FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Introducción a la Teoría de Distribuciones

Raúl Pérez Muñiz

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Introducción a la Teoría de Distribuciones

Raúl Pérez Muñiz

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: Introducción a la Teoría de Distribuciones
Director: Fernando Adrián Fernández Tojo
Breve descripción del contenido
Desde los trabajos pioneros de Fourier sobre la ecuación del calor surgió la necesidad de trabajar con algo más que funciones. Ejemplo de esto es lo que se llegó a conocer como la función de Dirac: una función que vale infinito en un punto de la recta real, cero en el resto y su integral es uno. Evidentemente no existe una función con esas propiedades, pero tal objeto tiene sentido en la teoría de distribuciones de Schwartz. En este trabajo estudiaremos en qué consisten las distribuciones y los espacios que definen, así que como las relaciones entre los mismos.
Recomendaciones
Cursar la asignatura Análise Funcional en Espazos de Hilbert.

Índice general

Resumen

En este trabajo, realizamos una introducción rigurosa a la teoría de distribuciones de Schwartz. Nuestro objetivo principal es definir el espacio de distribuciones. Por ser este el dual topológico de lo que se conoce como espacio de las funciones test, nuestra primera tarea es equipar dicho espacio con una topología de manera que adquiera una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo y completo. La forma de proceder consiste en inducir la topología en el espacio de las funciones test a través de una sucesión de subespacios de Fréchet, obteniendo, de este modo, un espacio LF. Una vez construido el espacio de las funciones test, definimos el espacio de las distribuciones y lo caracterizamos.

La segunda parte del trabajo se centra en analizar cómo las distribuciones generalizan el concepto de función y el de medida. En particular, estudiamos la forma en la que extienden ciertas nociones asociadas a las funciones como, por ejemplo, la diferenciación, la multiplicación y el soporte. Además, también vemos cómo las distribuciones sirven para formalizar determinados objetos como la delta de Dirac. Por último, hacemos un breve comentario acerca de las topologías que se pueden definir sobre el espacio de distribuciones y las nociones de convergencia asociadas.

Abstract

In this paper, we give a rigorous introduction to the theory of Schwartz distributions. Our main goal is to define the space of distributions. Since this is the topological dual of what is known as the space of test functions, our first task is to equip this space with a topology so that it acquires the structure of a locally convex and complete topological vector space. The way to proceed is to induce the topology in the space of the test functions through a sequence of Fréchet subspaces, thus obtaining an LF-space. Once the space of the test functions has been constructed, we define the space of the distributions and characterize it.

The second part of the paper focuses on analyzing how distributions generalize the concept of function and measure. In particular, we study the way in which they extend certain notions associated with functions, such as differentiation, multiplication and support. In addition, we also see how the distributions serve to formalize certain objects such as the Dirac delta. Finally, we make a brief comment on the topologies that can be defined on the space of distributions and the associated notions of convergence.

1. Introducción

A mediados del siglo XVIII, d'Alembert encontró una expresión que describía el movimiento de una cuerda vibrante con sus dos extremos fijos. Fue Leonhard Euler, unos años después, quien probó que la ecuación de onda modelizaba este comportamiento físico. Estos dos matemáticos interpretaban las soluciones de forma totalmente distinta. Sin entrar en detalles, d'Alembert consideraba que la solución debía ser regular mientras que Euler estaba convencido de que la solución podría ser incluso discontinua.

Más tarde, Lagrange se sumó al debate, opinando que, como decía d'Alembert, la solución tenía que ser regular pero, al mismo tiempo, defendió que los razonamientos de Euler sobre el movimiento de la cuerda eran correctos. Se llegó a la conclusión de que, con las herramientas analíticas de la época, no era posible determinar quien tenía razón.

En el siglo XIX, se llevó a cabo un proceso de formalización del análisis de la mano de Cauchy y de la escuela de Weierstrass. Sin embargo, los estudios sobre ecuaciones diferenciales se centraron en problemas de valor inicial con condiciones iniciales regulares. Incluso, al abordar ciertos problemas físicos con condiciones iniciales no regulares, se reemplazaba la ecuación diferencial en los puntos problemáticos. A finales de este siglo, Dini generaliza el concepto de derivada, dando lugar a lo que hoy en día se conoce como derivada de Dini.

Paralelamente, comenzaron a aparecer objetos que se trataban como funciones aun sin serlo. Es el caso de la famosa función de Dirac, una idealización matemática que, como veremos llegado el momento, se utilizaba en toda clase de ámbitos. Se puede llegar a interpretar como una "función" nula en todo punto salvo en el origen, donde vale infinito y tal que su integral es uno. Obviamente, esta definición no tiene sentido como función usual; no obstante, fue utilizada, por ejemplo, por Fourier en el estudio de sus series y por Dirac en sus trabajos sobre mecánica cuántica.

Vistas las limitaciones del análisis de la época, está claro que era necesario obtener una generalización del concepto de función y de la noción de derivada para, de esto modo, poder explicar los razonamientos que se estaban dejando en un segundo plano sin una justificación rigurosa y matemática.

Ya en el siglo XX, Lebesgue define la noción de función absolutamente continua. Esto, junto al surgimiento y desarrollo del análisis funcional, permite generalizar los operadores diferenciales al espacio de las funciones absolutamente continuas. Esta generalización de la derivada fue empleada en el cálculo variacional, área de las matemáticas que se dedica al estudio de los máximos y mínimos de un funcional continuo definido sobre un espacio de funciones.

Alrededor de 1935, Sergéi Sobolev propuso una generalización del concepto de función y, después de haber estudiado problemas de Cauchy, llegó a la conclusión de que algunos teoremas de existencia de solución podían generalizarse a determinados espacios funcionales. Cada uno de estos espacios estaba formado por funciones m-veces continuamente diferenciables con soporte compacto en el espacio euclidiano $2k+2$ dimensional. En la actualidad, se denominan espacios de Sobolev.

Sobre cada uno de estos espacios se definió una noción de convergencia que requería ciertas condiciones sobre el soporte de las funciones de la sucesión y la convergencia uniforme, tanto de la sucesión de partida, como de las sucesiones de derivadas parciales hasta el orden m. Posteriormente, se consideraron los espacios formados por los funcionales lineales y secuencialmente continuos para esta convergencia sobre cada uno de los espacios de Sobolev. Estos espacios duales también fueron dotados de una noción de convergencia. Finalmente, Sobolev incluso consiguió, a partir de funciones integrables con ciertas propiedades adicionales, inducir funcionales sobre estos espacios.

Los espacios duales definidos por Sobolev son los primeros ejemplos existentes de espacios de distribuciones, empleados, en este caso, para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, fue el matemático francés Laurent Schwartz, en 1944, quien desarrolló distribuciones de manera formal, exponiendo todo el potencial de esta teoría. Por tanto, cronológicamente, fue Sobolev el primero en definir la noción de distribución pero fue Schwartz quien las llevó a un nuevo nivel, descubriendo el mundo de posibilidades que estas ofrecen.

Comentemos un poco más en profundidad la figura de Schwartz. Tal y como cuenta en su autobiografía (consúltese [32]), nace en París en el año 1915 y se gradúa en matemáticas con 22 años en la École Normale Supérieure. Fue miembro del grupo Bourbaki, lo que provocó que su línea de investigación se acercase a las de otros integrantes del grupo. En sus trabajos previos a las distribuciones, Schwartz generaliza la teoría de la dualidad en espacios de Banach a espacios de Fréchet. Además, introduce entornos en estos espacios y define la topología fuerte de su dual topológico.

El estudio de los espacios de Fréchet y de la teoría de la dualidad fue clave en el desarrollo de las distribuciones, así como su investigación sobre las soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales.

Schwartz descubre las distribuciones una noche de noviembre de 1944 que el mismo definió como "*la plus belle nuit de ma vie*". El proceso de gestación de esta teoría fue de unos seis meses, hasta que se dio cuenta de que tenía que considerar funcionales en lugar de operadores sobre el espacio de las funciones test. Posteriormente, Schwartz desarrolla toda la teoría de distribuciones (veáse [31]) de forma rigurosa generalizando, entre otras cosas, la noción de derivada, el concepto de función, de medida, la transformada de Fourier y la convolución. En 1950, Schwartz es galardonado con la medalla Fields por el descubrimiento de las distribuciones. Para más información y datos históricos sobre el nacimiento de la teoría de distribuciones, puede consultarse [23].

El objetivo de este trabajo es realizar una introducción formal a la teoría de distribuciones de Schwartz. En lo referente a los contenidos, podemos dividirlo en dos partes.

En la primera parte, con el objetivo de definir el espacio de las distribuciones, analizaremos el espacio de las funciones infinitamente diferenciables definidas en un abierto y con soporte compacto, es decir, el espacio de las funciones test. Para dotarlo de una topología, en primer lugar, debemos construir subespacios de Fréchet. Dedicaremos la primera mitad del Capítulo 2 a establecer estos espacios, empleando resultados enmarcados dentro de la teoría de los espacios vectoriales topológicos.

Una vez construidos estos espacios, en la segunda parte del Capítulo 2, introduciremos el concepto de topología final y equiparemos al espacio de las funciones test con dicha topología, convirtiéndolo en lo que se denomina espacio LF. El resto del capítulo se empleará para analizar las propiedades de estos espacios y, en particular, las del espacio de las funciones test.

Al comienzo del Capítulo 3, definiremos el espacio de distribuciones como el dual topológico de las funciones test y presentaremos dos caracterizaciones de las distribuciones que serán de gran ayuda en secciones posteriores.

La segunda parte del trabajo la dedicaremos, en primer lugar, a extender el concepto de función y el concepto de medida, destacando el caso particular de la función de Dirac. Por otra parte, definiremos dos topologías sobre el espacio de distribuciones y comprobaremos que las nociones de convergencia asociadas, en el caso de considerar sucesiones, coinciden. Finalmente, destinaremos el resto del Capítulo 3 a continuar con la extensión de las propiedades de las funciones, estudiando cómo las distribuciones generalizan la noción de derivada, el producto de funciones y el soporte de una función.

Finalmente, en el Capítulo 4, analizaremos de forma retrospectiva los contenidos del trabajo y comentaremos aquellos temas que han quedado fuera del mismo. Además, hablaremos de algunas de las aplicaciones de las distribuciones y, por último, comentaremos las referencias empleadas.

2. El espacio de las funciones test

En este capítulo construiremos el espacio funcional sobre el que se definen las distribuciones. Este no es más que el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto equipado con una topología particular. La dificultad reside en la definición de dicha topología, puesto que requiere de conceptos analíticos y topológicos de cierta complejidad. Con este fin, dedicaremos la primera parte del capítulo a presentar las nociones y los resultados indispensables para la construcción rigurosa de esta topología.

Dado que estos requisitos mínimos se engloban dentro de la teoría de los espacios vectoriales topológicos y, en particular, dentro de la teoría de los espacios localmente convexos, simplemente demostraremos aquellos resultados que consideremos reveladores o útiles a la hora de comprender la estructura de las distribuciones. Para ampliar conocimientos en estos campos un buen punto de partida podría ser la lectura de [28] y [35], los cuales se han consultado para sentar las bases de este capítulo.

2.1. Preliminares

Durante todo el trabajo denotaremos por $\mathbb{F}$ el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ dotado de una aplicación $|\cdot|$ que será el valor absoluto o el módulo, respectivamente. Nótese que tanto el valor absoluto como el módulo inducen una métrica que, a su vez, induce una topología de bolas abiertas. Comencemos recordando los conceptos de métrica y espacio métrico.

Definición 2.1. Un par (X,d) se dice un *espacio métrico* si X es un conjunto y $d : X \times X \to [0,\infty)$ es una aplicación, llamada *métrica* o *distancia*, tal que

(I) $d(x,y) = 0$ si, y solamente si, $x = y$, para todo $x,y \in X$.

(II) $d(x,y) = d(y,x)$, para todo $x,y \in X$.

(III) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, para todo $x,y,z \in X$.

La métrica se dice *invariante por traslaciones* si $d(x+z,y+z) = d(x,y)$ para todo $x,y,z \in X$.

Definición 2.2. Un espacio topológico Hausdorff (X,τ) se dice *metrizable* si se puede definir una métrica d sobre X de tal manera que la topología de bolas abiertas inducida por d coincida con τ.

Definición 2.3. Sea X un conjunto. Una *sucesión* en X es una aplicación $x : \mathbb{N} \to X$. Denotaremos $x(n)$ como x_n y utilizaremos la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indistintamente para referirnos tanto a la sucesión como a su conjunto imagen.

Definición 2.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice *convergente* a $x \in X$ si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, se tiene que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice *de Cauchy* si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p,q \geqslant N$, se tiene $d\left(x_p, x_q\right) < \varepsilon$. Si toda sucesión de Cauchy es convergente, (X,d) se dice que es un *espacio completo*.

Definición 2.5. Una tétrada $(V,+,\cdot,\tau)$ es un *espacio vectorial topológico* sobre $\mathbb{F}$ si $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, (V,τ) es un espacio topológico y las aplicaciones $+ : (V,\tau)\times(V,\tau) \to (V,\tau)$ y $\cdot : \mathbb{F}\times(V,\tau) \to (V,\tau)$ son continuas, considerando la topología producto en los respectivos dominios.

Es posible generalizar los conceptos de sucesión convergente, sucesión de Cauchy y de espacio completo a espacios vectoriales topológicos. Su definición es la siguiente.

Definición 2.6. Sea V un espacio vectorial topológico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en V se dice que es *convergente* a $x \in V$ si para todo entorno U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, se tiene que $x_n \in U$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en V se dice *de Cauchy* si para todo entorno U de cero existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p,q \geqslant N$, se tiene que $x_p - x_q \in U$. Si toda sucesión de Cauchy es convergente, V se dice un *espacio vectorial topológico completo*.

Definición 2.7. Sean V y W espacios vectoriales topológicos. Una aplicación $f : V \to W$ se dice un *embebimiento* si es continua, lineal e inyectiva. En tal caso, decimos que V está *embebido* en W. Si, además, f es sobreyectiva y la aplicación inversa f^{-1} es continua, decimos que f es un *isomorfismo de espacios vectoriales topológicos* y que V y W son *espacios vectoriales topológicos isomorfos*.

Definición 2.8. Un par (V,d) se dice un *espacio vectorial métrico* si V es un espacio vectorial, (V,d) es un espacio métrico y V es un espacio vectorial topológico con la topología inducida por d.

Definición 2.9. Dado V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, una *seminorma* en V es una aplicación $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ que satisface

(I) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $u \in V$.

(II) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, para todo $u,v \in V$.

De (I) se sigue que la seminorma del cero es cero. Recíprocamente, si $\|x\| = 0$ implica que $x = 0$, diremos que $\|\cdot\|$ es una *norma* y que $(V, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*. Una norma induce una métrica de forma natural en V, basta definir $d(x, y) = \|y - x\|$ para todo $x, y \in V$.

Notación 2.10. Sean V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, $A, B \subset V$ subconjuntos, $p \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Definimos $A \pm B := \{x \pm y \,:\, x \in A, y \in B\}$, $p + A := \{p + x \,:\, x \in A\}$ y $\lambda A := \{\lambda x \,:\, x \in A\}$.

Definición 2.11. Sean V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $A, B \subset V$. Diremos que:

- A es *absorbente* (o *radial* en 0) si para todo $x \in V$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in \lambda A$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $|\lambda| \geqslant \alpha$.
- A es *equilibrado* (o *balanceado*) si $\lambda A \subset A$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $|\lambda| \leqslant 1$.
- A es *convexo* si para todo $x, y \in A$ y $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que $\alpha x + (1 - \alpha)x \in A$. Dicho de otro modo, si $\alpha \in [0, 1]$ entonces $\alpha\, A + (1 - \alpha)\, A \subset A$.
- A *absorbe a* B si existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $B \subset \lambda A$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $|\lambda| \geqslant \alpha$.

Definición 2.12. Sean V un espacio vectorial topológico y $B \subset V$ un subconjunto. B se dice *acotado* si es absorbido por todo entorno de cero.

Definición 2.13. Un espacio vectorial topológico se dice *localmente convexo* si cada punto posee una base local de conjuntos convexos.

Definición 2.14. Un espacio vectorial topológico es un *espacio de Fréchet* si es completo, metrizable y localmente convexo.

Definición 2.15. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}$ una función. Se define el *soporte* de f como:

$$\operatorname{sop}(f) := \overline{\{x \in A \,:\, f(x) \neq 0\}},$$

es decir, como la clausura topológica de los puntos donde f es distinta de cero.

Notación 2.16. Denotaremos por $\mathbb{N}^n$ el conjunto de todas las n-tuplas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Estos elementos se denominan *multi-índices*. El *orden* $|\alpha|$ de un multi-índice α se define como $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

En otro orden de cosas, el símbolo ∂_j denotará a la derivada j-ésima, es decir, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Además, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Obviamente el orden de α es el orden de la derivación.

Definición 2.17. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $D(K)$ el espacio de las funciones, con valores en $\mathbb{F}$, definidas en algún abierto conteniendo a K tales que su soporte está contenido en K y sus derivadas parciales para todos los órdenes existen y son continuas. Es decir, $D(K)$ es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte contenido en el compacto K.

Observación 2.18. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el abierto en el que están definidas las funciones es $\mathbb{R}^n$ sin más que definir las funciones como 0 en el complementario del dominio inicial. Además, obsérvese que, al ser el soporte siempre un cerrado, como K es compacto entonces el soporte de las funciones de $D(K)$ es un compacto.

Definición 2.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Denotaremos por $D(\Omega)$ el espacio de las funciones, con valores en $\mathbb{F}$, definidas en Ω con soporte compacto y tales que sus derivadas parciales para todos los órdenes existen y son continuas. Dicho de otro modo, $D(\Omega)$ es el espacio de las funciones de clase infinito, definidas en el abierto Ω, con soporte compacto.

2.2. La topología de $D(K)$

En esta sección construiremos una topología sobre el espacio $D(K)$, con la que será un espacio de Fréchet. Para ello, apriorísticamente, probaremos la existencia y unicidad de una topología localmente convexa, en un espacio vectorial arbitrario, a partir de una colección de subconjuntos con unas determinadas propiedades que será una base local de cero para esa topología. Posteriormente, veremos que estos resultados se pueden particularizar al considerar una familia de seminormas y, en el caso del espacio $D(K)$, la explicitaremos. Finalmente, demostraremos la existencia de una métrica invariante por traslaciones en espacios Hausdorff cuya topología está generada por una de estas familias de seminormas.

La exposición de esta sección es, en esencia, análoga a la que se puede encontrar en [19]. Dicho esto, se han adaptado ciertos resultados y demostraciones para evitar introducir, en la medida de lo posible, conceptos accesorios. Asimismo, se han completado y reestructurado algunas cuestiones con el objetivo de clarificar la lectura.

