



ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL
DE LA USC

Eduardo
Loureiro Novo

Tesis doctoral

Dualidad, álgebras diferenciales
graduadas y soporte

Santiago de Compostela, 2025



ESCOLA DE DOUTORAMENTO
INTERNACIONAL DA USC

TESIS DOCTORAL

Dualidad, álgebras diferenciales graduadas y soportes

Autor

Eduardo Loureiro Novo

Directores: Leovigildo Alonso Tarrío e Ana Jeremías López

Tutora: Ana Jeremías López

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE COMPOSTELA–2025



El doctorando declara no tener ningún conflicto de interés en relación con la tesis doctoral.

Para la realización de esta tesis el autor contó con el apoyo del Grupo de Referencia Competitiva (GRC) ED431C 2019/10, financiado por la Consellería de Cultura, Educación e Universidade de la Xunta de Galicia, y del proyecto MTM2017-89830-P, del Ministerio de Economía y Competitividad; los dos financiados con fondos FEDER Europeos.



Agradecementos

Primeiro de todo, gracias aos meus titores Leo e Ana pola vosa dirección, este traballo é tanto voso coma meu. Gracias tamén a Rosa, por introducirme no mundo das matemáticas e apoiarme todos estes anos.

Á miña familia e aos meus amigos, se non fose por vos non tería rematado isto coa cabeza no seu sitio. En especial a ti Lucía, por manterme con forza cando as cousas parecían non avanzar.

E por sempre, gracias miña nai, por todo o que fixeches por min.

Índice general

Resumen	VII
1. Introducción	1
2. Hipótesis y objetivos	13
3. Metodología	15
Resultados y discusión	17
4. Preliminares generales	19
4.1. Categorías trianguladas	20
4.2. Categoría homotópica de una categoría abeliana	26
4.3. Categoría derivada de una categoría abeliana	33
4.4. Funtores triangulados entre categorías derivadas	41
4.5. Categoría derivada de una categoría monoidal	46
4.6. Localizaciones de Bousfield	48
5. Operaciones cohomológicas con coeficientes cuasicoherentes	53
5.1. Estructura monoidal cerrada de categorías de haces de módulos	53
5.2. Funtores imagen directa e inversa	57
5.3. Complejos de módulos con cohomología cuasi-coherente	60
5.4. Funtores imagen directa e inversa y coeficientes cuasicoherentes.	63
5.5. Subcategorías localizantes y colocalizantes y coeficientes cuasi-coherentes	68

6. Subcategorías localizantes y colocalizantes en esquemas	71
6.1. Esquemas generados por puntos	72
6.2. Subcategorías localizantes determinadas por puntos de un esquema	77
6.3. Subcategorías colocalizantes determinadas por puntos de un esquema	82
6.4. Ejemplos: Soporte y esquemas generados por puntos	89
7. Contexto diferencial graduado	95
7.1. Álgebras y módulos diferenciales graduados	95
7.2. Categoría derivada de una DG-álgebra	101
7.3. Funtores asociados a morfismos de DG-álgebras	107
7.4. Categorías derivadas de DG-álgebras débilmente conmutativas	108
8. Subcategorías localizantes y colocalizantes en categorías de DG-módulos	113
8.1. Esquema afín de una DG-álgebra conmutativa	113
8.2. Cuerpos residuales y soportes	115
8.3. Subcategorías localizantes	117
8.4. Subcategorías colocalizantes	124
8.5. Propiedades de los funtores $\mathbf{L}r^*$ y r^\times	128
9. Dualidad para DG-álgebras	133
9.1. DG-álgebras cohomológicamente noetherianas	134
9.2. Cambio de base para el pseudofunctor $(-)^{\times}$	135
9.3. Imagen inversa excepcional en DG-álgebras	140
9.4. Imagen inversa excepcional y cambio de base	147
9.5. El pseudofunctor imagen inversa excepcional	151
9.6. Imagen inversa excepcional mediante complejos dualizantes	161
Conclusiones	169
Bibliografía	171

Resumen

En esta tesis abordamos la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes en categorías derivadas que surgen de modo natural en geometría algebraica y álgebra conmutativa derivada.

En el contexto de la geometría algebraica, establecemos la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes en la categoría derivada de haces de módulos con cohomología cuasi-coherente sobre un esquema concentrado *generado por puntos*. La clasificación viene dada por los subconjuntos del espacio topológico subyacente del esquema. Los esquemas noetherianos están generados por puntos, por tanto nuestra propuesta extiende resultados clásicos de A. Neeman para anillos noetherianos.

En el contexto del álgebra derivada, obtenemos la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada conmutativa de amplitud finita, cuya cohomología 0-ésima es un anillo generado por puntos. Construimos el funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos de álgebras diferenciales graduadas conmutativas, basándonos en la expresión del funtor en el contexto de esquemas. Como aplicación de la clasificación de las subcategorías localizantes demostramos las propiedades del nuevo funtor imagen inversa excepcional y comprobamos que, para morfismos planos, se corresponde y generaliza una propuesta previa de L. Shaul.

Introducción

Las categorías derivadas tienen su origen en la escuela de Geometría Algebraica de Grothendieck. Surgen como resultado de la búsqueda del contexto adecuado para el lenguaje de álgebra homológica requerido por los nuevos resultados en cohomología de haces desarrollados por esta escuela. Los fundamentos de esta teoría están contenidos en la tesis de Verdier [V].

La impresión inicial era que la categoría derivada de haces cuasicoherentes sobre un esquema X reflejaba sólo una información parcial del esquema. Sin embargo, en [N1] Neeman establece, siguiendo las ideas previas de Hopkins, que la categoría derivada detecta los puntos de un esquema afín noetheriano y, a través de las subcategorías localizantes, la topología subyacente. Este resultado fue extendido al contexto de esquemas noetherianos por Alonso, Jeremías y Souto en [AJS2]. Posteriormente, en [B], Balmer probó que si se añade a la categoría derivada asociada a un esquema su estructura tensorial, es posible reconstruir el esquema, tanto el espacio subyacente como el haz estructural, a partir de la categoría derivada de los complejos perfectos. Este resultado generaliza y extiende los de Bondal y Orlov [BO], que reconstruyen una variedad proyectiva lisa a partir de su categoría derivada, suponiendo que el haz canónico es amplio o antiample. De esta propiedad se entiende, a la luz del resultado de Balmer, que bajo estas hipótesis la estructura monoidal está determinada, cosa que no sucede, por ejemplo, en el caso Calabi-Yau.

En los resultados de reconstrucción de Balmer aparecen de forma natural las subcategorías localizantes de la categoría derivada de haces de módulos cuasicoherentes sobre el esquema, es decir, las subcategorías trianguladas estables por coproductos. Son subcategorías localizantes asociadas a objetos compactos. Esta clase de subcategorías poseen una característica esencial, determinan

un contexto de *localización de Bousfield*, es decir, el funtor inclusión de la subcategoría localizante en la categoría ambiente posee adjunto por la derecha. La determinación de este tipo de contextos de localización, que históricamente se origina en el marco de la teoría de homotopía, se desarrolla de forma paralela al caso topológico [Bou]. Desde este punto de vista, Neeman establece en [N1] una biyección entre las subcategorías localizantes de la categoría derivada de los haces de módulos cuasicoherentes de un esquema *afín* noetheriano y los subconjuntos de puntos del espacio topológico del esquema. Este resultado fue generalizado en [AJS2] a esquemas noetherianos restringiendo la clasificación a las subcategorías localizantes que se comportan bien con la estructura monoidal de la categoría derivada. En [AJS2], además de recuperar en el caso afín la clasificación propuesta por Neeman, se demuestra que las subcategorías localizantes de la categoría derivada un anillo noetheriano se corresponden con las localizaciones de Bousfield.

Por razones formales, dada una subcategoría localizante asociada a un contexto de localización, su ortogonal por la derecha es una subcategoría colocalizante, es decir, una subcategoría triangulada estable por productos, y, además, el correspondiente funtor inclusión posee adjunto a la izquierda. Cabe preguntarse entonces si son éstas todas las subcategorías colocalizantes de la categoría derivada de un anillo noetheriano. Neeman responde a esta pregunta en [N5], un trabajo publicado en 2011, concluyendo que éstas son las únicas subcategorías colocalizantes de la categoría derivada de un anillo noetheriano. Sus argumentos son delicados, apelando a la dualidad entre la cohomología y la homología local. Además, en el caso de anillos noetherianos de dimensión de Krull no finita, Neeman hace uso en su demostración de un argumento de inducción transfinita en el que emplea límites homotópicos no numerables.

Surge así la cuestión de cómo puede ser extendida la clasificación de las subcategorías colocalizantes al contexto de esquemas noetherianos más generales. La clasificación de las subcategorías localizantes para un esquema noetheriano, desarrollada en [AJS2], se ciñe a aquellas subcategorías localizantes que son \otimes -ideales. Esta condición, que se satisface automáticamente cuando el esquema es el espectro de un anillo, en el caso de esquemas generales, delimita las que podríamos denominar localizaciones de origen geométrico. La condición relativa para una subcategoría colocalizante es la de ser una subcategoría \mathcal{H} -coideal, que es la condición correspondiente a la de las categorías localizantes donde la estructura multiplicativa dada por el producto tensor se sustituye por la estructura determinada por su adjunto, el Hom interno. De esta manera, para

cada esquema noetheriano X , una colección de puntos del esquema determina (y está determinada) por el \otimes -ideal localizante de la categoría derivada del esquema dado por los haces en X asociados a los cuerpos residuales de los puntos. Tomando las subcategorías ortogonales por la derecha, el resultado de Alonso et al. en [AJS2] proporciona subcategorías colocalizantes que son \mathcal{H} -coideales. Demostrar que las subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales de la categoría derivada de haces cuasicoherentes sobre un esquema noetheriano X son de esta forma, fue uno de los objetivos iniciales de nuestro trabajo. Para su consecución, desarrollamos una estrategia distinta de la empleada en [N5] al observar que la hipótesis noetheriana sobre el esquema X intervenía en un hecho clave:

«la categoría derivada de los complejos de haces de módulos cuasicoherentes sobre el esquema está generada, como subcategoría localizante de su categoría derivada, por los haces asociados a los cuerpos residuales de los puntos del esquema».

Establecemos que un esquema está *generado por puntos* si verifica la condición señalada. Esta condición es necesaria para establecer la clasificación de las subcategorías localizantes utilizando los puntos del esquema. Cualquier esquema noetheriano está generado por puntos, pero no todo esquema generado por puntos es noetheriano (véase la sección 6.4 en esta memoria). Existen ejemplos de anillos no noetherianos cuyo esquema afin asociado está generado por puntos. Stevenson, en [St], ha determinado una amplia clase de anillos que verifican esta propiedad. Por otro lado, esta condición no siempre se verifica, como lo atestiguan los ejemplos clásicos de Neeman [N4] y Keller [K2].

Dedicamos la primera parte de esta memoria a establecer la clasificación de ambos tipos de subcategorías, localizantes y colocalizantes, de la categoría derivada de complejos de haces de módulos con cohomología cuasicoherente sobre un esquema cuasicompacto y cuasiseparado generado por punto. Nuestra propuesta, completamente diferente a la de Neeman, permite deducir directamente la clasificación de las subcategorías localizantes \otimes -ideales y de las subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales para esquemas generales. Los resultados de clasificación obtenidos, para ambos tipos de subcategorías, se aplican para una clase más amplia de esquemas que los noetherianos y, sin embargo, nuestras demostraciones son más directas que las anteriormente conocidas, que hacían uso de la hipótesis noetheriana como elemento esencial en sus argumentos.

Una de las aplicaciones de la clasificación de las categorías localizantes, en el contexto de la dualidad de Grothendieck, es una propuesta alternativa para la expresión del funtor imagen inversa excepcional sugerida en [ILN] para morfismos planos de esquemas. El estudio de esta propuesta como definición del funtor imagen inversa excepcional de un morfismo plano de esquemas, fue el trabajo de investigación desarrollado por Khusyairi en su tesis de doctorado [Kh], realizada bajo la dirección de Neeman. La nueva definición del funtor imagen inversa excepcional es intrínseca, sin apelar al uso de compactificaciones como en la definición tradicional. En su trabajo, Khusyairi demuestra que la nueva construcción propuesta para el funtor imagen inversa excepcional, definido sobre la clase de morfismos planos y esencialmente de tipo finito de esquemas noetherianos, verifica las propiedades habituales de pseudofuntorialidad y cambio de base, y que para morfismos propios es adjunto por la derecha del derivado de la imagen directa.

Por otro lado, desarrollos recientes en la teoría de la dualidad de Grothendieck han llevado a la consideración del estudio de la dualidad en la geometría algebraica derivada. En este sentido, los métodos de las categorías superiores han irrumpido con fuerza en geometría algebraica. Un modelo inicial son las álgebras diferenciales graduadas [YZ, AILN]. Las álgebras diferenciales aparecen de formas diversas en el contexto geométrico, pero en geometría derivada son especialmente útiles las concentradas en grados no positivos. Estas álgebras se interpretan como una deformación derivada proporcionada por el ideal de paso al cociente del álgebra a su cohomología 0-ésima.

Muchos resultados sobre categorías derivadas de anillos conmutativos se extienden al caso de álgebras diferenciales graduadas. En este campo hay un trabajo muy extenso realizado por Yekutieli y sus colaboradores. La mencionada escuela de Yekutieli ha estudiado la dualidad desde el punto de vista de la existencia y funtorialidad del complejo dualizante. En [S1], Shaul estudia en el contexto diferencial graduado la construcción del funtor imagen inversa excepcional para morfismos de álgebras diferenciales graduadas que poseen complejo dualizante. Restringe su estudio a las \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas conmutativas, cohomológicamente esencialmente de tipo finito y de dimensión plana finita, siendo el anillo base \mathbb{K} un anillo conmutativo de Gorenstein de dimensión de Krull finita, es decir, tal que el anillo \mathbb{K} es dualizante en su categoría derivada. Una tal álgebra es noetheriana. La formulación de la hipótesis noetheriana para un álgebra diferencial graduada conmutativa A implica que A está concentrada en grados no positivos, que $H^0(A)$, su anillo

de cohomología 0-ésima, es un anillo conmutativo noetheriano y $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^i(A)$ es un $\mathbf{H}^0(A)$ -módulo finitamente generado; en particular A es de *amplitud finita*, es decir tal que $\mathbf{H}^i(A) = 0$ para $i \ll 0$.

Dedicamos la segunda parte de esta memoria al estudio de la dualidad en el contexto de las álgebras diferenciales graduadas noetherianas, trasladando la construcción del funtor imagen inversa excepcional de Khusyairi a este contexto. Esto requiere previamente la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes en categorías derivadas de álgebras diferenciales graduadas.

En nuestro trabajo establecemos la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada A conmutativa de amplitud finita, y tal que el esquema afín $\mathrm{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ está generado por puntos. La condición de conmutatividad garantiza que el anillo $\mathbf{H}^0(A)$ es conmutativo y que la categoría derivada de A es $\mathbf{H}^0(A)$ -lineal [Y2]. Demostramos que las subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría derivada de los A -módulos diferenciales graduados están determinadas por los subconjuntos del esquema afín $\mathrm{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$. Puede considerarse que para este tipo de álgebras diferenciales graduadas el esquema afín $\mathrm{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ determina la geometría subyacente de la categoría $\mathbf{D}(A)$. La clasificación de las categorías localizantes y colocalizantes en el contexto de álgebras diferenciales graduadas, ha sido posible gracias a la similitud estructural de las categorías derivadas de álgebras diferenciales graduadas conmutativas y las categorías derivadas de haces de módulos cuasicoherentes en esquemas.

Recientemente, Shaul y Williamson, en [ShW], empleando las nociones de estratificación y coestratificación en categorías \otimes -trianguladas, han estudiado la clasificación de las subcategorías (co)localizantes para álgebras diferenciales graduadas conmutativas noetherianas de amplitud finita. Nuestro resultado de clasificación extiende el de Shaul y Williamson.

Con la clasificación de las subcategorías localizantes, estamos en condiciones de aplicar la estrategia de Khusyairi-Iyengar-Lipman-Neeman para la construcción del funtor imagen inversa excepcional asociado a un morfismo plano de álgebras diferenciales graduadas conmutativas cohomológicamente noetherianas. Establecemos las propiedades fundamentales del funtor imagen inversa excepcional en este contexto y demostramos que, para morfismos planos, nuestra construcción coincide con la propuesta por Shaul en [S1].

* * *

Para la presentación de nuestros resultados, después de un primer capítulo introductorio, dividimos la exposición en dos bloques. El primer bloque, dedicado a los resultados desarrollados en el contexto de esquemas, está formado por los capítulos 5 y 6. En el segundo, que abarca los capítulos 7, 8 y 9, exponemos los resultados de clasificación de subcategorías localizantes y colocalizantes en el contexto de álgebras diferenciales graduadas junto con sus aplicaciones.

Una característica esencial que comparten las categorías derivadas de haces de módulos sobre un esquema y la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada es su naturaleza «triangulada». El capítulo 4 de la memoria consiste en la revisión de algunos conceptos fundamentales sobre categorías trianguladas, en particular sobre las categorías homotópica y derivada de una categoría abeliana. Señalaremos algunas de sus propiedades tomando como referencias principales [L, W, N6, Y1]. Entre las construcciones fundamentales, para categorías abelianas que son además categorías de Grothendieck, trataremos la existencia de resoluciones K-inyectivas que nos permitirán extender a las categorías derivadas los funtores aditivos definidos entre las correspondientes categorías homotópicas, construyendo los funtores derivados a la derecha. En ausencia de suficientes objetos proyectivos en la categoría base, por ejemplo en el contexto de haces de módulos sobre un espacio anillado, para la consideración de funtores derivados por izquierda, se hace uso de la existencia de resoluciones K-planas, como se indica en el capítulo 5. En la última sección del capítulo 4, se introducen los conceptos de localizaciones y colocalizaciones de Bousfield, y se comprueba la existencia de ciertas localizaciones de interés en categorías derivadas de categorías de Grothendieck.

Siguiendo las exposiciones de [L], [GD] y [H], en el capítulo 5 recordamos algunos resultados sobre la categoría derivada de complejos de haces con cohomología cuasicoherente $\mathbf{D}_{qc}(X)$ sobre un esquema concentrado X , tales como su estructura monoidal cerrada. Son herramientas esenciales en nuestro trabajo las propiedades de naturalidad de los derivados a la derecha de los funtores imagen directa, asociados a morfismos concentrados de esquemas, y de sus correspondientes adjuntos por la izquierda y por la derecha. El homomorfismo de proyección para morfismos concentrados y coeficientes cuasicoherentes es un isomorfismo en la categoría derivada. Estas propiedades, junto con el carácter monoidal del funtor derivado de la imagen inversa de un morfismo de esquemas, permiten reformular las adjunciones del funtor derivado de la imagen directa en términos del Hom interno.

Neeman establece en [N1, Theorem 2.8] una biyección entre las subcategorías localizantes de la categoría derivada de un anillo noetheriano y los subconjuntos del esquema afín asociado. Toda subcategoría localizante determina en la categoría ambiente una subcategoría colocalizante, su ortogonal por la derecha. Neeman demuestra que éstas son las únicas subcategorías colocalizantes de la categoría derivada del anillo [N5, Corollary 2.8]. En resumen, Neeman obtiene la clasificación de las subcategorías (co)localizante de la categoría derivada de un anillo en los siguientes términos:

Teorema. *Si R es un anillo noetheriano, las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes} \\ \text{de } \mathbf{D}(R) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Loc}} \\ \xrightarrow{\text{f}} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Subconjuntos} \\ \text{de } \text{Spec}(R) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{f}} \\ \xrightarrow{\text{Coloc}} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{colocalizantes} \\ \text{de } \mathbf{D}(R) \end{array} \right\}$$

son mutuamente inversas, donde $\text{Loc}(Z)$ denota la menor subcategoría localizante de $\mathbf{D}(R)$ que contiene los cuerpos residuales de los puntos de un subconjunto $Z \subset \text{Spec}(R)$, $\text{Coloc}(Z)$ denota la menor subcategoría colocalizante y $\text{f}(\mathbf{E}) := \{x \in \text{Spec}(R) \mid k(x) \in \mathbf{E}\}$, para cualquier subcategoría plena $\mathbf{E} \subset \mathbf{D}(R)$.

En el capítulo 6, exponemos los resultados obtenidos acerca de la clasificación de las subcategorías localizantes y las subcategorías colocalizantes de la categoría derivada $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ para un esquema concentrado X bajo hipótesis muy generales. Asociamos a cada punto $x \in X$ un módulo cuasicoherente que denotamos $\mathcal{K}(x)$, es el haz de módulos asociado al cuerpo residual del punto. Diremos que el esquema X está *generado por puntos* si $\text{Loc}(X)$, la menor subcategoría localizante que contiene a todos los haces $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in X\}$, es la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. Demostraremos que todo esquema noetheriano está generado por puntos recuperando la clasificación de subcategorías localizantes establecida en [AJS2], que generalizaba los resultados de [N1]. Para la clasificación de las subcategorías localizantes nos restringimos a aquellas subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que se comportan bien con la estructura monoidal (restricción que ya había sido observada en [AJS2]), las subcategorías localizantes \otimes -ideales (definición 6.2.7), condición que es automática en el caso afín. Denotando por $\text{Loc}(Z)$ la menor subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que contiene a todos los haces del conjunto $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in Z\}$, la clasificación de las subcategorías localizantes se establece en el teorema 6.2.13:

Teorema 6.2.13. *Si X es un esquema concentrado generado por puntos, la correspondencia $Z \mapsto \text{Loc}(Z)$ define una biyección entre subconjuntos de X y la clase de subcategorías localizantes \otimes -ideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, siendo su inversa la correspondencia que asigna a cada subcategoría localizante \otimes -ideal \mathbf{L} de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ el conjunto de puntos $Z_{\mathbf{L}} = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}\}$.*

Abordamos entonces la clasificación de las subcategorías colocalizantes en este contexto. Cada subconjunto de un esquema, $Y \subset X$, tiene asociada una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, que denotamos $\text{Coloc}(Y)$, la menor subcategoría colocalizante que contiene a todos los haces del conjunto $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in Y\}$. El teorema 6.3.13 establece la clasificación de las subcategorías colocalizantes en los siguientes términos:

Teorema 6.3.13. *Si X es un esquema concentrado generado por puntos, la correspondencia $Y \mapsto \text{Coloc}(Y)$ define una biyección entre los subconjuntos de X y la clase de subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, donde la inversa asigna a cada subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ el subconjunto $Y_{\mathbf{C}} = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}\}$.*

Se completa así la generalización a esquemas concentrados generados por puntos, de los resultados de clasificación de subcategorías (co)localizantes de Neeman en el contexto afín. La condición \mathcal{H} -coideal impuesta a las subcategorías colocalizantes en el teorema 6.3.13 es la condición «adjunta» de la condición \otimes -ideal de las subcategorías localizantes, como establece la proposición 6.3.14 sobre la correspondencia entre subcategorías localizantes y colocalizantes. Debemos señalar que nuestra propuesta ofrece demostraciones alternativas y más sencillas que las desarrolladas en [N5] y [N1], lo cual simplifica la comprensión y aporta una nueva perspectiva sobre la clasificación de subcategorías en este tipo de contextos algebraicos.

En el capítulo 7 comienza la segunda parte de esta memoria. Fijamos en este capítulo el contexto de trabajo en el que se enmarcan los resultados obtenidos sobre subcategorías localizantes y colocalizantes para álgebras diferenciales graduadas. Recordamos en este capítulo la noción de álgebra diferencial graduada y módulo diferencial graduado. La categoría de módulos diferenciales graduados sobre un álgebra graduada es una categoría abeliana con propiedades similares a la categoría de complejos de módulos sobre un anillo. Se construye la categoría derivada de módulos diferenciales graduados, que coincide

con la categoría derivada de un anillo en el caso de que el álgebra diferencial graduada esté concentrada en grado cero. Recordamos las definiciones y propiedades básicas. La referencia utilizada para la elaboración de este capítulo ha sido [Y1].

En el capítulo 8 se extienden los resultados de clasificación de subcategorías localizantes y colocalizantes sobre esquemas afines al contexto de las categorías derivadas de álgebras diferenciales graduadas conmutativas empleando la condición de generación por puntos. La demostración de los resultados de clasificación que se ofrece aquí es directa y conceptual. Se hace uso (utilizando la notación establecida en la sección 8.2) de la siguiente propiedad, que expresa el hecho de que la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada conmutativa A está «generada por los cuerpos residuales» si lo está la categoría derivada del anillo $H^0(A)$:

Proposición 8.3.8. *Si A es una DG-álgebra conmutativa de amplitud finita tal que $H^0(A)$ está generado por puntos, entonces*

$$\mathbf{D}(A) = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))\}).$$

Empleando «cuerpos residuales» en el álgebra diferencial graduada, en la definición 8.2.2 se introduce la noción de soporte y cosoporte de un DG A -módulo, noción que es más natural que la propuesta en [ShW]. El teorema de clasificación de las subcategorías localizantes en el contexto de las álgebras diferenciales graduadas establece:

Teorema 8.3.12. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que el anillo $H^0(A)$ está generado por puntos. Entonces las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{L}_A} \\ \xrightarrow{\mathcal{V}_A} \end{array} \mathcal{P}(\text{Spec}(H^0(A))),$$

definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\longmapsto \mathcal{V}_A(\mathbf{L}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}\} \\ \mathbf{V} &\longmapsto \mathcal{L}_A(\mathbf{V}) = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathbf{V}\}), \end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

Utilizando estas técnicas clasificamos las subcategorías colocalizantes:

Teorema 8.4.4. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita, y tal que $H^0(A)$ está generado por puntos. Las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{colocalizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{C}_A} \\ \xrightarrow{\mathcal{W}_A} \end{array} \mathcal{P}(\text{Spec}(H^0(A))),$$

definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\longmapsto \mathcal{W}_A(\mathbf{C}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{C}\} \\ W &\longmapsto \mathcal{C}_A(W) = \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in W\}), \end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

En la última sección de este capítulo estudiamos las propiedades de los adjuntos en el contexto derivado del funtor de olvido del morfismo canónico $r: A \rightarrow H^0(A)$, denominados reducción y correducción en [S2], que relacionan las categorías derivadas asociadas a un álgebra diferencial graduada conmutativa A y a su anillo de cohomología 0-ésima.

Finalmente, en el capítulo 9, aplicando la estrategia de Khusyairi-Iyengar-Lipman-Neeman construimos el funtor imagen inversa excepcional $f^!$ para morfismos planos $f: A \rightarrow B$ de la categoría $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, la categoría de álgebras diferenciales graduadas conmutativas cohomológicamente noetherianas. En el caso clásico, la imagen inversa excepcional de un morfismo f es un funtor íntimamente relacionado con el adjunto por la derecha del funtor olvido f^\times , y de forma análoga al caso de esquemas el nuevo funtor $f^!$ coincide con el funtor f^\times si f es un morfismo plano cohomológicamente finito de la categoría $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$.

El funtor imagen inversa excepcional definido en la sección 9.3 para morfismos entre álgebras diferenciales graduadas conmutativas noetherianas verifica el cambio de base plano:

Teorema 9.4.3 (Imágenes inversas y cambio de base). *Consideremos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ un cuadrado cocartesiano con todos sus morfismos planos*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Entonces la transformación natural

$$\theta_{\diamond}: v^* f^! \rightarrow g^! u^*,$$

entre los funtores $v^* f^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(D)$ y $g^! u^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(D)$ es un isomorfismo. Además, la transformación θ_{\diamond} es compatible con la transformación cambio de base del pseudofunctor $(-)^{\times}$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} v^* f^{\times} & \xrightarrow{\phi_{\diamond}} & g^{\times} u^* \\ v^* \psi(f) \downarrow & & \downarrow \psi(g) u^* \\ v^* f^! & \xrightarrow{\theta_{\diamond}} & g^! u^* \end{array}$$

es conmutativo.

Como consecuencia del cambio de base, la imagen inversa excepcional define efectivamente un pseudofunctor, sobre la categoría $\mathbf{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}|_{\text{fl}}$ cuyos objetos son los de $\mathbf{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ y cuyos morfismos son los morfismos planos de álgebras diferenciales graduadas:

Teorema 9.5.7. *La asignación*

$$(-)^!: \mathbf{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}|_{\text{fl}} \longrightarrow \text{Cat},$$

que hace corresponder a cada DG-álgebra A la categoría $\mathbf{D}^+(A)$ y a cada morfismo $f: A \rightarrow B$ el funtor $f^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(B)$, es un pseudofunctor.

Para la demostración de estos resultados es clave el corolario 9.3.8, en cuya demostración se hace uso de manera esencial la clasificación de las subcategorías localizantes.

Por último estudiamos para morfismos planos la relación entre el pseudofunctor imagen inversa excepcional $(-)^!$ construido aquí, y el pseudofunctor imagen inversa excepcional $(-)^{[!]}$ propuesto por Shaul en [S1].

El contexto de trabajo en [S1] es relativo. Shaul restringe su estudio a las \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas conmutativas, cohomológicamente esencialmente de tipo finito y de dimensión plana finita, siendo la base \mathbb{K} un anillo conmutativo de Gorenstein de dimensión de Krull finita. Para su comparación

consideramos que ambos pseudofuntores definidos sobre la subcategoría plena, de la categoría $\text{DGA}_{\text{cn}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$, cuyos objetos son las DG-álgebras esencialmente de tipo finito y planas sobre \mathbb{K} , que denotamos $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Para $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$, una \mathbb{K} -álgebra en la categoría $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$, el complejo $\sigma^!(\mathbb{K})$ es un DG-módulo dualizante rígido isomorfo al definido en [S1]:

Proposición 9.6.8. *Sea \mathbb{K} un anillo Gorenstein de dimensión de Krull finita y $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ el morfismo estructural de $A \in \text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Entonces el DG-módulo $\sigma^!(\mathbb{K})$ es isomorfo al DG-módulo dualizante rígido R_σ .*

Como consecuencia, las asignaciones $(-)^{[!]}$ y $(-)^!$, definidas sobre los morfismos planos de la categoría $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ y con coeficientes en $\mathbf{D}_f^+(-)$, son pseudofuntores isomorfos. El resultado de comparación se enuncia en el corolario:

Corolario 9.6.12. *Dado un morfismo plano de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$ en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}$, se tiene un isomorfismo entre los funtores.*

$$f^!: \mathbf{D}_f^+(A) \longrightarrow \mathbf{D}_f^+(B) \quad \text{y} \quad f^{[!]}: \mathbf{D}_f^+(A) \longrightarrow \mathbf{D}_f^+(B).$$

Por tanto, para morfismos planos nuestra construcción coincide con la de Shaul y la generaliza ampliamente, dado que no requiere que los coeficientes posean cohomología finitamente generada, y las propiedades del pseudofunctor imagen inversa excepcional que nosotros presentamos no necesitan la existencia de complejo dualizante.

Hipótesis y objetivos

Señalamos brevemente los objetivos de esta tesis doctoral junto sus correspondientes hipótesis, remitimos al lector a la introducción para conocer la motivación y la descripción detallada de cada objetivo:

En el contexto de esquemas:

- Formular la condición más general posible que debe verificar un esquema concentrado X para que las subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ queden determinadas por la geometría del esquema. Se establece para este tipo de esquemas concentrados, los «generados por puntos», la clasificación de las subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, las localizaciones de Bousfield ideales que son las que se adaptan bien a la estructura monoidal de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.
- Determinar las correspondientes subcategorías colocalizantes, formulando su clasificación, y caracterizando las colocalizaciones de Bousfield determinadas por puntos.
- Relacionar nuestros resultados con resultados anteriores sobre la determinación de subcategorías localizantes y colocalizantes en términos de soporte y cosoporte.

En el contexto diferencial graduado:

- Establecer la clasificación de las subcategorías localizantes de la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada conmutativa de amplitud finita tal que su cohomología 0-ésima es un anillo cuyo esquema afín asociado está generado por puntos.

- Clasificar las subcategorías colocalizantes de la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada conmutativa de amplitud finita en términos de los puntos del esquema afín asociado a su cohomología 0-ésima.
- Estudiar en términos de soporte y cosoporte las propiedades de los funtores reducción y correducción que relacionan la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada conmutativa de amplitud finita y la categoría derivada del anillo dado por su cohomología 0-ésima.
- Aplicación de la clasificación de las subcategorías localizantes a la dualidad de Grothendieck en la categoría $\mathbf{D}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ de las álgebras diferenciales graduadas conmutativas cohomológicamente noetherianas. Construir y estudiar las propiedades del funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos en la categoría $\mathbf{D}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, siguiendo la filosofía de Iyengar, Lipman y Neeman en el contexto de esquemas, según la tesis de Khusyairi. Estudiar la relación de este funtor con la propuesta en el contexto diferencial graduado de Shaul que hace uso de la existencia de complejo dualizante para la construcción del funtor imagen inversa excepcional.

CAPÍTULO 3

Metodología

Esta tesis se basó en métodos tradicionales de investigación matemática. Las tareas principales incluyeron la definición de nuevos términos, la formulación de conjeturas para generalizar resultados existentes y la búsqueda de ejemplos relevantes, y las posibles aplicaciones en otras áreas matemáticas. Para esto, fue necesario un estudio exhaustivo de los temas mediante la revisión de bibliografía preexistente, el intercambio de ideas con expertos de otras universidades. En este aspecto cabe destacar la importancia de la participación en congresos y reuniones científicas tanto nacionales como internacionales, que son un elemento clave en el proceso de investigación en matemáticas.

Resultados y discusión

Preliminares generales

Los axiomas para establecer la noción de categoría triangulada fueron introducidos de forma independiente por Dieter Puppe (1962) y Jean-Louis Verdier (1963). La motivación de Puppe se enmarca en el estudio de la categoría de homotopía estable. La teoría desarrollada por Verdier tenía como objetivo el estudio de la estructura de la categoría derivada de una categoría abeliana atendiendo a la necesidad de encontrar una formulación adecuada para la teoría de dualidad elaborada por Alexander Grothendieck en el contexto de haces de módulos sobre esquemas.

La propuesta de Verdier añade un axioma a la lista de axiomas propuestos por Puppe. Se trata del «axioma del octaedro» (axioma (TR4) en la definición 4.1.1). Este axioma es clave en los desarrollos de Verdier. Su propuesta consiste en construir, a partir de un sistema multiplicativo de morfismos de una categoría triangulada, una nueva categoría triangulada obtenida mediante un cálculo de fracciones que permite invertir los morfismos del sistema multiplicativo. Verdier identifica la localización de una categoría triangulada como un cociente de la categoría de partida. Describiendo en particular la categoría derivada de una categoría abeliana \mathcal{A} como la «categoría cociente» de su categoría homotópica, obtenida identificando los complejos acíclicos en la categoría homotópica con el objeto cero.

En este primer capítulo presentamos un resumen de algunas nociones y resultados básicos sobre categorías trianguladas y álgebra homológica, fijando las notaciones que se usarán a lo largo de la memoria. Las referencias principales que se emplearon para su elaboración son [L, N6] y en menor medida [W].

4.1. Categorías trianguladas

Recordemos que una categoría \mathcal{C} es *aditiva* si los morfismos para cada par de objetos es un grupo abeliano de tal forma que la composición de morfismos es bilineal respecto de la suma y, además, posee objeto cero y biproductos para cada par de objetos. Un funtor entre categorías aditivas es un *functor aditivo* si preserva el objeto cero y biproductos. Una categoría aditiva \mathcal{C} es *abeliana* si todo morfismo posee núcleo y conúcleo, y además cada monomorfismo es un núcleo y cada epimorfismo es un conúcleo [M, Chapter VIII].

Definición 4.1.1. Una *categoría triangulada* es una categoría aditiva \mathbf{T} junto con una *triangulación*, es decir, un automorfismo aditivo $T: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, denominado *functor traslación*, y una colección de diagramas en \mathbf{T} de la forma

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} T(L),$$

denominados *triángulos*, que verifican los siguientes cuatro axiomas:

(TR1) Todo diagrama de la forma

$$M \xrightarrow{\text{id}} M \longrightarrow 0 \longrightarrow T(M)$$

es un triángulo, y para todo morfismo $u: L \rightarrow M$ en \mathbf{T} existe un triángulo

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \longrightarrow T(L).$$

Además, en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & T(L) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T(f) \\ L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \xrightarrow{w'} & T(L') \end{array}$$

donde f, g y h son isomorfismos, si una de las filas del diagrama es un triángulo, la otra también lo es.

(TR2) El diagrama $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} T(L)$ es un triángulo en \mathbf{T} si, y sólo si, el diagrama $M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} T(L) \xrightarrow{-T(u)} T(M)$ es un triángulo en \mathbf{T} .

(TR3) Cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & T(L) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow T(f) \\ L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \xrightarrow{w'} & T(L') \end{array}$$

cuyas filas son triángulos, tal que $g \circ u = u' \circ f$ y puede ser completado a un *morfismo de triángulos*, es decir, existe un morfismo $h: N \rightarrow N'$ en \mathbf{T} que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & T(L) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T(f) \\ L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \xrightarrow{w'} & T(L') \end{array} \quad (4.1.1.1)$$

(TR4) Dados $L \xrightarrow{f} L' \xrightarrow{g} L''$ morfismos componibles y triángulos en \mathbf{T}

$$\begin{array}{l} L \xrightarrow{f} L' \longrightarrow P \longrightarrow T(L) \\ L' \xrightarrow{g} L'' \longrightarrow R \longrightarrow T(L') \\ L \xrightarrow{g \circ f} L'' \longrightarrow Q \longrightarrow T(L), \end{array}$$

existe un triángulo $P \xrightarrow{\phi} Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\chi} T(P)$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & L' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & T(L) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow g & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id} \\ L & \xrightarrow{g \circ f} & L'' & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & T(L) \\ \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \chi & & \downarrow T(f) \\ L' & \xrightarrow{g} & L'' & \longrightarrow & R & \longrightarrow & T(L') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\phi} & Q & \xrightarrow{\psi} & R & \xrightarrow{\chi} & T(P) \end{array} \quad (4.1.1.2)$$

Notación 4.1.2. Para el funtor traslación se utiliza la notación $T(-) = (-)[1]$ y $T^n(-) = (-)[n]$ para las sucesivas composiciones de T o las de su inverso,

con $n \in \mathbb{Z}$. Un morfismo $M \rightarrow N[n]$ en \mathbf{T} se dice un morfismo de grado n entre los objetos M, N .

Un triángulo (u, v, w) , se representa $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$, o simplemente

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{+}, \quad (4.1.2.1)$$

donde $N \xrightarrow{+}$ corresponde al morfismo $N \xrightarrow{w} L[1]$ de grado 1 entre M y N .

Observación 4.1.3. El diagrama (4.1.2.1) se suele dibujar de la forma

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ + \swarrow & & \nwarrow v \\ L & \xrightarrow{u} & M \end{array} \quad (4.1.3.1)$$

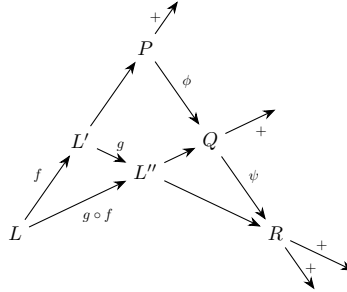
justificando así el término *triángulo* para los diagramas de la estructura triangulada de \mathbf{T} . Diremos que (4.1.2.1) es un *triángulo de base u y vértice N* . Es habitual la denominación de *triángulos distinguidos* para referirse a estos diagramas.

El axioma (TR4) recibe el nombre de *axioma del octaedro* porque el diagrama (4.1.1.2) se puede representar mediante un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \nearrow \phi & & \nwarrow \psi & \\ & P & \xrightarrow{\chi} & R & \\ & \downarrow + & & \uparrow + & \\ & L & \xrightarrow{g \circ f} & L'' & \\ & \searrow f & & \nearrow g & \\ & & L' & & \end{array}$$

donde los tres triángulos de la hipótesis son aristas de tres de las caras de un diagrama que se completa a un octaedro al añadir el triángulo (ϕ, ψ, χ) , y las aristas de las otras cuatro caras corresponden a diagramas conmutativos.

Observación 4.1.4. De forma más breve, el axioma (TR4) establece la existencia de un triángulo (ϕ, ψ, χ) que hace conmutativo el diagrama de triángulos:



Como veremos en 4.3.12, en una categoría triangulada los triángulos juegan el papel de las sucesiones exactas cortas en categorías abelianas, de modo que identificando P y Q como los cocientes L'/L y L''/L . El axioma (TR4) se puede interpretar como el conocido tercer teorema de isomorfía, $\frac{L''/L}{L'/L} \cong \frac{L''}{L'}$.

Proposición 4.1.5. Si $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N$ son morfismos consecutivos de un triángulo de la categoría triangulada \mathbf{T} entonces $v \circ u = 0$, además la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, u)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, v)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, N) \quad (4.1.5.1)$$

es exacta, para cualquier objeto $C \in \mathbf{T}$.

Demostración. Por el axioma (TR2) podemos suponer que existe un triángulo

$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1].$$

Utilizando los axiomas (TR1) y (TR3) se construye un morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{\mathrm{id}} & L & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L[1] \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow u & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow T(\mathrm{id}) \\ L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & L[1] \end{array}$$

del que se deduce que $v \circ u = 0$. Como consecuencia inmediata, para cualquier objeto $C \in \mathbf{T}$, $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, u)) \subset \ker(\mathrm{Hom}_{\mathbf{T}}(C, v))$. Además si un morfismo $f: C \rightarrow M$ es tal que $v \circ f = 0$ entonces $0 = (v \circ f)[-1] = v[-1] \circ f[-1]$. Por los axiomas (TR2) y (TR3) existe un morfismo $g: C \rightarrow L$ en \mathbf{T} tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
C[-1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\text{id}} & C \\
\downarrow f[-1] & & \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
M[-1] & \xrightarrow{-v[-1]} & N[-1] & \xrightarrow{-w[-1]} & L & \xrightarrow{u} & M
\end{array}$$

es un morfismo de triángulos. Por tanto la sucesión (4.1.5.1) es exacta. \square

Observación 4.1.6. Según el axioma (TR2) todo triángulo $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{+} L$ de la categoría triangulada \mathbf{T} se inserta en una cadena de morfismos en la que cada cuatro morfismos consecutivos son triángulos de \mathbf{T} obtenidos «trasladando» los morfismos del triángulo original. Aplicando a esta cadena de triángulos el funtor $[C, -] := \text{Hom}_{\mathbf{T}}(C, -)$, para cada objeto C de \mathbf{T} , la proposición anterior establece la existencia de una sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$\cdots \rightarrow [C, L[n]] \rightarrow [C, M[n]] \rightarrow [C, N[n]] \rightarrow [C, L[n+1]] \rightarrow [C, M[n+1]] \rightarrow \cdots$$

Corolario 4.1.7. [KS, Corollary 10.1.15] Si en el diagrama (4.1.1.1) los morfismos f y g son isomorfismos entonces h es un isomorfismo.

Demostración. Con la notación establecida en la observación anterior, para cualquier objeto C de \mathbf{T} , el morfismo de triángulos (4.1.1.1) tiene asociado un diagrama de grupos abelianos cuyas filas son sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
[C, L] & \xrightarrow{[C, u]} & [C, M] & \xrightarrow{[C, v]} & [C, N] & \xrightarrow{[C, w]} & [C, L[1]] & \xrightarrow{[C, -u[1]]} & [C, M[1]] \\
\downarrow [C, f] & & \downarrow [C, g] & & \downarrow [C, h] & & \downarrow [C, f[1]] & & \downarrow [C, g[1]] \\
[C, L'] & \xrightarrow{[C, u']} & [C, M'] & \xrightarrow{[C, v']} & [C, N'] & \xrightarrow{[C, w']} & [C, L'[1]] & \xrightarrow{[C, -u'[1]]} & [C, M'[1]]
\end{array}$$

Siendo $[C, f[n]]$ y $[C, g[n]]$ biyectivas, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el *Lema de los cinco* garantiza que $[C, h]$ es biyectiva, $\forall C \in \mathbf{T}$, por tanto h es un isomorfismo. \square

Corolario 4.1.8. Sea $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$ un triángulo de la categoría triangulada \mathbf{T} . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) u es un monomorfismo.
- (ii) v es un epimorfismo.
- (iii) $w = 0$.
- (iv) $M \cong L \oplus N$.

Demostración. Utilizando la notación del resultado anterior, la sucesión

$$[C, L] \xrightarrow{[C,u]} [C, M] \xrightarrow{[C,v]} [C, N] \xrightarrow{[C,w]} [C, L[1]] \xrightarrow{[C,-u[1]]} [C, M[1]]$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos, para cualquier $C \in \mathbf{T}$. La equivalencia de (i), (ii) y (iii) es consecuencia inmediata en la exactitud de esta sucesión. Tomando $C = M$, de la exactitud de la sucesión anterior se deduce la equivalencia de (iii) y (iv). \square

Corolario 4.1.9. Si $L \xrightarrow{u} M \rightarrow N \rightarrow L[1]$ es un triángulo de la categoría triangulada \mathbf{T} , u es un isomorfismo si, y sólo si, $N = 0$.

4.1.10. En general, el morfismo h que completa el diagrama de triángulos (4.1.1.1), en el axioma (TR3), no es único. En [BBD, Proposition 1.1.9], se comprueba que el morfismo h es único si $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(L[1], N') = 0$ (equivalentemente, si $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(L, N'[-1]) = 0$). Como consecuencia, si $L, N \in \mathbf{T}$ son tales que $\text{Hom}_{\mathbf{T}}(L[1], N) = 0$ y además existe un triángulo $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{+}$ entonces cualquiera de los morfismos del triángulo determina a los otros dos salvo único isomorfismo de triángulos [BBD, Corollaire 1.1.10].

