



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Sistemas dinámicos discretos
unidimensionais: estabilidade,
bifurcacións e aplicacións en bioloxía

Borja Cabadas Dosantos

Setembro, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Sistemas dinámicos discretos
unidimensionais: estabilidade,
bifurcacións e aplicacións en bioloxía

Borja Cabadas Dosantos

Setembro, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Agradecementos

Quero agradecer a todos os profesores que tiven, tanto na universidade como fóra dela, por ter contribuído, aínda que uns máis que outros, ao desenvolvemento da miña curiosidade. Tamén quero agradecer ás miñas titoras deste Traballo Fin de Grao, Cristina Lois Prados e Rosana Rodríguez López, por guiarme nesta experiencia facendo un traballo que nunca será o suficientemente valorado. Por último, quero dar as grazas á miña familia e ás persoas máis próximas durante esta etapa educativa, polo apoio que me deron, e que me fixeron ser o que son hoxe.

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática

Título: Sistemas dinámicos discretos unidimensionais: estabilidade, bifurcacións e aplicacións en bioloxía

Breve descrición do contido

As ecuacións diferenciais ordinarias serven para modelar o comportamento dunha especie cando esta evoluciona no tempo de maneira continua. Sen embargo, cando o crecemento da poboación é un proceso estacional, resulta máis axeitado traballar con sistemas dinámicos discretos unidimensionais.

O obxectivo principal deste traballo é introducir ao alumno no estudo cualitativo dos sistemas dinámicos discretos unidimensionais e a súa aplicación. Un esquema aproximado dos contidos podería ser o seguinte.

O primeiro paso sería establecer un marco teórico para levar a cabo o estudo da estabilidade local [7, Capítulo 1], estabilidade global [2, 5, 15] e as bifurcacións [16, Sección 3.2].

En segundo lugar, aplicaríase a teoría desenvolvida a modelos de poboación clásicos, coma o de Beverton-Holt ou o de Ricker. Os resultados teóricos acompañaríanse con gráficas e simulacións numéricas realizadas co programa MATLAB.

Para rematar, faríase unha interpretación dos resultados obtidos en termos biolóxicos.

Índice

Agradecementos	III
Resumo	IX
Introdución	XI
1. Resultados preliminares	1
2. Conceptos e resultados sobre sistemas dinámicos discretos	5
2.1. Conceptos básicos e estabilidade local sobre puntos fixos	6
2.2. Estabilidade global	9
2.3. Bifurcacións	22
3. Aplicacións a modelos biolóxicos	31
3.1. Descrición dalgúns modelos clásicos	31
3.1.1. Modelo de Beverton-Holt	32
3.1.2. Modelo de Ricker	33
3.2. Existencia de puntos fixos	34
3.2.1. Modelo de Beverton-Holt	35
3.2.2. Modelo de Ricker	35
3.3. Análise da estabilidade dos puntos de equilibrio	35
3.3.1. Modelo de Beverton-Holt	35

3.3.2. Modelo de Ricker	36
3.4. Diagramas de bifurcación	39
3.4.1. Modelo de Beverton-Holt	40
3.4.2. Modelo de Ricker	41
3.5. Interpretación biológica	43
3.5.1. Modelo de Beverton-Holt	43
3.5.2. Modelo de Ricker	44
A. Código de MATLAB	47
A.1. Representación dos modelos	47
A.2. Diagrama Cobweb	49
A.3. Representación de bifurcaciones	52
A.3.1. Modelo de Beverton-Holt	57
A.3.2. Modelo de Ricker	58
A.3.3. Cálculos para a bifurcación de doblamiento de período	60
Bibliografía	61

Resumo

As ecuacións diferenciais ordinarias serven para modelar o comportamento dunha especie cando esta evoluciona no tempo de maneira continua. Sen embargo, cando o crecemento da poboación é un proceso estacional, resulta máis axeitado traballar con sistemas dinámicos discretos unidimensionais.

O obxectivo principal deste traballo é introducir ao alumno no estudo cualitativo dos sistemas dinámicos discretos unidimensionais e a súa aplicación. Un esquema aproximado dos contidos é o incluído a continuación.

O primeiro paso é establecer un marco teórico para levar a cabo o estudo da estabilidade local seguindo o esquema proporcionado en [7, Capítulo 1], a estabilidade global [2, 5, 15] e as bifurcacións [16, Sección 3.2].

En segundo lugar, aplícase a teoría desenvolvida a modelos de poboación clásicos, coma o de Beverton-Holt ou o de Ricker. Os resultados teóricos acompañanse con gráficas e simulacións numéricas realizadas co programa MATLAB.

Para rematar, realízase unha interpretación dos resultados obtidos en termos biolóxicos.

Abstract

Ordinary differential equations are useful to model the behavior of a species as it evolves continuously over time. However, when the population growth is a seasonal process, it is more appropriate to work with one-dimensional discrete dynamical systems.

The main objective of this work is to introduce the student into the qualitative study of one-dimensional discrete dynamical systems and their applications. An approximate outline of the contents is the one specified below.

The first step is to establish a theoretical framework for conducting the study of local stability following the lines in [7, Chapter 1], global stability [2, 5, 15], and bifurcations [16, Section 3.2].

Second, the theory developed is applied to classical population models, such as the Beverton-Holt or Ricker models. The theoretical results are presented with graphs and numerical simulations performed with MATLAB.

Finally, an interpretation of the results obtained in biological terms is made.

Introdución

Os sistemas dinámicos unidimensionais de tempo discreto utilízanse, en diversos campos, para describir unha gran cantidade de procesos. Neste traballo considéranse sistemas sinxelos de dinámica de poboacións, que consideran o estado do “crecemento” do número de individuos nunha especie con xeracións non superpostas. Estes procesos son modelados considerando unha familia apropiada de aplicacións (funcións que definen o sistema dinámico) que dependen de parámetros, cuxos valores se poden axustar aos datos dunha determinada mostra. Esta información pódese consultar en [8]. A continuación facemos un breve percorrido polos diferentes capítulos do traballo.

No Capítulo 1, daremos uns resultados preliminares, que serven para entender e demostrar resultados de capítulos posteriores. Entre eles, destacamos resultados sobre sucesións, continuidade, derivadas, monotonía e extremos de funcións.

No Capítulo 2, comezamos coa definición dalgúns conceptos básicos sobre sistemas dinámicos: punto fixo, punto periódico, órbita, órbita periódica. Falamos tamén dos diagramas Cobweb, que non son máis que ilustracións das órbitas. A continuación, abordamos un dos intereses principais destes sistemas, que permiten entender o comportamento a longo prazo, ou dinámica asintótica, proceso iterativo asociado a un sistema dinámico. Un primeiro paso no estudo da dinámica asintótica destes modelos consiste no estudo da estabilidade do equilibrio. A estabilidade asintótica local (L.A.S.) será a máis fácil de analizar, pero o máis desexable é obter a estabilidade asintótica global (G.A.S.), xa que permite coñecer o destino de todas as solucións con independencia da condición inicial. Porén, para pasar da L.A.S. á G.A.S., necesitaremos que as aplicacións que definen o sistema dinámico cumpran certas condicións que veremos máis adiante. Tras establecer as definicións correspondentes sobre estabilidade/inestabilidade e atracción local/global de puntos fixos, comezamos proporcionando un par de resultados que caracterizan a atracción local e a inestabilidade para puntos fixos hiperbólicos. Con isto, chega o momento de traballar coa estabilidade global. É ben coñecido que unha condición necesaria e suficiente para a estabilidade global é a ausencia de órbitas de período 2, pero resulta difícil de comprobar e, por iso, proporcionaremos outros resultados máis útiles na práctica, entre eles, o método da envolvente ou un

resultado para aplicacións con derivada de Schwarz negativa. Para rematar o capítulo, describimos diferentes tipos de bifurcacións, que se producen cando hai un cambio na estabilidade local dun punto fixo.