Lema 2.20. *Sean V un espacio vectorial topológico y $U \subset V$ un entorno de cero. Para todo $a \in V$, el conjunto $a + U$ es un entorno de a.*

Demostración. Dado $a \in V$, definimos la traslación por a como $x \in V \to x + a$ y su inversa como $x \in V \to x - a$. Por la continuidad de la suma y del producto por escalares tenemos que estas aplicaciones son continuas (nótese que $x - a = x + (-1) \cdot a$), por lo que la traslación es un homeomorfismo.

Así, los entornos de a son los conjuntos de la forma $a+U$, donde U es un entorno de cero. ■

Del lema anterior se sigue que para conocer la topología de un espacio vectorial topológico, nos basta con conocer cómo son los entornos de cero, es decir, es suficiente tener una base local de cero.

A continuación, presentamos un teorema clave en el desarrollo de la sección. En sus hipótesis aparece embebida la noción de filtro, en particular, la de base de filtro. A diferencia de la bibliografía consultada, se ha optado por evitar definir este concepto a pesar de ser una herramienta de gran utilidad en la teoría de espacios topológicos que generaliza la noción de convergencia. Al lector interesado en este tema se le recomienda consultar [6].

Por otra parte, se hace notar que en la demostración del siguiente teorema se emplea la definición de topología mediante conjuntos abiertos en lugar de la definición equivalente por medio de entornos.

Teorema 2.21. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y sea $\mathscr{R}$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de V que satisface:*

(I) *Para todo $U \in \mathscr{R}$, U es absorbente.*

(II) *Para todo $U \in \mathscr{R}$, U es equilibrado.*

(III) *Para todo $U_1 \in \mathscr{R}$, existe $U_2 \in \mathscr{R}$ tal que $U_2 + U_2 \subset U_1$.*

(IV) *Dados $U_1, U_2 \in \mathscr{R}$, existe $U_3 \in \mathscr{R}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.*

Entonces existe una única topología sobre V con la que es un espacio vectorial topológico y $\mathscr{R}$ es una base local de cero.

Demostración. Iniciamos la demostración indicando que por ser todos los elementos de $\mathscr{R}$ equilibrados, se tiene que el cero pertenece a todos ellos.

Probemos que

$$\tau := \{S \subset V : \text{ para todo } x \in S, \text{ existe } U \in \mathscr{R} \text{ de modo que } x + U \subset S\}$$

es una topología sobre V.

- Es inmediato que $\emptyset, V \in \tau$.
- *La unión arbitraria de abiertos es un abierto*. En efecto, sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{A}} \subset \tau$, consideremos $S := \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} S_\alpha$ y tomemos $x \in S$. Tiene que existir $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $x \in S_{\alpha_0}$, por lo que se tiene la existencia de $U_{\alpha_0} \in \mathscr{R}$ cumpliendo que $x + U_{\alpha_0} \subset S_{\alpha_0} \subset S$.

- *La intersección finita de abiertos es un abierto*. Así es, sean $T_1, \ldots, T_n \in \tau$ y $T := \bigcap_{k=1}^{n} T_k$. Tomando $x \in T$, tenemos que, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in T_k$ y que existe $U_k \in \mathscr{R}$ tal que $x + U_k \subset T_k$. Definiendo $U := \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ tenemos que, por la hipótesis (IV), existe $\widetilde{U} \in \mathscr{R}$ tal que $\widetilde{U} \subset U$. Por lo tanto, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x + \widetilde{U} \subset x + U_k \subset T_k$. Concluimos que $x + \widetilde{U} \subset T$, es decir, acabamos de probar que $T \in \tau$.

Una vez demostrado que τ es una topología sobre V, veamos que $\mathscr{R}$ es una base local de cero para esta topología. Ya sabemos que todos los elementos de $\mathscr{R}$ contienen al cero, probemos que son entornos de cero, es decir, que contienen a un entorno abierto de cero. Sea $U \in \mathscr{R}$ y consideremos el conjunto

$$W := \{x \in U \ : \ \text{existe } G \in \mathscr{R} \text{ de forma que } x + G \subset U\}.$$

Obviamente, $0 \in W \subset U$ y dado $x \in W$, existe $G \in \mathscr{R}$ tal que $x + G \subset U$. Por la hipótesis (III), podemos tomar $G' \in \mathscr{R}$ tal que $G' + G' \subset G$. Finalmente, $x + G' \subset W$. Justifiquemos esto: $x + G' \subset x + G' + G' \subset x + G \subset U$, es decir, $x + G'$ está contenido en U y satisface la condición para ser un subconjunto de W. Por tanto, W es abierto y U es un entorno de cero.
Ahora veamos que $\mathscr{R}$ es una base local de cero. Dado L un entorno de cero, existe $S \in \tau$ tal que $0 \in S \subset L$, por la definición de la topología existe también $U \in \mathscr{R}$ de modo que $U \subset S \subset L$.
Concluimos que $\mathscr{R}$ es una base local de cero.

Pasemos ahora a probar que V es un espacio vectorial topológico. Comencemos demostrando la continuidad de la suma. Sean $a, b, c \in V$ tales que $a + b = c$ y W un entorno de c. Entonces existe $U \in \mathscr{R}$ tal que $c + U \subset W$, por (III), existe $U' \in \mathscr{R}$ de modo que $U' + U' \subset U$. Por tanto, $a + U'$ es un entorno de a, $b + U'$ es un entorno de b y tenemos que:

$$(a + U') + (b + U') \subset a + b + U = c + U \subset W.$$

Para demostrar la continuidad del producto necesitamos tener en cuenta la siguiente observación: De la hipótesis (III) se desprende que, dado $W \in \mathscr{R}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe $U \in \mathscr{R}$ tal que $2^n U \subset W$ (ya que $2U \subset U + U \subset W$). En particular tomemos n de forma que $|\lambda| \leqslant 2^n$, para un cierto $\lambda \in \mathbb{F}$. Si U es tal que $2^n U \subset W$, por ser U equilibrado, tenemos que $\lambda\, 2^{-n} U \subset U$ (nótese que $|\lambda\, 2^{-n}| \leqslant 1$), es decir, $\lambda U \subset 2^n U \subset W$. Hemos llegado a que $\lambda U \subset W$. Ya estamos en situación de probar la continuidad del producto por escalares.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$ y W un entorno de λa. Existe $U \in \mathscr{R}$ tal que $\lambda a + U \subset W$ y, aplicando a U dos veces la hipótesis (III), existe $U' \in \mathscr{R}$ de modo que $U' + U' + U' \subset U$. Ahora bien, por ser U' absorbente (existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \in \mu U'$, donde $\mu \in \mathbb{F}$, $|\mu| \geqslant \alpha$) tenemos que existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que si $|\eta| < \varepsilon$ entonces $\eta a \in U'$. Por otro lado, por la observación previa, existe $T \in \mathscr{R}$ tal que $\lambda T \subset U'$.

Finalmente, si $|\eta| \leqslant 1$ y $x-a \in U$, como U' es equilibrado, $\eta(x-a) \in U'$. Tomemos, haciendo uso de la hipótesis (IV), $S \in \mathscr{R}$ de tal forma que $S \subset T \cap U'$. Empleando la siguiente identidad

$$\xi x - \lambda a = (\xi - \lambda)a + \lambda(x-a) + (\xi - \lambda)(x-a)$$

e imponiendo que $|\xi - \lambda| \leqslant \min\{1, \varepsilon\}$, tenemos que

$$\xi x - \lambda a \in U' + U' + U' \subset U,$$

es decir, $\xi x \in W$. Queda así probada la continuidad del producto por escalares. Concluimos que V es un espacio vectorial topológico.

Para rematar la demostración de este teorema, tenemos que probar la unicidad de la topología. Supongamos que existen dos topologías τ_1, τ_2 con las que V es un espacio vectorial topológico y $\mathscr{R}$ es una base local de cero. Considerando la identidad $\mathrm{id} : (V, \tau_1) \to (V, \tau_2)$ está claro que la aplicación es continua en el cero, ya que ambos espacios tienen una misma base local de cero. Teniendo en cuenta, además, que en espacios vectoriales topológicos basta tener una base local de cero para conocer todo el espacio referencia, podemos afirmar que la identidad es continua en todo el espacio. En particular, es un homeomorfismo de espacios topológicos. Por lo tanto, $\tau_1 = \tau_2$ y concluimos que la topología es única. ■

Corolario 2.22. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y sea $\mathscr{R}$ una colección de subconjuntos de V absorbentes, equilibrados y convexos. Sea $\mathscr{M}$ la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos de la forma λU, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $U \in \mathscr{R}$. Entonces existe una única topología sobre V con la que es un espacio localmente convexo y con la que $\mathscr{M}$ es una base local de cero.*

Demostración. Comencemos indicando que si $U \in \mathscr{R}$ es absorbente, equilibrado y convexo, entonces λU, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, también lo es. Además, todo subconjunto absorbente es no vacío y, por ser todos los elementos de $\mathscr{R}$ equilibrados, contienen al cero. Así, dados dos elementos $S, T \in \mathscr{M}$, como están formados por la intersección finita de elementos de la forma λU, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $U \in \mathscr{R}$, tenemos que $S \cap T \in \mathscr{M}$ y que $S \cap T \subset S \cap T$, es decir, se satisface la hipótesis (IV) del Teorema 2.21.

Por otra parte, es rutinario probar que la intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente y que la intersección arbitraria de conjuntos equilibrados y convexos es equilibrada y convexa. Por lo tanto, también se cumple la hipótesis primera y segunda del Teorema 2.21. Finalmente, notemos que dado un conjunto convexo S, por definición, $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S \subset S$. Ahora bien, si $S \in \mathscr{M}$, entonces $\frac{1}{2}S \in \mathscr{M}$. Así, todo elemento de $\mathscr{M}$ satisface la hipótesis (III) del Teorema 2.21 y, por tanto, queda garantizada la existencia de una topología sobre V con la que es un espacio localmente convexo. ■

Corolario 2.23. *Bajo las hipótesis del Corolario 2.22, sea $\mathscr{R}'$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{R}$ y sea $\mathscr{N}$ la colección de todos los conjuntos λU, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $U \in \mathscr{R}'$. Entonces $\mathscr{N}$ es una base local de cero equivalente a $\mathscr{M}$.*

Demostración. Sea $\lambda(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \in \mathscr{N}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $U_i \in \mathscr{R}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces es evidente que $\lambda(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = \lambda U_1 \cap \cdots \cap \lambda U_n$ y $\lambda U_1 \cap \cdots \cap \lambda U_n \in \mathscr{M}$, ya que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i \in \mathscr{R}$.

Recíprocamente, dado $\lambda_1 U_1 \cap \cdots \cap \lambda_n U_n \in \mathscr{M}$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ y $U_i \in \mathscr{R}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, si tomamos $\lambda = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, entonces

$$\lambda(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \subset \lambda_1 U_1 \cap \cdots \cap \lambda_n U_n,$$

donde $\lambda(U_1 \cap \cdots \cap U_n) \in \mathscr{N}$. ■

Corolario 2.24. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y sea $\mathscr{B}$ una colección de subconjuntos absorbentes, equilibrados y convexos tales que para todo $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$, existe $U_3 \in \mathscr{B}$ tal que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. Sea $\mathscr{R}$ la colección de todos los conjuntos λU, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $U \in \mathscr{B}$. Entonces existe una única topología sobre V con la que es un espacio localmente convexo y con la que $\mathscr{R}$ es una base local de cero.*

Demostración. Es consecuencia directa de los argumentos empleados en la prueba del Corolario 2.22. ■

Tal y como se había dicho, vamos a particularizar estos resultados al caso en el que se considera una familia de seminormas. Para ello, debemos tener en cuenta el siguiente lema.

Lema 2.25. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una seminorma en V, entonces el conjunto*

$$U = \{x \in V \, : \, \|x\| \leqslant 1\}$$

es absorbente, equilibrado y convexo.

Demostración. Probemos cada una de estas propiedades por separado:

- *U es absorbente*. Sea $x \in V$. Entonces, definiendo $\alpha := \|x\| \in [0, \infty)$ y teniendo en cuenta que

  $$\lambda U = \{\lambda u \, : \, u \in U\} = \{\lambda u \, : \, \|u\| \leqslant 1\} = \{y \in V \, : \, \|y\| \leqslant |\lambda|\},$$

  se sigue que $x \in \lambda U$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \geqslant \alpha$, puesto que $\|x\| = \alpha \leqslant |\lambda|$.

- *U es equilibrado*. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \leqslant 1$. Como $\lambda U = \{y \in V \, : \, \|y\| \leqslant |\lambda|\}$ y $|\lambda| \leqslant 1$, concluimos que $\lambda U \subset U = \{y \in V \, : \, \|y\| \leqslant 1\}$.

- *U es convexo*. Sean $x, y \in U$, es decir, $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$ y veamos que si $\alpha \in [0,1]$, entonces $\alpha x + (1-\alpha)y \in U$. Así es:

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leqslant \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leqslant \alpha + (1-\alpha) = 1. \qquad \blacksquare$$

Sea $\big(\|\cdot\|_j\big)_{j\in J}$ una familia de seminormas en un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V y para cada $j \in J$, sea U_j el conjunto de los $x \in V$ tales que $\|x\|_j \leqslant 1$. Del Corolario 2.22 se sigue que las intersecciones finitas de los conjuntos εU_j, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, forman una base local de cero para una topología localmente convexa sobre V. El conjunto $U_{j,\varepsilon} := \varepsilon V_j$ está formado por los $x \in V$ tales que $\|x\|_j \leqslant \varepsilon$, por lo que una base local de cero está dada por los conjuntos

$$U_{j_1,\dots,j_k,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k} = \{x \in V \ : \ \|x\|_{j_i} \leqslant \varepsilon_i, i \in \{1,\dots,k\}\},$$

donde $\{j_1,\dots,j_k\}$ es un subconjunto finito de J y $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$, con $i \in \{1,\dots,k\}$. Ahora bien, en virtud del Corolario 2.23, una base local equivalente es la formada por los conjuntos

$$U_{j_1,\dots,j_k,\varepsilon} = \{x \in V \ : \ \|x\|_{j_i} \leqslant \varepsilon, i \in \{1,\dots,k\}\},$$

donde $\{j_1,\dots,j_k\}$ es un subconjunto finito de J y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y consideremos el espacio $D(K)$. La familia de seminormas $\big(\|\cdot\|_p\big)_{p\in\mathbb{N}^n}$, donde

$$\|f\|_p := \max_{x\in K} |\,\partial^p f(x)\,| \tag{2.1}$$

define una topología con la que $D(K)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Comprobemos que los elementos de la familia $\big(\|\cdot\|_p\big)_{p\in\mathbb{N}^n}$ definida en (2.1) realmente son seminormas en $D(K)$.

Lema 2.26. *Dado $p \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, la aplicación $\|\cdot\|_p : D(K) \to [0,\infty)$ definida por $\|f\|_p = \max_{x\in K} |\,\partial^p f(x)\,|$, para todo $f \in D(K)$, es una seminorma en $D(K)$.*

Demostración. Puesto que tanto el valor absoluto como el módulo son normas, $\|\cdot\|_p$ está bien definida ya que $\|\cdot\|_p \geqslant 0$. Además, los elementos de $D(K)$ son, en particular, funciones continuas en el compacto K, por tanto están acotadas y $\|\cdot\|_p < \infty$.
Veamos ahora que se cumplen las dos condiciones para ser una seminorma.

- Sean $\lambda \in \mathbb{F}$ y $f \in D(K)$.

$$\|\lambda f\|_p = \max_{x\in K} |\,\partial^p(\lambda f)(x)\,| = \max_{x\in K} |\,\lambda\,\partial^p f(x)| = |\lambda| \max_{x\in K} |\,\partial^p f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_p.$$

- Sean $f, g \in D(K)$.

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= \max_{x\in K} |\partial^p(f+g)(x)| = \max_{x\in K} |\partial^p(f)(x) + \partial^p(g)(x)| \\ &\leqslant \max_{x\in K} (|\partial^p(f)(x)| + |\partial^p(g)(x)|) = \max_{x\in K} |\partial^p(f)(x)| + \max_{x\in K} |\partial^p(g)(x)| \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p.\end{aligned}$$

Nótese que simplemente hemos empleado las propiedades de la derivación y las de la norma de $\mathbb{F}$. ■

Expongamos un par de resultados sobre el carácter Hausdorff de un espacio vectorial topológico que serán de utilidad a lo largo del capítulo.

Lema 2.27. *Un espacio vectorial topológico V es Hausdorff si para todo $x \neq 0$ existe un entorno U de cero que no contiene a x.*

Demostración. Es suficiente con demostrar que si $x \neq 0$, existe un entorno U de cero y un entorno W de x tal que $U \cap W = \emptyset$. Justifiquemos esto: si tomamos $x, y \in V$, $x \neq y$, se tiene que $x - y \neq 0$. Sea U un entorno de cero y W un entorno de $x - y$ tal que $U \cap W = \emptyset$. Entonces $y + U$ es un entorno de y, $y + W$ es un entorno de x e $(y + U) \cap (y + W) = y + (U \cap W) = \emptyset$.

Dicho esto, sea U un entorno de cero que no contiene a x. Entonces existe un entorno equilibrado U' de cero tal que $U' + U' \subset U$. U' es un entorno de cero y $x + U'$ un entorno de x. Es más, $U' \cap (x + U') = \emptyset$ ya que, de lo contrario, existirían $a, b \in U'$ tales que $a = x + b$ y, por tanto, $x = a - b \in U' + U' \subset U$, lo cual supondría una contradicción.

Demostremos la existencia de tal entorno U'. Por ser V un espacio vectorial topológico, la suma es continua. Por lo tanto, la imagen recíproca de U mediante la aplicación $+ : V \times V \to V$ tiene que ser un entorno de cero, por lo que contiene un entorno rectangular de la forma $T \times T'$. Finalmente, $(T \cap T') \times (T \cap T') \subset T \times T'$ es un entorno de cero, por lo que basta tomar $U' = T \times T'$. ■

Proposición 2.28. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con la topología localmente convexa generada por una familia de seminormas $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$. Entonces V es Hausdorff si, y solamente si, para todo $x \in V$, $x \neq 0$, existe un índice $k \in I$ tal que $\|x\|_k \neq 0$.*

Demostración.

- Condición suficiente.
  Sea $x \in V$, $x \neq 0$ y $k \in I$ un índice tal que $\|x\|_i = \alpha \in \mathbb{R}^+$. El conjunto $W = \left\{y \in V \,:\, \|y\|_k \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$ es un entorno de cero que no contiene a x. Por el Lema 2.27, concluimos que V es Hausdorff.

- Condición necesaria.