Observación 4.1.11. Las categorías aditivas con una triangulación que verifique únicamente los axiomas (TR1)-(TR3) reciben el nombre de *categorías pretrianguladas*. El axioma (TR4) es necesario para formar los *cocientes de Verdier* y llevar a cabo el cálculo de fracciones en el contexto triangulado (véase 4.3.4).

Definición 4.1.12. [L, §1.5] Sean \mathbf{T} y \mathbf{T}' categorías trianguladas con respectivos funtores traslación T y T' . Un *functor triangulado* o Δ -*functor* entre las categorías \mathbf{T} y \mathbf{T}' es un funtor $F: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ junto con un isomorfismo de funtores $\theta: FT \xrightarrow{\sim} T'F$ de forma que para cada triángulo $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} TL$ de \mathbf{T} el diagrama

$$F(L) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \xrightarrow{\theta \circ F(h)} T'(F(L))$$

es un triángulo en \mathbf{T}' .

Dada una categoría triangulada \mathbf{T} , una subcategoría aditiva plena \mathbf{K} con una triangulación se dice una subcategoría triangulada de \mathbf{T} si el funtor traslación de \mathbf{K} es el inducido por el de \mathbf{T} , y el vértice en \mathbf{T} de un triángulo con base en \mathbf{K} es isomorfo a un objeto de \mathbf{K} , es decir si la inclusión $\iota: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{T}$ es un Δ -functor cuyo isomorfismo de compatibilidad con las traslaciones es la identidad.

Una categoría triangulada \mathbf{T} determina en su opuesta \mathbf{T}^{op} una triangulación respecto al funtor traslación dado por el inverso del funtor traslación de \mathbf{T} .

Observación 4.1.13. Consideremos la notación de la observación 4.1.6. El funtor contravariante $[-, C] := \text{Hom}_{\mathbf{T}}(-, C): \mathbf{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}b$ asocia a cada triángulo en \mathbf{T}^{op} una sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$\cdots \leftarrow [L[s], C] \leftarrow [M[s], C] \leftarrow [N[s], C] \leftarrow [L[s-1], C] \leftarrow [M[s-1], C] \leftarrow \cdots$$

4.2. Categoría homotópica de una categoría abeliana

Un primer ejemplo de categoría triangulada surge al considerar la categoría homotópica $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana \mathcal{A} .

4.2.1. Un *complejo* (M, d) sobre la categoría aditiva \mathcal{A} es una familia de objetos $\{M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ junto con una familia $\{d_M^n: M^n \rightarrow M^{n+1}; n \in \mathbb{Z}\}$ de morfismos en \mathcal{A} , denominada *diferencial* de M , tal que $d_M^n \circ d_M^{n-1} = 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

En particular, un complejo M sobre \mathcal{A} es un diagrama en \mathcal{A} de la forma

$$M: \quad \cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d_M^{n-1}} M \xrightarrow{d_M^n} M^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Cuando no haya lugar a confusión, d_M o simplemente d denotará la diferencial $\{d_M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, incluso nos referiremos al complejo (M, d) con la letra M . Un *morfismo* $f: M \rightarrow N$ de complejos sobre \mathcal{A} es una colección de morfismos $\{f^n: M^n \rightarrow N^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en \mathcal{A} tales que, $d_N^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_M^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, esto es, que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M^{n-1} & \xrightarrow{d_M^{n-1}} & M^n & \xrightarrow{d_M^n} & M^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N^{n-1} & \xrightarrow{d_N^{n-1}} & N^n & \xrightarrow{d_N^n} & N^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

La composición punto a punto de morfismos de complejos es un morfismo de complejos, de modo que los complejos sobre \mathcal{A} junto con los morfismos de complejos forman una categoría, *la categoría de complejos sobre \mathcal{A}* , que se denota $\mathbf{C}(\mathcal{A})$.

La categoría \mathcal{A} es una subcategoría plena de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ sin más que considerar los objetos de \mathcal{A} como complejos concentrados en grado cero.

Observación 4.2.2. La categoría $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ hereda la estructura aditiva de \mathcal{A} . El objeto cero de $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es el diagrama trivial $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$, y el coproducto $M \oplus N$, de dos complejos $M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$, es el complejo cuyo punto en grado n es $(M \oplus N)^n = M^n \oplus N^n$ y cuya diferencial es la definida en cada grado como suma directa de las diferenciales de M y N . Si además \mathcal{A} es abeliana, se puede comprobar (véase [W, Exercise 1.2.3]) que $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es una categoría abeliana definiendo, para un morfismo de complejos $f: M \rightarrow N$, el *núcleo* $\ker f$ y el *conúcleo* $\text{Coker } f$ grado a grado, es decir, $(\ker f)^n = \ker f^n$ y $(\text{Coker } f)^n = \text{Coker } f^n$, siendo las diferenciales de cada uno de estos complejos las inducidas respectivamente por las diferenciales de M y N .

Dada una categoría abeliana \mathcal{A} , el problema que surge al intentar dotar a la categoría de complejos $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ de una estructura triangulada es su condición de categoría abeliana. En efecto, si una categoría abeliana es además triangulada entonces todo monomorfismo $L \xrightarrow{u} M$ es una sección (equivalentemente, todo epimorfismo $M \xrightarrow{v} N$ es una retracción); para comprobar este hecho basta considerar la existencia en la categoría (por el axioma (TR1)) de un triángulo con base el monomorfismo u y aplicar el corolario 4.1.8. Entonces todo monomorfismo de la categoría abeliana \mathcal{A} sería una sección si su categoría de complejos admite estructura de categoría triangulada.

4.2.3. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Dado un complejo $M \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el objeto de \mathcal{A} definido mediante la expresión

$$H^n(M) := \frac{\ker d_M^n}{\operatorname{Im} d_M^{n-1}},$$

se denomina *n-ésima cohomología* de M .

Un complejo $M \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ se dice *acíclico* si $H^n(M) = 0$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ es un *cuasi-isomorfismo* si, para todo $n \in \mathbb{Z}$, los morfismos inducidos en cohomología $H^n(f): H^n(M) \rightarrow H^n(N)$ son isomorfismos.

Un par de observaciones son pertinentes aquí. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la cohomología *n-ésima* define un funtor aditivo $H^n(-): \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, y la familia de funtores $\{H^n; n \in \mathbb{Z}\}$ verifica la siguiente propiedad, particularmente interesante en álgebra homológica.

Proposición 4.2.4 (Sucesión exacta larga de cohomología). *Toda sucesión exacta corta $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ tiene asociada de forma natural una sucesión exacta larga de cohomología*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(L) &\xrightarrow{H^i(f)} H^i(M) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(N) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(L) \rightarrow \\ &\xrightarrow{H^{i+1}(f)} H^{i+1}(M) \xrightarrow{H^{i+1}(g)} H^{i+1}(N) \xrightarrow{\delta^{i+1}} H^{i+2}(L) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

La prueba de este enunciado utiliza la conocida técnica de *caza de diagramas* para construir los morfismos de conexión $\{\delta^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (véase [W, §1.3]).

4.2.5. Un ingrediente fundamental para establecer una estructura triangulada en categorías cuyos objetos son complejos sobre una categoría abeliana es el *functor traslación*, también es esencial la construcción del *cono* de un morfismo de complejos que recordamos a continuación.

Dado un entero m y un complejo $M \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$, $M[m]$ denotará el complejo cuya componente en grado n es $M[m]^n = M^{n+m}$ y cuya diferencial es la definida por $d_{M[m]} = (-1)^m d_M$. Si $f: M \rightarrow N$ es un morfismo en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ se define $f[m]: M[m] \rightarrow N[m]$ como el morfismo de complejos determinado en grado n

por $f[m]^n = f^{n+m}$. La asignación $[1]: \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$ es un funtor aditivo que es un isomorfismo, es el *functor traslación*, cuyo inverso es $[-1]: \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$.

4.2.6. [L, §1.3] El *cono de un morfismo* de complejos $f: M \rightarrow N$ es el complejo $C(f)$ cuya entrada y diferencial en grado n están definidas mediante las expresiones

$$C(f)^n = N^n \oplus M^{n+1}, \quad d_{C(f)}^n = \begin{pmatrix} d_N^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_M^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Las inclusiones y proyecciones canónicas

$$\begin{aligned} \alpha_f^i: N^i &\longrightarrow C(f)^i, & \beta_f^i: C(f)^i &\longrightarrow M^{i+1}, \\ n &\longmapsto (n, 0) & (n, m) &\longmapsto m \end{aligned}$$

definen morfismos de complejos $\alpha_f: N \rightarrow C(f)$ y $\beta_f: C(f) \rightarrow M[1]$. Así, a cada morfismo de complejos $f: M \rightarrow N$ se le asocia el diagrama de complejos

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\alpha_f} C(f) \xrightarrow{\beta_f} M[1]. \quad (4.2.6.1)$$

Este tipo de diagramas forman parte de los triángulos de una categoría triangulada cuyos objetos son los complejos sobre \mathcal{A} .

4.2.7. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ se dice *homótopo a cero* si existe una familia $h = \{h^n: M^n \rightarrow N^{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos de \mathcal{A} ,

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & M^{n-1} & \xrightarrow{d_M^{n-1}} & M^n & \xrightarrow{d_M^n} & M^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & \swarrow h^n & \downarrow f^n & \swarrow h^{n+1} & \downarrow f^{n+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & N^{n-1} & \xrightarrow{d_N^{n-1}} & N^n & \xrightarrow{d_N^n} & N^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

tales que $f^n = h^{n+1} \circ d_M^n + d_N^{n-1} \circ h^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. La familia de morfismos $h = \{h^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se denomina *homotopía de M a N* .

Dos morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(M, N)$ son *homótopos* si $f - g$ es homótopo a cero. Un complejo $M \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ es *homótopo a cero* si el morfismo id_M es homótopo al morfismo cero.

Para cualesquiera $M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$, la relación «ser homótopo a» en el conjunto $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(M, N)$ es de equivalencia. La colección $\text{Ht}(M, N)$ de los morfismos homótopos a cero forman un subgrupo de $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(M, N)$. Esta relación de equivalencia es compatible con la composición de morfismos de complejos, de modo que es posible definir la composición de clases de morfismos como la clase de la composición.

Definición 4.2.8. La *categoría homotópica* $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana \mathcal{A} es la categoría cuyos objetos son los complejos sobre \mathcal{A} y con morfismos

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(M, N) := \frac{\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(M, N)}{\text{Ht}(M, N)} \quad (M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})).$$

Los isomorfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ se denominan *equivalencias de homotopía*. Si dos complejos sobre \mathcal{A} son isomorfos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ se dice que son *homotópicamente equivalentes* o, simplemente, que son *homótopos*.

Dos morfismos homotópicamente equivalentes inducen morfismos idénticos a través de cada uno de los funtores $H^n(-): \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, con $n \in \mathbb{Z}$; seguiremos utilizando la notación para el funtor n -ésima cohomología inducido $H^n(-): \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ la subcategoría plena de los *complejos* $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ cuya *cohomología* está *acotada inferiormente*, es decir, existe un entero n_F tal que $H^i(M) = 0$ para todo entero $i < n_F$. Análogamente, $\mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ es la subcategoría plena de los *complejos* $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ con *cohomología acotada superiormente*, es decir, aquellos para los que existe un entero m_M tal que $H^j(M) = 0$ para todo entero $j > m_M$. La categoría $\mathbf{K}^b(\mathcal{A}) = \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \cap \mathbf{K}^-(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ es la subcategoría de los *complejos con cohomología acotada*.

En la construcción de la categoría homotópica de una abeliana hemos perdido la estructura de categoría abeliana que poseía la correspondiente categoría de complejos, sin embargo la categoría homotópica posee estructura de categoría triangulada:

Teorema 4.2.9. *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. La categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es una categoría triangulada con el funtor traslación $[1]: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$, inducido por la traslación definida sobre $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, y la triangulación determinada por aquellos diagramas isomorfos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ a diagramas del tipo*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\alpha_f} C(f) \xrightarrow{\beta_f} M[1],$$

con $f: M \rightarrow N$ un morfismo de complejos de \mathcal{A} (véase (4.2.6.1)).

Demostración. Recordemos brevemente los argumentos para la demostración de este resultado.

Para cualquier $M \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$, el cono de la identidad, $C(\text{id}_M)$, es homótopo a cero; basta considerar la homotopía definida en cada grado por la proyección

$$\begin{aligned} h^n: C(\text{id}_M)^n = M^n \oplus M^{n+1} &\longrightarrow M^{n-1} \oplus M^n = C(\text{id}_M)^{n-1} . \\ (a, b) &\longmapsto (0, a) \end{aligned}$$

Por tanto es inmediato que se verifica el axioma (TR1).

Para probar que efectivamente se verifican los axiomas (TR2)–(TR4) se utiliza la construcción del *cilindro* de un morfismo de complejos.

Sea $f: M \rightarrow N$ un morfismo de complejos y $\beta_f: C(f) \rightarrow M[-1]$ el morfismo canónico. El *cilindro de f* es el complejo

$$\text{Cyl}(f) := C(\beta_f)[-1].$$

(El complejo $\text{Cyl}(f)$ es homótopo al cono del morfismo $(-1, f): M \rightarrow M \oplus N$.)

Sea $\phi: \text{Cyl}(f) \rightarrow N$ el morfismo de complejos

$$\begin{aligned} \phi^i: \text{Cyl}(f)^i = M^i \oplus N^i \oplus M^{i+1} &\longrightarrow N^i \\ (m, n, m') &\longmapsto (f(m) + n) \end{aligned}$$

El morfismo $\psi: N \rightarrow \text{Cyl}(f)$ definido por $\psi(f)^i(n) = (0, n, 0)$, es tal que $\phi \circ \psi = \text{id}_N$ (en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$). Si $\{h^i: \text{Cyl}(f)^i \rightarrow \text{Cyl}(f)^{i-1}; i \in \mathbb{Z}\}$ es la homotopía definida por $h^i(m, n, m') = (0, 0, -m)$, se tiene que

$$\text{id}_{\text{Cyl}(f)^i} - \psi^i \phi^i = d_{\text{Cyl}(f)}^{i-1} h^i + h^{i+1} d_{\text{Cyl}(f)}^i$$

es decir, ψ y ϕ definen una equivalencia de homotopía entre $\text{Cyl}(f)$ y $N[1]$.

El siguiente diagrama, donde los morfismos i y p vienen dados, respectivamente, por las inclusiones y proyecciones canónicas, es conmutativo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{i} & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{p} & C(f) & \xrightarrow{\beta_f} & M[1] \\ \parallel & & \downarrow \phi & & \parallel & & \parallel \\ M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\alpha_f} & C(f) & \xrightarrow{\beta_f} & M[1] \end{array} \quad (4.2.9.1)$$

Obsérvese que los cuadrados exteriores son diagramas conmutativos y el central es conmutativo salvo homotopía (el morfismo $p - (\alpha_f \circ \phi) = p - (p \circ \psi \circ \phi) = p(1 - \psi \circ \phi)$ es homótopo a 0). La existencia de este isomorfismo de diagramas en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ permite demostrar el axioma TR2.

Finalmente se demuestra que se verifican los axiomas (TR3) y (TR4) Asumiendo que los triángulos involucrados son del tipo (4.2.6.1). \square

4.2.10. El diagrama (4.2.9.1) es un isomorfismo de triángulos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, por tanto cualquier triángulo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es isomorfo a un triángulo cuyos dos primeros morfismos son morfismos de complejos que corresponden a una sucesión exacta corta «semiescindida» en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, es decir, escindida como sucesión exacta en la categoría graduada asociada olvidando las diferenciales. De hecho, como muestra la siguiente proposición, las sucesiones exactas de morfismos de complejos en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ que son semiescindidas determinan la triangulación de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Proposición 4.2.11. *Toda sucesión semiescindida en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ tiene asociado un triángulo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, y todo triángulo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es isomorfo a uno de este tipo.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta semiescindida en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0 \quad (4.2.11.1)$$

Sea $\{\rho^i: N^i \rightarrow M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una colección de morfismos en \mathcal{A} tales que, para cada entero i , $g^i \circ \rho^i = \text{id}_{N^i}$. Denotemos por $\{\eta^i: M^i \rightarrow L^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ los morfismos en \mathcal{A} determinados por $\eta^i \circ f^i = \text{id}_{L^i}$ y $f^i \circ \eta^i + \rho^i \circ g^i = \text{id}_{M^i}$.

La familia $\{h^i := \eta^{i+1} \circ d_M^i \circ \rho^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ define un morfismo de complejos $h: N \rightarrow L[1]$. El diagrama

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L[1] \quad (4.2.11.2)$$

es un triángulo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, ya que es isomorfo en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ al triángulo

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\alpha_f} C(f) \xrightarrow{\beta_f} M[1].$$

los cuasi-isomorfismos). Repasemos algunos conceptos y resultados sobre *localización de categorías en sistemas multiplicativos* de morfismos (véase [BrG, I, Lemme 1.5]).

4.3.1. Una clase de morfismos \mathcal{S} de una categoría \mathbf{C} es un *sistema multiplicativo* si contiene las identidades de todos los objetos de \mathbf{C} , es cerrado para la composición y verifica las siguientes dos condiciones:

- *Condición de Ore.* Para cualquier par de morfismos $c: M \rightarrow L$ en \mathbf{C} y $s: N \rightarrow L$ en \mathcal{S} , existen morfismos $b: K \rightarrow N$ en \mathbf{C} y $t: K \rightarrow M$ en \mathcal{S} tales que $c \circ t = s \circ b$:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ & \downarrow s & \\ M & \xrightarrow{c} & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{b} & N \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{c} & L \end{array}$$

Dualmente, si $b: K \rightarrow N$ es cualquier morfismo en \mathbf{C} y $t: K \rightarrow M$ es cualquier morfismo de \mathcal{S} , existen morfismos $c: M \rightarrow L$ en \mathbf{C} y $s: N \rightarrow L$ en \mathcal{S} , tales que $c \circ t = s \circ b$:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{b} & N \\ \downarrow t & & \\ M & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{b} & N \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{c} & L \end{array}$$

- *Condición de cancelación.* Para cualesquiera morfismos $M \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \xrightarrow{b} \end{array} N$ en \mathbf{C} , se verifica la equivalencia

$$[\exists s \in \mathcal{S} \text{ tal que } s \circ b = s \circ c] \iff [\exists t \in \mathcal{S} \text{ tal que } b \circ t = c \circ t]$$

Observación 4.3.2. Si \mathbf{C} es la categoría cuyo único objeto es un anillo R , y cuyas flechas son los elementos de R , un sistema multiplicativo \mathcal{S} es un subconjunto multiplicativo en el sentido usual.

Definición 4.3.3. La *localización de una categoría \mathbf{C} respecto a un sistema multiplicativo \mathcal{S}* es una categoría $\mathcal{S}^{-1}\mathbf{C}$ junto con un funtor $Q: \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{S}^{-1}\mathbf{C}$ verificando la siguiente propiedad universal,

si $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ es un funtor tal que, $\forall s \in \mathbf{S}$, $F(s)$ es un isomorfismo, existe un único funtor $F_{\mathbf{S}}: \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tal que $F_{\mathbf{S}} \circ Q = F$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{Q} & \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} \\ F \downarrow & \swarrow F_{\mathbf{S}} & \\ \mathbf{D} & & \end{array}$$

4.3.4 Cálculo de fracciones. La técnica conocida como *cálculo de fracciones* permite construir, a partir de un sistema multiplicativo \mathbf{S} de la categoría \mathbf{C} , una categoría $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}$, que posee los mismos objetos que \mathbf{C} , y cuyos morfismos son el resultado de añadir a los morfismos en \mathbf{C} los inversos de los morfismos del sistema \mathbf{S} .

Dados L y M objetos de \mathbf{C} denotemos $\mathbf{S}(L, M) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(L, M) \cap \mathbf{S}$. Para cualesquiera $M, N \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, los elementos de

$$\mathbf{C}^{\mathbf{S}}[M, N] := \bigsqcup_{L \in \text{Ob}(\mathbf{C})} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(L, N) \times \mathbf{S}(L, M)$$

son pares (f, s) que se representan mediante diagramas del tipo

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ M & & N \end{array}$$

que por motivos evidentes, se denominan *tejados*. En $\mathbf{C}^{\mathbf{S}}[M, N]$, se define la relación $(f_1, s_1) \sim (f_2, s_2)$ si existen morfismos $g_1, g_2 \in \mathbf{S}$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1 & & \\ & s_1 \swarrow & \uparrow g_1 & \searrow f_1 & \\ M & & L & & N \\ & s_2 \swarrow & \downarrow g_2 & \searrow f_2 & \\ & & L_2 & & \end{array}$$

La relación \sim es de equivalencia. La comprobación de la reflexividad y simetría de esta relación es inmediata tomando los representantes adecuados. Para la transitividad basta aplicar las condiciones de Ore y cancelación del sistema multiplicativo descritas en 4.3.1.

La categoría $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}$ es la categoría cuyos objetos son los objetos de \mathbf{C} y cuyos morfismos, para cada par de objetos M y N , es el cociente

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}}(M, N) := \frac{\mathbf{C}^{\mathbf{S}}[M, N]}{\sim}. \quad (4.3.4.1)$$

Dadas dos clases $q \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}}(M_1, M_2)$, $q' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}}(M_2, M_3)$, sean (f, s) y (f', s') tejados tales que $q = [(f, s)]$ y $q' = [(f', s')]$. La condición de Ore del sistema multiplicativo \mathbf{S} garantiza la existencia de morfismos g en \mathbf{C} y t en \mathbf{S} que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & & \swarrow t & \searrow g & \\ & L & & & L' \\ & \swarrow s & & \swarrow s' & \searrow f' \\ M_1 & & M_2 & & M_3 \end{array}$$

Se define la composición $q' \circ q$ como la clase determinada por la composición de los tejados que los representan

$$q' \circ q = [(f', s')] \circ [(f, s)] := [(f' \circ g, s \circ t)];$$

es una operación bien definida ya que no depende de los representantes escogidos para q y q' . Por construcción la composición de clases de tejados es asociativa, y para un objeto M la identidad es la clase $[(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)]$. La imagen de un morfismo $f: M \rightarrow N$ de \mathbf{C} mediante el functor $Q: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}$ es la clase $Q(f) = [(f, \mathrm{id}_M)]$. Se construye de esta forma la localización de \mathbf{C} respecto al sistema multiplicativo \mathbf{S} en el sentido de 4.3.3. Se simplifica la notación, identificando $Q(M) = M$ para los objetos de \mathbf{C} y denotando el morfismo $q = [(f, s)]$ por $q = f/s$.

Observación 4.3.5. Existe un problema al considerar en el ámbito general la definición (4.3.4.1), y es que los morfismos entre dos objetos de la categoría $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}$ puede no formar un conjunto, es decir, al localizar nos saldríamos del contexto usual de categorías con Hom's *pequeños*.

4.3.6 Cálculo de fracciones y categorías trianguladas. Sea \mathbf{T} es una categoría triangulada, con functor de traslación T . Un sistema multiplicativo \mathbf{S}

de \mathbf{T} es compatible con la triangulación de \mathbf{T} si $T(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ y en la situación del axioma (TR3) siempre que los morfismos verticales $f, g \in \mathbf{S}$ entonces $h \in \mathbf{S}$.

Teorema 4.3.7. [BrG, I, Theoreme 2.15] Si \mathbf{T} es una categoría triangulada y \mathbf{S} es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación entonces $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$ es una categoría triangulada con funtor traslación inducido por el de \mathbf{T} , y triangulación la determinada por la imagen de los triángulos de \mathbf{T} mediante el funtor $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$.

Proposición 4.3.8. [W, Proposition 10.4.1] Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. La clase \mathbf{S}_0 de los cuasi-isomorfismos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es un sistema multiplicativo compatible con la triangulación.

Definición 4.3.9. Sea $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ la categoría homotópica de la categoría abeliana \mathcal{A} y \mathbf{S}_0 el sistema multiplicativo de los cuasi-isomorfismos. La categoría derivada de \mathcal{A} , es la categoría $\mathbf{D}(\mathcal{A}) := \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{K}(\mathcal{A})$, junto con el Δ -functor canónico $Q: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$.

4.3.10 Localización y subcategorías. A la vista del corolario 4.2.12, el sistema multiplicativo \mathbf{S}_0 de los cuasi-isomorfismos de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ es la clase de los morfismos $f: M \rightarrow N$, tales que $H^n(C(f)) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Si \mathbf{Z}_0 es la clase de los complejos acíclicos de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ entonces $f \in \mathbf{S}_0$ se reescribe mediante la expresión $C(f) \in \mathbf{Z}_0$. La clase \mathbf{Z}_0 es una subcategoría triangulada y claramente estable por sumandos directos, es decir, es una subcategoría gruesa de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

En la proposición 4.3.8 podemos sustituir $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ por una categoría triangulada \mathbf{T} (por ejemplo $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$, $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ o $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$), y \mathbf{S}_0 por la clase de los morfismos de \mathbf{T} que son la base de un triángulo con vértice en una subcategoría triangulada y gruesa dada de \mathbf{T} . La condición de gruesa no es realmente necesaria. De hecho cualquier subcategoría triangulada \mathbf{Z} de una categoría triangulada \mathbf{T} proporciona un subconjunto multiplicativo, la clase $\mathbf{S}_{\mathbf{Z}}$ de los morfismos de \mathbf{T} que son la base de triángulos con vértice en \mathbf{Z} . La localización de \mathbf{T} respecto al sistema multiplicativo $\mathbf{S}_{\mathbf{Z}}$ tiene la propiedad universal de ser la categoría de llegada de un Δ -functor $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{T}$ que anula la subcategoría

Z . Esta construcción se denomina *cociente de Verdier* de la categoría triangulada de partida por la subcategoría triangulada Z y se suele utilizar la notación \mathbf{T}/Z en lugar de $S_Z^{-1}\mathbf{T}$. El núcleo del funtor de paso al cociente $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/Z$ es la menor subcategoría gruesa de la categoría triangulada \mathbf{T} que contiene a Z [N6, véase Theorem 2.1.8].

4.3.11. La categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ hereda a través del funtor localización $Q: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ la estructura triangulada de la categoría homotópica. Además, los triángulos de la categoría derivada están determinados por las sucesiones exactas cortas en la categoría de complejos.

Proposición 4.3.12. *Toda sucesión exacta corta en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$,*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

tiene asociado un triángulo en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L[1].$$

Demostración. Sea $u: L \rightarrow \text{Ker}(f)$ el isomorfismo canónico y sea $\iota: C(u) \rightarrow C(f)$ la inclusión. El morfismo $\phi: C(f) \rightarrow C$ determinado en grado $i \in \mathbb{Z}$, $C(f)^i = M^i \oplus L^{i+1} \xrightarrow{\phi^i} N$, por $\phi^i(m, l) = g^i(m)$, es tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow C(u) \xrightarrow{\iota} C(f) \xrightarrow{\phi} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. Como u es un isomorfismo de complejos, el complejo $C(u)$ es acíclico. De la sucesión exacta larga de cohomología asociada a esta sucesión exacta corta de complejos se deduce que el morfismo de complejos ϕ es un cuasi-isomorfismo. Se tiene entonces un triángulo en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L[1]$$

siendo $h: N \rightarrow L[1]$ el único morfismo en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ tal que $\beta_f = h \circ \phi$. \square

Observación 4.3.13. Uno podría preguntarse qué relación existe entre las sucesiones exactas cortas semiescindidas mencionadas en la proposición 4.2.11

y las sucesiones exactas de complejos consideradas en la proposición anterior. Dada una sucesión exacta corta en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad (*)$$

la proposición anterior garantiza la existencia de un triángulo en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} L[1],$$

isomorfo al triángulo $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\alpha_f} C(f) \xrightarrow{\beta_f} M[1]$. Siendo este último triángulo de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ asociado a la sucesión exacta corta semiescindida de complejos

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{p} C(f) \longrightarrow 0.$$

La respuesta a la pregunta planteada es que estas sucesiones exactas de complejos son *equivalentes*, es decir, representan el mismo elemento en el grupo $E(N, L)$ de las extensiones equivalentes de N por L . Este objeto $E(N, L)$ es naturalmente isomorfo al grupo $\text{Ext}^1(N, L)$, y el isomorfismo entre ellos consiste en asignar a la sucesión exacta corta (*) el morfismo $h = \beta \circ \phi^{-1}$ definido en la demostración de la proposición anterior, es decir, existe una correspondencia entre las extensiones y la clase de isomorfía del morfismo de conexión.

4.3.14. Sea M un complejo sobre una categoría abeliana \mathcal{A} . Para cada entero $n \in \mathbb{Z}$, se definen los complejos $\tau^{\leq n}(M)$ y $\tau^{\geq n}(M)$ mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \tau^{\leq n}(M): \quad & \cdots \longrightarrow M^{n-2} \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow \ker d_M^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ \tau^{\geq n}(M): \quad & \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Coker } d_M^{n-1} \longrightarrow M^{n+1} \longrightarrow M^{n+2} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Los morfismos canónicos $M \rightarrow \tau^{\geq n}M$ y $\tau^{\leq n}M \rightarrow M$ inducen en cohomología las identificaciones

$$H^i(\tau^{\leq n}M) = \begin{cases} H^i(M) & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n+1 \end{cases}, \quad H^i(\tau^{\geq n}M) = \begin{cases} H^i(M) & \text{si } i \geq n \\ 0 & \text{si } i < n \end{cases}$$

Obsérvese que, para cualquier entero n ,

$$H^n(M) = \tau^{\geq n}\tau^{\leq n}M = \tau^{\leq n}\tau^{\geq n}M.$$

Las sucesiones exactas cortas naturales de complejos

$$0 \longrightarrow \tau^{\leq n} M \longrightarrow M \longrightarrow \tau^{\geq n+1} M \longrightarrow 0,$$

determinan triángulos naturales en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$

$$\tau^{\leq n} M \longrightarrow M \longrightarrow \tau^{\geq n+1} M \xrightarrow{+} \quad (4.3.14.1)$$

Los funtores $\tau^{\geq n}$ y $\tau^{\leq n}: \mathbf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ son idempotentes, se denominan *funtores truncamiento*.

Para $\sharp \in \{+, -, \mathbf{b}\}$, sea $\mathbf{D}^{\sharp}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{D}(\mathcal{A})$ la subcategoría plena de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, cuyos objetos pertenecen a $\mathbf{K}^{\sharp}(\mathcal{A})$. Si en todo lo expuesto sobre la construcción de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ a partir de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ sustituimos la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ por cualquiera de sus subcategorías $\mathbf{K}^{\sharp}(\mathcal{A})$, se obtienen las correspondientes subcategorías trianguladas $\mathbf{D}^{\sharp}(\mathcal{A})$.

Existencia de resoluciones

4.3.15. Como consecuencia de la proposición 4.1.5 y (véase observación 4.1.6), para un objeto I de la categoría homotópica $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de la categoría abeliana \mathcal{A} , los siguientes enunciados son equivalentes:¹

- (i) Para todo complejo acíclico $C \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(C, I) = 0$.
- (ii) Para cualquier diagrama $M \xleftarrow{s} M' \xrightarrow{f} I$ en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ con s un cuasi-isomorfismo existe en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ un morfismo $g: M \rightarrow I$ tal que $g \circ s = f$.
- (iii) Todo cuasi-isomorfismo $I \rightarrow M$ en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ posee inverso por la izquierda.
- (iv) El morfismo canónico $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(M, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(Q(M), Q(I))$ es un isomorfismo, para cada $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Definición 4.3.16. Un objeto $I \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ es *K-inyectivo* si verifica las condiciones equivalentes anteriores. Una *resolución K-inyectiva* de $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ es cualquier cuasi-isomorfismo $M \rightarrow I$ en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ con I un complejo K-inyectivo.

¹El lector puede encontrar la demostración de estas equivalencias por ejemplo en [L, Proposition 2.3.8].

4.3.17. Según 4.1.10, la existencia, para cada complejo $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$, de un cuasi-isomorfismo $M \rightarrow I_M$ en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ con I_M verificando la condición (i) implica la existencia de triángulos functoriales

$$C \rightarrow M \rightarrow I_M \xrightarrow{+}$$

Es de especial interés la última caracterización de los objetos K-inyectivos en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Si podemos garantizar la existencia de resoluciones K-inyectivas para cualquier objeto de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ entonces el enunciado (iv) asegura que la categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ es equivalente a $\mathbf{K}(\mathbf{K}\text{-inj})$ la subcategoría de la categoría homotópica cuyos objetos son los complejos K-inyectivos. Como consecuencia la categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ tendría Hom's pequeños.

Supongamos que \mathcal{A} es una *categoría de Grothendieck*, es decir, una categoría abeliana, AB5 y que posee un generador. Entonces \mathcal{A} posee suficientes objetos inyectivos (véase por ejemplo [KS, Theorem 9.6.2]). En este caso existen en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ resoluciones K-inyectivas.

Teorema 4.3.18. [AJS1, Theorem 5.4] Si \mathcal{A} es una categoría de Grothendieck, para cada $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ existe un cuasi-isomorfismo $\rho: M \rightarrow I$ donde I es un objeto K-inyectivo.

4.3.19. Dualizando los enunciados listados en 4.3.15, se definen los *complejos K-proyectivos*. Una *resolución K-proyectiva* de $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$ es cualquier cuasi-isomorfismo $P \rightarrow M$ en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ con P un complejo K-proyectivo.

Podemos asegurar que existen resoluciones K-proyectivas en la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ si \mathcal{A} es la categoría de módulos sobre un anillo R , pero este resultado no se tiene en general para cualquier categoría de Grothendieck.

4.4. Funtores triangulados entre categorías derivadas

4.4.1. Para una categoría abeliana \mathcal{A} , la triangulación definida sobre la categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ es la más pequeña de modo que el functor canónico $Q: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ es un Δ -functor.

Un funtor aditivo $F: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ entre categorías abelianas se extiende a las correspondientes categorías homotópicas

$$F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2).$$

Este funtor conmuta con las traslaciones y, para todo morfismo f en $\mathbf{K}(\mathcal{A}_1)$,

$$F(C(f)) = C_{F(f)},$$

por tanto $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ es un funtor triangulado. Pero no está garantizado que este funtor se pueda «extender» de forma directa a las categorías derivadas, salvo que el funtor original $F: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ sea exacto.

Precisemos qué significa «extender» funtores en este contexto. En general, dado un Δ -funtor $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ se trata de determinar los Δ -funtores que «mejor aproximan» al funtor $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ entre aquellos Δ -funtores $G: \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ que hacen conmutativo (salvo transformación natural de Δ -funtores) el diagrama de categorías trianguladas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) & \xrightarrow{F} & \mathbf{K}(\mathcal{A}_2) \\ Q_1 \downarrow & & \downarrow Q_2 \\ \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) & \xrightarrow{G} & \mathbf{D}(\mathcal{A}_2) \end{array} \quad (4.4.1.1)$$

donde $Q_1: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_1)$ y $Q_2: \mathbf{K}(\mathcal{A}_2) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ son los Δ -funtores canónicos.

Diremos que el funtor triangulado $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ es *derivable por la derecha* si existe un funtor triangulado $\mathbf{R}F: \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ junto con una transformación natural de Δ -funtores $\epsilon: Q_2 \circ F \rightarrow \mathbf{R}F \circ Q_1$ tal que, para cualquier otro Δ -funtor $G: \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ para el que existe una transformación natural de Δ -funtores $\epsilon': Q_2 \circ F \rightarrow G \circ Q_1$, existe una transformación natural de Δ -funtores $\rho: \mathbf{R}F \rightarrow G$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q_2 \circ F & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{R}F \circ Q_1 \\ & \searrow \epsilon' & \downarrow \rho \circ Q_1 \\ & & G \circ Q_1 \end{array}$$

El funtor $\mathbf{R}F$ (para ser más precisos el par $(\mathbf{R}F, \epsilon)$) se denomina *derivado por la derecha* de F .

Análogamente, $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ se dirá *derivable por la izquierda* si existe un funtor triangulado $\mathbf{L}F: \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ junto con una transformación natural de Δ -funtores $\eta: \mathbf{L}F \circ Q_1 \rightarrow Q_2 \circ F$ tal que, de existir otro Δ -funtor $G: \mathbf{D}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_2)$ junto con una transformación natural $\eta': G \circ Q_1 \rightarrow Q_2 \circ F$, existe una transformación natural de Δ -funtores $\sigma: G \circ Q_1 \rightarrow \mathbf{L}F \circ Q_1$ que hace conmutativo el diagrama de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}F \circ Q_1 & \xrightarrow{\eta} & Q_2 \circ F \\ \uparrow \sigma & \nearrow \eta' & \\ G \circ Q_1 & & \end{array}$$

El funtor $\mathbf{L}F$ (más precisamente el par $(\mathbf{L}F, \eta)$) se denomina *derivado por la izquierda* de F .

Observación 4.4.2. En resumen, el derivado por la derecha $(\mathbf{R}F, \epsilon)$ de F es un objeto inicial en la categoría $\text{Fun}_{\Delta}(\mathbf{D}(\mathcal{A}_1), \mathbf{D}(\mathcal{A}_2))$, entre los funtores triangulados G que hacen conmutativo el diagrama 4.4.1.1, y el derivado por la izquierda $(\mathbf{L}F, \eta)$ es un objeto final de la subcategoría de funtores correspondiente.

Por lo general, la existencia del derivado de un funtor triangulado entre categorías homotópicas no es una cuestión sencilla, salvo que tengamos garantizada la existencia de resoluciones adecuadas en la categoría de partida.

Proposición 4.4.3. *[L, Proposition 2.2.3] Sea $F: \mathbf{K}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_2)$ un funtor triangulado. Supongamos que cada objeto $M \in \mathbf{K}(\mathcal{A}_1)$ posee una resolución K-inyectiva $\phi_M: M \rightarrow I_M$. Entonces F posee derivado por la derecha $(\mathbf{R}F, \epsilon)$, el funtor definido por*

$$\mathbf{R}F(M) = F(I_M),$$

con $\epsilon(M) = F(\phi_M): F(M) \rightarrow F(I_M) = \mathbf{R}F(M)$.

Dualmente, si podemos asegurar resoluciones K-proyectivas en la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ entonces existe el derivado por la izquierda de cualquier Δ -funtor definido sobre la categoría $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Este es el caso si \mathcal{A} es la categoría de módulos sobre un

anillo. Como veremos en categorías más generales es posible utilizar otro tipo de resoluciones en categorías homotópicas para construir funtores derivados por la izquierda.

El bifunctor \mathbf{RHom}

4.4.4. Sean $M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ complejos sobre una categoría abeliana \mathcal{A} . El complejo de grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, N)$ es el complejo con componente i -ésima

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^i(M, N) := \prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M^j, N^{j+i}), \quad (4.4.4.1)$$

y cuya diferencial $d^i: \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^i(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{i+1}(M, N)$ actúa sobre un elemento $f = (f^j)_{j \in \mathbb{Z}}$, con componentes $f^j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M^j, N^{j+i})$, de la siguiente forma:

$$d^i(f) = (d_N^{i+j} \circ f^j + (-1)^{i+1} f^{j+1} \circ d_M^j)_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, N)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(M, N[n]) \quad (4.4.4.2)$$

Denotemos por \mathbf{Ab} la categoría de grupos abelianos. Los funtores aditivos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, -): \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{Ab})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, N): \mathbf{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{Ab})$, definen funtores entre las correspondientes categorías homotópicas.

Denotemos por T_1 el funtor traslación de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ y por T_2 el funtor traslación de $\mathbf{K}(\mathbf{Ab})$. El funtor $F_M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, -): \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{Ab})$ conmuta de forma trivial con las traslaciones, por tanto es un Δ -functor. El funtor $G_N = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, N): \mathbf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{Ab})$ es un Δ -functor respecto a la transformación natural $\theta: T_2^{-1}G \xrightarrow{\sim} GT_1$ definido en grado i por $(-1)^i$ (véase [L, §1.5.3]).

Existe entonces un bifunctor triangulado en cada componente

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, -): \mathbf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathbf{Ab})$$

4.4.5. Si \mathcal{A} es una categoría de Grothendieck, empleando la existencia de resoluciones K-inyectivas para complejos sobre \mathcal{A} , podemos extender la definición del bifunctor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}$ a las categorías derivadas

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, -): \mathbf{D}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Ab}).$$

Fijado M un complejo sobre \mathcal{A} , para el Δ -functor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, -): \mathbf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathrm{Ab}),$$

el derivado por la derecha $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, -): \mathbf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathrm{Ab})$ es el definido por $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, I_N)$, donde $N \rightarrow I_N$ es una resolución K-inyectiva de N .

4.4.6. Si la categoría abeliana \mathcal{A} es tal que existen resoluciones K-proyectivas en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Fijado $N \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$, el functor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, N): \mathbf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{K}(\mathrm{Ab})$$

posee derivado por la derecha $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, N): \mathbf{D}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{D}(\mathrm{Ab})$, definido por

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(P_M, N),$$

siendo $P_M \rightarrow M$ una resolución K-proyectiva de M .

4.4.7. Equilibrio del Ext. Supongamos que \mathcal{A} es una categoría de módulos sobre un anillo. En este caso en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ existen los dos tipos de resoluciones, las K-inyectivas y las K-proyectivas. Dados $M, N \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$, denotemos $F_M = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, -)$ y $G_N = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(-, N)$. Los funtores inducidos entre las categorías homotópicas $F_M: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathrm{Ab})$ y $G_N: \mathbf{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{K}(\mathrm{Ab})$ son tales que $\mathbf{R}F_M(N)$ y $\mathbf{R}G_N(M)$ son canónicamente isomorfos. Es decir, para determinar $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(M, N)$ podemos utilizar una resolución K-proyectiva de M o una resolución K-inyectiva de N (véase [W, Theorem 2.7.6] o [L, §2.4.3 y Lemma 2.4.4]).

4.4.8. Una interpretación verdaderamente útil se deduce de la equivalencia (iv) en 4.3.15 y de la observación (4.4.4.2):

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, M[n]), \quad n \in \mathbb{Z},$$

equivalentemente, $\mathrm{H}^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(X, M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X[-n], M)$.

4.5. Categoría derivada de una categoría monoidal

4.5.1. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana que además es una categoría monoidal simétrica (véase [M, §XI.1], o [L, Definition 3.4.1]). Como es habitual utilizaremos la notación $N \otimes M$ para el tensor de objetos $M, N \in \mathcal{A}$, $1_{\mathcal{A}}$ para el objeto unidad, y $\sigma: M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$ para el isomorfismo natural de simetría.

El producto tensor $M \otimes N$ de dos complejos $M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ es el complejo cuya entrada en grado $i \in \mathbb{Z}$ es

$$(M \otimes N)^i := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (M^j \otimes N^{i-j}),$$

cuya diferencial $d^i: (M \otimes N)^i \rightarrow (M \otimes N)^{i+1}$ es la definida por

$$d^i|_{M^j \otimes N^{i-j}} = d_M^j \otimes \text{id} + (-1)^j \text{id} \otimes d_N^{i-j}.$$

El isomorfismo natural $\theta_{st}: M[s] \otimes N[t] \rightarrow (M \otimes N)[s+t]$ determinado por

$$\theta_{ks}|_{M^{p+k} \otimes N^{q+s}} = \text{multiplicación por } (-1)^{ps}$$

describe la interacción entre el tensor de complejos y el functor traslación.

Los funtores $M \otimes -: \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$ y $- \otimes N: \mathbf{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{C}(\mathcal{A})$ son aditivos. Los funtores inducidos entre las categorías homotópicas

$$M \otimes -: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}), \quad - \otimes N: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}) \quad (4.5.1.1)$$

son Δ -funtores, mediante los respectivos isomorfismos de conmutatividad con las traslaciones que son el isomorfismo θ_{01} y la identidad, θ_{10} , respectivamente.

Si además la categoría \mathcal{A} es tal que existen resoluciones K-proyectivas en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, se definen, para M, N complejos sobre \mathcal{A} los derivados por la izquierda de los funtores (4.5.1.1)

$$M \otimes^{\mathbf{L}} -: \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}), \quad - \otimes^{\mathbf{L}} N: \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$$

mediante las respectivas expresiones $M \otimes^{\mathbf{L}} B := M \otimes P_B$ y $B \otimes^{\mathbf{L}} N := P_B \otimes N$, siendo $P_B \rightarrow B$ una resolución K-proyectiva de $B \in \mathbf{K}(\mathcal{A})$.

El tensor $- \otimes^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \times \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$, junto con el complejo objeto unidad de \mathcal{A} y el isomorfismo de simetría obtenido extendiendo σ definen en $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ una estructura monoidal simétrica ([L, §2.5]).

4.5.2. Supongamos que la categoría abeliana \mathcal{A} además de ser una categoría monoidal simétrica es una categoría cerrada [L, Definition 3.5.1]. Denotemos por

$$\mathcal{H}om : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

el bifunctor Hom-interno de la categoría cerrada \mathcal{A} . Dados $M, N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ complejos, $\mathcal{H}om^{\bullet}(M, N)$ denotará el complejo sobre \mathcal{A} definido de forma análoga al complejo (4.4.4.1), haciendo uso del Hom-interno en lugar del grupo de homomorfismos.

El bifunctor $\mathcal{H}om^{\bullet}(-, -)$ induce un bifunctor

$$\mathcal{H}om^{\bullet}(-, -) : \mathbf{K}(\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}),$$

triangulado en cada componente con los isomorfismos de conmutatividad respecto a las traslaciones definidos siguiendo la pauta de 4.4.4. Si existen resoluciones K-inyectivas en $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, el funtor $\mathcal{H}om^{\bullet}(M, -) : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A})$ posee derivado a la derecha $\mathbf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}(M, -) : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$.

