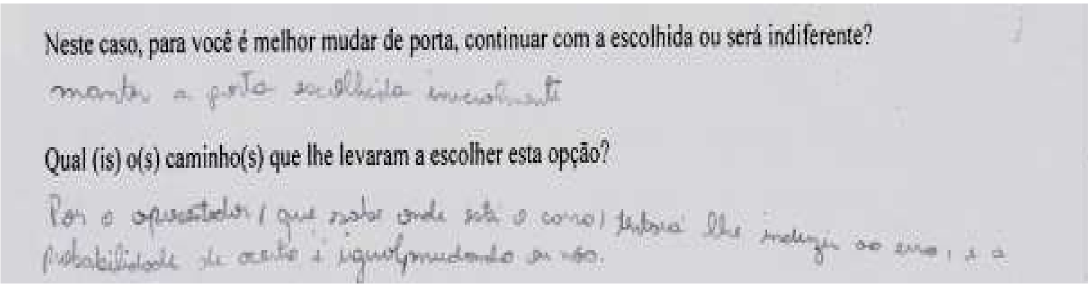

Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
SERÁ INDIFERENTE
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
LÓGICA, POR QUE SERÁ SORTE.

Será indiferente
Lógica, porque será sorte.


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
para mim tanto faz, já que vou ter os mesmos 50% de Chance.
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Chute

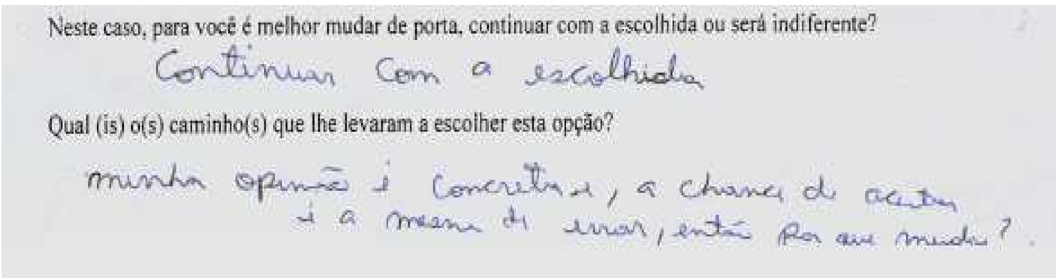
Para mim tanto faz, já que vou ter os mesmos 50% de chance.
Chute

26,4% das respostas da amostra foram agrupadas dentro da terceira etapa, indicando uma devolução de uma responsabilidade e de uma causalidade. Em suas respostas, os alunos não só são conscientes das eleições que fazem como também estabelecem uma relação de causalidade entre as decisões que tomam e os resultados consequentes delas. As opções de escolha nessa categoria foram “mudar” de porta ou “manter” a porta escolhida, com a justificativa de que as chances aumentariam ou que o apresentador estaria lhes induzindo ao erro. Na fala de um estudante: “manter a porta escolhida inicialmente, pois o apresentador (que sabe onde está o carro) tentará lhe induzir ao erro, e a probabilidade de acerto é igual, mudando ou não”. Para este exemplo, em particular, embora sabendo que as probabilidades de erro ou acerto são as mesmas, ainda assim o aluno vincula a sua decisão ao fato de o apresentador tentar lhe iludir. Exatamente metade dos estudantes nessa categoria aponta a causa da decisão ao apresentador e a outra metade por acreditar que as chances aumentarão.


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
manter a porta escolhida inicialmente
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Por o apresentador (que sabe onde está o carro) tentaria lhe induzir ao erro, e a probabilidade de acerto é igual mudando ou não.

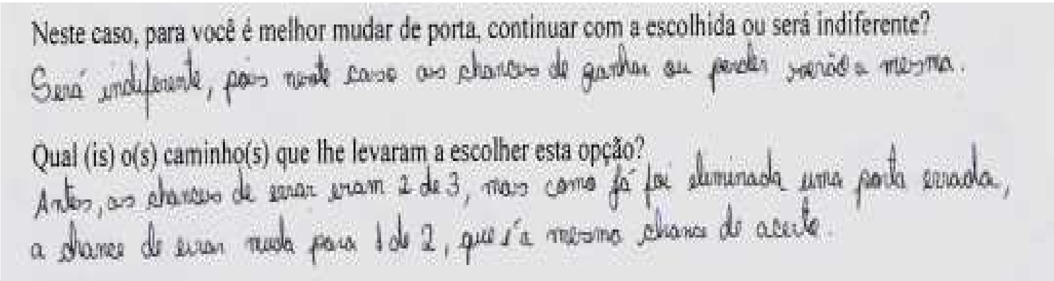
Manter a porta escolhida inicialmente
Pois o apresentador (que sabe onde está o carro) tentará lhe induzir ao erro, e a probabilidade de acerto é igual mudando ou não.

Na quarta etapa, devolução da antecipação, temos 32,1% dos estudantes que parecem prever, antecipar as consequências de suas escolhas, estabelecendo assim uma relação entre a decisão tomada e o resultado final. Na resposta do estudante apresentada a seguir, a interrogação que ele faz “... então por que mudar?” nos revela uma intencionalidade da antecipação dos resultados.


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
Continuar com a escolhida
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
minha opinião é concreta e, a chance de acertar é a mesma de errar, então por que mudar?

Continuar com a escolhida
Minha opinião é concreta e, a chance de acertar é a mesma de errar, então porque mudar?

A quinta etapa, devolução da situação a-didática, é apresentada por uma pequena parcela de nossa amostra, 7,5%. O critério por nós utilizado para enquadramento das respostas aqui foi o aluno colocar em prática um funcionamento matemático mais elaborado, validando por meio de provas matemáticas, ou não, suas respostas. O exemplo a seguir pode ser interessante para mostrar o nível de consciência e segurança que o aluno parece ter de seus conhecimentos, quando o mesmo argumenta de forma convincente o seu raciocínio.


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
Será indiferente, pois neste caso as chances de ganhar ou perder serão a mesma.
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Antes, as chances de errar eram 2 de 3, mas como já foi eliminada uma porta errada, a chance de errar muda para 1 de 2, que é a mesma chance de acerto.

Será indiferente, pois neste caso as chances de ganhar ou perder serão a mesma.
Antes as chances de eram 2 de 3, mas como já foi eliminada uma porta errada, a chance de errar muda para 1 de 2 que é a mesma chance de acerto.

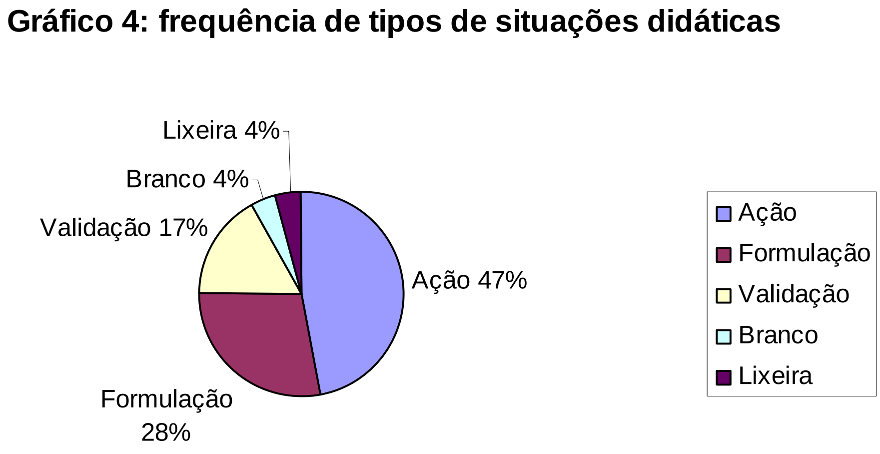
Para fazer uma análise desde os tipos de situações didáticas, tem-se que, embora o problema onde está o carro possa ser respondido sem a obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática, podendo o resolutor se abster de realizar procedimentos de cálculos, pensamos que o fato de nossa amostra ser representada por estudantes das carreiras de Matemática, Física e Ciências da Computação, as suas respostas poderiam vir carregadas de certo formalismo, ainda porque na própria questão apresentamos expressões como “recorda conceitos e técnicas”, “prestigiosos matemáticos e estatísticos”, que poderiam induzi-los a fazer uso de uma linguagem e de procedimentos mais científicos.

De modo geral, as respostas apresentadas para este problema podem ser apreciadas na tabela e no gráfico a seguir:

Tabela 18 Frequência de tipos de situações didáticas

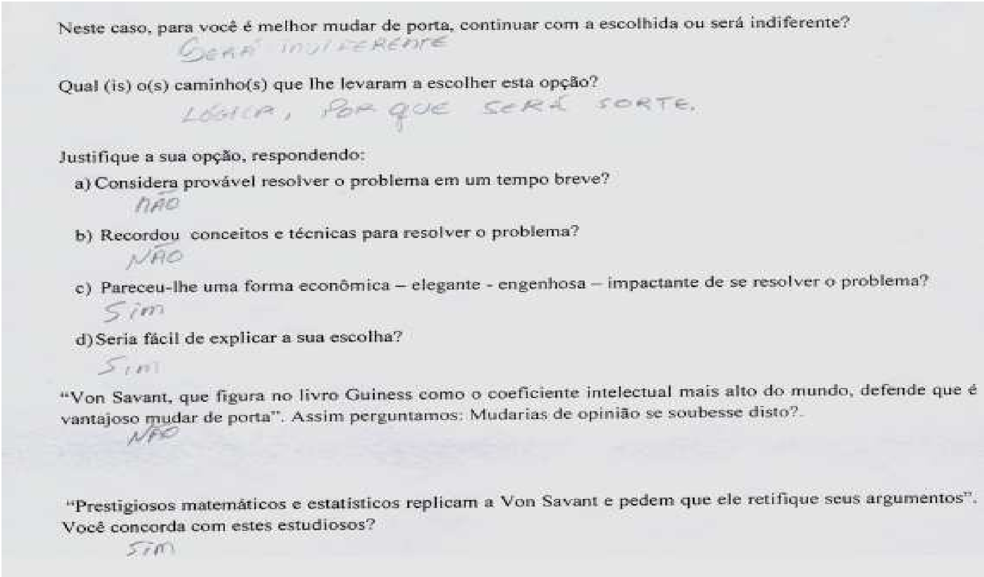
Tipos de Situações Didáticas	Freq	%
Ação	25	47%
Formulação	15	28%
Validação	9	17%
Branco	2	4%
Lixeira	2	4%
Total	53	100%

Fonte: Própria do autor



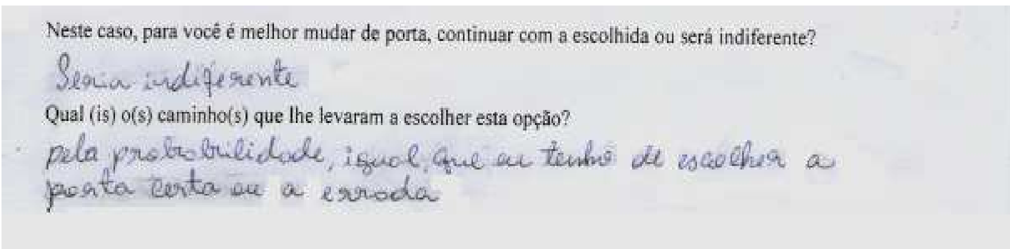
Fonte: Própria do autor

Uma análise deste problema desde os tipos de situações didáticas apresentadas por nossa amostra aponta que 47% dos estudantes, quase a metade, enquadram-se no tipo de Situação de Ação, dado que apresenta uma tipologia de resposta desprovida de conhecimentos teóricos, neste caso em particular, de conceitos básicos de probabilidades. Seus raciocínios vão em direção de um conhecimento mais comum e intuitivo, tanto assim que, nos itens da questão em que solicitamos justificativas para as suas escolhas estes não conseguem apresentá-las de modo que se percebam conhecimentos teóricos, limitando-se, na maioria dos casos, a respostas do tipo "sim" ou "não". Independentemente da escolha que fazem, algumas respostas mencionam "que o apresentador pode estar tentando iludir", "que é por lógica" ou "que é por sorte". Um exemplo dessa tipologia de resposta é apresentado a seguir:


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
SERÁ INDIFERENTE
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
LÓGICA, POR QUE SERÁ SORTE.
Justifique a sua opção, respondendo:
a) Considera provável resolver o problema em um tempo breve?
NÃO
b) Recordou conceitos e técnicas para resolver o problema?
NÃO
c) Pareceu-lhe uma forma econômica – elegante - engenhosa – impactante de se resolver o problema?
Sim
d) Seria fácil de explicar a sua escolha?
Sim
"Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso mudar de porta". Assim perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto?.
NÃO
"Prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ele retifique seus argumentos". Você concorda com estes estudiosos?
Sim

Será indiferente
Lógica, porque será sorte.
Não
Não
Sim
Sim

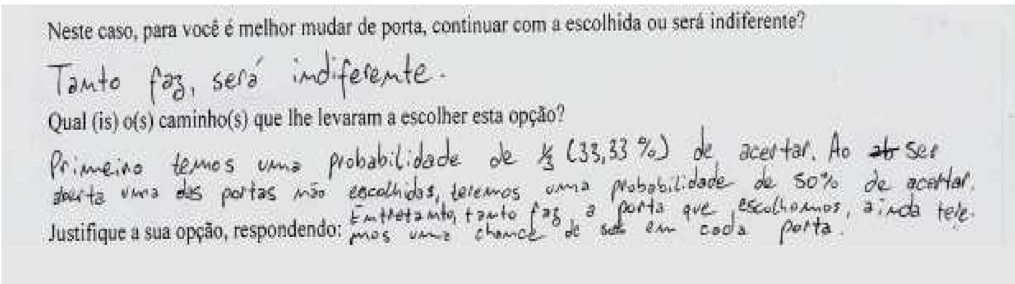
28% dos estudantes se enquadram em uma Situação de Formulação, dado que, embora não realizando procedimentos de cálculo explícito (parecem fazer mentalmente), ensaiam modelos teóricos, justificando de alguma forma a opção por eles escolhida: "pois tem a mesma chance", "a probabilidade é a mesma", mas sem buscar nenhum meio de comprovação. Um exemplo de resposta também é apresentado a seguir:


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
Seria indiferente
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
pela probabilidade, igual que eu tenho de escolher a porta certa ou a errada

Seria indiferente
Pela probabilidade, igual que eu tenho d escolher a porta certa ou a errada

Já no tocante à Situação de Validação, apenas 17% se enquadram nessa categoria, apresentando procedimentos algorítmicos e argumentando e comprovando a sua linha de raciocínio com base em conhecimentos teóricos, a fim de validar o conhecimento.

Embora não classificamos nenhuma resposta dentro de uma Situação de Institucionalização, pensamos que dois dos raciocínios apresentados na situação de validação também poderiam ser enquadrados como institucionalização, se considerarmos a intenção dos alunos em querer formalizar, demonstrar o conhecimento de referência adquirido em sala de aula. O exemplo a seguir ilustra essa situação.


Neste caso, para você é melhor mudar de porta, continuar com a escolhida ou será indiferente?
Tanto faz, será indiferente.
Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Primeiro temos uma probabilidade de 1/3 (33,33 %) de acertar. Ao ~~ab~~ ser aberta uma das portas não escolhidas, teremos uma probabilidade de 50% de acertar. Entretanto, tanto faz a porta que escolhemos, ainda tele-
Justifique a sua opção, respondendo: mos uma chance de 50% em cada porta.

Tanto faz, será indiferente.
Primeiro temos uma probabilidade de 1/3 (33,33%) de acertar. Ao ser aberta uma das portas não escolhida, teremos uma probabilidade de 50% de acertar. Entretanto, tanto faz a porta que escolhemos, ainda temo suma chance de 50% em cada porta.

Classificamos, ainda, as escolhas sem justificativas como “Branco” e as que não tivemos condições de avaliar como “Não analisadas”, conforme pode ser apreciado na tabela 18.

3.2.5. Análise desde a Tomada de Decisões

Para uma discussão mais específica das decisões tomadas pelos alunos, considerando ainda que estas estão atreladas a processos de Eleição, a conceitos da Teoria de Jogos e da Teoria das Situações Didáticas, iremos tomar como objeto de análise as duas últimas afirmativas da questão. Concretamente, interessa-nos observar até que ponto o pensamento dos alunos podem ser influenciados por outras opiniões, ou seja, até que ponto suas decisões foram influenciadas por terceiros. Assim, organizamos as respostas obtidas nesses itens nos quadros a seguir:

Quadro 10: Afirmativa de Von Savant

	“Von Savant, que figura no livro Guiness como o coeficiente intelectual mais alto do mundo, defende que é vantajoso mudar de porta”. Assim perguntamos: Mudarias de opinião se soubesse disto?				Total
	Sim	Não	Talvez	Em branco	
Mudar	6	9	1	-	16
Continuar	-	9	2	-	11
Indiferente	1	21	3	1	26
Total	7	39	6	1	53

Fonte: Própria do autor

Quadro 11: Afirmativa de prestigiosos matemáticos e estatísticos

	“Prestigiosos matemáticos e estatísticos replicam a Von Savant e pedem que ela retifique seus argumentos”. Você concorda com estes estudiosos?				Total
	Sim	Não	Talvez	Em branco	
Mudar	4	10	2	-	16
Continuar	6	3	2	-	11
Indiferente	17	5	3	1	26
Total	27	18	7	1	53

Fonte: Própria do autor

Independentemente da opção que elegeram, evidenciamos, no primeiro quadro, que a maioria não mudaria de opinião em prol do raciocínio de Von Savant e um pouco mais da metade (27 estudantes) do segundo quadro concorda com a segunda afirmativa (dos matemáticos e estatísticos), reforçando, em parte, a negativa dada na frase anterior, ou seja, não mudaria de opinião.

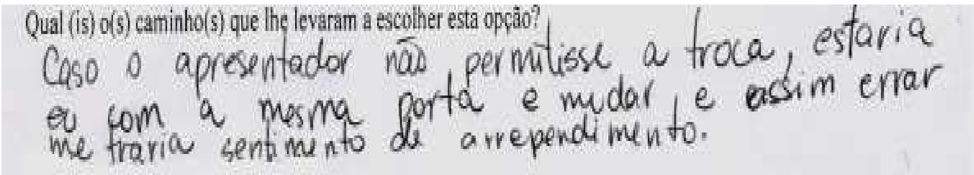
Dentre os 16 que decidiram mudar de porta, 6 estão de acordo com o raciocínio de Von Savant e destes apenas três justificam ser mais vantajosa a mudança e que pensaram igual a Von Savant. Os 9 estudantes que decidiram mudar de porta e que disseram que não concordam com a afirmativa de Von Savant não explicaram o motivo da negativa nesse momento, entretanto, buscando entender o que lhes levaram a tal raciocínio, recorremos as suas justificativas dadas ao item que solicita explicar os caminhos que lhes levaram a escolher a opção e, assim, constatamos praticamente uma única linha de raciocínio: vale a pena mudar porque as chances aumentam, não percebendo com isso a relação de suas respostas com as de Von Savant.

Para os que decidiram continuar com a porta escolhida, 9 de 11 não concordam com essa primeira afirmativa e 2 disseram “talvez”, justificando que deve ser observado a reação do apresentador e suas estratégias de persuasão ou então que seria melhor continuar para não se arrepender.

Percebemos entre os que disseram ser indiferente, 17 concordaram com os matemáticos e estatísticos, o que parece lógico, já que são opções excludentes (ou é indiferente ou concorda que mudar tem vantagens) e os 5 que discordaram parecem apresentar certa “indiferença” a essa questão, em outras palavras, uma vez decidido que será indiferente não lhes interessa implicar em outra opção.

Tudo isso nos leva a acreditar que o raciocínio por trás da afirmativa de Von Savant das vantagens matemáticas não foi percebido pela grande maioria dos estudantes, não sendo possível, portanto, inferir que houve uma influência desta afirmativa nas decisões dos mesmos. Tampouco podemos inferir se houve influência da segunda afirmativa sobre a decisão dos alunos que aí tratam, em sua maioria, de reforçar o dito anteriormente.

Agora fazendo uma análise do ponto de vista das influências que as variáveis crenças e experiências prévias podem ter em situações problemas que se assemelham ou se confundem com situações da vida real, como é o caso deste problema, pode ser que estas variáveis exerçam uma influência tão forte que dificilmente os alunos abrem mão delas em detrimento de um raciocínio incomum. Em outras palavras, poderíamos ainda considerar que o conhecimento institucional trabalhado (para não dizer construído) não foi suficiente para fazer o aluno duvidar de sua própria experiência, transferir os conhecimentos, e assim podemos falar de uma possível influência exercida pelas crenças e experiências pessoais sobre as decisões que tomam os alunos, como é o caso daqueles que responderam que “mudar implicaria num arrependimento”.


Qual (is) o(s) caminho(s) que lhe levaram a escolher esta opção?
Caso o apresentador não permitisse a troca, estaria eu com a mesma porta e mudar e assim errar me traria sentimento de arrependimento.

Caso o apresentador não permitisse a troca, estaria eu com a mesma porta e mudar e assim erra me traria sentimento de arrependimento.

Do mesmo modo, podemos falar que as eleições dos alunos não foram influenciadas pelas respostas dos terceiros que aí se colocam, neste caso de Von Savant e dos matemáticos e estatísticos, mas por suas experiências.

Algumas das respostas dos alunos nos remetem ao contexto de discussões que esta questão suscitou, quando foi alvo de críticas nos anos 70 a resposta dada por Von Savant de que seria mais vantajoso mudar, gerando dúvidas entre matemáticos e estatísticos e que somente a partir da simulação computacional do problema, como aconteceu com o célebre matemático Paul Erdös, veio à crença de que poderia sim ser mais vantajoso mudar. O que queremos dizer é que vantajosa ou não a mudança esta questão nos remete ao contexto estrutural de incerteza, do acaso, e isso desempenha um papel relevante na tomada de decisões dos resolutores, de tal modo que dificilmente admitem uma mudança de raciocínio. Uma análise geral das respostas dadas pelos estudantes de nossa amostra confirma que uma vez tomada a decisão de ser indiferente, mudar ou continuar, as afirmativas que se colocam no último item da questão não os fizeram mudar a decisão, justificando inclusive as razões para isso. O valor probabilístico foi dado pelo grau de segurança que pareciam ter em seus conhecimentos prévios. A esse grau de segurança, podemos nos referir também à *função de utilidade* da Teoria de Jogos, pois ao ter em conta o critério básico de racionalidade em que todo processo de decisão deveria ser encaminhado a alcançar a maior utilidade possível para o sujeito, podemos inferir das respostas dos estudantes que a utilidade da alternativa escolhida parece estar associada a crenças e conhecimentos prévios, mais por experiências não escolares que escolar.

Do mesmo modo, podemos inferir das decisões dos alunos, quando se faz uma análise sob a ótica da Teoria das Situações Didáticas, na qual se observa o uso de um raciocínio mais prático e intuitivo, indícios de experiências prévias, em detrimento de processos mais elaborados. Também desde essa Teoria, pode-se inferir sobre o contrato didático e dizer que as decisões parecem indicar um trabalho restrito com a estatística em sala de aula em que as discussões sobre o acaso e a incerteza pouco acontece.

Uma análise do ponto de vista dos elementos que levam a uma boa decisão no sentido de Carmona (1997) estão presentes no problema onde está o carro, quais sejam, 1) um conjunto de opções ou alternativas que, neste caso, já vem dado no enunciado da questão; 2) um ambiente ou contexto em que se dá o problema que neste é de risco e também de incerteza; e 3) uma função de avaliação dos resultados, que estabelece as consequências assignáveis da aplicação de cada opção nos possíveis estados da natureza. Embora o estado da natureza da questão também seja considerado de incerteza, apenas se observa nas respostas dos alunos tentativas de estimar probabilidades (pertinentes para risco), ou seja, atribuem uma função de avaliação, mesmo de forma implícita.