No último capítulo, o Capítulo 3, vemos dúas aplicacións de sistemas dinámicos a modelos biolóxicos. Comezamos explicando como se deduce a formulación dos modelos clásicos de Beverton-Holt e Ricker, que estudamos por separado mediante os resultados no Capítulo 2. O capítulo remata cunha interpretación dos resultados obtidos en termos biolóxicos.

No Anexo A, imos mostrar o código do programa MATLAB [11] utilizado para obter as representacións gráficas e tamén para realizar algún cálculo custoso.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Nesta sección, introducimos os conceptos e resultados básicos que necesitaremos para poder manexar os enunciados e demostracións de capítulos posteriores. Estes contidos pódense consultar en [1], [3], [7], [12] e [14].

Comezamos co concepto de veciñanza, que utilizaremos para describir conceptos de estabilidade.

Definición 1.1. Dise que $U \subset \mathbb{R}$ é unha **veciñanza** de $x \in \mathbb{R}$ se U é un conxunto aberto que contén a x .

Outras nocións consideran que U é unha veciñanza de x se U contén a un conxunto A aberto que contén a x . Nós faremos uso da primeira definición dada de veciñanza.

O seguinte resultado caracterizar a continuidade dunha función nun punto en termos de sucesións, usarémolo para demostrar varios resultados de atracción local e global.

Proposición 1.2. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. A función f é continua en $c \in I$ se e só se para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en I que converge a c , a sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(c)$.*

Continuamos co Teorema do valor intermedio, que afirma que, se unha función é continua nun intervalo, entón esta toma todos os valores intermedios entre os puntos extremos da imaxe.

Teorema 1.3 (Teorema do valor intermedio). *Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con f continua e tal que $f(a) = u$ e $f(b) = v$, entón para calquera $z \in [\min\{u, v\}, \max\{u, v\}]$, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = z.$$

Agora preséntase o concepto de función de clase r , que nos serve para os resultados nos que necesitamos a existencia de derivadas continuas.

Definición 1.4. Sexa I intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función. Diremos que f é de **clase** r en I (denotado por $f \in \mathcal{C}^r(I)$) se existe $f^{(r)}(x)$ e é continua para todo $x \in I$.

O seguinte resultado, a regra da cadea, úsase para demostrar a fórmula da derivada Schwarziana dunha composición de funcións.

Teorema 1.5 (Regra da cadea). *Sexan I, J intervalos en \mathbb{R} e sexan $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ funcións tales que $f(J) \subseteq I$. Se f é derivable en J e g é derivable en $f(J)$, entón a función composta $g \circ f$ é derivable en J e*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Corolario 1.6. *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $f : I \rightarrow I$. Se f é derivable en $a \in I$, entón, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ \overset{n+1}{\dots} \circ f$ é derivable en a con*

$$(f^{n+1})'(a) = f'(f^n(a)) \cdots f'(f^2(a)) \cdot f'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ademais, se $f \in \mathcal{C}^r(I)$, entón $f^n \in \mathcal{C}^r(I)$.

Demostración. Probamos o resultado facendo uso do método de indución. Comezamos co caso $n = 1$,

$$(f^2)'(a) = f'(f(a)) \cdot f'(a) \text{ (regra da cadea para } f = g).$$

Supoñamos que, para $n \geq 2$,

$$(f^n)'(a) = f'(f^{n-1}(a)) \cdots f'(f^2(a)) \cdot f'(f(a)) \cdot f'(a)$$

e, a partir da fórmula para n e da regra da cadea, demostramos para $n + 1$,

$$\begin{aligned} (f^{n+1})'(a) &= (f^n \circ f)'(a) = ((f^n)' \circ f)(a) \cdot f'(a) \\ &= f'(f^{n-1}(f(a))) \cdots f'(f^2(f(a))) \cdot f'(f(f(a))) \cdot f'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= f'(f^n(a)) \cdots f'(f^2(a)) \cdot f'(f(a)) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

Isto proba que a propiedade é certa para todo $n \in \mathbb{N}$. □

O seguinte resultado dinos que, para unha función continua nun intervalo pechado e derivable no correspondente intervalo aberto, existe un punto do intervalo aberto no que a recta tanxente é paralela a recta que pasa polos puntos da gráfica correspondentes aos extremos do intervalo pechado, o que quere dicir que as rectas teñen a mesma pendente. Este teorema úsase para demostrar resultados de estabilidade local, estabilidade global e inestabilidade.

Teorema 1.7 (Teorema do valor medio). *Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Outro concepto que necesitamos definir é o de punto crítico, que se corresponde cun punto da curva no que a pendente é paralela ao eixe das abscisas. Con él veremos os conceptos de monotonía e extremos relativos, que serán relevantes para o estudo das funcións.

Definición 1.8. Sexan I intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Un **punto crítico** x é aquel que verifica $f'(x) = 0$.

Definición 1.9. Sexan I un intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función. De xeito análogo, dise que f é **(estritamente) crecente** en I se, sempre que $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 (<) \leq x_2$, entón $f(x_1) (<) \leq f(x_2)$. Dise que f é **(estritamente) decrecente** en I se, sempre que $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 (<) \leq x_2$, entón $f(x_1) (>) \geq f(x_2)$. Se unha función é (estritamente) crecente ou (estritamente) decrecente en I , dicimos que é **(estritamente) monótona** en I .

Definición 1.10. Sexan I un intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función. Dicimos que f ten un **máximo (mínimo) relativo** en $c \in I$ se existe unha veciñanza V de c tal que $f(x) \leq (\geq) f(c)$ para todo $x \in V \cap I$. Dicimos que hai un **extremo relativo** en $c \in I$ se f ten un máximo relativo ou un mínimo relativo en c .

O seguinte resultado será de utilidade para estudar a monotonía e os extremos a través da primeira e segunda derivada.

Proposición 1.11. *Sexan I un intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha función.*

Se f é derivable en I ,

- *f é (estritamente) crecente en I se, e só se, $f'(x) (>) \geq 0$ para todo $x \in I$.*
- *f é (estritamente) decrecente en I se, e só se, $f'(x) (<) \leq 0$ para todo $x \in I$.*

Se $c \in \overset{\circ}{I}$, f é derivable en c e f ten un extremo relativo en c , entón $f'(c) = 0$.