Como consecuencia del siguiente resultado la categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ es una categoría monoidal simétrica cerrada, cuyo Hom-interno viene dado por el bifunctor triangulado

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}(-, -) : \mathbf{D}(\mathcal{A})^{\text{op}} \times \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}).$$

Proposición 4.5.3. *Sea \mathcal{A} una categoría monoidal simétrica cerrada. Si existen resoluciones K-proyectivas y K-inyectivas en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, entonces en $\mathbf{D}(\text{Ab})$ existe un isomorfismo natural*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}^{\bullet}(L \otimes^{\mathbf{L}} M, N) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}^{\bullet}(L, \mathbf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}(M, N)), \quad (4.5.3.1)$$

para cualesquiera $L, M, N \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$.

Demostración. Si $P_M \rightarrow M$ es una resolución K-plana de M y $N \rightarrow I_N$ una resolución K-inyectiva de N entonces $\mathcal{H}om^\bullet(P_M, I_N)$ es un complejo K-inyectivo. Como consecuencia de la adjunción \otimes -hom en \mathcal{A} el morfismo canónico de complejos de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet(L \otimes P_M, I_N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^\bullet(L, \mathcal{H}om^\bullet(P_M, I_N))$$

es un isomorfismo. De este isomorfismo se deduce la existencia del isomorfismo anunciado en la categoría $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. \square

Corolario 4.5.4. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior la categoría $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ es una categoría monoidal simétrica cerrada.*

Demostración. Sin más que aplicar el funtor H^0 al cuasi-isomorfismo (4.5.3.1), se obtiene el isomorfismo natural de adjunción

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(L \otimes^{\mathbf{L}} N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(L, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}^\bullet(M, N)).$$

para cualesquiera $L, M, N \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$. Se deja al lector la comprobación para $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de los correspondientes axiomas de categoría simétrica cerrada. \square

4.6. Localizaciones de Bousfield

Dedicamos esta última sección de preliminares generales a introducir los principales objetos de estudio de esta memoria, las subcategorías *localizantes* y las subcategorías *colocalizantes* en categorías trianguladas. Una explicación detallada de estos conceptos se puede encontrar en [N6, §9]. Seguiremos en nuestra exposición la estructura y la notación del epígrafe §1 de [AJS1].

Definición 4.6.1. Sea \mathbf{T} una categoría triangulada. Una subcategoría triangulada \mathbf{L} de \mathbf{T} es *localizante* si es cerrada para coproductos. Análogamente, una subcategoría triangulada \mathbf{C} de \mathbf{T} es *colocalizante* si es cerrada para productos.

4.6.2. Dada una clase de objetos $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$ se define su *ortogonal por la derecha* \mathbf{S}^\perp y su *ortogonal por la izquierda* ${}^\perp\mathbf{S}$ como las subcategorías plenas definidas

por las expresiones:

$$S^\perp = \{ N \in \mathbf{T} \mid \text{Hom}_{\mathbf{T}}(S[n], N) = 0, \forall S \in S, n \in \mathbb{Z} \}$$

$${}^\perp S = \{ M \in \mathbf{T} \mid \text{Hom}_{\mathbf{T}}(M, S[n]) = 0, \forall S \in S, n \in \mathbb{Z} \}$$

Como consecuencia directa de las observaciones 4.1.6 y 4.1.13, ${}^\perp S$ y S^\perp son subcategorías trianguladas de \mathbf{T} , por tanto S^\perp es una subcategoría colocalizante de \mathbf{T} y ${}^\perp S$ colocalizante.

4.6.3. Dada una colección de objetos $S \subset \mathbf{T}$, denotaremos por $\text{Loc}(S)$ la menor subcategoría localizante de \mathbf{T} que contiene a S . La categoría $\text{Loc}(S)$ se denomina la *subcategoría localizante de \mathbf{T} generada por S* . Análogamente, denotaremos por $\text{Coloc}(S)$ a la subcategoría colocalizante de \mathbf{T} más pequeña que contiene a S , es decir la *subcategoría colocalizante generada por S* .

4.6.4 El truco de Eilenberg. Si una categoría triangulada \mathbf{T} posee coproductos entonces toda subcategoría localizante L de \mathbf{T} es gruesa, es decir, es cerrada para sumandos directos. En efecto, sean $X_1, X_2 \in L$ tales que $X = X_1 \oplus X_2 \in L$, o equivalentemente tales que $X' = X_2 \oplus X_1 \in L$, comprobemos que cualquiera de los sumandos pertenece a L . Obsérvese que

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X \cong X_1 \oplus ((X_2 \oplus X_1) \oplus (X_2 \oplus X_1) \oplus \cdots) \cong X_1 \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X'$$

Es decir, X_1 es el vértice del monomorfismo canónico

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X' \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X,$$

y puesto que L es triangulada y $X', X \in L$, X_1 también pertenece a L .

Análogamente, teniendo en cuenta que los coproductos finitos coinciden con los productos finitos, se demuestra que si la categoría triangulada \mathbf{T} posee productos toda subcategoría colocalizante de \mathbf{T} es cerrada para sumandos directos.

Las subcategorías localizantes y colocalizantes surgen de forma natural en procesos de localización y colocalización en categorías trianguladas (véase la observación 4.3.10).

Dada un subcategoría localizante \mathbf{L} de una categoría triangulada \mathbf{T} , es posible considerar la categoría cociente \mathbf{T}/\mathbf{L} de la categoría triangulada \mathbf{T} respecto a la subcategoría localizante \mathbf{L} .

Definición 4.6.5. Sea \mathbf{T} una categoría triangulada. Una *localización de Bousfield* en \mathbf{T} es un par (ℓ, η) formado por un Δ -functor $\ell: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ y una transformación natural $\eta: \text{id} \rightarrow \ell$, tales que, $\ell\eta = \eta\ell: \ell \rightarrow \ell \circ \ell$ es un isomorfismo de funtores, es decir, para todo $X \in \mathbf{T}$, el morfismo

$$\ell\eta_X = \eta_{\ell(X)}: \ell(X) \rightarrow \ell^2(X)$$

es un isomorfismo natural. Se dice que $\ell: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ es un functor de localización.

Proposición 4.6.6. Dada una localización de Bousfield (ℓ, η) en una categoría triangulada \mathbf{T} , la subcategoría plena $\mathbf{L} \subset \mathbf{T}$ dada por los $X \in \text{Ob}(\mathbf{T})$ tales que $\ell(X) = 0$ es una subcategoría localizante.

Demostración. La categoría \mathbf{L} es triangulada ya que ℓ es un functor triangulado. Dada $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de \mathbf{L} , para todo objeto $Y \in \mathbf{T}$ se tiene el isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathbf{T}}\left(\bigoplus_{i \in I} X_i, \ell(Y)\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{T}}(X_i, \ell(Y)).$$

Bastaría entonces comprobar que la condición $\ell(X) = 0$ equivale a la condición $\text{Hom}(X, \ell(Y)) = 0$ para todo $Y \in \mathbf{T}$.

Si $\ell(X) = 0$, obsérvese que cualquier morfismo $X \rightarrow \ell(Y) \cong \ell^2(Y)$ se factoriza por $\ell(X)$, luego ha de ser el morfismo cero. Recíprocamente, si el isomorfismo canónico $\ell(X) \xrightarrow{\eta_{\ell(X)}} \ell^2(X)$ se anula, $\ell(X)$ ha de ser cero. \square

Un functor localización de una categoría triangulada \mathbf{T} , $\ell: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, determina canónicamente una subcategoría localizante de \mathbf{T} , la subcategoría plena de los objetos $X \in \mathbf{T}$ tales que $\ell(X) = 0$. El siguiente resultado proporciona una serie de equivalencias sobre aquellas categorías localizantes que proceden de un functor de localización.

Teorema 4.6.7. [AJS1, Proposition 1.6] Sea \mathbf{T} una categoría triangulada y \mathbf{L} una subcategoría localizante de \mathbf{T} . Denotemos por $i: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{T}$ y $j: \mathbf{L}^\perp \rightarrow \mathbf{T}$ las inclusiones y por $Q: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/\mathbf{L}$ el funtor de paso al cociente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) Existe una localización de Bousfield (ℓ, η) de forma que

$$\mathbf{L} = \{N \in \mathbf{T} \mid \ell(N) = 0\}.$$

(ii) El funtor Q tiene adjunto por la derecha.

(iii) La composición $Q \circ j$ es una equivalencia de categorías.

(iv) El funtor j posee adjunto por la izquierda y, además, ${}^\perp(\mathbf{L}^\perp) = \mathbf{L}$.

(v) El funtor i posee adjunto por la derecha.

(vi) Para todo $M \in \mathbf{T}$ existe un triángulo

$$N_M \longrightarrow M \longrightarrow F_M \xrightarrow{+}$$

con $N_M \in \mathbf{L}$ y $F_M \in \mathbf{L}^\perp$.

4.6.8. Una primera consecuencia de este resultado es que el morfismo canónico $\eta_M: M \rightarrow \ell(M)$ se inserta en un triángulo de la forma

$$N \longrightarrow M \longrightarrow \ell(M) \xrightarrow{+},$$

y se tiene que $\ell(M) \in \mathbf{L}^\perp$ y $N \in \mathbf{L}$. Este es el triángulo que se muestra en el último apartado del resultado anterior. Esta asignación es funtorial, es decir existe un funtor $\gamma: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ que proporciona un triángulo funtorial

$$\gamma(M) \longrightarrow M \longrightarrow \ell(M) \xrightarrow{+}$$

con $\gamma(N) \in \mathbf{L}$ y $\ell(N) \in \mathbf{L}^\perp$. Además $\mathbf{L} = {}^\perp(\mathbf{L}^\perp)$. El funtor $\gamma: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ se denomina funtor aciclización asociado al funtor localización $\ell: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$.

4.6.9. La noción dual a la de *funtor localización* y *subcategoría localizante* de una categoría triangulada es la de *funtor colocalización* y *subcategoría colocalizante*. La subcategoría $\mathbf{C} = \{F \in \mathbf{T} \mid \ell(F) = F\} = \mathbf{L}^\perp$ es colocalizante. En este caso diremos que γ es un funtor colocalización y ℓ la correspondiente coaciclización.

4.6.10. Uno de los principales objetivos de nuestro trabajo es la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes en el contexto de categorías derivadas de complejos de haces de módulos sobre esquemas. Son categorías derivadas de categorías de Grothendieck. Una categoría abeliana \mathcal{A} es una categoría de Grothendieck si posee un generador, y por tanto admite límites y colímites. La categoría $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ hereda estas propiedades. Sin embargo, como señalamos en la primera sección de este capítulo, al pasar de la categoría de complejos $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ a la categoría homotópica $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ no está garantizado que se conserve la estructura de categoría abeliana, y por tanto no tenemos garantizada la existencia de límites y colímites en $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Pero sí existen los denominados colímites homotópicos de diagramas dirigidos de complejos. El lector puede consultar [N6, §1.6] para repasar la definición de este concepto. En [AJS1] haciendo uso de la existencia de colímites homotópicos los autores demuestran la existencia de localizaciones de Bousfield en categorías derivadas de categorías de Grothendieck.

Teorema 4.6.11. [AJS1, Theorem 5.7] *Si \mathcal{A} es una categoría de Grothendieck, para cualquier objeto $E \in \mathbf{D}(\mathcal{A})$ existe un funtor localización*

$$\ell: \mathbf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$$

cuya subcategoría localizante $\text{Loc}(\{E\}) \subset \mathbf{D}(\mathcal{A})$ es ${}^{\perp}(\{E\}^{\perp})$.

Observación 4.6.12. El resultado dual sobre la existencia de colocalizaciones determinada por una familia de objetos requiere la existencia de un funtor colocalización asociado a una subcategoría colocalizante de la categoría derivada de una de Grothendieck; para su construcción necesitamos hacer uso de límites homotópicos. Esta construcción no ha sido estudiada en este contexto y fue uno de los primeros objetos de estudio nuestro trabajo de investigación.

Operaciones cohomológicas con coeficientes cuasicoherentes

En este capítulo presentamos los resultados sobre las categorías derivadas de complejos de haces de módulos sobre un esquema haciendo énfasis en los complejos con cohomología cuasicoherente. Nuestra motivación es establecer las propiedades del contexto de trabajo que nos permitirán, en el siguiente capítulo, proponer demostraciones claras y directas sobre la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes en esquemas.

Las referencias fundamentales que hemos empleado para la elaboración de este capítulo son [L] y [H].

5.1. Estructura monoidal cerrada de categorías de haces de módulos

Un *esquema* es un espacio localmente anillado (X, \mathcal{O}_X) que admite un recubrimiento por abiertos $\{U_i; i \in I\}$ de forma que, para todo $i \in I$, $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es un espacio localmente anillado isomorfo a un *esquema afín* $\text{Spec}(R_i)$, con R_i un anillo conmutativo.

Nos referiremos a un esquema o en general a un espacio anillado (X, \mathcal{O}_X) haciendo mención simplemente al espacio topológico X , asumiendo la notación \mathcal{O}_X para el haz de anillos estructural.

Un *morfismo de esquemas* $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de espacios anillados locales, es decir, es una aplicación continua de espacios topológicos junto con

un morfismo de haces de anillos $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ tal que, para todo $x \in X$, la aplicación inducida entre los tallos $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ es un homomorfismo local.

Fijado X un esquema o, en general un espacio anillado, $\mathcal{A}(X)$ denotará la categoría de haces de \mathcal{O}_X -módulos, $\mathbf{C}(X)$ la categoría $\mathbf{C}(\mathcal{A}(X))$ de complejos de \mathcal{O}_X -módulos, $\mathbf{K}(X)$ denotará la categoría homotópica y $\mathbf{D}(X)$ la categoría derivada construidas a partir de la categoría de complejos de haces de \mathcal{O}_X -módulos.

Estructura monoidal

5.1.1. Sea X un espacio anillado. El producto tensor $\mathcal{F} \otimes_X \mathcal{G}$, de dos haces $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{A}(X)$, es el haz de \mathcal{O}_X -módulos asociado al prehaz definido, para cada abierto $U \subset X$, por

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

El tensor de haces es un bifuntor

$$- \otimes_X -: \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(X)$$

que define sobre $\mathcal{A}(X)$ una estructura de categoría monoidal simétrica, siendo el objeto identidad el haz estructural \mathcal{O}_X .

Como se indica en 4.5.1, el tensor de haces de módulos se extiende a un bifuntor de complejos sobre $\mathcal{A}(X)$

$$- \otimes_X -: \mathbf{C}(X) \times \mathbf{C}(X) \longrightarrow \mathbf{C}(X),$$

que es aditivo en cada componente y por tanto define un operador tensor sobre la categoría homotópica

$$- \otimes_X -: \mathbf{K}(X) \times \mathbf{K}(X) \longrightarrow \mathbf{K}(X),$$

En el contexto de haces de módulos no existen en general resoluciones K -proyectivas. Es posible extender el bifuntor tensor a la categoría derivada haciendo uso de las denominadas resoluciones K -planas.

5.1.2. Un complejo \mathcal{P} sobre $\mathcal{A}(X)$ es *K-plano* si $\mathcal{E} \otimes_X \mathcal{P}$ es acíclico para todo complejo acíclico $\mathcal{E} \in \mathbf{C}(X)$, o equivalentemente, si para todo cuasi-isomorfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de complejos sobre $\mathcal{A}(X)$, $\mathcal{P} \otimes_X \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P} \otimes_X \mathcal{N}$ es un cuasi-isomorfismo [L, Definition 2.5.1].

Existen *resolución K-planas* funtoriales en $\mathbf{K}(X)$. Estas resoluciones pueden construirse para cualquier espacio anillado, empleando el hecho de que la categoría $\mathcal{A}(X)$ posee una familia de generadores formada por objetos planos, la familia de haces $\{\mathcal{O}_{(U)} \mid U \in \mathcal{B}\}$, donde \mathcal{B} es una base de abiertos de la topología de X y $\mathcal{O}_{(U)} \in \mathcal{A}(X)$ denota la extensión por cero del haz $\mathcal{O}_X|_U \in \mathcal{A}(U)$.

Proposición 5.1.3. [L, Proposition 2.5.5] Dado X un espacio anillado, para cualquier complejo de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{F} existe un cuasi-isomorfismo natural $\psi_{\mathcal{F}}: P_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$ compatible con la traslación y tal que el complejo de \mathcal{O}_X -módulos $P_{\mathcal{F}}$ es *K-plano*.

5.1.4. Entonces como caso particular de 4.5.1, dados \mathcal{M}, \mathcal{N} complejos sobre $\mathcal{A}(X)$, se definen los funtores derivados

$$\mathcal{M} \otimes^{\mathbf{L}} -: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X), \quad - \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{N}: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X) \quad (5.1.4.1)$$

mediante las respectivas expresiones $\mathcal{M} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F} := \mathcal{M} \otimes P_{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{N} := P_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{N}$.

El bifunctor

$$- \otimes^{\mathbf{L}} -: \mathbf{D}(X) \times \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X),$$

junto con el objeto unidad \mathcal{O}_X y el isomorfismo de simetría inducido por el de $\mathcal{A}(X)$ determinan la estructura monoidal simétrica de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$.

Estructura monoidal cerrada

5.1.5. La estructura de categoría cerrada de la categoría monoidal $\mathcal{A}(X)$ viene dada por el bifunctor haz de homomorfismos que denotaremos por $\mathcal{H}om_X(-, -)$. Dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{A}(X)$, $\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es el haz definido, para cada abierto $U \subset X$, por

$$\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

El complejo $\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ para complejos de haces $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{C}(X)$ se construye como en 4.4.4 haciendo uso del haz de homomorfismos. Esta asignación define un bifunctor triangulado (en cada componente) entre las categorías homotópicas

$$\mathcal{H}om_X^\bullet(-, -): \mathbf{K}(X)^{\text{op}} \times \mathbf{K}(X) \longrightarrow \mathbf{K}(X),$$

que se extiende a un bifunctor triangulado entre categorías derivadas gracias a la existencia de resoluciones K-inyectivas enunciada en 4.3.18, ya que $\mathcal{A}(X)$ es una categoría de Grothendieck.

Proposición 5.1.6. *En este contexto existen en $\mathbf{D}(X)$ isomorfismos naturales*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{M}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})),$$

para cualesquiera \mathcal{M}, \mathcal{F} y \mathcal{G} complejos de haces de \mathcal{O}_X -módulos.

Demostración. El argumento es análogo al de la proposición 4.5.3, utilizando resoluciones K-planas en lugar de K-proyectivas, teniendo en cuenta que $\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un complejo K-inyectivo si \mathcal{F} es un complejo K-plano y \mathcal{G} un complejo K-inyectivo. \square

Corolario 5.1.7. *En las hipótesis anteriores, para cualesquiera complejos de haces de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{M}, \mathcal{F} y \mathcal{G} , existen isomorfismos naturales en $\mathbf{D}(\mathcal{A}b)$*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{M}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})),$$

e isomorfismos naturales de grupos abelianos

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Demostración. El primer isomorfismo se obtiene calculando las secciones derivadas del isomorfismo de la proposición anterior. El segundo calculando la cohomología H^0 del primer isomorfismo (véase 4.4.8). \square

5.2. Funtores imagen directa e inversa

Dado $f: X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios anillados, el functor *imagen directa* $f_*: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$, es el functor que asigna a un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} el haz $f_*\mathcal{F}$ definido sobre un abierto $U \subset Y$ por

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

La estructura de $f_*\mathcal{F}$ como \mathcal{O}_Y -módulo viene dada por el homomorfismo adjunto del homomorfismo estructural f^\sharp .

El functor *imagen inversa* $f^*: \mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$, es el adjunto por la izquierda del functor imagen directa. Para un haz \mathcal{G} sobre Y , $f^*\mathcal{G}$ es el haz

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X,$$

donde, para \mathcal{N} cualquier haz de \mathcal{O}_Y -módulos, $f^{-1}\mathcal{N}$ denota el haz asociado al prehaz definido, para cada abierto $V \subset Y$, por $\varinjlim_{U \subset f(V)} \mathcal{N}(U)$, y el producto tensor es el producto tensor de haces, definido en el párrafo anterior, donde \mathcal{O}_X tiene estructura de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -módulo a través del morfismo adjunto de f^\sharp .

5.2.1. Los funtores imagen directa e inversa, asociados a un morfismo de espacios anillados, son aditivos y por tanto se extienden a las categorías homotópicas correspondientes. La existencia de resoluciones K-inyectivas (4.3.18) y K-planas (5.1.3) en categorías de haces de módulos sobre espacios anillados garantizan la extensión de los funtores imagen directa e inversa a funtores triangulados entre las correspondientes categorías derivadas,

$$\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y) \quad \mathbf{L}f^*: \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}(X).$$

Los funtores f^* y f_* son adjuntos, también lo son sus versiones derivadas, como se refleja en el siguiente resultado.

Proposición 5.2.2. [L, Proposition 3.2.1] Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de espacios anillados, dados $\mathcal{F} \in \mathbf{D}(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathbf{D}(Y)$, se tienen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathbf{L}f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathcal{G}, \mathbf{R}f_*\mathcal{F})$$

Como consecuencia se obtiene una propiedad básica de los funtores imagen directa e inversa derivados. El functor $\mathbf{L}f^*$ conmuta con coproductos, es decir, dada una familia $\{\mathcal{G}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbf{D}(Y)$ el homomorfismo natural

$$\bigoplus_{\lambda} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}f^* \left(\bigoplus_{\lambda} \mathcal{G}_\lambda \right)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(X)$. El functor $\mathbf{R}f_*$ conmuta con productos, es decir, dada una familia $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathbf{D}(X)$ el homomorfismo natural

$$\mathbf{R}f_* \left(\prod_{\lambda} \mathcal{F}_\lambda \right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda} \mathbf{R}f_* \mathcal{F}_\lambda$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(Y)$.

En este escenario recordemos brevemente las relaciones entre los funtores derivados $\mathbf{R}f_*$ y $\mathbf{L}f^*$ asociados a un morfismo de espacios anillados $f: X \rightarrow Y$ y la estructura monoidal $\otimes^{\mathbf{L}}$ y $\mathbf{R}\mathcal{H}om^{\bullet}$ en las categorías $\mathbf{D}(X)$ y $\mathbf{D}(Y)$.

En primer lugar la adjunción anterior tiene una versión hacificada:

Proposición 5.2.3. *[L, Proposition 3.2.3 (ii)] Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios anillados, existe un isomorfismo natural*

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\bullet}(\mathbf{L}f^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y^{\bullet}(\mathcal{G}, \mathbf{R}f_* \mathcal{F}) \quad (\mathcal{F} \in \mathbf{D}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{D}(Y)).$$

5.2.4. Dado un morfismo de espacios anillados $f: X \rightarrow Y$ la siguiente propiedad expresa la compatibilidad de los funtores imagen directa e inversa con la estructura monoidal de las categorías derivadas de haces de módulos.

Proposición 5.2.5. *[L, Proposition 3.2.4] Dado $f: X \rightarrow Y$ un morfismo de espacios anillados, existe un isomorfismo natural*

$$\mathbf{L}f^*(\mathcal{G}_1 \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathcal{G}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}_1 \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}_2 \quad (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathbf{D}(Y)). \quad (5.2.5.1)$$

5.2.6. El inverso del isomorfismo (5.2.5.1) proporciona la estructura monoidal del functor imagen inversa $\mathbf{L}f^*: \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}(X)$. La estructura monoidal de la imagen directa $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$ viene definida por el homomorfismo natural

$$\mathbf{R}f_* \mathcal{F}_1 \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_* \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathbf{R}f_* (\mathcal{F}_1 \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}_2) \quad (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{D}(X)), \quad (5.2.6.1)$$

adjunto del homomorfismo

$$\mathbf{L}f^*(\mathbf{R}f_*\mathcal{F}_1 \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_*\mathcal{F}_2) \cong \mathbf{L}f^*\mathbf{R}f_*\mathcal{F}_1 \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*\mathbf{R}f_*\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}_2$$

que resulta de la composición del inverso de (5.2.5.1) y el homomorfismo definido por la counidad $\mathbf{L}f^*\mathbf{R}f_* \longrightarrow \text{id}$.

5.2.7. Consideremos para $\mathcal{F} \in \mathbf{D}(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathbf{D}(Y)$ el homomorfismo

$$\mathbf{L}f^*(\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*\mathcal{G}, \quad (5.2.7.1)$$

obtenido mediante la composición del isomorfismo (5.2.5.1) y el homomorfismo definido por la counidad de la adjunción $\mathbf{L}f^* \dashv \mathbf{R}f_*$,

$$\mathbf{L}f^*(\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathcal{G}) \cong \mathbf{L}f^*\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*\mathcal{G}.$$

El adjunto del homomorfismo (5.2.7.1)

$$\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{R}f_*(\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*\mathcal{G}), \quad (5.2.7.2)$$

define un morfismo natural de Δ -funtores, el denominado *morfismo de proyección* (asociado al morfismo f).

5.2.8. Para un par de morfismos componibles de espacios anillados $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, los funtores imagen directa $f_*: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ y $g_*: \mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(Z)$ son tales que $(gf)_* = g_*f_*$, esta relación determina un isomorfismo natural entre sus correspondientes adjuntos $(gf)^* \xrightarrow{\sim} g^*f^*$. En el caso de los correspondientes funtores derivados existe un único isomorfismo de Δ -funtores

$$\text{ps}_*(f, g): \mathbf{R}(gf)_* \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}g_*\mathbf{R}f_*,$$

que determina un isomorfismo entre los Δ -funtores adjuntos

$$\text{ps}^*(f, g): \mathbf{L}f^*\mathbf{L}g^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}(gf)^*.$$

La asignación, definida sobre la categoría de espacios anillados, que hace corresponder a cada espacio anillado X su categoría derivada $\mathbf{D}(X)$ y a cada

morfismo de espacios anillados f los funtores imagen directa derivada $\mathbf{R}f_*$ e imagen inversa derivada $\mathbf{L}f^*$, y su relación con la estructura monoidal de las categorías derivadas de complejos de haces de módulos sobre las que están definidos, se expresan mediante la noción de Δ -pseudofuntores monoidales adjuntos. Para un enunciado preciso de las propiedades de este tipo de estructura véase [L, Chapter 3, §3.6]. A lo largo de la memoria haremos uso de este tipo de estructuras en varios contextos.

5.3. Complejos de módulos con cohomología cuasicoherente sobre esquemas concentrados

5.3.1. Sea X un esquema. Un haz de módulos $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(X)$ se dice *cuasicoherente* si es localmente presentable, es decir, si existe un recubrimiento $\{U_\lambda \mid \lambda \in I\}$ por abiertos de X , tal que para todo $\lambda \in I$, $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ admite una presentación

$$\mathcal{O}_X^{(J'_\lambda)}|_{U_\lambda} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{(J_\lambda)}|_{U_\lambda} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_\lambda} \longrightarrow 0,$$

para ciertos conjuntos J'_λ, J_λ . Equivalentemente, un haz de módulos $\mathcal{F} \in \mathcal{A}(X)$ es cuasicoherente si para cualquier abierto afín $U = \text{Spec}(R) \subset X$, el haz $\mathcal{F}|_U$ es el haz asociado al R -módulo $M = \Gamma(U, \mathcal{F})$.

Denotaremos por $\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$ la subcategoría plena de la categoría $\mathcal{A}(X)$ cuyos objetos son los haces de módulos cuasicoherentes. Ambas categorías $\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$ y $\mathcal{A}(X)$ son categorías de Grothendieck. Por tanto todas las herramientas introducidas en el capítulo 4 se aplican para las correspondientes categorías derivadas $\mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X))$ y $\mathbf{D}(X)$.

El funtor inclusión $i: \mathcal{A}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ conserva coproductos entonces, por el *Teorema del funtor adjunto especial* [M, §8], posee adjunto por la derecha, es el denominado *functor coherador* que denotaremos por $q_X: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$ (véase [TT, Appendix B]). La inclusión $i: \mathcal{A}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ es un funtor exacto, por tanto se extiende a un Δ -funtor $i: \mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)) \rightarrow \mathbf{D}(X)$. Como existen resoluciones K-inyectivas en $\mathbf{K}(X)$, por el teorema 4.3.18 es posible extender el

funtor $q_X : \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X))$ a un funtor entre las categorías trianguladas

$$\mathbf{R}q_X : \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)).$$

5.3.2. Un esquema X es *semiseparado* si la intersección de dos abiertos afines de X es un abierto afín.

Si el esquema X es cuasicompacto y semiseparado entonces la factorización $i : \mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ induce una equivalencia de categorías con cuasi-inverso $\mathbf{R}q_X : \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X))$ ([AJL1, Proposición (1.3)]). En particular si $X = \text{Spec}(R)$ es un esquema afín entonces $\mathbf{D}(R)$, la categoría derivada de R -módulos, es equivalente a la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

5.3.3. Un esquema es cuasicompacto si la intersección de dos abiertos cuasicompactos es un abierto cuasicompacto. Supongamos que X es un esquema *concentrado*, es decir, un esquema cuasicompacto y cuasiseparado.

La categoría $\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$ es una subcategoría de Serre débil de $\mathcal{A}(X)$, es decir, es una subcategoría plena de $\mathcal{A}(X)$ que contiene al objeto cero y es cerrada para núcleos, conúcleos y extensiones (en [L, §1.9] este tipo de subcategorías se denominan *plump*). Por tanto la subcategoría plena $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \subset \mathbf{D}(X)$ es triangulada y cerrada para coproductos, es decir, es una subcategoría localizante de la categoría $\mathbf{D}(X)$. En [?, Teorema 3.1.1] se establece que la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ está generada por compactos. Los objetos compactos en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ son precisamente los complejos perfectos. Recordemos que un complejo $\mathcal{P} \in \mathbf{D}(X)$ es *perfecto* si es localmente cuasi-isomorfo a un complejo acotado de haces localmente libres. Según lo expuesto en § 4.6, como consecuencia de [AJS1, Theorem 5.7, Proposition 1.6]), la inclusión $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \subset \mathbf{D}(X)$ posee adjunto por la derecha, es decir, existe un *funtor aciclización*

$$\gamma^{\text{qc}} : \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X),$$

tal que $\gamma^{\text{qc}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ si, y sólo si, $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. En particular, la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ tiene todos los productos. En efecto, dada $\{\mathcal{F}_i; i \in I\}$ una familia de objetos en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, siendo $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ el producto de los objetos de la familia en $\mathbf{D}(X)$, $\gamma^{\text{qc}} \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es el producto en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, que denotaremos por $\prod_{i \in I}^{\text{qc}} \mathcal{F}_i$.

Nótese que el functor inclusión $\iota: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X)$ conserva todos coproductos pero en general *no* conserva productos.

5.3.4. Estamos ahora en posición de establecer, para un esquema concentrado X , la estructura de categoría monoidal de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

Dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ se verifica que $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ (véase [L, Proposition 3.9.1]). Por tanto, la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ hereda la estructura monoidal simétrica de la categoría $\mathbf{D}(X)$. Dados $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{D}(X)$ el isomorfismo natural de adjunción

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\bullet}(\mathcal{F}, \mathcal{G})),$$

induce un isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathcal{M}, \gamma^{\text{qc}} \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\bullet}(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Como consecuencia la estructura de categoría cerrada de $\mathbf{D}(X)$ determina sobre $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una estructura de categoría cerrada cuyo Hom interno es el bifunctor

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(-, -): \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)^{\text{op}} \times \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X),$$

definido, para cada par de complejos $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, mediante la expresión

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \gamma^{\text{qc}} \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Lema 5.3.5. *Dado $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, -): \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es un Δ -functor que conserva productos, y $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(-, \mathcal{F}): \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es un Δ -functor contravariante que transforma coproductos en productos.*

Demostración. Ambos son triangulados por ser composición de funtores triangulados. El comportamiento de cada uno de ellos con los productos y los coproductos en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es consecuencia inmediata de la existencia de los isomorfismos de adjunción. \square

5.4. Funtores imagen directa e inversa y coeficientes cuasicoherentes.

5.4.1. Dado un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ el funtor f^* preserva cuasicoherencia (véase [GD, §0 (5.1.4)] o [H, §II Proposition 5.8 (a)]). Esta propiedad se extiende al contexto derivado:

Proposición 5.4.2. [L, Proposition 3.9.1] Para cualquier morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ se verifica

$$\mathbf{L}f^*(\mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)) \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X).$$

5.4.3. El marco en el que trabajaremos en el capítulo 6 es el de los *esquemas concentrados*. Consúltese [GD, §6.1] para una explicación exhaustiva de los conceptos que introducimos a continuación.

Un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ es *cuasicompacto* si para todo abierto cuasicompacto $U \subset Y$, el abierto $f^{-1}(U)$ es cuasicompacto. El morfismo $f: X \rightarrow Y$ es *cuasiseparado* si el morfismo diagonal $\delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ es cuasicompacto. Diremos que un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ es *concentrado* si es cuasicompacto y cuasiseparado.

Obsérvese que un esquema X es cuasiseparado si el morfismo canónico $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ es cuasiseparado; análogamente, el esquema X es concentrado precisamente si el morfismo canónico $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ es concentrado.

Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas con Y concentrado entonces f es concentrado si, y sólo si, X es concentrado.

Los esquemas noetherianos, así como los morfismos entre esquemas noetherianos, son concentrados. También son esquemas concentrados los esquemas afines y cualquier abierto cuasicompacto de un esquema concentrado.

El funtor imagen directa y su derivado para los morfismos concentrados de esquemas tienen un buen comportamiento respecto a la cuasicoherencia.

Proposición 5.4.4. [H, §II, Proposition 5.8] Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas con X concentrado y $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$. Entonces $f_*\mathcal{F} \in \mathcal{A}_{\text{qc}}(Y)$.

Realmente en [H] se enuncia esta proposición bajo la hipótesis de que el morfismo sea cuasicompacto y *separado*, pero en la demostración sólo se usa que la intersección de dos abiertos cuasicompactos es un abierto cuasicompacto, siendo entonces suficiente asumir que el esquema X sea cuasiseparado.

Proposición 5.4.5. [L, Proposition 3.9.2] Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo concentrado de esquemas. Entonces $\mathbf{R}f_*(\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)) \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$.

Señalamos una última propiedad de la imagen directa derivada en el contexto de esquemas concentrados:

Lema 5.4.6. [L, Corollary 3.9.3.3] Dado $f: X \rightarrow Y$ un morfismo concentrado de esquemas, y $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ una familia de complejos en $\mathbf{D}(X)$. Entonces el morfismo canónico

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{R}f_* \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathbf{R}f_* \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \right)$$

es un isomorfismo.

5.4.7 Morfismo de proyección para coeficientes cuasicoherentes. Para morfismos concentrados de esquemas, el homomorfismo de proyección (5.2.7.2) verifica la siguiente propiedad:

Teorema 5.4.8. [L, Proposition 3.9.4] Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo concentrado de esquemas entonces, para cualesquiera $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$, los morfismos de proyección

$$\begin{aligned} p_1: \mathbf{R}f_* \mathcal{F} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbf{R}f_*(\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}), \\ p_2: \mathcal{G} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_* \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbf{R}f_*(\mathbf{L}f^* \mathcal{G} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}) \end{aligned}$$

determinan isomorfismos en $\mathbf{D}(Y)$.

La demostración de este resultado puede realizarse reduciéndonos al caso particular en el que Y es afín y por inducción en el número mínimo de abiertos afines necesarios para recubrir X .

Observación 5.4.9. [L, Remarks 3.9.4.1] El morfismo de proyección no es en general un isomorfismo si deseamos la hipótesis de cuasicoherencia. Dados

R un anillo local noetheriano de dimensión 2, esquemas $Y = \text{Spec}(R)$ y $X = \text{Spec}(R) \setminus \mathfrak{m}$, y $f: X \rightarrow Y$ la inclusión, si consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ y $\mathcal{G} \in \mathbf{D}(Y)$ la extensión por cero del haz estructural \mathcal{O}_X se tiene que el tallo de $\mathbf{H}^1(\mathbf{R}f_*(\mathcal{F})) \otimes_Y \mathcal{G}$ en \mathfrak{m} es 0, mientras que el tallo de $\mathbf{H}^1 \mathbf{R}f_*(\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} f^* \mathcal{G}) = \mathbf{H}^1 \mathbf{R}f_*(\mathcal{O}_X) = \mathbf{H}_{\mathfrak{m}}^2(R) \neq 0$, siendo $\mathbf{H}_{\mathfrak{m}}$ la cohomología local con soporte en \mathfrak{m} .

5.4.10. La dualidad de Grothendieck se puede enunciar a través de diferentes vías. El enfoque moderno de la dualidad distingue entre el adjunto por la derecha del funtor imagen directa derivada $\mathbf{R}f_*$ asociado a un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$ y el funtor imagen inversa excepcional $f^!$, que coinciden si f es propio (véase [ILN]).

En [N3, Example 4.2] Neeman demuestra, como consecuencia del *Teorema de Representabilidad de Brown*, la existencia del adjunto por la derecha del derivado del funtor imagen directa $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}(\mathcal{A}_{\text{qc}}(X)) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$ para un morfismo separado de esquemas cuasicompactos y separados $f: X \rightarrow Y$. Lipman, en [L], prueba la existencia del adjunto por la derecha del derivado de la imagen directa para morfismos concentrados de esquemas concentrados, y para coeficientes más generales, los complejos de haces de módulos con cohomología cuasicoherente, y estudia sus propiedades.

Teorema 5.4.11 (Teorema de Representabilidad de Brown). [N3, Theorem 4.1] *Si $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ es un Δ -funtor entre categorías trianguladas que conserva coproductos y \mathcal{S} es una categoría triangulada compactamente generada entonces F posee adjunto por la derecha.*

Corolario 5.4.12. *Sea X un esquema concentrado y $f: X \rightarrow Y$ un morfismo concentrado de esquemas. Entonces existe $f^\times: \mathbf{D}(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ el Δ -funtor adjunto por la derecha del funtor imagen directa $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$.*

Demostración. La categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es compactamente generada ([?, Teorema 3.1.1]), y el funtor triangulado $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$ conserva coproductos (Lema 5.4.6). Como consecuencia del Teorema de Representabilidad de Brown, el funtor $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(Y)$ posee adjunto a la derecha. \square

5.4.13. La adjunción establecida en corolario anterior es una adjunción interna si consideramos coeficientes cuasicoherentes, es decir, dados $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$ el homomorfismo

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, f^\times \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y^{\text{qc}}(\mathbf{R}f_* \mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad (5.4.13.1)$$

obtenido mediante la composición

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, f^\times \mathcal{G}) &\longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y^{\text{qc}}(\mathbf{R}f_* \mathcal{F}, \mathbf{R}f_* f^\times \mathcal{G}) \\ &\longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y^{\text{qc}}(\mathbf{R}f_* \mathcal{F}, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Para demostrarlo es suficiente comprobar que la aplicación obtenida al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathcal{H}, -)$ al homomorfismo (5.4.13.1) es biyectiva, para cualquier $\mathcal{H} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$; concluimos observando que la aplicación resulta de la composición de la siguiente cadena de biyecciones naturales,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathcal{H}, \mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, f^\times \mathcal{G})) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathbf{L}f^* \mathcal{H}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, f^\times \mathcal{G})) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}(X)}(\mathbf{L}f^* \mathcal{H} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}, f^\times \mathcal{G}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathbf{R}f_*(\mathbf{L}f^* \mathcal{H} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}), \mathcal{G}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathcal{H} \otimes_Y^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_* \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}(Y)}(\mathcal{H}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y^{\text{qc}}(\mathbf{R}f_* \mathcal{F}, \mathcal{G})), \end{aligned}$$

dadas por las adjunciones involucradas y el isomorfismo de proyección.

5.4.14. Sea cSch la categoría cuyos objetos son los esquemas concentrados y cuyas flechas son los morfismos concentrados. La correspondencia

$$\mathbf{R}(-)_* : \text{cSch} \rightarrow \text{Cat}$$

que asigna a cada esquema X la categoría triangulada $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y a cada morfismo $f: X \rightarrow Y$ el funtor triangulado $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$ es un pseudo-functor triangulado covariante. Considerando $f^\times: \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, la existencia de la adjunción $\mathbf{R}f_* \dashv f^\times$ para cualquier morfismo $f: X \rightarrow Y$ en cSch , determina la estructura de pseudofunctor contravariante para la asignación $(-)^{\times}: \text{cSch} \rightarrow \text{Cat}$ (véase [L, §3.6.8.2]). En este contexto el derivado

a la izquierda del functor imagen inversa proporciona también un pseudofunctor triangulado contravariante $\mathbf{L}(-)^*: \mathbf{cSch} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que asigna a un morfismo $f: X \rightarrow Y$ el functor $\mathbf{L}f^*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ adjunto por la izquierda de $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y)$.

5.4.15 Cambio de base. Una pieza clave en la teoría de la dualidad de Grothendieck es *el cambio de base*. Dediquemos unas líneas a su presentación. Sólo mencionaremos el cambio de base respecto a morfismos planos, que es suficiente para los propósitos de este trabajo. Sobre la exposición general puede consultarse [L].

Consideremos un cuadrado conmutativo de morfismos de esquemas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow g & \diamond & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Para cada $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, sea $\theta_{\diamond}: \mathbf{L}u^*\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}g_*\mathbf{L}v^*\mathcal{F}$ la composición

$$\mathbf{L}u^*\mathbf{R}f_*\mathcal{F} \longrightarrow u^*\mathbf{R}f_*\mathbf{R}v_*\mathbf{L}v^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} u^*\mathbf{R}u_*\mathbf{R}g_*\mathbf{L}v^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}g_*\mathbf{L}v^*\mathcal{F},$$

donde el primer morfismo viene dado por la unidad $\text{id} \rightarrow \mathbf{R}v_*\mathbf{L}v^*$, el segundo por el isomorfismo de pseudofunctorialidad $\mathbf{R}f_*\mathbf{R}v_* \cong \mathbf{R}u_*\mathbf{R}g_*$, y el tercero por la counidad $\mathbf{L}u^*\mathbf{R}u_* \rightarrow \text{id}$.

Si el cuadrado \diamond es cartesiano, f un morfismo concentrado y u es un morfismo plano entonces el morfismo de cambio de base

$$\theta_{\diamond}: u^*\mathbf{R}f_* \rightarrow \mathbf{R}g_*v^*$$

es un isomorfismo de Δ -funtores definidos de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ a $\mathbf{D}_{\text{qc}}(Y')$ (véase ([L, Proposition 3.9.5])).

En estas condiciones, siendo f^\times y g^\times los adjuntos por la derecha de $\mathbf{R}f_*$ y $\mathbf{R}g_*$, el cuadrado \diamond tiene asociado un morfismo de cambio de base

$$\beta_{\diamond}: v^*f^\times \rightarrow g^\times u^*,$$

el adjunto de la composición de las transformaciones

$$\mathbf{R}g_*v^*f^\times \xrightarrow{\sim} u^*\mathbf{R}f_*f^\times \rightarrow u^*,$$

definidas respectivamente haciendo uso de θ_\diamond^{-1} y la counidad $\mathbf{R}f_*f^\times \rightarrow \text{id}$.

5.4.16. [L, Corollary 4.4.3] Si el cuadrado \diamond es cartesiano, f es propio (y por tanto g es propio) y u es un morfismo plano entonces

$$\beta_\diamond(\mathcal{G}): v^*f^\times\mathcal{G} \rightarrow g^\times u^*\mathcal{G}$$

es un isomorfismo para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}^+(Y)$.

5.5. Subcategorías localizantes y colocalizantes y coeficientes cuasicoherentes

Sea X un esquema. Recordemos las nociones de subcategoría localizante y colocalizante de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ introducidas en sección 4.6. Las localizantes son las subcategorías plenas trianguladas cerradas para coproductos, y las colocalizantes las subcategorías plenas trianguladas cerradas para productos.

Dada una clase de objetos $\mathbf{S} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, $\text{Loc}(\mathbf{S})$ denota la subcategoría localizante más pequeña de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que contiene a \mathbf{S} , y $\text{Coloc}(\mathbf{S})$ la subcategoría colocalizante más pequeña de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que contiene a \mathbf{S} , en otras palabras $\text{Loc}(\mathbf{S})$ es la *subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ generada por \mathbf{S}* y $\text{Coloc}(\mathbf{S})$ es la *subcategoría colocalizante generada por \mathbf{S}* .

Observación 5.5.1. Para cualquier clase de objetos $\mathbf{S} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, $\text{Loc}(\mathbf{S})$ es también la subcategoría localizante más pequeña de $\mathbf{D}(X)$ que contiene a \mathbf{S} , ya que $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(X)$ (véase 5.3.2). Sin embargo, $\text{Coloc}(\mathbf{S})$ no es necesariamente una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}(X)$, ya que la inclusión $\iota: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \hookrightarrow \mathbf{D}(X)$ no conserva productos.

Para una clase cualquiera de objetos $\mathbf{S} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, consideremos las correspondientes subcategorías ortogonales con respecto al bifunctor

$$\mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \times \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}(\text{Ab})$$

Haciendo uso de 4.4.8 y recuperando la notación establecida en 4.6.2, la subcategoría ortogonal a \mathbf{S} por la derecha, \mathbf{S}^\perp , y la ortogonal por la izquierda, ${}^\perp\mathbf{S}$, son las determinadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^\perp &:= \{\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \mid \mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{S}\}, \\ {}^\perp\mathbf{S} &:= \{\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \mid \mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0, \forall \mathcal{G} \in \mathbf{S}\}.\end{aligned}$$

Por definición ambas subcategorías son subcategorías trianguladas plenas de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. La subcategoría ortogonal por la derecha $\mathbf{S}^\perp \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es colocalizante, ya que el Δ -functor $\mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet(\mathcal{G}, -)$ transforma productos en productos, y la ortogonal por la izquierda ${}^\perp\mathbf{S}$ es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, ya que el Δ -functor $\mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet(-, \mathcal{G})$ lleva coproductos en productos. Nótese además que

$$\text{Loc}(\mathbf{S}) \subset {}^\perp(\mathbf{S}^\perp), \quad \text{Coloc}(\mathbf{S}) \subset (\mathbf{S}^\perp)^\perp.$$

Si $\text{Loc}(\mathbf{S}) \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ tiene un functor localización asociado, según lo expuesto en 4.6.7, entonces $\text{Loc}(\mathbf{S}) = {}^\perp(\mathbf{S}^\perp)$, y dualmente si $\mathbf{S} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ tiene un functor colocalización asociado entonces $\text{Coloc}(\mathbf{S}) = (\mathbf{S}^\perp)^\perp$.