Em revendo o marco teórico, no tópico referente à teoria das expectativas de Kahneman e Tvesky (1979), teoria surgida como reformulação e refinamento da teoria da utilidade esperada, vez que esta não explicava com clareza a racionalidade das decisões na percepção da realidade, podemos observar, conforme esses autores, que o sujeito não decide segundo os padrões racionais da teoria da utilidade esperada, mas por simples regras de comportamento, quando tem que tomar uma decisão. Por exemplo, na regra da *representatividade* - aquela que o decisor atribui probabilidades aos sucessos e, em consequência, elege as alternativas porque estas se assemelham a fatos conhecidos por ele, como lançamento de uma moeda, cuja probabilidade teórica é de 50-50 as chances de sair cara ou coroa, pode que 53% dos alunos tenham sido motivados por essa regra e chegaram a mencionar expressões como "mesma chance" e "mesma probabilidade". No tocante à regra, *capacidade de memorização ou recordo*, que trata da facilidade para recordar situações análogas, estando a verossimilhança de um sucesso diretamente ligada à facilidade de recordar e que pode levar a erros, pode ser que as regras recordadas pelos alunos para responder ao problema resultaram em um fator que restringiu o pensamento dos mesmos para perceber outros modos de resolução. Pode ser ainda que, na regra *necessidade de segurança*, que aparece quando o sujeito se deixa guiar por conselhos de terceiros e sendo um dos erros mais comuns o excesso de importância dado ao valor inicial, as respostas dos alunos terem sido influenciadas por um problema já radicado na memória cultural do decisor, embora vimos que nenhuma das afirmativas colocadas no final do problema influenciaram as respostas deles. Percebe-se também que, por se tratar de um problema "probabilizável", os estudantes tratam de atribuir probabilidades subjetivas em função, inclusive, de seu grau de crença sobre a mesma.

Para finalizar este bloco de análise, dado que um dos objetivos da tomada de decisão é selecionar a melhor alternativa, não o de estimar com precisão o resultado que se pode obter com cada uma delas ou aplicar métodos estatísticos muito sofisticados, consideramos que uma revisão da eleição e uma análise da alternativa por parte dos alunos poderia levá-los a melhorar suas decisões. Ao considerar que as decisões que tomamos são susceptíveis de serem melhoradas com a ajuda da análise, parece que os estudantes, em sua maioria, não tiveram dispostos a analisá-las.

3.3. PROBLEMA 3: DENSIDADE DEMOGRÁFICA

O PROBLEMA DA DENSIDADE DEMOGRÁFICA

Abaixo segue a população e a área de dois bairros da cidade de Barcelona, Espanha.

Bairro 1 (N1)	*Bairro 2 (N2)*
65 075 habitantes	*190 030 habitantes*
7 km^2	*5 km^2*

(i) Discuta em qual desses dois lugares as pessoas vivem mais espaçosamente.

(ii) Encontre quantas pessoas deveriam locomover-se de um bairro a outro para que todos vivam em uma mesma distribuição de espaço.

3.3.1. Considerações Iniciais

Nossa atenção agora recairá sobre um episódio de um processo de instrução no qual os alunos responderam um problema que envolve densidade demográfica. Tal episódio se encontra no artigo de Font, Planas e Godino (2010), anexo 3, que segundo estes autores foi realizado durante uma aula de Matemática em uma turma do Ensino Médio de uma escola da rede pública da cidade de Barcelona, Espanha, composta por 21 estudantes de 15 e 16 anos de idade. A escola está localizada em uma região onde grande parte da população pertence à classe média de trabalhadores e os seus alunos são de diferentes culturas, religiões e capacidades cognitivas. De modo geral, pode-se dizer que esses alunos apresentam um nível socioeconômico similar (renda baixa). Sobre o professor regente, este possui muitos anos de experiência no ensino e há três anos trabalhando nessa escola. O professor apresentou a questão em uma folha de papel para que seus alunos pudessem responder, em pequenos grupos, para logo após compartilhar suas resoluções e dúvidas. O docente considerou que estes tinham pré-requisitos para responder dados que no ano anterior haviam trabalhado (a compreensão dos assuntos proporcionalidade e equações) e, para resolver, poderiam contar ainda com a calculadora. Tem-se que os bairros referidos no enunciado do problema são conhecidos na cidade de Barcelona, sendo um deles próximo à escola.

No episódio de aula de duração de 10 minutos participaram três estudantes Alicia (A), Emílio (E) e Mateus (M), ademais do Professor (P), membros de um mesmo grupo, que iniciam o diálogo expondo para o professor (e demais colegas) que não encontraram uma solução comum para o problema proposto.

A seguir apresentamos o episódio, esclarecendo que cada fragmento de fala receberá uma identificação, exemplo “1” para o primeiro fragmento.

1. *A: Este é um problema sobre densidade, pois as informações são sobre densidade.*
2. *P: OK. (disseram para Alícia que ela precisa explicar melhor). Nós sabemos que você sabe muito, mas...*
3. *A: Em N1 a densidade é menor que em N2. É isso.*
4. *P: Emilio disse: não.*
5. *E: Eu não entendo! Algo está faltando.*
6. *P: [Perguntaram a Emílio]. Como você resolveu?*
7. *E: É claro que aqui [N2] tem mais pessoas e menos espaço. Eu fui ali. Os apartamentos são muito pequenos.*
8. *P: O que você fala é verdade, mas, como responde a segunda pergunta?*
9. *E: Para mim, a segunda pergunta não está boa.*
10. *P: Por quê?*
11. *E: Eu não mudaria sozinho, iria com toda a minha família.*
12. *P: A que você está se referindo?*
13. *E: Eu mudaria a segunda pergunta.*
14. *P: Não comece de novo, Emílio! Você sabe que os problemas são desse jeito.*
15. *M: Não me importa trocar a pergunta, mas se trocamos, nós não exercitaremos a Matemática que o professor quer que exercitemos. Pode fazer isso por tentativa e erro, é só começar fazendo com 50.000 pessoas.*
16. *A: Isso não é Matemática!*
17. *E: Por que isso não é Matemática?*
18. *P: Melhor continuarmos. Alícia, qual é a sua opinião?*
19. *A: Eu já disse. Este é um problema de densidade.*
20. *P: Você sabe o que está dizendo, porém está cansada...*
21. *A: Vou ao quadro?*

22. P: *[O professor move a cabeça em consentimento]*
23. A: *[No quadro]*

$$\frac{65\,075}{7} \rightarrow \frac{65\,072}{7} = 9\,296 h/km^2 \quad \text{en N1}$$

$$\frac{190\,030}{5} = 38\,006 h/km^2 \quad \text{en N2};\ 9\,296<38\,006$$

24. *P: Certo, nós necessitamos comparar os dois bairros. Estes números não significam nada se nós não os compararmos.*
25. *A: Este número [9.296] é…*
26. *E: Nós colocamos algumas pessoas aqui e outras lá.*
27. *A: Deixe-me terminar! 9 296 é menor que 38 006. Isso significa que em N1 vive-se mais espaçosamente.*
28. *P: Certo.*
29. *A: Agora vejamos a equação. [No quadro].*

$$\frac{190\,030 - x}{5} = \frac{65\,072 + x}{7};\ 38\,006 - \frac{x}{5} = 9\,296 + \frac{x}{7};\ 38\,006 - 9\,296 = \frac{x}{5} + \frac{x}{7};$$

$$28,710 = \frac{12x}{35};\ x = \frac{28\,710 \times 35}{12};\ x = 83\,737,5 \rightarrow 83\,737 \text{ personas.}$$

30. *P: Alícia, você tem que explicar melhor o que fez e o porquê.*
31. *E: Eu não entendo o porquê de trocar 65 075 por 65 072.*
32. *P: Alicia? Por que você substituiu esse número?*
33. *A: [Retorna ao seu lugar]. Eu já expliquei minha proposta, agora eles que expliquem.*
34. *M: Eu não acredito que necessitamos fazer uma equação. Por que não tentamos com diferentes números? Não necessitamos serem exatos aqui, não é?*
35. *P: Vejamos novamente a proposta de Alícia. [Para Emílio]. Alguém quer mudar a segunda pergunta?*
36. *E: Todos nós conhecemos esses bairros, não é estranho o que ela está fazendo? Por que temos que usar densidades e equações?*
37. *M: [Ao professor] Por que ela moveu três pessoas daqui [65.072]?*
38. *P: Mateus, vamos nos concentrar, esqueça as pessoas e pense somente na fração. O número 65.075 é um múltiplo de 7?*
39. *M: Não.*
40. *P: Essa é a questão! 65 072 é um múltiplo de 7 e 65 075 não é. Agora podemos fazer uma divisão exata.*
41. *M: Mas isso não se trata de números, e sim de pessoas!*
42. *E: Na última operação ela não olha os múltiplos, verdade?*
43. *A: Isso não é importante.*
44. *P: Você viu como ela resolveu a equação?*
45. *M: Sim.*
46. *P: Isso é importante.*
47. *M: Podemos dar uma resposta aproximada?*
48. *A: Por favor, isso não é importante.*
49. *M: Copiamos a equação?*

50. *P: Primeiro vamos organizar nossas idéias. Além de calcularmos as densidades, necessitamos que elas sejam iguais. Esta é uma proposta. E vocês [apontando para outro grupo]? Qual é a solução que encontraram?*

Antes de fazer a análise do protocolo de respostas dos estudantes, oferecemos uma provável *solução de referência* para o problema.

(i) Trará-se de encontra o coeficiente pessoas/Km^2. Portanto:

Bairro 1 (N1)	***Bairro 2 (N2)***	***Taxa***
65.075 habitantes	190. 030 habitantes	BAIRRO 1: 65075/7=9296,43 Como se trata de pessoas, tem que arredondar a números interos Portanto, a solução é **9296 hab. por km^2** BAIRRO2: Da mesma maneira: 190030/5=**38006 hab. por km^2**
7 km^2	5 km^2	

(ii) Deveremos equilibrar os habitantes, movendo-os de um bairro a outro para que a taxa de população se iguale entre ambos os bairros.

Se chamarmos ***x*** a quantidade de habitantes que devemos mover do bairro mais povoado, ao de menos densidade, teremos:

$$\frac{190\,030-x}{5}=\frac{65\,072+x}{7};\ 38\,006-\frac{x}{5}=9\,296+\frac{x}{7};\ 38\,006-9\,296=\frac{x}{5}+\frac{x}{7};$$

$$28,710=\frac{12x}{35};\ x=\frac{28\,710\times 35}{12};\ x=83\,737,5\rightarrow 83\,737 \text{ pessoas.}$$

Ou seja, devemos trasladar 83737 pessoas do bairro mais povoado ao de menos população, com o qual, as novas populações de ambos os bairros seriam:

Bairro 1 (N1)	*Bairro 2 (N2)*
65 075 +83737	190 030-83737
148812 habitantes	106293 habitantes

A soma de ambas populações é: 148812+106293 =255105 habitantes.

A população total inicialmente era de 65075+190030=255105 habitantes.

Ambos valores (apesar de que podia haver um pequeno disfarce, devido a processos de arredondamento) coincidem.

Podemos ainda, estabelecer a igualdade de ***taxas*** de população:

BAIRRO 1 (Depois do traslado): 148812/7=21258,857 hab/km^2

BAIRRO 2 (Idem): 106293/5=21258,6 hab/km^2

(Aqui se observa uma diferença de 257 milésimas, devido ao arredondamento).

Em todo caso, e tratando-se de pessoas, este arredondamento é inevitável!!.

3.3.2. Análise desde as Eleições

Uma análise desde a perspectiva das eleições das respostas ou estratégias atribuídas pelos estudantes para resolver este problema, nos permite construir o seguinte *conjunto de alternativas (conjunto oportunidade)*:

A= {*enfoque social; enfoque matemático*}

- Enfoque social – Inclui as estratégias que levam em conta conhecimentos oriundos de experiências prévias, nesse caso, os alunos possuem conhecimentos do bairro, do tamanho de seus imóveis e das famílias que ali residem.
- Enfoque matemático – Inclui explicitamente estratégias de raciocínio matemático, requer conhecimentos de proporcionalidade e de equações. Neste caso os alunos fazem uso de cálculos de densidades, cálculos por ensaio e erro, comparam densidades de dois bairros, resolvem uma equação para encontrar o número de pessoas para locomover de um bairro a outro visando à mesma distribuição entre espaços e realizam cálculos por estimativas.

O surgimento da estratégia de enfoque social deu-se por se tratar de um problema contextualizado a uma situação real, podendo permitir aos alunos formular uma linha de raciocínio baseado em suas experiências prévias. Nesse caso em particular, o raciocínio atribuído pelo aluno Emílio está fortemente arraigado ao fato de ele conhecer o bairro em questão, não se desligando em momento algum dos conhecimentos dessa experiência em prol de outra linha de raciocínio e segue com sua escolha até o final, já que não está ou não foi convencido de que deve abandonar sua estratégia primeira. Ele até concorda com parte da fala de outra aluna, Alícia, quando afirma que no bairro N1 as pessoas vivem mais espaçosamente, entretanto, a justificativa que dá para essa concordância se apóia ao fato de conhecer o outro bairro [N2] e não pela lógica matemática. Em sua resposta: “[7]: É claro que aqui [N2] tem mais pessoas e menos espaço. Eu fui ali. Os apartamentos são muito pequenos”. Quando a professora lhe pergunta sobre como resolveu a segunda pergunta, ou seja, sobre o número de pessoas que deveriam se locomover de um bairro a outro visando uma distribuição equitativa nos espaços, imediatamente Emílio responde que a questão está mal formulada [9], ratificando a sua fala dada anteriormente que dizia não entender e que está faltando algo [5] e novamente a justificativa que apresenta para este segundo item “[11]: Eu não mudaria sozinho, iria com toda a minha família” comprova a restrição que esta experiência lhe impõe para resolver o problema. Tal experiência se sobrepõe à curiosidade e ao desejo de aprofundar o conhecimento, funcionando como um obstáculo ao conhecimento (no sentido de Bachelard). Assim, parece que seria mais fácil mudar a questão que Emilio se adequar a ela. Embora ele pareça manipular com alguns cálculos, tentando seguir a linha de raciocínio de Alícia, volta com sua estratégia de escolha ao questionar “[36] Todos nós conhecemos esses bairros, não é estranho o que ela está fazendo? Por que temos que usar densidades e equações?”.

O surgimento da estratégia de enfoque matemático é introduzido pela aluna Alícia ao considerar que o problema pode ser resolvido pelo cálculo de densidades e apresenta no quadro após algumas discussões entre Emílio, a professora e outro aluno, Mateus, os primeiros cálculos pertinentes a sua linha de raciocínio [23]. Quando questionada pela professora sobre a interpretação dos cálculos e o que eles representam, imediatamente Alícia apresenta uma solução mais completa, respondendo aos itens solicitados, encontrando a variável *número de pessoas a serem realocadas para se tornar equitativos os espaços* por meio de equações [29]. Em relação a esta aluna percebemos o quão ela esteve convicta e consciente desde o início da sua estratégia de escolha, conforme expressa “[19]: Eu já disse. Este é um problema de densidade”.

No tocante ao aluno Mateus, em suas intervenções ele se destaca pelas estratégias, ensaio, erro, e por aproximações as quais, também, enquadramos dentro de um enfoque matemático já que o mesmo sugere provar com números, sem necessidade de formular equações e ainda fazendo aproximações nos cálculos, conforme fragmentos de fala “[15]:... Pode fazer isso por tentativa e erro, é só começar fazendo com 50.000 pessoas”, “[34]: Eu não acredito que necessitamos fazer uma equação. Por que não tentamos com diferentes números? Não necessitamos serem exatos aqui, não é?”. Mateus permanece com sua estratégia eleita praticamente até o final, quando podemos comprovar com o esclarecimento da professora sobre a divisão por múltiplo de 7 para tornar a divisão exata e ele ressalta “[41]: Mas isso não se trata de números, e sim de pessoas!”.

3.3.3. Análise desde a tomada de decisões

Este problema, como dito, está inserido em um contexto de situação real, já que os bairros são conhecidos pelos alunos e tal fato aponta mais uma vez a influência que variáveis como crenças e experiências prévias têm sobre esse tipo de problema. Os questionamentos que Emilio faz, ratificando em toda a sua participação os conhecimentos intuitivos que traz do contexto vivido por ele, são tão fortes que não foram capazes de abandonar a sua ideia, mesmo que temporariamente, para perceber o raciocínio dos colegas, Alicia e Mateus. Mesmo o professor tendo admitido, levantado como hipótese, que os alunos tinham pré-requisitos do ano escolar anterior sobre proporcionalidade e equações para resolver o problema, percebe-se que tal hipótese não foi confirmada nem por parte de Emílio nem de Mateus, apenas por Alícia. Podemos inferir que o conhecimento institucional trabalhado não foi suficiente para fazê-los perceber outras formas de resolução. Nessa mesma direção, observamos com Freitas (1994) pela teoria da eleição racional que a escolha de Emílio foi decorrente da qualidade/satisfação que a alternativa trazia para ele e não pela opção apontada por Alícia ou por Mateus que para ele possuía menor intensidade, do mesmo modo pode-se dizer dos outros alunos. Assim, a eleição foi feita em função da crença e dos conhecimentos prévios de que a alternativa escolhida saciaria seus desejos. Daí que as crenças, os desejos e os conhecimentos prévios foram os c*ritérios da eleição* e consequente tomada de decisão destes alunos.

Ao identificar, neste problema, os elementos que constituem um processo de decisão, encontramos a existência de um *conjunto de alternativas*, apresentado anteriormente; um *ambiente* em que o problema é suscitado, neste caso dentro de um contexto de uma situação real, densidade demográfica de dois bairros conhecidos e que constitui um ambiente de certeza; uma *função de avaliação* dos resultados, que podemos ver aqui como o grau de satisfação que a alternativa eleita dá para o sujeito, podendo estar associada, como foi, por exemplo, o caso de Emílio, por uma apreciação pessoal de que tal alternativa cobriria, satisfaria a uma necessidade vinculada ao seu meio.

Nesse problema, as condutas dos alunos estiveram subordinadas a um conjunto de fases próprias de um processo de decisão, quais sejam: as *condições definidas no problema,* incorporando aspectos do contexto estrutural, bairros conhecidos e, que neste caso, dificulta os alunos visualizar os aspectos relevantes, funcionando como obstáculos; a s*eleção dos critérios*, dois dos alunos, Emílio e Mateus tem dificuldades de perceber a solução que supõe o *melhor compromisso,* a solução ideal, por não perceberem os atributos ou características mensuráveis que permitam valorar o grau de satisfação das alternativas; a *busca de alternativas* em função dos critérios, Mateus e Emílio também têm dificuldades de criar outras alternativas e de perceber, por exemplo, a solução apresentada por Alícia como sendo uma solução ótima; *Análise,* os alunos podem até fazer uma análise das distintas alternativas, entretanto valoram a sua como a melhor; *Execução e controle,* parece não haver por parte de Mateus e de Emílio, principalmente porque não fizeram uso de um adequado controle de suas ações. Do contrário poderiam ter percebido, por exemplo, a solução de Alícia para uma possível mudança de decisão.

Ao ter em conta o critério básico de racionalidade (Freitas, 1994) de que a decisão deveria alcançar a maior utilidade possível para o sujeito, o valor das alternativas vem da eleição que se faz em função de uma relação de preferência baseada nas utilidades que as alternativas dão para o sujeito. Assim, percebemos no episódio uma relação transitiva de preferência por parte do parte do professor, que embora não seja objeto de interesse de nossa pesquisa, pensamos fazer-se notada pelos alunos, quando a alternativa de Alícia é preferida a de Mateus que por sua vez é preferida a de Emílio, e, portanto a de Alicia é preferida a de Emílio. Considerando *A*=alternativa e *p*=preferida, temos:

Se A_{Alicia} **p** A_{Mateus} e A_{Mateus} **p** A_{Emilio} ; então, A_{Alicia} **p** A_{Emilio}.

Ao considerar que a decisão tomada foi consequência da alternativa que mais trouxe satisfação e utilidade para o sujeito, temos aí um elemento maximal, diferente para cada sujeito, uma medida pessoal de utilidade, já que cada sujeito concebe o problema de maneira diferente do outro. Por isso, ao classificar esse problema como de decisão, observamos que os sujeitos avaliaram as consequências de suas ações em termos qualitativo e também quantitativo, caso particular de Alícia que apresentou toda uma técnica matemática para resolver o problema.

Para este problema apenas apresentamos um recorte de uma aula, não a aula completa. Em caso de que conhecêssemos toda a transcrição da aula, seria possível fazer uma análise deste problema desde as decisões do tipo coletivas ou grupais quando se leva em conta que o sujeito decisor não tem porque ser único pode ser um coletivo deles, ou também quando se têm diferentes utilidades, ademais, na problemática das decisões coletivas haveria que emergir uma única decisão. Assim, reportando para o problema, podemos pensar que essa única solução surgiria quando, por exemplo, ao final da aula os alunos chegassem por si só ou por meio do diálogo ou porque os conduziu ao professor a uma única solução (supostamente ótima) para o problema. Certamente a intenção do professor é que por mais que haja divergências, conflitos de interesses e atitudes, ao final cheguem a colaborar entre si, elegendo ou se convencendo pela eleição da alternativa que maximize sua utilidade conjunta e assim poderíamos ter um problema de decisão de grupo (Bueno, 2004).

Entretanto, com a atenção voltada apenas para o descrito no episódio e sem fazer suposições sobre o que acontecerá no final da aula, observamos que os três alunos Alícia, Emílio e Mateus, pertencentes a um mesmo grupo, iniciam o diálogo, tendo falado antes para o professor que não entraram em consenso sobre a solução do problema e apresentam suas diferentes estratégias de raciocínio. Eles têm objetivos divergentes para as estratégias que construíram, apresentam inicialmente uma atitude de conflito e, por mais que cada um coloque em discussão sua forma de pensamento, o conflito de certo modo permanece até o desfecho desse episódio, mesmo tendo o professor dado todos os indícios que a resposta "correta" seria a de Alicia. Portanto, não podemos falar que houve uma decisão em grupo, uma decisão coletiva. Assim, esse episódio se enquadra como um problema de Teoria de Jogos.

Em caso de que houvesse decisão em grupo e analisando as interações que se dão nesse processo, poderia se dizer que não foi possível perceber uma interação democrática nem total nem parcial, uma vez que os estudantes não convergiram para a construção de uma única estratégia, uma única decisão. Implicitamente, percebe-se uma interação ditatorial quando apenas Alícia "pode falar", quando apenas ela parece apresentar a resposta correta, dado que o professor rejeita a estratégia de Emílio e se "abstém" de comentar a estratégia de Mateus. Ou seja, somente a decisão de Alícia parece a correta e todos deveriam assumir a consequência desta decisão. Se bem que no desfecho do episódio poderia deduzir tal interação ditatorial quando se percebe uma atitude imperativa por parte do professor que parece desejar que os alunos aceitem a escolha de Alícia "[18]: *Melhor continuarmos. Alícia, qual é a sua opinião?*" [44]: "*Você viu como ela resolveu a equação?*"e faz com que Mateus dê indícios de que está renunciando (pelo menos nesse momento) sua eleição/escolha para assumir a função de eleição de Alicia "[49]: *Copiamos a equação?*". Conforme Martínez García (2004a), é pela imposição se simplificam os processos de eleição, de tal maneira que cada sujeito ou grupo, renunciando a sua teórica função de eleição, não tenha possibilidade de abstenção. Talvez por uma questão de sobrevivência no sistema educativo, Mateus percebe que não tem outra opção senão aceitar a que parece ser de referência institucional.

3.3.4. Análise desde a Teoria de Jogos

Por não chegarem a um acordo, ficou evidenciado o conflito, de um lado, entre as distintas preferências de estratégias e por outro, entre os resultados antagônicos que suas escolhas supõem: para Alícia uma resposta matemática de referência institucional, para Emílio uma resposta social, intuitiva.