Se f é continua en $I = [a, b]$, $c \in \overset{\circ}{I}$, e f é derivable en $(a, c) \cup (c, b)$,

- *f ten un máximo (mínimo) relativo en c , se existe unha veciñanza $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ tal que $f'(x) \geq (\leq) 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$, e $f'(x) \leq (\geq) 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$.*

Alternativamente, se existe e é continua f' nunha veciñanza de $c \in \overset{\circ}{I}$ tal que $f'(c) = 0$,

- *f ten un máximo (mínimo) relativo en c se $f''(c) < (>) 0$.*

O último resultado que imos enunciar neste capítulo é o Teorema da función implícita, que se usará para deducir as condicións que caracterizan as bifurcacións.

Teorema 1.12 (Teorema da función implícita). *Sexa un aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sexa unha función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Baixo estas condicións, existen $\alpha, \beta > 0$ e $\varphi : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ tales que:

- (i) $\varphi(x_0) = y_0$,
- (ii) $F(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,
- (iii) se, para $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, existe $y \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ tal que $F(x, y) = 0$, entón $y = \varphi(x)$,
- (iv) φ é continua en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\varphi \in \mathcal{C}^1((x_0 - \alpha, x_0 + \alpha))$ e ademais

$$\varphi'(x) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \text{ para todo } x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha).$$

Capítulo 2

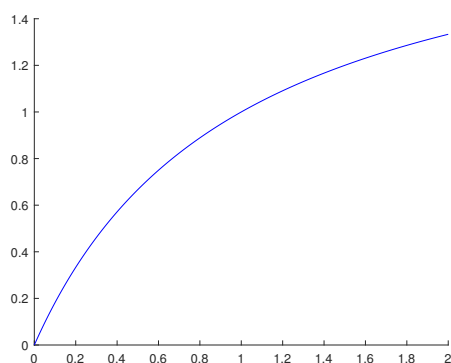
Conceptos e resultados sobre sistemas dinámicos discretos

No que vén a continuación, traballaremos cun intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (limitado ou non) e unha aplicación $f : I \rightarrow I$ continua, que nos define o seguinte sistema dinámico discreto unidimensional

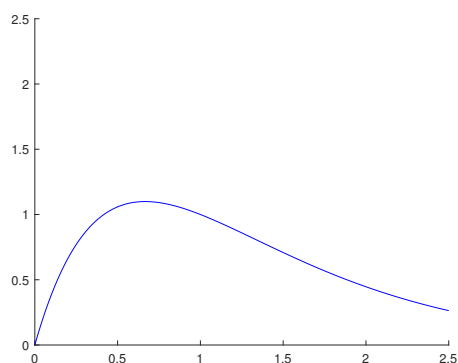
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x_0 \in I$ é coñecido.

Como exemplo, na Figura 2.1, ilustramos o modelo de Beverton-Holt (3.8) e o modelo de Ricker (3.14) nos que afondaremos no seguinte capítulo.



(a) Modelo de Beverton-Holt dado por $f(x) = \frac{rx}{1+x}$, $r = 2$.



(b) Modelo de Ricker, dado por $f(x) = xe^{r(1-x)}$, $r = 1,5$.

Figura 2.1: Exemplos de sistemas dinámicos discretos.

2.1. Conceptos básicos e estabilidade local sobre puntos fixos

Os contidos desta sección pódense consultar en [7, Capítulo 1] e [8, Sección 2]. En primeiro lugar, presentamos os conceptos de punto fixo e punto periódico, falamos tamén da órbita dun punto e exemplificamos un tipo de órbita particular, a órbita periódica.

Definición 2.1. Dise que $x_f \in I$ é un **punto fixo de f** se cumpre que $f(x_f) = x_f$.

Dise que $p \in I$ é un **punto periódico de período m** se cumpre que $f^m(x) = x$. Dirase de **período primo m** cando m é o menor natural que cumpre a igualdade anterior.

Definición 2.2. A **órbita dun punto $x_0 \in I$** é aquela formada polo conxunto de puntos $f^n(x_0)$, con $n \in \mathbb{Z}$, sempre e cando exista a inversa de f e esta sexa continua. A nós interesaranos a **semiórbita positiva (O^+)**, formada polos puntos $f^n(x_0)$ tales que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo 2.3. En particular, a semiórbita positiva dun punto fixo é o propio punto e a dun punto periódico p está formada polas iteracións de p , referímonos a ela como **órbita periódica**.

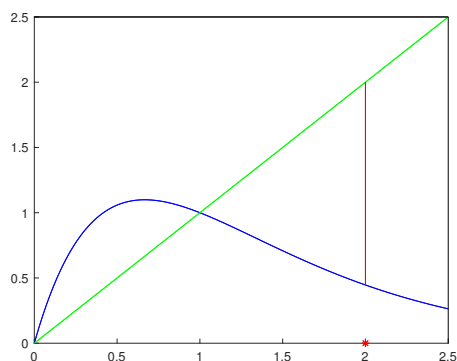
Para representar as órbitas dun sistema dinámico, faremos uso dos **diagramas Cobweb**. Para construír este tipo de diagramas, teremos que debuxar as curvas $y = x$ e $y = f(x)$, cuxa intersección nos dá os puntos fixos do sistema dinámico asociado. A continuación, dado un punto x_0 , proxéctase unha recta vertical dende o punto (x_0, x_0) da diagonal ata a función para acadar a primeira iteración $f(x_0)$. Agora, proxectamos unha recta horizontal dende o punto $(x_0, f(x_0))$ cara a diagonal, obtendo o punto $(f(x_0), f(x_0))$. Continuando este proceso, teremos unha representación das iteracións de x_0 representadas na diagonal $y = x$. Respresentamos estes pasos na Figura 2.2.

Continuamos con algúns conceptos básicos sobre estabilidade, en particular, definiremos puntos estables, inestables, atractores locais e globais. Tamén veremos que é un punto hiperbólico, así como dous resultados relevantes que nos serven para deducir a estabilidade asintótica local ou a inestabilidade, para puntos fixos hiperbólicos, en función do valor absoluto da derivada.

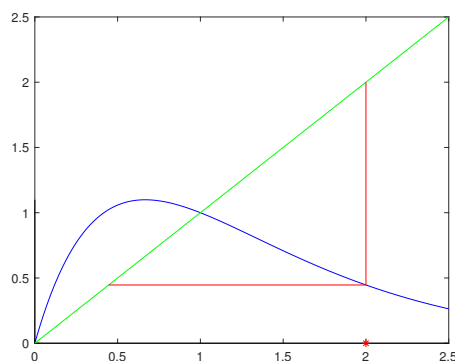
Definición 2.4. Diremos que un punto fixo $x_f \in I$ é:

- Un punto **estable** se, para cada veciñanza V de x_f en I , existe unha veciñanza U de x_f en I tal que $f^n(x) \in V$, para todo $x \in U, n \geq 1$.
- Un punto **inestable** se x_f non é estable.
- Un **atractor local** se existe un entorno $V \subset I$ de x_f tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in V$.
- Un **atractor global** se $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in I$.