Ejemplo 5.5.2. Analicemos el caso más sencillo, este es, el caso de un esquema afín $\text{Spec}(k)$ con k un cuerpo. La categoría $\mathbf{D}(\text{Spec}(k)) = \mathbf{D}_{\text{qc}}(\text{Spec}(k))$ es $\mathbf{D}(k)$, la categoría derivada de k -espacios vectoriales. Cualquier k -espacio vectorial posee una base, por tanto es isomorfo a una suma directa de copias de k . Además toda suma directa de copias de k es un k -espacio vectorial isomorfo a un sumando directo del producto de las correspondientes copias. Por otro lado, cada complejo $T \in \mathbf{D}(k)$ es cuasi-isomorfo al complejo con diferenciales nulas dado por sus cohomologías $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^i(T[-i])$. Obsérvese también que T es cuasi-isomorfo al coproducto y al producto de la familia de complejos $\{\mathbf{H}^i(T[-i]) \mid i \in \mathbb{Z}\}$,

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^i(T[-i]) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^i(T[-i]).$$

Por tanto, las únicas subcategorías localizantes y colocalizantes de $\mathbf{D}(k)$ son las triviales.

Subcategorías localizantes y colocalizantes en esquemas

Dedicamos este capítulo a uno de los principales resultados de la memoria, la clasificación de las subcategorías localizantes y las subcategorías colocalizantes de la subcategoría de los complejos con cohomología cuasicoherente de la categoría derivada de haces de módulos sobre un esquema concentrado X .

En [N1], A. Neeman aborda por primera vez la clasificación de las subcategorías localizantes para esquemas afines. Neeman establece, para un anillo noetheriano R , la existencia de una correspondencia biyectiva entre las subcategorías localizantes de $\mathbf{D}(R)$ y los subconjuntos de ideales primos del anillo R , es decir, los subconjuntos del esquema afín $X = \text{Spec}(R)$. En [AJS2] se generaliza este resultado al caso de un esquema noetheriano arbitrario X , restringiendo la clasificación a cierto tipo de subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, las compatibles con la estructura tensorial.

Más tarde en [N5], Neeman demuestra, para un anillo noetheriano R , que las subcategorías colocalizantes de $\mathbf{D}(R)$ son exactamente las ortogonales por la derecha de las subcategorías localizantes, es decir, comprueba que las subcategorías colocalizantes de $\mathbf{D}(R)$ están en biyección con los subconjuntos del esquema afín $\text{Spec}(R)$. Cabe preguntarse entonces si esta determinación de las subcategorías colocalizantes de la categoría $\mathbf{D}(R)$ se verifica para esquemas más generales, de la misma forma que en [AJS2] se extiende a esquemas noetherianos el resultado de [N1]. Responder esta pregunta fue una de las motivaciones iniciales de nuestro trabajo.

Establecemos en este capítulo la clasificación de las subcategorías localizantes y de la subcategorías colocalizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ para esquemas

concentrados X más generales, que los noetherianos, los *esquemas generados por puntos* (véase definición 6.1.1). La demostración del teorema de clasificación de las subcategorías localizantes que se expone en la sección 6.2 es más directa que la expuesta en [AJS2] para esquemas noetherianos.

Los esquemas generados por puntos son la clase de esquemas concentrados más generales para los que sus puntos determinan las subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría derivada de complejos de haces de módulos con cohomología cuasicoherente.

En la última sección de este capítulo recordaremos algunos de los resultados de [N5] y [St] para proponer ejemplos de esquemas no noetherianos y generados por puntos, y de esquemas que no están generados por puntos.

6.1. Esquemas generados por puntos

Nuestra propuesta es la clasificación tanto de las subcategorías localizantes como de las subcategorías colocalizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ en términos de subconjuntos de puntos del esquema X .

Si $x \in X$ es un punto y $k(x)$ su cuerpo residual, $j_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ denotará el morfismo canónico de esquemas. Consideremos en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ el objeto

$$\mathcal{K}(x) := \mathbf{R}j_{x*}k(x) = j_{x*}k(x).$$

De este modo asociamos a cada punto x del esquema X un complejo en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ concentrado en grado cero, el *haz del cuerpo residual del punto*.

Dada una colección de puntos $W \subset X$, denotaremos la correspondiente colección de haces de los cuerpos residuales

$$\mathbf{S}_W := \{\mathcal{K}(x) \mid x \in W\}.$$

Cometiendo un pequeño abuso de notación, hablaremos de subcategorías localizantes y colocalizantes generadas por la colección de puntos $W \subset X$ al referirnos a las subcategorías localizantes y colocalizantes de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ generadas por la colección de objetos \mathbf{S}_W , y establecemos la notación:

$$\text{Loc}(W) := \text{Loc}(\mathbf{S}_W), \quad \text{Coloc}(W) := \text{Coloc}(\mathbf{S}_W).$$

Definición 6.1.1. Diremos que el esquema X está *generado por puntos* si $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X) = \text{Loc}(X)$, es decir, $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es la menor subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que contiene los haces de los cuerpos residuales de todos sus puntos.

Observación 6.1.2. Por [AJS1, Theorem 5.7], cada objeto $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ tiene asociado un triángulo de localización de Bousfield

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{+},$$

tal que $\mathcal{M} \in \text{Loc}(X)$ y $\mathcal{F} \in \{\mathcal{K}(x) \mid x \in X\}^\perp$. Por tanto las condiciones $\text{Loc}(X) = \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in X\}^\perp = 0$ son equivalentes, lo que justifica la terminología introducida: el esquema X está generado por puntos si, y sólo si, la colección $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in X\}$ es un conjunto de generadores de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, es decir,

$$[\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X), \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathcal{K}(x)}^\bullet(\mathcal{K}(x), \mathcal{F}) = 0, \forall x \in X] \implies \mathcal{F} = 0.$$

Observación 6.1.3. Para un esquema X , la propiedad «estar generado por puntos» es una condición necesaria para desarrollar nuestros resultados de clasificación de subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ en términos de los puntos del esquema.

Dedicaremos el resto de esta sección a comprobar que los esquemas noetherianos están generados por puntos (proposición 6.1.6).

6.1.4. Un subconjunto de puntos $Z \subset X$ de un esquema X determina un endofunctor de la categoría de haces de módulos sobre X . Es el subfunctor de la identidad $\Gamma_Z: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ que asigna a cada haz \mathcal{M} de \mathcal{O}_X -Módulos el subhaz $\Gamma_Z(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ de secciones con soporte en Z .

Si X es un esquema *noetheriano* y $Z \subset X$ es un cerrado, existe un ideal cuasicoherente $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}_X$ tal que $Z = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q})$. Sea $\Gamma'_Z \subset \Gamma_Z$ el subfunctor de Γ_Z definido mediante la expresión

$$\Gamma'_Z(-) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n > 0}} \mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^n, -),$$

El functor Γ'_Z coincide con el functor Γ_Z para haces cuasicoherentes.

En general, si consideramos un subconjunto $Z \subset X$ estable por especialización en X y lo expresamos como una unión filtrante de cerrados del esquema

X , $Z = \cup_{i \in I} Z_i$, entonces, el funtor de secciones con soporte en Z se puede expresar de la forma

$$\Gamma_Z(-) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} \Gamma'_{Z_i}.$$

El derivado por la derecha de este funtor $\mathbf{R}\Gamma_Z(-): \mathbf{D}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X)$, es tal que $\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)) \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. El funtor $\mathbf{R}\Gamma_Z: \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, coincide con el funtor $\mathbf{R}\Gamma'_Z$, y es tal que junto con la transformación natural $\rho: \mathbf{R}\Gamma_Z \rightarrow \text{id}$ define un *functor aciclización* en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, en el sentido de 4.6.7. Si denotamos $i_s: X \setminus Z_s \rightarrow X$ los morfismos inclusión de los subesquemas abiertos complementarios de los cerrados de la filtración $Z = \cup_{s \in I} Z_s$, podemos construir el triángulo de localización asociado

$$\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\ell_Z \mathcal{F} \xrightarrow{+},$$

siendo $\ell_Z: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ el funtor definido por

$$\ell_Z := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ s \in I}} i_{s*} i_s^*.$$

El lector puede consultar [AJS2, §2] para un tratamiento más detallado de estos funtores.

La siguiente proposición establece una propiedad básica sobre las secciones con soporte en puntos cerrados.

Proposición 6.1.5. *Sea X un esquema noetheriano. Si $x \in X$ es un punto cerrado entonces, para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ se tiene que $\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}} \mathcal{G} \in \text{Loc}(\{x\})$.*

Demostración. Si $x \in X$ es un punto cerrado entonces $j_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ es el morfismo cerrado canónico asociado al punto. Puesto que el esquema X es noetheriano, podemos aplicar el párrafo anterior para obtener el haz cuasi-coherente de ideales $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}_X$ tal que $j_{x*} k(x) = \mathcal{O}_X / \mathcal{Q}$. El funtor de secciones con soporte en el punto x , $\Gamma_{\{x\}}: \mathcal{A}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{qc}}(X)$, admite la expresión

$$\Gamma_{\{x\}}(-) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n > 0}} \text{Hom}_X(\mathcal{O}_X / \mathcal{Q}^n, -),$$

entonces, para cada $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$,

$$\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\mathcal{G} \cong \operatorname{hocolim}_{n>0} \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^n, \mathcal{G}).$$

Nótese que $\mathbf{R}j_{x*}j_x^\times\mathcal{G} = \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}, \mathcal{G})$ y que $j_x^\times(\mathcal{G}) \in \mathbf{D}(k(x))$ es un coproducto de copias de traslaciones de $k(x)$ (ejemplo 5.5.2). Como el funtor $\mathbf{R}j_{x*}$ conmuta con coproductos (lema 5.4.6), se tiene que

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}, \mathcal{G}) \in \text{Loc}(\{x\}).$$

Análogamente, para todo $n \geq 1$, cada uno de los complejos $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{Q}^n/\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{G})$ pertenece a $\text{Loc}(\{x\})$, ya que el homomorfismo canónico

$$\mathbf{R}j_{x*}j_x^\times \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{Q}^n/\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{Q}^n/\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{G})$$

es un isomorfismo. Así, comenzando con $n = 1$, la existencia de los triángulos

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^n, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{Q}^n/\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{G}) \xrightarrow{+},$$

obtenidos aplicando el funtor $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(-, \mathcal{G})$ a la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}^n/\mathcal{Q}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^n \rightarrow 0,$$

permite demostrar por inducción, que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Q}^n, \mathcal{G}) \in \text{Loc}(\{x\})$, para todo $n \geq 1$. Por tanto $\mathbf{R}\Gamma_{\{x\}}\mathcal{G}$ pertenece a $\text{Loc}(\{x\})$. \square

Como consecuencia se la proposición anterior:

Proposición 6.1.6. [AJS2, Proposition 4.5] *Si X es un esquema noetheriano entonces está generado por puntos, es decir, $\text{Loc}(X) = \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ un complejo cualquiera y \mathcal{C} la familia de aquellos subconjuntos $Z \subset X$ estables por especialización en X , tales que $\mathbf{R}\Gamma_Z\mathcal{F} \in \text{Loc}(X)$.

Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cadena ascendente de elementos de \mathcal{C} , y $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}$ una resolución K-inyectiva de \mathcal{F} entonces, por [AJS1, Theorem 2.2 y Theorem 3.1],

$$\mathbf{R}\Gamma_{\cup W_\alpha} \mathcal{F} = \Gamma_{\cup W_\alpha} \mathcal{J} = \lim_{\alpha \in I} \Gamma_{W_\alpha} \mathcal{J},$$

pertenece a $\mathbf{Loc}(X)$, ya que $\mathbf{R}\Gamma_{W_\alpha} \mathcal{F} = \Gamma_{W_\alpha} \mathcal{J} \in \mathbf{Loc}(X)$, para cada $\alpha \in I$. Por tanto $\cup W_\alpha \in \mathcal{C}$.

Por el Lema de Zorn, existe W un elemento maximal de \mathcal{C} . Veamos que necesariamente $X = W$. Supongamos que $X \setminus W \neq \emptyset$. Por ser X un esquema noetheriano, la familia de subconjuntos cerrados

$$\mathcal{T} = \left\{ \overline{\{z\}} \mid z \in X \text{ y } \overline{\{z\}} \cap (X \setminus W) \neq \emptyset \right\}$$

posee un elemento minimal $\overline{\{y\}} \in \mathcal{T}$. Si $x \in \overline{\{y\}} \cap (X \setminus W)$, entonces $\overline{\{x\}} \in \mathcal{T}$, pero $\overline{\{y\}}$ es minimal en \mathcal{T} , luego $x = y$ y por tanto $W \cup \overline{\{y\}} = W \cup \{y\}$. Sea $i_y : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \rightarrow X$ el morfismo canónico y denotemos por $X_y \subset X$ el conjunto de puntos de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$. La imagen a través del funtor $\mathbf{R}\Gamma_{W \cup \{y\}}$ del triángulo

$$\mathbf{R}\Gamma_{X \setminus X_y} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}i_{y*} \mathbf{L}i_y^* \mathcal{F} \xrightarrow{+}$$

es el triángulo

$$\mathbf{R}\Gamma_W \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{W \cup \{y\}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\overline{\{y\}}} \mathbf{R}i_{y*} \mathbf{L}i_y^* \mathcal{F} \xrightarrow{+}.$$

De la proposición 6.1.5 se sigue que $\mathbf{R}\Gamma_{\overline{\{y\}}} \mathbf{L}i_y^* \mathcal{F}$ pertenece a la menor subcategoría localizante de $\mathbf{D}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}))$ que contiene a $k(y)$. Entonces

$$\mathbf{R}\Gamma_{\overline{\{y\}}} \mathbf{R}i_{y*} \mathbf{L}i_y^* \mathcal{F} = \mathbf{R}i_{y*} \mathbf{R}\Gamma_{\overline{\{y\}}} \mathbf{L}i_y^* \mathcal{F} \in \mathbf{Loc}(\{y\}) \subset \mathbf{Loc}(X).$$

Como consecuencia $W \cup \{y\} \in \mathcal{C}$, lo que contradice la maximalidad de W . Necesariamente $W = X$, luego $\mathcal{F} \cong \mathbf{R}\Gamma_X \mathcal{F} \in \mathbf{Loc}(X)$. \square

6.2. Subcategorías localizantes determinadas por puntos de un esquema

Supondremos en adelante que X es un esquema concentrado (según la definición de la sección 5.4), y aludiremos a la condición de que el esquema está generado por puntos cuando sea necesario.

Empezaremos estudiando las propiedades de las subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ determinadas por puntos del esquema X . Probaremos primero que los haces asociados a dos puntos distintos del esquema X son mutuamente ortogonales en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

Observación 6.2.1. El funtor $\mathbf{R}f_*: \mathbf{D}_{\text{qc}}(Y) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ asociado a un morfismo de esquemas $f: Y \rightarrow X$ es monoidal. Si f es un morfismo concentrado entre esquemas concentrados, el morfismo canónico $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y$ se corresponde mediante el isomorfismo de proyección con el homomorfismo obtenido aplicando el funtor $\mathbf{R}f_*$ al homomorfismo $\mathbf{L}f^*\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$ dado por la unidad de la adjunción $\mathbf{L}f^* \dashv \mathbf{R}f_*$. Entonces $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_Y$ es distinto de cero. En particular, para un punto x de un esquema concentrado X , el homomorfismo canónico $\mathcal{K}(x) \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x) \rightarrow \mathcal{K}(x)$ es no nulo, y como consecuencia $\mathcal{K}(x) \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x) \neq 0$.

Lema 6.2.2. Sean $x, y \in X$ puntos distintos, entonces $\mathcal{K}(x) \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) = 0$.

Demostración. Sea $U \subset X$ un abierto afín que sólo contiene a uno de los dos puntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el abierto U contiene a x y no contiene a y . Denotemos por $u: U \hookrightarrow X$ la inclusión. La unidad de la adjunción $u^* \dashv \mathbf{R}u_*$, induce un isomorfismo $\mathcal{K}(x) \rightarrow \mathbf{R}u_*u^*\mathcal{K}(x)$. Empleando el isomorfismo de proyección se tiene

$$\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) \cong \mathbf{R}u_*u^*\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) \cong \mathbf{R}u_*(u^*\mathcal{K}(x) \otimes_U^{\mathbf{L}} u^*\mathcal{K}(y)).$$

Concluimos entonces que $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) = 0$, ya que $u^*\mathcal{K}(y) = 0$. \square

Lema 6.2.3. Dados $x, y \in X$. Entonces $\mathbf{R}\text{Hom}_X^\bullet(\mathcal{K}(x), \mathcal{K}(y)) = 0$ si, y sólo si, x e y son puntos distintos.

Demostración. Dado $\mathcal{N} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, sea α el homomorfismo natural

$$\mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{N}, \mathcal{K}(y)) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{N} \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y), \mathcal{K}(y) \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y)).$$

Consideremos el homomorfismo

$$\mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{N} \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y), \mathcal{K}(y) \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y)) \xrightarrow{\beta} \mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{N}, \mathcal{K}(y)),$$

definido mediante la precomposición y composición con los homomorfismos canónicos

$$\mathcal{N} = \mathcal{N} \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y), \quad \mathcal{K}(y) \otimes_{\mathbf{X}}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) \rightarrow \mathcal{K}(y).$$

Resulta inmediato comprobar que $\beta \circ \alpha = \text{id}$. Si tomamos $\mathcal{N} = \mathcal{K}(x)$, por el lema 6.2.2, $\mathcal{K}(x) \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(y) = 0$, en este caso $\beta \circ \alpha$ es el homomorfismo cero y necesariamente $\mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{K}(x), \mathcal{K}(y)) = 0$. \square

Este resultado permite determinar los subconjuntos del esquema X en términos de subcategorías localizantes y colocalizantes.

Proposición 6.2.4. *Para cualquier colección de puntos $Z \subset X$, se verifica*

$$\begin{aligned} Z &= \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \text{Loc}(Z)\}, \\ X \setminus Z &= \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \text{Loc}(Z)^{\perp}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Es suficiente demostrar la segunda de las identidades. Consideremos entonces un punto $x \in X \setminus Z$. Por el lema 6.2.3, que x no pertenezca a Z es equivalente a que $\mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{K}(z), \mathcal{K}(x)) = 0$ para todo $z \in Z$, esto es, $\mathbf{RHom}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{M}, \mathcal{K}(x)) = 0$ para todo $\mathcal{M} \in \text{Loc}(Z)$, es decir $\mathcal{K}(x) \in \text{Loc}(Z)^{\perp}$. \square

6.2.5. Estudiaremos ahora las propiedades de las subcategorías localizantes de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ determinadas por una colección de puntos del esquema X . Este tipo de subcategorías son \otimes -ideales, es decir ideales respecto a la estructura tensorial de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. En el contexto afín, en el que se sitúan los trabajos de Neeman ([N1] y [N5]), esta condición no tiene mayor interés porque, como se justifica en el lema 6.2.8, toda subcategoría localizante de la categoría derivada $\mathbf{D}(R)$ de un anillo R es \otimes -ideal. Sin embargo, el ejemplo citado en la observación 6.2.9 nos muestra que esto no siempre es cierto en un contexto general.

Proposición 6.2.6. *Sea Z un subconjunto de puntos del esquema X . Si $\mathcal{N} \in \mathbf{Loc}(Z)$ entonces $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \mathbf{Loc}(Z)$, para todo $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.*

Demostración. Para un complejo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, la subcategoría plena $\mathbf{L}_{\mathcal{M},Z} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ definida por

$$\mathbf{L}_{\mathcal{M},Z} := \{ \mathcal{N} \in \mathbf{Loc}(Z) \mid \mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \mathbf{Loc}(Z) \}$$

es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ ya que $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es un funtor triangulado que conserva coproductos y $\mathbf{Loc}(Z)$ es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. Para todo $x \in Z$, el morfismo de proyección determina un isomorfismo

$$\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x) = \mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathbf{R}j_{x*}k(x) \cong \mathbf{R}j_{x*} \mathbf{L}j_x^* \mathcal{M} = j_{x*} \mathbf{L}j_x^* \mathcal{M}.$$

El funtor $j_{x*} : \mathbf{D}_{\text{qc}}(k(x)) \rightarrow \mathbf{D}(X)$ conmuta con coproductos y $\mathbf{L}j_x^* \mathcal{M} \in \mathbf{D}(k(x))$, luego $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x)$ es isomorfo a la imagen mediante el funtor imagen directa j_{x*} de un complejo de $k(x)$ -espacios vectoriales, por tanto $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x) \in \mathbf{Loc}(\{x\}) \subset \mathbf{Loc}(Z)$. La subcategoría localizante $\mathbf{L}_{\mathcal{M},Z} \subset \mathbf{Loc}(Z)$ contiene todos los complejos $\mathcal{K}(x)$ con $x \in Z$, y por tanto $\mathbf{L}_{\mathcal{M},Z} = \mathbf{Loc}(Z)$. \square

Definición 6.2.7. Una subcategoría localizante $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ se dice \otimes -ideal si $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \mathbf{L}$, para cualesquiera $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$ y $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

La proposición 6.2.6 establece que todas las subcategorías localizantes de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ generadas por subconjuntos de puntos del esquema X son \otimes -ideales. Justificamos a continuación que todas las subcategorías localizantes de la categoría derivada de un anillo son de este tipo.

Lema 6.2.8. *Si X es un esquema afín entonces toda subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es \otimes -ideal.*

Demostración. Supongamos que R un anillo y $X = \text{Spec}(R)$. Puesto que estamos en el caso afín, podemos identificar la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ con la categoría

$\mathbf{D}(R)$. Sea \mathbf{L} una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(R)$. La subcategoría de $\mathbf{D}(R)$ definida como

$$\mathbf{L}' := \{ M \in \mathbf{D}(R) \mid M \otimes_R^{\mathbf{L}} N \in \mathbf{L}, \forall N \in \mathbf{L} \}$$

es localizante y contiene a R , luego $\mathbf{L}' = \mathbf{D}(R)$. \square

Observación 6.2.9. En general, en un esquema concentrado no todas las subcategorías localizantes son \otimes -ideales. En [AJS2, §3] se puede consultar el siguiente ejemplo. Consideremos el esquema $X = \mathbf{P}_k^1$, la recta proyectiva sobre un cuerpo k , y $\mathbf{L} = \text{Loc}(\{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}\})$ la subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(\mathbf{P}_k^1)$ generada por el haz estructural. Se verifica que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_k^1}(-1) \notin \mathbf{L}$. Entonces \mathbf{L} es una subcategoría localizante que no es \otimes -ideal, ya que si lo fuera $\mathbf{L} = \mathbf{D}_{\text{qc}}(\mathbf{P}_k^1)$.

El siguiente resultado muestra que el producto tensor determina la relación entre puntos y subcategorías localizantes \otimes -ideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

Proposición 6.2.10. *Sea $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una subcategoría localizante \otimes -ideal y $x \in X$ un punto. Entonces $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}$ si, y sólo si, existe un complejo $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$ tal que $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \neq 0$.*

Demostración. Según la observación 6.2.1, para cualquier punto $x \in X$, se tiene que $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{K}(x) \neq 0$. Luego si $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}$, tomando $\mathcal{N} = \mathcal{K}(x)$ se verifica la condición anunciada.

Recíprocamente, sean $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$ y $x \in X$ tales que $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \neq 0$. La subcategoría localizante \mathbf{L} es \otimes -ideal, luego $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N}$ pertenece a \mathbf{L} . Empleando de nuevo el isomorfismo de proyección para el morfismo $j_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$,

$$\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} = j_{x*} k(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \cong j_{x*} (k(x) \otimes_{k(x)}^{\mathbf{L}} \mathbf{L}j_x^* \mathcal{N}) = j_{x*} \mathbf{L}j_x^* \mathcal{N},$$

concluimos que $\mathcal{W} := \mathbf{L}j_x^* \mathcal{N}$ es un complejo no acíclico de $k(x)$ -espacios vectoriales. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{H}^i \mathcal{W} \neq 0$, se tiene que $k(x)[-i]$ es un sumando directo \mathcal{W} . Por tanto $\mathcal{K}(x)[-i] = j_{x*} k(x)[-i]$ es un sumando directo de $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \mathbf{L}$, y como consecuencia, aplicando el *truco de Eilenberg* (4.6.4), se deduce que $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}$. \square

Corolario 6.2.11. *Sea $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una subcategoría localizante \otimes -ideal. Dado un punto $x \in X$, $\mathcal{K}(x) \notin \mathbf{L}$ si, y sólo si, $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} = 0$ para todo $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$.*

Demostración. Este enunciado es equivalente al de la proposición 6.2.10. \square

Proposición 6.2.12. *Supongamos que X es un esquema generado por puntos. Si la subcategoría localizante $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es \otimes -ideal, entonces $\mathbf{L} = \text{Loc}(Z)$, con $Z := \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}\}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ la subcategoría localizante definida por

$$\mathbf{D} := \{ \mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \mid \mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \text{Loc}(Z), \forall \mathcal{N} \in \mathbf{L} \}.$$

Es inmediato que \mathbf{D} es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, comprobemos que es \otimes -ideal.

Dados $\mathcal{M} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y $\mathcal{F} \in \mathbf{D}$, veamos que $(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}) \in \mathbf{D}$. En efecto, por el isomorfismo de asociatividad

$$(\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{F}) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \cong \mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} (\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N}),$$

y el complejo $\mathcal{M} \otimes_X^{\mathbf{L}} (\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N})$ pertenece a $\text{Loc}(Z)$ para todo $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$, ya que $\mathcal{F} \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \text{Loc}(Z)$ por hipótesis, y la categoría localizante $\text{Loc}(Z)$ es \otimes -ideal por la proposición 6.2.6.

Comprobemos ahora que la subcategoría localizante \mathbf{D} contiene a todos los objetos $\mathcal{K}(x)$, con $x \in X$. Si $x \in Z$, $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \text{Loc}(Z)$, para cualquier $\mathcal{N} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ en particular para aquellos $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$, luego $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{D}$. Sea $x \in X$ tal que $x \notin Z$ y tal que $\mathcal{K}(x) \notin \mathbf{L}$, por el corolario 6.2.11, para todo $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$, se verifica que $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} = 0$, en particular $\mathcal{K}(x) \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N}$ pertenece a $\text{Loc}(Z)$. Luego $\mathbf{D} = \text{Loc}(X)$.

Como el esquema X está generado por puntos $\text{Loc}(X) = \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, se tiene entonces que $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. En particular $\mathcal{O}_X \in \mathbf{D}$, luego para todo $\mathcal{N} \in \mathbf{L}$, $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X \otimes_X^{\mathbf{L}} \mathcal{N} \in \text{Loc}(Z)$, de lo que se concluye que $\mathbf{L} = \text{Loc}(Z)$. \square

Finalmente, establecemos la clasificación de las subcategorías localizantes \otimes -ideales para esquemas concentrados:

Teorema 6.2.13. *Si X es un esquema concentrado generado por puntos, la correspondencia $Z \mapsto \text{Loc}(Z)$ define una biyección entre subconjuntos de X y la clase de subcategorías localizantes \otimes -ideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, siendo su inversa la correspondencia que asigna a cada subcategoría localizante \otimes -ideal \mathbf{L} de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ el conjunto de puntos $Z_{\mathbf{L}} = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathbf{L}\}$.*

Demostración. Por la proposición 6.2.4, se tiene

$$Z = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \text{Loc}(Z)\}.$$

Por la proposición 6.2.12, $\mathbf{L} = \text{Loc}(Z_{\mathbf{L}})$ para toda subcategoría localizante \otimes -ideal $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. \square

Corolario 6.2.14. *Toda subcategoría localizante \otimes -ideal \mathbf{L} de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ posee un functor localización asociado.*

Demostración. Por el teorema 6.2.13, cada subcategoría localizante \otimes -ideal $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es precisamente la subcategoría localizante más pequeña que contiene a la familia de complejos $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in Z_{\mathbf{L}}\}$. Se sigue por tanto de [AJS1, Theorem 5.7] que \mathbf{L} tiene un functor localización asociado. \square

6.3. Subcategorías colocalizantes determinadas por puntos de un esquema

Dedicamos esta sección a resolver el problema de clasificación dual del tratado en la sección anterior. Recordemos que la determinación de las subcategorías colocalizantes para esquemas afines noetherianos fue desarrollada por Neeman en [N1]. Su demostración se basa, *grosso modo*, en explotar la posibilidad de definir explícitamente ciertos complejos de Koszul soportados en cerrados, que le permiten construir una sucesión de triángulos de localización y demostrar que para cualquier subconjunto $Z \subset \text{Spec}(R)$ se verifica la igualdad $(\text{Loc}(Z))^{\perp} = \text{Coloc}(\text{Spec}(R) \setminus Z)$ — resultado obtenido en el corolario 6.3.15 de esta memoria —, deduciendo de este hecho la clasificación de las subcategorías colocalizantes.

Este método propuesto en [N1] podría ser generalizado, no sin cierta dificultad adicional, al caso de esquemas noetherianos, siempre y cuando se garantice la existencia de *complejos de Koszul globales* extendiendo el recurso utilizado por Neeman en el caso afín. Con esta aproximación podríamos abarcar el caso de las variedades proyectivas, o el caso más general de los esquemas divisoriales.

En esta sección seguimos un camino alternativo, que no sólo generaliza el resultado de Neeman en [N1], sino que ofrece una versión simplificada del mismo. En lugar de generalizar el procedimiento de Neeman en el caso afín, dualizaremos las técnicas empleadas en la sección anterior que nos han permitido clasificar las subcategorías localizantes \otimes -ideales para esquemas concentrados generados por puntos.

6.3.1. Sea X un esquema concentrado. Dada \mathcal{C} una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, denotaremos por $Y_{\mathcal{C}} \subset X$ la colección de puntos

$$Y_{\mathcal{C}} := \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathcal{C}\}.$$

Utilizando la notación establecida en la sección 6.1, dado un subconjunto de puntos $Y \subset X$, $\text{Coloc}(Y)$ es la subcategoría colocalizante más pequeña de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que contiene a la colección de objetos $\{\mathcal{K}(x) \mid x \in Y\}$.

El siguiente resultado será de utilidad en la última parte de esta sección, y es el análogo para subcategorías colocalizantes determinadas por puntos del resultado enunciado en la proposición 6.2.4 de la sección anterior para subcategorías localizantes.

Proposición 6.3.2. *Para cualquier subconjunto $Y \subset X$:*

$$\begin{aligned} Y &= \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \text{Coloc}(Y)\}, \\ X \setminus Y &= \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in {}^{\perp}\text{Coloc}(Y)\}. \end{aligned}$$

Demostración. Del mismo modo que en la proposición 6.2.4, es suficiente demostrar la segunda igualdad. Sea $x \in X \setminus Y$. Por el lema 6.2.3, la condición « $x \notin Y$ » equivale a la condición « $\mathbf{RHom}_X^{\bullet}(\mathcal{K}(x), \mathcal{K}(y)) = 0$, para cualquier punto $y \in Y$ », es decir $\mathbf{RHom}_X^{\bullet}(\mathcal{K}(x), \mathcal{M}) = 0$, para todo $\mathcal{M} \in \text{Coloc}(Y)$, equivalentemente $\mathcal{K}(x) \in {}^{\perp}\text{Coloc}(Y)$. □

Comenzamos demostrando dos lemas que nos permitirán estudiar el comportamiento de los haces de los cuerpos residuales y del bifunctor $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(-, -)$ respecto a las subcategorías localizantes y colocalizantes determinadas por subconjuntos de puntos del esquema X .

Lema 6.3.3. *Sea $Y \subset X$ un subconjunto. Para cualquier objeto $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para todo $\mathcal{G} \in \text{Coloc}(Y)$, $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(Y)$.*

(ii) *Para todo $x \in Y$, $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x)) \in \text{Coloc}(Y)$.*

Demostración. La implicación (i) \Rightarrow (ii) es inmediata.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que se verifica la condición (ii) para $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. Sea \mathbf{C} la subcategoría plena de $\text{Coloc}(Y)$ cuyos objetos son los complejos $\mathcal{G} \in \text{Coloc}(Y)$ tales que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(Y)$. El funtor $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, -)$ es triangulado y conserva productos. La categoría \mathbf{C} es una subcategoría colocalizante de $\text{Coloc}(Y)$ que, por la hipótesis (ii), contiene a todos los objetos $\mathcal{K}(x)$, con $x \in Y$. Luego $\mathbf{C} = \text{Coloc}(Y)$. \square

Lema 6.3.4. *Los objetos $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x))$ y $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{F})$ pertenecen a la categoría $\text{Coloc}(\{x\})$ (y a $\text{Loc}(\{x\})$), para cualesquiera $x \in X$ y $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.*

Demostración. Siendo $j_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ la aplicación canónica, consideremos los isomorfismos naturales (véase el capítulo 5):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x)) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathbf{R}j_{x*}k(x)) \\ &\cong \mathbf{R}j_{x*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\text{Spec}(k(x))}^{\text{qc}}(\mathbf{L}j_x^* \mathcal{F}, k(x)), \\ \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{F}) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathbf{R}j_{x*}k(x), \mathcal{F}) \\ &\cong \mathbf{R}j_{x*} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\text{Spec}(k(x))}^{\text{qc}}(k(x), j_x^\times \mathcal{F}). \end{aligned}$$

El funtor $\mathbf{R}j_{x*}: \mathbf{D}(k(x)) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ conserva productos y coproductos, por tanto ambos complejos $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x))$ y $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{F})$ pertenecen a la subcategoría $\text{Coloc}(\{x\})$ y a la subcategoría $\text{Loc}(\{x\})$, ya que son isomorfos a la imagen a través de $\mathbf{R}j_{x*}$ de complejos de $k(x)$ -espacios vectoriales. \square

6.3.5. Analizamos ahora el comportamiento de las subcategorías colocalizantes con la estructura de categoría monoidal cerrada de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

Proposición 6.3.6. *Sea $Y \subset X$. Entonces $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(Y)$ para cualesquiera $\mathcal{G} \in \text{Coloc}(Y)$ y $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.*

Demostración. Por el lema 6.3.4, $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x))$ pertenece a $\text{Coloc}(\{x\})$ para todo punto $x \in Y$, y por tanto $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x))$ pertenece a la categoría $\text{Coloc}(Y)$. El resultado enunciado es entonces consecuencia inmediata del lema 6.3.3. □

Las subcategorías localizantes \otimes -ideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ son aquellas que son «estables» para el tensor por objetos de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, nos proponemos identificar aquellas subcategorías colocalizantes de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ «estables» para el bifunctor $\mathbf{R}\mathcal{H}om^{\text{qc}}$. El producto tensor es simétrico, pero el bifunctor $\mathbf{R}\mathcal{H}om^{\text{qc}}$ no lo es. La proposición 6.3.6 motiva la formulación de la compatibilidad de una subcategoría colocalizante y la estructura monoidal cerrada de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ que se propone en la siguiente definición:

Definición 6.3.7. *Sea $C \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una subcategoría colocalizante. Diremos que C es \mathcal{H} -coideal si $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in C$, para cualesquiera objetos $\mathcal{G} \in C$ y $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.*

La proposición 6.3.6 establece que las subcategorías colocalizantes de la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ definidas a partir de subconjuntos de puntos de X son \mathcal{H} -coideales, luego para obtener la clasificación buscada bastará probar que toda subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal está determinada por un subconjunto de puntos de X .

De nuevo, en el caso afín esta condición se verifica para toda subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$.

Lema 6.3.8. *Si $X = \text{Spec}(R)$ es un esquema afín, entonces toda subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es \mathcal{H} -coideal.*

Demostración. Identificaremos la categoría $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ con $\mathbf{D}(R)$ y, en consecuencia el bifunctor $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(-, -)$ con su correspondiente $\mathbf{R}\text{Hom}_R^{\bullet}(-, -)$.

Sea \mathbf{C} una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. Consideremos $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(R)$ la subcategoría

$$\mathbf{L} := \{ M \in \mathbf{D}(R) \mid \mathbf{RHom}_R^\bullet(M, N) \in \mathbf{C}, \forall N \in \mathbf{C} \}$$

Puesto que, para cada $N \in \mathbf{C}$, $\mathbf{RHom}_R^\bullet(-, N)$ es un funtor triangulado que transforma coproductos en productos y \mathbf{C} es colocalizante, la subcategoría \mathbf{L} es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(R)$ que contiene a R , luego $\mathbf{L} = \mathbf{D}(R)$. Por tanto \mathbf{C} es una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal de $\mathbf{D}(R)$. \square

Proposición 6.3.9. *Sea $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal y fijemos un punto $x \in X$. Entonces $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}$ si, y sólo si, existe un complejo $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$ tal que $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) \neq 0$.*

Demostración. Para cada punto $x \in X$, $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{K}(x)) \neq 0$, luego si $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}$, tomando $\mathcal{G} = \mathcal{K}(x)$, $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) \neq 0$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$ tal que $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) \neq 0$. La subcategoría colocalizante \mathbf{C} es \mathcal{H} -coideal, luego $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G})$ pertenece a \mathbf{C} , y gracias al isomorfismo de adjunción, asociado al morfismo canónico $j_x: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$,

$$\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) \cong \mathbf{R}j_{x*} \mathbf{RHom}_{\text{Spec}(k(x))}^{\text{qc}}(k(x), j_x^\times \mathcal{G}),$$

concluimos que $\mathcal{V} := \mathbf{RHom}_{\{x\}}^{\text{qc}}(k(x), j_x^\times \mathcal{G})$ es un complejo no acíclico de $k(x)$ -espacios vectoriales. Existirá un entero $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbf{H}^i \mathcal{V} \neq 0$, por tanto $k(x)[-i]$ es sumando directo de \mathcal{V} . Entonces $\mathcal{K}(x)[-i] = \mathbf{R}j_x k(x)[-i]$ es sumando directo de $\mathbf{R}j_{x*} \mathcal{V} \in \mathbf{C}$, y por ser \mathbf{C} una subcategoría colocalizante, aplicando el *truco de Eilenberg* (4.6.4), se deduce que $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}$. \square

Corolario 6.3.10. *Sea $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal. Dado un punto $x \in X$, $\mathcal{K}(x) \notin \mathbf{C}$ si, y sólo si, $\mathbf{RHom}_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) = 0$ para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$.*

Demostración. El enunciado es equivalente al de la proposición anterior. \square

Concluimos entonces que dado un punto $x \in X$ y una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal, o bien $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}$ o bien $\mathcal{K}(x) \in {}^\perp \mathbf{C}$.

Corolario 6.3.11. *Si $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal entonces $X \setminus Y_{\mathbf{C}} = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in {}^{\perp}\mathbf{C}\}$.*

Demostración. Se deduce inmediatamente del corolario 6.3.10. □

Proposición 6.3.12. *Sea X un esquema concentrado generado por puntos. Si \mathbf{C} es una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ entonces $\mathbf{C} = \text{Coloc}(Y_{\mathbf{C}})$.*

Demostración. Sea $Y = Y_{\mathbf{C}}$. La subcategoría plena de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ definida por

$$\mathbf{D} := \{ \mathcal{N} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X) \mid \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{N}, \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(Y), \forall \mathcal{G} \in \mathbf{C} \},$$

es una subcategoría localizante.

Comprobemos que la subcategoría localizante $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ es \otimes -ideal. Fijado $\mathcal{N} \in \mathbf{D}$, por definición, dado $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$ el complejo $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{N}, \mathcal{G})$ pertenece a $\text{Coloc}(Y)$. Veamos entonces que, para cualquier $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, el complejo $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{N}$ pertenece a \mathbf{D} . Efectivamente, por la proposición 6.3.6 la subcategoría colocalizante $\text{Coloc}(Y)$ es \mathcal{H} -coideal, y $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{N}, \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(Y)$ luego $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{N}, \mathcal{G})) \in \text{Coloc}(Y)$, para cualquier $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(x)$. Del isomorfismo canónico

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{N}, \mathcal{G}) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F}, \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{N}, \mathcal{G}))$$

se deduce que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{N}, \mathcal{G})$ pertenece a $\text{Coloc}(Y)$, para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$.

Por otro lado, se tiene $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{D}$ para todo $x \in X$. En efecto, dado un punto $x \in X$ distinguiremos dos casos según el punto pertenezca o no a Y :

- Si $x \in Y$, por el lema 6.3.4, se tiene que

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G}) \in \text{Coloc}(\{x\}) \subset \text{Coloc}(Y),$$

para cualquier complejo \mathcal{G} en $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, en particular para aquellos $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$. Es decir $\mathcal{K}(x)$ pertenece a \mathbf{D} .

- Si $x \notin Y$, por el corolario 6.3.11 sabemos que $\mathcal{K}(x) \in {}^\perp\mathbf{C}$, y en este caso es inmediato que $\mathcal{K}(x) \in \mathbf{D}$ ya que, para cualquier $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$, $\mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{K}(x), \mathcal{G})$ es cero, por tanto está en $\text{Coloc}(Y)$.

Puesto que X es un esquema generado por puntos, se tiene que $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. En particular $\mathcal{O}_X \in \mathbf{D}$, por tanto $\mathcal{G} = \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})$ pertenece a $\text{Coloc}(Y)$, para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{C}$. Concluimos así que $\text{Coloc}(Y) = \mathbf{C}$. \square

Finalmente estamos en disposición de probar la clasificación anunciada al principio de esta sección (análoga a la del teorema 6.2.13).

Teorema 6.3.13. *Si X es un esquema concentrado generado por puntos, la correspondencia $Y \mapsto \text{Coloc}(Y)$ define una biyección entre los subconjuntos de X y las subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, donde la inversa asigna a cada subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ la colección de puntos $Y_{\mathbf{C}} = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \mathbf{C}\}$.*

Demostración. Es inmediato que $Y = \{x \in X \mid \mathcal{K}(x) \in \text{Coloc}(Y)\}$, y por la proposición 6.3.12, $\mathbf{C} = \text{Loc}(Y_{\mathbf{C}})$ para cualquier subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal de $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$. \square

Proposición 6.3.14. *Sea X un esquema concentrado generado por puntos. La correspondencia $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}^\perp$ define una biyección entre las subcategorías localizantes \otimes -ideales de $\mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$ y las subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales, donde la inversa viene dada por $\mathbf{C} \mapsto {}^\perp\mathbf{C}$.*

Demostración. Haciendo uso de la adjunción $N \otimes^{\mathbf{L}} - \dashv \mathbf{R}\mathcal{H}om_X^{\text{qc}}(N, -)$, para cada $N \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, es evidente que si \mathbf{L} es una subcategoría localizante \otimes -ideal, entonces \mathbf{L}^\perp es una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal, y dualmente, si \mathbf{C} es una subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal entonces ${}^\perp\mathbf{C}$ es una subcategoría localizante \otimes -ideal.

Por el teorema 6.2.13, se verifica que $\mathbf{L} = \text{Loc}(Z)$ para algún $Z \subset X$. Además, ya que \mathbf{L} es \otimes -ideal, \mathbf{L}^\perp es \mathcal{H} -coideal y por tanto $\mathbf{L}^\perp = \text{Coloc}(Y)$ donde, gracias a la proposición 6.2.4, $Y = X \setminus Z$. Análogamente si \mathbf{C} es una

subcategoría colocalizante \mathcal{H} -coideal entonces $\mathbf{C} = \mathbf{Coloc}(Y)$ para algún $Y \subset X$ por el teorema 6.3.13. De la proposición 6.3.2 se deduce que ${}^{\perp}\mathbf{C} = \mathbf{Loc}(X \setminus Y)$. Finalmente, podemos afirmar que ${}^{\perp}({}^{\perp}\mathbf{L}) = \mathbf{L}$ y que $({}^{\perp}\mathbf{C})^{\perp} = \mathbf{C}$, luego las correspondencias son mutuamente inversas. \square

Corolario 6.3.15. *Sea X un esquema concentrado generado por puntos. Para cualquier partición del esquema $X = Z \cup Y$, se verifica que $(\mathbf{Loc}(Z))^{\perp} = \mathbf{Coloc}(Y)$, y $\mathbf{Loc}(Z) = {}^{\perp}(\mathbf{Coloc}(Y))$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición anterior. \square

6.3.16. Este corolario es la generalización del «teorema principal» en [N5] (es el resultado [N5, Theorem 2.7]), del que Neeman obtiene como consecuencia, en [N5, Corollary 2.8], la clasificación de las subcategorías colocalizantes de $\mathbf{D}(R)$ para R un anillo noetheriano.

6.4. Ejemplos: Soporte y esquemas generados por puntos

Revisamos en esta sección algunos resultados sobre subcategorías localizantes y colocalizantes para mostrar ejemplos de esquemas que no están generados por puntos y de esquemas que, siendo no noetherianos, están generados por puntos.

Analicemos primero la condición de «ortogonalidad respecto al producto tensor» en el contexto de esquemas.

Definición 6.4.1. Un esquema X verifica la *propiedad del soporte* si, dado $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, se verifica

$$[\mathcal{K}(x) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F} = 0, \forall x \in X] \implies \mathcal{F} = 0$$

Observación 6.4.2. Fijemos un punto x de un esquema concentrado X , y sea $j: \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$ el morfismo canónico asociado. Dado $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_{\text{qc}}(X)$, se tiene

$$\mathcal{K}(x) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F} = j_* k(x) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F} \cong j_*(k(x) \otimes_{\{x\}}^{\mathbf{L}} \mathbf{L}j^* \mathcal{F}) = j_* \mathbf{L}j^* \mathcal{F}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{F} = 0 &\iff \mathbf{L}j^* \mathcal{F} = 0 \\ &\iff \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{k(x)}(\mathbf{L}j^* \mathcal{F}, k(x)) = 0 \\ &\iff \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, j_* k(x)) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{K}(x)) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, que el esquema X verifique la propiedad del soporte equivale a que ${}^{\perp}\mathrm{Coloc}(X) = 0$.