Ao fazer uma análise do conflito cognitivo dos alunos Alícia, Mateus e Emílio, desde a teoria de jogos, observamos que suas condutas se enquadram no contexto dos jogos cooperativos. Cooperar na teoria de jogos significa firmar acordos, criar vínculos, obtendo-se algum benefício, individual ou coletivo, dessa cooperação. Como já ressaltado o problema foi proposto para ser resolvido em grupo e, portanto, esperava-se que os alunos encontrassem uma solução comum, fruto da cooperação entre eles. No entanto, o fato de não ter encontrado tal solução comum não implica não ser cooperativo. Em outras palavras, sob a estrutura de um jogo cooperativo, o simples fato de cooperarem não lhes garante a "solução" do problema, mas certamente esses alunos valoraram as informações circuladas.

A cooperação aí existente é *sem utilidade transferível* (NTU), isto é, a utilidade (satisfação) individual é distinta, assim sendo, os pagos (ganhos) recebidos com a solução do problema para cada um dos participantes do grupo (A, M e E) não podem ser transferidos entre si, uma vez que cada um deles tem diferentes percepções do resultado.

Mesmo expondo suas idéias para o grande grupo os três estudantes, contando em alguns momentos com a intervenção do professor, não chegam a um acordo unânime. Desde a teoria de jogos, a melhor maneira de resolver tal conflito seria pela negociação, proporcionando ao grupo de alunos meios para que cooperem e obtenham um benefício mútuo. Nesse sentido, pensamos que o professor poderia ter feito um papel de mediador nesse processo. Negociando, poderiam ter entrado em acordo sobre o que e como cooperar. Mesmo que as preferências, as crenças e as eleições de cada um fossem distintas, na negociação poderiam combinar aspectos de cooperação e de conflito. Para Elster (1989; 2003) a palavra chave na negociação é a racionalidade, devendo os indivíduos envolvidos no processo estabelecer negociações no sentido de resolver os conflitos na busca de um ponto de convergência que geralmente é o de ganhar para ambas as partes.

Também no contexto da teoria de jogos, podemos fazer uma interpretação do conflito desde as estratégias de dominação, havendo dois tipos de dominação, uma no sentido débil e outra no sentido forte: 1) Uma dominação no sentido *débil*, podemos associar com o enfoque social proposto por Emílio, quando a questão de densidade demográfica entendida por ele em sentido débil recebe uma resposta também no sentido débil "[5] *Eu não entendo! Algo está faltando; [7] É claro que aqui [N2] tem mais pessoas e menos espaço. Eu fui ali. Os apartamentos são muito pequenos; [11] Eu não mudaria sozinho, iria com toda a minha família*", representando respostas muito simples, de cunho intuitivo, e o conflito se dá porque não faz uma avaliação de resultados e elege simplesmente porque "algo ou alguma coisa", fruto da própria experiência, lhe apontasse para isso. 2) Uma dominação no sentido *forte*, podemos associar com o enfoque matemático dado pela aluna Alícia que apresenta conhecimentos teóricos de referência sobre proporcionalidade e equações, faz uso correto de técnicas, processo de validação, indo além de uma simples manipulação de informações. Se bem que desde o ponto de vista individual, cada aluno ao decidir por uma determinada estratégia e dado o grau de satisfação alcançado por sua escolha, esta estratégia terá para ele sempre um sentido forte.

Observamos que a escolha dos enfoques social e matemático não é compatível entre si, ora pela divergência de conhecimentos, ora pelo excesso de fórmulas. Quiçá, se o professor debatesse mais os processos apresentados pelos três alunos, poderia fazer com que esses enfoques resultassem ao menos mais compreensíveis para todos, permitindo uma possível flexibilidade para negociar.

De modo geral, sobre a conduta matemática dos estudantes percebe-se que: Pelos argumentos que dão para as estratégias que propõem não são capazes de convencer uns aos outros ou pela complexidade ou pela simplicidade de raciocínio apresentado; A conduta matemática é condicionada pelos conhecimentos prévios que funcionam como entraves para o processo de negociação, haja vista que nenhum aluno abre mão do conhecimento que possui para negociar com os demais. Por exemplo, Alícia apresenta um conhecimento da Matemática envolvida no problema (consentido pelo professor) não acreditando que os demais conhecimentos sejam matemáticos (também consentido pelo professor) e parece não se importar que os colegas não a compreenda, em suas palavras "[16] *Isso não é matemática!* [33] *Eu já expliquei minha proposta, agora eles que expliquem"*.

3.3.5. Análise desde a Teoria das Situações Didáticas

Conforme dito na metodologia, a análise deste episódio áulico visa enriquecer nossa percepção sobre a conduta matemática de estudantes resolvendo problemas.

Uma situação didática tal como descrita por Brousseau (1986) implica um conjunto de relações explícitas e /ou implícitas entre um aluno (ou grupo de alunos), o meio e o sistema educativo. Algumas dessas relações podem ser observadas nessa situação didática aqui em análise. O professor ao organizar, planejar a situação teve intenções didáticas de que os alunos colocassem em prática um saber já construído ou em vias de construção (conhecimentos sobre proporcionalidade e equações). Assim sendo, podemos dizer que houve a intencionalidade de se colocar em prática a devolução de uma situação didática frente a uma situação real. Escolher as estratégias de cálculos e tomar a decisão de qual delas leva a uma resposta ótima ao problema esteve a cargo individual de cada aluno.

Nesse episódio podemos classificar alguns tipos específicos de situações didáticas: *Ação* - ao se tratar de uma atividade que permite aos alunos responderem, fazendo uso de procedimentos práticos, de um conhecimento intuitivo e experimental, sem que tenha que dar explicações teóricas pelo que está fazendo, conforme pode ser visto nas argumentações de Emílio e de

Mateus, embora não apresentem algoritmos de cálculo. Das falas de Mateus pode-se deduzir que o mesmo seria capaz de explicar seus procedimentos sobre tentativa e erro e apresentar os algoritmos de cálculos, entretanto o mesmo não se pode dizer de Emílio, que ficou preso em um plano intuitivo, no mundo das crenças e experiências, não conseguindo perceber outras relações a fim de modelar, matematicamente, o problema e daí deduzimos que, possivelmente, Emílio não consiga explicar os procedimentos por ele seguidos. Desse modo, o raciocínio de Emilio também se enquadra numa *Situação de Formulação*, já que ademais não julga a validade do que ele fala. Em outras palavras, as explicações de Emilio se restringem ao plano de suas crenças e experiências de ter estado em um dos bairros, mas não tem a intenção de julgar a validade desse conhecimento que possui. As falas de Alícia se enquadram em outras duas situações: *Validação e Institucionalização*. Esta aluna *valida* o conhecimento, fazendo uso de mecanismos de provas, demonstra o conhecimento de proporcionalidade e de equações adquiridos; usa de argumentos racionais e enfatiza que busca a veracidade do conhecimento, rejeitando as falas de seus colegas "[16]: *Isso não é matemática!* [43]: *isso não é importante*, [48]: *por favor, isso não é importante*". Também Alícia *institucionaliza* os conhecimentos trabalhados na sala de aula, os quais contam com a aprovação do professor. O saber teve um estatuto de referência para esta aluna.

As ações de Alícia nos remetem ao contexto de uma situação a-didática, quando desde os seus conhecimentos prévios, levanta hipóteses e faz conjecturas que se assemelham ao conhecimento adquirido no meio institucional e, sem intervenção direta do professor, propõe a resolução do problema, institucionalizando (com a aprovação do professor) o saber adquirido.

Nesse episódio identificamos quatro etapas que marcaram a devolução da aprendizagem. Uma *aproximação puramente lúdica* percebemos com Emilio quando o mesmo não apreende que a solução que ele apresenta não é a desejável; não se importa se o que apresenta está fazendo sentido ou não. A *devolução de uma responsabilidade e de uma causalidade* se deu com Alicia quando parece se sentir responsável pelas escolhas que fez (mesmo tendo conhecimento das alternativas/estratégias dos colegas) e parece consciente da relação de causalidade entre a decisão que tomou e os resultados consequentes, por meio de um processo de revisão. Segundo Brousseau (1986) esta devolução é delicada, pois, embora os alunos estejam dispostos a aceitar a responsabilidade pelo resultado, o professor deve dar a eles os meios de assumi-la. Pode que, ao promover a resolução em grupo e gerar um processo de debate, de diálogo, fosse considerado pelo professor o meio didático para alcançar seus propósitos ou que ao final da aula tenha proporcionado outros meios, entretanto, não temos condições de fazer essa análise. O que se pode dizer é que ao menos nesse momento não percebemos uma atitude do professor em querer aprofundar nos raciocínios, postos por Emílio e Mateus. Também Alícia chega à etapa de *devolução da antecipação* já que visualiza o resultado antes da decisão final, tanto assim que não faz questão em um primeiro momento de apresentá-lo, supondo que já esteja implícito, mas com a insistência do professor ela o faz, conforme se observa nas linhas 19 a 21 e também na 33: "[19] A: *Eu já disse. Este é um problema de densidade*, [20]: P: *Você sabe o que está dizendo, porém está cansada...*, [21] A: *Vou ao quadro?* [33]: *Eu já expliquei minha proposta, agora eles que expliquem"*. Por último, identificamos também em Alícia mais uma etapa de devolução, *devolução da situação a-didática*, quando ela é consciente do que faz, tem conhecimento das condições para o êxito do problema e percebe-se a capacidade dela em assumir a responsabilidade do problema e que encontrar a solução ótima está a cargo dela, confirmando a hipótese do professor de que possuía conhecimentos prévios para resolver a tarefa, conforme Brousseau essa devolução é marcado pelo "o que o aluno sabe fazer, não lhe foi nomeado, identificado e, sobretudo, não lhe foi descrito como um procedimento 'fixo'" (p.17).

Em relação ao contrato didático se a intenção do professor com essa atividade e gestão das ações dos alunos nesse episódio é avaliar em que medida a aprendizagem está se dando, as falas de Emílio e de Mateus proporcionarão referências para que o mesmo adote medidas de mudanças, por exemplo, na apresentação dos conteúdos. Entretanto, ao menos nesse recorte não se observa tal intenção. Já com relação a Alicia, o contrato se cumpre e não há necessidades de mudança.

Para falar mais sobre o contrato didático, ao considerar nesta relação didática os papéis representados pelo professor e seus alunos, podemos perceber uma ruptura do contrato, quando, por exemplo, o que fazem Emílio e Mateus não se corresponde ao que espera o professor, haja vista o consentimento, a preferência, deste perante a solução apresentada por Alícia, do mesmo modo, podemos falar de uma ruptura do contrato na atitude do professor ao não explorar, nesse momento, as respostas dos alunos Emílio e Mateus, se considerarmos que as expectativas dos participantes fazem parte ou se encontram previstos nas "cláusulas" estabelecidas no contrato de aula, embora nesse momento os alunos não parecem ter conflitos com suas escolhas e demonstram não se importar com a de Alícia.

Também em relação ao contrato didático, caberia ao professor aceitar a responsabilidade dos resultados e assegurar os meios efetivos para aquisição do conhecimento. Ao menos nesse momento não acontece tal situação, talvez ao final da aula, que não tivemos acesso, o professor possa fazer uma avaliação de suas responsabilidades e oferecer os meios para que alunos, como Emílio, busquem outros modos de compreensão do problema, admitindo outras formas de resolução e que ademais reconheçam a responsabilidade de resolver um problema que de imediato não conhecem a solução, mas que podem ser capaz de encontrá-la, como foi o caso de Alícia.

Em síntese, podemos falar de uma ruptura do contrato didático quando não há o cumprimento de uma determinada regra. Todavia, a ruptura se faz necessária, mas é preciso a posterior negociação e renegociação para que a aprendizagem aconteça. Novamente não podemos fazer juízo dessa negociação, haja vista que ao menos nesse episódio não percebemos indício de negociação.

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos respostas às perguntas levantadas no estudo, descrevendo com detalhes as condutas manifestadas pelos estudantes ao resolverem os problemas propostos; tecemos algumas reflexões a respeito do estudo apontando suas contribuições no campo da Educação Matemática; comentamos sobre algumas limitações encontradas no desenvolvimento da pesquisa e; levantamos algumas questões que nos inquietou, que não foi objetivo deste estudo responder, mas que deixamos como indicações de possíveis pesquisas futuras.

Sabemos pouco sobre os processos de compreensão dos alunos, em específico quando se trata do conhecimento matemático. Pensamos que uma das formas de nos aproximarmos dessa compreensão é investigando sobre suas condutas diante da resolução de problemas. Condutas entendidas aqui como sendo as maneiras como os estudantes reagem ante uma situação problema que requer (implícita ou explicitamente) o uso de um raciocínio matemático, que pode ser observado por meio de suas respostas escritas ou orais dadas a estas situações. Assim, corroboramos Gusmão (2006), quando este ressalta que a resolução de problemas foi (e continua sendo) um dos pilares básicos do edifício da Educação Matemática como disciplina científica.

Para investigar o objeto deste estudo – a conduta matemática de estudantes quando resolvem problemas, revisitamos a literatura de modelos econômicos de teóricos e estudiosos da área das Ciências Sociais (Morton, 1971; Elster, 1989; Carmona, 1997; Freitas, 1994; Bueno, 2004, entre outros); e do modelo conhecido na área de Educação Matemática como Teoria das Situações Didáticas, revendo estudos do teórico Guy Brousseau (1986) e de pesquisadores (Gálvez, 1996; Godino, 1999; Pais, 2002, entre outros), que também trabalharam com essa teoria.

À luz desses modelos, buscamos responder o objetivo central da pesquisa, qual seja: fazer uma interpretação de modelos econômicos, especificamente os que envolvem “eleição”, “tomada de decisão” e “teoria de jogos”, desde pressupostos das “estratégias ótimas”, da “maximização dos benefícios” e “minimização dos custos e riscos” e do modelo da Teoria das Situações Didáticas para analisar a conduta matemática de estudantes, quando resolvem problemas em sala de aula.

A literatura pertinente aos modelos econômicos nos possibilitou um novo olhar para a análise de processos de resolução de problemas, ainda não visto dentro da área de Educação Matemática. Nesse sentido, acreditamos que este estudo possa trazer contribuições para a respectiva área, fazendo a ressalva que apenas encontramos um estudo que faz uma tentativa de aproximar a Teoria de Jogos à Educação, realizado por Flores em 2000. Diferente de nosso objeto de estudo, Flores apenas utilizou os pressupostos de Elster (1984, 1989-92, 1995) para explicar a organização e gestão do sistema educativo.

Dentro de uma abordagem qualitativa de pesquisa, analisamos três problemas, considerados neste estudo como não rotineiros: *O problema dos bueiros, o problema onde está o carro e o problema de densidade demográfica*.

A intenção de usar problemas não rotineiros vem do fato de acreditar que estes problemas nos permitiria ver outras nuanças de conduta que poderiam não aparecer em questões rotineiras, padrões. Assim, os três problemas forçam o resolutor a tomar decisões; fazer eleições e julgamentos sobre se a sua formulação requer a utilização de modelos conhecidos ou tem que investir em busca de novas estratégias; pretendem provocar interrupções momentâneas e desequilíbrios (no sentido de Piaget) da conduta do estudante.

Os problemas estão contextualizados em situações reais. Aparecem em seus enunciados expressões relativas a conceitos comuns de nível social que originam a possibilidade de diversas interpretações e, muitas vezes, parecem naturais para os alunos que os resolvem de forma espontânea.

Ao pensar na devolução tal como Brousseau (1986) conceituou, estes problemas foram concebidos de maneira a provocar o aparecimento de conhecimentos prévios e tem uma intencionalidade didática de verificação de conteúdos e de ceder ao estudante parte da responsabilidade pela aprendizagem, em que fazer a escolha e tomar decisões é de sua responsabilidade. Assim, todos os problemas estiveram marcados pela intencionalidade de colocar em ação a devolução de uma situação didática frente a uma situação real.

Os problemas analisados provocam uma quebra de um paradigma, de uma prática pedagógica normal que espera que os problemas tenham uma solução próxima ao conteúdo estudado. Instala-se aí uma ruptura do contrato, os problemas pedem estratégias de resolução que não estão ao alcance imediato dos alunos.

De modo geral, as questões atraíram os alunos; notou-se um grau de envolvimento bastante interessante, mesmo não tendo em sua grande maioria encontrado as soluções ótimas e nem demonstrado indícios de apropriação do conhecimento escolar, que se esperava que tivessem. O conhecimento em evidência na conduta dos participantes de nossa amostra foi de cunho social, o qual deduzimos ser consequência da interpretação dos problemas por parte dos estudantes. Ao interpretá-los como de contextos extramatemáticos, suas respostas também foram extramatemáticas. Assim, fazemos uma primeira interpretação: as condutas dos alunos estão condicionadas aos tipos de problemas, aos contextos que estes levam. Estão influenciados por condutas sociais que os levam a adotar formas de pensar e analisar os problemas, inicialmente, desde um “enfoque social”, derivado de como pensam habitualmente em suas interações com as pessoas de seu entorno e sobre os problemas que estas interações originam. Parece ser muito mais complexo adotar uma forma de pensar, presidida pela exploração multidirecional, pela lógica e pelo raciocínio abstrato, como exige o trabalho com as matemáticas e demais disciplinas de marcado caráter científico (física, química etc).

Corroboramos com Cajaraville (2015)[16] quando ressalta que para aprender matemática como qualquer outra disciplina é preciso, muitas vezes, adotar uma nova forma de pensar. Necessitamos enquanto professores habituar nossos alunos a mudar a forma de pensar quando se trabalham, por exemplo, com problemas abertos. Precisamos nos esforçar como pesquisadores para buscar as causas de tantas dificuldades para adotar novas formas de pensamento e quem sabe prescrever melhores formas de conduta para abordar problemas com amplos olhares, adotando pontos de vistas alternativos (e complementários ao mesmo tempo) quando enfrentamos situações adidáticas. Este foi também um dos objetivos implícitos neste estudo, que nos permitiu classificar as condutas dos estudantes ante os três problemas que propomos.

De modo particular, a ambiguidade consciente com que foi formulado o *problema dos bueiros* permitiu que os alunos imaginassem e formulassem um conjunto de alternativas, não explícito no enunciado; a situação de risco e incerteza gerada pelo *problema onde está o carro* provocou nos alunos dúvidas sobre que alternativa escolher e; a situação representada pelo *problema de densidade demográfica* gerou conflitos cognitivos e de decisões entre os alunos.

[16] Cajaraville , J.A. (2015). Documento inédito. Texto del acto de presentación del libro "Psicología: Entre la Furia y la Calma" de Pilar Enjamio Furelos. Ed. Círculo Rojo. Santiago de Compostela, Setiembre de 2015.

De modo geral, tais problemas incentivaram os alunos a realizar eleições, tomar decisões e colocar em prática um conjunto de ações que puderam ser interpretadas desde os modelos teóricos aqui apresentados e que nos permitiu responder a primeira questão de investigação:

1. Primeira pergunta de investigação:

Quais e como são as condutas adotadas pelos alunos, quando resolvem problemas de matemática?

Os resultados desta pesquisa mostraram vários tipos de condutas as quais classificamos em duas grandes classes: *matemática* e *extramatemática*. Cada uma delas contém outros tipos de condutas, conforme assinalamos no quadro a seguir:

Quadro 12: Classe de condutas matemáticas e extramatemáticas

Condutas	**Matemáticas**	**Extramatemáticas**
1- ótima /de conhecimento de referência/institucional/de controle/de avaliação	X	
2- de conhecimento de mundo/de crenças		X
3- de satisfação pessoal/de utilidade	X	X
4- de sobrevivência escolar		X
5- econômica		X
6- evasiva		X
7- de não negociação	X	X
8- de conflito	X	X
9- ingênua	X	X

Fonte: própria do autor

Observamos nesse quadro uma maior tendência para a classe extramatemática.

Essas condutas aparecem em praticamente todos os três problemas analisados, conforme pode ser observado no quadro a seguir.

Quadro 13: Condutas X Problemas

CONDUTAS \ PROBLEMAS	**Bueiros**	**Onde está o carro**	**Densidade demográfica**
1- ótima /de conhecimento de referência/institucional/de controle/de avaliação	X	X	X
2- de conhecimento de mundo/de crenças	X	X	X
3- de satisfação pessoal/de utilidade	X	X	X
4- de sobrevivência escolar	X	X	X
5- econômica	X	X	
6- evasiva	X	X	
7- de não negociação			X
8- de conflito	X	X	X
9- ingênua	X	X	X

Fonte: própria do autor

1. *Conduta ótima / de conhecimento de referência/institucional/de controle/de avaliação*. Agrupada na classe de conduta matemática, este tipo de conduta foi marcada pelo uso de raciocínios mais elaborados e que se apóiam no conhecimento matemático de referência, institucionalizando o saber adquirido no contexto escolar. Condutas que dão indícios de um processo de devolução adidática (Brousseau, 1986), que podem ser caracterizadas, por exemplo, pelo uso de levantamento de hipóteses; de processos de validação por meio de mecanismos de provas e demonstrações; de busca de estratégias ótimas e maximização dos resultados (ELSTER, 1989); de processos de revisão e controle para verificar se encontraram a solução ótima e se o objetivo foi alcançado, levando a tomada de decisões mais conscientes; de antecipação de resultados e estabelecimento de relações de causalidades entre as eleições, decisões e os resultados (Bueno, 2004); de respostas que ultrapassam uma simples manipulação de informações, demonstrando, conforme Brousseau (1986), que o que sabe fazer, não lhe foi nomeado e nem descrito como um procedimento fixo. Em ocasiões, os sujeitos assumem posturas ditatoriais. Em síntese, as condutas do tipo *ótima/de conhecimento de referência/institucional/de controle/de avaliação* influenciam fortemente na decisão de estudantes. No contexto deste estudo, foi possível observar que poucos alunos demonstraram esse tipo de conduta.

2. *Conduta de conhecimento de mundo/de crenças*. A conduta de estudantes resolvendo problemas contextualizados por situações que se assemelham à vida real sofre influências desses contextos, por isso a agrupamos como extramatemáticas. As experiências pessoais e as crenças adquiridas, sobretudo, no contexto social, é um fator determinante nas eleições que fazem e nas decisões que tomam e dificilmente os alunos abrem mão delas em prol de um raciocínio incomum. É um conhecimento carregado de subjetividade. Assim, os estudantes que têm esse tipo de conduta se apóiam em conhecimentos de experiências de mundo, gerando conjecturas e hipóteses dentro deste contexto; não apresentam flexibilidade de mudanças de pensamento; não percebem contradições; não duvidam de suas experiências; não transferem o conhecimento; apresentam argumentos baseados em suposições não explícitas nos enunciados dos problemas; apresentam raciocínios mais práticos, experimentais e intuitivos que teóricos; diante de um conflito, preferem mudar a situação que se adaptar a ela; costumam criar conflitos entre o mundo das experiências e o mundo da matemática. De modo geral, a *conduta de conhecimento de mundo/de crenças* impõe restrições para a resolução de problema, condicionam as decisões, se sobrepõe à curiosidade e ao desejo de aprofundar o conhecimento, funcionando, assim, como obstáculo. Em particular, os estudantes de nossa amostra apresentaram em sua maioria este tipo de conduta.

3. *Conduta de satisfação pessoal/de utilidade*. A conduta matemática ou extramatemática estará condicionada ao grau de satisfação ou utilidade das escolhas. Isso está em conformidade com o critério básico de racionalidade em que todo processo de decisão deveria ser encaminhado a alcançar a maior utilidade possível para o sujeito (Elster, 1989 e Freitas, 1994). Estando satisfeito, dificilmente o sujeito abre mão de sua escolha/estratégia (elemento maximal) em prol de outra, pois, para ele, a escolha que fez sempre terá um valor superior a dos outros. Daí, a satisfação é uma medida pessoal, condicionada, por exemplo, pelo meio, e diferente para cada sujeito, já que cada um concebe o problema de um modo diferente; para aqueles que percebem um problema dentro de um contexto matemático, pode ser que sua satisfação esteja atrelada a uma resposta dentro deste contexto e não de outro. Por conta da satisfação alcançada, dificilmente os sujeitos deixam-se contagiar pelas estratégias ou argumentos de outros,

dificilmente são influenciados por terceiros. O excesso de satisfação e confiança na estratégia que considera correta impede os sujeitos de enxergar outros possíveis caminhos. No contexto deste estudo, a estratégia que mais trouxe satisfação, êxito, confiança para os estudantes foi a de caráter social.