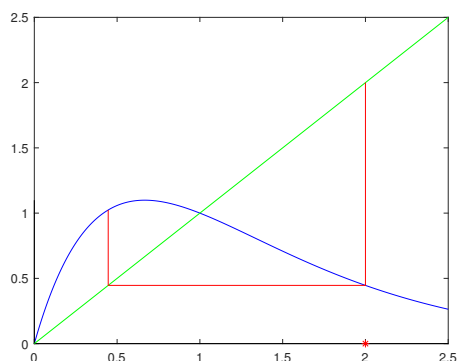
- Un punto **localmente asintoticamente estable (L.A.S.)** se é estable e, ademais, atractor local.
- Un punto **globalmente asintoticamente estable (G.A.S.)** se é estable e, ademais, atractor global.



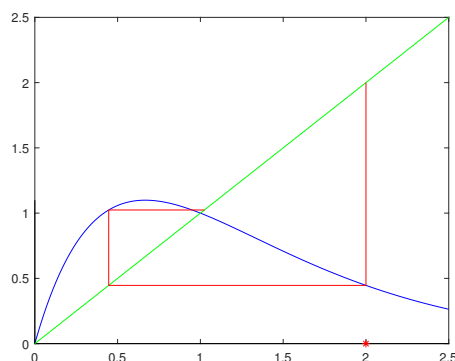
(a) Comezamos a primeira iteración coa recta vertical dende o punto (x_0, x_0) da identidade ata a función $f(x)$.



(b) Completamos a primeira iteración, engadindo a recta horizontal dende o punto $(x_0, f(x_0))$ da función f ata a identidade.



(c) A segunda iteración comeza cunha recta vertical dende o punto $(f(x_0), f(x_0))$ da identidade ata a función $f(x)$.



(d) Completamos a segunda iteración cunha recta horizontal dende o punto $(f(x_0), f^2(x_0))$ da función f ata a identidade.

Figura 2.2: Diagrama Cobweb paso a paso co punto inicial $x_0 = 2$ marcado con asterisco vermello, a recta $y = x$ representada en verde, a función de Ricker $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ para $x \in [0, 2,5]$ representada en azul e as iteracións representadas en vermello.

Observación 2.5. Os conceptos definidos para un punto fixo x_f pódense adaptar a un punto periódico p de período primo m , xa que este é un punto fixo da aplicación f^m . Ademais, un punto periódico de período primo $m = 1$ é un punto fixo.

Definición 2.6. Sexa p un punto periódico de período primo $m \in \mathbb{N}$. O punto p é **hiperbólico** se $|(f^m)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^m)'(p)| = 1$, entón p dise **non hiperbólico**.

As aplicacións con puntos periódicos hiperbólicos son máis doadas de analizar, veremos a continuación os dous resultados que nos proporcionan información sobre a dinámica local para este tipo de puntos.

Teorema 2.7. *Supoñamos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ e que x_f é un punto fixo hiperbólico tal que $|f'(x_f)| < 1$. Entón, existe un intervalo aberto $J \subset I$ tal que $x_f \in J$ e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \quad \forall x \in J, \quad (2.2)$$

é dicir, x_f é un atractor local.

Demostración. Como $f \in \mathcal{C}^1(I)$, $x_f \in I$ con $|f'(x_f)| < 1$ e a aplicación $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é continua, entón existen $\varepsilon > 0$ e $A \in (0, 1)$ tales que

$$|f'(x)| < A < 1 \text{ para todo } x \in (x_f - \varepsilon, x_f + \varepsilon) =: J.$$

Dado $x \in J$ con $x \neq x_f$, por ser $A \in (0, 1)$, temos polo Teorema 1.7 (Teorema do valor medio) que:

$$|f(x) - x_f| = |f(x) - f(x_f)| = |f'(c_{x,x_f})||x - x_f| \leq A |x - x_f| < |x - x_f| < \varepsilon.$$

Polo tanto, $f(x) \in J$ e, de feito, está máis cerca de x_f que o propio x .

Polo mesmo argumento, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |f^n(x) - x_f| &= |f^n(x) - f(x_f)| = |f(f^{n-1}(x)) - f(x_f)| = |f'(c_{f^{n-1}(x),x_f})| |f^{n-1}(x) - x_f| \\ &\leq A |f^{n-1}(x) - x_f| \leq \dots \leq AA^{n-1} |x - x_f| = A^n |x - x_f| < |x - x_f| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Polo tanto, $|f^n(x) - x_f| \leq A^n |x - x_f|$ para calquera $n \in \mathbb{N}$, sendo $x \neq x_f$ e $A \in (0, 1)$, e tamén se cumpre para $x = x_f$ (pois $f^n(x_f) = x_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$), logo séguese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n |x - x_f| = |x - x_f| \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$$

e, entón, existe o límite $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$ para todo $x \in J$, tal e como queríamos demostrar. \square

O seguinte corolario é consecuencia directa do anterior teorema dado que un punto periódico de período m é un punto fixo para f^m .

Corolario 2.8. *Sexa $f \in \mathcal{C}^1(I)$ e p un punto periódico hiperbólico de período m con $|(f^m)'(p)| < 1$. Entón existe un intervalo aberto $J \subset I$ tal que $p \in J$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^m)^n(x) = p$, para todo $x \in J$.*

A continuación, veremos que o comportamento da dinámica preto dos puntos fixos nos que $|f'(x_f)| > 1$ é bastante distinto ao amosado no resultado anterior.

Teorema 2.9. *Sexa x_f un punto fixo hiperbólico con $|f'(x_f)| > 1$. Entón existe un intervalo aberto $J \subset I$ tal que $x_f \in J$ e de xeito que, para todo $x \in J$ con $x \neq x_f$, existe $k > 0$ tal que*

$$f^k(x) \notin J. \quad (2.3)$$

Demostración. Como $f \in \mathcal{C}^1(I)$, $x_f \in I$ con $|f'(x_f)| > 1$ e a aplicación $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ é continua, entón existen $\varepsilon > 0$ e $A > 1$ tales que

$$|f'(x)| > A > 1 \text{ para todo } x \in (x_f - \varepsilon, x_f + \varepsilon) =: J.$$

Facemos a demostración por redución ao absurdo. Dado $x \in J$, $x \neq x_f$, supoñamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumpre $f^k(x) \in J$, entón, polo Teorema 1.7 (Teorema do valor medio), para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} |f^n(x) - x_f| &= |f^n(x) - f(x_f)| = |f(f^{n-1}(x)) - f(x_f)| = |f'(c_{f^{n-1}(x), x_f})| |f^{n-1}(x) - x_f| \\ &> A |f^{n-1}(x) - x_f| > \dots > AA^{n-1} |x - x_f| = A^n |x - x_f| > |x - x_f|. \end{aligned}$$

Como temos que $|f^n(x) - x_f| > A^n |x - x_f|$ para calquera $n \in \mathbb{N}$, sendo $x \neq x_f$ e $A > 1$, cúmprese:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - x_f| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} A^n |x - x_f| = |x - x_f| \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \infty.$$

Polo tanto, existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin J = (x_f - \varepsilon, x_f + \varepsilon)$. □

2.2. Estabilidade global

Esta sección recolle diversos resultados de estabilidade global para aplicacións cun único punto fixo (positivo). Comezamos establecendo un par de resultados cuxa hipótese principal é a ben coñecida ausencia de órbitas de período 2. O primeiro deles, debido a Coppel [4], é válido cando I é un intervalo pechado e limitado. O segundo, recollido en [8], é aplicable para calquera intervalo de \mathbb{R} , tamén para os non limitados, pero necesita engadir unha hipótese adicional.