  Supongamos que V es Hausdorff y que $x \neq 0$. Existe un entorno W de cero que no contiene a x. Este entorno W contiene un conjunto de la forma $\{y \in V : \|y\|_{i_k} \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, con $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, ya que las seminormas generan una base local de cero. Por tanto, tiene que existir un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\|x\|_k \neq 0$. ■

Corolario 2.29. *$D(K)$ equipado con la topología generada por la familia de seminormas definida en (2.1) es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Consideremos $f \in D(K)$ tal que $f \neq 0$. Puesto que $f \neq 0$, existe $x' \in K$ tal que $f(x') \neq 0$, por tanto $\|f\|_0 = \max_{x \in K} |f(x)| \geqslant |f(x')| > 0$. En virtud de la Proposición 2.28, concluimos que $D(K)$ es Hausdorff. ■

Enunciemos un lema técnico necesario para garantizar la existencia de una métrica invariante por traslaciones en espacios localmente convexos y Hausdorff cuya topología está generada por una sucesión de seminormas.

Lema 2.30. *Si $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es concava y tal que $f(0) = 0$, entonces f es* subaditiva, *es decir, $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ para cualesquiera $x, y \in [0, \infty)$.*

Demostración. Sean $x, y \in [0, \infty)$. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$ puesto que $f(0) = 0$. Supongamos que $x, y \in \mathbb{R}^+$. Sea $\alpha = \dfrac{x}{x + y} \in (0, 1)$, por la definición de concavidad tenemos que

$$f(x) = f((1 - \alpha)0 + \alpha(x + y)) \geqslant \alpha f(x + y) = \frac{x}{x + y} f(x + y).$$

De forma totalmente análoga tenemos que

$$f(y) \geqslant \frac{y}{x + y} f(x + y).$$

Por lo que sumando ambas expresiones tenemos que

$$f(x) + f(y) \geqslant \frac{x}{x + y} f(x + y) + \frac{y}{x + y} f(x + y) = f(x + y).$$ ■

Si una sucesión de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ define una topología sobre el espacio V, entonces definiendo $r_n(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x\|_i$ obtenemos una familia equivalente de seminormas $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisface $r_n(x) \leqslant r_{n+1}(x)$ para todo $x \in V$, por lo que los conjuntos $V_n = \{x \in V : r_n(x) \leqslant 1\}$ cumplen $V_{n+1} \subset V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *sucesión creciente de seminormas*.

Teorema 2.31. *Sea V un espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff cuya topología τ está generada por una sucesión creciente de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La aplicación $|\cdot| : V \to [0,\infty)$ definida por*

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} \tag{2.2}$$

posee las siguientes propiedades:

(a) $|x| = 0$ *si, y solamente si,* $x = 0$.

(b) $|x| = |-x|$.

(c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Además, la métrica $d(x,y) = |x-y|$ es invariante por traslaciones e induce la topología τ.

Demostración. Comencemos definiendo la función $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Tenemos que es de clase 2 y estrictamente creciente puesto que $f'(x) = (1+x)^{-2} > 0$, para todo $x \in [0,\infty)$. Además, $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, por lo que $f([0,\infty)) = [0,1)$. Por otra parte, $f''(x) = -2(1+x)^{-3} < 0$, para todo $x \in [0,\infty)$, es decir, f es concava. Por el Lema 2.30, f es subaditiva.

La serie de términos positivos (2.2) converge ya que:

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\|x\|_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Por tanto, la aplicación $|\cdot|$ está bien definida.

Veamos que se cumple la propiedad (a). Si $x = 0$, entonces $\|x\|_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $|x| = 0$. Si $x \neq 0$, por la Proposición 2.28, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\|_{n_0} \neq 0$, por tanto $|x| \neq 0$. La propiedad (b) se comprueba de forma inmediata, basta tener en cuenta que $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de seminormas, por lo que $\|x\|_n = \|-x\|_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, $|x| = |-x|$. Por último, probemos la propiedad (c). Por ser f estrictamente creciente y por la subaditividad de las seminormas y de la función f, tenemos

$$|x+y| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\|x+y\|_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\|x\|_n + \|y\|_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\|x\|_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\|y\|_n) = |x| + |y|.$$

De las propiedades (a), (b) y (c) se sigue que $d(x,y) = |x-y|$ es una métrica en V. Además, es invariante por traslaciones ya que

$$d(x+z, y+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x+z-(y+z)\|_n}{\|x+z-(y+z)\|_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{\|x-y\|_n} = d(x,y).$$

Veamos que la topología τ' inducida por la métrica coincide con τ, la topología generada por las seminormas. Sea $U = \{x \in V \,:\, |x| \leqslant 2^{-k}\}$ un entorno de cero en la topología τ'. Veamos que U contiene al conjunto $U' = \{x \in V \,:\, \|x\|_{k+1} \leqslant 2^{-(k+2)}\}$, que es un entorno de cero en la topología τ.

Si $x \in U'$, entonces por ser $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de seminormas,

$$\|x\|_0 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \cdots \leqslant \|x\|_k \leqslant \|x\|_{k+1} \leqslant 2^{-(k+2)}$$

y como $f(\|x\|_n) \leqslant \|x\|_n$, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} \leqslant \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por otro lado, como $f(x) < 1$, tenemos

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} \leqslant \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2^{-k},$$

es decir, $x \in U$.

Recíprocamente, veamos que el entorno de cero $W = \{x \in V \,:\, \|x\|_m \leqslant 2^{-k}\}$ en la topología τ contiene a $W' = \{x \in V \,:\, |x| \leqslant 2^{-(m+k+1)}\}$, que es un entorno de cero para τ'.

Si $x \in W'$,

$$\frac{1}{2^m} \frac{\|x\|_m}{1+\|x\|_m} \leqslant \frac{1}{2^{m+k+1}},$$

esto es,

$$\frac{\|x\|_m}{1+\|x\|_m} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$\|x\|_m \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leqslant \|x\|_m \left(1 - \frac{\|x\|_m}{1+\|x\|_m}\right) = \|x\|_m \frac{1}{1+\|x\|_m} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Finalmente,

$$\|x\|_m \leqslant \frac{1}{2^{k+1}-1} \leqslant \frac{1}{2^k},$$

lo que significa que $x \in W$.

Concluimos que la métrica induce la misma topología que la generada por la familia de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Sea $\left(\|\cdot\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^n}$ la familia de seminormas en $D(K)$ dada por (2.1), definiendo

$$\|f\|_k := \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \|f\|_\alpha = \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)|, \tag{2.3}$$

tenemos que $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de seminormas.

Obsérvese que esta notación no debería causar equivocación a pesar de la similitud que guarda con la familia de seminormas $\left(\|\cdot\|_p\right)_{p\in\mathbb{N}^n}$ definida en (2.1), puesto que esta última está indicada por un multi-índice (salvo en caso de que el dominio sea $\mathbb{R}$). De todos modos, en caso de ambigüedad, se aclarará la seminorma empleada.

Pasemos a enunciar y a demostrar el resultado central de la sección. Para ello, necesitamos hacer uso del siguiente teorema.

Teorema 2.32 ([2, Theorem 13 — 13]). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales derivables en cada punto de un intervalo abierto (a,b). Asumamos que en al menos un punto $x_0\in(a,b)$ la sucesión $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $f_n'\to g$ uniformemente en (a,b). Entonces:*

(a) Existe una función f tal que $f_n\to f$ uniformemente en (a,b).

(b) Para cada $x\in(a,b)$, $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$.

Teorema 2.33. *$D(K)$ es un espacio de Fréchet, con la topología generada por la sucesión de seminormas $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida en (2.3).*

Demostración. $D(K)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo ya que la topología está generada por una sucesión de seminormas. Hemos visto en el Corolario 2.29 que $D(K)$ es Hausdorff, por tanto, en virtud del Teorema 2.31, $D(K)$ es metrizable.

Por último, veamos que $D(K)$ es completo.

En la demostración del Teorema 2.31 habíamos considerado una función de clase dos y estrictamente creciente $f:[0,\infty)\to[0,1)$ dada por $f(x)=x(1+x)^{-1}$. Su función inversa $f^{-1}:[0,1)\to[0,\infty)$ existe, es continua, estrictamente creciente y viene dada por $f^{-1}(y)=y(1-y)^{-1}$.

Sean $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $D(K)$ y $\epsilon\in\mathbb{R}^+$ fijado arbitrariamente. Por la continuidad de f^{-1}, tenemos que existe $\delta\in\mathbb{R}^+$ tal que $f^{-1}(y)<\epsilon$, para todo $y\in[0,\delta)$. Sea $k\in\mathbb{N}$ fijado. Por ser $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $d\left(g_p,g_q\right)<2^{-k}\delta$ para todo $p,q\geqslant N$. Por tanto,

$$f\left(\|g_p-g_q\|_k\right)\leqslant 2^k d\left(g_p,g_q\right)\leqslant\delta$$

y, por consiguiente, $\|g_p-g_q\|_k<\epsilon$, para todo $p,q\geqslant N$.

Esto significa que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para toda seminorma $\|\cdot\|_k$, $k\in\mathbb{N}$, entendiendo que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para una seminorma $\|\cdot\|$ si para todo $\epsilon\in\mathbb{R}^+$ existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\|x_p-x_q\|<\epsilon$, para todo $p,q\geqslant m$.

Si probamos la existencia de $g\in D(K)$ tal que $\|g_n-g\|_k\to 0$, para todo $k\in\mathbb{N}$, habremos terminado. En efecto:

Supongamos que existe $g\in D(K)$ en tales condiciones. Sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-m}<2^{-1}\epsilon$ y $\widetilde{N}\in\mathbb{N}$ tal que $\|g_n-g\|_k<4^{-1}\epsilon$ para todo $n\geqslant\widetilde{N}$ y todo $k\in\{1,\dots,m\}$. Así, para todo $n\geqslant\widetilde{N}$, como $f(\|x\|_k)\leqslant\|x\|_k$ y $f(\|x\|_k)\leqslant 1$,

$$\begin{aligned} d(g_n,g) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}f(\|g_n-g\|_k)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^k}f(\|g_n-g\|_k)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}f(\|g_n-g\|_k)\\ &\leqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^k}\|g_n-g\|_k+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\leqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^k}\frac{\epsilon}{4}+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\ &=\left(2-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\epsilon}{4}+\frac{1}{2^m}<\left(2-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon-\frac{\epsilon}{2^{m+2}}<\epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, justifiquemos la existencia de $g\in D(K)$ tal que $\|g_n-g\|_k\to 0$, para todo $k\in\mathbb{N}$.

Sabemos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para toda seminorma $\|\cdot\|_k$, $k\in\mathbb{N}$. Definamos $\widetilde{g}_n=g_{n|K}$, es decir, la restricción de cada g_n al compacto K. La seminorma para $k=0$ es

$$\|h\|_0=\max_{x\in K}|h(x)|.$$

Salta a la vista que $\|\cdot\|_0$ se corresponde con la norma infinito y es bien sabido que el espacio de las funciones continuas $(\mathscr{C}(K,\mathbb{F}),\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio completo. Por lo tanto, como $(\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathscr{C}(K,\mathbb{F})$, existe $\widetilde{g}\in\mathscr{C}(K,\mathbb{F})$ tal que $(\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\widetilde{g}$ en $\mathscr{C}(K,\mathbb{F})$.

Dado $k\in\mathbb{N}$, se tiene $\|h\|_k=\max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\|h\|_\alpha=\max\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k}\max\limits_{x\in K}|\partial^\alpha h(x)|$. En particular, y como $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_k$, fijado $\epsilon\in\mathbb{R}^+$, se tiene

$$\max_{x\in K}|\partial^\alpha g_p(x)-\partial^\alpha g_q(x)|<\epsilon,$$

para todo $p,q\geqslant N$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $0\leqslant|\alpha|\leqslant k$. Repitiendo el razonamiento empleado para el caso $k=0$, llegamos a que, para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$, existe $h_\alpha\in\mathscr{C}(K,\mathbb{F})$ tal que $(\partial^\alpha\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a h_α.

Por el Teorema 2.32, como $(\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\widetilde{g}$ y $(\partial^\alpha\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a h_α, entonces $h_\alpha=\partial^\alpha\widetilde{g}$. Por tanto, hemos llegado a que existe $\widetilde{g}\in\mathscr{C}^\infty(K,\mathbb{F})$ tal que, para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $(\partial^\alpha\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\partial^\alpha\widetilde{g}$.

Finalmente, extendamos el dominio de definición de $\widetilde{g}$ a $\mathbb{R}^n$. Consideremos la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{F}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \widetilde{g}(x), & \text{si} \quad x \in K, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin K. \end{cases}$$

Puesto que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(K)$, tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sop}(g_n) \subset K$ y $\lim\limits_{x\to b} g_n(x) = 0$, donde b es cualquier punto de la frontera de K. De aquí se sigue que $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{F})$ y que $\operatorname{sop}(g) \subset K$. Por tanto, $g \in D(K)$. Además, puesto que las normas $\|\cdot\|_k$ solo tienen en cuenta los puntos de K, concluimos que $\|g_n - g\|_k \to 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Observación 2.34. Cabe destacar que la extensión de la función $\widetilde{g}$ en la demostración del Teorema 2.33 podría justificarse haciendo uso del Teorema de extensión de Whitney. Este resultado, cuya demostración puede consultarse en [37], asegura que para una función de clase m, con m finito o infinito, definida en un cerrado y satisfaciendo una condición de compatibilidad, existe una extensión que es analítica en el complementario. La idea que subyace está completamente relacionada con el Teorema de Taylor y, en cierto modo, puede considerarse como un recíproco. Se ha optado por demostrar la existencia de la extensión suave de forma explícita debido a la facilidad que supone, en este sentido, trabajar con funciones con soporte compacto.

2.3. La topología de $D(\Omega)$

Llegados a este punto, y con ánimo de ubicar al lector en el desarrollo del capítulo y justificar pasos ulteriores, hagamos una breve recapitulación. Hasta el momento, hemos probado una serie de resultados en materia de espacios vectoriales topológicos que nos han permitido dotar al espacio de funciones $D(K)$ de una topología localmente convexa, con la que es un espacio de Fréchet.

El objetivo ahora es, de alguna manera, extender las propiedades del espacio de Fréchet $D(K)$ al espacio de las funciones de clase infinito con soporte compacto definidas en un abierto. La solución pasa por equipar a este espacio con una cierta topología final, ayudándonos de los espacios definidos en la sección anterior. Esta topología dará lugar a lo que se conoce como espacio límite de Fréchet.

Al igual que en la sección anterior, desarrollaremos los resultados de esta basándonos principalmente en [19]. Introduzcamos los conceptos mencionados. Para ello, es preciso recordar primero la relación de orden "ser más fino que" para dos topologías dadas.

Definición 2.35. Sea X un conjunto y sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X. Decimos que τ_1 *es más fina que* τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$. Es decir, si todo abierto de τ_2 es un abierto de τ_1.

Se puede probar fácilmente que la definición anterior equivale a que $B_2(x) \subset B_1(x)$, para todo $x \in X$, donde $B_i(x)$ es la colección de todos los entornos de x para τ_i, con $i \in \{1,2\}$.

Definición 2.36. Sea X un conjunto y Π el conjunto de todas las topologías definidas sobre X. Definimos en Π la siguiente relación de orden:

$$\tau_1 \leqslant \tau_2 \;:\Longleftrightarrow\; \tau_1 \subset \tau_2,$$

para cualesquiera $\tau_1, \tau_2 \in \Pi$. Es decir, $\tau_1 \leqslant \tau_2$ si, y solamente si, τ_2 es más fina que τ_1.

Definición 2.37. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una familia de espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{F}$ y, para cada $\alpha \in \mathscr{A}$, sea $f_\alpha : X_\alpha \to V$ una aplicación lineal de X_α en V. Se define la *topología final* τ de V para la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ como la topología generada por la colección $\mathscr{R}$ de subconjuntos U de V absorbentes, equilibrados y convexos tales que $f_\alpha^{-1}(U)$ es un entorno de cero en X_α, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$.

Observación 2.38. Nótese que si $U \in \mathscr{R}$, entonces $\lambda U \in \mathscr{R}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Por el Corolario 2.24, sabemos que existe una única topología localmente convexa sobre V con la que $\mathscr{R}$ es una base local de cero. Por tanto, la topología final está bien definida y es localmente convexa.

En realidad, esta definición es una adaptación al caso de espacios vectoriales topológicos (véase [5]). Existe una definición más general, para espacios topológicos, que no exige la linealidad de las aplicaciones que inducen la topología final.

Por otra parte, también existen caminos alternativos para definir esta topología final localmente convexa, basados en tomar el supremo de una familia particular de topologías localmente convexas (dichas construcciones pueden consultarse tanto en [26] como en [30]).

Proposición 2.39. *Supongamos que estamos bajo las hipótesis de la Definición 2.37, entonces la topología final τ es la topología localmente convexa más fina sobre V que satisface que todas las aplicaciones lineales de la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ son continuas.*

Demostración. Supongamos que existe una topología localmente convexa τ' sobre V que cumple que f_α es continua, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$, y que además $\tau \subset \tau'$.

Como (V, τ') es un espacio localmente convexo, existe una base local de cero formada por conjuntos absorbentes, equilibrados y convexos. Por tanto, dado $U \subset V$ entorno de cero absorbente, equilibrado y convexo en (V, τ'), por la continuidad de f_α, se tiene que $f_\alpha^{-1}(U)$ es un entorno de cero en (X_α, τ_α). Concluimos que $U \in \tau$ y, por ende, $\tau = \tau'$. ■

Es decir, la topología final es la mayor topología (en el sentido de la Definición 2.36) localmente convexa que se puede definir sobre V y que hace que todas las aplicaciones de la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ sean continuas.

Exponemos ahora un resultado que será fundamental a la hora de caracterizar las distribuciones.

Proposición 2.40. *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una familia de espacios vectoriales topológicos localmente convexos sobre $\mathbb{F}$ y $f_\alpha : X_\alpha \to V$ una aplicación lineal, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$. Supongamos que V está equipado con la topología final τ para la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$. Dado W un espacio vectorial topológico localmente convexo y g una aplicación lineal de V en W, entonces g es continua para τ si, y solamente si, todas las aplicaciones $g \circ f_\alpha$ son continuas, con $\alpha \in \mathscr{A}$.*

Demostración. Necesidad: Si g es continua, entonces $g \circ f_\alpha$ es continua, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$, por ser composición de aplicaciones continuas.

Suficiencia: Supongamos que $g \circ f_\alpha : X_\alpha \to W$ es continua, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$. Sea U un entorno de cero en W equilibrado y convexo, entonces $f_\alpha^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ es un entorno de cero en X_α, para todo $\alpha \in \mathscr{A}$. Por lo tanto, atendiendo a la definición de la base local de cero de la topología final (Definición 2.37), el conjunto absorbente, equilibrado y convexo $g^{-1}(U)$ es un entorno de cero en V para τ. Concluimos que g es continua. ■

Enunciemos un lema técnico, necesario para la demostración de los siguientes teoremas.