4. *Conduta de sobrevivência escolar*. Para não ficar sem dar uma resposta ao professor, ao sistema, o estudante acaba respondendo qualquer coisa. Na relação professor-aluno, não tem outra opção senão aceitar a resposta institucional, de referência, vinda de seu professor, mesmo não entendendo ou concordando com ela. A isso chamamos conduta de sobrevivência escolar. A enquadramos na classe de condutas extramatemáticas por escaparem de formular um raciocínio matemático coerente. De certo modo, as decisões estão atreladas a regras de comportamento para se adequar ao sistema escolar, por exigência da situação, por pressões do professor etc., se vê claramente a influência do contrato didático nesse tipo de conduta. Para os problemas analisados neste estudo consideramos de sobrevivência escolar também aquelas respostas que em algum momento não tivemos condições de analisar. Esse tipo de conduta foi bem expressiva em nossa amostra.

5. *Conduta econômica*. Os alunos são muito econômicos em suas ações, em seus raciocínios e em suas justificativas; apresentam respostas pouco elucidativas, algumas vezes monossilábica dos tipos “sim” e “não”. Dada a pouca familiaridade com o problema, decide pelo caminho que lhe exige menos esforço (de leitura, de organização, de raciocínio etc). Pode ser que a falta de interesse pelo problema leve também a uma economia de ações. Esta conduta está agrupada como extramatemática em nosso estudo e, mesmo em menor escala, ela esteve presente nos problemas *do bueiro* e *onde está o carro*.

6. *Condutas evasivas*. São condutas extramatemáticas que demonstram não ter interesse em se implicar no problema, apresentando respostas evasivas, do tipo: “não sei”; fogem a obrigatoriedade de um uso explícito da linguagem matemática; abstém-se de procedimentos de cálculos; modificam a linguagem adaptando-a as informações que se quer comunicar.

Exceto para o problema de densidade demográfica, foi bastante significativa à parcela de nossa amostra que se enquadrou nesta conduta.

7. *Conduta de não negociação*. A conduta de não negociação é matemática e extramatemática; dá-se quando dois ou mais sujeitos envolvidos em uma proposta de decisão comum/coletiva não chegam a um acordo. Cada um com sua escolha/estratégia, que satisfaz a uma apreciação pessoal, não aceita ou não concorda com a escolha do outro, em ocasiões apresentam posturas ditatoriais e se fecham em suas idéias; têm dificuldades de perceber outras formas de raciocínio como solução ótima. Um contrato didático de negociação nesse contexto é interrompido. Esta conduta apenas foi observada no problema de densidade demográfica.

8. *Conduta de conflito*. A conduta de conflito é matemática e extramatemática, se dá quando cada sujeito tem objetivos divergentes. Os conflitos podem ser pelas escolhas que fazem e decisões que tomam; por não perceberem as relações e contextos do problema; pode ser de ordem cognitiva; pela falta de habilidade em compreender o que o outro fala; na relação professor-aluno; na relação aluno-alunos, na relação aluno-saber. Tem origem, por exemplo, nos contextos de conhecimentos prévios, no contexto de aprendizagem matemática, nas crenças e, de modo geral, no mundo das experiências. Nesse sentido, um conflito que normalmente acontece no estudante é entre seus conhecimentos de mundo e conhecimentos de aulas de matemática. A conduta de conflito esteve presente em boa parte de nossa amostra e melhor explicitada no problema de densidade.

9. *Conduta ingênua*. Pode ser uma conduta matemática e extramatemática que apresenta um raciocínio mais simplório, não se sujeita as restrições dos problemas, muitas vezes desprovida de conhecimentos teóricos e, por isso, as respostas podem ser associadas à falta de conhecimento. Não julga a validade do raciocínio, não percebendo que a solução que apresenta não é a desejável, não faz uma avaliação de resultados, as ações muitas vezes são frutos da própria experiência de mundo. Por um lado, os sentidos parecem ser enganados pela natureza dos problemas. Por outro, quando se tenta obter conhecimento por métodos não científicos, torna-se muito elevado o risco de ser enganado pelos

próprios sentidos e se iludir com as aparências. Em nosso estudo, foi expressivamente significativo esse tipo de conduta, representando uma parcela importante do estudo.

Em síntese, a manifestação das condutas matemática e extramatemática veio associada ao contexto dos problemas e ao modo como são interpretados. Se estes estão vinculados a um contexto da vida real, a conhecimento de mundo, e se os alunos não os vinculam ao saber escolar (por não perceberem ou por não fazer parte da rotina escolar), provavelmente as condutas de respostas tendem a se desviar de uma resposta matemática institucional e se aproximar do que aqui chamamos de conduta extramatemática.

Em todo esse contexto, acreditamos também ter construído resposta para a segunda pergunta do estudo:

2. Segunda pergunta de investigação

Em quais situações e em que medida a conduta matemática de alunos, quando resolvem problemas, podem ser interpretadas desde modelos econômicos da Teoria de Jogos, da Eleição e da Tomada de Decisão aprendidos socialmente e do modelo da Teoria das Situações Didáticas, aprendido em sala de aula?

Nas situações que se aproximaram de contextos da vida real, as eleições que fizeram e decisões tomadas convergiram mais para modelos de respostas socialmente compartilhados, como é o caso da Teoria de Jogos, que aprendidos no contexto escolar. Tal fato, vem confirmar a hipótese/premissa de estudo de que a conduta de estudantes ao resolver problemas que fogem à rotina matemática da sala de aula tendem a se aproximar mais de modelos econômicos socialmente aprendidos (custo-benefício, estratégia ótima, maximização dos ganhos, minimização das perdas, grau de satisfação ou utilidade esperada), conforme quadro 12, de modo formal ou informal, fora do ambiente escolar, que de modelos de referência supostamente aprendidos na sala de aula, mesmo visando atender às regras de um contrato didático entre professor-aluno-saber.

Resultado interessante seria se esses dois contextos fossem percebidos de forma mais conectada, pois certamente contribuiriam para alargar os conhecimentos já adquiridos em um como em outro contexto. Nesta perspectiva, faz-se necessário um trabalho efetivo em sala de aula, a fim de incorporar na rotina de aprendizagem questões de natureza de risco, de incertezas, do acaso, não rotineiras, "abertas", como as que aqui apresentamos, visando mudanças na forma como os estudantes percebem/concebem a matemática; visando estimular o raciocínio lógico, probabilístico, alternativo, flexível etc.. Hoje, já se reconhece que se deve trabalhar com esses tipos de questões em documentos curriculares oficiais tanto da Espanha como do Brasil, entretanto, ainda é muito tímido tal trabalho em sala de aula.

Embora tenhamos feito uma interpretação da conduta de estudantes na resolução de problemas desde algumas teorias aqui elucidadas, é preciso ressaltar que muito ainda precisa ser feito. É necessário observar que as teorias revisitadas não apresentam formas, regras, de como o sujeito deve decidir, já que na prática não existe uma regra para se comportar (Kahneman & Tvesky, 1979), portanto, essas teorias apenas nos apresentam indicadores para análise e interpretação. Assim, não se tratou de provar qual teoria seria boa para predizer o comportamento de uma eleição ou de uma tomada de decisão. O que se buscou, especificamente, foi *analisar a conduta matemática de estudantes na resolução de problemas, desde pressupostos de modelos econômicos a Teoria das Situações Didáticas* (objetivo específico 1); *Verificar em que medida os procedimentos usados por estudantes para resolver problemas são influenciados por modelos econômicos e/ou da TSD* ou *modelos da sala de aula de Matemática* (objetivo específico 2); e *Verificar como os modelos econômicos (Eleição, Tomada de Decisão e Teoria de Jogos) e TSD se aproximam para explicar os conflitos surgidos durante o processo de resolução de problemas* (objetivo específico 3). Ao nosso ver, tais objetivos foram cumpridos.

3. Contribuições e limitações do estudo

Haja vista a pouca literatura e pensando nas *contribuições da tese*, deixamos patente as intenções de um novo olhar para a análise dos processos de resolução de problemas, aproximando ferramentas de modelos econômicos aplicados as ciências sociais para prestar mais atenção aos modos de comportamentos dos alunos em sala de aula. Nesse sentido, acreditamos que este estudo possa trazer contribuições para a Área de Educação Matemática. Aos efeitos de contribuir para uma maior difusão dos resultados da pesquisa, tivemos ao longo dessa trajetória as seguintes publicações: Um artigo na Revista Enciga/Espanha, *A tomada de decisões e as matemáticas*, onde discutimos algumas definições sobre à tomada de decisões e como realizá-las desde um ponto de vista lógico e matemático; Um artigo na Revista Praxis/Brasil, *A conduta matemática de estudantes em situação de incerteza: um olhar desde a Teoria das Situações Didáticas,* onde apresentamos uma síntese dos conceitos de situação didática, situação adidática, devolução da aprendizagem e tipos de situações didáticas, que especialmente nos foram úteis para analisar a conduta matemática de estudantes ao resolver um problema de incerteza, evidenciando que tal conduta é influenciada mais por crenças e experiências prévias que por processos institucionais adquiridos em sala de aula; Um capítulo de livro, *Análise das eleições e tomada de decisões de estudantes quando resolvem problemas*, tratando de apresentar brevemente alguns modelos econômicos e da educação que serviram de suporte para o estudo em questão. Foi apresentado a análise do *problema dos bueiros* e verificada a premissa de que as decisões dos alunos ao tentar resolver um problema, desenhado com um determinado objetivo, estariam atreladas a conhecimentos prévios adquiridos em uma sala de aula ou fora dela, a processos de eleição, a conceitos da Teoria de Jogos, tais como: preferências e relação custo benefício; as restrições das tarefas propostas e ao contrato didático estabelecido em sala de aula entre professores e alunos. Entre as comunicações científicas, temos: *Contrato didático "um jogo de negociação"* apresentada no V Congresso Iberoamericano de Educação Matemática/Portugal, onde descrevemos situações de conflitos e de negociação geradas pelo contrato didático por meio de estruturas matemáticas de um jogo de estratégias; *Contrato didático, teoria de jogos e decisões do professor*, apresentada no I Colóquio Internacional do Museu Pedagógico/Brasil, onde fazemos uma reflexão da Teoria de Jogos enquanto instrumento valioso para análise do processo de ensino-aprendizagem, podendo orientar o percurso das decisões do professor em função do contrato que este estabelece com seus alunos no processo educativo; *Eleição, tomada de decisão e situações didáticas em sala de aula* apresentada no I Simpósio de Pesquisa e Extensão em Grupos Colaborativos e Cooperativos/Brasil, trazemos alguns resultados da análise do problema *dos bueiros* resolvido por 186 estudantes da educação básica do estado espanhol, apontando como resultados que a conduta matemática de estudantes está estreitamente ligada, entre outros fatores, a processos de eleição, a preferências e ao contrato didático que estabelecem entre professores e alunos; *Uma análise da conduta matemática de estudantes desde a tipologia de situações didáticas proposta por Brousseau: recorte de uma pesquisa* apresentada no IV Colóquio Internacional do Museu Pedagógico/Brasil, fazemos uma análise mais detalhada da conduta matemática de alunos de carreiras universitárias ao responderem o problema *onde está o carro* desde a perspectiva da tipologia de Situações Didáticas proposta por Brousseau (1986). Nesta comunicação apontamos como resultado que dificilmente os procedimentos adotados pelos alunos correspondem a modelos institucionalmente referenciados; são poucos os alunos que validam seus conhecimentos e suas argumentações, na maioria dos casos, são mais bem intuitivos que teóricos. De modo geral, essas produções foram realizadas com vistas à possibilidade de transferência do aprendido.

Cabe-nos ressaltar algumas *limitações encontradas neste estudo*. As análises que realizamos basearam-se, em sua maioria, em protocolos escritos. Em caso de que houvesse condições de fazer um acompanhamento na rotina de estudos, na sala de aula, destes estudantes, certamente poderíamos ter uma melhor leitura dessas condutas. O protocolo oral, embora nos fornecesse mais elementos para nos aproximarmos das condutas ele foi apenas um pequeno recorte de um diálogo travado em sala de aula, como explicado na metodologia. Nesse sentido, consideramos os resultados limitados ao contexto analisado, não sendo possível maiores generalizações. Outra limitação encontrada neste caminho diz respeito a pouca (ou quase nenhuma) literatura existente na área de Educação, em especial na de Educação Matemática.

4. Investigações futuras

Para finalizar, gostaríamos de registrar algumas indagações que foram surgindo ao longo da pesquisa e que podem servir para *estudos futuros*, quais sejam: em caso de que os problemas fossem *standards*, rotineiros, estariam as condutas matemáticas de estudantes se aproximando mais de econômicos socialmente compartilhados no contexto extraescolar ou de modelos escolares? Ou de outra forma, as condutas aqui identificadas apareceriam caso os problemas fossem *standards*? Como levar para o currículo da formação inicial do professor uma formação em modelos econômicos, visando à otimização do processo de ensino-aprendizagem? Especificamente no contexto da formação inicial do professor, considerar conjuntamente os modelos aqui apresentados é fornecer mais elementos para avaliar e compreender os modos de resolução de problemas dos alunos em sala de aula. Em definitiva, como ajudar os estudantes a adotar novas formas de pensar alternativas que vão além das mais comumente usadas? Ou seja, alternativas que vão além das que se baseiam em condutas usuais de nossas relações sociais?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Fortuny, J. M., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? propuestas didácticas para la ESO.* Síntesis: Madrid.

Alves-Mazzotti, A. J. & Gewandsznajder, F. (1998). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira.

Ayala, L. (2002). *Teoría de Juegos*. Recuperado em junho 2006, de http://www.teoriadejuegos.top.location.href.

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70, Livraria Martins Fontes (Obra original publicada em 1977).

Batanero, M. C., Batanero, C. D. & Cobo, B. M. (2003, junho). *Fiabilidad y generalizabilidad: aplicaciones en la evaluación educativa.* Números, Nº 54. pp 3-21

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil*. Brasília. Recuperado em julho de 2015, de portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. (Centeno, Melendo e Murillo Trad.). Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7, nº 2, Grenoble.

Brousseau, G., (1990). *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?*, Enseñanza de las Ciencias, Vol. 8(3), pp. 259-267 y Vol. 9(1), pp. 10-21.

Bueno, M.C. (2004). *Metodología para la toma de decisiones*. Madrid: Delta Universidad.

Buescu, J. (2002). *O mistério do bilhete de identidade e outras histórias crónicas das fronteiras da ciência*. Portugal: Gradiva.

Carmona, A.C. (1997). *Toma de decisiones. Análisis y entorno organizativo***.** Edicions UPC. Aula Teórica, 53, 1ª ed.

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266.

Chizzotti, A. (2006). *Pesquisa em ciências humanas e sociais*. 8ª ed. São Paulo: Cortez.

Costermans, J. (2001). *As actividades cognitivas: raciocínio, decisão e resolução de problemas*. Coimbra: Quarteto Editora.

Crespo, F. (1993). *Metacognición y aprendizaje: influencia de los enfoques, conocimientos metacognitivos y práctica estratégica (como factores metacognitivos mediante los cuales el alumno regula sus procesos de aprendizaje) sobre el rendimiento académico, en alumnos de enseñanza secundaria obligatoria (12-16 años).* (Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid). Editorial de la Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Madrid: Labor.

Eiser, J. R. (1989). *Psicología social – actitudes, cognición y conducta social*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Elster, J. (1984, outubro-dezembro). *Marxismo, funcionalismo y teoría de juego. Alegado en favor del individualismo metodológico*. In Zona abierta, n° 33. Universidad Complutense, Madri. pp. 21-62.

Elster, J. (1989). *Ulises y las sirenas: estudios sobre racionalidad e irracionalidad.* México: Fondo de Cultura Económica.

Elster, J. (1989a). *Juicios Salomónicos. Las limitaciones de la racionalidad como principio de decisión*. Barcelona, Gedisa.

Elster, J. (1990). *Uvas amargas. Sobre la subversión de la racionalidad.* Barcelona

Elster, J. (1991). *Domar la suerte. La aleatoriedad en la toma de decisiones individuales y sociales.* Paidos.

Elster, J. (1992). *El cambio tecnológico. Investigaciones sobre la racionalidad y la transformación social. B*arcelona: Gedisa.

Elster, J. (1995). *El cemento de la sociedad: las paradojas del orden social. B*arcelona: Gedisa.

Elster, J. (2003). *Tuercas y tornillos: una introducción a los conceptos básicos de las ciencias sociales. B*arcelona: Gedisa.

Elster, J. (2013). *Razón y Racionalidad*. Barcelona: Gedisa.

Fernández, S. F. (1992). *Propuesta de problemas para la educación obligatoria*. [Versión electrónica], Aula de Innovación Educativa. Revista Aula de Innovación Educativa n° 6 pp. 22-27.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2009). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*: In coleção formação de professores. Campinas-SP. 3ª edição.

Flores, R. (2000). *Teoria de Juegos e Individualismo metodológico de Jon Elster: um* *acercamiento para el analisis de la educación*. Cinta de Moebio n° 8. Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de Chile.

Font, V., Planas N. & Godino, J. (2010**)**. *Modelo para el análisis didáctico en educación matemática***.** Revista Infancia y Aprendizaje, vol 33 pp 89-105.

Freitas, F.G. (1994). *Os fundamentos da premissa de racionalidade econômica, suas limitações e a abordagem paraconsistente*. São Paulo. Tese-Doutorado – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, Cap. 1.

Gálvez, G. (1996). *A didática da matemática*. In: Parra, C. & Saiz, I. (Org.). Didática da matemática: reflexões pedagógicas**.** Porto Alegre: Artes Médicas. pp. 36-47.

García Cruz, J. A. (2004). *Didáctica de las Matemáticas: una visión general.* Recuperado em junho de 2004 de http.//www.gobiernodecanarias.or/educación/rtee/didmat.htm.

García Higuera, J.A. (2004). *El proceso de toma de decisiones y de resolución de problemas.* Recuperado em maio de 2004 de http://www.cop.es/colegiados/M-00451/tomadeciones.htm.

Godino, J. & Batanero, C., (1998). *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education.* In. A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as Research Domain: A Search for Identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. (1999). *Hacia una teoría de la didáctica de la matemática.* In: Matemática Cultura y Aprendizaje, nº 1. Editorial Síntesis.

Gusmão, T. C. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica.* Tesis (doctorado en Didáctica de las Matemáticas), Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España.

Henry, M**. (**1991). *El contrato didáctico.* In: Didactique des mathématiques: une presentación de la didactique en vue de la formation des enseignantes. Besançon: IREM, pp. 47-53.

Junior, M. A. (2011). *Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores*. Tese de doutorado em educação matemática: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Rio Claro, Rio Claro. Biblioteca depositaria: igce/unesp/rio claro.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979). *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk* Econometrica, Vol. 47, No. 2. pp. 140-170.

Labra, M. J. (1998). *Introducción a la psicología del pensamiento*. Valladolid: Ed. Trotta.

Labraña, A. (2001). *¿Onde está a cabra?.* Boletín das Ciencias, Enciga n° 45. pp 5-12. Gráficas Garabal.

Ludke, H. & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Luna, S. V. (1998). *Planejamento de pesquisa: uma introdução.* Serie trilhas, São Paulo: Educ.

Martínez García, J. S. (2004). *Distintas aproximaciones a la elección racional*. Revista internacional de sociología n° 37.

Martínez García, J. S. (2004a). *Tipos de elección racional*. [Versión definitiva publicada en la revista internacional de sociología] pp. 139-173, nº 37. Recuperado em julho de 2015 em revintsociologia.revistas.csic.es/

Mason, J. B. & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. [Versión en español de la obra *Thinking Mathematically*, publicada por Addison-Wesley originariamente em 1982 e revisada en 1988]. M.E.C: Labor.

Minayo, M. & Sanches, O. (1993, jul/set). *Quantitativo-Qualitativo*: *oposição ou complementaridade?*. Cadernos de Saúde Pública, Rio de Janeiro, vol. 9, n° 3 pp. 239-262.

Montes, F. (2005). *Resolución de Problemas y Toma de Decisiones*. Sevilla: Editorial Mad.

Morton, D. D. (1971). *Introducción a la Teoría de Juegos.* Madrid: Alianza Editorial.

Moura, H.P. (2003). *El núcleo de las distintas clases de juegos cooperativos desde un punto de vista axiomático*. TIT para obtenção do DEA. Santiago de Compostela: USC.

Moura, H. P. & Labraña, A. (2005). *A tomada de decisões e as matemáticas*. Boletín das Ciencias - Enciga, v. 57, pp. 35-42.

Moura, H. P. & Labraña, A. (2005a). C*ontrato didático um jogo de negociação: uma aproximação da teoria de jogos à didática*. In: V Cibem - Congresso iberoamericano de Educação Matemática, Porto- Portugal. Actas do V CIBEM - Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.

Moura, H. P., Gusmão, T. & Pegito, J. A. 2009. *Contrato Didático, Teoria de Jogos e Decisões do Professor* In: VIII Colóquio Nacional e I Internacional do Museu Pedagógico, Vitória da Conquista: GráficaLog.

Moura, H. P.; Fernández, T. B. & Gusmão, T. C. R. S. (2015). *Análise das eleições e tomada de decisões de estudantes quando resolvem problemas*. In: Sant´Ana, C. C; Santana, I. P.; Amaral, R. S.(Org.): Grupo de Estudos em Educação Matemática: ações cooperativas e colaborativas construídas por várias vozes. São Carlos: Pedro & João Editores. 378p.

Moura, H. P.; Fernández, T.B. & Gusmão, T. C. R. S. (2015a). *A conduta matemática de estudantes em situação de incerteza: um olhar desde a Teoria das Situações Didáticas*. *Revista Práxis Educacional*, Vitória da Conquista, Bahia, Brasil. vol. 11, n. 19, p. 247-267.

Moura, H. P.; Fernández, T. B. & Gusmão, T. C. R. S. (2015b). *Análisis de la conducta matemática de estudiantes desde modelos económicos a la teoría de las situaciones didácticas.* In: XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Alicante. Espanha.

Moura, H. P. G; Fernández, T. B.; Farias, L. M. S.; Gusmão, T. C. R. S. (2015). Uma análise da conduta matemática de estudantes desde a tipologia de situações didáticas proposta por Brousseau: recorte de uma pesquisa. In: *Atas do IV Colóquio Internacional do Museu Pedagógico*: Crise, Conflitos e Conhecimento no Mundo Contemporâneo.

Newell, A & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentoce-Hill.

Oliveira, V. C. (2011). *Uma leitura sobre formação continuada de professores de matemática fundamentada numa categoria da vida cotidiana.* Tese de doutorado em educação matemática: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Rio Claro, Rio Claro. Biblioteca depositaria: igce/unesp/rio claro.

Owen, G. (1995). *Game Theory*. 3ª Ed. Academic Press.

Pais, L. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. Coleção tendências em educação matemática. Brasil: Editora Autentica.

Peleg, B. (1985). A*n axiomatization of the core of cooperative games without side payments.* Journal of Mathematical Economics n°14, pp. 203-214.

Perales, F. J. (1998). La *resolución de problemas en la didáctica de las ciencias experimentales*. Revista educación y pedagogía, vol. 10, n° 21. pp 119 – 144.

Perales, F.J. & Leon P. (2000). .*Didácticas de las ciencias experimentales: teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias.* Espanha: Editorial Marfil. pp. 289-306.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* [Versão em espanhol da obra *How to solve it* publicada por Princeton University Prees em 1945]. México:Trillas.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre de 2007 (2007). Por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Ministério da Educación y Ciencia. BOE n° 266, Madrid, Espanha. Recuperado em julho 2015.