Teorema 2.10 ([4]). *Sexan $I = [a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ unha función continua e limitada cun único punto fixo x_f no intervalo $[a, b]$. Temos que x_f é un atractor global en $[a, b]$ se, e só se, f non ten órbitas de período 2 en $[a, b] \setminus \{x_f\}$.*

Teorema 2.11 ([8]). *Sexa $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (non necesariamente limitado) e $f : I \rightarrow I$ unha función continua cun punto fixo x_f . Tense que x_f é un atractor global se, e só se, $f^2(x) \neq x$ para todo $x \in I \setminus \{x_f\}$ (é dicir, f non ten órbitas de período 2) e existe $k \geq 1$ tal que x_f é estable para f^k .*

Observación 2.12. Non incluimos aquí a demostración completa dos Teoremas 2.10 e 2.11. Porén, xustificamos que a non existencia de órbitas de período 2 é condición necesaria para que x_f sexa un atractor global.

En efecto, sexa $x_f \in I$. Como $f(x_f) = x_f$, dedúcese que $f^2(x_f) = f(f(x_f)) = f(x_f) = x_f$. Supoñamos que a ecuación $f^2(x) = f(f(x))$ ten unha solución $p \in I$ que non é solución de $f(x) = x$. Se tomamos $x_0 = p$, temos que $x_1 = f(x_0) = f(p) \neq p$, pero $x_2 = f(x_1) = f(f(p)) = p$, e os seguintes termos da sucesión $\{x_n\}$ repiten esta secuencia. Temos entón que a sucesión $\{x_n\}$ oscila e non converxe a x_f , polo tanto, x_f non pode ser un atractor global.

A condición establecida nos resultados previos sobre a ausencia de órbitas de período 2 non é sinxela de comprobar. Establecemos a continuación outros resultados que serán de maior utilidade na práctica. Será na demostración dalgún destes novos resultados onde necesitaremos os Teoremas 2.10 e 2.11.

O primeiro resultado, que se pode consultar en [2], require unhas condicións moi sinxelas, que aparecen ilustradas na Figura 2.3 e fan referencia á posición da función f con respecto á recta $y = x$ e ao punto fixo x_f .

Teorema 2.13 ([2]). *Sexan $I = [0, \infty)$ e $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ unha función continua tal que $f(0) = 0$. Se x_f é o único punto fixo positivo de f e se cumpre que $x < f(x) < x_f$ en $(0, x_f)$ e $x > f(x) > x_f$ en (x_f, ∞) , entón x_f é un atractor global en $(0, \infty)$.*

Demostración. Sexa $x_0 \in (0, \infty)$, probaremos que $x_n = f^n(x_0)$ converxe a x_f cando n tende a ∞ . Distinguiremos 2 casos:

- Se, para algún $j \in \mathbb{N}$, temos $0 < x_j \leq x_f$, entón, por hipótese, para todo $n \geq j$ tamén se satisfai $0 < x_n < x_f$. Ademais, xa que $f(x) > x$ para $0 < x < x_f$, dedúcese que $\{x_n\}_{n=j}^{\infty}$ é crecente e acotada superiormente, polo tanto, ten un límite d , que cumpre a propiedade $0 < d \leq f(d) \leq x_f$. Pola Proposición 1.2, tomando os límites en ambos lados en $x_{n+1} = f(x_n)$, obtemos $d = f(d)$, xa que f é continua. Por hipótese, x_f é o único punto fixo positivo de f , entón $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d = x_f$.
- Se $x_n > x_f$ para calquera $n \in \mathbb{N}$, entón x_n é decrecente e acotada inferiormente pois $x > f(x) > x_f$ en (x_f, ∞) , polo tanto, ten un límite d que cumpre $d \geq f(d) \geq x_f$. De novo, pola Proposición 1.2 e a continuidade de f , temos que $f(d) = d$ (d é un punto fixo) e como, por hipótese, só hai un punto fixo positivo, xa temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d = x_f$.

□

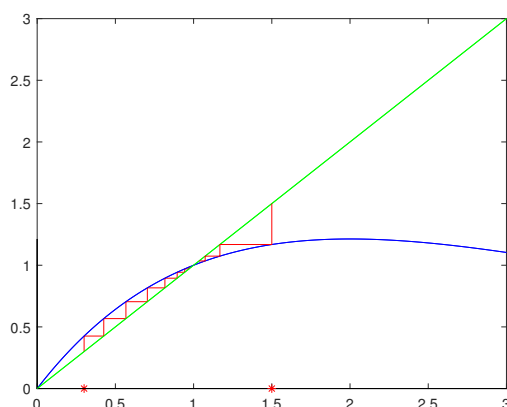


Figura 2.3: Ilustración das hipóteses do Teorema 2.13 mediante a función $f(x) = xe^{\frac{(1-x)}{2}}$, $x \in [0, \infty)$, en cor azul, así como do comportamento asintótico de dúas condicións iniciais que converxen ao punto fixo positivo $x_f = 1$. En cor verde está representada a identidade, en vermello as iteracións do diagrama de Cobweb e os asteriscos vermellos indican as condicións iniciais.

O seguinte teorema é unha pequena modificación dun resultado que se recolle en [5]. Neste, engádesse unha hipótese que nos facilita os argumentos da demostración. Esta inclúese para poder utilizar o Teorema 2.11, en lugar do Teorema 2.10, pois este último é válido para intervalos pechados e limitados, mentres o novo resultado permite traballar en calquera intervalo e, en particular, en $[0, \infty)$.

As hipóteses que se requiren neste resultado tamén teñen que ver coa posición da función f con respecto á recta $y = x$, así como coa existencia dunha función adicional que “envolve” a función f . O concepto de función envolvente defínese a continuación e ilústrase na Figura 2.4.

Definición 2.14. Sexan $I = [0, \infty)$, $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que x_f é o seu único punto fixo positivo. Dicimos que a función ϕ é unha **función envolvente** de f ou que ϕ **envolve** á función f se

- (i.1) $\phi(x) > f(x)$, para todo $x \in (0, x_f)$,
- (i.2) $\phi(x) < f(x)$, para todo $x > x_f$ tal que $\phi(x) > 0$ e $f(x) > 0$.

Teorema 2.15. Sexan $I = [0, \infty)$ e $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ unha función continua que satisfai $f(0) = 0$, x_f é o seu único punto fixo positivo, existe $n \geq 1$ tal que x_f é estable para f^n e, ademais,

- (a) $f(x) > x$, para todo $x \in (0, x_f)$,
- (b) $f(x) < x$, para todo $x \in (x_f, \infty)$,

(c) $f(x) > 0$, para todo $x \in (x_f, \infty)$.

Supoñamos que existe unha función $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ que envolve a f , tal que $\phi^2(x) = x$ para todo $x \in [0, \infty)$, ϕ é monótona decrecente e é positiva no intervalo $(0, x_-)$. Entón x_f é atractor global en $(0, \infty)$.