Como consecuencia inmediata de la proposición 6.3.14:

Corolario 6.4.3. *Si X es un esquema concentrado y generado por puntos entonces X verifica la propiedad del soporte.*

Observación 6.4.4. Todo esquema afín es concentrado. Veremos en las siguientes secciones ejemplos de esquemas afines que no verifican la propiedad del soporte, y ejemplos de esquemas afines que verifican sí la propiedad del soporte pero que no son generados por puntos.

6.4.5 Ejemplo de un esquema con un único punto y no generado por puntos.

Las clases de Bousfield en la categoría derivada de un anillo R son las subcategorías de la forma

$$\mathbf{D}(R)_E = \{ M \in \mathbf{D}(R) \mid M \otimes^{\mathbf{L}} E = 0 \},$$

siendo $E \in \mathbf{D}(R)$ un objeto de la categoría derivada. Todas las clases de Bousfield de $\mathbf{D}(R)$ son subcategorías localizantes. En [N1], A. Neeman demostró que éstas son todas las subcategorías localizantes de la categoría $\mathbf{D}(R)$ si el anillo R es noetheriano.

En [N4], Neeman estudió las clases de Bousfield de la categoría derivada $\mathbf{D}(R)$ de un anillo conmutativo no noetheriano del tipo

$$R = \frac{k[x_2, x_3, \dots]}{\langle x_2^2, x_3^3, \dots \rangle},$$

siendo k un cuerpo y $\{x_2, x_3, \dots\}$ una colección numerable de indeterminadas. En este caso el anillo R es local con maximal $\mathfrak{m} = \langle \{x_i\}_{i \geq 2} \rangle$, además todos los elementos de \mathfrak{m} son nilpotentes, por tanto \mathfrak{m} es el único ideal primo de R , es decir, $\text{Spec}(R)$ posee un único punto. Sin embargo $\mathbf{D}(R)$ posee infinitas clases de Bousfield y por ende infinitas subcategorías localizantes. En particular el esquema afín $\text{Spec}(R)$ no está generado por puntos, es más como veremos $\text{Spec}(R)$ tampoco verifica la propiedad del soporte.

Recordemos la construcción de las clases de Bousfield en [N4]. Sea P_0 el conjunto de las aplicaciones $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $f(j) \leq j$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Neeman considera en P_0 la relación de preorden:

$$f \preceq g \iff [f(j) \leq g(j), \forall j \gg 1]$$

Para cada $f \in P_0$, se considera el R -módulo

$$E_f = \frac{R}{\langle x_2^{f(2)}, x_3^{f(3)}, \dots \rangle},$$

junto con la clase de Bousfield asociada $\mathbf{D}(R)_{E_f} \subset \mathbf{D}(R)$. Si $f, g \in P_0$ son tales que $f \leq g$, se verifica que $\mathbf{D}(R)_{E_g} \subset \mathbf{D}(R)_{E_f}$.

La relación de equivalencia en P_0 asociada al preorden es la definida por $f \sim g$ si $f \preceq g$ y $g \preceq f$, para $f, g \in P_0$. Sea $P := P_0/\sim$ el conjunto cociente. Consideremos el conjunto P ordenado con la relación de orden determinada por el preorden de P_0 , y \mathcal{B} las clases de Bousfield de $\mathbf{D}(R)$ ordenadas por la relación de inclusión. La asignación

$$\begin{aligned} \psi: P &\longrightarrow \mathcal{B} \\ [f] &\longrightarrow \mathbf{D}(R)_{E_f} \end{aligned}$$

es una aplicación inyectiva (véase [N4, Lemma 2.6]) que, además, invierte el orden. El conjunto P posee al menos 2^{\aleph_0} elementos, por tanto existen infinitas clases de Bousfield en $\mathbf{D}(R)$.

Sea $\mathbf{1}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es la aplicación constante que toma el valor 1. La clase $[\mathbf{1}]$ es el mínimo del conjunto P . Por tanto $\mathbf{D}(R)_{E_{\mathbf{1}}}$ es la mayor de las

clases de Bousfield del conjunto $\mathfrak{S}(\psi)$, en particular $\mathbf{D}(R)_{E_1} \neq 0$. Teniendo en cuenta que $E_1 = k(\mathfrak{m})$, se deduce que necesariamente

$$\exists M \in \mathbf{D}(X), \text{ tal que } M \neq 0 \text{ y } M \otimes^{\mathbf{L}} k(\mathfrak{m}) = 0. \quad (6.4.5.1)$$

Por tanto el esquema afín $\text{Spec}(R)$ no verifica la propiedad del soporte.

6.4.6 Anillos absolutamente planos.

En este apartado mostraremos una familia de ejemplos de esquemas afines no noetherianos de dimensión cero que poseen infinitos puntos. Entre los esquemas afines de esta familia algunos están generados por puntos y otros no. Estos ejemplos fueron estudiados por G. Stevenson en [St].

La noción de anillo *absolutamente plano* tiene interés para anillos generales, pero asumiremos que todos los anillos son conmutativos y unitarios.

Un anillo R es *absolutamente plano* (o *Von Neumann regular*) si $\langle r \rangle = \langle r^2 \rangle$, para todo $r \in R$. Si R es un anillo absolutamente plano, para cada $r \in R$ existe un único elemento $x \in R$ tal que $r = r^2x$ y $x = x^2r$, y se dice que el elemento x es el *inverso débil* de r .

La propiedad «ser absolutamente plano» para un anillo R admite las siguientes caracterizaciones equivalentes (para una demostración consúltese [St, Proposition 3.2]):

- R es reducido y de dimensión de Krull cero.
- R es un subanillo del anillo $R' = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)} k(\mathfrak{p})$ cerrado para inversos débiles.
- Todo R -módulo simple es inyectivo.
- Todo R -módulo es plano.
- Para todo ideal $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ el anillo $R_{\mathfrak{p}}$ es un cuerpo.

En particular, si R es un anillo absolutamente plano entonces $R \otimes k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}$, para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, y trivialmente, para un complejo $M \in \mathbf{D}(R)$,

$$M = 0 \iff M \otimes k(\mathfrak{p}) = 0, \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R), \quad (6.4.6.1)$$

es decir, $\text{Spec}(R)$ verifica la propiedad del soporte.

(I) La inclusión de la subcategoría de los anillos conmutativos absolutamente planos en la categoría de los anillos conmutativos posee un adjunto por la izquierda, que asocia a cada anillo S un anillo absolutamente plano construido mediante la expresión

$$S^{\text{abs}} = \frac{S[x_s \mid s \in S]}{\langle \{s^2x_s - s, x_s^2s - x_s \mid s \in S\} \rangle}.$$

En [St, Theorem 4.18] se demuestra que si S es un anillo tal que $\text{Spec}(S)$ es un espacio topológico noetheriano entonces

$$\mathbf{D}(S^{\text{abs}}) = \text{Loc}(\{k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(S^{\text{abs}})\}),$$

es decir, se comprueba que el esquema afín $\text{Spec}(S^{\text{abs}})$ está generado por puntos. Además Stevenson propone la aproximación absolutamente plana de los enteros, $R = \mathbb{Z}^{\text{abs}}$, como ejemplo de anillo no noetheriano, absolutamente plano cuyo esquema afín $\text{Spec}(R)$ está generado por puntos.

(II) En [St], Stevenson distingue entre los anillos absolutamente planos una subfamilia de anillos que no están generados por puntos.

Recordemos que un anillo S es semi-artiniano si para cualquier ideal propio $\mathfrak{a} \subset S$ el S -módulo S/\mathfrak{a} contiene un S -submódulo simple.

En [St, Theorem 4.8], Stevenson demuestra que si R es un anillo absolutamente plano y no semi-artiniano entonces $X = \text{Spec}(R)$ no está generado por puntos. En la demostración de este resultado se emplea la condición «no semi-artiniano» para garantizar la existencia de un R -módulo inyectivo *superdescomponible* E , que es ortogonal por la derecha a todos los cuerpos residuales de R , por tanto $E \notin \text{Loc}(\{k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)\})$.

Un ejemplo de anillo absolutamente plano no semi-artiniano es el siguiente. Dado un conjunto infinito Λ y una familia de cuerpos $\{k_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ indicada por Λ , el anillo

$$R := \prod_{\lambda \in \Lambda} k_\lambda,$$

es absolutamente plano no semi-artiniano. Por tanto $\text{Spec}(R)$ es un esquema no generado por puntos en el que se verifica la condición del soporte.

6.4.7 Resumen. La relación entre las propiedades de esquemas concentrados analizadas en el estudio de las subcategorías localizantes y colocalizantes es la siguiente:

Noetheriano \implies Generado por puntos \implies Verifica la propiedad del soporte.

Y como hemos mostrado estas propiedades distinguen características especiales del los esquemas, ya que según los ejemplos mostrados:

Noetheriano $\not\Leftarrow$ Generado por puntos $\not\Leftarrow$ Verifica la propiedad del soporte

Contexto diferencial graduado

En la segunda parte de la memoria abordamos la clasificación de las subcategorías localizantes y las subcategorías colocalizantes en la categoría derivada de un álgebra diferencial graduada. Presentamos en este capítulo algunos conceptos y propiedades sobre álgebras diferenciales graduadas y sus categorías de módulos diferenciales graduados que fijarán nuestro marco de trabajo para desarrollar los resultados de los capítulos 8 y 9.

La categoría de módulos diferenciales graduados sobre un álgebra diferencial graduada es una categoría abeliana que posee propiedades similares a las de la categoría de complejos de módulos sobre un anillo. A partir de esta categoría se construye una categoría triangulada, la categoría derivada del álgebra diferencial graduada. La construcción de este tipo de categorías trianguladas es diferente a la de las categorías derivadas de complejos sobre categorías abelianas.

Hemos utilizado como referencia básica para este capítulo la exposición de Yekutieli en [Y1].

7.1. Álgebras y módulos diferenciales graduados

Fijemos \mathbb{K} un anillo conmutativo base. Comenzamos recordando algunas nociones básicas que pueden ser consultadas en [Y1, §3.3].

7.1.1. Una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada es un anillo \mathbb{Z} -graduado A ,

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A^n,$$

tal que $1 \in A^0$ y $A^i \cdot A^j \subseteq A^{i+j}$, junto con un morfismo central de anillos $\mathbb{K} \rightarrow A$ y una diferencial \mathbb{K} -lineal de grado 1, es decir, una aplicación \mathbb{K} -lineal $d_A: A \rightarrow A$ tal que $d_A \circ d_A = 0$, que verifica la *regla de Leibniz*:

$$d_A(ab) = d_A(a) \cdot b + (-1)^i a \cdot d_A(b), \quad a \in A^i, b \in A^j, i, j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada es una \mathbb{K} -álgebra central \mathbb{Z} -graduada A junto con una diferencial $d_A: A \rightarrow A$ que dota al álgebra A de estructura de complejo de \mathbb{K} -módulos,

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \longrightarrow \dots,$$

en el que la compatibilidad con el producto viene dada por la regla de Leibniz [Y1, Definition 3.3.1].

7.1.2. Sean A y B \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas. Un *morfismo de \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas* $f: A \rightarrow B$ es un morfismo de \mathbb{K} -álgebras graduadas que conmuta con las diferenciales, es decir, tal que $d_B \circ f = f \circ d_A$.

7.1.3. Una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada A se dice *no positiva* si $A^i = 0$ para todo $i > 0$ y *no negativa* si $A^i = 0$ para todo $i < 0$. Diremos que A es un *álgebra diferencial graduada de amplitud finita* si $A \in \mathbf{D}^b(\mathbb{K})$.

Denotaremos por DGA la categoría cuyos objetos son las \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas, con morfismos los morfismos de \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas. Con $\text{DGA}^{\leq 0}$ y $\text{DGA}^{\geq 0}$ se representan, respectivamente, las subcategorías plenas de DGA de las álgebras diferenciales graduadas no positivas, y de las álgebras diferenciales graduadas no negativas.

7.1.4. Una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada A es *débilmente conmutativa* si para cualesquiera elementos $a \in A^i$, $b \in A^j$ se verifica que $ba = (-1)^{ij}ab$. Si además, para todo entero impar i y cualquier $a \in A^i$ se tiene que $a^2 = 0$, diremos que A es *fuertemente conmutativa*.

Observación 7.1.5. La conmutatividad débil surge de manera inmediata al describir una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada A como un objeto de la categoría monoidal simétrica de complejos de \mathbb{K} -módulos, junto con una operación multiplicación $m: A \otimes A \rightarrow A$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & & \\
 \sigma \downarrow & \searrow m & \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

siendo $\sigma: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ el isomorfismo de simetría de la estructura monoidal simétrica de la categoría de complejos de \mathbb{K} -módulos, que viene dado por la *regla del signo de Koszul*,

$$\sigma(a \otimes b) := (-1)^{ij} b \otimes a, \quad a \in A^i, b \in A^j,$$

y que expresa que el isomorfismo $\sigma: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ es un morfismo de complejos.

Sobre la condición de conmutatividad fuerte, obviamente si \mathbb{K} es un cuerpo de característica distinta de 2, el elemento 2 es invertible en A^0 , en tal caso débilmente y fuertemente conmutativo son la misma condición para un álgebra diferencial graduada A . Por tanto, la distinción entre conmutatividad fuerte y débil es relevante únicamente en característica 2.

Algunos autores definen las \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas *conmutativas* como aquellas débilmente conmutativas y no positivas. Nosotros adoptamos esta denominación.

Definición 7.1.6. Una \mathbb{K} -álgebra diferencial graduada A es *conmutativa* si es débilmente conmutativa y no positiva.

7.1.7. Por comodidad, nos referiremos de aquí en adelante a las álgebras diferenciales graduadas como DG-álgebras sobre \mathbb{K} o simplemente DG-álgebras si no es necesario hacer explícito el anillo base.

Denotaremos por DGA_{wc} la subcategoría plena de las álgebras diferenciales graduadas débilmente conmutativas y por $\text{DGA}_{\text{wc}}^{\leq 0}$ las conmutativas. Este tipo de álgebras diferenciales graduadas disfrutan de ciertas ventajas que iremos mencionando. Una primera observación es que para cualquier álgebra diferencial graduada conmutativa A , tanto su componente en grado 0, A^0 , como su cohomología en grado 0, $H^0(A)$, son anillos conmutativos al uso.

- Ejemplos 7.1.8.* (i) Cualquier anillo conmutativo A es una DG-álgebra centrada en grado 0 (con diferencial trivial).
- (ii) Cualquier anillo \mathbb{Z} -graduado es una DG-álgebra con diferencial nula.
- (iii) Dado un anillo conmutativo R y un elemento $r \in R$. El *complejo de Koszul* $\text{Kos}(R; r)$ definido por

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{r} R \longrightarrow 0$$

en grados -1 y 0 es una DG-álgebra no positiva sobre R .

7.1.9. Fijada una DG-álgebra A , un A -módulo diferencial graduado por la izquierda o simplemente un DG A -módulo, es un módulo por la izquierda graduado $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ sobre el anillo graduado A , junto con una diferencial, es decir una aplicación \mathbb{K} -lineal $d_M: M \rightarrow M$ de grado 1, tal que $d_M \circ d_M = 0$, y que es compatible con la diferencial de A , esto es,

$$d_M(a \cdot m) = d_A(a) \cdot m + (-1)^i a \cdot d_M(m), \quad \forall a \in A^i, \quad \forall m \in M.$$

Un DG -submódulo de un DG -módulo M es un subcomplejo $N \subseteq M$ que hereda la estructura de DG -módulo con las operaciones inducidas por las de M .

De forma análoga se define un A -módulo diferencial graduado por la derecha.

7.1.10. Un DG -módulo M sobre una DG -álgebra A es un complejo de \mathbb{K} -módulos. Dado i un entero se definen, entonces, el \mathbb{K} -módulo de *cociclos* de grado i

$$Z^i(M) := \ker(M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1}),$$

el \mathbb{K} -módulo de los *cobordes* de grado i

$$B^i(M) := \text{Im}(M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i),$$

y el i -ésimo \mathbb{K} -módulo de *cohomología* de M

$$H^i(M) := Z^i(M)/B^i(M) \cong \text{Coker}(M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Z(M)^i).$$

Todos estos \mathbb{K} -módulos son A^0 -módulos si A es no positiva.

Obsérvese que $Z(A) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Z^i(A)$ es un subanillo graduado de $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A^n$, que $B(A) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B^i(A)$ es un ideal bilátero graduado de $Z(A)$, y que $H^\bullet(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(A)$ es un anillo graduado.

7.1.11. Si M y N son módulos diferenciales graduados por la izquierda sobre una DG-álgebra A , en particular M, N y A son complejos en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$.

Consideremos en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ el complejo de homomorfismos $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^\bullet(M, N)$ definido como en 4.4.4, y $A \otimes_{\mathbb{K}} M$ el complejo producto tensor en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$, definido como en 4.5.1. Se define $\text{Hom}_A^\bullet(M, N)$ como el igualador en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ del diagrama

$$\text{Hom}_A^\bullet(M, N) := \text{Eq}(\phi, \psi) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}^\bullet(M, N) \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \text{Hom}_{\mathbb{K}}^\bullet(A \otimes_{\mathbb{K}} M, N)$$

donde $\phi(f)(a \otimes m) = f(am)$ y $\psi(f)(a \otimes m) = af(m)$. La diferencial de $\text{Hom}_A^\bullet(M, N)$ es la inducida por la de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^\bullet(M, N)$,

$$d(f) := d_N \circ f - (-1)^j f \circ d_M, \quad \forall f \in \text{Hom}_A^j(M, N),$$

que es compatible con la diferencial de A ([Y1, Definition 3.8.2]).

Si $f \in Z^0 \text{Hom}_A^\bullet(M, N)$ entonces $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de complejos de \mathbb{K} -módulos de grado cero, es decir, tal que $f(M^i) \subseteq N^i$, y tal que

$$f(am) = (-1)^{ik} a \cdot f(m), \quad \forall a \in A^k, \forall m \in M^i,$$

para cualesquiera $i, k \in \mathbb{Z}$.

Obsérvese que, dado M un DG-módulo por la izquierda sobre A , id_M es un cociclo de grado 0 en $\text{Hom}_A^\bullet(M, M)$, y que para cada terna M_1, M_2, M_3 de DG-módulos por la izquierda sobre A , el morfismo composición

$$\text{Hom}_A^\bullet(M_1, M_2) \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A^\bullet(M_2, M_3) \longrightarrow \text{Hom}_A^\bullet(M_1, M_3)$$

conserva cociclos de grado 0.

Definición 7.1.12. Sea A una DG-álgebra. La categoría de los DG-módulos por la izquierda sobre A , que denotaremos $\text{DGMod}(A)$, es la categoría cuyos objetos son los DG-módulos por la izquierda sobre A con morfismos

$$\text{Hom}_{\text{DGMod}(A)}(M, N) := Z^0 \text{Hom}_A^\bullet(M, N),$$

para cada par de objetos $M, N \in \text{DGMod}(A)$.

La descripción que aquí ofrecemos de $\text{DGMod}(A)$ aparece por ejemplo en [Y2, Definition 1.2], pero en otras fuentes, como en [Y1, Definition 3.3.24, Example 3.4.8], se define $\text{DGMod}(A)$ incidiendo en su estructura de *categoría diferencial graduada* (en notación de [Y1] o [K1]).

Observación 7.1.13. Si A es simplemente un anillo, es decir, una DG-álgebra concentrada en grado 0, entonces la categoría $\text{DGMod}(A)$ es la categoría de complejos de A -módulos.

7.1.14. Sea A una DG-álgebra, M un DG módulo por la derecha sobre A y N un DG módulo por la izquierda sobre A . Se define el *producto tensor de M y N sobre A* como el coigualador en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ del diagrama

$$M \otimes_{\mathbb{K}} A \otimes_{\mathbb{K}} N \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} M \otimes_{\mathbb{K}} N \longrightarrow \text{Coeq}(\phi, \psi) =: M \otimes_A N,$$

donde $\phi(m \otimes a \otimes n) = ma \otimes n$ y $\psi(m \otimes a \otimes n) = m \otimes an$; y cuya diferencial,

$$d(m \otimes n) := d_M(m) \otimes n + (-1)^i \cdot m \otimes d_N(n), \quad \forall m \in M^i, n \in N^j,$$

es la inducida por la diferencial del complejo $M \otimes_{\mathbb{K}} N \in \mathbf{C}(\mathbb{K})$ (véase 4.5.1).

7.1.15. Si A es una DG-álgebra débilmente conmutativa, el isomorfismo canónico $u: A \xrightarrow{\sim} A^{\text{op}}$ determinado por la expresión $u(a) = (-1)^i a$, para $a \in A^i$, permite identificar de forma natural la categoría de DG módulos por la izquierda sobre A con la categoría de DG módulos por la derecha sobre A . En este caso para cualesquiera A -módulos diferenciales graduados M y N , la estructura diferencial graduada que poseen tanto $\text{Hom}_A^\bullet(M, N)$ como $M \otimes_A N$ se da, a priori, sobre el anillo conmutativo base \mathbb{K} . La condición de conmutatividad

débil sobre A permite dotar a estos objetos de una estructura canónica de DG-módulos sobre A . Como consecuencia $\text{DGMod}(A)$ es una categoría monoidal cerrada, siendo el «tensor» el bifunctor

$$\begin{aligned} - \otimes_A - : \text{DGMod}(A) \times \text{DGMod}(A) &\longrightarrow \text{DGMod}(A), \\ (M, N) &\longmapsto M \otimes_A N \end{aligned}$$

el «Hom interno» en $\text{DGMod}(A)$ es el definido por la asignación

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A^\bullet(-, -) : \text{DGMod}(A)^{\text{op}} \times \text{DGMod}(A) &\longrightarrow \text{DGMod}(A), \\ (M, N) &\longmapsto \text{Hom}_A^\bullet(M, N) \end{aligned}$$

y A es el objeto unidad de la categoría (véase [Y1, §12.10]).

7.2. Categoría derivada de una DG-álgebra

Para una DG-álgebra la construcción de su categoría derivada es sutilmente diferente a la construcción de la categoría derivada de una categoría abeliana. Recordemos la noción de *categoría homotópica* de un álgebra diferencial graduada.

7.2.1. La categoría homotópica $\mathbf{K}(A)$ de la categoría $\text{DGMod}(A)$ es la categoría cuyos objetos son los de $\text{DGMod}(A)$ y cuyos morfismos, para cada par de DG A -módulos M y N , son los determinados por

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(M, N) := \text{H}^0 \text{Hom}_A^\bullet(M, N).$$

Observación 7.2.2. En el capítulo 4, definíamos los homomorfismos en la categoría homotópica $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana \mathcal{A} , para cada par de complejos M y N en \mathcal{A} , como el cociente del conjunto de homomorfismos de complejos, $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{A})}(M, N)$, por la relación de equivalencia inducida por las homotopías entre morfismos. Este caso es similar, en el sentido de que estamos cocientando el módulo de cociclos de grado 0, esto es, $\text{Z}^0 \text{Hom}_A^\bullet(M, N)$, por los cobordes de grado 0:

$$\text{B}^0 \text{Hom}_A^\bullet(M, N) := \text{Im} \left(\text{Hom}_A^{-1}(M, N) \xrightarrow{d} \text{Hom}_A^0(M, N) \right)$$

Los morfismos en la categoría homotópica son entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(M, N) = Z^0 \mathrm{Hom}_A^\bullet(M, N) / B^0 \mathrm{Hom}_A^\bullet(M, N)$$

ya que los bordes de grado 0 son los morfismos homótopos a cero. Hemos optado por dar esta definición para hacer evidente que la ambigüedad que acarrea la definición de $\mathrm{DGMod}(A)$, que esbozamos en 7.1.15, desaparece ya al pasar a la categoría homotópica.

La categoría homotópica de una DG-álgebra es una categoría triangulada, tomando como triángulos diagramas en $\mathbf{K}(A)$ similares a los construidos para categorías abelianas.

Proposición 7.2.3. *Sea A una DG-álgebra. La categoría homotópica $\mathbf{K}(A)$, de la categoría de DG-módulos $\mathrm{DGMod}(A)$, es una categoría triangulada con el funtor traslación inducido por el funtor traslación de la categoría $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ y triángulos los diagramas dados por*

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow C(f) \longrightarrow M[1]$$

donde $f: M \rightarrow N$ es un homomorfismo en $\mathrm{DGMod}(A)$ y $C(f)$ es el cono de f en $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ (definido en 4.2.6).

Demostración. Análoga a la prueba del teorema 4.2.9. □

7.2.4. La construcción de la categoría derivada de la categoría $\mathrm{DGMod}(A)$ se realiza según el procedimiento de localización de categorías expuesto en 4.3.4.

Un objeto $E \in \mathrm{DGMod}(A)$ es *acíclico* si $H^i(E) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, y un morfismo f en $\mathrm{DGMod}(A)$ es un cuasi-isomorfismo si $C(f)$ es acíclico. La clase de morfismos

$$S = \{f \mid f \text{ es un cuasi-isomorfismo en } \mathbf{K}(A)\}$$

define en $\mathbf{K}(A)$ un sistema multiplicativo (resultado análogo a la proposición 4.3.8).

Definición 7.2.5. La *categoría derivada de DG-módulos* es la localización de la categoría homotópica $\mathbf{K}(A)$ respecto al sistema multiplicativo \mathbf{S}

$$\mathbf{D}(A) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}(A).$$

Sea $Q: \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ el funtor de paso al cociente. Se considera en la categoría $\mathbf{D}(A)$ la estructura de categoría triangulada determinada por la imagen esencial a través del funtor $Q: \mathbf{K}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ de los triángulos de $\mathbf{K}(A)$.

Existencia de Resoluciones

En el capítulo 4, en la sección 4.3, hemos visto que si tenemos garantizada la existencia de objetos K-inyectivos y K-proyectivos, podemos simplificar los morfismos en el cálculo de fracciones, hasta el punto de poder ignorar que estamos trabajando con tejados y suponer que los morfismos en la categoría derivada son morfismos en la correspondiente categoría homotópica.

7.2.6. Sea A una DG-álgebra. Un DG A -módulo $I \in \text{DGMod}(A)$ se dice *K-inyectivo* si $\text{Hom}_A^\bullet(M, I)$ es acíclico para todo acíclico $M \in \text{DGMod}(A)$. Una *resolución K-inyectiva* de un DG módulo $N \in \text{DGMod}(A)$ es cualquier cuasi-isomorfismo $\rho: N \rightarrow I$ en $\text{DGMod}(A)$ con I un DG A -módulo inyectivo.

Un DG A -módulo $P \in \text{DGMod}(A)$ es *K-proyectivo* si $\text{Hom}_A^\bullet(P, M)$ es acíclico para todo acíclico $M \in \text{DGMod}(A)$. Un cuasi-isomorfismo en $\text{DGMod}(A)$ $\lambda: P \rightarrow N$ con P un DG A -módulo proyectivo se dice una *resolución K-proyectiva* del DG A -módulo $N \in \text{DGMod}(A)$.

La siguiente proposición muestra una propiedad clave de los objetos K-inyectivos y K-proyectivos ([Y2, Lemma 10.1.12 , Lemma 10.2.8]).

Proposición 7.2.7. *Sea A un álgebra diferencial graduada.*

- (i) *Si $\rho: I \rightarrow M$ es un cuasi-isomorfismo en $\text{DGMod}(A)$ e I un DG A -módulo K-inyectivo entonces ρ posee inverso por la izquierda en $\mathbf{K}(A)$, existe en $\text{DGMod}(A)$ un homomorfismo $\eta: M \rightarrow I$ tal que $\eta \circ \rho = \text{id}_I$ en $\mathbf{K}(A)$.*

- (ii) Si $\lambda: M \rightarrow P$ es un cuasi-isomorfismo en $\text{DGMod}(A)$ y P es K -proyectivo entonces λ posee inverso por la derecha en $\mathbf{K}(A)$, es decir, existe en $\text{DGMod}(A)$ un homomorfismo $\nu: P \rightarrow M$ tal que $\nu \circ \eta = \text{id}_P$ en $\mathbf{K}(A)$.

Demostración. Consideremos el triángulo en $\mathbf{K}(A)$ con base $\rho: I \rightarrow M$,

$$I \xrightarrow{\rho} M \longrightarrow C(\rho) \longrightarrow I[1].$$

Como $C(\rho)$ es acíclico e I K -inyectivo, $\text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(C(\rho)[n], I) = 0$ para todo n . De 4.1.13 se deduce la exactitud de la sucesión

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(C(\rho), I) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(M, I) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(I, I) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(C(\rho)[-1], I). \end{aligned}$$

Por tanto $\text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(\rho, I): \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(M, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(I, I)$ es biyectivo. Basta tomar entonces η como el único morfismo tal que $\eta \circ \phi = \text{id}_I$. El apartado (ii) se demuestra de forma análoga. \square

Señalamos el siguiente resultado por su importancia en el desarrollo del resto del trabajo, en el se recogen dos importantes resultados de [Y1] que aseguran la existencia de resoluciones K -inyectivas y K -proyectivas de DG-módulos.

Teorema 7.2.8. *Sea A una DG-álgebra. Todo DG A -módulo M admite un cuasi-isomorfismo $P \rightarrow M$ en $\text{DGMod}(A)$ con P un objeto K -proyectivo.*

Análogamente, todo DG A -módulo M admite un cuasi-isomorfismo $M \rightarrow I$ en $\text{DGMod}(A)$ con I un objeto K -inyectivo.

Demostración. Esbochemos brevemente la construcción de ambos tipos de resoluciones. Para más detalles sobre estas construcciones, véanse las secciones 3.1 y 3.2 de [K1] o, en un contexto más próximo a nuestras notaciones, las secciones 11.4 y 11.6 de [Y1].

Para demostrar la existencia de resoluciones K -proyectivas, se construyen un tipo especial de resoluciones K -proyectivas las denominadas «resoluciones semi-libres».

Un DG A -módulo se dice libre si es isomorfo a DG-módulo de la forma $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A[-j_\alpha]$, con Λ un conjunto de índices y los j_α 's enteros. Un DG A -módulo E se dice *semi-libre* si admite una *filtración semi-libre*, esto es, una filtración en la que los cocientes sucesivos son DG A -módulos libres.

Para ver que todo DG A -módulo semi-libre E es K -proyectivo se demuestra por inducción que todos los términos de la filtración son K -proyectivos y, como consecuencia, también lo es E .

La idea de la prueba pasa por construir una sucesión exacta en $\text{DGMod}(A)$

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0,$$

de forma que la sucesión de los cociclos (como \mathbb{K} -módulos graduados)

$$\cdots \longrightarrow Z(Q_2) \longrightarrow Z(Q_1) \longrightarrow Z(Q_0) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sea también una sucesión exacta, y que además cada DG A -módulo Q_i se pueda descomponer como una suma directa $Q_i = Q'_i \oplus Q''_i$, donde cada sumando es de la forma $Q'_i = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda'_i} A[-j_\alpha]$ y $Q''_i = \bigoplus_{\beta \in \Lambda''_i} C[-j_\beta]$, siendo $C = C(\text{id}_{A[-1]})$. Obsérvese que el DG A -módulo C es semi-libre con filtración semi-libre $\{F_{-1}(C) = 0, F_0(C) = A[-1], F_j = C; j \geq 1\}$.

A partir de la exactitud de las sucesiones se demuestra que la totalización,

$$P^{\text{aug}} := \text{Tot}^\oplus(\cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots),$$

es un DG A -módulo acíclico. Sea P el DG A -módulo

$$P := \text{Tot}^\oplus(\cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots).$$

La aplicación $\rho: P \rightarrow M$ inducida por η es un cuasi-isomorfismo. Restaría comprobar que P es semi-libre, es decir que admite una filtración semi-libre, lo cual es posible gracias a la descomposición $Q'_i \oplus Q''_i$ de los objetos Q_i .

Para demostrar la existencia de resoluciones K -inyectivas se emplea el concepto de «resoluciones semi-colibres». Sea $\mathbb{K}^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ el cogenerador canónico de la categoría de \mathbb{K} -módulos. Diremos que W un DG A -módulo

sobre A es *colibre* si existe un isomorfismo $W \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}^*))$ para V un DG módulo libre sobre \mathbb{K} .

Un DG módulo se dice *semi-colibre* si admite una *cofiltración semi-colibre*, esto es una cofiltración en la que los núcleos sucesivos son colibres.

Denotemos el dual de un DG A -módulo N por $N^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(N, \mathbb{K}^*)$. El DG A -módulo dual $C^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, \mathbb{K}^*)$ del DG A -módulo $C = C(\text{id}_{A[-1]})$ es semi-colibre con la cofiltración $G_q(C^*) := F_q(C)$.

La construcción de la resolución semi-colibre es la dual de construcción de las resoluciones semi-libres. Para construir una resolución semi-colibre de un DG A -módulo M , se construye una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\nu} J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \dots$$

de forma que la sucesión de cociclos como \mathbb{K} -módulos graduados (el \mathbb{K} -módulo graduado $Y(N) := N/B(N)$ se denomina decociclo de $N \in \mathbf{C}(\mathbb{K})$)

$$0 \longrightarrow Y(M) \longrightarrow Y(J_0) \longrightarrow Y(J_1) \longrightarrow Y(J_2) \longrightarrow \dots$$

es también exacta, y tal que cada J_i se puede descomponer como la suma directa $J_i = J'_i \oplus J''_i$, con $J'_i = \prod_{\alpha \in \Lambda'_i} A^*[-j_\alpha]$ y $J''_i = \prod_{\beta \in \Lambda''_i} C^*[-j_\beta]$.

Se demuestra que la cotalización

$$I^{\text{aug}} := \text{Tot}\Pi(\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\nu} J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \dots)$$

es un DG módulo acíclico, y definiendo

$$I := \text{Tot}\Pi(\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \dots)$$

se comprueba que la aplicación $\rho: M \rightarrow I$, inducida por η , es un cuasi-isomorfismo. La descomposición de los términos J_i garantiza que I admite una cofiltración semi-colibre. De forma análoga al caso de resoluciones semi-libres se demuestra también que los DG A -módulos semi-colibres son \mathbb{K} -inyectivos. \square

7.3. Funtores asociados a morfismos de DG-álgebras

7.3.1. Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo de DG-álgebras. Todo DG B -módulo M admite estructura de DG A -módulo mediante la acción determinada a través de f , definiendo así el *functor de olvido* (o *functor restricción de escalares*),

$$f_*: \text{DGMod}(B) \longrightarrow \text{DGMod}(A).$$

Para cada módulo diferencial graduado $M \in \text{DGMod}(B)$, $f_*(M)$ se identifica con M como complejo de \mathbb{K} -módulos, por eso es habitual escribir $f_*(M) = M$.

Considerando la estructura de B como módulo diferencial graduado sobre A y sobre B , se definen los funtores

$$\begin{aligned} f^*: \text{DGMod}(A) &\longrightarrow \text{DGMod}(B), & \text{DGMod}(A) &\longrightarrow \text{DGMod}(B), \\ M &\longmapsto B \otimes_A M & M &\longmapsto \text{Hom}_A^\bullet(B, M) \end{aligned}$$

denominados, en [Y1], *functor inducción* e *coinducción* respectivamente. Estos funtores son adjuntos del functor de olvido,

$$f^* \dashv f_* \dashv \text{Hom}_A^\bullet(B, -).$$

El functor de olvido transforma DG A -módulos acíclicos en DG B -módulos acíclicos por tanto se extiende a un Δ -functor entre las correspondientes categorías derivadas

$$f_*: \mathbf{D}(B) \rightarrow \mathbf{D}(A).$$

Los derivados de los funtores inducción e coinducción,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}f^*: \mathbf{D}(A) &\longrightarrow \mathbf{D}(B), & f^\times: \mathbf{D}(A) &\longrightarrow \mathbf{D}(B). \\ M &\longmapsto B \otimes_A^{\mathbf{L}} M & M &\longmapsto f^\times(M) := \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(B, M) \end{aligned}$$

son adjuntos del functor de olvido en el contexto derivado:

Proposición 7.3.2. *Dado $f: A \rightarrow B$ un morfismo en DG-álgebras, y módulos diferenciales graduados $M \in \mathbf{D}(A)$, $N \in \mathbf{D}(B)$, entonces existen isomorfismos naturales:*

- (1) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(B)}(\mathbf{L}f^*M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(M, f_*(N)),$
 (2) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(B)}(N, f^\times M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(f_*(N), M).$

Demostración. Véase [Y1, Theorem 12.6.6 y Theorem 12.6.12]. \square

7.3.3. La correspondencia $(-)_*: \mathrm{DGA} \rightarrow \mathrm{Cat}$ que asigna a cada morfismo de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$ el funtor de olvido entre las correspondientes categorías derivadas $f_*: \mathbf{D}(B) \rightarrow \mathbf{D}(A)$, es un pseudofunctor triangulado contravariante. Para un par de morfismos componibles $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G$ de DG-álgebras, el isomorfismo de pseudofunctorialidad $\mathrm{ps}_*(f, g): (gf)_* \xrightarrow{\sim} f_*g_*$ es en este caso simplemente la identidad. Como consecuencia los adjuntos determinan pseudofuntores triangulados contravariantes $\mathbf{L}(-)^*: \mathrm{DGA} \rightarrow \mathrm{Cat}$ y $(-)^{\times}: \mathrm{DGA} \rightarrow \mathrm{Cat}$ [Y1, §12.6]. Para $\sharp \in \{*, \times\}$, denotaremos $\mathrm{ps}^\sharp(f, g): f^\sharp g^\sharp \xrightarrow{\sim} (gf)^\sharp$ los correspondientes isomorfismos de pseudofunctorialidad (según la notación de [L, (3.6.5)]).

7.4. Categorías derivadas de DG-álgebras débilmente conmutativas

En 4.5.2 hemos examinado la estructura de la categoría derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana monoidal cerrada \mathcal{A} . Mostraremos ahora que las categorías derivadas de DG-módulos sobre DG-álgebras débilmente conmutativas también poseen esta estructura.

7.4.1. Según lo indicado en 7.1.15, si la DG-álgebra A es débilmente conmutativa entonces $\mathrm{DGMod}(A)$ es una categoría monoidal simétrica, los bifuntores tensor y hom interno definidos en $\mathrm{DGMod}(A)$ son aditivos en ambas variables por tanto inducen bifuntores triangulados en la categoría homotópica. El bifunctor tensor

$$- \otimes_A -: \mathbf{K}(A) \times \mathbf{K}(A) \longrightarrow \mathbf{K}(A),$$

y el bifunctor hom

$$\mathrm{Hom}_A^\bullet(-, -): \mathbf{K}(A)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{K}(A) \longrightarrow \mathbf{K}(A),$$

pueden ser extendidos al contexto derivado gracias a la existencia de resoluciones K-proyectivas y K-inyectivas (teorema 7.2.8). El bifunctor producto tensorial derivado

$$- \otimes_A^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}(A) \times \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}(A)$$

verifica las condiciones de simetría, asociatividad y coherencia de la asociatividad (véase [Y1, §12.10] para un explicación detallada), por tanto determina sobre $\mathbf{D}(A)$ una estructura de *categoría monoidal simétrica*. Además, la categoría $\mathbf{D}(A)$ es $\mathbf{H}^0(A)$ -lineal y posee estructura de categoría monoidal cerrada siendo el hom interno el definido por el bifunctor

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(-, -) : \mathbf{D}(A)^{\text{op}} \times \mathbf{D}(A) \longrightarrow \mathbf{D}(A),$$

como se deduce del siguiente resultado:

Proposición 7.4.2. [Y1, Proposition 12.10.12] *Sea A una DG-álgebra débilmente conmutativa. Existe en $\mathbf{D}(A)$ un isomorfismo canónico*

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(M, \mathbf{RHom}_A^\bullet(N, L)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_A^\bullet(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N, L).$$

para cualesquiera DG A -módulos M, N, L .

Demostración. Tomamos una resolución K-proyectiva $P_N \rightarrow N$ y una resolución K-inyectiva $L \rightarrow I_L$ en $\text{DGMod}(A)$. Entonces $\text{Hom}_A^\bullet(P_N, I_L)$ es un objeto K-inyectivo. Se tienen por tanto isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbf{RHom}_A^\bullet(M, \mathbf{RHom}_A^\bullet(N, L)) &\cong \text{Hom}_A^\bullet(P_M, \text{Hom}_A^\bullet(P_N, I_L)) \\ &\cong \text{Hom}_A^\bullet(P_M \otimes_A P_N, I_L) \cong \mathbf{RHom}_A^\bullet(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N, L). \end{aligned}$$

El primer y tercer isomorfismo se obtienen de la definición de funtor derivado, mientras que el segundo resulta de la aplicación de la adjunción $\otimes - \text{Hom}$ en módulos diferenciales graduados. \square

Observación 7.4.3. Para cualesquiera DG A -módulos M_1 y M_2 y $n \in \mathbb{Z}$, se tienen isomorfismos de H^0 -módulos

$$\begin{aligned} H^n(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(M_1, M_2)) &\cong H^n(\mathrm{Hom}_A^\bullet(M_1, I_{M_2})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(M_1, I_{M_2}[n]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(M_1, M_2[n]), \end{aligned}$$

siendo $M_2 \rightarrow I_{M_2}$ una resolución \mathbf{K} -inyectiva de M_2 . Por tanto el enunciado de la proposición anterior equivale a la existencia del isomorfismo de adjunción

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(M, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(N, L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N, L) \quad (M, N, L \in \mathbf{D}(A)).$$

7.4.4. Estos resultados son consecuencia de otros más generales expuestos en [Y1, §12.10] algunos de los cuales mencionamos a continuación para establecer el contexto functorial, respecto a morfismos de DG-álgebras, de la estructura monoidal cerrada de las categorías de DG-módulos.

Consideremos $(-)_*$, y sus adjuntos $(-)^{\times}$ y $\mathbf{L}(-)^*$, como pseudofuntores triangulados definidos entre las categorías $\mathrm{DGA}_{\mathrm{wc}} \rightarrow \mathrm{Cat}$ [Y1, §12.6]. Como en el contexto de esquemas, los pseudofuntores $(-)_*$ y $\mathbf{L}(-)^*$ son monoidales.

7.4.5 Isomorfismo de proyección. Dado un morfismo $f: A \rightarrow B$ de DG-álgebras débilmente conmutativas, y DG-módulos $M \in \mathbf{D}(A)$ y $N \in \mathbf{D}(B)$, consideremos el homomorfismo canónico

$$f_*N \otimes_A^{\mathbf{L}} M \xrightarrow{\sim} f_*(N \otimes_B^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*M),$$

adjunto del homomorfismo obtenido mediante la composición,

$$\mathbf{L}f^*(f_*N \otimes_A^{\mathbf{L}} M) \cong \mathbf{L}f^*f_*N \otimes_B^{\mathbf{L}} \mathbf{L}M \rightarrow N \otimes_B^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*M,$$

del isomorfismo dado por la estructura monoidal del funtor $\mathbf{L}f^*$ y el homomorfismo definido por la counidad $\mathbf{L}f^*f_*N \rightarrow N$.

Basta aplicar la definición de los funtores f_* y $\mathbf{L}f^*$, y el isomorfismo de asociatividad [Y1, Proposition 12.6.9], para comprobar que la aplicación canónica

$$f_*N \otimes_A^{\mathbf{L}} M \xrightarrow{\sim} f_*(N \otimes_B^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^*M)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(A)$, es el denominado *isomorfismo de proyección*.

La estructura monoidal del funtor $\mathbf{L}f^*$ y el isomorfismo de proyección permiten demostrar que las adjunciones en la proposición 7.3.2 se extienden a «adjunciones internas»:

Proposición 7.4.6. *Dado $f: A \rightarrow B$ un morfismo en DGA_{wc} existen isomorfismos naturales:*

$$(1) f_* \mathbf{RHom}_B^\bullet(\mathbf{L}f^* M, N) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_A^\bullet(M, f_* N),$$

$$(2) f_* \mathbf{RHom}_B^\bullet(N, f^\times M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_A^\bullet(f_* N, M),$$

para cualesquiera módulos diferenciales graduados $M \in \mathbf{D}(A)$, $N \in \mathbf{D}(B)$.

7.4.7 Cambio de base. Dado un diagrama de DG-álgebras débilmente conmutativas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & C \otimes_A B \end{array}$$

la transformación natural

$$\mathbf{L}g^* \mathbf{L}u^* f_* \cong \mathbf{L}v^* \mathbf{L}f^* f_* \longrightarrow \mathbf{L}v^*,$$

definida por pseudofuntorialidad mediante la unidad de la adjunción $\mathbf{L}f^* \dashv f_*$, determina por la adjunción $\mathbf{L}g^* \dashv g_*$ el morfismo de funtores, de $\mathbf{D}(B)$ a $\mathbf{D}(C)$,

$$\xi_\diamond: \mathbf{L}u^* f_* \longrightarrow g_* \mathbf{L}v^*. \quad (7.4.7.1)$$

Supongamos que $u: A \rightarrow C$ es un morfismo plano de DG-álgebras, es decir, tal que el funtor $u^*: \text{DGMod}(A) \rightarrow \text{DGMod}(C)$ conserva cuasi-isomorfismos.