Rufasto, A. (2003). *Manual de Teoría de Juegos*. Indecopi. Lima, Perú. [consultado em maio de 2005 http://www.geocities.com/arufast/juegos.html].

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Sen, A. K. (1977, dez-fev). *Rational fools: a critique of the behavioral foundations of economic theory*. Philosophy and Public Affairs, Vol. 6, n° 4. pp. 317-344.

Silva, A.R. (2001). *Análise de Texto: Elster, J. - Seleção natural e social*. In Peças e engrenagens das ciências sociais, cap. 8, pp. 91- 102. Recuperado em junho de 2005 em http://www.discursus.250x.com/textos/elster.html.

Singleton, R. e Tyndall, W. (1977). *Introducción a la teoría de juegos y a la programación lineal*. Barcelona: Labor S.A.

Slovic, P. (1990). *An invitation to cognitive*. Cognitive Science thinking, vol.3. Cambridge: The MIT Press.

Tolman, E. C. (1959). *Principles of purposive behavior*. In S. Koch (Ed.), Psychology: A study of a science. vol. 2. New York: McGraw-Hill.

Vianna, C. R. (2002). *Resolução de Problemas***.** Temas em Educação I. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, pp. 401-410.

ANEXOS

Anexo 1

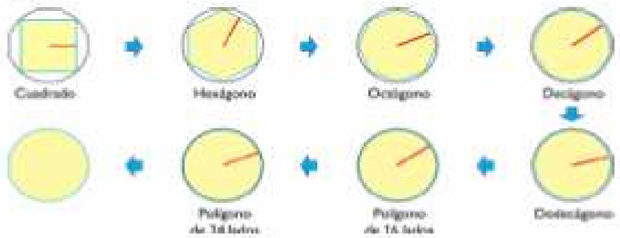
Neste anexo apresentamos uma construção feita pelo professor Dr. José Antonio Cajaraville Pegito como nota de aulas que nos serviu de referência para o problema dos Bueiros, segundo a perspectiva de “maior área a perímetro fixo".

Las Matemática constituye una ciencia especial: es la ciencia de la más pura creación de la mente humana. Una de las principales –y más grandes- de sus virtudes es su carácter relacional: fenómenos en apariencia muy distantes, pueden obedecer a modelos matemáticos íntimamente relacionados (cuando no responden al mismo, tal vez con alguna ligera variante).

Un problema muy interesante dentro de las matemáticas es el llamado “problema del isoperímetro”, que básicamente se puede reformular así: “Entre todas las formas de igual perímetro, determinar la que tiene área máxima”[1].

Nosotros nos limitaremos, aquí, a abordarlo para una clase de formas sencillas: *los polígonos regulares de sucesivos números de lados, pero con una característica común: tener todos idéntico perímetro, que además coincida con la longitud de la circunferencia frontera del círculo isoperimétrico a dichos polígonos.*

Si nos fijamos atentamente en siguiente gráfico, vemos, intuitivamente, que a medida que aumenta el número de lados n, disminuye la longitud del lado –que tiende a cero, al aumentar n- y la apotema del polígono converge hacia la longitud de su radio. Se trata de justificar matemáticamente la aceptación o rechazo de dichas hipótesis. Este es el objetivo de esta nota.



[1] Embora este problema tem um tratamento mais geral, profundo e complexo, constitui o núcleo de uma das visões do problema dos bueiros, que tem que ver com o problema do isoperímetro.

La discusión del problema fue abordado, de forma experimental, en la sala de aula, con estudiantes para profesores de primaria y secundaria en la Universidad de Santiago de Compostela (España). Hemos bautizado el problema que estudiamos, con el título del siguiente epígrafe, debido a sus connotaciones históricas, por tratarse de un problema ya abordado por la civilización griega (antes de Cristo).

1. El problema de las abejas.

El área de un polígono regular en función del perímetro (o de la longitud de su lado). Aproximación del área del círculo de igual perímetro: un problema de límites.

Comenzaremos formulando algunas cuestiones:

-*¿Porqué usamos fórmulas matemáticas?. ¿Por qué existen fórmulas distintas para resolver, teóricamente, un mismo problema?, ¿cuál debemos construir y/o usar?. ¿para qué la trigonometría?.*

La situación comienza por el planteamiento y la discusión en clase del problema: *a perímetro fijo ¿cuál de las formas generadores de mosaicos regulares (triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos regulares) tiene mayor área?*. La mayor dificultad reside precisamente en identificar si las matemáticas pueden jugar un papel relevante en la respuesta al problema *¿tienen las abejas razones para fabricar sus panales en forma de hexágono regular*?. Una vez identificado el problema en términos matemáticos, la confusión perímetro-área y las posibles relaciones existentes entre ambas nociones provocan discusiones de las que se derivan afirmaciones erróneas como: *"para que aumente el área debe aumentar el perímetro, "a perímetros iguales, areas iguales", "sólo hay razones físicas de estabilidad de la construcción"*. Ello conduce a la necesidad de estudiar si existe dependencia o no –y en qué casos- entre el perímetro y el área de una forma poligonal regular. A este respecto resulta relevante el trabajo con mecanos y la referencia a problemas de optimización de áreas a perímetro fijo.

Salvado este primer obstáculo, escribir la altura en función del lado en un triángulo equilátero suele resultar problemático para una buena parte de los estudiantes para profesor de primaria (se había aportado el dato $\sqrt{3} \approx 1.71$, lo que crea cierta intranquilidad entre los estudiantes, por no saber a qué obedece el aporte de éste dato). Se observan múltiples dificultades para construir modelos algebraicos, demandando continuamente que se les faciliten datos numéricos concretos. Una vez obtenidas las fórmulas para el área de **triángulo equilátero, cuadrado y hexágono regular**, en función de la longitud de su lado –utilizan que lado=radio en el caso del hexágono regular-, estas áreas son obtenidas sin mayores problemas, conocido el perímetro.

El siguiente paso tiene que ver con una generalización del problema. Intentar determinar una relación entre el área y el perímetro de cualquier polígono regular. Más concretamente, expresar el área de cualquier polígono regular como función de su perímetro (también en función de la longitud de su lado). En este punto se plantean *varias dificultades (*el pentágono rompe la reglan aplicable a los mosaicos regulares) y algún que otro obstáculo:

-Ya conocen una fórmula para obtener el área de un polígono regular: $\acute{A}rea = \frac{P.a}{2}$ (la mitad del producto del perímetro por la apotema). Entonces, ¿para qué buscar más?

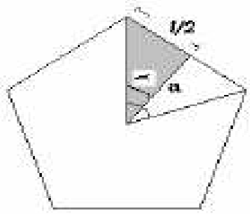
-Intentan usar el mismo criterio que utilizaron para determinar el área –en función de la longitud del lado- triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares..¡pero tropiezan con el pentágono!. Los triángulos interiores no son equiláteros y deben buscar otro procedimiento.

-Hay dificultades para expresar el ángulo interior en función del número de lados –más fácil les resulta expresar el ángulo central-,

-Para muchos de estos estudiantes, la trigonometría –en particular, las razones trigonométricas- sólo ha adquirido un significado muy limitado, lo que provoca que no detecten su papel relevante para resolver el problema en el caso del pentágono.

-Existe conciencia generalizada en estos estudiantes de que los ángulos no juegan ningún papel relevante con respecto a la medida de magnitudes; por ejemplo en la determinación del área. Sólo pueden relacionarlos con la longitud de los lados o de segmentos particulares –y, a lo sumo, el teorema de Pitágoras-. A pesar de tener bastante contacto con la resolución de triángulos, parecen haberse olvidado por completo de ello. Solo les "suena" el cálculo de distancias a lugares inaccesibles como aplicación de la trigonometría, pero no han conseguido asimilar la trigonometría como teoría que se ocupa de analizar las relaciones entre ángulos y distancias. Es evidente que existen obstáculos didácticos que inciden en estas carencias de significado.

-En los estudiantes para maestro, todas estas carencias y dificultades se ven agravadas por su escasa destreza para establecer relaciones funcionales y también para el cálculo simbólico. Expresarse en términos funcionales genera grandes dificultades para muchos de ellos. De manera continua necesitan referirse a datos concretos para poder proseguir su discurso. Es consecuente con las conclusiones de múltiples investigaciones relacionadas con las dificultades de aprendizaje del concepto de función. Muy pocos llegan a establecer:



$$\tan\alpha = \frac{l}{2\ a} \qquad \alpha = \frac{360}{2\ .\ 5}$$

$$\acute{A}rea = \frac{P\ .\ a}{2} = \frac{P^2}{20\ \tan(36)}$$

para el caso del pentágono regular

-Generalizar, para un polígono regular de **n** lados:

$$\acute{A}rea(n) = \frac{P^2}{4n \quad \tan(\frac{180}{n})}$$

es un proceso que origina muchas dificultades para un muy elevado (más del 80%) porcentaje de estudiantes para profesor de primaria.

1.1. Caso de estudiantes de 3° y 4° de Matemáticas.

-Si el perímetro, P, es fijo ¿cómo evoluciona el denominador de la expresión anterior con n?

Muy pocos consiguen argumentar de manera consistente a esta pregunta.

-Probablemente resulte oportuno expresar el área del polígono regular, en función del número de lados, **n**, y de la apotema, **a**:

$$\acute{A}rea(n,a) = \frac{P.a}{2} = \frac{n.l.a}{2} = n.\tan(\frac{180}{n})\,a^2$$

y plantear qué ocurre cuando inscribimos sucesivamente polígonos en una misma circunferencia de radio r, aumentando indefinidamente el número de lados. La convergencia de a a r, hace que la sucesión de áreas de los polígonos converja hacia:

$$n.\tan(\frac{180}{n})\,r^2$$

y se plantee entonces si:

$$\lim_{n\to\infty} \; n.\tan(\frac{\pi}{n}) = \pi$$

Lo que nos llevaría a la auténtica solución del problema:

"La sucesión de áreas de polígonos regulares, isoperimétricos entre sí, cuando va aumentando sucesivamente su número de lados, tiene como límite superior, al área del circulo isoperimétrico a dichos polígonos regulares: πr^2"

¡lo que, en efecto, es correcto!, por ejemplo en Derive™:

#1: $\lim_{n\to\infty} \; n.\tan(\frac{\pi}{n})$

#2: π

Pero, si transformamos la expresión y aplicamos la regla de L'Hôpital, ¡nos encontramos con sorpresas….!

$$\lim_{n\to\infty} \; n.\tan(\frac{\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})}} = (\text{regla de L' Hôpital, tipo } \frac{\infty}{\infty}) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n}).\frac{-\pi}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \; \cos(\frac{\pi}{n}).\frac{-\pi}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \; 1.\frac{-\pi}{n^2} = 0$$

¿Dónde está el error?

La Matemática es una ciencia lógica. Sus teoremas se basan en unas hipótesis claras de las que derivan unas tesis (conclusiones). En este caso, la regla de L'Hôpital, exige las siguientes hipótesis para resolver límites bajo la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

TEOREMA. *(Regla de L'Hôpital)*

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

1) diferenciables sobre el intervalo $(-\infty,+\infty)$
2) $\lim_{x\to\infty} \; f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \; g(x)=\infty$
3) $g'(x)\neq 0$, sobre $(-\infty,+\infty)$

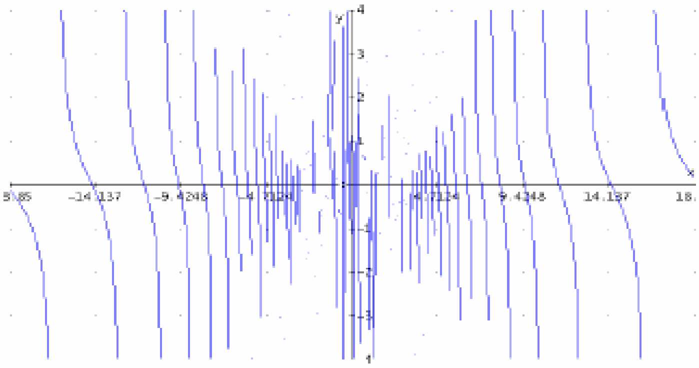
4) *Existe límite finito o infinito igual a* $+\infty$ *ó* $-\infty$.

Entonces, existe también el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En nuestro caso: $f(n) = n$ (podemos suponer sin ninguna pérdida de generalidad que n es un número real, en lugar de entero, y que g(x)= $g(n) = \dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})}$

cuya gráfica es:



Es decir…¡ya falla la primera hipótesis –*g(n) no es continua* y ,por tanto, *no diferenciable*- en ningún intervalo, por pequeño que éste sea- ! (fallan más hipótesis, pero con esto es suficiente).

Por tanto, la regla de L'Hôpital no puede ser aplicada: El límite no tiene por qué ser *0*.

Veamos, sin necesidad de más precisión teórica, a dónde converge la expresión:

N	3	4	5	6	7	8	9
n.tan(□/n)	5,196152423	4	3,63271264	3,46410162	3,37102233	3,3137085	3,27573211
N	44	45	46	47	48	49	50
n.tan(□/n)	3,146942109	3,146706537	3,1464862	3,14627981	3,14608622	3,14590438	3,14573336
N	994	995	996	997	998	999	1000
n.tan(□/n)	3,141603114	3,141603093	3,14160307	3,14160305	3,14160303	3,14160301	3,14160299
N	9994	9995	9996	9997	9998	9999	10000
n.tan(□/n)	3,141592757	3,141592757	3,14159276	3,14159276	3,14159276	3,14159276	3,14159276

El valor de π con 14 cifras decimales exactas es: p =3,14159265358979.

Parece evidente que:

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \mathrm{TAN}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

¡pero toda la aproximación intuitiva llevada a cabo hasta aquí, no constituye una demostración matemática!. He ahí la grandeza y, a la vez, el peaje, del razonamiento lógico.

No vamos a hacer aquí la demostración rigurosa de que dicho límite vale π. El lector interesado puede verlo, en cualquier libro de Análisis Matemático básico. Dejamos pues este ejercicio al lector (también puede buscarlo en Internet).

Además, este tipo de problemas justifican procesos matemáticos que, en ausencia de ellos, semejan ser puras elucubraciones mentales, sin aplicación aparente. Tal es el caso del estudio de los límites –tanto de sucesiones cómo de funciones- . Este caso ¡al menos justifica el cálculo de un límite!. En general no se suelen encontrar en los textos de matemáticas de secundaria muchas situaciones significativas para contextualizar las nociones de sucesión monótona, convergente, límite de una sucesión y/o cálculo de límites. ¿podría servir una situación como esta?. A nuestro juicio, la respuesta es afirmativa.

Esta nota, no quiere sino advertir del aspecto tan relacional de la Matemática. Este hecho no es visible, por desgracia, para un gran porcentaje de seres humanos. No pueden percibir en la Matemática más que en simples operaciones numéricas o algún tipo de resultados geométricos y/o algebraicos muy básicos y simples. Pero casi siempre des cohesionados unos temas de otros. Creemos que se trata de una "pequeña tragedia", que sólo un porcentaje mínimo de personas puedan disfrutar del elevadísimo goce de apreciar la potencia y la belleza, sin par, de la Matemática (belleza más y más apreciable a medida que se hace más compleja ¿contradicción?) como suprema creación de la mente humana, y que se encuentra presente –la Matemática- en un altísimo porcentaje (cada vez mayor), de todo aquello que nos facilita la vida diaria, nos permite comunicarnos cada vez con mayor facilidad (y a distancia), a mejorar nuestros contactos, nuestra salud, nuestros viajes, nuestra localización….y un larguísimo etcétera..

Anexo 2

Neste anexo, apresentamos uma solução de referência para o problema *onde está o carro*. é uma solução abordada em um texto escrito pelo professor Dr. Antón Labraña (2001), intitulado ¿Onde está a cabra? Publicado no *Boletín das Ciencias*, 45. 5-12. ENCIGA. Gráficas Garabal.

Nº 45 (Marzo 2001) Boletín das Ciencias 19

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

¿ONDE ESTÁ A CABRA?[1]

LABRAÑA, Antón,
Facultade de Ciencias da Educación - Usc

"Pero las explicaciones científicas siempre me han resultado pueriles y un tanto enojosas, y no convencerán jamás al alma inconforme o simplemente imaginativa"
Javier Marías (El siglo)

Relátase aquí unha recreación, que se levou a cabo cuns pequenos grupos de estudiantes de Económicas e de Matemáticas, da polémica que houbo nos Estados Unidos en torno a un "paradoxo" que se presentou a raíz dun concurso televisivo.

A efectos de non influír a priori no que puidesen pensar os estudiantes, ímoslles entregando pouco a pouco información que se vai discutindo puntualmente, demandando que se posicionen no debate aínda que teñan dúbidas. A experiencia desenvolveuse segundo o seguinte guión que a eles, por suposto, non llo dimos a coñecer:

1.- Lectura do problema formulado.
2.- As vosas opinións e os vosos argumentos.
3.- 1ª resposta de *vos Savant* e polémica suscitada.
4.- 2ª resposta de *vos Savant.*
5.- Continua a polémica; 3ª resposta de *vos Savant* e conclusión.

[1] Reflexións en torno ó texto de Paul Hoffman "El hombre que solo amaba los números" (Ed. Granica, Bacelona 2000).

6.- Unha crítica ás argumentacións (que non necesariamente á conclusión).

7.- Un argumento en contra.

8.- Un argumento alternativo a favor da conclusión (pensando *en negativo*).

9.- A posición de *Erdös*, o *método Montecarlo* e a súa aceptación.

10.- Ensaiemos o *método Montecarlo*.

11.- Anexo.

1) PROBLEMA FORMULADO

- O concursante pode elixir entre tres portas: detrás dunha delas hai un coche e detrás de cada unha das outras hai unha cabra.
- Unha vez realizada a elección, o presentador, que sabe onde está o coche, abre unha das portas non elixidas, detrás da cal hai, naturalmente, unha cabra.
- Agora dálle ó concursante a posibilidade de cambiar a porta elixida anteriormente pola que aínda queda sen abrir.

2) AS VOSAS OPINIÓNS E OS VOSOS ARGUMENTOS.

A situación de polémica reprodúcese na aula, sendo en principio maioritario o sector que cre que a probabilidade é 1/2 en calquera caso; a opinión xeneralizada podemos resumila neste argumento: "chegados ó momento da elección só hai dúas portas e podemos elixir libremente; o que sucedeu antes inflúe en cales van ser esas portas, pero sempre unha terá premio e outra non, e xa non pode repercutir novamente"

As poucas posicións contrarias a esta opinión son máis ben intuicións "borrosas", que non acertan a expresar con claridade.

3) 1ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT* E POLÉMICA SUSCITADA

Von Savant, que figura no Libro Guiness dos récords como o coeficiente intelectual máis alto do mundo, defende que é vantaxoso cambiar de porta:

"Imaxina que hai un millón de portas e ti elixes a porta nº 1. Entón o presentador, que sabe o que hai detrás de cada porta e evitará abrir a do premio, abre todas menos a nº 777 777. Seguro que cambiarías rapidamente de porta, ¿non si?".

Entre os nosos estudiantes, aumentan lixeiramente as simpatías cara vos Savant, pero a maioría segue mantendo en pé o argumento anteriormente exposto (punto 2).

Prestixiosos matemáticos e estatísticos (das universidades George Mason e de Florida, por exemplo, ou do Instituto Nacional da Saúde e do Centro de Información para a Defensa, ídem.), replícanlle en termos semellantes ós que expoñían os nosos alumnos, pedíndolle que rectifique. Pero ela polemiza con todos.

4) 2ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT*

Presentou entón unhas táboas nas que desglosaba as diferentes posibilidades:

Táboa 1

PORTA 1	PORTA 2	PORTA 3	RESULTADO (elixindo a porta 1 e non cambiando)
Coche	Cabra	Cabra	gaña
Cabra	Coche	Cabra	perde
Cabra	Cabra	Coche	perde

Táboa 2

PORTA 1	PORTA 2	PORTA 3	RESULTADO (elixindo a porta 1 e cambiando)
Coche	Cabra	Cabra	perde
Cabra	Coche	Cabra	gaña
Cabra	Cabra	Coche	gaña

"polo tanto, cambiando de porta gáñanse dúas veces, mentres que non cambiando, soamente unha".

A táboa produce efecto e agora si hai un deslizamento importante cara esa idea, quedando en minoría os de antes, que admiten a importancia deste novo argumento pero que non acaba de invalidar o deles.

5) CONTINUA A POLÉMICA; 3ª RESPOSTA DE *VOS SAVANT* E CONCLUSIÓN.

Recíbense miles de cartas na proporción de 9:1 en contra de vos Savant, pero ela replica de novo:

"Supoñamos que entra nos estudios televisivos unha marcianita, que non sabe cal porta eliximos en principio, e pídeselle que elixa unha das dúas portas que quedan sen abrir. As súas posibilidades son ó 50%, pero porque ela carece da vantaxe inicial que ten o concursante: a decisión do presentador. Se o premio está tras da porta 2, o presentador abrirá a 3; e se está detrás da porta 3, abrirá a 2. Entón, ó cambiar, gañamos se o coche está detrás da porta 2 ou da 3. ¡Gañamos das dúas maneiras!. Pero se non cambiamos, soamente gañamos no caso de que o premio estea tras da porta 1".

Os menos convencidos ceden parcialmente no seu convencemento, pero aínda manteñen a primeira idea (punto 2) como algo que finalmente podería funcionar.

Baseándose neste 3º argumento de vos Savant, xorde un novo argumento nesa liña, moi semellante ó que se expón no punto 8, pero antes, nós mesmos, aínda avivamos a polémica.

6) UNHA CRÍTICA ÁS ARGUMENTACIÓNS (QUE NON NECESARIAMENTE Á CONCLUSIÓN)

A 1ª argumentación pode facilmente facernos pensar que a porta que o presentador deixa sen abrir é a que ten o premio ("evitará abrir a do premio"). Iso non é necesariamente así, pois no caso de estar o coche tras da porta 1, procederá aleatoriamente a abrir calquera das outras portas.

A 3ª argumentación de *vos Savant* xira explicitamente en torno á idea de que a decisión do presentador engade información relevante para a decisión do concursante, acerca de se este debe ou non cambiar de porta.

- Dado que hai simetría nas tres eleccións posibles da porta inicial (1, 2 ou 3) traballaremos, igual que fai *vos Savant* unicamente sobre unha delas: supoñamos que elixe a porta 1.
- Na súa argumentación, omite dicir que o presentador pode mostrar a porta 3 ou a 2 aínda estando o premio na porta 1 que o concursante tería elixido. Vexamos o que ocorre se incluímos esta casuística:
- Os tres casos da táboa constitúen unha familia completa de sucesos, que denominaremos A1, A2 e A3, respectivamente se o coche está tras da porta 1, 2 ou 3.

- A probabilidade de que o conductor descubra a porta 2 (C2) é, segundo o teorema das probabilidades totais:

  $$P(C2) = P(C2/A1) \cdot P(A1) + P(C2/A2) \cdot P(A2) + P(C2/A3) \cdot P(A3) =$$
  $$= 1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = \tfrac{1}{2}$$

- Analogamente, ou ben polo suceso contrario, $P(C3) = \tfrac{1}{2}$

Polo tanto, a decisión do presentador non nos aporta información.

En varias ocasións saíra no noso debate a idea de que se o presentador trataría de que non gañasémolo premio, que se intentaría desorientar ó concursante... O feito de comprobar tecnicamente que a decisión do presentador é irrelevante non leva a cambios de posicionamento, pero si debilita a seguranza que algúns/as xa tiñan na veracidade da tese de vos Savant, e fai que os seus detractores recuperen ánimos.