Lema 2.41 ([19, Lemma 2.12.1]). *Sean V un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{F}$, X un subespacio de V y U un entorno convexo de cero en X. Entonces:*

(I) *Existe un entorno convexo W de cero en V tal que $X \cap W = U$.*

(II) *Si X es cerrado, se cumple que para todo $x_0 \notin X$, existe un entorno convexo W_0 de cero en V tal que $X \cap W_0 = U$ y $x_0 \notin W_0$.*

Teorema 2.42 (de Dieudonné-Schwartz). *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios vectoriales de V tal que $X_n \subset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Supongamos que cada X_n está dotado de una topología localmente convexa τ_n y que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la topología inducida por X_{n+1} en X_n es τ_n (es decir, $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ es un embebimiento). Sea τ la topología final de V para las inclusiones $f_n : X_n \hookrightarrow V$. Entonces τ induce en cada X_n la topología τ_n.*

Demostración. Sea τ_n' la topología inducida por V (con la topología τ) en X_n. Como f_n es continua, τ_n es más fina que τ_n'. (Nótese que esto se debe a que la topología inducida es la topología más pequeña que hace la inclusión continua).

Veamos ahora que τ'_n es más fina que τ_n. Recordemos que W_n es un entorno de cero en X_n con la topología inducida τ'_n si, y solamente si, existe W entorno de cero de V tal que $X_n \cap W = W_n$. Sea U_n un entorno convexo de cero en X_n para τ_n. Podemos construir una sucesión $\left(U_{n+p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$, donde U_{n+p} es un entorno convexo de cero en X_{n+p} para τ_{n+p}, $U_{n+p} \subset U_{n+p+1}$ y $X_n \cap U_{n+p} = U_n$, para todo $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$. Justifiquemos la existencia de dicha sucesión. Procedamos por inducción en p.

Para $p = 1$, por la primera parte del Lema 2.41, sabemos que existe U_{n+1} entorno convexo de cero en X_{n+1} tal que $X_n \cap U_{n+1} = U_n$, por tanto, $U_n \subset U_{n+1}$. Supongamos cierto el resultado para $p \in \mathbb{N}$, de nuevo, por la primera afirmación del Lema 2.41, existe U_{n+p+1} entorno convexo de cero en X_{n+p+1} tal que $X_{n+p} \cap U_{n+p+1} = U_{n+p}$. Con lo cual, $U_{n+p} \subset U_{n+p+1}$ y $X_n \cap U_{n+p+1} = X_n \cap X_{n+p} \cap U_{n+p+1} = X_n \cap U_{n+p} = U_n$.

Fijemos $U := \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} U_{n+p}$. Como U_{n+p} es convexo y $U_{n+p} \subset U_{n+p+1}$, para todo $p \in \mathbb{N}$, U es un conjunto convexo en V. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, $X_k \cap U$ es un entorno de cero en X_k para τ_k, es decir, U es un entorno de cero en V para τ. Finalmente, como $X_n \cap U = U_n$, tenemos que U_n es un entorno de cero en X_n para τ'_n. ■

Si las hipótesis del Teorema 2.42 se satisfacen, entonces V se suele decir que es un *límite inductivo estricto* de la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particular, si la sucesión está formada por espacios de Fréchet, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.43. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios de Fréchet tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset X_{n+1}$ y la topología de X_n coincide con la inducida por X_{n+1} en X_n y tal que $V = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sea τ la topología final de V para las inclusiones $f_n : X_n \hookrightarrow V$. Se dice que (V, τ) es un *espacio LF* o un *límite inductivo estricto de espacios de Fréchet*. La sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios de Fréchet se dice *sucesión de definición* de V.

Obsérvese que si V es un espacio LF, un subconjunto convexo $U \subset V$ es un entorno de cero en V si, y solamente si, $X_n \cap U$ es un entorno de cero en el espacio de Fréchet X_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.44. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de espacios de Fréchet tales que inducen en V una estructura de espacio LF. Se dice que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *sucesiones de definición equivalentes* si, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $Y_n \subset X_p$ y tal que la topología inducida por X_p en Y_n coincide con la propia de Y_n y existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset Y_q$ y tal que Y_q induce en X_n la topología propia de X_n.

Teorema 2.45. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ una sucesión de compactos tal que $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Si equipamos a $D(\Omega)$ con la topología final para las inclusiones $D(K_n) \hookrightarrow D(\Omega)$, se tiene que $D(\Omega)$ es* *un espacio LF. Además, esta estructura no depende de la sucesión de definición.*

Demostración. Comenzamos haciendo notar que, para todo K compacto contenido en Ω, se tiene que $D(K)$ es el subespacio vectorial de $D(\Omega)$ formado por las funciones infinitamente diferenciables con soporte contenido en K. Se tiene que $D(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} D(K)$, con K compacto. Recuérdese que en la sección anterior se demostró que $D(K)$ es un espacio de Fréchet con la topología generada por la sucesión de seminormas definida en (2.3) como

$$\|f\|_k := \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \|f\|_\alpha = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Por otra parte, si $K, K' \subset \Omega$ son dos compactos tales que $K \subset K'$, entonces $D(K) \subset D(K')$ y la topología inducida por $D(K')$ en $D(K)$ coincide con la topología propia de $D(K)$.

Definiremos ahora una sucesión creciente de compactos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenidos en Ω tal que $K_n \subset K^\circ_{n+1}$, donde K°_{n+1} denota el interior de dicho conjunto, y tal que todo compacto de Ω esté contenido en algún K_n. Definimos $K_0 = \emptyset$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$,

$$K_n = \left\{x \in \Omega \,:\, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geqslant n^{-1}\right\} \cap \{x \in \Omega \,:\, d(x, 0) \leqslant n\},$$

donde $d(\cdot,\cdot)$ es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

K_n es compacto (por ser cerrado y acotado), para todo $n \in \mathbb{N}$, y cualquier compacto de Ω está contenido en algún K_n. Ahora bien, como consecuencia de todo lo anterior, tenemos que $D(K_n) \subset D(K_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $D(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D(K_n)$. Por tanto, podemos considerar en $D(\Omega)$ la topología final τ para las inclusiones $D(K_n) \hookrightarrow D(\Omega)$ y llegamos a que $(D(\Omega), \tau)$ es un límite inductivo estricto de espacios de Fréchet, dicho de otro modo, es un espacio LF.

Por último, veamos que la estructura de espacio LF de $D(\Omega)$ no depende de la sucesión de definición. Así es:

Supongamos que existe $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de compactos contenidos en Ω tales que $X_n \subset X^\circ_{n+1}$ y tal que todo compacto de Ω está contenido en algún X_n. En este caso, dado $n \in \mathbb{N}$, por la definición de la sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset K_p$. En consecuencia, tal y como se ha visto, $D(X_n) \subset D(K_p)$ y $D(K_p)$ induce en $D(X_n)$ la topología propia de $D(X_n)$. Además, también existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $D(K_n) \subset D(X_q)$ y tal que $D(X_q)$ induce en $D(K_n)$ la topología propia de $D(K_n)$.

Obsérvese que se ha cometido un abuso de notación al considerar como sucesión de definición los compactos $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en lugar de la sucesión de espacios de Fréchet $(D(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Esto no supone ningún problema puesto que existe una correspondencia biunívoca entre un compacto K y su espacio de Fréchet $D(K)$. ∎

Definición 2.46. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. $D(\Omega)$ equipado con la topología final que lo convierte en un espacio LF se denomina *espacio de las funciones test*.

A continuación, demostraremos un conjunto de resultados que nos permitirán conocer las características básicas de los espacios LF y, de este modo, cumplir el objetivo de extender las propiedades de los espacios $D(K)$.

Corolario 2.47. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.42, si cada τ_n es una topología Hausdorff, entonces (V, τ) es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Sea $x \in V$, $x \neq 0$. Tiene que existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$. Como la topología τ_n es Hausdorff, existe un entorno U_n de cero en X_n para τ_n tal que $x \notin U_n$. Por el Teorema 2.42, como τ induce en cada X_n la topología τ_n, existe un entorno U de cero en V para τ tal que $X_n \cap U = U_n$. Por ende, $x \notin U$ y se sigue, por el Lema 2.27, que τ es una topología Hausdorff. ■

Corolario 2.48. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.42, si cada subespacio X_n es cerrado en X_{n+1} para la topología τ_{n+1}, entonces X_n es cerrado en V para τ.*

Demostración. Es evidente que X_n es cerrado en cada X_{n+q} para la topología τ_{n+q}, con $q \in \mathbb{N}$. Sea $x \in V$, $x \notin X_n$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, tal que $x \in X_{n+p}$. Como X_n es cerrado en X_{n+p}, existe un entorno U_{n+p} de cero en X_{n+p} tal que $\left(x + U_{n+p}\right) \cap X_n = \emptyset$. Ahora bien, por el Teorema 2.42, existe un entorno U de cero para la topología τ tal que $U \cap X_{n+p} = U_{n+p}$. Por tanto, $(x + U) \cap X_n = \emptyset$. Así, $V \setminus X_n$ es abierto en V para la topología τ, es decir, X_n es cerrado en V. ■

Lema 2.49. *Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ y $B \subset V$ un subconjunto de V. Entonces, B es acotado en V si, y solamente si, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y toda sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ convergente a cero, la sucesión $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en V.*

Demostración. Demostremos las dos implicaciones por separado.

- Supongamos que B es acotado y sean U un entorno equilibrado de cero en V, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en B y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión convergente a cero.

  Por ser B acotado, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $B \subset \lambda U$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \geqslant \alpha$. Equivalentemente, existe $\alpha' \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda B \subset U$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $|\lambda| \leqslant \alpha'$. Por tanto, sabemos que $\lambda x_n \in U$, para $|\lambda| \leqslant \alpha'$ y $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por la convergencia de la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cero, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n \leqslant \alpha'$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. Con lo cual, $\lambda_n x_n \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. Como U fue fijado arbitrariamente, concluimos que $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en V.

- Supongamos que B no es acotado. Entonces existe un entorno equilibrado W de cero en V tal que $B \not\subset (n+1)W$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $x_n \in B \cap (V \setminus (n+1)W)$ y $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$, llegamos a que $\lambda_n x_n \not\subset W$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que no converge a cero en V. ∎

Teorema 2.50. *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios vectoriales de V tal que $X_n \subset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Supongamos que cada X_n está dotado de una topología localmente convexa τ_n, que τ_{n+1} induce la topología τ_n en X_n y que X_n es cerrado en X_{n+1} para τ_{n+1}. Sea τ la topología final de V para las inclusiones $f_n : X_n \hookrightarrow V$. Entonces un subconjunto B de V es acotado si, y solamente si, B está contenido en algún X_n y es acotado en él.*

Demostración. Suficiencia: Si B es un conjunto acotado de X_n, con $n \in \mathbb{N}$, entonces, por la continuidad de la inclusión $f_n : X_n \hookrightarrow V$, B es acotado en V.

Necesidad: Comencemos probando que si B es acotado en V, entonces debe estar contenido en algún X_n.

Supongamos que B no está contenido en ningún subespacio X_n y tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in B \cap (V \setminus X_n)$. Luego, existe una subsucesión $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturales tales que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos $y_k \notin X_{n_k}$, $y_k \in X_{n_{k+1}}$. Por la segunda parte del Lema 2.41, existe una sucesión creciente $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos convexos tal que U_k es un entorno de cero en X_{n_k}, $U_{k+1} \cap X_{n_k} = U_k$ e $\frac{y_k}{k+1} \notin U_{k+1}$. Por tanto, $U := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ es un entorno de cero de V para τ e $\frac{y_k}{k+1} \notin U$, para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión $\left(\frac{y_k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ no converge a cero en V. Finalmente, por el Lema 2.49, B no es acotado en V.

Podemos ahora asumir que B está contenido en X_n, con $n \in \mathbb{N}$, y demostrar que es acotado en él. Si U_n es un entorno equilibrado de cero en X_n para τ_n, por el Teorema 2.42, existe un entorno equilibrado U de cero en V para τ tal que $X_n \cap U \subset U_n$. Como, por hipótesis B es acotado en V, tenemos que $B \subset \lambda U$, para algún $\lambda \in \mathbb{F}$, por tanto, $B \subset \lambda U_n$. Concluimos que B es acotado en X_n. ∎

El siguiente resultado caracteriza la completitud de los espacios LF. En su demostración, de nuevo, se ha eludido la noción de filtro, en concreto, se ha evitado emplear lo que se conoce como filtros de Cauchy.

Teorema 2.51. *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios vectoriales de V tal que $X_n \subset X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Supongamos que cada X_n está dotado de una topología localmente convexa τ_n, que τ_{n+1} induce la topología τ_n en X_n y que X_n es cerrado en X_{n+1}*

para τ_{n+1}. Sea τ la topología final de V para las inclusiones $f_n : X_n \hookrightarrow V$. Entonces V es completo si, y solamente si, para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n es completo.

Demostración. Necesidad: Por el Teorema 2.42, sabemos que τ induce en X_n la topología τ_n. Además, en virtud del Corolario 2.48, como X_n es cerrado en X_{n+1}, X_n es cerrado en V.

Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X_n$ una sucesión de Cauchy en X_n. Se tiene que también es una sucesión de Cauchy en V. Ahora bien, como V es completo, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un cierto elemento $y \in V$, en particular, $y \in \overline{X}_n$. Por ser X_n cerrado en V, $X_n = \overline{X}_n$, y tenemos que $y \in X_n$. Es decir, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en X_n. Se concluye que X_n es completo.

Suficiencia: Comencemos viendo que en espacios localmente convexos también es cierto que toda sucesión de Cauchy es acotada. En efecto, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y U un entorno convexo de cero en V. Por definición de sucesión de Cauchy en espacios vectoriales topológicos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_p - x_q \in U$, para todo $p, q \geqslant N$. En particular, $x_p \in x_N + U$, para todo $p \geqslant N$. Como el conjunto $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$ es finito, entonces es acotado. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\} \subset \lambda U$. Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_N + U) \cup \lambda U$. Es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V. Como acabamos de ver, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y, en virtud del Teorema 2.50, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está contenida en algún X_n, con $n \in \mathbb{N}$, y es acotada en él. Es decir, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X_n$. Debido a que τ induce en X_n la topología τ_n, la sucesión también es de Cauchy en X_n. Como X_n es completo, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in X_n \subset V$. Concluimos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en V y, por tanto, V es un espacio completo. ■

A continuación, presentamos un resultado que compendia las propiedades básicas de los espacios LF.

Corolario 2.52. *Sea V un espacio LF con sucesión de definición $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces V es Hausdorff, localmente convexo y completo. Además, cada X_n es cerrado en V y $B \subset V$ es acotado en V si, y solamente si, B está contenido en algún X_n y es acotado en él.*

Demostración. Recordemos que un espacio de Fréchet, por definición, es localmente convexo, metrizable y completo. Por ser metrizable, es Hausdorff. Por lo tanto, en virtud del Corolario 2.47, V es Hausdorff. Por otra parte, en la Observación 2.38 se justificó que la topología final es localmente convexa, por lo que tenemos que V es un espacio localmente convexo.

Veamos que X_n es cerrado en V. Efectivamente, como X_n es completo en X_{n+1} (ya que la topología de X_n coincide con la inducida por X_{n+1}), tenemos que X_n es cerrado en X_{n+1}. En efecto:

Consideremos una sucesión de X_n convergente a un elemento de X_{n+1}. Sabemos que esta sucesión es de Cauchy en X_n y, como X_n es completo, converge a un elemento de X_n. Además, por ser el espacio Hausdorff, el límite es único. Por tanto, X_n es cerrado en X_{n+1}. Por el Corolario 2.48, concluimos que X_n es cerrado en V.

Dicho esto, obsérvese que estamos en las hipótesis del Teorema 2.50, por tanto, un subconjunto $B \subset V$ es acotado en V si, y solamente si, B está contenido en algún X_n y es acotado en él.

Finalmente, como cada X_n es completo, en vista del Teorema 2.51, V es completo. ■

Debido a la definición de espacio de Fréchet y del resultado anterior cabe preguntarse si un espacio LF posee la tercera propiedad que caracteriza a los espacios de Fréchet, es decir, si es metrizable. La respuesta es que no todos los espacios LF son metrizables. En particular, el espacio de las funciones test, $D(\Omega)$, no lo es. Para demostrarlo es necesario definir el concepto de conjunto diseminado y enunciar el Teorema de Baire.

Definición 2.53. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. A se dice *diseminado en X* si su clausura $\overline{A}$ tiene interior vacío. Es decir, si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.

Teorema 2.54 (Teorema de Baire). *Si V es un espacio métrico completo y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados y diseminados de V, entonces $V \neq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.*

Tanto en [28] como en [35] se propone una justificación de la no metrizabilidad de $D(\Omega)$ aunque, tal vez, la más ingeniosa y elegante es la siguiente, que se puede encontrar en [10].

Teorema 2.55. *El espacio $D(\Omega)$ no es metrizable.*

Demostración. Sea $D(\Omega)$ el espacio LF con sucesión de definición $(D(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y supongamos que es metrizable. Por el Corolario 2.52, $D(\Omega)$ es completo y está formado por la unión numerable de los espacios de Fréchet $(D(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$, los cuales son cerrados y diseminados en $D(\Omega)$. Por el Teorema de Baire (Teorema 2.54), $D(\Omega) \neq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D(K_n)$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que $D(\Omega)$ es metrizable. ■

En general, una clasificación más exhaustiva de los espacios LF se puede encontrar en [25]. En dicho artículo, se presenta una condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad de un espacio LF: el espacio no puede ser la unión de una sucesión creciente de subespacios equilibrados, convexos y diseminados.

Una vez estudiada la estructura básica de los espacios LF, particularicemos sus propiedades al espacio $D(\Omega)$ de las funciones test.

Consideremos $(D(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de definición de $D(\Omega)$. Como consecuencia del Corolario 2.52, $D(\Omega)$ es Hausdorff, localmente convexo, completo e induce en cada $D(K_n)$ su topología original. Además, por el Teorema 2.55, se tiene que $D(\Omega)$ no es metrizable, es decir, $D(\Omega)$ no es un espacio de Fréchet.

Por otra parte, de nuevo por el Corolario 2.52, cada $D(K_n)$ es cerrado en $D(\Omega)$ y un conjunto $B \subset D(\Omega)$ es acotado en $D(\Omega)$ si, y solamente si, existe un compacto $K \subset \Omega$ y existe una colección $\{\epsilon_p\}_{p\in\mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}^+$ tal que toda $f \in B$ tiene su soporte contenido en K y para todo $p \in \mathbb{N}^n$, se cumple que $|\partial^p f(x)| \leqslant \epsilon_p$, para todo $x \in \Omega$.

Por último, veamos el ejemplo canónico y que mejor ilustra la noción de función test.

Ejemplo 2.56. La función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right), & \text{si } \ |x| < 1, \\ 0, & \text{si } \ x \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

es infinitamente diferenciable y su soporte es $B_{\mathbb{R}}[0,1] := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 1\}$. Es decir, ϕ es una función infinitamente diferenciable con soporte compacto, por tanto, es una función test, $f \in D(\mathbb{R})$. A continuación, en la Figura 2.1, se representa la función ϕ.