Si el diagrama \diamond es cartesiano, entonces v es también un morfismo plano. En este caso la transformación natural (7.4.7.1) es un isomorfismo. En efecto, v también es un morfismo plano y el isomorfismo de funtores ξ_\diamond ,

$$\xi_\diamond: u^* f_* \xrightarrow{\sim} g_* v^*,$$

es el determinado para un DG módulo $M \in \mathbf{D}(B)$ por las identificaciones

$$g_* v^* M = g_*(M \otimes_B (B \otimes_A C)) \cong f_* M \otimes_A C = u^* f_* M.$$

Subcategorías localizantes y colocalizantes en categorías de DG-módulos

Shaul y Williamson en [ShW] establecen la clasificación de subcategorías localizantes y colocalizantes de la categoría derivada $\mathbf{D}(A)$ de una DG-álgebra conmutativa A y de amplitud finita, bajo la hipótesis de que $H^0(A)$ sea un anillo noetheriano. Los autores emplean en su trabajo las nociones de estratificación y coestratificación de categorías \otimes -trianguladas con cierta estructura adicional sobre la categoría derivada $\mathbf{D}(A)$.

Generalizamos en este capítulo los resultados de clasificación de Shaul y Williamson para una DG-álgebra A conmutativa de amplitud finita cuyo esquema afín asociado $\text{Spec}(H^0(A))$ está generado por puntos. Emplearemos la noción de soporte y cosoporte de un objeto de la categoría derivada $\mathbf{D}(A)$ utilizando los puntos del esquema afín $\text{Spec}(H^0(A))$ como detectores para lograr obtener la clasificación.

8.1. Esquema afín de una DG-álgebra conmutativa

Sea A una DG-álgebra conmutativa. La no positividad de la DG-álgebra A (requisito incluido en la condición de que A sea una DG-álgebra conmutativa) garantiza la existencia de morfismos canónicos de álgebras

$$A^0 \longrightarrow A \longrightarrow H^0(A).$$

Un DG-ideal $P \subset A$ es un DG-submódulo de A . Si $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} P^n$ es un ideal primo del *álgebra graduada* asociada a A (olvidándonos de su estructura diferencial), diremos que P es un DG-ideal primo de A (según la definición introducida en [BSW, (2.6)]).

Dado un DG-ideal primo $P \subseteq A$, el subconjunto $P^0 \subseteq A^0$ es un ideal primo que contiene a $d_A^{-1}(A^{-1})$. En este caso $H^0(A) = \frac{A^0}{d_A^{-1}(A^{-1})}$, y por tanto la contracción de un ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq H^0(A)$ determina un ideal primo $P^0 \subset A^0$ tal que $\mathfrak{p} = \frac{P^0}{d_A^{-1}(A^{-1})}$, y un DG-ideal $\mathfrak{p}^A \subseteq A$ dado por

$$\cdots \longrightarrow A^{-2} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^{-1} \xrightarrow{d_A^n} P^0 \longrightarrow \cdots,$$

que será también un DG-ideal primo de A .

La relación $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^A$ define una aplicación inyectiva entre $\text{Spec}(H^0(A))$ y el conjunto de los DG-ideales primos de A , ya que si $\mathfrak{p}^A = \mathfrak{q}^A$, en particular $(\mathfrak{p}^A)^0 = (\mathfrak{q}^A)^0$, y por tanto $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Si además A es acotada como objeto graduado, o simplemente $\tau^{\leq 0}(A) \subseteq \eta_A$, siendo η_A el nilradical de A , podemos asegurar que todo elemento $a \in A^i$, con $i < 0$, es nilpotente, y por tanto que todo DG-ideal *primo* de A ha de contener al DG-ideal

$$\cdots \rightarrow A^{-1} \rightarrow \text{Im}(d_A^{-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots.$$

Entonces la correspondencia $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^A$ es también sobreyectiva, y define una biyección entre $\text{Spec}(H^0(A))$ y el conjunto de los DG-ideales primos de A (como se prueba en [BSW, Proposition 2.7]).

8.1.1. La existencia del morfismo de anillos $A^0 \longrightarrow A$, para A una DG-álgebra conmutativa no positiva A permite localizar $\text{DGMod}(A)$ respecto a un subconjunto multiplicativo del anillo conmutativo A^0 . Por ejemplo si $t \in A^0$ y denotamos A_t^0 la localización de A^0 en el subconjunto multiplicativo definido por las potencias de t , entonces

$$A_t := A \otimes_{A^0} A_t^0,$$

es una DG-álgebra no positiva y el morfismo canónico $A \longrightarrow A_t$ es un morfismo plano de DG-álgebras. La localización de un DG A -módulo M viene dada por

$$M_t = M \otimes_A A_t \cong M \otimes_{A^0} A_t^0.$$

8.2. Cuerpos residuales y soportes

Sea $r: A \rightarrow H^0(A)$ el morfismo canónico asociado a una DG-álgebra conmutativa A . Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))$, $j_{\mathfrak{p}}: H^0(A) \rightarrow k(\mathfrak{p})$ denotará el morfismo canónico de $H^0(A)$ en el cuerpo residual del primo \mathfrak{p} . Utilizaremos la notación $i_{\mathfrak{p}}: A \rightarrow k(\mathfrak{p})$ para la composición de $j_{\mathfrak{p}}$ con el morfismo canónico $r: A \rightarrow H^0(A)$. Así, cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))$ tiene asociado el siguiente diagrama conmutativo de DG-álgebras,

$$\begin{array}{ccccc} & & i_{\mathfrak{p}} & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ A & \xrightarrow{r} & H^0(A) & \xrightarrow{j_{\mathfrak{p}}} & k(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Los siguientes resultados extienden los resultados de los lemas 6.2.2 y 6.2.3 del capítulo 6, a una DG-álgebra conmutativa A .

Proposición 8.2.1. *Dados $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(H^0(A))$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,
- (ii) $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) = 0$,
- (iii) $\mathbf{R}\text{Hom}_A^{\bullet}(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) = 0$.

Demostración. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ podemos asumir que los primos son tales que existe un elemento $s \in \mathfrak{q}$ tal que $s \notin \mathfrak{p}$. Sea $t \in A^0$ tal que $r(t) = s$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & i_{\mathfrak{p}} & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ A & \xrightarrow{r} & H^0(A) & \xrightarrow{j_{\mathfrak{p}}} & k(\mathfrak{p}) \\ \downarrow \tilde{u} & & \downarrow u & & \parallel \\ A_t & \xrightarrow{\tilde{r}} & H^0(A)_s & \xrightarrow{j_{\mathfrak{p}_s}} & k(\mathfrak{p}) \end{array}$$

donde u y \tilde{u} son los morfismos canónicos de localización, y $j_{\mathfrak{p}_s}$ es el morfismo inducido por $j_{\mathfrak{p}}$. Nótese que ambos lados del diagrama son cuadrados cocartesianos cuyos los morfismos verticales son planos. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_* \tilde{u}^*(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})) &\stackrel{\text{ps}_*}{\cong} \tilde{u}_* \tilde{u}^*(r_* j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})) \\ &\stackrel{(1)}{\cong} \tilde{u}_* \tilde{r}_* u^* j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \\ &\stackrel{(2)}{\cong} \tilde{u}_* \tilde{r}_* j_{\mathfrak{p}_s*}k(\mathfrak{p}) \stackrel{\text{ps}_*}{\cong} i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

donde (1) y (2) son los isomorfismos de cambio de base para los dos cuadrados anteriores (véase 7.4.7); por otro lado,

$$\tilde{u}^* i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) = \tilde{u}^* r_* j_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \cong \tilde{r}_* u^* j_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $u^* j_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) = k(\mathfrak{q})_s = 0$, ya que $s \in \mathfrak{q}$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\tilde{u}_* \tilde{u}^* i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \cong i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ y empleando la fórmula de proyección, se deduce

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) &\cong \tilde{u}_* \tilde{u}^* i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \\ &\cong \tilde{u}_* (\tilde{u}^* i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} \tilde{u}^* i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) = 0. \end{aligned}$$

Veamos que se verifica la implicación (ii) \Rightarrow (iii). Consideremos para cada $M \in \mathbf{D}(A)$ el homomorfismo canónico

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(M, i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{RHom}_A^\bullet(M \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}), i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}))$$

determinado por el funtor $(- \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}))$. Sea β el homomorfismo

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(M \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}), i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\beta} \mathbf{RHom}_A^\bullet(M, i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})),$$

definido a través de los homomorfismos naturales $M = M \otimes_A^{\mathbf{L}} A \rightarrow M \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})$ y $i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \rightarrow i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})$. La composición $\beta \circ \alpha$ es trivialmente la identidad. Tomando $M = i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ y aplicando (ii) se concluye que necesariamente $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) = 0$.

Para justificar la implicación (iii) \Rightarrow (i) es suficiente tener en cuenta que

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})) = i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{k(\mathfrak{p})}^\bullet(\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), k(\mathfrak{p})) \neq 0,$$

ya que $\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \neq 0$. \square

Definición 8.2.2. Dado $M \in \mathbf{D}(A)$, se denomina *soporte de M* al conjunto

$$\mathrm{supp}_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M \neq 0\},$$

y *cosoporte de M* al conjunto

$$\mathrm{cosupp}_A(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H^0(A)) \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M) \neq 0\}.$$

Ejemplo 8.2.3. Según el resultado anterior, un primer ejemplo sencillo de cálculo del soporte y cosoporte de DG-módulos es el correspondiente a los DG A -módulos $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$, con $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H^0(A))$. Para cada punto $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H^0(A))$, basta aplicar la proposición 8.2.1 para comprobar que el soporte y cosoporte de $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ tienen como único elemento el primo \mathfrak{p} .

Observación 8.2.4. En la literatura podemos encontrar definiciones alternativas tanto de los cuerpos residuales como del soporte y cosoporte.

Por ejemplo, en [ShW] se define el soporte de un DG-módulo utilizando funtores *aciclización* y *localización* cuya construcción requiere la existencia de compactos que determinen «puntos». Shaul y Williamson hacen uso de las nociones generales de soporte y cosoporte en categorías trianguladas en términos de objetos perfectos. Nuestro enfoque es más sencillo, permitiéndonos debilitar las hipótesis sobre la DG-álgebra para obtener los resultados de clasificación sin asumir que la hipótesis noetheriana la cohomología cero del álgebra. En [S3, (5.5)] podemos encontrar una definición alternativa del cuerpo residual en el contexto diferencial graduado utilizando complejos de Koszul.

8.3. Subcategorías localizantes

En 4.6.3 introducíamos la notación $\mathrm{Loc}(S)$ para denotar la menor subcategoría localizante de una categoría triangulada \mathbf{T} que contiene a una colección

de objetos $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$, la subcategoría localizante de \mathbf{T} generada por \mathbf{S} . A lo largo de esta sección trabajaremos con subcategorías localizantes tanto de $\mathbf{D}(A)$ como de $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$, por lo que escribiremos \mathbf{Loc}_B para referirnos a subcategorías de $\mathbf{D}(B)$, si es necesario especificar el álgebra B que estamos considerando.

Cometiendo un pequeño abuso de notación, dado un objeto $M \in \mathbf{D}(B)$ o un conjunto de objetos $\{M_i \in \mathbf{D}(B) \mid i \in I\}$, escribiremos $\mathbf{Loc}_B(M)$ y $\mathbf{Loc}_B(M_i \mid i \in I)$ en lugar de $\mathbf{Loc}_B(\{M\})$ y $\mathbf{Loc}_B(\{M_i \mid i \in I\})$.

Comenzaremos comprobando que, para cualquier DG-álgebra A , $\mathbf{D}(A)$ es la subcategoría localizante generada por A .

Lema 8.3.1. *La DG-álgebra A es un generador compacto de $\mathbf{D}(A)$.*

Demostración. Dado $M \in \mathbf{D}(A)$ DG-módulo y para cualquier entero n se verifica que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(A[n], M) = \mathbf{H}^{-n} \mathrm{Hom}_A^\bullet(A, M) = \mathbf{H}^{-n}(M).$$

Por tanto, si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(A[n], M) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $M = 0$, es decir, A es generador de $\mathbf{D}(A)$. Además, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(A, -) = \mathbf{H}^0(-)$ conmuta con coproductos, luego A es compacto. \square

Proposición 8.3.2. *Si \mathbf{T} es una categoría triangulada con un generador compacto \mathcal{E} , entonces $\mathbf{Loc}(\mathcal{E}) = \mathbf{T}$.*

Demostración. Si \mathcal{E} es un objeto compacto de \mathbf{T} , la inclusión $\mathbf{Loc}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathbf{T}$ tiene adjunto por la derecha ([N2, Lemma 1.7]). Según 4.6.7 (v) y (vi), este hecho equivale a la existencia, para cada $M \in \mathbf{T}$, de un triángulo

$$N_M \longrightarrow M \longrightarrow F_M \xrightarrow{+}$$

tal que $N_M \in \mathbf{Loc}(\mathcal{E})$ y $F_M \in \mathbf{Loc}(\mathcal{E})^\perp$. Como \mathcal{E} es generador de \mathbf{T} , se tiene que $\mathbf{Loc}(\mathcal{E})^\perp = 0$, por tanto $F_M = 0$ y $M \cong N_M \in \mathbf{Loc}(\mathcal{E})$. \square

Corolario 8.3.3. *Para una DG-álgebra A , se verifica que $\mathbf{Loc}_A(A) = \mathbf{D}(A)$.*

Demostración. Haciendo uso del lema 8.3.1, este resultado es consecuencia inmediata la proposición 8.3.2. \square

Observación 8.3.4. Los resultados anteriores son aplicables a cualquier DG-álgebra. Veremos a continuación cómo podemos aplicarlos al caso en el que el álgebra diferencial graduada A sea tal que su esquema afín asociado $\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ es un esquema generado por puntos. Renombremos esta noción, presentada ya en la sección 6.1.

Definición 8.3.5. Diremos que un anillo conmutativo R está *generado por puntos* si la menor subcategoría localizante $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(R)$ que contiene a todos los cuerpos residuales $k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}(R)$ es la categoría derivada $\mathbf{D}(R)$.

Los siguientes dos lemas (observaciones elementales de [ShW, §4]) son fundamentales para la demostración de la proposición 8.3.8.

Lema 8.3.6. *Sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo de DG-álgebras y $M, N \in \mathbf{D}(B)$. Si $M \in \text{Loc}_B(N)$ entonces $f_*M \in \text{Loc}_A(f_*N)$.*

Demostración. Es consecuencia de que el funtor de olvido $f_*: \mathbf{D}(B) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ es un funtor triangulado que conserva coproductos. \square

Lema 8.3.7. [ShW, Proposition 4.2] *Si A es una DG-álgebra conmutativa de amplitud finita entonces A pertenece a $\text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$.*

Demostración. Nótese que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, la n -ésima cohomología $\mathbf{H}^n(A)$ es un $\mathbf{H}^0(A)$ -módulo, luego $\mathbf{H}^n(A)$ pertenece a $\text{Loc}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{H}^0(A))$ y por el lema anterior, $\mathbf{H}^n(A) \in \text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$.

La DG-álgebra A es no positiva, entonces se tiene que $\tau^{\geq 0}A = \mathbf{H}^0(A) \in \text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$. Dado un entero $n < 0$ supongamos que $\tau^{\geq n+1}A$ pertenece a $\text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$. Basta considerar el triángulo

$$\tau^{\leq n}\tau^{\geq n}A \longrightarrow \tau^{\geq n}A \longrightarrow \tau^{\geq n+1}A \longrightarrow$$

para confirmar que $\tau^{\geq n}A$ pertenece a $\text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$ ya que los otros dos vértices del triángulo $\tau^{\leq n}\tau^{\geq n}A \cong \mathbf{H}^n(A)$ y $\tau^{\geq n+1}A$ pertenecen a $\text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$. Por inducción se concluye que $\tau^{\geq n}A$ pertenece a $\text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$ para cualquier $n \leq 0$, en particular, siendo A acotada, $\tau^{\geq m}A = A \in \text{Loc}_A(r_*(\mathbf{H}^0(A)))$, para un entero $m \ll 0$. \square

Proposición 8.3.8. *Si A es una DG-álgebra conmutativa de amplitud finita tal que $H^0(A)$ está generado por puntos, entonces*

$$\mathbf{D}(A) = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))\}).$$

Demostración. Sea $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(A)$ la subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$ generada por todos los módulos asociados en $\mathbf{D}(A)$ a los cuerpos residuales:

$$\mathbf{L} = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))\})$$

Por el corolario 8.3.3, para demostrar que $\mathbf{L} = \mathbf{D}(A)$ es suficiente comprobar que $A \in \mathbf{L}$.

Por el lema 8.3.7, $A \in \text{Loc}_A(r_*(H^0(A)))$. Además, por hipótesis se verifica que $\text{Loc}_{H^0(A)}(\{j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))\}) = \mathbf{D}(H^0(A))$. El lema 8.3.6 justifica que $r_*(H^0(A)) \in \mathbf{L}$, y el lema 8.3.7 que $A \in \text{Loc}_A(r_*(H^0(A))) \subset \mathbf{L}$, y por tanto $\mathbf{L} = \mathbf{D}(A)$. \square

El siguiente lema garantiza que toda subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$ es, en términos análogos a los establecidos en el capítulo 6, \otimes -ideal.

Lema 8.3.9. *Sea A una DG-álgebra y \mathbf{L} una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$. Para cualesquiera $M \in \mathbf{L}$ y $N \in \mathbf{D}(A)$, se verifica $M \otimes_A^{\mathbf{L}} N \in \mathbf{L}$.*

Demostración. La subcategoría $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}(A)$ definida por

$$\mathbf{D} := \{M \in \mathbf{D}(A) \mid M \otimes_A^{\mathbf{L}} N \in \mathbf{L}, \forall N \in \mathbf{L}\}$$

es localizante y contiene a A . Por el corolario 8.3.3 se concluye inmediatamente que $\mathbf{D} = \mathbf{D}(A)$. \square

Lema 8.3.10. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(A)$ una subcategoría localizante y un punto $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(H^0(A))$, se verifica que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}$ si, y sólo si, existe un DG-módulo $M \in \mathbf{L}$ tal que $\mathfrak{p} \in \text{supp}_A(M)$.*

Demostración. La implicación hacia la derecha es inmediata, tomando $M = i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ y aplicando 8.2.1. Comprobemos la otra implicación. Sea $M \in \mathbf{L}$ tal

que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M \neq 0$. Por el lema 8.3.9, $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M$ también pertenece a \mathbf{L} . Además

$$i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M \cong i_{\mathfrak{p}*}(k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\mathfrak{p})}^{\mathbf{L}} \mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M) = i_{\mathfrak{p}*}\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M,$$

entonces $\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M$ es un complejo no nulo de $k(\mathfrak{p})$ -espacios vectoriales, por tanto isomorfo a una suma directa de traslaciones de $k(\mathfrak{p})$. Como además $i_{\mathfrak{p}*}$ conserva coproductos y \mathbf{L} es gruesa, concluimos que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ pertenece a \mathbf{L} . \square

Proposición 8.3.11. *Sea A una DG-álgebra conmutativa de amplitud finita y tal que el anillo $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Si $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(A)$ es una subcategoría localizante entonces*

$$\mathbf{L} = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}\}).$$

Demostración. Sea $\bar{\mathbf{L}} := \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}\})$, y $\mathbf{D} \subset \mathbf{D}(A)$ la subcategoría localizante

$$\mathbf{D} := \{N \in \mathbf{D}(A) \mid M \otimes_A^{\mathbf{L}} N \in \bar{\mathbf{L}}, \forall M \in \mathbf{L}\}.$$

Comprobemos que \mathbf{D} contiene a cada uno de los módulos $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$, para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$.

Si $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}$, por el lema 8.3.9, se tiene que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} N \in \bar{\mathbf{L}}$ para todo $N \in \mathbf{D}(A)$, en particular para cualquier $N \in \mathbf{L}$, luego $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}$. Si por el contrario $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \notin \mathbf{L}$, el lema 8.3.10 garantiza que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} N = 0$ para todo $N \in \mathbf{L}$, en particular $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} N \in \bar{\mathbf{L}}$. En resumen $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$. Por la proposición 8.3.8, se tiene que $\mathbf{D} = \mathbf{D}(A)$. Entonces $A \in \mathbf{D}$ y como consecuencia $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$. \square

La proposición 8.3.11 es la pieza fundamental que nos permite establecer la clasificación de las subcategorías localizantes de $\mathbf{D}(A)$:

Teorema 8.3.12. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que el anillo $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Entonces las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{L}_A} \\ \xrightarrow{\mathcal{V}_A} \end{array} \mathcal{P}(\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))),$$

definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\longmapsto \mathcal{V}_A(\mathbf{L}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{L}\} \\ V &\longmapsto \mathcal{L}_A(V) = \text{Loc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in V\}), \end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

Demostración. Denotemos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_A$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$. Por la proposición 8.3.11, $\mathcal{L} \circ \mathcal{V}(\mathbf{L}) = \mathbf{L}$ para cualquier subcategoría localizante \mathbf{L} de $\mathbf{D}(A)$.

Dado un subconjunto $V \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$, trivialmente $V \subseteq \mathcal{V} \circ \mathcal{L}(V)$. Comprobemos la otra inclusión. Dado un ideal $\mathfrak{q} \notin V$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in V$, entonces $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) = 0$ (por el lema 8.2.1). Aplicando ahora el lema 8.3.10 podemos asegurar que $i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})$ no pertenece a $\text{Loc}(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in V\})$, luego $\mathfrak{q} \notin \mathcal{V} \circ \mathcal{L}(V)$. Por tanto $\mathcal{V} \circ \mathcal{L}(V) \subseteq V$. \square

Podemos escribir el teorema de clasificación en términos de soportes como establece el siguiente corolario:

Corolario 8.3.13. *Bajo las hipótesis del teorema 8.3.12:*

- (1) *Dada $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(A)$ una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$ e I cualquier colección de objetos tales que $\mathbf{L} = \text{Loc}_A(I)$, entonces*

$$\mathcal{V}_A(\mathbf{L}) = \bigcup_{M \in I} \text{supp}_A(M).$$

- (2) *Sea $\mathbf{L} \subset \mathbf{D}(A)$ una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$ y N un objeto de $\mathbf{D}(A)$. Entonces $N \in \mathbf{L}$ si, y sólo si, $\text{supp}_A(N) \subset \mathcal{V}_A(\mathbf{L})$.*

- (3) *Para cualquier subconjunto $V \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$*

$$\mathcal{L}_A(V) = \{M \in \mathbf{D}(A) \mid \text{supp}_A(M) \subset V\}.$$

Demostración. Para demostrar (1), denotemos

$$V_I = \bigcup_{M \in I} \text{supp}_A(M).$$

Para cualquier $M \in I$, $M \in \mathcal{L}_A(V_I) \subset \mathbf{L}$, por lo que $\mathcal{L}_A(V_I) = \mathbf{L}$. Por el teorema 8.3.12 concluimos que $V_I = \mathcal{V}_A(\mathbf{L})$.

Dado $N \in \mathbf{D}(A)$, se sigue de (1) que $\mathcal{V}_A(\mathbf{L}_N) = \text{supp}_A(N)$, donde $\mathbf{L}_N := \text{Loc}_A(N)$. La subcategoría \mathbf{L} del enunciado (2) es localizante, luego $N \in \mathbf{L}$ si, y sólo si, $\mathbf{L}_N \subset \mathbf{L}$, y por el teorema 8.3.12 esto es equivalente a que $\text{supp}_A(N) = \mathcal{V}_A(\mathbf{L}_N) \subset \mathcal{V}_A(\mathbf{L})$.

Finalmente, el enunciado (3) es consecuencia inmediata de (1) y (2). \square

Lema 8.3.14. *Para cualquier DG-módulo $M \in \mathbf{D}(A)$*

$$\text{supp}_A(M) = \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{L}r^*M).$$

Demostración. Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$, basta aplicar el isomorfismo de proyección

$$M \otimes_A^{\mathbf{L}} i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) = M \otimes_A^{\mathbf{L}} r_*j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \cong r_*(\mathbf{L}r^*M \otimes_{\mathbf{H}^0(A)}^{\mathbf{L}} j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})),$$

para obtener la identidad del enunciado, por ser r_* un funtor conservativo. \square

Teorema 8.3.15. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Entonces las correspondencias,*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\rho} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A)) \end{array} \right\}$$

que asignan a cada subcategoría localizante \mathbf{L}_A de $\mathbf{D}(A)$ y cada subcategoría localizante $\mathbf{L}_{\mathbf{H}^0(A)}$ de $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$ las subcategorías

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{L}_A) &= \text{Loc}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{L}r^*M \mid M \in \mathbf{L}_A) \\ \rho(\mathbf{L}_{\mathbf{H}^0(A)}) &= \text{Loc}_A(r_*N \mid N \in \mathbf{L}_{\mathbf{H}^0(A)}), \end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

Demostración. Completamos el diagrama del enunciado con las correspondencias del teorema 8.4.4:

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\rho} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{localizantes de } \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A)) \end{array} \right\} \\
\swarrow \begin{array}{l} \mathcal{L}_A \\ \mathcal{V}_A \end{array} & & \swarrow \begin{array}{l} \mathcal{V}_{\mathbf{H}^0(A)} \\ \mathcal{L}_{\mathbf{H}^0(A)} \end{array} \\
& \mathcal{P}(\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))) &
\end{array}$$

Es inmediato a partir del teorema 8.4.4 y el corolario 8.3.13 que $\rho = \mathcal{L}_A \circ \mathcal{V}_{\mathbf{H}^0(A)}$, luego ρ es una aplicación biyectiva. Resta comprobar que σ es la inversa de ρ .

Hemos de probar entonces que los conjuntos $\mathcal{V}_A(\mathbf{L}_A)$ y $\mathcal{V}_{\mathbf{H}^0(A)}(\sigma(\mathbf{L}_A))$ son iguales. Por el lema 8.3.14 se tiene

$$\mathcal{V}_A(\mathbf{L}_A) = \bigcup_{M \in \mathbf{L}_A} \text{supp}_A(M) = \bigcup_{M \in \mathbf{L}_A} \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{L}r^*M).$$

Aplicando de nuevo el corolario 8.3.13

$$\bigcup_{M \in \mathbf{L}_A} \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{L}r^*M) = \bigcup_{N \in \sigma(\mathbf{L}_A)} \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(N) = \mathcal{V}_{\mathbf{H}^0(A)}(\sigma(\mathbf{L}_A)),$$

lo que concluye la demostración. \square

Del resultado anterior se deduce también la siguiente identidad.

Corolario 8.3.16. *Bajo las hipótesis del teorema 8.3.15, se tiene la igualdad*

$$\text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(N) = \text{supp}_A(r_*(N)),$$

para todo $N \in \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.

8.4. Subcategorías colocalizantes

El procedimiento para obtener la clasificación de las subcategorías colocalizantes a partir de la clasificación de las subcategorías localizantes es análogo al utilizado en el contexto de esquemas.

Recuperando de nuevo la notación de 4.6.3, dada una familia de objetos $S \subset \mathbf{D}(A)$ denotaremos por $\text{Coloc}_A(S)$ la menor subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}(A)$ que contiene a S .

Comenzamos justificando que todas las subcategorías colocalizantes de $\mathbf{D}(A)$ son, en términos del capítulo 6, \mathcal{H} -coideales (véase la definición 6.3.7).

Lema 8.4.1. *Sea A una DG-álgebra y sea \mathcal{C} una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}(A)$. Para cualesquiera $N \in \mathcal{L}$ y $M \in \mathbf{D}(A)$, se verifica $\mathbf{RHom}_A^\bullet(M, N) \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} \subset \mathbf{D}(A)$ la subcategoría

$$\mathcal{L} := \{M \in \mathbf{D}(A) \mid \mathbf{RHom}_A^\bullet(M, N) \in \mathcal{C}, \forall N \in \mathcal{C}\}$$

Puesto que el funtor $\mathbf{RHom}_A^\bullet(-, N)$ es triangulado, transforma coproductos en productos y \mathcal{C} es colocalizante, se tiene que \mathcal{L} es una subcategoría localizante de $\mathbf{D}(A)$. Además, $A \in \mathcal{L}$, y por el lema 8.3.2 se deduce que $\mathcal{L} = \mathbf{D}(A)$. \square

Lema 8.4.2. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, $\mathcal{C} \subset \mathbf{D}(A)$ una subcategoría colocalizante y $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$, entonces $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}$ si, y sólo si, existe un DG-módulo $N \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), N) \neq 0$.*

Demostración. Si $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}$ es suficiente tomar $N = i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p})$ (véase 8.2.1).

Veamos la otra implicación. Sea $N \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), N) \neq 0$. Por el lema anterior sabemos que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), N)$ también pertenece a \mathcal{C} . Del isomorfismo natural

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), N) \cong i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}^\bullet(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^\times N) = i_{\mathfrak{p}*} i_{\mathfrak{p}}^\times N$$

se deduce que $i_{\mathfrak{p}}^\times N$ es un complejo no acíclico de $k(\mathfrak{p})$ -espacios vectoriales. Si $i \in \mathbb{N}$ es tal que $\mathbf{H}^i(i_{\mathfrak{p}}^\times N) \neq 0$ entonces $k(\mathfrak{p})[-i]$ es sumando directo de $i_{\mathfrak{p}}^\times N$. Como $i_{\mathfrak{p}*}$ conserva productos y \mathcal{C} es gruesa, concluimos que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}$. \square

El lema 8.4.2 nos permite demostrar la pieza clave para la clasificación de las subcategorías colocalizantes.

Proposición 8.4.3. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Si \mathcal{C} es una subcategoría colocalizante de $\mathbf{D}(A)$ entonces $\mathcal{C} = \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}\})$.*

Demostración. Denotemos $Y_{\mathcal{C}} = \{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}\}$. La subcategoría

$$\mathcal{D} = \{N \in \mathbf{D}(A) \mid \mathbf{RHom}_A^\bullet(N, M) \in \text{Coloc}_A(Y_{\mathcal{C}}), \forall M \in \mathcal{C}\}$$

es localizante, ya que el funtor triangulado $\mathbf{RHom}_A^\bullet(-, M)$ transforma coproductos en productos y \mathbf{C} es colocalizante. Veamos que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}$ para cualquier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$. Dados $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ y $M \in \mathbf{C}$, empleando el isomorfismo natural

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M) \cong i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}^\bullet(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^\times M) = i_{\mathfrak{p}*}i_{\mathfrak{p}}^\times(M)$$

se deduce que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M) \in \text{Coloc}_A(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}))$, ya que $i_{\mathfrak{p}}^\times M$ es un $k(\mathfrak{p})$ -espacio vectorial y el funtor $i_{\mathfrak{p}*}$ conmuta con productos. Entonces si $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in Y_{\mathbf{C}}$, se tiene que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}$.

Supongamos ahora que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \notin Y_{\mathbf{C}}$. Por el lema anterior podemos deducir que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M) = 0$ para todo $M \in \mathbf{C}$. En particular, se tiene que $\mathbf{RHom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M) \in \text{Coloc}_A(Y_{\mathbf{C}})$ y por lo tanto también en este caso se deduce que $i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{D}$.

Aplicando finalmente la proposición 8.3.8, se tiene que $\mathbf{D} = \mathbf{D}(A)$ y, por tanto, que $\mathbf{C} = \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{C}\})$. \square

Teorema 8.4.4. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita, y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Subcategorías} \\ \text{colocalizantes de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \xleftrightarrow[\mathcal{W}_A]{\mathcal{C}_A} \mathcal{P}(\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))),$$

definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\longmapsto \mathcal{W}_A(\mathbf{C}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \mathbf{C}\} \\ \mathbf{W} &\longmapsto \mathcal{C}_A(\mathbf{W}) = \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathbf{W}\}), \end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

Demostración. Denotaremos $\mathcal{W} = \mathcal{W}_A$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$. Para una subcategoría colocalizante \mathbf{C} de $\mathbf{D}(A)$ la igualdad $\mathcal{C} \circ \mathcal{W}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ se obtiene de forma inmediata aplicando la proposición 8.4.3.

Dado un subconjunto $W \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$, para comprobar $\mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W) = W$, consideremos la definición explícita de la composición $\mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W)$,

$$\mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A)) \mid i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \in \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in W\})\}$$

La inclusión $W \subseteq \mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W)$ se sigue directamente de la definición. Compruébemos entonces que $\mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W) \subseteq W$. Tomemos $\mathfrak{q} \notin W$; por el lema 8.2.1 se tiene que $\mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q})) = 0$ para todo $\mathfrak{p} \in W$. El lema 8.4.2 asegura que $i_{\mathfrak{q}*}k(\mathfrak{q}) \notin \text{Coloc}_A(\{i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in W\})$, luego $\mathfrak{q} \notin \mathcal{W} \circ \mathcal{C}(W)$. \square

Del mismo modo que en la sección anterior se establece la clasificación de subcategorías localizantes en términos del soporte de DG-módulos, se obtiene la clasificación de subcategorías colocalizantes haciendo uso de la noción de cosoporte:

Lema 8.4.5. *Para cualquier $M \in \mathbf{D}(A)$ se tiene*

$$\text{cosupp}_A(M) = \text{cosupp}_{\mathbf{H}^0(A)}(r^\times M).$$

Demostración. La adjunción interna $r_* \dashv r^\times$ establece que para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ se tiene que

$$r_* \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathbf{H}^0(A)}^\bullet(j_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), r^\times M) \cong \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), M).$$

Por el carácter conservativo de r_* obtenemos el resultado buscado. \square

El siguiente resultado relaciona las subcategorías localizantes de la categoría derivada de una DG-álgebra A y las subcategorías localizantes de la categoría derivada del anillo $\mathbf{H}^0(A)$.

Teorema 8.4.6. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Las correspondencias*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{de } \mathbf{D}(A) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau} \\ \xleftarrow{\mu} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \text{Subcategorías} \\ \text{de } \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A)) \end{array} \right\}$$

que asignan a cada subcategoría colocalizante \mathbf{C}_A de $\mathbf{D}(A)$ y cada subcategoría colocalizante de $\mathbf{C}_{\mathbf{H}^0(A)}$ de $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$ las subcategorías

$$\begin{aligned}\tau(\mathbf{C}_A) &= \text{Coloc}_{\mathbf{H}^0(A)}(\{r^\times M \mid M \in \mathbf{C}_A\}) \\ \mu(\mathbf{C}_{\mathbf{H}^0(A)}) &= \text{Coloc}_A(\{r_* N \mid N \in \mathbf{C}_{\mathbf{H}^0(A)}\})\end{aligned}$$

son mutuamente inversas.

Demostración. La prueba es análoga a la del teorema 8.3.15, empleando el lema 8.4.5. \square

Como corolario obtenemos el análogo al enunciado 8.3.16:

Corolario 8.4.7. *Para todo $M \in \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$ se tiene la igualdad*

$$\text{cosupp}_{\mathbf{H}^0(A)}(M) = \text{cosupp}_A(r_*(M)).$$

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 8.3.15. \square

8.5. Propiedades de los funtores $\mathbf{L}r^*$ y r^\times

Los resultados de la sección anterior nos permiten demostrar propiedades sobre los funtores r_* , $\mathbf{L}r^*$ y r^\times que consideramos de interés.

Comenzaremos demostrando que los funtores $\mathbf{L}r^*$ y r^\times son *conservativos*. Este carácter conservativo es de crucial importancia, ya que permite reducir cuestiones acerca de si dos DG-módulos son isomorfos en $\mathbf{D}(A)$, a otras más sencillas sobre si dos complejos de módulos son isomorfos en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.

Proposición 8.5.1. *Sea A una DG-álgebra conmutativa de amplitud finita, y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Dado $M \in \mathbf{D}(A)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) $M = 0$ en $\mathbf{D}(A)$.
- (ii) $\mathbf{L}r^*M = 0$ en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.
- (iii) $r^\times M = 0$ en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.

Demostración. Las implicaciones (i) \Rightarrow (ii) y (i) \Rightarrow (iii) son triviales.

Para (ii) \Rightarrow (i) es suficiente aplicar el lema 8.3.14 y para (iii) \Rightarrow (i) el lema 8.4.5. \square

Como consecuencia se deduce el resultado equivalente:

Corolario 8.5.2. *Sea A una DG-álgebra en las hipótesis del teorema anterior. Para $\varphi: M \rightarrow N$ un homomorfismo en $\mathbf{D}(A)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) $\varphi: M \rightarrow N$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}(A)$.
- (ii) $\mathbf{L}r^*\varphi$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.
- (iii) $r^\times\varphi$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.

Observación 8.5.3. Para una DG-álgebra con amplitud no finita, puesto que no tenemos el teorema de localización, es posible que los funtores $\mathbf{L}r^*$ y r^\times sobre toda la categoría $\mathbf{D}(A)$ no sean conservativos.

En [S2, Theorem 2.3] se ofrece el siguiente contraejemplo que demuestra que en general r^\times y $\mathbf{L}r^*$ no son conservativos. Sea $A = \mathbb{K}[t]$ la DG-álgebra dada por el anillo de polinomios sobre un cuerpo \mathbb{K} en una variable de grado -2 , y $M \in \mathbf{D}(A)$ el DG-módulo $\mathbb{K}[t, t^{-1}]$. Se puede probar que $M \not\cong 0$ en $\mathbf{D}(A)$, y sin embargo $\mathbf{L}r^*M \cong 0 \cong r^\times M$ en $\mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$.

El siguiente lema nos permite probar el teorema [?], un resultado ya expresado en [S2, Theorem 3.6], que garantiza el functor olvido r_* «detecta» cuándo se anulan el tensor y el Hom, y que se deriva también de la clasificación de las subcategorías localizantes y colocalizantes.

Lema 8.5.4. *Para $M, N \in \mathbf{D}(A)$, se tienen las siguientes identidades:*

- (i) $\text{supp}_A(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) = \text{supp}_A(M) \cap \text{supp}_A(N)$,
- (ii) $\text{cosupp}_A(\mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(M, N)) = \text{supp}_A(M) \cap \text{cosupp}_A(N)$.

Demostración. Para demostrar (i), consideremos primero los isomorfismos

$$i_{p*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M \otimes_A^{\mathbf{L}} N \stackrel{(\dagger)}{\cong} i_{p*}\mathbf{L}i_p^*(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) \cong i_{p*}(\mathbf{L}i_p^*M \otimes_{k(\mathfrak{p})} \mathbf{L}i_p^*N)$$

donde \dagger se obtiene por el isomorfismo de proyección. Además, $\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M \otimes_{k(\mathfrak{p})} \mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*N$ es distinto de cero si, y sólo si, $\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M \neq 0$ y $\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*N \neq 0$, ya se trata del producto en la categoría derivada de $k(\mathfrak{p})$ -espacios vectoriales. Por tanto, se tiene la equivalencia

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \text{supp}_A(M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) &\iff i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} (M \otimes_A^{\mathbf{L}} N) \neq 0 \\ &\iff [\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M \neq 0 \text{ y } \mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*N \neq 0] \\ &\iff \mathfrak{p} \in \text{supp}_A(M) \cap \text{supp}_A(N) \end{aligned}$$

Análogamente, para (ii) consideramos, para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$, los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, N)) &\stackrel{(1)}{\cong} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}) \otimes_A^{\mathbf{L}} M, N) \\ &\stackrel{(2)}{\cong} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), N)) \\ &\stackrel{(3)}{\cong} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^{\times} N)) \\ &\stackrel{(4)}{\cong} i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M, \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^{\times} N)) \end{aligned}$$

donde (1) y (2) se obtiene mediante la adjunción $\otimes - \text{Hom}$ y (3) y (4) mediante la adjunción interna $i_{\mathfrak{p}*} \dashv i_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Por tanto, se tienen las equivalencias

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \text{cosupp}_A(\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, N)) &\iff \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(i_{\mathfrak{p}*}k(\mathfrak{p}), \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, N)) \neq 0 \\ &\iff i_{\mathfrak{p}*} \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M, \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^{\times} N)) \neq 0 \\ &\iff \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(\mathbf{L}i_{\mathfrak{p}}^*M, \mathbf{RHom}_{k(\mathfrak{p})}(k(\mathfrak{p}), i_{\mathfrak{p}}^{\times} N)) \neq 0 \\ &\iff \mathfrak{p} \in \text{supp}_A(M) \cap \text{cosupp}_A(N). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 8.5.5. *Sea A una DG-álgebra conmutativa, de amplitud finita y tal que $\mathbf{H}^0(A)$ está generado por puntos. Entonces, dados $M, N \in \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$, se tienen las siguientes equivalencias:*

$$(i) \quad r_*(M) \otimes_A^{\mathbf{L}} r_*(N) = 0 \text{ si, y sólo si, } M \otimes_{\mathbf{H}^0(A)}^{\mathbf{L}} N = 0.$$

$$(ii) \quad \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(r_*(M), r_*(N)) = 0 \text{ si, y sólo si, } \mathbf{RHom}_{\mathbf{H}^0(A)}(M, N) = 0$$

Demostración. Por los Teoremas de clasificación 8.3.12 y 8.4.4 sabemos que para un DG-módulo $M \in \mathbf{D}(A)$, se tiene la equivalencia

$$M = 0 \iff \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(M) = \emptyset \iff \text{cosupp}_{\mathbf{H}^0(A)}(M) = \emptyset$$

Basta aplicar el resultado anterior para $M, N \in \mathbf{D}(\mathbf{H}^0(A))$ y concluir aplicando los Corolarios 8.3.16 y 8.4.7. \square

Observación 8.5.6. Estas propiedades acerca de «detectar ceros» no dejan de ser sorprendentes, aún con estas hipótesis de acotación sobre A , pues ni siquiera en este caso los funtores $\mathbf{L}r^*$ y r^\times son necesariamente plenos o fieles. Esto se debe a que de ser el funtor $\mathbf{L}r^*$ un funtor pleno (o respectivamente un funtor fiel), para cada $M \in \mathbf{D}(A)$ el morfismo canónico dado por la unidad de la adjunción $\mathbf{L}r^* \dashv r_*$

$$M \rightarrow r_*(M \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathbf{H}^0(A)),$$

sería un epimorfismo escindido (o respectivamente un monomorfismo). De forma similar, de ser el funtor r^\times un funtor pleno (o respectivamente un funtor fiel), entonces para cada $M \in \mathbf{D}(A)$ el morfismo canónico dado por la counidad de la adjunción $r_* \dashv r^\times$

$$r_*(\mathbf{RHom}_A^\bullet(\mathbf{H}^0(A), M)) \longrightarrow M$$

tendría que ser un monomorfismo escindido (o respectivamente un epimorfismo). Ninguna de estas conclusiones es posible salvo cuando A es una DG-álgebra trivial, esto es, un anillo concentrado en grado 0. Véase [S2, Theorem 2.1] y [S2, Theorem 2.2] para más detalles.

Dualidad para DG-álgebras

Como consecuencia de la clasificación de las subcategorías localizantes expuesta en el capítulo anterior, en este último capítulo abordamos la construcción del funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos de DG-álgebras conmutativas cohomológicamente noetherianas y estudiamos sus propiedades, siguiendo la propuesta de M.H. Khusyairi en el contexto de esquemas noetherianos (véase [Kh]).

El funtor *imagen inversa excepcional* asociado a un morfismo de esquemas es un elemento central de la teoría de dualidad de Grothendieck. La comprensión de esta dualidad pasa por distinguir entre dos funtores asociados a un morfismo de esquemas $f: X \rightarrow Y$; por un lado el adjunto por la derecha del funtor imagen directa $\mathbf{R}f_*$, que existe bajo hipótesis generales sobre el morfismo f y que se denota f^\times , y por otro la imagen inversa excepcional $f^!$. El funtor $f^!$ coincide con f^\times si f es propio o, por ejemplo, con f^* si f es una inmersión abierta. Utilizando compactificaciones se extiende la construcción definiendo el pseudofuntor imagen inversa excepcional $(-)^!$ para morfismos separados esencialmente de tipo finito entre esquemas noetherianos, que se caracteriza por su buen comportamiento respecto al cambio de base plano.

En [ILN] los autores definen para morfismos separados entre esquemas noetherianos una transformación canónica entre las asignaciones $(-)^{\times}$ y $(-)^!$ que abre la posibilidad de establecer una definición alternativa para el funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos, separados y esencialmente de tipo finito entre esquemas noetherianos. Posteriormente M.H. Khusyairi, en su tesis doctoral [Kh], comprueba que partiendo directamente de la propuesta alternativa de definición del funtor imagen inversa excepcional es posible demostrar sus principales propiedades.

En [S1], en el contexto de álgebras diferenciales graduadas, Shaul propone la construcción del funtor imagen inversa excepcional para \mathbb{K} -álgebras diferenciales graduadas conmutativas, cohomológicamente esencialmente de tipo finito y de dimensión plana finita, siendo \mathbb{K} un anillo conmutativo Gorenstein de dimensión de Krull finita. La propuesta de Shaul requiere la existencia de complejos dualizantes y está definida sobre las subcategorías de los DG-módulos acotados con cohomología finitamente generada.

Nuestro objetivo en este capítulo es definir el funtor imagen inversa excepcional de forma similar a [Kh] para DG-álgebras y demostrar que verifica las propiedades de pseudofuntorialidad y cambio de base que hemos mencionado. Que nuestro enfoque es adecuado lo muestra el hecho de que la definición propuesta en esta memoria generaliza, para morfismos planos de álgebras diferenciales graduadas, la propuesta previa de Shaul en [S1].

9.1. DG-álgebras cohomológicamente noetherianas

Dada A un álgebra diferencial graduada, $\mathbf{D}^+(A)$, $\mathbf{D}^-(A)$ y $\mathbf{D}^b(A)$ denotan las subcategorías trianguladas plenas de $\mathbf{D}(A)$ cuyos objetos son, respectivamente, los DG-módulos con cohomología acotada inferiormente, acotada superiormente y acotada.

Un DG A -módulo M posee *cohomología finitamente generada* si $H^n(M)$ es un $H^0(A)$ -módulo finitamente generado, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $\mathbf{D}_f(A)$ a la subcategoría triangulada plena de $\mathbf{D}(A)$ de los DG-módulos con cohomología finitamente generada, y $\mathbf{D}_f^\sharp(A) := \mathbf{D}^\sharp(A) \cap \mathbf{D}_f(A)$, para cada una de las acotaciones $\sharp \in \{+, -, b\}$.