7) UN ARGUMENTO EN CONTRA

Se ben son 3 as posibles posicións do coche, o xogo non consiste en acertar unha vez oculto este, senón en acertar unha vez que concursante e presentador se pronuncien. Isto converte os casos posibles en 4, e non en 3 como viñamos manexando:

- Volvendo á táboa, a primeira opción (que o coche estea colocado tras a porta elixida polo concursante), deixa dúas opcións ó presentador, polo tanto hai dous casos posibles, máis un caso por cada unha das outras opcións. Seguimos, dada a simetría, reducíndoo ó caso de que o inicialmente se elixa a porta 1ª.

Porta 1	Porta 2	Porta 3
Coche	Abre	**Cabra**
Coche	**Cabra**	Abre
Cabra	**Coche**	Abre
Cabra	Abre	**Coche**

__Táboa 3__

(en negriña a posibilidade de cambiar)

- Daquela, a probabilidade de acertar conservando a primeira elección é $2/4 = \tfrac{1}{2}$.
- Do mesmo xeito, a probabilidade de acertar cambiando é, tamén, $2/4 = \tfrac{1}{2}$.

Agora os "animados" na defensa de ½ : ½ , cren atopar un argumento concluínte; outros regresan a este posicionamento; pero outros mantéñense no anterior, xusto na situación inversa: este novo argumento parece estar ben, pero non invalida o argumento 3º nin os que se deron na aula como complemento a ese.

8) A POSICIÓN DE *ERDÖS*, O *MÉTODO MONTECARLO* E A SÚA ACEPTACIÓN

Vázsonyi, profesor de universidade en California, preparou un "diagrama de decisións", semellante ás táboas 1 e 2, que usa nas súas clases de técnicas cuantitativas de decisión, o que o levou a un total convencemento a favor das teses de vos Savant.

Pero Erdós, o matemático máis prolífico do noso tempo, replicoulle rotundamente dicindo que iso era imposible e que, ademais, o seu diagrama non explicaba *por qué* hai que cambiar; algo que si debera explicar unha verdadeira demostración.

9) UN ARGUMENTO ALTERNATIVO A FAVOR DA CONCLUSIÓN (PENSANDO *EN NEGATIVO*)

Daquela, se desexamos manter a conclusión, debemos construír argumentos alternativos. Aí vai un, que adapta[2] *en negativo* o anterior argumento 3º:

- Se o concursante toma *a priori a decisión de cambiar de porta* suceda o que suceda, cando elixe por vez primeira en realidade o que está facendo é descartar unha porta:
    * A probabilidade de descartar o coche é 1/3.
    * Se o coche está nalgunha das outras dúas portas (probabilidade 2/3) acerta seguro, pois o presentador *está obrigado* a descartar a outra.
- Entón, cambiando sempre, efectivamente a probabilidade de acertar é de 2 a 1. A decisión do presentador é irrelevante: *alea iacta est*.

[2] Metidos na polémica, os nosos pensamentos non son totalmente orixinais: pensamos a partir das ideas dos demais, tanto das acertadas coma das erradas, aproveitando cousas de aquí e de acolá, ou entrevendo posibles solucións ó facer crítica a formulacións anteriores á nosa.

Recupéranse partidarios de vos Savant, que ven como esta nova argumentación matiza as súas anteriores o suficientemente como para disipar toda dúbida. Os críticos sobreviventes séntense moi debilitados.

10) ENSAIEMOS O *MÉTODO MONTECARLO*

Fixemos na clase unha simulación experimental utilizando uns dados (que indicaban as eleccións) e unhas fichas (dúas verdes representaban as cabras e unha vermella o coche), e deixamos que o azar dictase veredicto.

- Un primeiro lanzamento decidía como colocar o coche (1, 2, ou 3 puntos do dado e, correlativamente, 4, 5 ou 6).
- Un segundo lanzamento representaba a elección do concursante (mesmas puntuacións).
- Repartímonos ó chou de forma que en total fixéronse 60 simulacións conservando a porta elixida inicialmente, e outras 60 cambiando de porta:

  *Cambiando gaña en 42 casos e perde en 18.

  *Se non cambia gaña en 17 e perde en 43.

(O paralelismo cos resultados 40 e 20 (20 e 40, respectivamente), teoricamente previsibles, é notorio).

Os críticos réndense ante a experiencia. Parece ser que Erdós tamén e que, finalmente foi convencido por Graham, outro insigne matemático:

" A clave do problema está en saber desde o principio que o presentador darache a oportunidade de cambiar de elección. Iso está nas regras e hai que engadilo ó problema".

11.- ANEXO

A preocupación de Erdós permanece. Podemos aceptar calquera dos tres argumentos de *vos Savant*, incluso os tres, incluso o "alternativo" dado no punto 8, e tamén o "montecarlo", pero ningún revela *por qué* é mellor cambiar.

Incluso a explicación de Graham non aclara nada, se non que re-enuncia o xogo, recórdanos o que xa se nos di ó principio. Teño a impresión de que Erdós aceptouna por aburrimento.

Non podiamos descubrilo antes, pois daquela ninguén cambiaría de opinión, pero o argumento do apartado 7 constrúese coa hipótese implícita de que os 4 sucesos elementais (que efectivamente hainos), son equiprobables, o cal non é certo, pois os dous primeiros repártense entre si 1/3 dos casos, ou sexa, cada un destes ten 1/6, mentres que os outros dous teñen 1/3 cada un, co cal volvemos ó anterior.

- Esta última reflexión dános, ademais, a clave para *revelar* cal é a inconveniencia de elixir libremente unha porta entre dúas:
    - Efectivamente, a evidencia de que a decisión definitiva do concursante consiste en elixir unha porta entre dúas leva á intuición de que a probabilidade de acertar é ½ en calquera caso. Dita intuición sería correcta se os sucesos elementais desta tesitura fosen equiprobables (ou sexa, se o coche pode estar aleatoriamente situado en calquera das dúas portas a elixir), o cal é falso:
        - Se elixín a porta 1 e me dan a opción de cambiar á porta 2 (porque a 3 xa foi aberta), das situacións deste tipo que me presenten o coche estará oculto tras da porta 1 só unha terceira parte das veces que me dean esta oportunidade (opción 2ª da <u>táboa 3,</u> con probabilidade 1/6 de se producir) estando oculto tras da porta 2 dúas terceiras partes das veces que me dean esta oportunidade (opción 3ª da <u>táboa 3,</u> con probabilidade 1/3 de se producir). Analogamente sucede se me dan a elixir o cambio entre a porta 1 e a porta 3 (opcións 1ª e 4ª da <u>táboa 3</u>).
        - Doutra maneira, se elixo a porta 1 mostraranme a porta 3 en tódolos casos nos que o coche estea tras da porta 2 (opción 3ª da <u>táboa 3</u> con p=1/3), e soamente na metade dos casos en que estea tras da porta 1 (opción 2ª da <u>táboa 3</u> con p=1/6, 1/2 de 1/3), porque aquí o presentador abre aleatoriamente a 2ª ou a 3ª porta.

12) AGRADECEMENTOS

Ós estudiantes que recrearon a polémica e ós profesores Cajaraville e Emilio Crespo polos seus acordos e/ou desacordos.

Anexo 3

Este anexo 3, trazemos um modelo para a analise didático em educação matemática, apresentado por Font, V., Planas N. & Godino, J. (2010**)** na Revista Infancia y Aprendizaje, vol 33 pp 89-105.

PARA EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[17]

Vicenç Font, Universidad de Barcelona

Núria Planas, Universidad Autónoma de Barcelona

Juan D. Godino, Universidad de Granada

A MODEL FOR THE STUDY OF MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING PROCESSES

Resumen

La finalidad de este artículo es presentar la viabilidad de un modelo teórico para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo contempla cinco niveles de análisis, los cuales son aplicados conjuntamente a un episodio de clase. Este modelo se ha elaborado para describir (¿qué ha ocurrido aquí?), explicar (¿por qué ha ocurrido?) y valorar (¿qué se podría mejorar?) procesos de instrucción en el aula de matemáticas. Nos basamos en una síntesis teórica de aspectos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, que venimos desarrollando desde hace una década. Aunque algunas partes del modelo son específicas de la actividad matemática, investigadores de otras áreas educativas pueden adaptarlas de modo que resulten eficaces en el análisis didáctico de otros tipos de prácticas escolares. El principal resultado esperado de la aplicación del modelo es llegar a una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción.

Palabras clave

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, enfoque ontosemiótico, prácticas de aula, objetos y procesos matemáticos, normas, conflictos semióticos, idoneidad didáctica.

Abstract

The aim of this paper is to present the viability of a theoretical model for the analysis of processes of teaching and learning mathematics. It is a model with five levels of analysis that are jointly applied to a classroom episode. We have constructed the model in order to describe (what has happened here?), explain (why has it happened?) and value (what could be improved?) classroom mathematical instructional processes. We draw on the onto-semiotic approach to the

[17] Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2009-08120/EDUC, EDU2009-07113/EDUC y SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

mathematical knowledge and instruction. Although some parts of the model are related to the mathematical activity, researchers from other educational areas may effectively adapt them when doing a didactical analysis of other types of school practises. The main expected result from the application of the model is a grounded valorization about the didactical sustainability of study processes that have been carried out in the mathematics classroom.

Key words

Teaching and learning of mathematics, onto-semiotic approach, classroom practices, mathematical objects and processes, norms, semiotic conflicts, didactical suitability.

1. INTRODUCCIÓN

En Coll y Sánchez (2008), se discuten aspectos básicos a tener en cuenta en el desarrollo de modelos para el análisis de la interacción y la práctica educativa en el aula. Hemos tenido en cuenta este trabajo en la organización del presente escrito sobre un modelo para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de un modelo teórico, compuesto por cinco niveles, elaborado para describir, explicar y valorar procesos de instrucción matemática. La finalidad de este artículo es presentar la viabilidad de aplicar conjuntamente los cinco niveles de análisis, utilizando como contexto de reflexión un episodio de clase. En primer lugar, presentamos herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder “¿qué ha ocurrido aquí y por qué?”. En segundo lugar, presentamos herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder “¿qué se podría mejorar?”. Entendemos que el estudio de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar valoraciones fundamentadas.

Nuestro marco teórico de referencia es básicamente el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (D’Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006; Ramos y Font, 2008). Este marco trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos (Bloor, 1983; Chevallard, 1992) y semióticos (Radford, Schubring y Seeger, 2008) sobre las matemáticas, adoptando principios didácticos de tipo socioconstructivista (Ernest, 1998) e interaccionista (Cobb y Bauersfeld, 1995) para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estructuramos el artículo en seis apartados, el primero de los cuales es esta introducción. En el segundo apartado introducimos los niveles de análisis didáctico. En el tercero presentamos la transcripción de un episodio breve de clase que vamos a utilizar para ejemplificar nuestro modelo. En el siguiente apartado aplicamos los niveles descriptivos y explicativos al análisis del episodio de clase. A continuación aplicamos el nivel valorativo y, por último, terminamos con algunas reflexiones sobre la aplicación del modelo de análisis propuesto en la formación de profesores de matemáticas. La reflexión de los profesores sobre su propia práctica docente es un requisito importante para la mejora efectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Schön, 1983). Dicha reflexión debe ser sistemática, teniendo en cuenta las diversas facetas implicadas y tipos de conocimientos requeridos (conocimiento profundo del contenido especializado, de los estudiantes y de las interacciones en el aula, entre otros). Las herramientas teóricas presentadas en este trabajo, convenientemente adaptadas, pueden ser usadas por el profesorado para fundamentar cambios y mejoras. Aunque algunas partes del modelo son específicas de la actividad matemática, investigadores de otras áreas educativas pueden adaptarlas de modo que resulten eficaces en el análisis didáctico de otros tipos de prácticas escolares.

2 ¿QUÉ ANALIZAMOS?

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) se han propuesto cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática. Por ejemplo, el nivel 4 se propone para integrar aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil y Planas, 2004; Planas y Civil, 2009; Yackel y Cobb, 1996). Hasta el momento, desde el enfoque ontosemiótico se han realizado análisis didácticos a episodios de aula pero no se han aplicado conjuntamente todos los niveles anteriores a un mismo proceso de instrucción. Por ejemplo, en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se han aplicado parcialmente los niveles 1 y 2 al estudio de una lección de un libro de texto sobre los conceptos de suma y resta. En Font, Godino y Contreras (2008) se han aplicado los niveles 1 y 2 al análisis de una tarea de aula para justificar la derivada de la función $f(x) = x^2$. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) se ha aplicado el nivel 5 a una sesión de clase para la enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería.

Los niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico están pensados para el desarrollo de un análisis completo que permita describir, explicar y valorar procesos de instrucción. Sin embargo, la profundización en el análisis de algunos de los niveles está muy condicionada por el tipo de episodio. En cuanto al nivel 5, para valorar la idoneidad didáctica global de un proceso de instrucción (de acuerdo con la noción de idoneidad didáctica desarrollada en Godino, Bencomo *et al.*, 2006), se necesita disponer de un análisis longitudinal previo y amplio que el análisis de los niveles 1, 2, 3 y 4 aplicados a un episodio breve de aula no proporciona. Esto no excluye que sea posible realizar una valoración parcial de la idoneidad de un proceso de instrucción puntual, teniendo en cuenta por ejemplo la idoneidad de la interacción observada en la aplicación del nivel 3. En cuanto al nivel 4, puesto que las normas se infieren de regularidades observadas en el proceso de instrucción, su identificación en un episodio breve no deja de ser cuestionable por no informar sobre la recurrencia en el tiempo; a pesar de ello, se puede hacer una inferencia plausible de normas teniendo en cuenta datos obtenidos al aplicar los niveles 1, 2 y 3 y asumiendo el carácter local de estos datos.

En este artículo, proponemos mostrar la viabilidad de aplicar conjuntamente los cinco niveles utilizando como contexto de reflexión el análisis del episodio ya presentado. Para ello, adaptamos los niveles del enfoque ontosemiótico:

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Identificación de normas.
Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción.

Para un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas. La realización de una práctica moviliza elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, es necesario considerar, entre otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas; de ello se encarga el nivel 2. La finalidad de este segundo nivel de análisis es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, así como de tipologías de unos y otros.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1) a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2) y, de ahí, hacia el estudio de las interacciones entre profesor y alumnos. En nuestro caso y dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, para el nivel 3 nos centramos en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico de fácil identificación, siguiendo el procedimiento usado en Planas e Iranzo (2009). En el nivel 4 consideramos que prácticas matemáticas e interacciones están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

Los cuatro niveles de análisis descritos son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa en tanto que sirven para comprender y responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. Sin embargo, no evalúan la pertinencia del proceso de instrucción matemática ni determinan pautas para la mejora del diseño y de la implementación de este proceso. La didáctica de la matemática no debería limitarse a la mera descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de instrucción. Son necesarios, por tanto, criterios de “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora. El nivel 5 se ocupa de este análisis de tipo valorativo.

Las nociones teóricas mencionadas en la descripción de los distintos niveles de análisis serán introducidas en los siguientes apartados, aplicadas al caso de un episodio de clase perteneciente a un proceso de instrucción en el que un profesor interactúa con un grupo de estudiantes que resuelven un problema sobre proporcionalidad.

3. EL EPISODIO

El episodio de aula (ver su transcripción en la Tabla 1) tiene lugar en una clase de matemáticas con 21 estudiantes de 15 y 16 años (enseñanza obligatoria) de una escuela pública en Barcelona, España. Este mismo episodio ha sido analizado con otros objetivos en Planas y Civil (2002, 2004). El profesor tiene 19 años de experiencia docente, los tres últimos en la escuela actual, considerada por la Administración como centro de atención educativa preferente. Nuestro episodio, de 10 minutos aproximadamente, ocurre durante la segunda semana de clases al inicio del primer semestre del año escolar. Es la primera lección donde el profesor propone la dinámica de resolver un problema en pequeños grupos y llevar a cabo una puesta en común. El enunciado del problema (escrito en una hoja para cada grupo) menciona dos barrios de la ciudad, uno cercano a la escuela. En la Figura 1, por cuestiones de anonimato, sustituimos el nombre de los barrios por B1 y B2. El curso pasado, estos alumnos habían trabajado temas de proporcionalidad y de resolución de ecuaciones. Se supone, por tanto, que tienen los conocimientos y las habilidades matemáticas requeridas para resolver la tarea; disponen, además, de calculadoras.

Aquí tienes la población y el área de dos barrios de Barcelona.

Barrio 1 (B1)	*Barrio 2 (B2)*
65.075 habitantes	190.030 habitantes
7 km^2	5 km^2

(i) Discute en cuál de estos dos lugares se vive más espaciosamente.

(ii) Encuentra cuánta gente debería trasladarse de un barrio a otro para que en ambos se viviera igual de espaciosamente.

Figura 1. Enunciado del problema

El episodio se inicia después de que Alicia (A), Emilio (E) y Mateo (M), miembros de un grupo, le hayan dicho al profesor (P) que no han consensuado una solución común al problema. El episodio termina cuando el profesor deja de explorar las ideas de este grupo e interpela a otros grupos para que participen. Alicia, Emilio y Mateo se han agrupado libremente al inicio de la sesión y han estado trabajando juntos durante unos 30 minutos hasta el momento de la puesta en común, fase a la que pertenece el episodio.

Representación escrita del discurso de la clase
1 *A*: Este problema es de densidades porque los datos son sobre densidades. 2 *P:* De acuerdo. Decidle a Alicia que necesita explicarse mejor. [A Alicia] Sabemos que sabes

mucho, pero…
3 *A*: En B1 [dice el nombre del barrio] la densidad es menor que en B2 [dice el nombre del barrio]. Eso es todo.
4 *P:* Emilio dice que no.
5 *E*: ¡Yo no lo entiendo! Hay algo que falta.
6 *P:* [A Emilio] ¿Cómo lo has resuelto?
7 *E*: Está claro que aquí [señala B2 en el papel] hay más personas y menos espacio. Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.
8 P: De acuerdo. Lo que tú dices está claro, pero entonces cómo respondes a la segunda pregunta.
9 *E*: La segunda pregunta está mal.
10 *P:* ¿Por qué?
11 *E:* Yo no me mudaría solo, lo haría con toda mi familia.
12 *P:* ¿A qué te refieres?
13 *E*: Yo cambiaría la segunda pregunta.
14 *P:* ¡No empieces de nuevo, Emilio! Tú sabes que los problemas son como son.
15 *M*: A mí no me importa cambiar la pregunta, pero si la cambias, no practicaremos las mates que el profesor quiere que practiquemos. Puedes hacerlo por ensayo y error, primero empieza con cincuenta mil personas.
16 *A*: ¡Eso no es matemático!
17 *E*: ¿Por qué no es matemático?
18 *P:* Mejor que continuemos. Alicia, ¿cuál es tu opinión?
19 *A*: Ya lo he dicho. Es un problema de densidades.
20 *P:* Sabes de lo que hablas, pero no te cansas…
21 *A*: ¿Voy a la pizarra?
22 *P:* [El profesor asiente]
23 *A*: [En la pizarra]

$$\frac{65075}{7} \rightarrow \frac{65072}{7} = 9296 h/km^2 \text{ en B1}$$

$$\frac{190030}{5} = 38006\, h/km^2 \text{ en B2; } 9296<38006$$

24 *P:* De acuerdo. Necesitamos comparar los dos barrios. Estos números no significan nada si no los comparamos.
25 *A*: Este número [señala 9296] es…
26 *E*: Hemos colocado algunas personas aquí y otras allí.
27 *A*: ¡Déjame terminar! Nueve mil doscientos noventa y seis es más pequeño que este número [señala 38006]. Esto significa que en B1 [dice el nombre] se vive más espaciosamente.
28 *P:* De acuerdo.
29 *A*: Ahora veamos la ecuación. [En la pizarra]

$$\frac{190\,030-x}{5}=\frac{65\,072+x}{7};\ 38\,006-\frac{x}{5}=9\,296+\frac{x}{7};\ 38\,006-9\,296=\frac{x}{5}+\frac{x}{7};$$

$$28710=\frac{12x}{35};\ x=\frac{28710 \cdot 35}{12};\ x=83737{,}5 \rightarrow 83737 \textit{ personas}$$

30 *P:* Alicia, tienes que explicar qué has hecho y por qué.
31 *E*: Yo no entiendo por qué cambia sesenta y cinco mil setenta y cinco por sesenta y cinco mil setenta y dos.
32 *P:* ¿Alicia? ¿Por qué sustituyes este número?
33 *A*: [Regresa a su sitio] Yo ya he explicado mi propuesta, ahora que hablen ellos.
34 *M*: No creo que necesitemos hacer una ecuación. ¿Por qué no probamos con diferentes números? ¿No necesitamos ser exactos aquí, verdad?
35 *P:* Veamos de nuevo la propuesta de Alicia. [A Emilio] ¿Aún quieres cambiar la segunda pregunta?
36 *E*: Todos conocemos estos barrios, ¿no es extraño lo que ella dice?¿Por qué tenemos que usar densidades y ecuaciones?

37	*M*:	[Al profesor] ¿Por qué ha movido tres personas de aquí [señala 65072 en la pizarra]?
38	*P:*	Mateo, concentrémonos, olvídate ahora de las personas y piensa solo en la fracción. ¿Es sesenta y cinco mil setenta y cinco múltiplo de siete?
39	*M*:	No.
40	*P:*	¡De eso se trata! Sesenta y cinco mil setenta y dos es múltiplo de siete y sesenta y cinco mil setenta y cinco no. Ahora podemos hacer la división exacta [muestra la calculadora].
41	*M*:	¡Pero no se trata de múltiplos, son personas!
42	*E*:	En la última operación ella no ha mirado los múltiplos ¿verdad?
43	*A*:	Esto no es importante.
44	*P:*	¿Ves cómo ha resuelto la ecuación?
45	*M*:	Sí
46	*P:*	Esto es lo importante.
47	*M*:	¿Podemos dar una respuesta aproximada?
48	*A*:	Por favor, esto no es importante.
49	*M*:	¿Copiamos la ecuación?
50	*P:*	Ordenemos nuestras ideas primero. Necesitamos calcular las densidades y luego necesitamos que sean iguales. Esta es una propuesta. ¿Y vosotros qué [mirando a otro grupo]? ¿Cuál es vuestra solución?

Tabla 1. Transcripción del episodio

4. ¿CÓMO ANALIZAMOS?

A continuación describimos brevemente aspectos teóricos de los cuatro primeros niveles de análisis y los aplicamos al episodio de clase.

4.1 Identificación de prácticas matemáticas

Suponemos que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, entendemos el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar, en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que el profesor pueda considerar como matemática. De acuerdo con esto, consideramos la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

El primer nivel de análisis se orienta a identificar prácticas matemáticas realizadas en el episodio de clase. En dicho episodio se propone una situación-problema de contexto extramatemático cuya resolución implica, entre otros, el uso del concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades (ver Figura 1). La Tabla 2 recoge las prácticas matemáticas más relevantes.

Alicia - Lee y entiende el enunciado del problema - Resuelve el apartado (i) del problema aplicando el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades. - Resuelve el apartado (ii) del problema planteando y resolviendo una ecuación. - Contextualiza y da sentido a la solución hallada redondeando el resultado.
Emilio - Lee y entiende el enunciado del problema. Por otra parte, cuestiona el apartado (ii) - Resuelve el apartado (i) mediante un razonamiento de tipo intuitivo y vivencial usando su conocimiento de los barrios citados en el problema. - Sigue las explicaciones de Alicia y observa una contradicción entre la resolución de (i) y (ii).
Mateo - Lee y entiende el enunciado del problema - Propone una resolución por ensayo y error, aunque no aplica este método. - Propone la aceptación de soluciones aproximadas.
Profesor - Considera el papel del contexto extramatemático en matemáticas. - Valida la argumentación de Alicia e interviene para completar explicaciones de esta alumna sobre la sustitución de 65075 por 65072. - Reconduce propuestas de aproximación al problema de Emilio y Mateo.

Tabla 2. Identificación de prácticas matemáticas

Alicia realiza mayoritariamente las prácticas matemáticas del episodio. Esta alumna resuelve el apartado (i) del problema aplicando el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades y el apartado (ii) planteando y resolviendo una ecuación. A petición del profesor, contextualiza *a posteriori* el uso de los objetos anteriores en una situación extramatemática y, en base a ello, da sentido a la solución hallada, aunque sin ubicarse "dentro" de la situación, como sus compañeros de grupo.