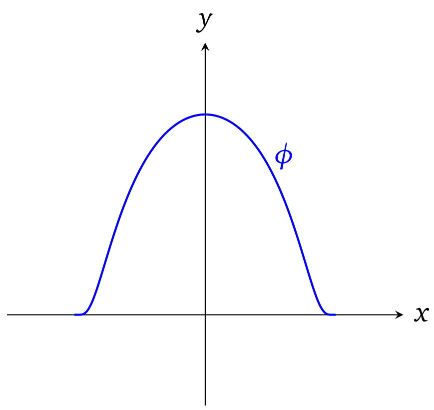

Fig. 2.1. *Representación de la función test ϕ definida en (2.4). Obsérvese como la función se desvanece cuando la norma de x se acerca a* 1.

3. El espacio de las distribuciones

Una vez construido el espacio de las funciones test, ponemos el objetivo en definir el espacio de las distribuciones. Este simplemente es el dual topológico del espacio de las funciones test. Al igual que en el capítulo anterior, comenzaremos introduciendo los conceptos necesarios para la definición y caracterización de este espacio. En este caso, se expondrán resultados básicos de la teoría de la dualidad.

Después de presentar todas las herramientas imprescindibles, se definirá el espacio de las distribuciones y se proporcionará una caracterización sumamente útil para manejarlas. Posteriormente, comprobaremos cómo las distribuciones generalizan la noción de función localmente integrable y la de medida. Finalmente, se tratarán las principales propiedades de las distribuciones, ilustradas en todo momento con ejemplos aclaratorios. En particular, veremos cómo las distribuciones extienden los principales conceptos asociados a las funciones como, por ejemplo, el soporte, la multiplicación y la diferenciación.

3.1. Preliminares

Con el objetivo de introducir adecuadamente el dual topológico, y aunque ya se ha empleado en el capítulo anterior, recordemos la definición de aplicación lineal.

Definición 3.1. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $f : V \to W$ se dice *lineal* o un *homomorfismo* de $\mathbb{F}$-espacios vectoriales si $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{F}$, $x, y \in V$. Denotaremos por $\mathrm{Hom}(V, W)$ al conjunto de aplicaciones lineales de V en W.

A continuación, se define la noción de dual algebraico. Se advierte que el concepto se ha particularizado al caso en el que el cuerpo de los escalares es $\mathbb{F}$ (es decir, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) pero la definición es totalmente válida para un cuerpo genérico.

Definición 3.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. El espacio vectorial $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ se denomina *dual algebraico* de V, donde la suma y el producto por escalares se definen a partir de la suma y el producto de $\mathbb{F}$. Es decir, se define $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para cualesquiera $f, g \in V^*$, $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Los elementos de V^* se llaman *funcionales lineales*, *covectores* o 1-*formas*.

Si $x' \in V^*$ y $x \in V$, denotamos $x'(x)$ como $\langle x', x\rangle$. De hecho, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot , \cdot \rangle : \ V^* \times V & \to & \mathbb{F} \\ (x', x) & \mapsto & \langle x', x\rangle \end{array}$$

se conoce con el nombre de *aplicación bilineal natural* o *par dualidad*. Nótese que aun cuando la notación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se corresponde con la empleada para denotar al producto escalar, estas aplicaciones son esencialmente distintas. En efecto: el producto escalar es una forma sesquilineal y únicamente está definida para $\mathbb{F}$, mientras que el par dualidad es bilineal y se puede definir sobre un cuerpo arbitrario. Además, el dominio del producto escalar es $V \times V$ y, en general, V y V^* no son isomorfos. Dicho esto, en el caso de considerar espacios prehilbertianos, existe una relación entre dichas aplicaciones (para más información al respecto, consúltese [7]).

Definición 3.3. Sea V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. Llamamos *dual topológico* de V al conjunto V' de todas las aplicaciones de V^* que son continuas, es decir, V' es el conjunto de los funcionales lineales y continuos de V.

Probemos que V' es un subespacio del dual algebraico, V^*. Para ello, es necesario un lema técnico que será útil a la hora de caracterizar las distribuciones.

Lema 3.4. *Sean V y W espacios vectoriales topológicos sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación lineal $f : V \to W$ es continua si es continua en cero.*

Demostración. Supongamos que f es continua en cero. Sea B un entorno de cero en W, por la continuidad de f en el origen, existe A entorno de cero en V tal que $f(A) \subset B$. Ahora bien, por la linealidad de f, dado $x \in V$, $f(x + A) \subset f(x) + B$. Por tanto, f es continua para todo $x \in V$. ■

Proposición 3.5. *Sea V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. El dual topológico V' es un subespacio vectorial de V^*.*

Demostración. Comencemos señalando que $V' \neq \emptyset$ ya que $0 \in V'$, donde $0 : V \to \mathbb{F}$ está dada por $\langle 0, x\rangle = 0$, para todo $x \in V$.

Sean $x', y' \in V'$. Fijado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, por ser x' e y' funcionales lineales y continuos, existen A y B entornos de cero en V satisfaciendo que $|\langle x', x\rangle| < \frac{1}{2}\epsilon$, si $x \in A$, y que $|\langle y', x\rangle| < \frac{1}{2}\epsilon$, si $x \in B$. Por tanto:

$$|\langle x' + y', x\rangle| = |\langle x', x\rangle + \langle y', x\rangle| \leqslant |\langle x', x\rangle| + |\langle y', x\rangle| < \epsilon,$$

para todo $x \in A \cap B$. Con lo cual, por el Lema 3.4, $x' + y' \in V'$.

Ahora tomemos $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x' \in V'$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda x' = 0$, por lo que $\lambda x' \in V'$. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Puesto que $x' \in V'$, existe un entorno U de cero en V tal que $|\langle x', x \rangle| < \epsilon \, |\lambda|^{-1}$, para todo $x \in U$. En consecuencia,

$$|\langle \lambda x', x \rangle| = |\lambda \langle x', x \rangle| = |\lambda| \, |\langle x', x \rangle| < \epsilon,$$

para todo $x \in U$. Se concluye que $\lambda x' \in V'$ y así V' es un subespacio vectorial de V^*. ∎

Presentemos un resultado que será primordial en el momento en el que se caractericen las distribuciones. Puesto que nos interesa exclusivamente estudiar la continuidad de funcionales lineales, se ha simplificado la siguiente proposición, inicialmente ideada para dos espacios vectoriales topológicos con topologías generadas por seminormas, al caso en el que el espacio de llegada es $\mathbb{F}$. El resultado general puede consultarse en el segundo capítulo de [19].

Proposición 3.6. *Sea V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ cuya topología está generada por una sucesión creciente de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un funcional lineal $f : V \to \mathbb{F}$ es continuo si, y solamente si, existen una seminorma $\|\cdot\|_p$ y $M \in \mathbb{R}^+$ tales que $|f(x)| \leqslant M \, \|x\|_p$, para todo $x \in V$.*

Demostración. Condición suficiente: Sea A un entorno de cero de $\mathbb{F}$. Por definición de entorno, existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que A contiene al conjunto $\{x \in \mathbb{F} : |x| \leqslant \epsilon\}$. Como, por hipótesis, $|f(x)| \leqslant M \, \|x\|_p$, para cierto $M \in \mathbb{R}^+$ y para cierta seminorma $\|\cdot\|_p$, tomando $B = \left\{x \in V : \|x\|_p \leqslant \epsilon \, M^{-1}\right\}$, se sigue que $f(B) \subset A$ (ya que $|f(x)| \leqslant M \, \|x\|_p \leqslant \epsilon$). Esto significa que f es continua en cero y, por el Lema 3.4, f es continua.

Condición necesaria: Supongamos que f es continua. De este hecho se sigue que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$ tales que si $\|x\|_n \leqslant \delta$, entonces $|f(x)| \leqslant 1$. Por tanto, se tiene que $|f(x)| \leqslant \delta^{-1} \, \|x\|_n$, para todo $x \in V$.

Así es:

- Si $\|x\|_n \neq 0$, entonces $\left| x \, \delta \, \|x\|_n^{-1} \right| = \delta$. En consecuencia, $\left| f\left(x \, \delta \, \|x\|_n^{-1} \right) \right| = \delta \, \|x\|_n^{-1} \, |f(x)| \leqslant 1$. Equivalentemente, $|f(x)| \leqslant \delta^{-1} \, \|x\|_n$.
- Si $\|x\|_n = 0$, entonces $\|\alpha x\|_n = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, $|f(\alpha x)| = \alpha \, |f(x)| \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es decir, $|f(x)| = 0$. Por ende, $|f(x)| \leqslant \delta^{-1} \, \|x\|_n$. ∎

Veamos un resultado que proporcionará una segunda caracterización de las distribuciones. Comencemos recordando la definición de aplicación secuencialmente continua.

Definición 3.7. Sean V y W espacios topológicos. Una aplicación $f : V \to W$ se dice *secuencialmente continua* si, para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ convergente a un punto $x \in V$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset$

W converge a $f(x)$ en W.

Proposición 3.8. *Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ metrizable y W un $\mathbb{F}$-espacio vectorial topológico. Una aplicación $f : V \to W$ es continua si, y solamente si, f es secuencialmente continua.*

Demostración. Condición necesaria: Si f es continua, para cualesquiera $x_0 \in V$ y A entorno de $f(x_0)$ en W, existe B entorno de x_0 en V tal que $f(B) \subset A$. En particular si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ converge a x_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$, para todo $n \geqslant N$. Por lo que, $f(x_n) \in A$, para todo $n \geqslant N$, es decir, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$ en W.

Condición suficiente: Supongamos que V es metrizable y que $f : V \to W$ no es continua. Probemos que f no puede ser secuencialmente continua.

Puesto que f no es continua, existen $x_0 \in V$ y A entorno de $f(x_0)$ en W tal que $f^{-1}(A)$ no es un entorno de x_0 en V. Consideremos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base local de cero en V decreciente, es decir, $U_{n+1} \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in x_0 + U_n$ tal que $x_n \notin f^{-1}(A)$. De este modo, hemos construido una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0 en V tal que $f(x_n) \notin A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$. Por tanto, f no es secuencialmente continua. ∎

Por último, para finalizar con estos preliminares, presentamos de forma superficial, algunas de las topologías con las que podemos equipar al dual topológico. Debido a que una introducción formal y general de la teoría de la dualidad entre espacios vectoriales topológicos tendría una extensión desmedida y quedaría fuera de los objetivos de este trabajo, se han adaptado los resultados al caso en el que se consideran los espacios V y V', con V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. Para una exposición rigurosa sobre la teoría de la dualidad, consúltese [9].

Definición 3.9. Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$, V' su dual topológico y $A \subset V$. El conjunto $A^\circ := \left\{ x' \in V' \, : \, \sup_{x\in A} |\langle x', x\rangle| \leqslant 1 \right\}$ se denomina *conjunto polar* de A.

Enunciemos las propiedades básicas que nos interesan de los conjuntos polares. Omitimos la demostración puesto que es rutinaria a partir de las definiciones involucradas.

Proposición 3.10. *Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ y $A \subset V$. Entonces el conjunto polar A° es un conjunto equilibrado y convexo de V'. Además, A° es absorbente en V' si, y solamente si, A es acotado en V.*

Observación 3.11. Sea $\mathfrak{S}$ una colección de subconjuntos acotados en V. Por la Proposición 3.10, los conjuntos polares A° de los elementos $A \in \mathfrak{S}$ forman una colección de subconjuntos de V' absorbentes, equilibrados y convexos. Por el Corolario 2.22, esta colección genera una topología localmente convexa sobre V'.

Nos encontramos en situación de definir las dos topologías principales sobre V': la topología débil y la topología fuerte.

Definición 3.12. Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ y $\mathfrak{S}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de V. Se define la *topología débil* de V' como la topología generada sobre V' por los conjuntos polares de los conjuntos de la colección $\mathfrak{S}$.

Existen otras formas de poder definir la topología débil, una de ellas se basa en generar seminormas en V' a partir del par dualidad. Véase [5].

Definición 3.13. Sean V un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$ y $\mathfrak{S}$ la colección de todos los subconjuntos acotados de V. Se define la *topología fuerte* de V' como la topología generada sobre V' por los conjuntos polares de los conjuntos de la colección $\mathfrak{S}$. También se conoce con el nombre de *topología de la convergencia uniforme en conjuntos acotados* de V.

3.2. Definición

Una vez precisada la noción de dual topológico y después de una largo camino, pasamos a definir formalmente el concepto de distribución y el espacio de distribuciones tal y como fueron formulados por Laurent Schwartz en [32].

Definición 3.14. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $D(\Omega)$ el espacio de las funciones test. Un funcional lineal y continuo de $D(\Omega)$ se dice que es una *distribución* en Ω. Su dual topológico, $D'(\Omega)$, se denomina *espacio de distribuciones*.

El espacio de distribuciones se puede equipar con la topología débil (Definición 3.12) o con la topología fuerte (Definición 3.13), cada una de ellas lleva asociada una noción de convergencia que, como veremos en una sección posterior, coinciden cuando se estudia la convergencia de sucesiones de distribuciones. De todos modos, aunque para los resultados fundamentales no supone ningún problema, se advierte al lector de que dependiendo de la bibliografía consultada, uno se puede encontrar con tres escenarios diferentes: el autor únicamente tiene en cuenta la topología débil (por ejemplo en [22]), considera exclusivamente la topología fuerte (véase [19]) o utiliza ambas topologías (consúltese [1]).

Dicho esto, enunciemos y demostremos un resultado fundamental que proporciona dos caracterizaciones de las distribuciones.

Teorema 3.15. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T : D(\Omega) \to \mathbb{F}$ un funcional lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *T es una distribución.*

(II) *Para todo $K \subset \Omega$ compacto, existen $M \in \mathbb{R}^+$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\varphi \in D(K)$,*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant N} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{3.1}$$

(III) *Si una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$ converge uniformemente a cero, así como las sucesiones de sus derivadas parciales, y existe $K \subset \Omega$ compacto tal que* sop *$\varphi_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.*

Demostración. Probaremos que (I) equivale a (II) y que (I) equivale a (III).

Para ver la primera de las equivalencias recordemos la definición de una seminorma de la sucesión creciente de seminormas en $D(K)$, con $K \subset \Omega$ compacto. Dados $f \in D(K)$ y $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_k := \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Además, tengamos presente que $D(\Omega)$ es un espacio LF y su sucesión de definición $(D(K_n))_{n \in \mathbb{N}}$ está formada por espacios de Fréchet. Por tanto, en virtud de la Proposición 2.40, un funcional lineal $T : D(\Omega) \to \mathbb{F}$ es continuo si, y solamente si, $T \circ i_{K_n} : D(K_n) \to \mathbb{F}$ es continuo, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $i_{K_n} : D(K_n) \hookrightarrow D(\Omega)$ es la inclusión.

Ahora bien, por la Proposición 3.6, cada uno de los funcionales lineales $T \circ i_{K_n}$ es continuo si, y solamente si, existen una seminorma $\|\cdot\|_N$ y $M \in \mathbb{R}^+$ tales que $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \|\varphi\|_N$, para todo $\varphi \in D(K_n)$. Empleando la definición de estas seminormas, podemos reescribir la condición anterior como:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant N} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

para todo $\varphi \in D(K_n)$.

De este modo, queda probado que (I) equivale a (II).

Por otra parte, para demostrar la segunda equivalencia, volvemos a partir del hecho de que un funcional lineal T es continuo si, y solamente si, $T \circ i_{K_n} : D(K_n) \to \mathbb{F}$ es continuo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que los espacios $D(K_n)$ son metrizables (Teorema 2.33), como consecuencia de la Proposición 3.8, $T \circ i_{K_n} : D(K_n) \to \mathbb{F}$ es continuo si, y solamente si, $T \circ i_{K_n}$ es secuencialmente continuo. Es decir, $T \circ i_{K_n}$ es continuo si, y solamente si, para toda sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(K_n)$ convergente a cero en $D(K_n)$ (esto significa que tanto la sucesión como las sucesiones de derivadas parciales convergen uniformemente a cero, por la definición de la métrica en el Teorema 2.31), la sucesión $(\langle T, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Por consiguiente, concluimos que (I) equivale a (III). ■

Observación 3.16. Recuérdese que, como se vio en el Teorema 2.55, el espacio $D(\Omega)$ no es metrizable. Dicho esto, resulta muy interesante como aparece la metrizabilidad de los espacios $D(K_n)$ en la demostración del Teorema 3.15 ((I) equivale a (III)). Así es, la prueba se basa en transformar el estudio de la continuidad de un funcional lineal de un espacio LF en analizar la continuidad de un funcional lineal de un espacio de Fréchet (es decir, un espacio metrizable, completo y localmente convexo). Finalmente, la continuidad de este funcional lineal está garantizada precisamente, en virtud de la Proposición 3.8, por la metrizabilidad de los espacios de Fréchet.

A continuación, veamos una serie de ejemplos elementales que aclararán la noción de distribución. Asumiremos que el lector es conocedor de la teoría de integración de Lebesgue. En caso contrario, puede encontrarse en [29] una introducción conveniente. Como es habitual, denotaremos por $L^p(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, el espacio normado completo de aquellas funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{F}$ tales que $\left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ es finita y donde se identifican las funciones que son iguales salvo un conjunto de medida nula.

Ejemplo 3.17. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ una función continua en Ω. Para cada $\varphi \in D(\Omega)$, la función $f\varphi$ es continua (por ser producto de dos funciones continuas) y su soporte está contenido en el soporte de φ, es decir, $\mathrm{sop}(f\varphi) \subset \mathrm{sop}(\varphi)$. De esta forma, podemos extender la función $f\varphi$ a todo $\mathbb{R}^n$ sin más que definirla como cero en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. De aquí, se sigue que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathrm{sop}(\varphi)} \max_{x\in\mathrm{sop}(\varphi)} |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Si definimos $T_f : D(\Omega) \to \mathbb{F}$ como $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, se tiene que T_f es una distribución. En efecto: acabamos de ver que la integral es siempre finita, por tanto, $\langle T_f, \varphi\rangle \in \mathbb{F}$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Además, debido a la linealidad de la integral de Lebesgue se tiene que

$$\begin{aligned}\langle T_f, \alpha\varphi + \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(\alpha\varphi(x) + \phi(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\,\langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_f, \phi\rangle,\end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{F}$, $\varphi, \phi \in D(\Omega)$. Con lo cual, T_f es lineal.

Finalmente, T_f es un funcional continuo. Así es, sea $K \subset \Omega$ compacto y $A := \max_{x\in K} |f(x)|$. Por la compacidad de K, existe $B \in \mathbb{R}^+$ tal que $K \subset L$, donde

$$L = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_i| \leqslant B, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Sea $\phi \in D(K)$, se tiene que

$$\left|\langle T_f, \phi\rangle\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\,\phi(x)|\,\mathrm{d}x \;=\; \int_L |f(x)\,\phi(x)|\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; \max_{x\in K}|f(x)|\; \max_{x\in K}|\phi(x)|\;2\,B^n$$
$$= 2\,A\,B^n \max_{x\in K}|\phi(x)|.$$

Por tanto, vemos que se cumple la afirmación (II) del Teorema 3.15 para $N=0$. Concluimos que T_f es una distribución en Ω.