Definición 9.1.1. Diremos que una DG-álgebra conmutativa A es *cohomológicamente noetheriana* si A es de amplitud finita, $H^0(A)$ es un anillo noetheriano y $H^i(A)$ es un $H^0(A)$ -módulo finitamente generado, para todo entero $i < 0$.

9.1.2. El contexto en el que trabajaremos en este capítulo es el de las DG-álgebras conmutativas y cohomológicamente noetherianas.

La subcategoría plena de DGA_{wc} cuyos objetos son las \mathbb{K} -álgebras conmutativas y cohomológicamente noetherianas se denotará $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, o $\text{DGA}_{\text{cn}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ cuando necesitemos precisar el anillo base \mathbb{K} .

Notación 9.1.3. A lo largo del capítulo utilizaremos isomorfismos de pseudofuntorialidad $\mathbf{ps}_*(f, g)$, $\mathbf{ps}^*(f, g)$ y $\mathbf{ps}^{\times}(f, g)$ asociados a una composición $g \circ f$ de morfismos de DG-álgebras para los pseudofuntores $(-)_*$, $(-)^*$ y $(-)^{\times}$. Si por el contexto es claro cuáles son los morfismos involucrados en nuestros argumentos escribiremos simplemente \mathbf{ps}_* , \mathbf{ps}^* o \mathbf{ps}^{\times} tanto para los isomorfismos de pseudofuntorialidad como para sus inversos o los dados por las composiciones asociadas diagramas conmutativos de morfismos de DG-álgebras.

9.2. Cambio de base para el pseudofunctor $(-)^{\times}$

9.2.1. Un cuadrado cocartesiano de DG álgebras conmutativas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \quad (9.2.1.1)$$

en el que el morfismo u (y por tanto v) es plano, tiene asociada una transformación natural $\phi_{\diamond}: v^* f^{\times} \rightarrow g^{\times} u^*$, de funtores definidos entre las categorías $\mathbf{D}(A)$ y $\mathbf{D}(D)$, como detallamos a continuación (recordemos que por ser u y v morfismos planos $\mathbf{L}u^* = u^*$ y $\mathbf{L}v^* = v^*$).

La transformación natural $\xi_{\diamond}: u^* f_* \rightarrow g_* v^*$, definida en (7.4.7.1), es un isomorfismo ya que u es un morfismo plano. Sea $\nu_{\diamond}: g_* v^* f^{\times} \rightarrow u^*$ la transformación resultado de la composición

$$g_* v^* f^{\times} \xrightarrow{\xi_{\diamond}^{-1} f^{\times}} u^* f_* f^{\times} \xrightarrow{u^* \epsilon_{\times}} u^*,$$

donde $\epsilon_{\times}: f_* f^{\times} \rightarrow \text{id}$ es la counidad de la adjunción $f_* \dashv f^{\times}$.

La adjunción $g_* \dashv g^{\times}$ proporciona la transformación cambio de base, para el pseudofunctor $(-)^{\times}$, que se denotará

$$\phi_{\diamond}: v^* f^{\times} \rightarrow g^{\times} u^*, \quad (9.2.1.2)$$

es la definida por la composición $v^* f^{\times} \xrightarrow{\eta_{\times} v^* f^{\times}} g^{\times} g_* v^* f^{\times} \xrightarrow{g^{\times} \nu_{\diamond}} g^{\times} u^*$, con η_{\times} la unidad de la adjunción $g_* \dashv g^{\times}$.

9.2.2. La transformación cambio de base definida ϕ es compatible con la concatenación horizontal y vertical de cuadrados como se establece el lema 9.2.3. Consideremos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 u \downarrow & \diamond & \downarrow v & \heartsuit & \downarrow w \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' \\
 y \downarrow & \heartsuit' & \downarrow z \\
 A'' & \xrightarrow{h} & B''
 \end{array}$$

tales que los cuadrados \diamond , \heartsuit , y \heartsuit' son cocartesianos y cuyos morfismos verticales son planos. Concatenando horizontalmente \diamond con \heartsuit y verticalmente con \heartsuit' se obtienen los correspondientes diagramas exteriores, que a su vez son cuadrados cocartesianos,

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{gf} & C \\
 u \downarrow & \diamond\heartsuit & \downarrow w \\
 A' & \xrightarrow{g'f'} & C'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 yu \downarrow & \diamond\heartsuit' & \downarrow zv \\
 A'' & \xrightarrow{h} & B''
 \end{array}$$

Lema 9.2.3. *La transformación cambio de base ϕ es compatible con la concatenación horizontal y vertical de cuadrados cocartesianos con morfismos verticales planos, es decir, con la notación establecida en 9.2.2, los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{array}{ccc}
 w^*(gf)^\times & \xrightarrow{\phi_{(\diamond\heartsuit)}} & (g'f')^\times u^* \\
 w^* \text{ps}^\times \downarrow & & \downarrow \text{ps}^\times u^* \\
 w^* g^\times f^\times & \xrightarrow{\phi_{\heartsuit} f^\times} & g'^\times v^* f^\times \xrightarrow{g'^\times \phi_\diamond} g'^\times f'^\times u^*
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (zv)^* f^\times & \xrightarrow{\phi_{(\heartsuit')}} & h^\times (yu)^* \\
 \text{ps}^* f^\times \downarrow & & \downarrow h^\times \text{ps}^* \\
 z^* v^* f^\times & \xrightarrow{z^* \phi_\diamond} & z^* l^\times u^* \xrightarrow{\phi_{\heartsuit'} u^*} h^\times y^* u^*
 \end{array}$$

Demostración. Justifiquemos la conmutatividad del primero de estos diagramas, la del segundo se comprueba de forma análoga. La transformación ϕ se construye a partir del isomorfismo natural ξ definido para cuadrados cartesianos con morfismos verticales planos (según 7.4.7.1).

La comprobación de la compatibilidad del cambio de base ϕ con la concatenación de cuadrados se reduce a demostrar que la transformación natural ξ es compatible con la correspondiente concatenación de cuadrados, es decir, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 u^*(gf)_* & \xrightarrow{\xi_{(\diamond)}} & (g'f')_*w^* \\
 u^*ps_* \downarrow & & \downarrow ps_*w^* \\
 u^*f_*g_* & \xrightarrow{\xi_{\diamond}g_*} f'_*v_*g_* \xrightarrow{f'_*\xi_{\diamond}} & f'_*g'_*w^*
 \end{array} \quad (9.2.3.1)$$

es conmutativo. Para justificar la conmutatividad del diagrama (9.2.3.1) consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 u^*(gf)_* & \xrightarrow{\eta_w} & u^*(gf)_*w_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & u^*u_*(g'f')_*w^* & \xrightarrow{\epsilon_u} & (g'f')_*w^* \\
 \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* \\
 u^*f_*g_* & \xrightarrow{\eta_w} & u^*f_*g_*w_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & u^*f_*v_*g'_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & u^*u_*f'_*g'_*w^* \xrightarrow{\epsilon_u} f'_*g'_*w^* \\
 \downarrow \eta_v & & \downarrow \eta_v & & \downarrow \eta_v & & \parallel \\
 u^*f_*v_*v_*g_* & \xrightarrow{\eta_w} & u^*f_*v_*v_*g_*w_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & u^*f_*v_*v_*v_*g'_*w^* & \xrightarrow{\epsilon_v} & u^*f_*v_*g'_*w^* \\
 \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* & & \downarrow ps_* \\
 u^*u_*f'_*v_*g_* & \xrightarrow{\eta_w} & u^*u_*f'_*v_*g_*w_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & u^*u_*f'_*v_*v_*g'_*w^* & \xrightarrow{\epsilon_v} & u^*u_*f'_*g'_*w^* \\
 \downarrow \epsilon_u & & \downarrow \epsilon_u & & \downarrow \epsilon_u & & \downarrow \epsilon_u \\
 f'_*v_*g_* & \xrightarrow{\eta_w} & f'_*v_*g_*w_*w^* & \xrightarrow{ps_*} & f'_*v_*v_*g'_*w^* & \xrightarrow{\epsilon_v} & f'_*g'_*w^*
 \end{array}$$

donde las flechas, como indican las etiquetas, son inducidas o bien por las unidades y counidades de las adjunciones $(-)^* \dashv (-)_*$, denotadas respectivamente por η y ϵ , o bien por la pseudofunctorialidad de $(-)_*$. Haciendo uso de la identidad triangular correspondiente a la adjunción $v^* \dashv v_*$ y la naturalidad de las

transformaciones es inmediato que todos los cuadrados interiores del diagrama conmutan, luego el borde exterior, del que recuperamos (9.2.3.1), es también conmutativo. \square

Observación 9.2.4. la transformación natural ϕ_{\diamond} asociada a un cuadrado del tipo (9.2.1.1) no es en general un isomorfismo. Asumiendo condiciones adicionales sobre los morfismos horizontales del cuadrado cocartesiano \diamond y los coeficientes $M \in \mathbf{D}(A)$ se verifica el cambio de base para el pseudofunctor $(-)^{\times}$, es decir que el homomorfismo

$$\phi_{\diamond}(M): v^* f^{\times}(M) \longrightarrow g^{\times} u^*(M)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(D)$. El cambio de base para el pseudofunctor $(-)^{\times}$ se establece en el teorema 9.2.7, para morfismos cohomológicamente finitos, como consecuencia del lema 9.2.6.

Definición 9.2.5. Un morfismo $f: A \rightarrow B$ en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ es *cohomológicamente finito* si $B \in \mathbf{D}_f(A)$, es decir, $\mathbf{H}^0(B)$ es un $\mathbf{H}^0(A)$ -módulo finitamente generado.

Lema 9.2.6. *Sea $u: A \rightarrow C$ un morfismo plano de DG-álgebras. Entonces el morfismo canónico*

$$C \otimes_A \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M) \longrightarrow \mathbf{RHom}_C(C \otimes_A B, C \otimes_A M)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(C)$, para cualesquiera $B \in \mathbf{D}_f^-(A)$ y $M \in \mathbf{D}^+(A)$.

Demostración. Bajo las hipótesis del lema, el teorema [Y1, Theorem 12.10.14] establece que la *evaluación-tensor derivada* proporciona un isomorfismo en $\mathbf{D}(A)$:

$$C \otimes_A \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, C \otimes_A M).$$

Componiendo con el isomorfismo de la adjunción $u^* \dashv u_*$,

$$\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, C \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_C^{\bullet}(C \otimes_A B, C \otimes_A M),$$

se obtiene el isomorfismo buscado

$$C \otimes_A \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{RHom}_C^{\bullet}(C \otimes_A B, C \otimes_A M). \quad \square$$

Teorema 9.2.7. *Sea \diamond un cuadrado cocartesiano en $\mathbf{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & C \otimes_A B \end{array}$$

en el que el morfismo u es plano y el morfismo $f: A \rightarrow B$ es cohomológicamente finito. Entonces la transformación natural ϕ_{\diamond} define un isomorfismo,

$$\phi_{\diamond}(M): v^* f^{\times}(M) \longrightarrow g^{\times} u^*(M),$$

para cualquier $M \in \mathbf{D}^+(A)$.

Demostración. Puesto que $B \in \mathbf{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ y el morfismo de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$ es cohomológicamente finito, B es un DG-módulo sobre A que está concentrado en grados negativos y sus cohomologías $H^n(B)$ son $H^0(A)$ -módulos finitamente generados, es decir, $B \in \mathbf{D}_f^-(A)$. Bajo estas hipótesis el homomorfismo canónico establecido en el lema 9.2.6,

$$C \otimes_A \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M) \longrightarrow \mathbf{RHom}_C^{\bullet}(C \otimes_A B, C \otimes_A M), \quad (9.2.7.1)$$

es un isomorfismo para cualquier $M \in \mathbf{D}^+(A)$. Como consecuencia, para cada $M \in \mathbf{D}^+(A)$, el homomorfismo

$$g_* \phi_{\diamond}(M): g_* v^* f^{\times}(M) \longrightarrow g_* g^{\times} u^*(M)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(C)$, ya que resulta de la composición

$$\begin{aligned} g_* v^* f^{\times}(M) &= g_* ((C \otimes_A B) \otimes_B \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M)) \\ &\cong C \otimes_A \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(B, M) \\ &\stackrel{(*)}{\cong} \mathbf{RHom}_C^{\bullet}(C \otimes_A B, C \otimes_A M) = g_* g^{\times} u^*(M), \end{aligned}$$

donde $(*)$ es el isomorfismo (9.2.7.1) y las identificaciones sin etiqueta son consecuencia de que u y v son morfismos planos. Del carácter conservativo del funtor de olvido g_* se deduce finalmente que $\phi_{\diamond}(M)$ es un isomorfismo. \square

9.3. Imagen inversa excepcional en DG-álgebras

Un morfismo de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$ tiene asociado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 f \downarrow & \diamond & \downarrow \pi_2 \\
 B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B \\
 & \searrow \text{id}_B & \downarrow \delta \\
 & & B
 \end{array}$$

donde $\pi_1 = \text{id}_B \otimes_A f$ y $\pi_2 = f \otimes \text{id}_B$ son las proyecciones que completan el cuadrado cocartesiano \diamond y $\delta: B \otimes_A B \rightarrow B$ es el morfismo de álgebras dado por la multiplicación (determinado por la conmutatividad del diagrama).

Definimos el *functor imagen inversa excepcional* asociado al morfismo de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$,

$$f^!: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(B),$$

mediante la composición

$$f^! := \mathbf{L}\delta^* \pi_1^\times \mathbf{L}f^* \quad (9.3.0.1)$$

Notación 9.3.1. Dado un morfismo de DG-álgebras $A \rightarrow B$ nos referiremos a $B \otimes_A B$ como B_A^e o simplemente B^e si la base A es obvia.

De la definición explícita de $f^!$ resulta

$$f^!(-) := B \otimes_{B_A^e}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_B^\bullet(B_A^e, B \otimes_A^{\mathbf{L}} -),$$

que por la adjunción $\otimes^{\mathbf{L}} - \mathbf{RHom}$ podemos reescribir como

$$f^!(-) = B \otimes_{B_A^e}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_A^\bullet(B, B \otimes_A^{\mathbf{L}} -).$$

9.3.2. Como señalamos en la introducción de este capítulo, la definición que proponemos en esta sección para el pseudofunctor imagen inversa excepcional $(-)^!$ sigue la construcción propuesta en el contexto de esquemas noetherianos en [ILN] para morfismos planos. Asumiremos también aquí la hipótesis de planitud sobre los morfismos de DG-álgebras.

Si f es un morfismo plano en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ existe una transformación natural que relaciona los funtores f^\times y $f^!$, que será de utilidad en la demostración de las propiedades de la asignación $(-)^!$:

Definición 9.3.3. Dado $f: A \rightarrow B$ un morfismo plano en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, se define la transformación natural $\psi(f): f^\times \rightarrow f^!$ mediante la composición

$$\begin{array}{ccc}
 f^\times & \xlongequal{\text{id}_B^*} f^\times & \xrightarrow{\text{ps}^* f^\times} & \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* f^\times \\
 & \searrow \psi(f) & & \downarrow \mathbf{L}\delta^* \phi_\diamond \\
 & & & \mathbf{L}\delta^* \pi_1^\times f^*
 \end{array}$$

donde ϕ_\diamond es la transformación natural cambio de base asociada al diagrama de DG-álgebras (véase (9.2.1.2))

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 f \downarrow & \diamond & \downarrow \pi_2 \\
 B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B
 \end{array}$$

Proposición 9.3.4. Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ cohomológicamente finito y plano. Entonces la transformación natural

$$\psi(f): f^\times \longrightarrow f^!,$$

establece entre los funtores $f^\times: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(B)$ y $f^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(B)$ un isomorfismo.

Demostración. Si f es plano y cohomológicamente finito, entonces, por el teorema 9.2.7, ϕ_\diamond es un isomorfismo. Por pseudofuntorialidad $\text{ps}^* f^\times$ es un isomorfismo, por tanto $\psi(f)$ es también un isomorfismo. \square

Observación 9.3.5. Como consecuencia de los resultados del capítulo 8, demostraremos a continuación algunos resultados clave que nos permitirán demostrar en la sección 9.5 la pseudofuntorialidad de la asignación $(-)^!$ para morfismos planos, y en la sección 9.4 que se verifica el cambio de base plano.

9.3.6 Complejos de Koszul. Una de las herramientas fundamentales en la comprobación de que la asignación $(-)^!$ es pseudofunctorial son los *complejos de Koszul*. Los complejos de Koszul, junto con la clasificación de categorías localizantes en categorías de módulos diferenciales graduados establecida en el capítulo anterior, nos permitirán demostrar la proposición 9.3.7 y obtener como consecuencia una propiedad fundamental sobre los pseudofuntores $(-)^{\times}$ y $\mathbf{L}(-)^*$ enunciada en el corolario 9.3.8.

Dado un anillo conmutativo S y una colección de elementos $s_1, \dots, s_n \in S$, se define el complejo de Koszul asociado a (s_1, \dots, s_n) como el complejo de S -módulos

$$\mathrm{Kos}(S; s_1, \dots, s_n) := \mathrm{Kos}(S; s_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Kos}(S; s_n)$$

donde, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Kos}(S; s_i)$ es el complejo concentrado en grados -1 y 0 dado por

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow S \xrightarrow{\cdot s_i} S \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

concentrado en grados -1 y 0 .

Sea ahora A una DG-álgebra conmutativa y $r: A \rightarrow H^0(A)$ el morfismo canónico. Para una familia de elementos $a_1, \dots, a_n \in A^0$, el complejo de Koszul asociado a (a_1, \dots, a_n) sobre A es el complejo

$$\mathrm{Kos}(A; a_1, \dots, a_n) := \mathrm{Kos}(A^0; a_1, \dots, a_n) \otimes_{A^0} A$$

De la definición es inmediato que

$$r^*(\mathrm{Kos}(A; a_1, \dots, a_n)) \cong \mathrm{Kos}(H^0(A); r(a_1), \dots, r(a_n))$$

Asumiendo conocida la familia de elementos $a_1, \dots, a_n \in A^0$, nos referiremos por comodidad al complejo de Koszul $\mathrm{Kos}(A; a_1, \dots, a_n)$ como K_A , de forma que r^*K_A será el complejo de Koszul sobre $H^0(A)$ correspondiente, $\mathrm{Kos}(H^0(A); r(a_1), \dots, r(a_n))$.

Mencionemos a continuación algunas propiedades de los complejos de Koszul de especial interés.

La primera es que tienen la propiedad de ser complejos *perfectos*, es decir, pertenecen a la menor subcategoría gruesa de $\mathbf{D}(A)$ generada por A . Por tanto, para cualquier $M \in \mathbf{D}(A)$ se verifica que

$$\mathbf{RHom}_A^\bullet(K_A, M) \cong K_A^\vee \otimes_A^{\mathbf{L}} M.$$

donde $K_A^\vee := \mathbf{RHom}_A^\bullet(K_A, A)$ es el complejo dual de K_A . Además, el complejo K_A es autodual salvo traslación, i.e., $K_A^\vee \cong K_A[-n]$.

Por otro lado, por lema 8.3.14, dado un complejo de Koszul K_A asociado a la n -tupla (a_1, \dots, a_n) de elementos de grado cero de A se tiene que

$$\text{supp}_A(K_A) = \text{supp}_{\mathbf{H}^0(A)}(\mathbf{L}r^*K_A) = Z,$$

donde $Z \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ es el cerrado determinado por el ideal $\langle r(a_1), \dots, r(a_n) \rangle$,

$$Z = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A)) \mid \langle r(a_1), \dots, r(a_n) \rangle \subset \mathfrak{q}\}.$$

De hecho, siendo $\mathbf{H}^0(A)$ un anillo noetheriano, fijado un subconjunto cerrado $Z \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ podemos asociarle un complejo de Koszul sobre A cuyo soporte sea precisamente Z .

Proposición 9.3.7. *Sea $A \in \text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, $M \in \mathbf{D}(A)$ un DG-módulo tal que $W := \text{supp}_A(M)$ es un subconjunto de $\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ cerrado por especialización. Entonces:*

- (1) *Dado $N \in \mathbf{D}(A)$, $M \otimes_A^{\mathbf{L}} N = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{RHom}_A^\bullet(M, N) = 0$.*
- (2) *Si $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ es un homomorfismo en $\mathbf{D}(A)$ entonces $M \otimes_A^{\mathbf{L}} \varphi$ es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathbf{RHom}_A^\bullet(M, \varphi)$ es un isomorfismo.*

Demostración. El enunciado (2) es consecuencia inmediata del (1) siendo N el vértice de un triángulo en $\mathbf{D}(A)$ de base φ :

$$N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \longrightarrow N \xrightarrow{+} .$$

Para probar (1), consideremos en $\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ una familia de cerrados $\{W_i\}_{i \in I}$ tal que $W = \cup_{i \in I} W_i$. Según lo expuesto en 9.3.6, por ser $\mathbf{H}^0(A)$ un anillo

noetheriano podemos tomar para cada cerrado $W_i \subset \text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ un complejo de Koszul K_i sobre A tal que $\text{supp}_A(K_i) = W_i$. Además, por la propiedad autodual de los complejos de Koszul, el complejo dual $K_i^\vee = \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(K_i, A)$ es también un complejo perfecto tal que $\text{supp}_A(K_i^\vee) = W_i$. Por el lema 8.3.13

$$\text{Loc}_A(M) = \text{Loc}_A(\{K_i\}_{i \in I}) = \text{Loc}_A(\{K_i^\vee\}_{i \in I}).$$

El resultado enunciado en (1) se sigue de la cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} M \otimes_A^{\mathbf{L}} N = 0 &\iff K_i \otimes_A^{\mathbf{L}} N = 0, \forall i \in I \\ &\iff K_i^\vee \otimes_A^{\mathbf{L}} N = 0, \forall i \in I \\ &\iff \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(K_i, N) = 0, \forall i \in I \\ &\iff \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(M, N) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 9.3.8. *Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo sobreyectivo de DG-álgebras en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ y $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ un homomorfismo en $\mathbf{D}(A)$. Entonces equivalen*

- (a) *el homomorfismo $f^\times \varphi$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}(B)$;*
- (b) *el homomorfismo $\mathbf{L}f^* \varphi$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}(B)$.*

Demostración. Obsérvese que $\text{supp}_A(f_*B)$ es un cerrado de $\text{Spec}(\mathbf{H}^0(A))$ dado por el ideal $\mathfrak{a} = \ker(\mathbf{H}^0(f))$. Sea $M = f_*B$ y, como en (1) de la proposición anterior, N denotará el vértice de un triángulo en $\mathbf{D}(A)$ con base φ ,

$$N_1 \xrightarrow{\varphi} N_2 \longrightarrow N \xrightarrow{+} .$$

Probar el resultado de enunciado equivale a demostrar que $f^\times N = 0$ si, y sólo si, $f^*N = 0$, para cualquier $N \in \mathbf{D}(A)$. Que esta equivalencia se verifica es consecuencia inmediata del apartado (1) de la proposición anterior. En efecto, se tiene el resultado por la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned} f^\times N = 0 &\iff f_*f^\times N = 0 \iff \mathbf{R}\text{Hom}_A^\bullet(f_*B, N) = 0 \\ &\iff f_*B \otimes_A N = 0 \\ &\iff f_*(B \otimes_B \mathbf{L}f^*N) = 0 \\ &\iff f_*(\mathbf{L}f^*N) = 0 \iff \mathbf{L}f^*N = 0, \end{aligned}$$

equivalencias dadas por el carácter conservativo de f_* , el isomorfismo de adjunción $f_* \dashv f^\times$, la propiedad 9.3.7 y la fórmula de proyección. \square

De los enunciados anteriores se deducen los siguientes resultados que utilizaremos recurrentemente a lo largo del resto del capítulo.

Lema 9.3.9. *Consideremos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ el diagrama de cuadrados cocartesianos de álgebras cuyos morfismos verticales u, v y w son planos*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v & \heartsuit & \downarrow w \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Si $g \circ f: A \rightarrow C$ es un morfismo cohomológicamente finito entonces, para todo $M \in \mathbf{D}^+(A)$, el homomorfismo

$$g'^{\times} \phi_{\diamond}(M): g'^{\times} v^* f^{\times}(M) \longrightarrow g'^{\times} f'^{\times} u^*(M)$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}(C')$.

Demostración. Si gf es cohomológicamente finito, g también ha de serlo. Entonces, por el teorema 9.2.7, los homomorfismos

$$\begin{aligned} \phi_{\diamond\heartsuit}(M): w^*(gf)^{\times}(M) &\longrightarrow (g'f')^{\times} u^*(M), \\ \phi_{\heartsuit}(N): w^*g^{\times}(N) &\longrightarrow g'^{\times} v^*(N) \end{aligned}$$

son isomorfismos en $\mathbf{D}^+(C')$, para cualesquiera $M \in \mathbf{D}^+(A)$ y $N \in \mathbf{D}^+(B)$. Como consecuencia del lema 9.2.3, utilizando los isomorfismos de pseudofunctorialidad de la asignación $(-)^{\times}$, podemos escribir $\phi_{\diamond\heartsuit}(M)$ como la composición:

$$\begin{aligned} w^*(gf)^{\times}(M) &\xrightarrow{\sim} w^*g^{\times} f^{\times}(M) \xrightarrow{\phi_{\heartsuit} f^{\times}} g'^{\times} v^* f^{\times}(M) \\ &\xrightarrow{g'^{\times} \phi_{\diamond}} g'^{\times} f'^{\times} u^*(M) \xrightarrow{\sim} (g'f')^{\times} u^*(M) \end{aligned}$$

y al ser $\phi_{\diamond\heartsuit}(M)$ y $\phi_{\heartsuit} f^{\times}(M)$ isomorfismos, se deduce que $g'^{\times} \phi_{\diamond}(M)$ es también un isomorfismo. \square

Proposición 9.3.10. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ morfismos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ tales que g es un sobreyectivo, f es plano y gf es cohomológicamente finito. Entonces los homomorfismos

- (1) $\mathbf{L}g^*\psi(f)(M): \mathbf{L}g^*f^\times(M) \rightarrow \mathbf{L}g^*f^!(M)$, y
- (2) $g^\times\psi(f)(M): g^\times f^\times(M) \rightarrow g^\times f^!(M)$

son isomorfismos para todo $M \in \mathbf{D}^+(A)$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, donde \heartsuit y \diamond son cuadrados cocartesianos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & & \\ f \downarrow & \heartsuit & \pi_2 \downarrow & \nearrow \delta & \diamond & & \downarrow p_2 \\ B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B & \xrightarrow{p_1} & B \otimes_A B \otimes_B C & \xrightarrow{\bar{\delta}} & C \end{array}$$

Análogamente al caso de π_1 y π_2 , los morfismos p_1 y p_2 denotan las proyecciones canónicas. Aquí el morfismo $\bar{\delta}: B \otimes_A B \otimes_B C \rightarrow B \otimes_B C \cong C$ corresponde al homomorfismo $\delta \otimes_B \text{id}_C$ siendo $\delta: B_A^e \rightarrow B$ el morfismo multiplicación. Es sencillo comprobar que $g\delta = \bar{\delta}p_1$. Por la pseudofuntorialidad ps^\times se deduce que $g^\times\delta^\times$ y $\bar{\delta}^\times p_1^\times$ son canónicamente isomorfos.

Por otro lado, puesto que g es cohomológicamente finito, $\phi_\diamond(N)$ es un isomorfismo para cualquier $N \in \mathbf{D}^+(B)$, y el lema anterior garantiza que $p_1^\times\phi_\heartsuit(M)$ también es un isomorfismo para cada $M \in \mathbf{D}^+(A)$. La composición

$$g^\times\delta^\times\pi_2^\times f^\times(M) \xrightarrow{\sim} \bar{\delta}^\times p_1^\times\pi_2^\times f^\times(M) \xrightarrow{\bar{\delta}^\times p_1^\times\phi_\heartsuit} \bar{\delta}^\times p_1^\times\pi_1^\times f^*(M) \xrightarrow{\sim} g^\times\delta^\times\pi_1^\times f^*(M),$$

es precisamente $g^\times\delta^\times\phi_\heartsuit(M)$, que es un isomorfismo, luego el corolario 9.3.8 garantiza que

$$\mathbf{L}g^*f^\times(M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}g^*\mathbf{L}\delta^*\pi_2^*f^\times(M) \xrightarrow{\mathbf{L}g^*\mathbf{L}\delta^*\phi_\heartsuit} \mathbf{L}g^*\mathbf{L}\delta^*\pi_1^*f^*(M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}g^*f^!(M)$$

es también un isomorfismo, lo que prueba (1). Además, puesto que g es sobreyectivo, aplicando de nuevo el corolario 9.3.8 a este último morfismo se deduce que (2) es un isomorfismo. \square

9.4. Imagen inversa excepcional y cambio de base

En (9.2.1.2) definíamos la transformación cambio de base asociada al pseudofunctor $(-)^{\times}$, transformación que utilizaremos ahora para establecer el cambio de base para la imagen inversa excepcional.

9.4.1. Consideremos un cuadrado cocartesiano de morfismos planos en $DGA_{cn}^{\leq 0}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Haciendo uso de las proyecciones y multiplicaciones canónicas, es posible expandir \diamond al siguiente diagrama de cuadrados cocartesianos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B & \xrightarrow{\delta} & B \\ u \downarrow & & \diamond & & \downarrow p & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D & \xrightarrow{\pi'_1} & D \otimes_C D & \xrightarrow{\delta'} & D \end{array} \quad (9.4.1.1)$$

La transformación natural cambio de base, asociada al diagrama \diamond , para la imagen inversa excepcional, que denotaremos

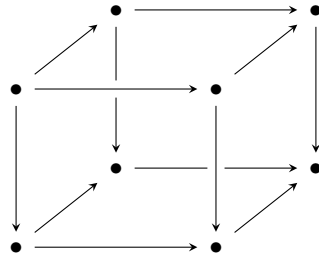
$$\theta_{\diamond} : v^* f^! \rightarrow g^! u^*,$$

es la definida mediante la composición

$$\begin{aligned} v^* f^! &= v^* \mathbf{L}\delta^* \pi_1^{\times} f^* \xrightarrow{\mathbf{ps}^* \pi_1^{\times} f^*} \mathbf{L}\delta'^* p^* \pi_1^{\times} f^* \\ &\xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^* \phi_{\heartsuit} f^*} \mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^{\times} v^* f^* \\ &\xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^{\times} \mathbf{ps}^*} \mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^{\times} g^* u^* = g^! u^*, \end{aligned}$$

dónde el primer y tercer morfismo son los isomorfismos dados por el isomorfismo de pseudofunctorialidad \mathbf{ps}^* .

Notación 9.4.2. Dado \diamond un diagrama del tipo



nos referiremos a los subdiagramas determinados por cada una de las caras utilizando la notación \diamond_u para la cara superior, \diamond_d para la cara inferior, \diamond_l para la de la izquierda, \diamond_r para la de la derecha, \diamond_f para la cara frontal y \diamond_b para la cara del fondo.

Teorema 9.4.3 (Imágenes inversas y cambio de base). *Consideremos en $DGA_{cn}^{\leq 0}$ un cuadrado cocartesiano con todos sus morfismos planos*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Entonces la transformación natural

$$\theta_\diamond : v^* f^! \rightarrow g^! u^*,$$

entre los funtores $v^* f^! : \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(D)$ y $g^! u^* : \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(D)$ es un isomorfismo. Además, la transformación θ_\diamond es compatible con la transformación cambio de base del pseudofunctor $(-)^{\times}$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} v^* f^{\times} & \xrightarrow{\phi_\diamond} & g^{\times} u^* \\ v^* \psi(f) \downarrow & & \downarrow \psi(g) u^* \\ v^* f^! & \xrightarrow{\theta_\diamond} & g^! u^* \end{array} \tag{9.4.3.1}$$

es conmutativo.

Demostración. Comenzaremos demostrando la conmutatividad del diagrama (9.4.3.1), para ello, con la notación establecida en (9.4.1.1), consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B & \xrightarrow{\delta} & B \\
 & \nearrow f & \downarrow f & & \nearrow \pi_2 & \downarrow p & \downarrow v \\
 A & \xrightarrow{\quad} & B & & & & \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\
 & \nearrow g & D & \xrightarrow{\pi'_1} & D \otimes_C D & \xrightarrow{\delta'} & D \\
 & \downarrow g & & \nearrow \pi'_2 & & & \\
 C & \xrightarrow{\quad} & D & & & &
 \end{array} \tag{9.4.3.2}$$

Utilizaremos este diagrama para reescribir la definición del morfismo cambio de base establecida en 9.4.1 en términos de la transformación natural cambio de base ϕ . Denotando por \diamond el cubo de la izquierda, la cara \diamond_f es precisamente el diagrama \diamond del enunciado, y la cara \diamond_b es el cuadrado \heartsuit en (9.4.1.1).

Con los morfismos del diagrama (9.4.3.2) en mente, se construye el siguiente diagrama de funtores y transformaciones naturales a partir de las transformaciones involucradas en el diagrama (9.4.3.1):

$$\begin{array}{ccccccc}
 v^* f^\times & \xrightarrow{v^* ps^* f^\times} & v^* \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* f^\times & \xrightarrow{v^* \mathbf{L}\delta^* \phi_{\diamond_u}} & v^* \mathbf{L}\delta^* \pi_1^\times f^* & \xlongequal{\quad} & v^* f^! \\
 & & \downarrow ps^* \pi_2^* f^\times & & \downarrow ps^* \pi_1^\times f^* & & \\
 & & \mathbf{L}\delta'^* p^* \pi_2^* f^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^* p^* \phi_{\diamond_u}} & \mathbf{L}\delta'^* p^* \pi_1^\times f^* & & \\
 & & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* ps^* f^\times & & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* \phi_{\diamond_b} f^* & & \\
 & & \mathbf{L}\delta'^* \pi_2'^* v^* f^\times & & \mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^\times v^* f^* & & \\
 & & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* \pi_2'^* \phi_{\diamond_f} & & \downarrow ps^* \mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^\times & & \\
 g^\times u^* & \xrightarrow{ps^* g^\times u^*} & \mathbf{L}\delta'^* \pi_2'^* g^\times u^* & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^* \phi_{\diamond_d} u^*} & \mathbf{L}\delta'^* \pi_1'^\times g^* u^* & \xlongequal{\quad} & g^! u^* \\
 \phi_{\diamond_f} \swarrow & & & & & & \searrow \theta_{\diamond_1}
 \end{array} \tag{9.4.3.3}$$

La comprobación de que (9.4.3.1) es un diagrama conmutativo es consecuencia de que lo son cada uno de los subdiagramas en (9.4.3.3). Son trivialmente conmutativos los diagramas correspondientes a los rectángulos laterales. El rectángulo de la izquierda es conmutativo por el isomorfismo de pseudofuntorialidad \mathbf{ps}^* y el de la derecha por la definición de la transformación θ_{\diamond_1} a partir de la transformación ϕ_{\diamond_b} (véase 9.4.1, siendo $\diamond_1 = \diamond$ y $\diamond_b = \heartsuit$). Por la naturalidad de la pseudofuntorialidad \mathbf{ps}^* también es conmutativo el cuadrado central superior. Por último la conmutatividad del cuadrado inferior central es consecuencia de la compatibilidad de la transformación cambio de base ϕ con la concatenación de los cuadrados cocartesianos (lema 9.2.3), sin más que tener en cuenta que concatenado verticalmente los diagramas de álgebras diferenciales graduadas \diamond_f y \diamond_d se obtiene el mismo diagrama que concatenando \diamond_u y \diamond_b .

Para demostrar que, para cualquier módulo diferencial graduado $M \in \mathbf{D}^+(A)$, el homomorfismo $\theta_{\diamond}(M): v^* f^!(M) \rightarrow g^! u^*(M)$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}^+(D)$, centrémonos en la parte de atrás del diagrama (9.4.3.2), es decir, en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{\pi_1} & B \otimes_A B & \xrightarrow{\delta} & B \\
 \downarrow v & & \downarrow p & & \downarrow v \\
 D & \xrightarrow{\pi'_1} & D \otimes_C D & \xrightarrow{\delta'} & D
 \end{array}$$

Puesto que la composición $\delta\pi_1$ es la identidad, en particular es un morfismo cohomológicamente finito, y podemos aplicar el lema 9.3.9 para deducir que $\delta'^{\times} \phi_{\diamond_b}(N)$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}^+(D)$ para cualquier $N \in \mathbf{D}^+(B)$. Además como δ' es sobreyectivo, por el corolario 9.3.8, $\delta'^{*} \phi_{\diamond_b}(N)$ también es un isomorfismo en $\mathbf{D}^+(D)$. Haciendo uso de que el morfismo f es plano, dado $M \in \mathbf{D}^+(A)$ se tiene que $N = f^* M \in \mathbf{D}^+(B)$. De la conmutatividad del subdiagrama lateral derecho del diagrama (9.4.3.3) concluimos que el homomorfismo natural $\theta_{\diamond}(M)$ es un isomorfismo para cualquier $M \in \mathbf{D}^+(A)$. \square

9.5. El pseudofunctor imagen inversa excepcional

9.5.1. Dados $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ morfismos componibles en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, consideremos el diagrama de cuadrados cocartesianos

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 gf \downarrow & \diamond & \downarrow p_2 & \heartsuit & \downarrow q_2 \\
 C & \xrightarrow{p_1} & C \otimes_A B & \xrightarrow{q} & C \otimes_A C \xrightarrow{\delta} C \\
 & \searrow q_1 & & &
 \end{array} \tag{9.5.1.1}$$

descomposición del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g \circ f} & C \\
 g \circ f \downarrow & & \downarrow q_2 \\
 C & \xrightarrow{q_1} & C \otimes_A C \xrightarrow{\delta} C
 \end{array}$$

donde q_1 , q_2 , p_1 y p_2 son la proyecciones indicadas por los subíndices.

Supongamos que f y g , y por tanto gf son planos. Entonces entre los funtores $(gf)^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(C)$ y $g^!f^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(C)$ se define la transformación natural

$$\rho(f, g): (gf)^! \rightarrow g^!f^!,$$

resultado de la siguiente composición

$$\begin{aligned}
 (gf)^! &:= \mathbf{L}\delta^* q_1^\times (gf)^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \text{ps}^\times (gf)^*} \mathbf{L}\delta^* q^\times p_1^\times (gf)^* \\
 &\xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* q^\times \psi(p_1)(gf)^*} \mathbf{L}\delta^* q^\times p_1^! (gf)^* \tag{9.5.1.2}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \psi(q)p_1^! (gf)^*} \mathbf{L}\delta^* q^! p_1^! (gf)^* \tag{9.5.1.3}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* q^! \theta_\diamond^{-1}} \mathbf{L}\delta^* q^! p_2^* f^!$$

$$\xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \theta_\heartsuit^{-1} f^!} \mathbf{L}\delta^* q_2^* g^! f^! \xrightarrow{\text{ps}^* g^! f^!} g^! f^!$$

Proposición 9.5.2. *La transformación natural $\rho(f, g)$, definida entre los funtores $(gf)^! : \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(C)$ y $g^! f^! : \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(C)$, es un isomorfismo.*

Demostración. Como vemos en la definición extendida de ρ , sólo hace falta probar que las transformaciones (9.5.1.2) y (9.5.1.3) determinan isomorfismos para cualquier $N \in \mathbf{D}^+(A)$.

Para la primera transformación, nótese que $\delta q p_1 = \text{id}_C$ en particular δq es un morfismo sobreyectivo; por la proposición 9.3.10 (2), para el DG-módulo $M := (gf)^* N \in \mathbf{D}^+(C)$ el homomorfismo $(\delta q)^\times p_1^\times M \xrightarrow{\text{vía } \psi(p_1)} (\delta q)^\times p_1^! M$ es un isomorfismo, es decir $\delta^\times q^\times p_1^\times M \xrightarrow{\text{vía } \psi(p_1)} \delta^\times q^\times p_1^! M$ es un isomorfismo. Por otro lado δ también es un morfismo sobreyectivo, y consecuentemente el corolario 9.3.8 garantiza que $\mathbf{L}\delta^* q^\times p_1^\times M \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* q^\times \psi(p_1)(M)} \mathbf{L}\delta^* q^\times p_1^! M$ es también un isomorfismo.

Para la segunda transformación apliquemos el apartado (1) de la proposición 9.3.10 a la transformación $\mathbf{L}\delta^* q^\times \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \psi(q)} \mathbf{L}\delta^* q^!$ para concluir que

$$\mathbf{L}\delta^* q^\times L \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \psi(q)} \mathbf{L}\delta^* q^! L$$

es un isomorfismo en $\mathbf{D}^+(C)$, siendo $L := p_1^!(gf)^* N \in \mathbf{D}^+(C \otimes_A B)$. \square

En el siguiente resultado comprobaremos que la transformación $\rho(-, -)$ es compatible con la pseudofuntorialidad de $(-)^{\times}$.

Proposición 9.5.3. *Para cualquier par de morfismos planos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (gf)^\times & \xrightarrow{\text{ps}^\times(f,g)} & g^\times f^\times \\ \psi(gf) \downarrow & & \downarrow \psi(g)\psi(f) \\ (gf)^! & \xrightarrow{\rho(f,g)} & g^! f^! \end{array} \quad (9.5.3.1)$$

es conmutativo.

Demostración. Con la notación del diagrama (9.5.1.1), consideremos la siguiente expansión del diagrama (9.5.3.1):

$$\begin{array}{ccccc}
 (gf)^\times & \xrightarrow{\text{ps}^\times} & g^\times f^\times & \xrightarrow{\psi(g)\psi(f)} & g^! f^! \\
 \downarrow \text{ps}^*(gf)^\times & (1) & \downarrow \text{ps}^*g^\times f^\times & (2) & \downarrow \text{ps}^*g^\times f^\times \\
 \mathbf{L}\delta^*q_2^*(gf)^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*q_2^*\text{ps}^\times} & \mathbf{L}\delta^*q_2^*g^\times f^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*q_2^*\psi(g)f^\times} & \mathbf{L}\delta^*q_2^*g^! f^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*q_2^*g^!\psi(f)} & \mathbf{L}\delta^*q_2^*g^! f^! \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta^*\phi(\heartsuit) & (3) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\phi_\heartsuit f^\times & (4) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\theta(\heartsuit)f^\times & (5) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\theta(\heartsuit)f^! \\
 \mathbf{L}\delta^*q_1^\times(gf)^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\phi(\heartsuit)} & \mathbf{L}\delta^*q^\times p_2^*f^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\psi(q)p_2^*f^\times} & \mathbf{L}\delta^*q^! p_2^*f^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*q^! p_2^*\psi(f)} & \mathbf{L}\delta^*q^! p_2^*f^! \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta^*q^\times \phi_\diamond & (6) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*q^\times \phi_\diamond & (6) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*q^! \phi_\diamond & (7) & \downarrow \mathbf{L}\delta^*q^! \theta_\diamond \\
 \mathbf{L}\delta^*q_1^\times(gf)^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\text{ps}^\times(gf)^\times} & \mathbf{L}\delta^*q^\times p_1^\times(gf)^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\psi(q)p_1^\times(gf)^\times} & \mathbf{L}\delta^*q^! p_1^\times(gf)^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*q^!\psi(p_1)(gf)^\times} & \mathbf{L}\delta^*q^! p_1^!(gf)^\times \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 (gf)^\times & & & & & & (gf)^\times
 \end{array}$$

Nótese que la conmutatividad del borde exterior de este diagrama implica la conmutatividad de (9.5.3.1), ya que la composición de los morfismos de la columna de la izquierda es por definición $\psi(gf)$ y la composición de los morfismos de la fila inferior con los inversos de los morfismos de la columna derecha es $\rho(f, g)$. Por tanto demostrar la conmutatividad de los subdiagramas (1)–(7) es suficiente para comprobar la conmutatividad del diagrama del enunciado.

La conmutatividad de los cuadrados (1) y (2) se deriva de la pseudofunctorialidad ps^* . El lema 9.2.3 garantiza que el cambio de base ϕ es compatible con la concatenación horizontal de cuadrados, y como consecuencia (3) es conmutativo.

Los cuadrados (4) y (7) son conmutativos gracias a la compatibilidad de los cambios de base θ y ϕ como establece el teorema 9.4.3.

Por último, se deduce que el diagrama (5) es conmutativo como consecuencia de la naturalidad de θ_\heartsuit y $\psi(f)$, y análogamente la conmutatividad de (6) se deduce de la naturalidad de las transformaciones ϕ_\heartsuit y $\psi(g)$. \square

Las siguientes dos proposiciones establecen para $(-)^!$ las propiedades análogas a las establecidas en el lema 9.2.3 para el cambio de base del pseudofunctor $(-)^*$, es decir que el cambio de base $\theta_{(-)}$ es compatible con la concatenación vertical y horizontal de cuadrados.