Demostración. Polas hipóteses consideradas, cúmprense todas as condicións do Teorema 2.11 no intervalo $[0, \infty)$, excepto quizais que a función f non teña órbitas de período 2. Probemos entón que $f(f(x)) \neq x$ para todo $x \in [0, \infty) \setminus \{x_f\}$. En efecto:

- Por unha banda, probamos que $f^2(x) > x$ para todo $x \in (0, x_f)$. Se $f(f(x)) > x_f$, entón $f(f(x)) > x$ porque $x \in (0, x_f)$. Se $f(f(x)) < x_f$ e $f(x) < x_f$ entón, intercambiando en (a) x por $f(x)$ e $f(x)$ por $f(f(x))$, deducimos que $f(f(x)) > f(x)$, ademais, como $x \in (0, x_f)$, podemos usar de novo a condición (a) para completar a desigualdade, obtendo que $f(f(x)) > f(x) > x$. Por último, se $f(f(x)) < x_f$ e $f(x) > x_f$, intercambiando en (i.2) x por $f(x)$, temos que $\phi(f(x)) < f(f(x))$, ademais, da condición (i.1), $\phi(x) > f(x)$ e usando que ϕ é monótona decrecente, obtemos $\phi(\phi(x)) < \phi(f(x))$. Agora, facendo uso das desigualdades previas, concluimos que $x = \phi(\phi(x)) < \phi(f(x)) < f(f(x))$.
- Por outra banda, probamos que $f^2(x) < x$ para todo $x \in (x_f, \infty)$. Se $f(f(x)) < x_f$, entón $f(f(x)) < x$ porque $x \in (x_f, \infty)$. Se $f(f(x)) > x_f$ e $f(x) > x_f$, entón, intercambiando en (b) x por $f(x)$ e $f(x)$ por $f(f(x))$, deducimos que $f(f(x)) < f(x)$, ademais, como $x \in (x_f, \infty)$, podemos usar de novo a condición (b) para completar a desigualdade, obtendo que $f(f(x)) < f(x) < x$. Por último, se $f(f(x)) > x_f$ e $f(x) < x_f$, intercambiando en (i.1) x por $f(x)$, temos que $\phi(f(x)) > f(f(x))$, ademais, da condición (i.2) $\phi(x) < f(x)$ e usando que ϕ é monótona decrecente, obtemos $\phi(\phi(x)) > \phi(f(x))$. Agora facendo uso das desigualdades previas, concluimos que $x = \phi(\phi(x)) > \phi(f(x)) > f(f(x))$.

□

Os seguintes resultados aparecen principalmente en [15], salvo un deles que foi consultado en [10]. Buscamos un resultado de estabilidade global cando $|f'(x_f)| \leq 1$, é dicir, incluíndo o caso non hiperbólico (Teorema 2.24). Faremos uso de condicións diferentes aos resultados previos, incluíndo a existencia dun único punto crítico e o carácter negativo da derivada de Schwarz. Para poder chegar a este resultado necesitamos diversos resultados auxiliares, propiedades da derivada de Schwarz, propiedades de funcións con derivada de Schwarz negativa, así como resultados parciais que consideran por separado o caso non hiperbólico $|f'(x_f)| < 1$ e o hiperbólico $|f'(x_f)| = 1$.

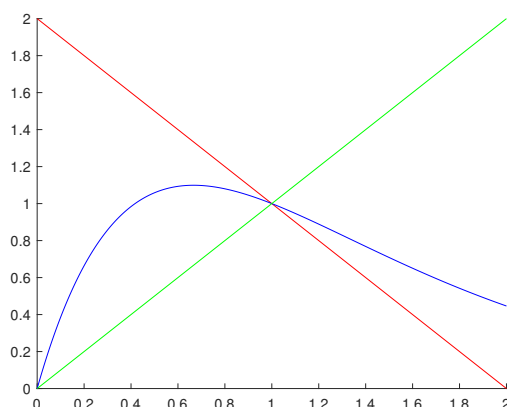


Figura 2.4: Ilustración do concepto de función envolvente. Representátese no intervalo $[0, 2)$ a función do modelo de Ricker $f(x) = xe^{\frac{3(1-x)}{2}}$ en azul, a función identidade en verde, mentres que a función $\phi(x) = 2 - x$ que envolve a f se representa en vermello.

Comezamos por definir o concepto de derivada de Schwarz e por demostrar algunhas propiedades da mesma.

Definición 2.16 ([15]). Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha función no espazo $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$. A **derivada de Schwarz** ou **Schwarziana** de f nun punto $x \in [0, +\infty)$ tal que $f'(x) \neq 0$ vén dada por:

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2. \quad (2.4)$$

Proposición 2.17 ([15]). Se $f, g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ son funcións de $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$, tense que:

$$S_{f \circ g}(x) = S_f(g(x))(g'(x))^2 + S_g(x). \quad (2.5)$$

Demostración. Vexamos que se cumpre a igualdade desenvolvendo os termos de cada lado:

$$S_f(g(x))g'(x) + S_g(x) = \frac{f'''(g(x))}{f'(g(x))}g'(x)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(g(x))}{f'(g(x))} \right)^2 g'(x)^2 + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2$$

e

$$S_{f \circ g}(x) = \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2.$$

Agora ben,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x),$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 2f''(g(x))g''(x)g'(x) + f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x) \\ &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x). \end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} &= \frac{f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} = \frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g''(x)}{g'(x)}, \\ \left(\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2 &= \left(\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} \right)^2 + \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 + \frac{2f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))}, \\ \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} &= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \\ &= \frac{f'''(g(x))g'(x)^2}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} + \frac{3f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Temos a igualdade, tendo en conta que o último termo das últimas dúas ecuacións se cancela debido a que os termos de (2.6) están multiplicados por $\frac{-3}{2}$. \square

Corolario 2.18 ([15]). *Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha función de $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$ que cumpre $S_f(x) < 0$, para todo $x \in [0, +\infty)$. Entón, $S_{f^n}(x) < 0$, para todo $x \in [0, +\infty)$ e para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.*

Demostración. Utilicemos o método de indución.

Para $n = 1$, tense: $S_{f^n}(x) = S_f(x) < 0$ (por hipótese).

Supoñamos que se cumpre para $n = k$, vexamos que se cumpre para $n = k + 1$:

$$S_{f^{k+1}}(x) = S_{f^k \circ f}(x) = \underbrace{S_{f^k}(f(x))}_{<0} \underbrace{(f'(x))^2}_{>0} + \underbrace{S_f(x)}_{<0} < 0,$$

onde, na última igualdade, usamos a propiedade (2.5) sobre a composición vista na Proposición 2.17 e o feito de que $f'(x) \neq 0$ pola existencia de $S_f(x)$. \square

Agora, utilizando a derivada de Schwarz negativa, vemos que a derivada non pode ter un mínimo local positivo nin un máximo local negativo, feito que será de grande utilidade nas próximas demostracións.

Proposición 2.19 ([15]). *Sexa $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha función de $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$ tal que $S_g(x) < 0$, para todo $x \in [0, +\infty)$. Entón, tense que g' non pode ter:*

- un mínimo local positivo,
- un máximo local negativo.