El ejemplo anterior nos muestra que toda función continua f induce una distribución T_f, por lo que, en cierto modo, las distribuciones generalizan la noción de función continua. Es más, de la misma forma, las distribuciones a su vez generalizan otro tipo de función, las llamadas funciones localmente integrables. Este es el motivo por el cual las distribuciones también se conocen con el nombre de *funciones generalizadas*. Introduzcamos el concepto de función localmente integrable y demostremos la afirmación anterior.

Definición 3.18. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{F}$ una función medible. Se dice que f es *localmente integrable* si

$$\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x \;<\; \infty,$$

para todo $K \subset \Omega$ compacto. El conjunto de todas las funciones localmente integrables en Ω se denota por $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, es decir,

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ medible} \,:\, f_{|K} \in L^1(K),\ \text{para todo } K \subset \Omega,\ K \text{ compacto}\right\}.$$

Salta a la vista que cualquier función de $L^1(\Omega)$ pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, es decir, $L^1(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y que toda función continua es, también, localmente integrable. Para probar que este espacio está embebido en el espacio de distribuciones necesitamos un resultado previo cuya demostración es sencilla pero laboriosa: se basa en la existencia de una función test, no negativa y tal que su integral es uno y hace uso del teorema de diferenciación de Lebesgue. Omitimos la prueba pero, en cualquier caso, toda la construcción puede ser consultada en [24].

Teorema 3.19 ([24, Theorem 1.3]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Si $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto de Ω.*

Teorema 3.20. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. La función f genera una distribución T_f definida como*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Además, la aplicación $\Phi : L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to D'(\Omega)$ definida por $\Phi(g) = T_g$, para todo $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, es lineal e inyectiva.

Demostración. La prueba de la primera afirmación es análoga a la argumentación empleada en el Ejemplo 3.17. Obviamente, T_f está bien definido ya que $\langle T_f, \varphi\rangle < \infty$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Además, es un funcional lineal. Por último, dados $K \subset \Omega$ compacto y $\varphi \in D(K)$, se tiene

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \int_K |f(x)\,\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x \max_{x\in K}|\varphi(x)| = M \max_{x\in K}|\varphi(x)|,$$

donde $M := \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Por el Teorema 3.15, T_f es una distribución.

Pasemos ahora a probar que Φ es lineal e inyectiva.

- Φ es lineal, es decir, $\Phi(\alpha f + g) = \alpha\,\Phi(f) + \Phi(g)$, donde $\alpha \in \mathbb{F}$ y $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. En efecto:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha f + g)(\varphi) = T_{\alpha f+g}(\varphi) = \langle \alpha f + g, \varphi\rangle &= \int_\Omega (\alpha f + g)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\,\langle f, \varphi\rangle + \langle g, \varphi\rangle\\ &= \alpha\,\Phi(f)(\varphi) + \Phi(g)(\varphi),\end{aligned}$$

  donde $\varphi \in D(\Omega)$.

- Φ es inyectiva. Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que $\Phi(f) = 0$, es decir, $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Por el Teorema 3.19, $f = 0$ en casi todo punto de Ω. Por tanto, Φ es inyectiva. ■

Observación 3.21. La aplicación Φ del Teorema 3.20 es un embebimiento si dotamos al espacio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de una cierta topología con la que adquiere una estructura de espacio de Fréchet (empleando para su construcción el Teorema 2.31). Este es el motivo por el que hemos afirmado que las funciones localmente integrables están embebidas en el espacio de distribuciones.

Definición 3.22. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una distribución $T \in D'(\Omega)$ se dice que es *regular* si existe una función localmente integrable $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$. En caso contrario, se dice que T es una distribución *singular*.

Observación 3.23. Hacemos notar que se empleará la notación T_f y f indistintamente para referirse a la distribución asociada a una función f, siempre y cuando esto no lleve a confusión. De igual modo, y como veníamos haciendo, la imagen de una distribución T se denotará por $T(\phi)$ o $\langle T, \phi\rangle$ de forma indiferente.

Hasta el momento únicamente hemos considerado distribuciones regulares puesto que, por definición, todas se han definido a partir de funciones localmente integrables. Veamos que existen distribuciones singulares. El ejemplo más notable y, tal vez, ineludible es la función de Dirac. Dediquemos el siguiente apartado al análisis de este objeto.

3.2.1. La función de Dirac

La función de Dirac es un objeto matemático ampliamente utilizado en la física y en la ingeniería, en particular, en la mecánica cuántica y en la ingeniería eléctrica. Se concibió como una "función" que es nula en todo punto excepto en el origen, donde vale infinito y tal que su integral es uno. Es decir, explícitamente se tendría

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad x = 0, \\ 0, & \text{si} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

y $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Obviamente, esta función no existe pero, como veremos, tiene sentido dentro de la teoría de distribuciones. Hasta la creación de dicha teoría, los matemáticos y físicos trataban a la función de Dirac como una idealización matemática y la manipulaban de forma intuitiva. Cabe destacar que cada autor utilizaba distintas definiciones para este objeto pero, en el fondo, se trataba de la misma noción.

Para ejemplificar su importancia, resaltaremos algunos de sus ámbitos de aplicación cuando todavía no era un concepto formal. En 1822, Fourier la emplea en el estudio de sus series; se puede encontrar en la teoría de las funciones de Green; Kirchhoff fue el primero en utilizarla de forma explícita en el análisis del principio de Huygens y Heaviside la aprovecha en investigaciones sobre electromagnetismo. Consúltense [14], [15], [21] y [17], respectivamente.

Dicho esto, sin duda, el científico que más destacó en su uso fue Paul Dirac. La importancia de la "función" como herramienta en sus estudios de mecánica cuántica (por los cuales obtuvo el premio Nobel de física en 1933) provocó que este objeto pasase a identificarse con su nombre. En [11], Dirac presenta este concepto como una generalización de la delta de Kronecker. De ahí que también se denomine como función δ.

Para más información sobre la historia de la función de Dirac, se recomienda la lectura de [23].

Como se ha comentado, la función de Dirac es una idealización matemática: se puede interpretar como la concentración de una magnitud en un punto, por ejemplo, de una fuerza o una masa. Debido a esto, antes de proporcionar la definición como distribución, veamos como se caracteriza la función δ por sucesiones. Para ello, vamos a enunciar las propiedades que debería satisfacer este objeto.

Sea $a \in \mathbb{R}$. La “función” de Dirac es un objeto matemático que cumple las siguientes propiedades:

(1) $\delta(x-a) = 0$, si $x \neq a$.

(2) $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \alpha, \beta < a \quad \vee \quad a < \alpha, \beta, \\ 1, & \text{si} \quad a \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$

(3) Propiedad reproductora: $\int_{\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$, donde f es suficientemente regular.

Obsérvese que la propiedad (3) generaliza la cualidad de que la integral de la delta sea uno, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = 1$, basta tomar $f = 1$.

Dicho esto, existen sucesiones de funciones que, al tomar el límite, satisfacen la propiedad reproductora de la función de Dirac: las denominadas *sucesiones delta*. La topología débil del espacio $D'(\mathbb{R})$ es lo que subyace tras la consideración de estas sucesiones. En [1] puede encontrarse información sobre esta noción y resultados al respecto que justifican esta convergencia. Pasamos a exponer ahora una sucesión delta de cosecha propia.

Definimos, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \cos(2nx)\,n, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{-\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right], \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \left[\frac{-\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right]. \end{cases} \tag{3.2}$$

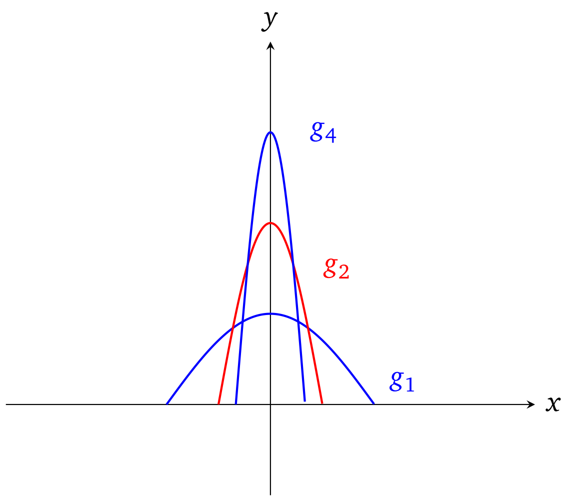

Fig. 3.1. *Representación del primer, segundo y cuarto elemento de la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en (3.2). Podemos apreciar como la sucesión se escapa hacia infinito en $x = 0$, mientras que en los demás puntos, converge a cero.*

Veamos que satisface las propiedades de la función de Dirac. Claramente,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad x = 0, \\ 0, & \text{si} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Además, $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, \mathrm{d}x = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Las funciones g_n se pueden interpretar como la distribución de una carga, puesto que su integral en la recta real es siempre uno, la carga total se mantiene constante. Por último satisface la propiedad (3), es decir, $\int_{\infty}^{\infty} g_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$. De manera informal, esto se puede justificar ya que, para cualquier $f \in D(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(0)\, \mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, (f(x) - f(0))\, \mathrm{d}x = f(0),$$

por la continuidad de f en cero y por el hecho de que la integral de las g_n sea 1.

La justificación precisa es rutinaria, basta probar que el segundo límite de la expresión anterior es cero empleando que $f \in D(\Omega)$ y, en particular, que f es continua.

Por último, proporcionemos la definición de la función de Dirac como distribución; luego, probemos que, efectivamente, se trata de un funcional lineal y continuo de $D(\Omega)$ y, finalmente, veamos que es una distribución singular.

Definición 3.24. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in \Omega$. Se define la *función de Dirac, distribución de Dirac* o *delta de Dirac* δ_a en el punto a como

$$\delta_a(\phi) = \langle \delta_a, \phi \rangle := \phi(a),$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$. Cuando $a = 0$, se denota simplemente como δ y se denomina función de Dirac.

Proposición 3.25. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in \Omega$. La función de Dirac δ_a en a es una distribución en Ω. En particular, es una distribución singular.*

Demostración. Claramente δ_a está bien definida ya que $\delta_a(\phi) = \phi(a) \in \mathbb{F}$, para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Por otra parte, δ_a es lineal. En efecto: sean $\alpha \in \mathbb{F}$ y ϕ, $\varphi \in D(\Omega)$, entonces

$$\langle \delta_a, \alpha\,\phi + \varphi \rangle := (\alpha\,\phi + \varphi)(a) = \alpha\,\phi(a) + \varphi(a) = \alpha\,\langle \delta_a, \phi \rangle + \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

Por último, para probar que δ_a es una distribución, debemos ver que es continuo. Para ello, consideremos $K \subset \Omega$ compacto y $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(K)$ una sucesión convergente uniformemente a cero. En particular, se tiene que $(\phi_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. Por tanto, la sucesión $(\delta_a(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\phi_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$

converge a cero, es decir, se cumple el enunciado (III) del Teorema 3.15. Con lo cual, en virtud de dicho teorema, δ_a es una distribución.

Demostremos que δ_a es una distribución singular. Supongamos que δ_a es una distribución regular. En ese caso, existiría $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\delta_a = T_f$. La restricción de f a $\Omega \setminus \{a\}$ tendría que ser nula en casi todo punto y, como $\{a\}$ tiene medida cero, f sería nula en casi todo punto de Ω. Por lo tanto, ya que T_f se define como $\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x$, llegaríamos a que $T_f = 0$.

Esto supone una contradicción puesto que existe $\varphi \in D(\Omega)$ tal que $\varphi(a) \neq 0$, es decir, $\delta_a \neq 0$. Concluimos que δ_a es una distribución singular. ■

Obsérvese que empleando con la distribución δ la notación que se utiliza para distribuciones regulares recuperamos la propiedad reproductora:

$$\langle \delta_a, \phi\rangle = \int_\Omega \delta(x-a)\,\phi(x)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \delta(x)\,\phi(x+a)\ \mathrm{d}x = \phi(a).$$

Al lector interesado en las propiedades de la función de Dirac desde el punto de visa de la teoría de distribuciones se le recomienda consultar [20], donde podrá encontrar incluso una interpretación de la delta como una integral de Stieltjes.

3.3. Medidas

En vista de que la función de Dirac puede interpretarse como una integral de Stieltjes, podemos preguntarnos si las distribuciones generalizan la noción de medida. La respuesta es afirmativa, en particular, podemos considerar como distribuciones las medidas de Lebesgue–Stieltjes, que pasamos a definir.

Definición 3.26. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathscr{B}$ la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos abiertos de Ω (es decir, la σ-álgebra de Borel de Ω). Una *medida de Lebesgue–Stieltjes* es una función $\mu : \Sigma \to \mathbb{F}$, donde $\mathscr{B} \subset \Sigma$ y Σ es una σ-álgebra, que satisface:

(I) $\mu(\emptyset) = 0$.

(II) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$, para todo $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(III) Si A es compacto, entonces $|\mu(A)| < \infty$.

Observación 3.27. Se ha optado por tomar la definición de medida de Lebesgue–Stieltjes de [4], ya que necesitamos que la medida sea finita en compactos. En ocasiones, alguna referencia (por ejemplo [16]) denomina a la medida de Lebesgue–Stieltjes, medida de Borel. En realidad, una medida de Lebesgue–Stieltjes es una medida de Borel que además es localmente finita (condición (III) de la Definición 3.26), por lo que se recomienda que, en caso de consultar la bibliografía, se compruebe la definición considerada.

Probemos que toda medida de Lebesgue–Stieltjes genera una distribución. Emplearemos las propiedades de la integral con respecto a una medida que, aunque en este caso coinciden con la propiedades de la teoría de integración de Lebesgue, pueden ser consultadas en [4].

Proposición 3.28. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y μ una medida de Lebesgue–Stieltjes en Ω. Entonces μ induce una distribución en Ω definida por*

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu,$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Demostración. Comencemos comprobando que el funcional está bien definido. Sea $\phi \in D(\Omega)$. Por ser una función test y empleando que la medida de Lebesgue–Stieltjes es localmente finita, tenemos que

$$\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{F}.$$

Por tanto, el funcional está bien definido.

Pasemos a probar la linealidad del funcional. Es consecuencia directa de la linealidad de la integral con respecto a una medida. Así es, sean $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\phi, \varphi \in D(\Omega)$, se tiene que

$$\langle \mu, \alpha\,\phi + \varphi \rangle = \int_\Omega (\alpha\,\phi + \varphi)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = \alpha\,\langle \mu, \phi \rangle + \langle \mu, \varphi \rangle.$$

Finalmente, veamos que el funcional lineal es continuo. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Por definición de medida de Lebesgue–Stieltjes, $|\mu(K)| = M \in \mathbb{R}^+$, por tanto, para todo $\phi \in D(K)$, se tiene que

$$|\langle \mu, \phi \rangle| \leqslant \int_\Omega |\phi| \, \mathrm{d}\mu \leqslant M \max_{x \in K} |\phi(x)|.$$

Concluimos, en virtud del Teorema 3.15, que μ induce una distribución. ■

Por último, veamos que la función de Dirac puede verse como una medida.

Ejemplo 3.29. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in \Omega$. Se define la *medida de Dirac* $\delta_a : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ para a en Ω como

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad a \in A, \\ 0, & \text{si} \quad a \notin A. \end{cases}$$

Obsérvese que, efectivamente, es una medida de Lebesgue–Stieltjes. Está bien definida ya que $\delta_a(A) \in \{0, 1\}$, para todo $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Además, $\delta_a(\emptyset) = 0$ y es localmente finita. Por último, si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ es tal que $E_k \cap E_j = \emptyset$, para todo $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$, entonces

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_a\left(E_n\right),$$

ya que, por ser una unión disjunta, a lo sumo un conjunto contiene al punto a.

Por último, sea $\phi \in D(\Omega)$, entonces:

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \, \mathrm{d}\, \delta_a = \phi(a).$$

Por lo que la distribución inducida por la medida δ_a coincide con la expuesta en la Definición 3.24.

3.4. Convergencia de distribuciones

Como hemos visto, podemos equipar el espacio de distribuciones tanto con la topología fuerte como con la topología débil. Dedicaremos esta pequeña sección a definir las nociones de convergencia (para sucesiones) sobre este espacio para ambas topologías y veremos que esencialmente son la misma.

Definición 3.30. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $D'(\Omega)$ su espacio de distribuciones equipado con la topología débil y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$ una sucesión de distribuciones. Se dice que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente a cero* si, para cada $\phi \in D(\Omega)$, $(\langle T_n, \phi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathbb{F}$.

Definición 3.31. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $D'(\Omega)$ su espacio de distribuciones equipado con la topología fuerte y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$ una sucesión de distribuciones. Se dice que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a cero* si, $(\langle T_n, \cdot \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en todo subconjunto acotado de $D(\Omega)$.

Pasamos a enunciar el resultado que nos asegura que toda sucesión de distribuciones que converge débilmente, también converge uniformemente a cero. Omitimos su demostración puesto que se necesita una ingente cantidad de resultados previos relacionados con la teoría de la dualidad y la introducción de nuevas estructuras como, por ejemplo, los espacios de Montel. La prueba del teorema, así como los preliminares necesarios, puede consultarse en [35]. Obviamente, el recíproco del siguiente resultado es cierto para cualquier dual topológico, por lo que resultan ser nociones equivalentes.

Teorema 3.32 ([35, Corollary 34.4.2]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $D'(\Omega)$ su espacio de distribuciones. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$ es una sucesión que converge débilmente a cero, entonces converge uniformemente a cero en $D'(\Omega)$.*

El Teorema 3.32 es el motivo por el que la convergencia débil, en la mayor parte de la bibliografía y habitualmente sin justificación, se denomina también *convergencia de distribuciones*.

Finalmente, enunciemos una proposición que nos garantiza la convergencia de una sucesión de distribuciones que satisface que existe el límite de la sucesión evaluada en cualquier función test.

Proposición 3.33 ([19, Proposition 4.1.2]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y supongamos que $D'(\Omega)$ está equipado con la topología fuerte. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$ una sucesión de distribuciones tal que, para todo $\phi \in D(\Omega)$, el límite $T(\phi) := \lim_{n\to\infty} T_n(\phi)$ existe. Entonces $T : D(\Omega) \to \mathbb{F}$ definido, para todo $\phi \in D(\Omega)$, como $T(\phi)$ es una distribución y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T en $D'(\Omega)$.*

3.5. Multiplicación

Una vez definidas las distribuciones y después de ver que extienden el concepto de función, parece natural preguntarse si podemos definir algún tipo de operación interna que generalice el producto de funciones. La respuesta es negativa, el producto de dos distribuciones no siempre tiene sentido, como veremos en un ejemplo posterior.

En cualquier caso, sí podemos generalizar en cierto modo el producto de funciones. Para ello, debemos considerar una función infinitamente diferenciable y una distribución. Dicho producto se define a continuación.