Emilio realiza la práctica de resolver el apartado (i) con un razonamiento que puede considerarse intuitivo y vivencial al aplicar su "conocimiento del mundo" (en este caso su conocimiento de los barrios citados en el problema). Discrepa de la resolución que hace Alicia, pero se puede inferir que sigue sus explicaciones ya que le hace observar una contradicción entre las maneras como ha resuelto (i) y (ii) [42]. Por su parte, Mateo sugiere la posibilidad de resolver el problema por ensayo y error y de hallar respuestas aproximadas, sin llegar a aplicar este método ni aportar ninguna solución concreta.

El profesor interviene principalmente para gestionar los turnos de intervención. Desde el punto de vista de las prácticas matemáticas, sus intervenciones son sobre todo metamatemáticas (e.g., consideraciones sobre el papel del contexto extramatemático en el aula de matemáticas, validación de la argumentación de Alicia, rechazo de las propuestas de no exactitud de Mateo y de reformulación del problema de Emilio), aunque en una ocasión contribuye a completar una explicación de Alicia explicando el motivo por el cual esta alumna ha sustituido 65075 por 65072.

4.2. Identificación de objetos y procesos matemáticos

Objetos matemáticos

Para realizar una práctica matemática, el agente necesita conocimientos que son básicos tanto para su realización como para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el agente tenga para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema (e.g., primero plantear y después resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos que ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (e.g, solución, ecuación) y simbólico (e.g., x, =). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos (e.g., ecuación, solución), proposiciones (e.g., si se suma el mismo término a los dos miembros de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente) y procedimientos (e.g., resolución por sustitución, por igualación) a utilizar en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias. Consideramos que cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos de los objetos citados anteriormente (o todos): situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos tipos de objetos se articulan formando la configuración de la Figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69). A continuación, aplicamos esta herramienta para conocer los objetos activados en la práctica matemática del episodio.

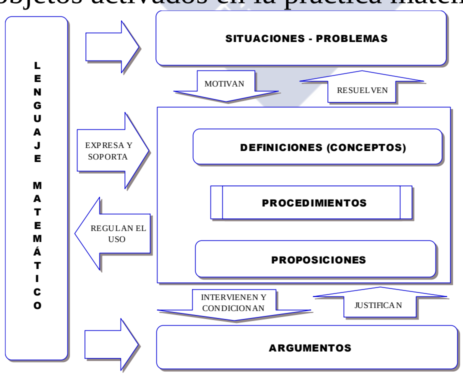


Figura 2. Configuración de objetos

Lenguaje - A: (verbal) densidad, menor, ecuación, número, nueve mil doscientos noventa y seis; (simbólico) las fracciones, decimales, unidades de densidad, ecuaciones y desigualdades de la Tabla 1, $\rightarrow$. - P: (verbal) múltiplo, división exacta, números, fracción, siete, sesenta y cinco mil setenta y cinco, sesenta y cinco mil setenta y dos, ecuación, calcular, iguales; (simbólico) 65075, 190030, 7, 5, km^2. - M: (verbal) cincuenta mil, ecuación, tres, múltiplos. - E: (verbal) más… menos, sesenta y cinco mil setenta y cinco, sesenta y cinco mil setenta y dos, densidades, ecuaciones, operación, múltiplos.
Conceptos - A: densidad, mayor y menor, fracción, decimal, incógnita, ecuación. - P: múltiplo, problema, número, fracción, múltiplo, división exacta, ecuación, densidad. - M: ecuación, solución exacta de una ecuación, respuesta aproximada a un problema, múltiplo. - E: densidades, ecuaciones, operación, múltiplos.
Proposiciones - A: es un problema de densidades; en B1 la densidad es menor que en B2; nueve mil doscientos noventa y seis es más pequeño que este número; esto significa que en B1 se vive más espaciosamente. - P: sesenta y cinco mil setenta y dos es múltiplo de siete y sesenta y cinco mil setenta y cinco no; ahora podemos hacer la división exacta; necesitamos comparar los dos barrios; necesitamos calcular las densidades y luego necesitamos que sean iguales - E: está claro que aquí hay más personas y menos espacio; hemos colocado algunas personas aquí y otras allí; en la última operación ella no ha mirado los múltiplos. - M: puedes hacerlo por ensayo y error, primero empieza con cincuenta mil personas; pero no se trata de múltiplos, son personas; no creo que necesitemos hacer una ecuación.
Procedimientos - A: dividir, redondeo de números, cálculo de densidades, comparación de números que representan densidades, resolución de ecuaciones, traducción de lenguaje verbal a algebraico, planteamiento de ecuaciones. - P: determinar si un número es múltiplo de otro. - M: ensayo y error (se cita pero no se aplica).
Argumentos A: Es un problema de densidades - En los problemas de densidades los datos son densidades. - En este problema los datos son densidades. En B1 la densidad es menor que en B2. - 65075 puede sustituirse por 65072. - Dividiendo el número de habitantes por el de km^2 se obtiene que la densidad en B1 es 9296 h/km^2. - Dividiendo el número de habitantes por el número de km^2 se obtiene que la densidad en B2 es 38006 h/km^2. - 9296 es menor que 38006. Esto significa que en B1 se vive más espaciosamente. - Si la densidad de un barrio es menor que la del otro, eso quiere decir que en el de menor densidad se vive más espaciosamente. - En B1 la densidad es menor que en B2. [Si se trasladan 83737 personas de B2 a B1 los dos tendrán la misma densidad]. - Planteamiento y resolución de una ecuación. E: Está claro que aquí hay más personas y menos espacio. - Yo he estado allí. Los pisos son muy pequeños.

Tabla 3. Identificación de objetos matemáticos

Las Tablas 3 y 4 no pretenden recoger de forma exhaustiva los objetos y procesos matemáticos de la configuración asociada al episodio. Identificamos los objetos y procesos que consideramos más relevantes en el desarrollo del proceso de instrucción matemática, agrupándolos en función de quién (A, P, M, E) los introduce.

Procesos matemáticos

La configuración de la Figura 2 informa sobre la “anatomía” de la actividad matemática en un episodio de clase. Si además de la “estructura” interesa el “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos) en una perspectiva temporal y dinámica conviene utilizar la tipología de procesos propuestos por el enfoque ontosemiótico para el conocimiento matemático. La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), como se observa en el hexágono de la Figura 3. Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales (ver decágono de la Figura 3): personal/institucional, unitaria/sistémica expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva. Estas dimensiones duales pueden analizarse desde una perspectiva de producto-proceso.

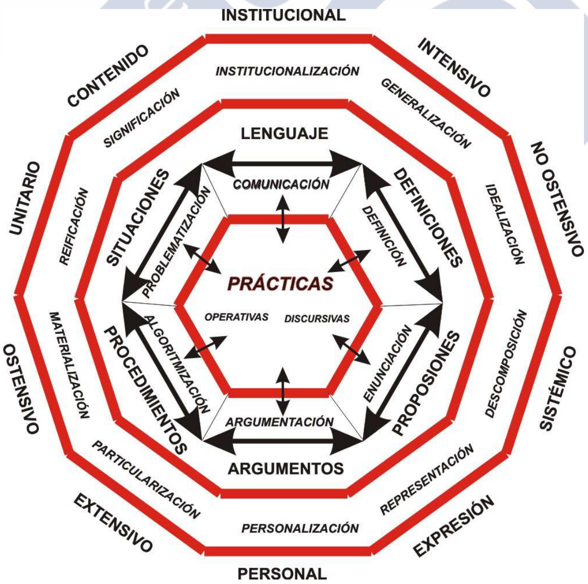


Figura 3. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático

En Font y Contreras (2008) y Font, Godino y Contreras (2008) se detallan los dieciséis procesos matemáticos de la Figura 3: procesos de generalización-particularización, institucionalizaciónpersonalización, representación-significación, descomposición-reificación, idealización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de instrucción que se analiza). Esta lista es una selección de procesos que consideramos relevantes en la actividad matemática. Otros procesos, igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, pueden entenderse como mega-procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores.

La Tabla 4 recoge procesos matemáticos identificados en el episodio. Se observa un proceso de institucionalización de la solución del problema que propone Alicia. En la trayectoria argumentativa que lleva a dicha institucionalización, alumnos y profesor adoptan tanto el papel de proponente como el de oponente. Alicia realiza un proceso de generalización al considerar el problema un caso particular de un problema más general [1, 19]. En [3] hace un proceso de enunciación de una proposición sin ninguna justificación. A instancias del profesor, realiza un proceso de argumentación [23, 27, 29]: en [23] escribe en la pizarra (proceso de representación y materialización) signos matemáticos que un observador experto puede interpretar como el uso del concepto de densidad y de procedimientos como son, entre otros, la división y la comparación de densidades; en [27] realiza un proceso de enunciación y comunicación de una proposición que un observador experto puede interpretar como la inferencia que se obtiene de aplicar el concepto de densidad y el procedimiento de comparación de densidades; en [29] vuelve a escribir en la pizarra (proceso de representación y materialización) signos matemáticos que un observador experto puede interpretar como (a) el planteamiento de una ecuación y (b) su resolución.

Alicia - Proceso de *generalización* [1, 19] cuando considera que el problema es un caso particular de un problema más general. - Proceso de *enunciación* de una proposición [3]. - Proceso de *argumentación* [23, 27, 29]. - Proceso de *representación* y *materialización* [23] al escribir en la pizarra signos matemáticos interpretables como el uso del concepto de densidad y de procedimientos de comparación de densidades. - Proceso de *enunciación* y *comunicación* de una proposición [27] interpretable como la inferencia que se obtiene de aplicar el concepto de densidad y el procedimiento de comparaciones de densidades, y como un uso contextualizado y correcto de la solución. - Proceso de *representación* y *materialización* [29] al escribir signos matemáticos interpretables como el planteamiento y resolución de una ecuación.
Emilio

- Proceso de *enunciación* de una proposición [7] sobre la interpretación del enunciado. - Proceso de *argumentación* [11, 16] basado en el conocimiento del contexto extramatemático del problema.
Mateo - Proceso de *comunicación* [15] al plantear la posibilidad de resolver el problema por el método de ensayo y error. - Proceso de *comunicación* [34] al plantear la posibilidad de buscar soluciones aproximadas al problema.
Profesor - Proceso de *institucionalización* [todas sus turnos y en especial la 50] de la solución del problema. - Proceso de *argumentación* [40] para resolver dudas de Emilio y Mateo. - Proceso de *idealización* [38] cuando pide prestar atención a las fracciones por delante de las personas.

Tabla 4. Identificación de procesos matemáticos

Emilio hace un proceso de enunciación de una proposición [7] y después [11, 16] realiza procesos de argumentación basados en su conocimiento del contexto extramatemático del problema. Por su parte, Mateo hace dos procesos de comunicación [15, 34] cuando plantea, respectivamente, la posibilidad de resolver el problema por el método de ensayo y error y la de obtener soluciones aproximadas. En cuanto al profesor, en prácticamente todas sus intervenciones gestiona el proceso de institucionalización de la solución hallada, dedicando solo algún momento a procesos de argumentación para solventar dudas de alumnos. En la transcripción, profesor y alumnos llevan a cabo procesos de valoración [8, 9, 16, 20, 24, 46] que están sustentados por normas y metanormas. En el cuarto nivel de análisis realizamos el estudio de este tipo de procesos no incluido en la Figura 3.

4.3. Descripción de interacciones en torno a conflictos

Fijada una situación problema y haciendo uso de una tecnología, el profesor y los estudiantes emprenden una secuencia de actividades en interacción con el fin de lograr que los alumnos sean capaces de resolver esa situación y otras relacionadas. Llamamos configuración didáctica a la secuencia interactiva que tiene lugar a propósito de una situación problema. Una configuración didáctica se compone de una configuración epistémica, esto es, una situación problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos en interacción. El profesor puede desempeñar, por ejemplo, las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación y evaluación, mientras que el alumno puede desempeñar, entre otras, las funciones de exploración, comunicación, validación, recepción y autoevaluación.

Dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, a veces conviene centrarse en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007) entendemos por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones. En el episodio analizado, el primer y seguramente el principal conflicto semiótico se produce cuando el profesor crea un conflicto a Emilio y le dice [8] que el argumento que ha aplicado en (i) no le servirá para contestar (ii), esperando que dicho alumno cambie su argumentación, basada en su conocimiento del contexto extramatemático, por una argumentación "más matemática". Es de suponer que la intención del profesor es crear una contradicción en el alumno acerca de las prácticas que ha realizado; puesto que la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto hablamos de conflicto semiótico de tipo cognitivo.

Emilio, en lugar de resolver el conflicto semiótico de tipo cognitivo de la manera que parece esperar el profesor, plantea un conflicto entre su "mundo de la vida" y la "clase de matemáticas" [9-14]. De algún modo, Emilio se hace portavoz de una manera válida de resolver el problema en el "mundo de la vida" que contrapone a la resolución válida en el aula de matemáticas cuyo portavoz en este caso es el profesor. Se trata de un conflicto interaccional entre personas, pero se puede interpretar que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas. Si la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes, hablamos de conflicto semiótico de tipo epistémico. La interacción en torno a este conflicto finaliza cuando el profesor apela al principio de autoridad [14]. Emilio, sin embargo, vuelve a manifestar este conflicto en [36].

También se produce un conflicto semiótico de tipo interaccional cuando Alicia y Mateo discrepan sobre si el procedimiento de ensayo y error se puede considerar "matemático" [16-17]. La intervención del profesor interrumpiendo la discusión deja este conflicto abierto [18], volviendo a aparecer posteriormente [34]. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas de dos sujetos diferentes en interacción social hablamos de conflicto semiótico de tipo interaccional. Los tipos de conflicto semiótico introducidos no son excluyentes puesto que un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro en función de la perspectiva que se adopte. Por ejemplo, el conflicto epistémico entre Emilio y el profesor también es un conflicto interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son resultado de interacciones sociales generadoras de conflicto.

En [31] Emilio expresa un conflicto de tipo interaccional puesto que no entiende un paso de lo que ha escrito Alicia en la pizarra (el cambio de 65075 por 65072). Mateo vuelve a expresar este conflicto en [37], que el profesor pretende resolver en [38-40]. El intento de resolución por parte del profesor hace rebrotar los dos conflictos anteriores siendo ambos manifestados ahora por Mateo, el epistémico en [41] y el interaccional en torno al uso del ensayo y error y las soluciones aproximadas en [47]. Finalmente, en [42] Emilio contribuye a provocar un conflicto semiótico de tipo cognitivo en Alicia al hacerle observar que no ha sido coherente en la resolución de (i) y (ii). Alicia [43] y el profesor [44] niegan la importancia del conflicto señalado por Emilio.

4.4. Identificación de normas

La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social ya que la clase es una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por metaconocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas sociomatemáticas (Planas y Setati, 2009; Yackel y Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1997). De acuerdo con D'Amore, Font y Godino (2007), hay diferentes criterios de clasificación de las normas: según el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional…), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad…), según el tipo y grado de coerción (social y disciplinar), etc.

Siguiendo a D'Amore, *et al.* (2007), entendemos por normas epistémicas las configuraciones de objetos (ver Figura 2) que regulan la práctica matemática en un marco institucional. Cada componente de la configuración de objetos está relacionado con normas metaepistémicas, denominadas normas sociomatemáticas. Si nos fijamos en las situaciones-problema, es necesario que el alumno pueda responder a preguntas del tipo: ¿qué es un problema?, ¿cuándo se ha resuelto? o ¿qué reglas conviene seguir para resolverlo? Lo mismo si nos fijamos en el componente “argumento” ya que el alumno necesita saber qué es un argumento en matemáticas, cuándo se considera válido, etc. Hemos detallado normas epistémicas al describir la configuración de objetos, pero en la transcripción del episodio se pueden inferir otros tipos de normas (ver Tabla 5): a) normas metaepistémicas (en el profesor, de N1 a N7; en Alicia, de N11 a N13; en Emilio, N14 y N15; en Mateo, N17 y N18); b) normas que regulan las interacciones (en el profesor, N8 y N9; en Emilio, N16; en Mateo, N19); y c) normas que regulan el uso de los materiales en el aula (en el profesor, N10; en Mateo, N20).

Profesor - N1. No basta dar la solución de un problema, hay que justificar que la solución es correcta [4, 20, 24, 30]. - N2. Hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema [24] - N3. Los enunciados de los problemas no se pueden modificar [14]. - N4. Hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema [38]. - N5. Hay elementos importantes en matemáticas, como las ecuaciones, a diferencia de otros como el método de ensayo y error [46, 50]. - N6. Los problemas se pueden resolver por diferentes métodos, no todos ellos igual de matemáticos [6, 50]. - N7. El profesor decide sobre la validez de una argumentación [28, 49]. - N8. El profesor interviene para resolver dificultades de los alumnos [38, 40]. - N9. El profesor tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de intervenciones [2, 6, 18, 22, 50]. - N10. Se puede usar la calculadora (por ejemplo, para comprobar que la división es exacta) [40].
Alicia - N11. Hay argumentaciones que no son válidas en matemáticas [16]. - N12. Hay aspectos que no son relevantes en matemáticas [43, 46]. - N13. Los problemas pertenecen a familias de problemas [1, 19].
Emilio - N14. En la resolución de un problema contextualizado hay que usar lo que se sabe del contexto [7, 36]. - N15. Las preguntas de los problemas contextualizados deben ser coherentes con el contexto propuesto [9, 11, 13]. - N16. Los alumnos intervienen cuando no entienden algo [31].
Mateo - N17. Los problemas tienen por objetivo la realización de prácticas matemáticas previamente planificadas por el profesor [15]. - N18. Los problemas se pueden resolver por diferentes métodos [15]. - N19. Los alumnos intervienen cuando no entienden algo [37]. - N20. Las soluciones correctas se tienen que copiar en el cuaderno de clase [49].

Tabla 5. Identificación de normas

Las normas N2 y N4 pueden ocasionar conflictos a los alumnos ya que según cómo se interpreten pueden ser contradictorias. La práctica matemática conlleva la posibilidad de desprenderse del contexto extramatemático y volver a él cuando conviene. Para algunos alumnos puede ser difícil entrar en este “juego de lenguaje”. El análisis realizado en el apartado anterior muestra que dichos conflictos se han producido.

5. ¿PARA QUÉ ANALIZAMOS?

A continuación, aplicamos el quinto y último nivel de análisis al episodio de clase, centrado en la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, *et al*., 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de instrucción. De acuerdo con Godino, Bencomo, *et al.* (2006), como mínimo se pueden proponer seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, a saber:

1. *Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”.
2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
6. *Idoneidad ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

La identificación de estas seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permite considerarlo un proceso “idóneo”. Conseguir una sola idoneidad parcial es relativamente fácil, pero es difícil conseguir una presencia equilibrada de las seis idoneidades parciales. En nuestro caso, por las características de la transcripción y por la información que tenemos del episodio, solo consideramos viable valorar la idoneidad interaccional. Esta idoneidad se puede conseguir si el profesor: a) presenta adecuadamente el tema, por ejemplo, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave; b) reconoce y resuelve conflictos de significado de los alumnos, por ejemplo, interpretando correctamente sus silencios, gestos y preguntas; c) promueve situaciones comunicativas en las que se llega a consensos convenciendo con argumentos; d) utiliza diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar a los alumnos; e) facilita su inclusión en la actividad matemática de la clase ; f) favorece el diálogo entre alumnos; g) contempla momentos en los que los alumnos asumen la responsabilidad del estudio por medio de la exploración, formulación y validación; etc.

Alicia realiza las prácticas matemáticamente importantes del episodio que, además, son validadas por el profesor. Las prácticas alternativas propuestas por Emilio y Mateo no son consideradas por el profesor. Sin embargo, las propuestas de Mateo de resolver el problema por ensayo y error y de buscar soluciones aproximadas eran viables si se tiene en cuenta que los alumnos tenían calculadoras y si se revisan las características del problema. El profesor en ningún momento ofrece contra-argumentos para descartar las propuestas de estos alumnos, a pesar de que establece pequeños diálogos con ellos.

En el episodio analizado, el profesor pretende realizar el proceso de institucionalización de la solución al problema de contexto extramatemático. Puesto que la práctica matemática de resolución de problemas de contexto extramatemático conlleva la posibilidad de desprenderse del contexto del problema cuando conviene y volver a él cuando interesa, el profesor realiza diferentes intervenciones [23-28] y [38-41] de las cuales se infieren dos normas que regulan dicha práctica:

> *N2.* Hay que interpretar el sentido de la solución en el contexto del problema.
>
> *N4.* Hay una fase en la que tiene sentido trabajar con el modelo matemático con independencia del contexto inicial del problema.

La práctica de resolución de problemas de contexto extramatemático está sustentada también en procesos de generalización-particularización y de materialización-idealización. Por ejemplo, el profesor pretende que Mateo realice un proceso de idealización y que se concentre en la fracción que, a su vez, se representa en la pizarra con la materialización 65075/7.

Alicia realiza un proceso de generalización cuando considera que el problema propuesto es un caso particular de una clase de problemas (problemas de densidades). En cambio, Emilio se resiste a realizar el proceso de generalización (descontextualización) al negarse a considerar que el problema cae bajo el dominio de los "problemas de densidades". Seguir las normas N2 y N4 no es tarea fácil para muchos alumnos. En el caso que nos ocupa sí lo es para Alicia, pero no para Mateo y Emilio, como se observa en los conflictos que se producen en el episodio.

El conflicto semiótico más importante se produce cuando el profesor pretende crear un conflicto de tipo cognitivo en Emilio y le dice que el argumento que ha aplicado en (i) no le servirá para contestar (ii), esperando que dicho alumno cambie su argumentación basada en su conocimiento del contexto extramatemático por una argumentación "más matemática". Emilio, en lugar de experimentar un conflicto cognitivo como consecuencia de las intervenciones del profesor, plantea un conflicto de tipo epistémico que confronta métodos de resolución de problemas contextualizados válidos en "la vida real" con métodos de resolución de problemas contextualizados en "la clase de matemáticas". El profesor apela al principio de autoridad y recuerda las normas metaepistémicas de la institución clase de matemáticas: "los problemas son como son". Sin embargo, Emilio y Mateo más tarde vuelven a manifestar el conflicto.

Hay indicadores de idoneidad interaccional que se cumplen. Por ejemplo, en el episodio el profesor promueve el diálogo al requerir la exposición oral de uno de los grupos de trabajo y hacer intervenir a los miembros de este grupo. Sin embargo, si se hace un estudio más detallado de la interacción y se utilizan para ello tres de los indicadores señalados anteriormente: b) reconoce y resuelve conflictos de significado de los alumnos; c) promueve situaciones comunicativas en las que se llega a consensos convenciendo con argumentos y e) facilita la inclusión de los alumnos en la actividad matemática de la clase, la valoración no es "buena". Con relación al indicador b, se observa que, si bien se resuelve algún conflicto, el principal conflicto semiótico no se resuelve correctamente. Con relación al indicador c, las tesis que se imponen son las que Alicia defiende, aunque no siempre con argumentos, desde el inicio del episodio; el profesor valida estas tesis y Emilio y Mateo las asumen copiándolas en su cuaderno aunque los indicios (la insistencia en la defensa de sus tesis, el cambio repentino, etc.) apuntan a una falta de convencimiento. Con relación al indicador e, se observa que la interacción excluye de la práctica matemática a Emilio y Mateo.

Nuestra valoración final sobre la interacción en el episodio es que puede mejorarse ya que el profesor no consigue incorporar ni a Mateo ni a Emilio a la “práctica matemática” que consiste en tener en cuenta o no el contexto extramatemático según convenga. Por otra parte, ni Alicia ni el profesor responden a Emilio y Mateo con contra-argumentos a las propuestas de aproximación al problema de estos alumnos.