Demostración. Como g é unha función no espazo $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$, g' é unha función de $\mathcal{C}^2([0, +\infty))$. Logo, polo recollido na Proposición 1.11,

$$x \text{ é máximo local de } g' \Leftrightarrow \begin{cases} g''(x) = 0, \\ g'''(x) < 0 \end{cases}$$

e

$$x \text{ é m\u00edmino local de } g' \Leftrightarrow \begin{cases} g''(x) = 0, \\ g'''(x) > 0. \end{cases}$$

Baixo estas condicións, $S_g(x) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 = \frac{g'''(x)}{g'(x)}$.

Ademais, como, por hipótese, $S_g(x) < 0$, se $g'''(x) < 0$ ent\u00f3n $g'(x) > 0$ e, se $g'''(x) > 0$, $g'(x) < 0$. \square

O pr\u00f3ximo resultado di que, se a derivada de Schwarz \u00e9 negativa e hai 3 puntos fixos consecutivos sen puntos cr\u00edticos polo medio, ent\u00f3n o punto fixo intermedio \u00e9 inestable. Este resultado ser\u00e1 de utilidade para demostrar o resultado que nos permite pasar dun punto fixo L.A.S a un punto fixo G.A.S.

Proposici\u00f3n 2.20 ([15]). *Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha funci\u00f3n no espazo $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$ con derivada de Schwarz negativa. Sexa $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, arbitrariamente fixado e $g = f^k$. Se $a < b < c$ son puntos fixos consecutivos de g e $[a, c]$ non cont\u00e9n puntos cr\u00edticos de g , ent\u00f3n $g'(b) > 1$.*

Demostraci\u00f3n. Aplicando o Teorema 1.7 (do valor medio) nos intervalos $[a, b]$ e $[b, c]$, temos que existe $u \in [a, b]$ tal que $g(b) - g(a) = g'(u)(b - a)$ e existe $v \in [b, c]$ tal que $g(c) - g(b) = g'(v)(c - b)$. Por ser a, b e c puntos fixos de g , $g'(u) = g'(v) = 1$.

Como g' \u00e9 continua, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, c]$ e existen $u \in [a, b], v \in [b, c]$ tales que $g'(u) = g'(v) = 1$, ent\u00f3n polo Teorema 1.3 (Teorema do valor intermedio), $g'(x) > 0$ para todo $x \in [u, v]$.

Como $S_f < 0$, polo Corolario 2.18, temos que $S_g < 0$ e, pola Proposici\u00f3n 2.19, g' non pode ter m\u00ednimo local positivo, polo que conclu\u00edmos que $g'(b) > 1$ xa que, se $g'(b) < 1$, como existen u e v nas condici\u00f3ns anteriores, haber\u00eda un m\u00ednimo local positivo. \square

O resultado descrito a continuaci\u00f3n perm\u00edtenos pasar de L.A.S. a G.A.S. tan s\u00f3 pedindo que a funci\u00f3n te\u00f1a un \u00fanico punto fixo, un \u00fanico punto cr\u00edtico (m\u00e1ximo) e que a s\u00faa derivada de Schwarz sexa negativa.

Lema 2.21 ([10]). *Sexa $q : [a, b] \rightarrow [a, b]$ unha funci\u00f3n de $\mathcal{C}^3([a, b])$ que ten un \u00fanico punto fixo x_f e un \u00fanico punto cr\u00edtico x_c (m\u00e1ximo). Se x_f \u00e9 localmente asintoticamente estable e $S_q(x) < 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{x_c\}$, ent\u00f3n x_f \u00e9 un atractor global.*

Demostraci\u00f3n. Sexa W a compo\u00f1ente conexa do conxunto aberto

$$S = \left\{ x \in [a, b] : \lim_{k \rightarrow \infty} q^k(x) = x_f \right\}$$

tal que $x_f \in W$.

Pola propia definición de S e W , tense que $q^k(W) \subset W$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para ver que x_f é un atractor global, debemos probar que $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k(x) = x_f$, para todo $x \in [a, b]$, é dicir, $W = [a, b]$.

Razoamos por redución ao absurdo:

Se $W \neq [a, b]$, como W é aberto en $[a, b]$, teríamos 3 posibilidades: $W = [a, r)$, $W = (l, b]$ ou $W = (l, r)$ con $a < l < r < b$. Buscamos unha contradición en cada caso:

1. Se $W = [a, r)$, $q(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(r - \varepsilon) \leq r \leq q(r)$, polo tanto $r = q(r)$, é dicir, r é punto fixo, contradicindo que x_f é o único punto fixo de q .
2. Se $W = (l, b]$, $q(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(l + \varepsilon) \geq l \geq q(l)$, polo tanto $l = q(l)$, é dicir, l é punto fixo, contradicindo que x_f é o único punto fixo de q .
3. Se $W = (l, r)$, como $l, r \notin W$, entón $q(r), q(l) \notin W$, pois, por exemplo, se $q(l) \in W$, teríamos que $l \in W$, pola propia definición de W . Polo tanto, $q(l) \leq l$ ou $q(l) \geq r$. Continuamos o razoamento para l , que se seguiría de xeito análogo para r .

Agora ben, se $q(l) \leq l$, tense que $q(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(l + \varepsilon) \geq l \geq q(l)$, entón $l = q(l)$ e l sería punto fixo, contradicindo que x_f é o único punto fixo de q . Entón, $q(l) \geq r$ e tense que $q(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(l + \varepsilon) \leq r \leq q(l)$ e, polo tanto, $q(l) = r$. Cun razoamento análogo para r , chegaríamos a que $q(r) = l$.

Como $q^2(x_f) = q(x_f) = x_f$, $q^2(l) = q(r) = l$, $q^2(r) = q(l) = r$, con $l < x_f < r$, temos 3 puntos fixos consecutivos de q^2 . Ademais, como, por hipótese, x_f é localmente asintoticamente estable, temos que $|q'(x_f)| \leq 1$ (pois se $|q'(x_f)| > 1$, teríamos que x_f é inestable), polo tanto, $(q^2)'(x_f) = (q'(x_f))^2 \leq 1$. Polo tanto, facendo uso da Proposición 2.20, temos que $x_c \in W = (l, r)$, polo que, $q(x_c) < r$. Pero, por hipótese, q ten un máximo en x_c , entón $r > q(x_c) \geq q(l)$ e chegamos a unha contradición coa condición $q(l) = r$.

Polo tanto, $W = [a, b]$ e, ademais, x_f atrae cada punto de $[a, b]$. Isto implica que x_f é un atractor global de q . □

Cabe mencionar que no Lema 2.21 impoñemos que o punto fixo x_f sexa localmente asintoticamente estable, condición que se cumpre se $|f'(x_f)| < 1$, polo Teorema 2.7. Vexamos, a continuación, que, baixo certas condicións, podemos engadir o caso $|f'(x_f)| = 1$.

Comezamos cun resultado auxiliar que nos indica que, se unha función con derivada de Schwarz negativa ten un número finito de puntos críticos, entón terá un número finito de órbitas dalgún período m . Con isto, podemos demostrar o resultado que nos permitirá afirmar a estabilidade global cando teñamos unha aplicación con derivada Schwarziana negativa e un punto fixo hiperbólico.