Definición 3.34. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $T \in D'(\Omega)$ una distribución y $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Se define el *producto de la distribución T por la función f* como el funcional $f\,T$ dado por

$$\langle f\,T, \phi \rangle = \langle T, f\,\phi \rangle,$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Veamos que, efectivamente, el producto de una distribución por una función infinitamente diferenciable es una distribución.

Proposición 3.35. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto,* $T \in D'(\Omega)$ *una distribución y* $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$*. Entonces el funcional* $f\,T$ *es una distribución en* Ω*.*

Demostración. Comencemos observando que la definición del funcional tiene sentido. En efecto, como $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ y $\phi \in D(\Omega)$, se tiene que $f\,\phi \in D(\Omega)$. Por lo tanto, puesto que T es una distribución, $\langle f\,T, \phi\rangle = \langle T, f\,\phi\rangle \in \mathbb{F}$. Es decir, $f\,T$ está bien definido. De aquí también se sigue la linealidad del funcional (por ser T lineal).

Por último, probemos que $f\,T$ es continuo. Sean $K \subset \Omega$ compacto y $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(K)$ una sucesión convergente uniformemente a cero. En estas circunstancias, la sucesión $(f\,\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, también, converge uniformemente a cero. Por tanto, en virtud del Teorema 3.15, $(\langle T, f\,\phi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. De nuevo, por el mismo teorema, $f\,T$ es una distribución. ■

Estudiemos de qué forma generaliza este producto a la multiplicación de dos funciones.

Proposición 3.36. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto,* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *y* $g \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$*. Se tiene que* $g\,T_f = T_{f\,g}$*.*

Demostración. Sea $\phi \in D(\Omega)$, entonces:

$$\langle g\,T_f, \phi\rangle = \langle T_f, g\,\phi\rangle = \int_\Omega f(x)\,(g(x)\,\phi(x))\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f(x)\,g(x))\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f\,g}, \phi\rangle.$$

Obsérvese que la última igualdad tiene sentido porque $f\,g$ es localmente integrable. ■

Ejemplo 3.37. Sean δ la función de Dirac y $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Se tiene que $f\,\delta = f(0)\,\delta$. En efecto, puesto que

$$\langle f\,\delta, \phi\rangle = \langle \delta, f\,\phi\rangle = f(0)\,\phi(0),$$

para todo $\phi \in D(\mathbb{R})$.

En la siguiente sección, en particular, en la Proposición 3.42 (IV) veremos cómo, después de definir una noción de derivada para distribuciones, la regla del producto para una función infinitamente diferenciable y una distribución se satisface.

Por último, comprobemos que no es posible definir una operación interna que extienda el producto de funciones a distribuciones. En concreto, probaremos que no siempre se satisfacen las propiedades asociativa y conmutativa.

Ejemplo 3.38. Para comprobar que el producto de dos distribuciones no siempre tiene sentido, primero vamos a definir una nueva distribución.

Comencemos viendo que, dada $\phi \in D(\mathbb{R})$, el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

existe. Así es, como ϕ es diferenciable en cero, existe $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tal que $\phi(x) = \phi(0) + x\,\psi(x)$ y $\psi(0) = \phi'(0)$. Por tener ϕ soporte compacto, podemos suponer que $\phi(x) = 0$, para $|x| \geqslant a$, con $a \in \mathbb{R}^+$. Por tanto:

$$\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \phi(0)\int_{\epsilon<|x|<a}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{\epsilon<|x|<a}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x = \phi(0)\left[\log\left(\frac{a}{\epsilon}\right) - \log\left(\frac{a}{\epsilon}\right)\right] + \int_{\epsilon<|x|<a}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{\epsilon<|x|<a}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Ahora tomando límite cuando $\epsilon \to 0$, llegamos a que la expresión tiende a $\int_{-a}^{a}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x$. Por consiguiente, el límite existe.

De este modo, para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tenemos una distribución dada por $\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$, para todo $\phi \in D(\mathbb{R})$. Obsérvese que la linealidad es inmediata y que la continuidad se tiene como consecuencia de la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x\right| \leqslant 2\log\left(\frac{a}{\epsilon}\right)\max_{x\in[-a,a]}|\phi(x)|,$$

donde $\phi \in D(K)$, con $K \subset \Omega$ compacto tal que $K \subset [-a,a]$, para cierto $a \in \mathbb{R}^+$. En consecuencia, en virtud del Teorema 3.15 (II), concluimos que es una distribución.

Finalmente, por la Proposición 3.33,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

es una distribución, que suele denominarse *valor principal de Cauchy de la integral* $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x$ y se denota por $\mathrm{v.p.}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$. Es decir,

$$\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{\mathrm{x}}, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}\,x,$$

para todo $\phi \in D(\mathbb{R})$.

Una vez introducida esta nueva distribución, veamos que no se puede extender el producto de funciones de manera que la multiplicación de distribuciones sea asociativa y conmutativa. Consideremos las distribuciones $x\,\delta$ y $x\ \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{\mathrm{x}}$. Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$, se tiene por un lado:

$$\langle x\,\delta, \phi\rangle = \langle \delta, x\,\phi\rangle = \langle 0, \phi\rangle.$$

Y por el otro lado:

$$\langle x \text{ v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}}, \phi\rangle = \langle \text{v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}}, x\,\phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \phi(x)\,\mathrm{d}\,x = \langle 1, \phi\rangle.$$

Por tanto, si el producto fuese conmutativo y asociativo, se tendría:

$$0 = 0 \text{ v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}} = (x\,\delta) \text{ v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}} = (\delta\,x) \text{v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}} = \delta\left(x \text{ v. p. } \frac{1}{\mathrm{x}}\right) = \delta.$$

Por ende, llegamos a una contradicción.

3.6. Diferenciación de distribuciones

Así como las distribuciones generalizan el concepto de función, también extienden la noción de derivada. Esta es, probablemente, la propiedad fundamental de las funciones generalizadas. Argumentemos cuál es la forma razonable de definir la derivada de una distribución. Obviamente, dicha definición ha de ser consistente con la noción que tenemos para una función usual.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ una función continuamente diferenciable y T_f su distribución asociada. Es razonable imponer que la distribución $\partial_k T_f$ esté asociada a la función continua $\partial_k f$, con $k \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $\phi \in D(\Omega)$ y veamos qué expresión se obtiene al exigir que la distribución asociada a $\partial_k f$ sea $\partial_k T_f$. Integrando por partes respecto de x_k y teniendo en cuenta que, por tener soporte compacto, $f\,\phi$ es nula fuera de un compacto contenido en Ω, se obtiene

$$\langle \partial_k T_f, \phi\rangle = \langle T_{\partial_k f}, \phi\rangle = \int_\Omega \partial_k f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}\,x \;=\; -\int_\Omega f(x)\,\partial_k\,\phi(x)\,\mathrm{d}\,x \;=\; -\langle T_f, \partial_k\,\phi\rangle.$$

Obsérvese que $\partial_k\,\phi$ es una función test, por tanto, la expresión tiene sentido desde el punto de vista de las distribuciones. Dicho esto, pasamos a definir la derivada parcial de una distribución.

Definición 3.39. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in D'(\Omega)$ una distribución. Se define la *derivada parcial k-ésima* de T como el funcional $\partial_k\,T$ dado por

$$\langle \partial_k\,T, \phi\rangle \;=\; -\langle T, \partial_k\,\phi\rangle,$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Hacemos notar que, en la práctica, la definición anterior es muy útil. Estamos transformando la cuestión de derivar un funcional lineal y continuo en un problema de derivación de una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto. Ahora, comprobemos que, efectivamente, la derivada parcial de una distribución también es una función generalizada.

Proposición 3.40. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in D'(\Omega)$ una distribución. Entonces la derivada parcial k-ésima de T, $\partial_k T$, es una distribución en Ω.*

Demostración. Comenzamos señalando que, por ser T una distribución y $\phi \in D(\Omega)$ una función test, entonces $\langle \partial_k T, \phi \rangle \in \mathbb{F}$. Es decir, la derivada parcial es un funcional bien definido.

Sean $\alpha \in \mathbb{F}$ y ϕ, $\varphi \in D(\Omega)$. Entonces, por la linealidad de la distribución T,

$$\begin{aligned}\langle \partial_k T, \alpha\,\phi + \varphi \rangle &= -\,\langle T, \partial_k\,(\alpha\,\phi + \varphi)\rangle = -\,\langle T, \alpha\,\partial_k\,\phi + \partial_k\,\varphi \rangle = -\alpha\,\langle T, \partial_k\,\phi\rangle - \langle T, \partial_k\,\varphi\rangle \\ &= \alpha\,\langle \partial_k T, \phi\rangle + \langle \partial_k T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, $\partial_k T$ es un funcional lineal.

Ahora, probemos que $\partial_k T$ es continuo. Sean $K \subset \Omega$ compacto y $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(K)$ una sucesión convergente a cero y tal que las sucesiones de sus derivadas parciales también convergen a cero. En particular, la sucesión $(\partial_k\,\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también cumple la condición anterior, luego, como T es una distribución, por el Teorema 3.15, $(\langle T, \partial_k\,\phi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Finalmente, por definición de derivada parcial k-ésima de T, $\langle \partial_k T, \phi_n\rangle = -\langle T, \partial_k\,\phi_n\rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $(\partial_k T(\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. En virtud del Teorema 3.15, concluimos que $\partial_k T$ es una distribución en Ω. ■

Repitiendo el razonamiento realizado para la derivada parcial k-ésima, podemos generalizar la definición para una derivada parcial de orden superior. Estos nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.41. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $T \in D'(\Omega)$ una distribución y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Se define la *derivada α-ésima de orden* $|\alpha|$ de T como la distribución dada por

$$\langle \partial^\alpha\,T, \phi\rangle = \langle \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}\,T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle T, \partial^\alpha\,\phi\rangle,$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

Enunciemos un resultado que reúne las propiedades básicas de la derivación de distribuciones.

Proposición 3.42. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $D'(\Omega)$ su espacio de distribuciones. Entonces se cumple que:*

(I) Toda distribución es infinitamente diferenciable.

(II) Si $f \in \mathscr{C}^m(\Omega)$, entonces sus derivadas son iguales a sus derivadas como distribuciones, en el sentido de que $\partial^\alpha\,T_f = T_{\partial^\alpha f}$, con $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$. Es decir, la derivada distribucional es una verdadera generalización de la noción de derivada usual.

(III) *El orden de derivación no afecta al resultado de la misma, es decir, si $T \in D'(\Omega)$ es una distribución y α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ son multi-índices, entonces*

$$\langle \partial^\alpha \partial^\beta T, \phi \rangle = \langle \partial^\beta \partial^\alpha T, \phi \rangle,$$

para todo $\phi \in D(\Omega)$.

(IV) *Si $T \in D'(\Omega)$ es una distribución y $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ es una función infinitamente diferenciable, se satisface*

$$\partial_k (f\, T) = \partial_k f\, T + f\, \partial_k T.$$

Demostración. (I) Es consecuencia directa de que las funciones test son infinitamente diferenciables y de la definición de derivada parcial de una distribución, ya que, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\phi \in D(\Omega)$, se tiene que $\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle$ está bien definido y es un funcional lineal y continuo.

(II) Sea $f \in \mathscr{C}^m(\Omega)$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$, se tiene que $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$. Este resultado se infiere de la argumentación realizada para justificar la definición de derivada parcial de una distribución. Así es, sea $\phi \in D(\Omega)$. Empleando integración por partes:

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha T_f, \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\, \partial^\alpha \phi(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \partial^\alpha f(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \langle T_{\partial^\alpha f}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

(III) Se sigue directamente de la definición de derivada parcial de orden superior de una distribución y de que las derivadas parciales (usuales) se pueden intercambiar. En efecto, sean $\phi \in D(\Omega)$ y α, $\beta \in \mathbb{N}^n$ multi-índices, entonces:

$$\langle \partial^\alpha \partial^\beta T, \phi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle \partial^\alpha T, \partial^\beta \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle T, \partial^\beta \partial^\alpha \phi \rangle = \langle \partial^\beta \partial^\alpha T, \phi \rangle.$$

(IV) El resultado se obtiene empleando la definición del producto de una distribución y una función, la regla del producto y la linealidad de las distribuciones. Sea $\phi \in D(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle \partial_k (f\, T), \phi \rangle &= -\ \langle f\, T, \partial_k \phi \rangle = -\langle T, f\, \partial_k \phi \rangle = -\langle T, \partial_k (f\, \phi) - \partial_k f\, \phi \rangle \\ &= -\ \langle T, \partial_k (f\, \phi) \rangle + \langle T, \partial_k f\, \phi \rangle = \langle \partial_k T, f\, \phi \rangle + \langle \partial_k f\, T, \phi \rangle \\ &= \langle f\, \partial_k T, \phi \rangle + \langle \partial_k f\, T, \phi \rangle = \langle f\, \partial_k T + \partial_k f\, T, \phi \rangle. \end{aligned}$$

■

Hacemos notar que la segunda afirmación de la Proposición 3.42 no se satisface, en general, si la derivada no existe en el sentido usual. Prueba de ello es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.43. Sea $x_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x_+(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Esta función no es diferenciable en $x = 0$ en el sentido ordinario pero vamos a ver que sí lo es en el sentido de las distribuciones. En particular, su derivada es la distribución de la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si} \quad x < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

denominada *función de Heaviside*. Dicha función es continua a trozos, por tanto, es localmente integrable, es decir, tiene una distribución asociada. Fue introducida por el físico Oliver Heaviside en el desarrollo de un cálculo operacional aplicado al electromagnetismo (consúltese [18]).

Dicho esto, veamos que la derivada de la función x_+ es la función de Heaviside, en el sentido distribucional. Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$, integrando por partes y teniendo en cuenta que ϕ tiene soporte compacto:

$$\begin{aligned} \langle x_+', \phi \rangle &= -\langle x_+, \phi' \rangle = -\int_0^\infty x\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -x\,\phi(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\infty^\infty H(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle H, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el sentido de las distribuciones, se tiene que $x_+' = H$.

Llegados a este punto, cabe preguntarse cuál es la derivada como distribución de la función de Heaviside. Realizando una exploración preliminar, observamos que la función es constante en $(-\infty, 0)$ y en $[0, \infty)$. Informalmente, el valor de la derivada en el origen debería ser infinito y, echando la vista atrás, vemos que esto se corresponde exactamente con la noción de función de Dirac. En el siguiente ejemplo comprobaremos que, efectivamente, la derivada de la función de Heaviside es la delta de Dirac.

Ejemplo 3.44. Consideremos la función de Heaviside definida en (3.3). Veamos que su derivada distribucional es la función δ de Dirac (Definición 3.24). Sea $\phi \in D(\mathbb{R})$, entonces

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0),$$

puesto que ϕ es una función test y, por tanto, su suporte es compacto. Concluimos que $H' = \delta$.

Podemos plantearnos cuál es la derivada de la función de Dirac. De nuevo, sea $\phi \in D(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0).$$

En general, para $k \in \mathbb{N}$, la derivada k-ésima de la función δ es

$$\langle \delta^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(0),$$

para todo $\phi \in D(\mathbb{R})$.

3.7. Soporte de una distribución

A continuación, y prosiguiendo con el objetivo de extender las propiedades de las funciones a las distribuciones, se definirá la noción de soporte para una función generalizada. Con este fin, comencemos observando que dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $U \subset \Omega$ abierto, podemos restringir el dominio de una distribución $T \in D'(\Omega)$ a $D(U)$, obteniendo que $T_{|U} \in D'(U)$ y, por ende, se generaliza la restricción de una función. Además, esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.45. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in D'(\Omega)$ una distribución. Se dice que T es *nula en un abierto* $U \subset \Omega$ si su restricción $T_{|U}$ es el funcional cero, es decir, si $T(\phi) = 0$, para todo $\phi \in D(U)$.

Ahora, caractericemos este concepto. Para ello, necesitamos una serie de lemas técnicos y definir el concepto de partición de la unidad, así como un resultado que garantice la existencia de la misma. Por este motivo, se ha omitido la demostración de la caracterización (que puede ser consultada junto a los resultados previos en [24]), aunque su interpretación resulta natural y coherente con la idea que subyace tras la definición de soporte de una función.

Proposición 3.46 ([24, Proposition 2.52]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y T_1, $T_2 \in D'(\Omega)$ distribuciones. Si para cada $x_0 \in \Omega$ existe $U \subset \Omega$ abierto tal que $x_0 \in U$ y satisfaciendo que $T_{1|U} = T_{2|U}$, entonces $T_1 = T_2$ en $D'(\Omega)$.*

Obsérvese que el recíproco es cierto. Por tanto, una distribución $T \in D'(\Omega)$ es nula en $U \subset \Omega$ abierto si, y solamente si, para todo $x \in U$, existe un entorno abierto V_x de x tal que $T_{|V_x} = 0$.

Pasamos a definir el soporte de una distribución.

Definición 3.47. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T \in D'(\Omega)$ una distribución. Si $U \subset \Omega$ abierto es el conjunto abierto más grande donde T es nula, entonces $\Omega \setminus U$ se dice que es el *soporte de la distribución T*

y se denota por $\operatorname{sop} T$. Además, si $\operatorname{sop} T$ es compacto, se dice que T es una *distribución con soporte compacto*.

Como consecuencia de toda la argumentación previa, la Definición 3.47 es consistente con la definición de soporte de una función. Probemos que, efectivamente, este concepto generaliza la noción de soporte. Nótese que el soporte de una distribución es, por definición, cerrado.

Proposición 3.48. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Entonces $\operatorname{sop} T_f = \operatorname{sop} f$.*

Demostración. Puesto que $f = 0$ en $\Omega \setminus \operatorname{sop} f$, se tiene que $\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, para todo $\phi \in D(\Omega \setminus \operatorname{sop} f)$. Por tanto, $\operatorname{sop} T_f \subset \operatorname{sop} f$.

Para ver la otra implicación, tomemos $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{sop} T_f$. Por la definición de soporte de una distribución, se sigue que existe un entorno abierto $U \subset \Omega$ de x_0 tal que $T_{f|U} = 0$. Por consiguiente, para todo $\phi \in D(U)$, se tiene que $\langle T_f, \phi \rangle = \int_U f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ahora, en virtud del Teorema 3.19, llegamos a que $f = 0$ en casi todo punto de U. Por tanto, $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{sop} f$. Concluimos que $\operatorname{sop} f \subset \operatorname{sop} T_f$ y, por ende, $\operatorname{sop} T_f = \operatorname{sop} f$. ■

Ejemplo 3.49. El soporte de la función de Dirac δ_a es $\operatorname{sop} \delta_a = \{a\}$. En efecto:

Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$. Por definición, se tiene que $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a) = 0$. Por tanto, como consecuencia de la Proposición 3.46, $\delta_{a|\mathbb{R}^n \setminus \{a\}} = 0$, con lo cual, $\operatorname{sop} \delta_a \subset \{a\}$.