6. CONSIDERACIONES FINALES

La valoración de la idoneidad del episodio que se ha realizado en el apartado anterior coincide en parte con la valoración que mayoritariamente suelen hacer los profesores con los que hemos trabajado en diversos seminarios de formación[18], donde hemos pedido que discutieran el episodio de clase aquí estudiado y otros similares. La diferencia entre nuestra valoración y la de los profesores, en primer lugar, está en la fundamentación de dicha valoración; contrariamente a lo que hicieron muchos profesores, en nuestro análisis hemos sido sistemáticos, teniendo en cuenta, por una parte, niveles de análisis y, por otra, relaciones entre ellos. En segundo lugar, hay una diferencia en la delimitación del tipo de valoración que se puede hacer con la información de que se dispone, a saber, sólo valoramos la idoneidad interaccional. Por ejemplo, algunos de los profesores valoraron la idoneidad emocional del episodio, lo cual en nuestra opinión no es posible con los datos de los que disponemos.

En nuestro caso, hemos aplicado un modelo que permite un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. A diferencia del análisis realizado por los profesores de los seminarios, donde el énfasis estaba en responder a ‘¿qué se podría mejorar?’, el tipo de análisis que se ha desarrollado ha respondido en primer lugar a ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. Entendemos que el estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar

[18] Este episodio ha sido discutido en cuatro cursos de maestría y en tres cursos de formación permanente de profesorado. Por limitaciones de espacio no aportamos datos concretos sobre el desarrollo de dichas experiencias de formación.

valoraciones fundamentadas sobre esta situación. Nuestra noción de idoneidad didáctica y las herramientas para su análisis y valoración permiten establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y su aplicación para la valoración de procesos de instrucción.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de instrucción, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y la mediacional requieren analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles y la identificación de conflictos semióticos que se han producido. El análisis de las normas ayuda a comprender, entre otros aspectos, los factores ecológicos que condicionan los procesos de instrucción, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica.

Nuestra conclusión es que el modelo de análisis didáctico aplicado en este trabajo es útil para la investigación sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas. Basándonos en la experiencia positiva de seminarios de formación llevados a cabo, creemos que también puede ser útil para el colectivo de profesores interesados en reflexionar sobre su propia práctica. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Para el diseño de estos programas son necesarias herramientas de análisis de la práctica docente como las que aquí se han propuesto.

Reconocemos que la realización de los tipos de análisis descritos en este trabajo presenta un nivel de complejidad elevado para que pueda ser directamente aplicado por los profesores en la reflexión sobre su práctica docente. Esta complejidad es en si misma una limitación que abre líneas de investigación. En el futuro, consideramos necesario identificar nuevos conocimientos y competencias implicadas en el uso del modelo que convendría desarrollar con los profesores, así como estudiar estrategias formativas adecuadas para el logro de este objetivo. Otra línea a continuar consistiría en relacionar el modelo presentado con investigaciones realizadas en el campo de formación de profesorado de matemáticas, de manera especial los trabajos sobre el "conocimiento pedagógico del contenido" (Hill, Ball y Schilling, 2008) y el "conocimiento matemático para la enseñanza" (Sullivan, 2008).

REFERENCIAS

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. Londres: The Macmillan Press.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Civil, M. & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24* (1), 7-13.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Coll, C. & Sánchez, E. (2008). El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346,* 15-32.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28* (2), 49-77.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Nueva York: SUNY.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8* (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Contreras, C. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006), Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 9* (especial), 131-155.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias,* 27 (1), 59-76.

Hiebert, J., Morris, A. K. & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: an "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66,* 201-222.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Planas, N. & Civil, M. (2002). The influence of social issues on the reconstruction of mathematical norms. En H. Chick & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME Conference* (vol. 2, pp. 71-80). Norwich: PME.

Planas, N. & Civil, M. (2004). Understanding interruptions in the mathematics classroom: implications for equity. *Mathematics Education Research Journal, 14* (2), 169-189.

Planas, N. & Civil, M. (2009). Working with immigrant students and mathematics teachers: an empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI: 10.1007/s10857-009-9116-1.

Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 12* (2), 179-213

Planas, N. & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21* (3), 169-190.

Radford, L., Schubring, G. & Seeger, F. (Eds.) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture.* Rotterdam: Sense Publishers.

Ramos, A. B & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 11* (2), 233-265.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. Nueva York: Basic Books.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: an introduction. En P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and development* (pp. 1-12). Rotterdam: Sense Publishers.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (4), 458-477.

Anexo 4:

RESUMEN AMPLIADO

El estudio de cómo los individuos toman decisiones ha sido de interés para diferentes áreas de conocimiento. En esta investigación, se intenta discutir la problemática de cómo los estudiantes eligen sus estrategias y las causas que influencian sus decisiones. Para ello se revisó la literatura del campo de las Ciencias Sociales, estableciendo el centro de interés en los modelos económicos sobre Elecciones (Bueno, 2004; Elster, 1989, 2003 y 2013); sobre Teoría de Juegos (Morton, 1971; Peleg, 1985; Owen, 1995); y sobre la Toma de Decisiones (Kahneman e Tvesky, 1979; Carmona, 1997). También se hizo una revisión bibliográfica desde el campo de la Educación Matemática, destacando los estudios del teórico Guy Brousseau (1986) con su Teoría de las Situaciones Didácticas.

Los estudios anteriores, conjuntamente, guiarán la propuesta del marco teórico de esta memoria. En este contexto partimos del presupuesto de que las conductas y las decisiones de los alumnos, al intentar resolver una situación problema diseñada con un objetivo especifico, estarán vinculadas a (1) procesos de Elección (relacionados o no con conocimientos previos adquiridos en un entorno escolar o bien fuera de dicho entorno), (2) a conceptos de la Teoría de Juegos (tales como preferencias y la relación coste-beneficio), y (3) a conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (como el contracto didáctico, establecido en el aula entre profesores y alumnos).

Partiendo de que los modelos económicos se basan en la premisa de que un individuo, dotado de unos determinados recursos y de una capacidad de elegir y de tomar decisiones, tratará siempre de maximizar la utilidad de estos recursos; el fin último de esta investigación es presentar que es posible una interpretación de los modelos económicos dentro del contexto educativo.

Concretamente, una de las hipótesis que se formulan es que un acercamiento a otro campo de conocimiento, como es el caso de las Ciencias Sociales, por medio de algunos de sus modelos, llevaría a una mejor comprensión acerca de las conductas de decisiones de los alumnos en el aulas cuando se enfrentan a situaciones-problemas matemáticos y, como consecuencia, a una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje.

En este sentido, este estudio conecta tres áreas distintas: La Elección, la Teoría de Juegos y la Teoría de las Situaciones Didácticas. La Elección lo hace por medio de los conceptos de *conjunto oportunidad* y *elección racional*, los cuales pueden estar asociados con, por ejemplo, la elección que el alumno hace y que va a satisfacer su deseo o el deseo del profesor o las reglas de un contrato. Por otra parte, esta elección debe ser coherente, juzgada como óptima y encaminada al logro de los objetivos. La Teoría de Juegos participa con algunos conceptos clave como el de *maximización de las ganancias*, que puede ser traducido como la maximización de los recursos para obtener un aprendizaje mejor. Por su parte, la Teoría de las Situaciones Didácticas, empleada para explicar procesos de enseñanza-aprendizaje en el contexto da las matemáticas, trae consigo la noción de *contrato didáctico* y examina las relaciones establecidas entre el profesor, el alumno y saber. Esta teoría permite hacer una lectura de las reglas de ciertos procesos de elecciones y de juegos, es decir, por un lado, un profesor ante una situación de enseñanza, buscará siempre maximizar los recursos docentes en la búsqueda de un mejor aprendizaje de sus estudiantes; por otro lado, los alumnos ante una situación de aprendizaje probablemente también tratarán de maximizar los recursos obtenidos. El intento de vincular estas áreas de estudio responde a la finalidad de comprender mejor las conductas de toma de decisiones de los estudiantes al resolver problemas de matemáticas.

Como **preguntas de investigación** se han formulado las siguientes:

PI1: ¿Qué y cómo son las conductas adoptadas por los estudiantes, al resolver problemas de matemáticas?

PI2: ¿En qué situaciones y en qué medida la conducta matemática de estudiantes, al resolver problemas, pueden interpretarse desde modelos económicos de la Teoría de Juegos, de la Elección y de Toma de Decisiones socialmente aprendidos y del modelo de la Teoría de las Situaciones Didácticas aprendidos en el aula?

En este contexto, este estudio tiene por **objetivo general** hacer una interpretación de modelos económicos, específicamente los que envuelven Elección, Toma de decisiones y Teoría de juegos; desde presupuestos de las “estrategias óptimas” de la “maximización de beneficios” y “minimización de costes y riesgos” y del modelo de la Teoría de Situaciones Didácticas, para analizar la conducta matemática de los estudiantes cuando resuelven problemas en el aula. En este sentido, se dirige la atención hacia las causas que llevan a los estudiantes a elegir una opción de respuesta específica y si estos estuvieron influenciados por modelos económicos o por modelos provenientes del sistema educativo.

Esta investigación parte de la siguiente **premisa**:

La conducta de estudiantes al resolver problemas matemáticos no rutinarios tiende a acercarse más a los modelos económicos socialmente aprendidos (coste-beneficio, estrategia óptima, maximización de ganancias, minimización de pérdidas, grado de satisfacción o utilidad esperada) de manera formal o informal, fuera del entorno escolar, que de modelos de referencia supuestamente aprendidos en el aula, aunque sea para atender a las reglas de un contrato didáctico entre profesor-alumno-saber.

Los **objetivos específicos** que se han pretendido alcanzar son los siguientes:

- Analizar la conducta matemática de los estudiantes en la resolución de problemas, desde los supuestos de los modelos Económicos a la Teoría de Situaciones Didácticas;
- Verificar en qué medida los procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver problemas están influenciados por conocimientos de modelos económicos, socialmente compartidos fuera del contexto escolar, y por conocimientos compartido en el contexto de la escuela, bajo la mirada de la Teoría de Situaciones Didácticas;
- Verificar cómo los modelos económicos (Elección, Toma de Decisión y Teoría de Juegos) y la Teoría de las Situaciones Didácticas se acercan y se complementan para explicar los conflictos que surgen durante el proceso de solución de problemas.

El estudio se enmarca dentro de un abordaje cualitativo de la investigación, en lo que atañe a los objetivos (Chizzotti, 2006). El camino metodológico se sumerge en el contexto de una indagación de tipo descriptivo y, con respecto a los procedimientos de recogida de datos, toma el rumbo de una investigación etnográfica o de campo.

Los sujetos de esta investigación fueran estudiantes de educación básica y universitarios de España y Brasil. Estos estudiantes respondieron a tres problemas, dos por escrito (*el problema de las alcantarillas* y *el problema de dónde está el coche*) y uno de forma oral (*el problema de densidad demográfica*).

A continuación se presentan los tres problemas, indicando unos breves comentarios sobre cada uno de ellos.

El PROBLEMA DE LAS ALCANTARILLAS

Antiguamente las alcantarillas eran cubiertas con tapas rectangulares (Imagen 1); a continuación, teniendo en cuenta algunos inconvenientes de esa forma, se cambió a tapas cuadradas (Imagen 2); pero aparecieron nuevos inconvenientes, y por lo tanto se decidió hacer tapas circulares (Imagen 3). De qué inconvenientes se trataba?

Al cambiar la "forma", la respuesta debe referirse a ella en algún sentido, que no tendría que ser necesariamente matemático. "¿Para que es relevante la forma?", es una formulación implícita de la pregunta. La respuesta puede ser dada por razones intrínsecas a la forma, para su adecuación a ciertos tipos de acciones, por la evolución de las canalizaciones, etc.

DONDE ESTÁ EL COCHE?

En un concurso televisivo el concursante puede elegir entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de cada una de las demás hay una cabra. Una vez realizadas las elecciones, el presentador, quién sabe dónde está el coche, abre una puerta no elegida, detrás de la cual hay, por supuesto, una cabra.

Ahora el presentador da al concursante la posibilidad de cambiar la puerta elegida anteriormente por una que está todavía sin abrir.

En este caso, lo mejor es cambiar de puerta, seguir con la elegida o será indiferente? ¿Cuál (es) la ruta(s) que le llevó a elegir esta opción?

Justifique su opción, contestando:

- *¿Considera probable resolver la tarea en un tiempo corto?*
- *¿Ha recordado conceptos y técnicas para resolver el problema?*

- *¿Le resultó una forma económica – elegante - engañosa – impactante de resolver el problema?*
- *Sería fácil de explicar su elección?*

"Von Savant, que figura en el libro Guiness como el coeficiente intelectual más alto del mundo, defiende que es vantajoso cambiar de puerta". Así preguntamos: ¿cambiarías de opinión se supieras esto?

"Prestigiosos matemáticos y estadísticos replicam a Von Savant y piden que ella retifique sus argumentos". Estás de acuerdo con estos estudiosos?

El problema *donde está el coche* tiene su origen en la década de 1970 en un concurso televisivo americano y llegó a ser conocido como el dilema de Monty Hall, nombre dado al presentador del concurso. El objetivo es elegir una de las puertas, ganando el premio que ella oculta.

En general, con esta actividad, queremos abordar la representación del comportamiento del resolutor ante el riesgo, o de incertidumbre. En definitiva, estudiar su comportamiento racional. No queremos que el estudiante responda utilizando la probabilidad condicional "teorema de Bayes", sino que lo resuelva utilizando métodos y herramientas conocidas por ellos.

PROBLEMA DE DENSIDAD DEMOGRÁFICA

Aquí tienes la población y el área de dos barrios de Barcelona.

Barrio 1 (B1)	*Barrio 2 (B2)*
65.075 habitantes	*190.030 habitantes*
7 km^2	*5 km^2*

(i) Discute en cuál de estos dos lugares se vive más espaciosamente.

(ii) Encuentra cuánta gente debería trasladarse de un barrio a otro para que en ambos se viviera igual de espaciosamente.

La actividad se refiere a la densidad demográfica de dos conocidos barrios de la ciudad de Barcelona. Para resolverlo, el estudiante debe hacer uso, por ejemplo, de conocimientos sobre la proporcionalidad y ecuaciones.

El análisis de las respuestas dadas a estos problemas fue hecho de manera detallada, siguiendo las teorías citadas y procurando contestar a la cuestiones de investigación, atender a los objetivos y verificar la hipótesis de estudio, intentando promover una mejor comprensión del objeto investigado.

La intención de usar problemas no rutinarios proviene del hecho de creer que estos problemas permitirán ver otros matices de conducta que podrían no aparecer en las tareas rutinarias, que son las que normalmente se trabajan en clases. Así, los tres problemas obligan al resolutor a tomar decisiones; hacer elecciones y juicios acerca de su formulación. Esto requiere el uso modelos conocidos o invertir el tiempo en la búsqueda de nuevas estrategias. Por otra parte, tiene el propósito de provocar interrupciones momentáneas y desequilibrios (en el sentido de Piaget) de la conducta del estudiante.

Los problemas están contextualizados en situaciones reales. Aparecen en sus proposiciones expresiones relativas a conceptos comunes de nivel social que originan la posibilidad de interpretaciones diferentes y, a menudo, a los estudiantes les parecen naturales lo que estimula que los resuelvan espontáneamente.

Al pensar en la devolución, tal como Brousseau (1986) la conceptualizó, estos problemas fueron diseñados para provocar la aparición del conocimiento anterior y tienen una intencionalidad didáctica de verificación del contenido y de ceder al estudiante parte de la responsabilidad en su propio aprendizaje, en el sentido de que hacer la elección y tomar decisiones es su responsabilidad. Así, todos los problemas estuvieron marcados por la intencionalidad de poner en acción la devolución de una situación didáctica frente a una situación real.

En particular, la ambigüedad consciente con que fue formulado el *problema de las alcantarillas* ha permitido que los estudiantes imaginasen y formulasen un conjunto de alternativas, no explícito en el texto. La situación de riesgo y de incertidumbre generada por el *problema donde está el coche* ha causado en los estudiantes dudas sobre que alternativas elegir. La situación representada por el *problema de densidad demográfica* ha llevado a conflictos cognitivos y toma de decisiones entre los estudiantes.

En general, estos problemas han alentado a los estudiantes a celebrar elecciones, tomar decisiones y poner en práctica un conjunto de medidas que podrían interpretarse desde los modelos teóricos que se presentan aquí y que permitió responder a las preguntas de la investigación.

Los resultados de esta investigación apuntan, entre otros factores, a que la conducta de toma de decisiones de los estudiantes estuvo muy mediatizada, ora por el uso de contextos matemáticos, ora por contextos extramatemáticos, con mayor tendencia hacia este último.

La manifestación de las conductas, que clasificamos en matemáticas y extramatemáticas, vino asociada al contexto de los problemas y al modo de cómo estos son interpretados. Si los problemas están ligados a un contexto de la vida real, a su conocimiento del mundo, y si los estudiantes no los vinculan al saber escolar (por no percibirlos como o no ser parte de la rutina escolar), probablemente las conductas de respuestas tiendan a desviarse de una respuesta matemática institucional y se acerquen a las conductas que aquí se llamaron de extramatemáticas.

En particular, hemos identificado nueve tipos de conductas en el análisis de los datos:

1) C*onducta óptima /de conocimiento institucional/de controle/evaluación:* Este tipo de conducta fue marcada por el uso de un razonamiento más elaborado y que se basan en los conocimientos de matemáticas de referencia, institucionalizando los conocimientos adquiridos en el contexto escolar. Conductas que muestran signos de un proceso de devolución adidática (Brousseau, 1986), que puede ser caracterizado, por ejemplo, por el uso de levantamiento de hipótesis; de procesos de validación a través de mecanismos de pruebas y demostraciones; de búsqueda de estrategias optimas y de maximización de los resultados (Elster, 1989). Estos tipos de conductas, influyen fuertemente en la decisión de los estudiantes. En el contexto de este estudio, fue posible observar que algunos estudiantes manifestaron este tipo de conducta.

2) C*onducta de conocimiento del mundo/de creencias*: Las experiencias personales y creencias adquiridas, especialmente en el contexto social, es un factor determinante en las elecciones que hacen y en las decisiones que tomamos y difícilmente los estudiantes abandonan en favor de un razonamiento en común. Así, los estudiantes que tienen este tipo de conducta se apoyan en conocimientos de experiencias del mundo, generando conjeturas e hipótesis en este contexto; no tienen flexibilidad para cambios en el pensamiento; no perciben contradicciones; no dudan de sus experiencias; no transfieren el conocimiento; presentan argumentos basados en suposiciones no explícitas en los enunciados de los problemas; presentan razonamientos más prácticos, experimentales e intuitivos que teóricos; delante un conflicto prefieren cambiar la situación que adaptarse a

ella; suelen crear conflictos entre el mundo de las experiencias y el mundo de las matemáticas. En particular, los estudiantes de esta muestra presentan en su mayoría este tipo de conducta.

3) C*onducta de satisfacción personal/de utilidad*: La conducta matemática o extramatemática estará asociada al grado de satisfacción o utilidad de las opciones. Esto está en consonancia con el criterio básico de racionalidad que informa que todo proceso de decisión debe ser remitido para lograr la mayor utilidad posible para el sujeto (Elster, 1989 y Freitas, 1994). Al estar satisfecho, difícilmente el sujeto cambia su elección/estrategia (elemento maximal) en favor de otra, porque, para él, su elección tendrá siempre tiene un valor superior. El exceso de satisfacción y confianza en la estrategia que considera correcta impide a los sujetos mirar otras posibles rutas. En el contexto de este estudio, la estrategia que ha traído más satisfacciones, éxitos y confianza para los estudiantes fue de carácter social.

4) *Conducta de supervivencia escolar*: Para no quedar sin dar una respuesta al profesor o al sistema, el estudiante acaba contestando cualquier cosa. En la relación maestro-alumno, no tiene otra opción que aceptar la respuesta institucional, de referencia, dada por su maestro, aun no estando de acuerdo con esta. En cierto modo, las decisiones están vinculadas a normas de comportamiento para adaptarse al sistema escolar, por la exigencia de la situación, por presiones del profesor etc. Se nota claramente la influencia del contrato didáctico en este tipo de conducta. Este tipo de comportamiento fue muy expresivo en la muestra investigada.

5) *Conducta económica*: Los estudiantes son muy económicos en sus acciones, en sus razonamientos y en sus justificaciones; presentan respuestas poco aclaradoras, a veces monosilábica de tipo "sí" y "no". Dada la poca familiaridad con el problema, deciden ir por la ruta que requiere menos esfuerzo (de lectura, de organización, de razonamiento etc). Aunque en una escala más pequeña, esta conducta estuvo presente en los problemas de la *alcantarilla* y *donde está el coche*.

6) C*onducta evasiva*: Son conductas que demuestren no tener interés en involucrarse en el problema, presentando respuestas evasivas, del tipo: "No lo sé"; huyendo de la obligación de un uso explícito del lenguaje matemático; se abstienen de procedimientos de cálculos; cambian el lenguaje al adaptar la información que se quiere comunicar. Fue muy significativa la parcela de la muestra que se encuadra en esta conducta.

7) *Conducta de no negociación*: Es cuando dos o más sujetos involucrados en una propuesta conjunta para una decisión colectiva no llegan a un acuerdo. Cada uno con su elección/estrategia que satisface una evaluación personal, no acepta o no está de acuerdo con la elección de otro, en ocasiones tienen posturas dictatoriales y se encierran en sus ideas, tienen dificultades para comprender otras formas de razonamiento como solución óptima. Esta conducta se observó sólo en el problema de la densidad demográfica.

8) *Conducta de conflicto*: Se da cuando cada sujeto tiene diferentes objetivos. Los conflictos pueden ser por las opciones y decisiones que hacen; por no percibir las relaciones y contextos del problema; pueden ser de orden cognitivo como la falta de capacidad para entender lo que el otro habla; en relación maestro-estudiante; en relación estudiante-estudiantes, en relación alumno-saber. En este sentido, un conflicto que ocurre típicamente en el estudiante está entre sus conocimientos del mundo y el conocimiento de las matemáticas. La conducta de conflicto estuvo presente en buena parte de la muestra y más explícito se hizo en el *problema de densidad*.

9) *Conducta ingenua*: Presenta un razonamiento más simplista, no está sujeto a las restricciones de los problemas, a menudo carece de conocimientos teóricos y, por lo tanto, las respuestas puede deberse a una falta de conocimiento. No juzga la validez del razonamiento, no se da cuenta de que la solución no es la deseable, no hace una evaluación de los resultados. Las acciones a menudo son fruto de su propia experiencia de mundo. En esta investigación, esta conducta fue expresamente significativa, representando una parte importante del estudio.

Aunque hemos hecho una interpretación de la conducta de los estudiantes en la resolución de problemas desde algunas teorías aquí elucidadas, debe hacerse hincapié en que todavía queda mucho por hacer. Es necesario observar que las teorías revisadas no presentan fórmulas ni reglas de como el sujeto debe decidir, ya que en la práctica no existe una regla para comportarse (Kahneman & Tvesky, 1979). Por lo tanto, estas teorías sólo nos proporcionan indicadores para realizar el análisis e interpretación de los datos.

Acerca de las contribuciones de la tesis, en vista de la falta de literatura, dejamos patente la intención de una nueva mirada en el análisis de los procesos de resolución de problemas, aportando herramientas de modelos económicos aplicados a las Ciencias Sociales para prestar más atención a los modos de comportamiento de los estudiantes en el aula. En este sentido, este estudio aporta nuevos resultados al campo de la Educación Matemática.

Se llega a la conclusión de que, entre otras cosas, la conducta de decisión no es simplemente el hecho de elegir una determinada alternativa, dentro de un contexto. Es un proceso complejo en el que intervienen el conocimiento previo, las creencias, el conocimiento del mundo, los procesos de elección; conceptos implícitos de la teoría de juegos, las restricciones de las tareas y las normas del contrato didáctico.