Proposición 9.5.4. *Consideremos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ el diagrama conmutativo de morfismos planos*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ u \downarrow & \diamond & \downarrow u' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \\ v \downarrow & \heartsuit & \downarrow v' \\ C & \xrightarrow{h} & C' \end{array} \quad (9.5.4.1)$$

tales que los cuadrados \diamond y \heartsuit son cocartesianos. Entonces es conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (v'u')^* f^! & \xrightarrow{\theta_{(\diamond)}} & h^!(vu)^* \\ \text{ps}^* \downarrow & & \downarrow \text{ps}^* \\ v'^* u'^* f^! & \xrightarrow{v'^* \theta_{\diamond}} v'^* g^! u^* \xrightarrow{\theta_{\heartsuit} u^*} & h^! v^* u^* \end{array} \quad (9.5.4.2)$$

Demostración. Despleguemos el diagrama (9.5.4.1) para obtener el siguiente diagrama, en el que el borde exterior sigue siendo el cuadrado (\diamond) ,

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & A' & \xrightarrow{\pi_1} & A' \otimes_A A' & \xrightarrow{\delta_1} & A' \\ u \downarrow & & \downarrow u' & \diamond' & \downarrow u'' & & \downarrow u' \\ B & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{\pi_2} & B' \otimes_B B' & \xrightarrow{\delta_2} & B' \\ v \downarrow & & \downarrow v' & \heartsuit' & \downarrow v'' & & \downarrow v' \\ C & \xrightarrow{h} & C' & \xrightarrow{\pi_3} & C' \otimes_C C' & \xrightarrow{\delta_3} & C' \end{array}$$

Con la notación de este diagrama en mente, es posible expandir el diagrama (9.5.4.2) como se indica a continuación:

$$\begin{array}{ccc}
 (v'u')^* f^! & \xrightarrow{\theta_{(\otimes)}} & h^1(vu)^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 (v'u')^* \mathbf{L}\delta_1^* \pi_1^\times f^* & \xrightarrow{\mathbf{ps}^* \pi_1^\times f^*} \mathbf{L}\delta_3^* (v''u'')^* \pi_1^\times f^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta_3^* \phi_{(\otimes)} f^*} \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times (v'u')^* f^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times \mathbf{ps}^*} \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times h^*(vu)^* & \\
 \downarrow \mathbf{ps}^* \pi_1^\times f^* & & \downarrow \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times \mathbf{ps}^* \\
 v'^* u'^* \mathbf{L}\delta_1^* \pi_1^\times f^* & \xrightarrow{\mathbf{ps}^* \pi_2^\times g^* u^*} \mathbf{L}\delta_3^* v''^* \pi_2^\times g^* u^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta_3^* \phi_{\heartsuit} g^* u^*} \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times v'^* g^* u^* & \\
 \downarrow v'^* \mathbf{ps}^* \pi_1^\times f^* & \uparrow v'^* \mathbf{L}\delta_2^* \pi_2^\times \mathbf{ps}^* & \downarrow \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times \mathbf{ps}^* u^* \\
 v'^* \mathbf{L}\delta_2^* u''^* \pi_1^\times f^* & \xrightarrow{v'^* \mathbf{L}\delta_2^* \phi_{\heartsuit} f^*} v'^* \mathbf{L}\delta_2^* \pi_2^\times u'^* f^* \xrightarrow{v'^* \mathbf{L}\delta_2^* \pi_2^\times \mathbf{ps}^*} v'^* \mathbf{L}\delta_2^* \pi_2^\times g^* u^* & \\
 \downarrow \mathbf{ps}^* \pi_1^\times f^* & & \downarrow \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times \mathbf{ps}^* u^* \\
 v'^* u'^* \mathbf{L}\delta_1^* \pi_1^\times f^* & & \mathbf{L}\delta_3^* \pi_3^\times h^* v^* u^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 v'^* u'^* f^! & \xrightarrow{v'^* \theta_{\diamond}} v'^* g^! u^* \xrightarrow{\theta_{\heartsuit} u^*} h^1 v^* u^* & \\
 & & \parallel \\
 & & h^1(vu)^*
 \end{array}$$

El diagrama (1) corresponde a la definición de la transformación $\theta_{(\otimes)}$. El diagrama (2) es conmutativo por el lema 9.2.3. Por las propiedades del isomorfismo de pseudofunctorialidad \mathbf{ps}^* conmuta (3). Los diagramas (4) y (5) son conmutativos por la definición de las transformaciones θ_{\diamond} y θ_{\heartsuit} respectivamente. \square

Proposición 9.5.5. Si en el diagrama conmutativo en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 u \downarrow & & \diamond & & \downarrow v \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \\
 & & & & \downarrow w
 \end{array} \tag{9.5.5.1}$$

los cuadrados \diamond y \heartsuit son cocartesianos con morfismos planos entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 w^*(gf)^! & \xrightarrow{\theta_{(\diamond\heartsuit)}} & (g'f')^! u^* \\
 w^* \rho(f,g) \downarrow & & \downarrow \rho(f',g') u^* \\
 w^* g^! f^! & \xrightarrow{\theta_{\heartsuit} f^!} g^! v^* f^! \xrightarrow{g^! \theta_{\diamond}} g^! f'^! u^* & \\
 & & \parallel \\
 & & (g'f')^! u^*
 \end{array} \tag{9.5.5.2}$$

Demostración. Del mismo modo que en la demostración de la proposición anterior, extendemos el diagrama de morfismos (9.5.5.1) añadiendo los cuadrados cocartesianos formados con las composiciones gf y $g'f'$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xleftarrow{\delta} & C \\
 \downarrow u & \searrow gf & \downarrow v & \searrow p_2 & \downarrow w & \searrow q_2 & \downarrow w \\
 C & \xrightarrow{p_1} & C \otimes_A B & \xrightarrow{q} & C \otimes_A C & & C \otimes_A C \\
 \downarrow w & \downarrow w & \downarrow v' & \downarrow v' & \downarrow w' & \downarrow w' & \downarrow w' \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xleftarrow{\delta'} & C' \\
 \downarrow g'f' & \downarrow w & \downarrow p'_2 & \downarrow v' & \downarrow w' & \downarrow w' & \downarrow w' \\
 C' & \xrightarrow{p'_1} & C' \otimes_{A'} B' & \xrightarrow{q'} & C' \otimes_{A'} C' & & C' \otimes_{A'} C'
 \end{array} \tag{9.5.5.3}$$

Dejando a parte los morfismos δ y δ' , el diagrama resulta de concatenar dos cubos, nos referiremos al cubo situado a la izquierda con el símbolo \diamond y al situado a la derecha con el símbolo \heartsuit . Utilizaremos para las caras de cada uno de estos cubos la notación introducida en 9.4.2. Nótese que la cara anterior del diagrama, la concatenación $(\diamond_b \heartsuit_b)$, es precisamente el diagrama de morfismos de álgebras diferenciales graduadas del enunciado.

Como en la demostración de la proposición anterior procedemos descomponiendo las transformaciones del diagrama (9.5.5.2) basándonos en la conmutatividad del diagrama (9.5.5.3). Construimos así el diagrama de la página 157, cuyo borde exterior coincide con (9.5.5.1), de modo que de la conmutatividad de cada uno de sus subdiagramas se deduce el resultado enunciado.

El diagrama (1) corresponde a la definición de la transformación θ para el cuadrado $(\diamond_b \heartsuit_b)$, (8) es trivialmente conmutativo y (2) conmuta por el lema 9.2.3. Los diagramas señalados con la etiqueta (3) conmutan por la proposición 9.4.3. La naturalidad de las transformaciones θ_{\heartsuit_f} y θ_{\diamond_u} garantiza que (4) es conmutativo, y la de θ_{\diamond_b} y θ_{\heartsuit_u} garantiza que lo es (7). La concatenación vertical de cuadrados (\diamond_u^a) y (\heartsuit_b^a) comparten el mismo diagrama exterior, y como consecuencia de la proposición 9.5.4 se deduce que el diagrama (5) es conmutativo. La conmutatividad de (6) se justifica de forma análoga utilizando los diagramas (\heartsuit_u^a) y (\heartsuit_b^a) .

$$\begin{array}{ccc}
 w^*(gf)^! & \xrightarrow{\theta_{(\diamond_b \heartsuit_b)}} & (g'f')^!u^* \\
 \parallel & & \parallel \\
 w^*\mathbf{L}\delta^*(qp_1)^\times(gf)^* & \xrightarrow{(1)} & \mathbf{L}\delta'^*(q'p'_1)^\times(g'f')^*u^* \\
 \downarrow \text{ps}^*(qp_1)^\times(gf)^* & & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*(q'p'_1)^\times \text{ps}^* \\
 \mathbf{L}\delta'^*w'^*(qp_1)^\times(gf)^* & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*\phi_{(\diamond_\varepsilon \heartsuit_\varepsilon)}(gf)^*} & \mathbf{L}\delta'^*(q'p'_1)^\times w^*(gf)^* \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta'^*w'^*\text{ps}^\times(gf)^* & \xrightarrow{(2)} & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*\text{ps}^\times w^*(gf)^* \\
 \mathbf{L}\delta'^*w'^*q^\times p_1^\times(gf)^* & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*\phi_{\heartsuit_\varepsilon p_1^\times}(gf)^*} \mathbf{L}\delta'^*q'^\times v'^* p_1^\times(gf)^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*q'^\times \phi_{\diamond_\varepsilon}(gf)^*} & \mathbf{L}\delta'^*q'^\times p_1^\times w^*(gf)^* \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta'^*w'^*\psi(q)\psi(p_1)(gf)^* & \xrightarrow{(3)} & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*\psi(q)v'^*\psi(p_1)(gf)^* \\
 \mathbf{L}\delta'^*w'^*q^! p_1^!(gf)^* & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*\theta_{\heartsuit_\varepsilon p_1^!}(gf)^*} \mathbf{L}\delta'^*q^! v'^* p_1^!(gf)^* \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*q^! \theta_{\diamond_\varepsilon}(gf)^*} & \mathbf{L}\delta'^*q^! p_1^! w^*(gf)^* \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta'^*w'^*q^! \theta_{\diamond_a}^{-1} & \xrightarrow{(4)} & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*q^! v'^* \theta_{\diamond_a}^{-1} \\
 \mathbf{L}\delta'^*w'^*q^! p_2^* f^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*\theta_{\heartsuit_\varepsilon p_2^*} f^!} \mathbf{L}\delta'^*q^! v'^* p_2^* f^! & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*q^! p_1^! \text{ps}^* \\
 \downarrow \mathbf{L}\delta'^*w'^* \theta_{\diamond_a}^{-1} f^! & \downarrow \mathbf{L}\delta'^*\text{ps}^* f^! & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* \theta_{\diamond_a}^{-1} u^* \\
 \mathbf{L}\delta'^*w'^*q_2^* g^! f^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*q^! p_2^* v^* f^!} \mathbf{L}\delta'^*q^! p_2^* v^* f^! \xrightarrow{\mathbf{L}\delta'^*q^! p_2^* \theta_{\diamond_b}} & \mathbf{L}\delta'^*q^! p_2^* f^! u^* \\
 \downarrow \text{ps}^* g^! f^! & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* \theta_{\diamond_a}^{-1} v^* f^! & \downarrow \mathbf{L}\delta'^* \theta_{\diamond_a}^{-1} f^! u^* \\
 w^*g^! f^! & \xrightarrow{\theta_{\heartsuit_b} f^!} g^! v^* f^! \xrightarrow{g^! \theta_{\diamond_b}} & g^! f^! u^* \\
 & \xrightarrow{(8)} & \downarrow \text{ps}^* g^! f^! u^*
 \end{array}$$

□

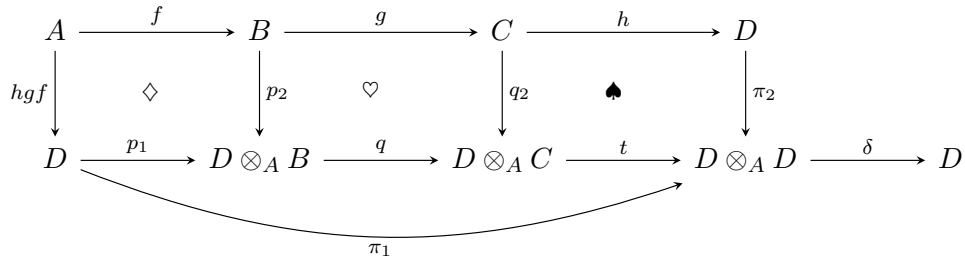
Por último, probaremos la asociatividad de la transformación $\rho(-, -)$.

Proposición 9.5.6 (Asociatividad). *Para cualesquiera morfismos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ planos y compositivos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 (hgf)^! & \xrightarrow{\rho(gf,h)} & h^!(gf)^! \\
 \rho(f,hg) \downarrow & & \downarrow h^!\rho(f,g) \\
 (hg)^!f^! & \xrightarrow{\rho(g,h)f^!} & h^!g^!f^!
 \end{array} \tag{9.5.6.1}$$

es conmutativo.

Demostración. Consideremos el diagrama de morfismos de álgebra diferenciales graduadas



Con la notación establecida en este diagrama es posible desarrollar el diagrama del enunciado como se indica en el diagrama de la página 159. La conmutatividad de (9.5.6.1) se deduce de la conmutatividad de cada uno de subdiagramas del diagrama de la página 159.

Los subdiagramas (3) y (4) de este diagrama conmutan porque el cambio de base θ concatena horizontalmente (propiedad demostrada en la proposición 9.5.5). Los diagramas (1) y (5) son conmutativos por la naturalidad de las transformaciones involucradas. Resta probar que el subdiagrama (1) también es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
(hgf)^! = \mathbf{L}\delta^* \pi_1^\times (hgf)^* & & & & \\
\downarrow \mathbf{L}\delta^* \psi(\pi_1)(hgf)^* & & & & \\
\mathbf{L}\delta^* \pi_1^! (hgf)^* & \xrightarrow{\text{vía } \rho(qp_1, t)} & \mathbf{L}\delta^* t^! (qp_1)^! (hgf)^* & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* t^! \theta(\diamondsuit \heartsuit)^{-1}} & \mathbf{L}\delta^* t^! q_2^* (gf)^! \\
\downarrow \text{vía } \rho(p_1, tq) & (1) & \downarrow \text{vía } \rho(p_1, q) & & \downarrow \mathbf{L}\delta^* \theta(\spadesuit)^{-1} (gf)^! \\
\mathbf{L}\delta^* (tq)^! p_1^! (hgf)^* & \xrightarrow{\text{vía } \rho(q, t)} & \mathbf{L}\delta^* t^! q^! p_1^! (hgf)^* & & \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* h^! (gf)^! \\
\downarrow \mathbf{L}\delta^* (tq)^! \theta_{\diamondsuit}^{-1} & (2) & \downarrow \mathbf{L}\delta^* t^! q^! \theta_{\diamondsuit}^{-1} & (3) & \downarrow \\
\mathbf{L}\delta^* (tq)^! p_2^* f^! & \xrightarrow{\text{vía } \rho(q, t)} & \mathbf{L}\delta^* t^! q^! p_2^* f^! & & \downarrow \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* \rho(f, g) \\
\downarrow \mathbf{L}\delta^* \theta(\heartsuit \spadesuit)^{-1} f^! & & \downarrow \mathbf{L}\delta^* t^! \theta(\heartsuit)^{-1} f^! & & \downarrow \\
\mathbf{L}\delta^* \pi_2^* (hg)^! f^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \pi_2^* \rho(g, h) f^!} & \mathbf{L}\delta^* t^! q_2^* g^! f^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^* \theta(\spadesuit)^{-1} g^! f^!} & \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* h^! g^! f^! \\
\downarrow \text{vía } \text{ps}^* & (5) & \downarrow \text{vía } \text{ps}^* & & \downarrow \\
(hg)^! f^! & \xrightarrow{\rho(g, h) f^!} & & & h^! g^! f^!
\end{array}$$

Obsérvese que el subdiagrama (1) de este diagrama resulta precisamente de evaluar en $M = (hgf)^* N$ la cara inferior del diagrama en forma de cubo de la página 160. La cara superior del cubo (9.5.6.2) conmuta como consecuencia de la pseudofunctorialidad ps^\times , mientras que los diagramas correspondientes a las caras verticales son conmutativos como consecuencia de la proposición 9.5.3.

La composición hgf es un morfismo plano, por tanto dado $N \in \mathbf{D}^+(A)$ se tiene que $M = (hgf)^*N \in \mathbf{D}^+(D)$. Además los morfismos $\pi_1: D \rightarrow D \otimes_A D$ y $\delta: B \rightarrow C$ verifican las hipótesis de la proposición 9.3.10, y en consecuencia $\mathbf{L}\delta^*\psi(\pi_1)M$ es un isomorfismo. Entonces de la conmutatividad de las caras verticales y de la parte superior del cubo (9.5.6.2) se deduce la conmutatividad de la cara inferior, y por ende la conmutatividad del subdiagrama (1).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{L}\delta^*\pi_1^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\text{ps}^\times} & & \mathbf{L}\delta^*t^\times(qp_1)^\times & \\
\downarrow \mathbf{L}\delta^*\psi(\pi_1) & \searrow \mathbf{L}\delta^*\text{ps}^\times & & \downarrow & \searrow \mathbf{L}\delta^*t^\times\text{ps}^\times \\
& & \mathbf{L}\delta^*(tq)^\times p_1^\times & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\text{ps}^\times p_1^\times} & \mathbf{L}\delta^*t^\times q^\times p_1^\times \\
& & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\psi(t)\psi(qp_1) & & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\psi(t)\psi(q)\psi(p_1) \\
& & \mathbf{L}\delta^*\pi_1^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\text{ps}^!} & \mathbf{L}\delta^*t^!(qp_1)^! \\
& & \downarrow \mathbf{L}\delta^*\psi(tq)\psi(p_1) & & \downarrow \mathbf{L}\delta^*t^!\text{ps}^! \\
& & \mathbf{L}\delta^*(tq)^! p_1^! & \xrightarrow{\mathbf{L}\delta^*\text{ps}^! p_1^!} & \mathbf{L}\delta^*t^! q^! p_1^!
\end{array}
\tag{9.5.6.2}$$

□

Sea $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}|_{\text{fl}}$ la categoría cuyos objetos son los de $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ y cuyos morfismos son los morfismos planos de álgebras diferenciales graduadas:

Teorema 9.5.7. *La asignación*

$$(-)^!: \text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}|_{\text{fl}} \longrightarrow \text{Cat},$$

que hace corresponder a cada DG-álgebra A la categoría $\mathbf{D}^+(A)$ y a cada morfismo $f: A \rightarrow B$ el funtor $f^!: \mathbf{D}^+(A) \rightarrow \mathbf{D}^+(B)$, es un pseudofunctor.

Demostración. Las proposiciones 9.5.4, 9.5.5 y 9.5.6 muestran que la transformación $(-)^!$ junto con la transformación $\rho(-, -)$, introducida en la definición 9.5.1, es un pseudofunctor. □

9.6. Imagen inversa excepcional mediante complejos dualizantes

Hemos comprobado que la asignación $(-)^!$ para morfismos en $\text{DGA}_{\text{cn}}^{\leq 0}$ es un pseudofunctor. Dedicaremos esta última sección a verificar que nuestra propuesta para de la definición del funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos de DG-álgebras coincide con la propuesta en [S1] bajo la hipótesis adicional de existencia de complejos dualizantes.

Notación 9.6.1. Para evitar confusiones, escribiremos $f^{[!]}$ para referirnos a la definición del funtor imagen inversa excepcional propuesta en [S1] y reservaremos la notación $f^!$ para nuestra construcción (véase (9.3.0.1)).

Recordemos que un homomorfismo de anillos conmutativos $f: A \rightarrow B$ es de *tipo finito* si B es finitamente generado como A -álgebra, es decir, si B es una A -álgebra isomorfa a un cociente de un anillo de polinomios $A[x_1, \dots, x_n]$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Un homomorfismo de anillos conmutativos $f: A \rightarrow B$ se dice *esencialmente de tipo finito* si admite una factorización $f = f_2 \circ f_1$,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \xrightarrow{f_1} & C & \xrightarrow{f_2} & B,
 \end{array}$$

con f_1 un morfismo de tipo finito y f_2 el morfismo natural correspondiente a la localización de C en un subconjunto multiplicativo.

Definición 9.6.2. Sea \mathbb{K} un anillo conmutativo y A una DG-álgebra conmutativa sobre \mathbb{K} . Diremos que A es *cohomológicamente esencialmente de tipo finito* sobre \mathbb{K} si A es cohomológicamente noetheriana y la composición $\mathbb{K} \rightarrow A \rightarrow H^0(A)$ es un morfismo de anillos esencialmente de tipo finito.

Notación 9.6.3. Denotaremos por $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ la subcategoría plena de $\text{DGA}_{\text{cn}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ cuyos objetos son las DG-álgebras conmutativas, cohomológicamente esencialmente de tipo finito sobre \mathbb{K} , que además son planas sobre \mathbb{K} .

Las hipótesis en [S1] son más generales, allí el autor considera DG-álgebras conmutativas, cohomológicamente esencialmente de tipo finito sobre \mathbb{K} , que son de «dimensión plana finita» sobre \mathbb{K} . Su motivación inicial era establecer

el cambio de base para la imagen inversa excepcional a cuadrados cartesianos de esquemas afines no necesariamente tor-independientes.

9.6.4. Sea A un álgebra diferencial graduada y $N \in \mathbf{D}(A)$ un DG-módulo. Si $N \in \mathbf{D}^+(A)$ denotaremos $\text{ínf}_{\mathbf{H}}(N) := \inf\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{H}^i(N) \neq 0\}$, en otro caso, si $N \notin \mathbf{D}^+(A)$, escribiremos $\text{ínf}_{\mathbf{H}}(N) = -\infty$. Si $N \in \mathbf{D}^-(A)$ se denotará $\text{sup}_{\mathbf{H}}(N) := \sup\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{H}^i(N) \neq 0\}$, si $N \notin \mathbf{D}^-(A)$ se escribirá $\text{sup}_{\mathbf{H}}(N) = \infty$. Se dice que N tiene *amplitud cohomológica finita* si $\text{ínf}_{\mathbf{H}}(N) = r$ y $\text{sup}_{\mathbf{H}}(N) = s$ son enteros. Suele utilizarse la notación $\mathbf{D}^{\leq n}(A)$ (resp. $\mathbf{D}^{\geq n}(A)$) para la subcategoría plena de $\mathbf{D}(A)$ de los objetos tales que $\text{sup}_{\mathbf{H}}(N) \leq n$ (resp. tales que $\text{ínf}_{\mathbf{H}}(N) \geq n$)

Diremos que un Δ -functor covariante $F: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(B)$ es acotado superiormente (resp. acotado inferiormente) si existe un entero d tal que $F(\mathbf{D}^{\leq n}(A)) \subset \mathbf{D}^{\leq n+d}(B)$ (resp. un entero r tal que $F(\mathbf{D}^{\geq n}(A)) \subset \mathbf{D}^{\geq n-r}(B)$); el Δ -functor F es un functor acotado si lo es superior e inferiormente. Para un Δ -functor contravariante $G: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(B)$, se adopta la misma terminología aplicada al functor covariante que determina $G: \mathbf{D}(A)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}(B)$.

En particular un módulo diferencial graduado $M \in \mathbf{D}(A)$ dice que tiene *dimensión plana finita* si $M \otimes_A^{\mathbf{L}} -: \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ es un Δ -functor acotado, y se dice de *dimensión inyectiva finita* si $\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(-, M): \mathbf{D}(A) \rightarrow \mathbf{D}(A)$ es un Δ -functor acotado.

9.6.5 DG-módulos dualizantes. Sea A una DG-álgebra cohomológicamente noetheriana. Un módulo diferencial graduado $R \in \mathbf{D}_f^b(A)$ es un DG-*módulo dualizante* sobre A si posee *dimensión inyectiva finita*, y el morfismo canónico $A \rightarrow \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(R, R)$ es un isomorfismo.

Si R es un DG-módulo dualizante sobre A entonces para cada módulo $M \in \mathbf{D}_f(A)$, el homomorfismo canónico $M \rightarrow \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, R), R)$ es un isomorfismo, de modo que R determina una anti-equivalencia de categorías [Y2, Proposition 7.2]

$$\mathcal{D}_R := \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(-, R): \mathbf{D}_f^*(A) \longrightarrow \mathbf{D}_f^{-*}(A)$$

donde \star representa cualquier condición de acotación $+$, $-$, o sin acotación y $-\star$ es la condición de acotación opuesta.

Consideraremos como en [S1] un contexto relativo. Fijemos un álgebra base \mathbb{K} que será un anillo conmutativo Gorenstein de dimensión de Krull finita. En particular, bajo estas hipótesis, el propio anillo \mathbb{K} es un \mathbb{K} -módulo dualizante. Nos centraremos en la subcategoría plena de la categoría $\text{DGA}_{\text{cn}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ cuyos objetos son las DG-álgebras esencialmente de tipo finito y planas sobre \mathbb{K} , la subcategoría $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Si $A \in \text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ entonces A viene acompañada de su morfismo estructural que denotaremos $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$.

Sea A una DG-álgebra en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Si R es un DG-módulo dualizante sobre A entonces R posee dimensión plana finita sobre \mathbb{K} [S1, Proposition 2.9].

Un DG-módulo *dualizante rígido sobre A relativo a \mathbb{K}* es un par (R, φ) formado por R un DG-módulo dualizante sobre A junto con un isomorfismo en $\mathbf{D}(A)$

$$\varphi: R \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\text{Hom}_{A_{\mathbb{K}}^e}(A, R \boxtimes_{\mathbb{K}} R),$$

donde $M \boxtimes_{\mathbb{K}} N := \pi_1^* M \otimes_{A_{\mathbb{K}}^e} \pi_2^* N$, para cualesquiera DG-módulos $M, N \in \mathbf{D}(A)$, siendo $\pi_i: A \rightarrow A_{\mathbb{K}}^e$ los morfismos de proyección. Esta definición de módulo dualizante rígido introducida en [S1, Definition 1.1], generaliza la noción en el caso de anillos establecida en [YZ, Definition 4.1], y es clave para la definición de la imagen inversa excepcional en [S1].

Para cualquier DG-álgebra $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$ existe un complejo dualizante rígido relativo a \mathbb{K} , que denotaremos R_{σ} (véase [S1, Corollary 3.10]).

Comprobaremos primero, en la proposición 9.6.8, que dada $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ una DG-álgebra en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$, al aplicar el funtor $\sigma^!$ al complejo dualizante canónico del anillo base \mathbb{K} resulta un complejo dualizante en la categoría de llegada. Esta comprobación hace uso del siguiente teorema demostrado por Shaul, que generaliza el resultado previo para anillos conmutativos establecido en [AILN, Theorem 4.1 (1)]. El teorema reza lo siguiente:

Teorema 9.6.6. [S1, Theorem 5.5] *Sea \mathbb{K} un anillo Gorenstein de dimensión de Krull finita y $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ una DG-álgebra en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Si $N \in \mathbf{D}_f^-(A)$ y $M \in \mathbf{D}_f^p(A)$ son tales que M tiene dimensión plana finita sobre \mathbb{K} entonces se*

tiene un isomorfismo canónico

$$\mathbf{RHom}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\bullet}(A, M \boxtimes_{\mathbb{K}} N) \cong \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, R_{\sigma}), N). \quad (9.6.6.1)$$

9.6.7. Si en el isomorfismo (9.6.6.1) sustituimos M por su dual $\mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, R_{\sigma})$, mediante el isomorfismo canónico $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{R_{\sigma}}(\mathcal{D}_{R_{\sigma}}(M))$ se obtiene la generalización de la fórmula (4.1.2) de [AILN]:

$$\mathbf{RHom}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\bullet}(A, \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, R_{\sigma}) \boxtimes_{\mathbb{K}} N) \cong \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(M, N) \quad (9.6.7.1)$$

Proposición 9.6.8. Sea \mathbb{K} un anillo Gorenstein de dimensión de Krull finita y $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ el morfismo estructural de $A \in \mathbf{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Entonces el DG-módulo $\sigma^!(\mathbb{K})$ es isomorfo al DG-módulo dualizante rígido R_{σ} .

Demostración. Aplicando el funtor $\sigma^!$ a \mathbb{K} , se tiene

$$\begin{aligned} \sigma^!(\mathbb{K}) &= \mathbf{L}\delta^* \pi_1^{\times} \mathbf{L}\sigma^*(\mathbb{K}) = A \otimes_{A_{\mathbb{K}}}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(A_{\mathbb{K}}^{\mathbf{e}}, A \otimes_{\mathbb{K}}^{\mathbf{L}} \mathbb{K}) \\ &\cong A \otimes_{A_{\mathbb{K}}}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_{\mathbb{K}}(A, A) \end{aligned}$$

Si sustituimos ahora $M = A = N$ en la expresión 9.6.7.1 se obtiene el isomorfismo $\mathbf{RHom}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}(A, R_{\sigma} \boxtimes_{\mathbb{K}} A) \cong A$, que podemos introducir en el último término de la identificación anterior para obtener el resultado buscado. En efecto, $\sigma^!(\mathbb{K}) \cong R_{\sigma}$ mediante la composición

$$\begin{aligned} \sigma^!(\mathbb{K}) &\cong A \otimes_{A_{\mathbb{K}}}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_{\mathbb{K}}^{\bullet}(A, A) \\ &\cong A \otimes_{A_{\mathbb{K}}}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_{\mathbb{K}}^{\bullet}(A, \mathbf{RHom}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\bullet}(A, R_{\sigma} \boxtimes_{\mathbb{K}} A)) \\ &\stackrel{(1)}{\cong} A \otimes_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\bullet}(A \otimes_{\mathbb{K}} A, R_{\sigma} \boxtimes_{\mathbb{K}} A) \\ &\cong A \otimes_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\mathbf{L}} (R_{\sigma} \boxtimes_{\mathbb{K}} A) \\ &= \mathbf{L}\delta^*(\pi_1^* R_{\sigma} \otimes_{A_{\mathbb{K}}}^{\mathbf{L}} \pi_2^* A) \\ &\stackrel{(2)}{\cong} \mathbf{L}\delta^* \pi_1^* R_{\sigma} \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathbf{L}\delta^* \pi_2^* A \stackrel{(3)}{\cong} R_{\sigma} \otimes_A^{\mathbf{L}} A = R_{\sigma} \end{aligned}$$

donde (1) es el isomorfismo dado por la adjunción $\otimes^{\mathbf{L}} \dashv \mathbf{RHom}$, (2) el dado por en carácter monoidal del funtor $\mathbf{L}\delta^*$, y (3) por el isomorfismo de pseudo-functorialidad ps^* . \square

Observación 9.6.9. Este resultado se puede considerar como la traducción a DG-álgebras de los establecidos en [AILN, Corollary 3.7] y en [ILN, §4.1.1']. Ambos proporcionan, en anillos conmutativos y esquemas noetherianos respectivamente, una expresión para el complejo dualizante rígido; expresión que en nuestro contexto corresponde a la identificación

$$R_\sigma = A \otimes_{A \otimes_{\mathbb{K}} A}^{\mathbf{L}} \mathbf{RHom}_{\mathbb{K}}^{\bullet}(A, A).$$

9.6.10. Recordemos la definición del functor imagen inversa excepcional propuesta en [S1]. El contexto en el que se trabaja es la categoría $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}$, con \mathbb{K} un anillo noetheriano, Gorenstein y de dimensión de Krull finita. Como hemos visto en la proposición anterior, estas hipótesis garantizan la existencia de complejos dualizantes relativos más manejables, los DG-módulos $\sigma^!(\mathbb{K})$ para cada DG-álgebra $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}^{\leq 0}$. Si pérdida de generalidad, identificaremos los complejos $\sigma^!(\mathbb{K})$ y R_σ .

Dado un morfismo $f: A \rightarrow B$ en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}$, entre las \mathbb{K} -álgebras $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ y $\tau: \mathbb{K} \rightarrow B$, se define el functor $f^{[!]}$ mediante la expresión

$$\begin{aligned} f^{[!]}: \mathbf{D}_f^+(A) &\longrightarrow \mathbf{D}_f^+(B), \\ M &\longmapsto \mathcal{D}_{R_\tau}(B \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathcal{D}_{R_\sigma}(M)) = \mathcal{D}_{R_\tau} f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{D}_{R_\tau}(-) := \mathbf{RHom}_B^{\bullet}(-, R_\tau)$ y $\mathcal{D}_{R_\sigma}(-) := \mathbf{RHom}_A^{\bullet}(-, R_\sigma)$.

Para comprobar que el functor imagen inversa excepcional $f^!$ coincide con $f^{[!]}$ dada en [S1] demostramos el siguiente resultado (análogo al formulado en el contexto de esquemas en [L, Proposition 4.10.1]).

Teorema 9.6.11. *Sea $f: A \rightarrow B$ un morfismo plano de DG-álgebras en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}$ con morfismos estructurales $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow A$ y $\tau: \mathbb{K} \rightarrow B$. Entonces la restricción de $f^!$ a $\mathbf{D}_f^+(A)$ determina isomorfismos naturales*

$$f^! \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) \simeq \mathcal{D}_{R_\tau} f^*(M),$$

para $M \in \mathbf{D}_f^-(A)$.

Demostración. Desarrollemos el lado izquierdo de la fórmula. Por definición, si $M \in \mathbf{D}_f^-(A)$ entonces $\mathcal{D}_{R_\sigma}(M) \in \mathbf{D}^+(A)$. Por definición se tiene

$$f^! \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) = \mathbf{L}\delta^* \pi^\times f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M),$$

donde $\delta: A \otimes_{\mathbb{K}} A \rightarrow A$ corresponde al morfismo multiplicación y $\pi: A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} A$ a la primera proyección.

Aislemos primero el término $\pi^\times f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M)$. Explícitamente,

$$\pi^\times f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B_A^e, B \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A^\bullet(M, \sigma^!(\mathbb{K})));$$

como M pertenece a $\mathbf{D}_f^-(A)$, $\sigma^!(\mathbb{K})$ pertenece a $\mathbf{D}^+(A)$, y f es un homomorfismo plano podemos aplicar el lema 9.2.6 y concluir que este objeto es naturalmente isomorfo a $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B_A^e, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(M \otimes_A B, \sigma^!(\mathbb{K}) \otimes_A B))$, luego aplicando la adjunción $\otimes^{\mathbf{L}} \dashv \mathbf{R}\mathrm{Hom}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi^\times f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B_A^e, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B \otimes_A M, B \otimes_A \sigma^!(\mathbb{K}))) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B_A^e \otimes_B (B \otimes_A M), B \otimes_A \sigma^!(\mathbb{K})) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B \otimes_A M, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(B_A^e, B \otimes_A \sigma^!(\mathbb{K}))) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), \pi^\times f^* \sigma^!(\mathbb{K})) \end{aligned}$$

Por último, puesto que $M \in \mathbf{D}_f^-(A)$ y $f: A \rightarrow B$ es un morfismo plano entre DG-álgebras no positivas, $f^*(M) = M \otimes_A B \in \mathbf{D}_f^-(B)$ y podemos aplicar entonces [Y1, Theorem 12.10.14] y la pseudofuntorialidad de $(-)^!$ para demostrar la existencia del isomorfismo anunciado:

$$\begin{aligned} f^! \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) &= \mathbf{L}\delta^* \pi^\times f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) \cong \mathbf{L}\delta^* \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), \pi^\times f^* \sigma^!(\mathbb{K})) \\ &= B \otimes_{B_A^e}^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), \pi^\times f^* \sigma^!(\mathbb{K})) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), B \otimes_{B_A^e}^{\mathbf{L}} \pi^\times f^* \sigma^!(\mathbb{K})) \\ &= \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), \mathbf{L}\delta^* \pi^\times f^* \sigma^!(\mathbb{K})). \\ &= \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), f^! \sigma^!(\mathbb{K})) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), (f\sigma)^!(\mathbb{K})) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_B^\bullet(f^*(M), \tau^!(\mathbb{K})) = \mathcal{D}_{R_\tau} f^*(M). \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 9.6.12. *Dado un morfismo plano de DG-álgebras $f: A \rightarrow B$ en $\text{DGA}_{\text{eff}|\mathbb{K}}$, se tiene un isomorfismo entre los funtores.*

$$f^!: \mathbf{D}_f^+(A) \longrightarrow \mathbf{D}_f^+(B) \quad \text{y} \quad f^{[!]}: \mathbf{D}_f^+(A) \longrightarrow \mathbf{D}_f^+(B)$$

Demostración. Por el teorema anterior para cada $M \in \mathbf{D}_f^-(A)$ existe un isomorfismo natural

$$f^! \mathcal{D}_{R_\sigma}(M) \simeq \mathcal{D}_{R_\tau} f^*(M).$$

Entonces para cualquier módulo diferencial graduado $N \in \mathbf{D}_f^+(A)$, basta considerar $M = \mathcal{D}_{R_\sigma}(N) \in \mathbf{D}_f^-(A)$ y aplicar este isomorfismo para obtener el isomorfismo

$$f^{[!]}(N) := \mathcal{D}_{R_\tau} f^* \mathcal{D}_{R_\sigma}(N) \simeq f^!(\mathcal{D}_{R_\sigma}(\mathcal{D}_{R_\sigma}(N))) \simeq f^!(N),$$

como queríamos demostrar. \square

Conclusiones

En esta tesis, hemos estudiado problemas relativos a la estructura de las categorías derivadas en dos contextos:

- I. La categoría derivada de complejos de haces de módulos con cohomología cuasicoherente sobre un esquema concentrado.
- II. La categoría derivada de módulos diferenciales graduados sobre un álgebra diferencial graduada conmutativa verificando ciertas hipótesis de finitud.

En el primer caso hemos introducido la condición de esquema concentrado *generado por puntos*. Es una condición muy general que verifican en particular todos los esquemas noetherianos. Esta hipótesis nos ha permitido extender la clasificación en el contexto noetheriano de los \otimes -ideales localizantes mediante subconjuntos del conjunto de puntos del esquema de partida. Nuestra demostración es más directa y conceptual que la ya conocida en el caso noetheriano.

Hemos introducido la condición de \mathcal{H} -coideal para subcategorías colocalizantes de la categoría derivada. Demostramos que estas subcategorías también se clasifican por subconjuntos de puntos del esquema. Las subcategorías colocalizantes \mathcal{H} -coideales están en correspondencia con las subcategorías localizantes \otimes -ideales mediante la relación de ortogonalidad. Como sobre un anillo noetheriano todas las categorías colocalizantes son \mathcal{H} -coideales, nuestro resultado extiende un resultado conocido de A. Neeman proporcionando un argumento más directo que el original.

En el contexto diferencial graduado, asociamos a un álgebra diferencial graduada conmutativa un esquema afín, el espectro de su anillo de cohomología 0-ésima. Hemos clasificado las subcategorías localizantes y colocalizantes de la

categoría derivada de módulos diferenciales graduados sobre un álgebra diferencial graduada de este tipo haciendo uso de la clasificación sobre el esquema afín asociado. Si el álgebra diferencial graduada conmutativa es de amplitud finita y el esquema afín asociado es un esquema generado por puntos entonces las subcategorías localizantes de la categoría derivada del álgebra diferencial graduada están determinadas por los subconjuntos de puntos del esquema afín asociado. Demostramos que las subcategorías colocalizantes son las determinadas por las subcategorías localizantes mediante la relación de ortogonalidad.

Como consecuencia de la clasificación de las categorías localizantes en el contexto de las álgebras diferenciales graduadas, hemos propuesto y estudiado las propiedades de la construcción del funtor imagen inversa excepcional para morfismos esencialmente de tipo finito de álgebras diferenciales graduadas siguiendo las ideas de la tesis de M. H. Khusiari. Demostramos que el funtor imagen inversa excepcional construido verifica la propiedad de cambio de base y define un pseudofunctor sobre la categoría cuyos objetos son las álgebras diferenciales graduadas conmutativas cohomológicamente noetherianas y con morfismos planos esencialmente de tipo finito. Probamos que nuestra construcción define un pseudofunctor que verifica el cambio de base y que coincide con un funtor imagen inversa excepcional definido por L. Shaul en el caso en que las álgebras diferenciales graduadas involucradas poseen un complejo dualizante.

Los resultados de clasificación en el contexto de esquemas están recogidos en el preprint [AJLo1]. La clasificación de subcategorías localizantes y colocalizantes en el contexto de álgebras diferenciales graduadas forma parte del trabajo [AJLo2].

Bibliografía

- [AJL1] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Lipman, J.: Local homology and cohomology on schemes. *Annales scientifiques de l'E.N.S.* **30** (1997), no.1, 1–39.
- [AJLo1] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Loureiro Novo, E.: Localizing and colocalizing subcategories on schemes (2025), disponible en <https://arxiv.org/abs/2405.10383>.
- [AJLo2] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Loureiro Novo, E.: Colocalizing subcategories on differentially graded algebras. Aparecerá en el volumen de la conferencia satélite del ECM *Functor and Tensor Categories, Models and Systems*.
- [AJS1] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Souto Salorio, M. J.: Localization in Categories of Complexes and Unbounded Resolutions. *Canadian Journal of Mathematics* **52** (2000), no. 2, 225–247.
- [AJS2] Alonso Tarrío, L.; Jeremías López, A.; Souto Salorio, M. J.: Bousfield localization on formal schemes. *J. Algebra* **278** (2004), no. 2, 585–610.
- [AILN] Avramov, L.L.; Iyengar, S.B.; Lipman, J.; Neeman, A.; Nayak, S.: Reduction of derived Hochschild functors over commutative algebras and schemes. *Advances in Mathematics* **223** (2010), 735–772.
- [B] Balmer, P.; The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories. *J. Reine Angew. Math.* **588** (2005), 149–168.
- [BSW] Beck, K.A.; Sather-Wagstaff S.: Krull dimension for differential graded algebras. *Archiv der Mathematik* **101** (2013), no.2, 111–119.

- [BBD] Beilinson, A. A.; Bernstein, J.; Deligne, P.: Faisceaux pervers, en *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, 5–171, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [BO] Bondal, A; Orlov, D: Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compositio Math.* **125** (2001), no. 3, 327–344.
- [BoV] Bondal, A.; Van den Bergh, M.: Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry, *Mosc. Math. J.* **3** (2003), no. 1, 1–36.
- [BrG] Borel A.; Grivel P.; Kaup B.; Haeiger A.; Malgrange B.; Ehlers F.; *Algebraic D-Modules*. Perspectives in Mathematics, **2**, Academic Press, 1987.
- [Bou] Bousfield, A.K.: The localization of spectra with respect to homology. *Topology* **18** (1979), no. 4, 257–281.
- [GD] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Grundlehren Math. Wissenschaften **166**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [H] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, New York, 1977.
- [ILN] Iyengar, S.B.; Lipman, J.; Neeman, A.: Relation between two twisted inverse image pseudofunctors in duality theory. *Compositio Mathematica* **151** (2015), no. 4, 735–764.
- [KS] Kashiwara, M.; Schapira, P: *Categories and Sheaves*. Springer, Berlin, 2006.
- [K1] Keller B.: Deriving DG-categories. *Annales scientifiques de l'E.N.S.* **27** (1994), no.1, 63–102.
- [K2] Keller B.: A remark on the generalized smashing conjecture. *Manuscripta Math.* **84** (1994), no. 2, 193–198.
- [Kh] Khusyairi, M. H.: *Grothendieck Duality For Flat Morphisms*, Ph. D. thesis, Australian National University, 2017. <https://>

[//openresearch-repository.anu.edu.au/server/api/core/bitstreams/a4e5ec86-c79d-42c4-ad39-2ec364783c6b/content](https://openresearch-repository.anu.edu.au/server/api/core/bitstreams/a4e5ec86-c79d-42c4-ad39-2ec364783c6b/content)

- [L] Lipman, J.: Notes on derived categories and Grothendieck Duality, en *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, 1–259, Lecture Notes in Math. **1960**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2009.
- [M] Mac Lane, S.: *Categories for the working mathematician*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [N1] Neeman, A.: The chromatic tower for $D(R)$. *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.
- [N2] Neeman, A.: The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel. *Annales scientifiques de l'E.N.S.* **25** (1992), no. 5, 547–566.
- [N3] Neeman, A.: The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability. *Journal of the American Mathematical Society* **9** (1996), no. 1, 205–236.
- [N4] Neeman, A.: Oddball Bousfield classes, *Topology*, **39** (2000), no. 5, 931–935.
- [N5] Neeman, A.: Colocalizing subcategories of $\mathbf{D}(R)$. *J. Reine Angew. Math.* **653** (2011), 221–243.
- [N6] Neeman, A.: *Triangulated Categories*, Annals of Mathematics Studies **148**, Princeton University Press, 2014.
- [S1] Shaul, L.: The twisted inverse image pseudofunctor over commutative DG rings and perfect base change. *Advances in Mathematics* **320** (2017), 279–328.
- [S2] Shaul, L.: Categorical properties of reduction functors over non-positive DG-rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024), no. 2, 489–500.

- [S3] Shaul, L.: Sequence-regular commutative DG-rings. *J. Algebra* **647** (2024), 400–435.
- [ShW] Shaul, L.; Williamson, J.: Lifting (co)stratifications between tensor triangulated categories. *Israel Journal of Mathematics* **261** (2023), 1–32.
- [St] Stevenson, G.: Derived categories of absolutely flat rings. *Homology Homotopy Appl.* **16** (2014), no. 2, 45–64.
- [TT] Thomason, R. W.; Trobaugh, T.: Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, en *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, 247–435, Progr. Math. **88**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [V] Verdier, J. L.: *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes*. Astérisque **239**. Société Mathématique de France, Marseilles, 1967.
- [W] Weibel, Ch.: *An introduction to homological algebra*. Cambridge Stud. Adv. Math. **38**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Y1] Yekutieli, A.: *Derived categories*. Cambridge Stud. Adv. Math. **183**, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [Y2] Yekutieli, A.: Duality and Tilting for Commutative DG Rings. Pre-publicación: [arXiv:1312.6411](https://arxiv.org/abs/1312.6411).
- [YZ] Yekutieli, A.; Zhang, J.J.: Rigid dualizing complexes over commutative rings. *Algebra Represent Theory* **12** (2009) 19–52.



El funtor imagen inversa excepcional es un elemento clave de la dualidad de Grothendieck. Para morfismos planos entre esquemas noetherianos, puede ser expresado como composición de adjuntos del funtor derivado de la imagen directa de morfismos canónicamente determinados por el morfismo de partida. Esta expresión hace uso de la clasificación de las subcategorías localizantes de categorías derivadas de esquemas noetherianos. Abordamos en este trabajo, bajo hipótesis muy generales, la clasificación de las subcategorías (co)localizantes en categorías derivadas que surgen de modo natural en geometría algebraica y álgebra conmutativa derivada. Como aplicación, en el contexto del álgebra conmutativa derivada construimos el funtor imagen inversa excepcional para morfismos planos de DG-álgebras y estudiamos sus propiedades.