Ahora bien, como existe $\phi \in D(U)$, donde $U \subset \Omega$ abierto, tal que $a \in U$ cumpliendo que $\phi(a) \neq 0$, entonces $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a) \neq 0$. Por ende, $\delta_{a|U} \neq 0$, es decir, $a \in \operatorname{sop} \delta_a$. Concluimos que $\operatorname{sop} \delta_a = \{a\}$.

Ponemos punto y final a este capítulo con un resultado sobre las propiedades del soporte con respecto a la suma de distribuciones y al producto por escalares.

Proposición 3.50. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $T, S \in D'(\Omega)$ distribuciones. Entonces $\operatorname{sop}(T+S) \subset \operatorname{sop} T \cup \operatorname{sop} S$ y $\operatorname{sop}(\lambda T) = \operatorname{sop} T$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.*

Demostración. Sea $\phi \in D(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{sop} \phi \subset \Omega \setminus (\operatorname{sop} T \cup \operatorname{sop} S) = (\Omega \setminus \operatorname{sop} T) \cap (\Omega \setminus \operatorname{sop} S),$$

luego $\langle T+S, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle + \langle S, \phi \rangle = 0$. Por tanto, $\Omega \setminus (\operatorname{sop} T \cup \operatorname{sop} S) \subset \Omega \setminus \operatorname{sop}(T+S)$, es decir, $\operatorname{sop}(T+S) \subset \operatorname{sop} T \cup \operatorname{sop} S$.

Por otra parte, sea $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$. Se tiene que $\operatorname{sop}(\lambda \varphi) = \operatorname{sop} \varphi$. Además, como $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \langle T, \lambda \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$, concluimos que $\operatorname{sop}(\lambda T) = \operatorname{sop} T$. ■

4. Conclusiones

En este último capítulo ofreceremos una serie de conclusiones acerca del trabajo elaborado. En primer lugar, enfatizaremos los resultados elementales vistos, poniendo en valor las aportaciones propias ya mencionadas en el desarrollo del mismo. Luego, comentaremos los temas que, por limitación espacial, han quedado fuera del trabajo, así como las teorías y ramas matemáticas que tienen como punto de partida la teoría de distribuciones. Posteriormente, también mencionaremos algunas de las principales aplicaciones de las distribuciones. No hay que olvidar que esta teoría nace por la necesidad de formalizar el cálculo diferencial y dar sentido a ciertos objetos matemáticos. Finalmente, comentaremos la bibliografía consultada, analizando algunas de las referencias más utilizadas.

4.1. Análisis general

Dedicaremos esta sección a sintetizar los resultados fundamentales presentados en el trabajo, destacando las contribuciones y conclusiones más notables.

En el Capítulo 2 teníamos como objetivo dotar al espacio $D(\Omega)$ de una topología de manera que adquiriese una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo. Para ello, consideramos los espacios $D(K)$ equipados con una topología generada por una sucesión de seminormas y, gracias a ellos, inducimos en $D(\Omega)$ lo que se conoce como topología final. Debido a esto, el segundo capítulo del trabajo se divide en dos partes: la construcción de la topología de $D(K)$ y la construcción de la topología de $D(\Omega)$. Destaquemos los resultados más importantes de cada sección.

En la primera parte, comenzamos viendo, en el Teorema 2.21, que a partir de una colección de conjuntos particular podemos generar una única topología de forma que el espacio adquiere una estructura de espacio vectorial topológico y de modo que dicha colección es una base local de cero. En este teorema embebimos la noción de filtro, por ser un objeto accesorio a la hora de construir la topología, facilitando así la comprensión del resultado. Además, en la demostración empleamos la definición de topología mediante abiertos, que se corresponde con la empleada actualmente en la mayor parte de los cursos básicos de topología general (véase [12]).

A continuación, adaptamos este teorema, mediante una serie de corolarios (Corolario 2.22 - Corolario 2.24) al caso particular en el que la colección está inducida por seminormas. Además, vimos, en el Teorema 2.31, que una sucesión creciente de seminormas induce una métrica invariante por traslaciones. En la prueba de este resultado definimos una función auxiliar subaditiva que simplifica en gran medida la demostración. Luego, definiendo en $D(K)$ una sucesión de seminormas (Lema 2.26), probamos, en el Teorema 2.33, que $D(K)$ es metrizable, completo y localmente convexo, es decir, es un espacio de Fréchet. En dicha demostración, a diferencia de la bibliografía consultada, explicitamos la prueba de la completitud del espacio haciendo uso, de nuevo, de la función subaditiva mencionada anteriormente.

En la segunda parte del capítulo, empezamos definiendo la topología final (Definición 2.37) para una familia de aplicaciones lineales cuyos dominios son espacios vectoriales topológicos. Como consecuencia de los resultados de la primera parte, llegamos a que esta topología es localmente convexa. Posteriormente, en el Teorema 2.42, vimos que en el caso de considerar una sucesión creciente de subespacios de manera que su unión es todo el espacio, la topología final para las inclusiones induce en cada subespacio su propia topología. En la prueba de este resultado, aclaramos afirmaciones que en las referencias pueden llevar a confusión.

Después de definir la noción de espacio LF (Definición 2.43), demostramos que $D(\Omega)$ puede adquirir la estructura de espacio límite inductivo de espacios de Fréchet (Teorema 2.45). En particular, en la prueba comprobamos que dicha estructura no depende de la sucesión de definición. Finalmente, el resto del capítulo lo dedicamos a estudiar las propiedades de los espacios LF (en particular, las del espacio $D(\Omega)$) que se compendian en el Corolario 2.52. Además, probamos que $D(\Omega)$ no es metrizable (Teorema 2.55) y, por tanto, no es un espacio de Fréchet.

El Capítulo 3 se dedicó al análisis del espacio de distribuciones. Se definió una distribución como un elemento del dual topológico de $D(\Omega)$ (Definición 3.14) y, en el Teorema 3.15, se presentaron dos caracterizaciones. De esta demostración se extrajo una observación significativa sobre la metrizabilidad de los espacios $D(K)$ y la continuidad de un funcional lineal (Observación 3.16). A continuación, en el Teorema 3.20, justificamos que las distribuciones también se llamen funciones generalizadas demostrando que toda función localmente integrable induce una distribución.

Luego, dedicamos un apartado al estudio de la función de Dirac donde, entre otras cosas, construimos una sucesión propia que satisface las propiedades de la delta de Dirac y probamos que este objeto era precisamente una distribución singular (Proposición 3.25). Todo esto nos llevó a estudiar cómo las medidas de Lebesgue–Stieltjes (Definición 3.26) inducen distribuciones (Proposición 3.28).

Una vez definidas las distribuciones y después de ver que generalizan tanto funciones como medidas, pasamos a extender algunas propiedades de las funciones. Comenzamos viendo que se puede definir el producto de una función infinitamente diferenciable y una distribución (Definición 3.34) pero que no siempre tiene sentido el producto de dos distribuciones (Ejemplo 3.37). Posteriormente, comprobamos que se puede generalizar el concepto de derivada a distribuciones (Definición 3.47) y verificamos algunas de sus propiedades fundamentales (Proposición 3.42). Por último, extendimos la noción de soporte a distribuciones (Definición 3.47) y, en la Proposición 3.48, comprobamos que la definición es consistente con la existente para funciones.

Entremedias, se dedicó una breve sección a definir la noción de convergencia débil (Definición 3.30) y la noción de convergencia fuerte (Definición 3.31) en $D(\Omega)$. En particular, probamos que, aunque la topología fuerte y la débil no son la misma, en el espacio $D(\Omega)$ las nociones de convergencia asociadas para sucesiones coinciden (Teorema 3.32). Este resultado está detrás del hecho de que en casi toda la bibliografía se utilice la convergencia débil y apenas se haga referencia a la topología fuerte del espacio de distribuciones.

Como se puede observar, el trabajo se divide en dos partes diferentes.

Por un lado, el Capítulo 2 se puede enmarcar dentro del análisis funcional, en particular, dentro de la teoría de espacios vectoriales topológicos localmente convexos. En él, presentamos un gran número de resultados de cierta dificultad conceptual con el objetivo de justificar, de la forma más rigurosa posible, la definición del espacio de distribuciones y su caracterización. La construcción de dicho espacio sirve, en cierto modo, de pretexto para presentar y estudiar algunas de las propiedades básicas de los espacios LF. Por tanto, el capítulo puede considerarse, a su vez, como una introducción a la teoría de espacios vectoriales topológicos.

Cabe destacar que en la mayor parte de las referencias, la definición de distribución es axiomática, es decir, se toma como definición de funcional lineal y continuo en $D(\Omega)$ una de las dos caracterizaciones del Teorema 3.15.

Por otra parte, el contenido del Capítulo 3 se acerca más al cálculo. Después de caracterizar las distribuciones, dejamos de lado la estructura matemática que subyace, para centrarnos en sus propiedades y en las analogías existentes entre ellas y las funciones. En realidad, este giro copernicano en la exposición del trabajo responde a dos motivos importantes. En primer lugar, un estudio formal del espacio de distribuciones requiere introducir herramientas tan complejas que su presentación abarcaría gran parte del trabajo. En segundo lugar, y siguiendo con lo anterior, consideramos que en una introducción a la teoría de distribuciones es esencial analizar las principales propiedades de las funciones que se generalizan.

4.2. Ampliación de contenidos

Puesto que la extensión del trabajo está limitada y se ha optado por hacer una construcción rigurosa del espacio de distribuciones, la exposición de algunas cuestiones ha sido omitida. Este es el motivo por el cual dedicaremos la sección a comentar estos temas, ofreciendo al lector las referencias oportunas.

El primer concepto que se debería estudiar es el de orden de una distribución. Para ello, es necesario introducir los espacios $D^m(\Omega)$, con m finito. Su construcción es análoga a la de los espacios $D(\Omega)$: comenzamos definiendo los espacios $D^m(K)$, que en este caso son normables, e inducimos en $D^m(\Omega)$ una estructura de espacio LF. Además, cada $D^m(\Omega)$ tiene asociado su propio espacio de distribuciones (su dual topológico, $D'^m(\Omega)$). La construcción rigurosa de estos espacios, así como las relaciones (en términos de inclusiones) con el espacio $D(\Omega)$ puede consultarse tanto en [19] como en [35].

Una vez introducidos estos espacios, se dice que una distribución es de *orden m* si pertenece a $D'^m(\Omega)$ pero no a $D'^{m-1}(\Omega)$. También se puede definir como el natural más pequeño que satisface la ecuación (3.1) del Teorema 3.15. Esta es la definición más común en la bibliografía, por ejemplo, se define de este modo en [36] y en [22]. Dicho esto, para el tema en cuestión, recomendamos la lectura de [19] donde, entre otros resultados, se verá que toda distribución con soporte compacto es de orden finito y que una distribución es de orden cero si, y solamente si, es una medida de Lebesgue–Stieltjes.

Otro espacio de distribuciones importante es el espacio de las distribuciones temperadas, $\mathscr{S}'$. Este espacio es el dual topológico del espacio de Schwartz (o espacio de las funciones de decrecimiento rápido), $\mathscr{S}$, el cual está formado por las funciones infinitamente diferenciables tales que la norma del supremo de la función y de todas sus derivadas multiplicadas por cualquier monomio tiende a cero. Toda función test pertenece al espacio de Schwartz y, por dualidad, toda distribución temperada es un distribución en el sentido de la Definición 3.14. Un estudio formal de este espacio puede encontrarse en [35].

La relevancia de las distribuciones temperadas reside en que permiten generalizar la transformada de Fourier a distribuciones de forma que esta define un isomorfismo entre $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. El estudio de la transformada de Fourier se engloba dentro del análisis armónico y sus aplicaciones son innumerables. Podemos encontrarla tanto en la teoría de números como en el estudio del procesamiento de señales. Remitimos al lector a [20] en caso de estar interesado en los resultados básicos que involucran a las distribuciones temperadas y a la transformada de Fourier y recomendamos [27], en caso de que se busque un estudio en profundidad de la transformada de Fourier desde el punto de vista de las distribuciones.

Otro objeto estrechamente ligado a las distribuciones (y a la transformada de Fourier) es la convolución. Se trata de un operador que transforma dos funciones en una nueva función mediante la integral del producto de una por una traslación de la otra. Tiene una gran cantidad de aplicaciones, destacando, por ejemplo, sus aplicaciones en física y en estadística. Dicho esto, la convolución se puede extender al caso en el que se consideran dos distribuciones, generalizando así esta noción. Para más información sobre la convolución para distribuciones y sus propiedades, véase [3].

Las distribuciones también extienden lo que se conoce como transformada de Laplace. Aunque no vamos a entrar en detalles, ni vamos a definila, señalamos que este objeto tiene muchas aplicaciones en la física y en la ingeniería. Recomendamos [20] para una introducción sobre la relación entra la transformada de Laplace y las distribuciones; mientras que, para un análisis más formal, sería conveniente consultar [31].

No propondremos más temas porque, aunque la teoría es inmensa, estamos seguros de que el lector interesado en la materia, una vez haya consultado las referencias recomendadas, será capaz de elegir su próxima lectura.

4.3. Aplicaciones

En esta sección, comentaremos, de modo somero, las principales aplicaciones de la teoría de distribuciones.

En la sección anterior hemos visto que las distribuciones generalizan la convolución y las transformadas de Fourier y de Laplace. Por tanto, es evidente la importancia de esta teoría en la física, la ingeniería, la teoría de números, etc. Además, en el Capítulo 3, formalizamos la noción de función de Dirac y sus derivadas distribucionales, con lo cual, como la delta de Dirac es una de las claves en la mecánica cuántica, las distribuciones permiten justificar y facilitar los cálculos y los razonamientos que se consideraban informales en este campo.

Del mismo modo, las distribuciones permiten resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales, en un sentido más general que el ordinario. Por ejemplo, cuando existen discontinuidades. Un análisis muy detallado de estos temas puede encontrase tanto en [20] (donde incluso se expone una aplicación de las distribuciones a la economía) como en [24].

Recomendamos la lectura de [8] por tratarse de una obra que compila las principales aplicaciones de la teoría de distribuciones, de manera ciertamente informal y de fácil comprensión.

4.4. Bibliografía consultada

Por último, comentaremos brevemente la bibliografía empleada. El punto de partida fue la lectura de [34], el cual ofrece una introducción a la teoría informal pero reveladora (en esta línea, pero más riguroso, también podríamos recomendar [13]). Luego, una vez estructurado el trabajo y después de haber consultado la obra que dio origen a las distribuciones, es decir, [32], pasamos a construir rigurosamente el espacio de distribuciones. Para ello, empleamos esencialmente [19] y [35], aunque en este último, la formalización de los espacios LF no fue de nuestro agrado. En el Capítulo 2, también empleamos, pero en menor medida y más bien como bibliografía de apoyo para contrastar definiciones, resultados y sentar unas bases sólidas [2, 5, 6, 9, 10, 25, 26, 28–30, 37].

Para el tercer capítulo, puesto que los temas tratados se incluyen en la mayor parte de las referencias sobre distribuciones, no podemos destacar ninguna obra por encima de las demás. La elaboración de esta parte se fundamentó en la lectura de [1, 13, 19, 20, 22, 24, 32, 36]. También podemos mencionar las referencias auxiliares empleadas en este capítulo, en su mayoría sobre teoría de la medida e integración [4, 7, 11, 16].

Finalmente, para la elaboración de la introducción fueron consultadas [23, 33].

Bibliografía

[1] Al-Gwaiz, M.: Theory of Distributions. CRC Press (1992)

[2] Apostol, T.M.: Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus. Addison-Wesley (1957)

[3] Blanchard, P., Brüning, E.: Mathematical Methods in Physics. Springer (2015)

[4] Bogachev, V.I.: Measure Theory. Springer (2007)

[5] Bourbaki, N.: Topological Vector Spaces. Chapters 1–5. Springer (1987)

[6] Bourbaki, N.: Topologie Générale. Chapitres 1-4. Springer (2007)

[7] Clason, C.: Introduction to Functional Analysis. Springer (2020)

[8] Cristescu, R., Marinescu, G.: Aplications of the Theory of Distributions. John Wiley & Sons (1973)

[9] Dieudonné, J.: *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*. Annales scientifiques de l'École normale supérieure **59**, 107–139 (1942)

[10] Dieudonné, J., Schwartz, L.: *La dualité dans les espaces* $(\mathscr{F})$ *et* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Annales de l'institut Fourier **1**, 61–101 (1949)

[11] Dirac, P.A.M.: *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **113**(765), 621–641 (1927)

[12] Dugundji, J.: Topology. Allyn and Bacon (1966)

[13] F. G. Friedlander, M.J.: Introduction to the Theory of Distributions. Cambridge University Press (2003)

[14] Fourier, J.B.J.: Théorie Analytique de la Chaleur. Firmin Didot (1822)

[15] Green, G.: An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham (1828)

[16] Halmos, P.R.: Measure Theory. Springer (1950)

[17] Heaviside, O.: *On Operators in Physical Mathematics*. Proceedings of the Royal Society of London **52**(315-320), 504–529 (1893)

[18] Heaviside, O.: Electromagnetic Theory, vol. II. The Electrician (1899)

[19] Horváth, J.: Topological Vector Spaces and Distributions. Addison-Wesley (1966)

[20] Kanwal, R.P.: Generalized Functions. Birkhäuser (2004)

[21] Kirchhoff, G.: *Zur Theorie der Lichtstrahlen*. Annalen der Physik **254**(4), 663–695 (1883)

[22] Kolk, J.A., Duistermaat, J.J.: Distributions: Theory and Applications. Springer (2010)

[23] Lützen, J.: The Prehistory of the Theory of Distributions. Springer (1982)

[24] Mitrea, D.: Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis. Springer (2018)

[25] Narayanaswami, P.P., Saxon, S.A.: *(LF)-spaces, quasi-baire spaces and the strongest locally convex topology*. Mathematische Annalen **274**(4), 627–641 (1986)

[26] Narici, L., Beckenstein, E.: Topological Vector Spaces. CRC Press (2011)

[27] Rahman, M.M.: Applications of Fourier Transforms to Generalized Functions. WIT Press (2011)

[28] Rudin, W.: Functional Analysis. McGraw-Hill (1973)

[29] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill (1986)

[30] Schaefer, H.H.: Topological Vector Spaces. Springer (1971)

[31] Schwartz, L.: *Transformation de Laplace des distributions*. Séminaire Mathématique de l'Université de Lund, Tome Supplémentaire, 196-206 (1952)

[32] Schwartz, L.: Théorie des Distributions. Hermann (1973)

[33] Schwartz, L.: Un Mathématicien aux Prises avec le Siècle. Odile Jacob (1997)

[34] Strichartz, R.S.: A Guide To Distribution Theory And Fourier Transforms. CRC Press (2003)

[35] Treves, F.: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press (1967)

[36] Vladimirov, V.S.: Methods of the Theory of Generalized Functions. CRC Press (2002)

[37] Whitney, H.: *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. Transactions of the American Mathematical Society **36**(1), 63–89 (1934)

Índice alfabético