Proposición 2.22 ([15]). *Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha función do espazo $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$ cun número finito de puntos críticos $\{x_c^1, \dots, x_c^k\}$ e supoñamos que se cumpre $S_f(x) < 0$ para todo $x \in [0, +\infty) \setminus \{x_c^1, \dots, x_c^k\}$. Entón, para calquera $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, f só pode ter un número finito de órbitas de período m .*

Demostración. Razoamos por contrarrecíproco:

Sexa $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, arbitrariamente fixado, supoñamos que f ten infinitas órbitas periódicas de período m . Definindo $g = f^m : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, temos que g ten infinitos puntos fixos.

Facendo uso do Teorema 1.7 (Teorema do valor medio), existe un número infinito de puntos $c_{x_1, x_2} \in [\text{mín}\{x_1, x_2\}, \text{máx}\{x_1, x_2\}]$ tales que $g'(c_{x_1, x_2}) = 1$, sendo x_1, x_2 puntos fixos de g .

Agora, podemos utilizar o Corolario 2.18 e a Proposición 2.19, que nos permiten afirmar que g' non ten mínimos locais positivos. En consecuencia, polo Teorema 1.3 (Teorema do valor intermedio), entre cada dúas solucións de $g'(x) = 1$, teríamos unha solución de $g'(x) = 0$. Así, a ecuación $g'(x) = 0$ ten infinitas solucións. Como $g'(x) = (f^m)'(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x))$, concluímos que $f'(x) = 0$ ten infinitas solucións e, polo tanto, f ten infinitos puntos críticos. Así, como f só pode ter un número finito de puntos críticos, só pode haber un número finito de órbitas periódicas de período m . \square

Lema 2.23 ([15]). *Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ unha función no espazo $\mathcal{C}^3([0, +\infty))$ cun número finito de puntos críticos $\{x_c^1, \dots, x_c^k\}$, tal que $S_f(x) < 0$ para todo $x \in [0, +\infty) \setminus \{x_c^1, \dots, x_c^k\}$. Se x_f é un punto fixo de f tal que $|f'(x_f)| = 1$, entón x_f é localmente asintoticamente estable e existe un punto crítico x_c tal que:*

- se $x_c < x_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \forall x \in [x_c, x_f]$.
- se $x_c > x_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \forall x \in (x_f, x_c]$.

Demostración. Temos que $|f'(x_f)| = 1$, así, $f'(x_f) = 1$ ou $f'(x_f) = -1$. Podemos considerar só o primeiro caso, debido a que, no caso $f'(x_f) = -1$, se consideramos a función auxiliar $g = f^2$, g cumpre as condicións da función f , pois teríamos que $g \in \mathcal{C}^3([0, +\infty))$, g ten os mesmos puntos críticos que f e $S_g(x) < 0$ para todo $x \in [0, +\infty) \setminus \{x_c^1, \dots, x_c^k\}$. Ademais, xa que $f(x_f) = x_f$, dedúcese que $g'(x_f) = (f^2)'(x_f) = f'(f(x_f))f'(x_f) = -1 \cdot -1 = 1$.

Pola Proposición 2.22, como f ten un número finito de puntos críticos, terá tamén un número finito de órbitas periódicas de período 1 (puntos fixos). En consecuencia, existe un intervalo $(a, b) \subset [0, +\infty)$ tal que x_f é o único punto fixo que está en (a, b) . Vexamos que se cumpre algunha das seguintes condicións:

$$f(x) > x, \text{ para todo } x \in (a, x_f) \text{ ou } f(x) < x, \text{ para todo } x \in (x_f, b). \quad (2.7)$$

Por contrarrecíproco, supoñemos que $f(x) < x$, para todo $x \in (a, x_f)$ e $f(x) > x$, para todo $x \in (x_f, b)$. Como tamén se cumpre que $f(x_f) = x_f$ e $f'(x_f) = 1$, necesariamente existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > 1$ para todo $x \in (x_f - \varepsilon, x_f + \varepsilon) \setminus \{x_f\}$. Polo tanto, f' ten un mínimo local positivo en x_f , o que supón unha contradición coa conclusión da Proposición 2.19.

Supoñamos que se cumpre algunha das dúas condicións recollidas en (2.7):

- Sexa $a \in [0, +\infty)$ o valor máis pequeno para o que se cumpre a desigualdade $f(x) > x$, para todo $x \in (a, x_f)$. Por como o definimos, $f(a) = a$ e, usando o Teorema 1.7 (Teorema do valor medio) en $[a, x_f]$, existe $c_{a,x_f} \in (a, x_f)$ tal que $f(x_f) - f(a) = f'(c_{a,x_f})(x_f - a)$. Como a e x_f son puntos fixos, $f'(c_{a,x_f}) = 1$. Entón, como $f(x) > x$ en (a, x_f) , $f'(a) \geq 1$ para que $f(x)$ estea por enriba da recta $y = x$ para todo $x \in (a, x_f)$. Usando agora que $f'(c_{a,x_f}) = f'(x_f) = 1$ e $f'(a) \geq 1$, ao ser f' continua e f non ter mínimos locais positivos, necesariamente existe $x_c \in (a, x_f)$ tal que $f'(x_c) = 0$.

Tomamos o punto crítico $x_c \in (a, x_f)$ máis próximo a x_f e vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in [x_c, x_f)$. Como $x < f(x)$ para todo $x \in [x_c, x_f) \subset (a, x_f)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_c, x_f)$ (pois $f'(x_c) = 0$, $f'(x_f) = 1$ e x_c é o punto crítico máis cercano a x_f), temos que $x < f(x) < x_f$, para todo $x \in [x_c, x_f)$.

Para cada $x \in [x_c, x_f)$, consideramos a sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, que é monótona crecente e limitada superiormente por x_f , polo tanto, é converxente e existe $L \in (x_c, x_f]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L$. Agora ben, como f é continua, facendo uso da Proposición 1.2, temos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{n-1}(x)) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x)\right) = f(L).$$

En consecuencia, $f(L) = L$, é dicir, L é punto fixo, pero o único punto fixo en $(x_c, x_f]$ é x_f , entón $L = x_f$.

- Consideramos agora $b \in [0, +\infty)$ o valor máis grande para o que se cumpre $f(x) < x$, para todo $x \in (x_f, b]$. Por como o definimos, $f(b) = b$ e, usando o Teorema 1.7 (Teorema do valor medio) en $[x_f, b]$, existe $c_{x_f,b} \in (x_f, b)$ tal que $f(b) - f(x_f) = f'(c_{x_f,b})(b - x_f)$. Como b e x_f son puntos fixos, $f'(c_{x_f,b}) = 1$. Ademais, como $f(x) < x$ en (x_f, b) , $f'(b) \geq 1$ para que $f(x)$ estea por debaixo da recta $y = x$ para todo $x \in (x_f, b)$ e que $f(b) = b$. Como $f'(c_{x_f,b}) = f'(x_f) = 1$ e $f'(b) \geq 1$ ao ser f' continua e f non ter mínimos locais positivos, existe $x_c \in (x_f, b)$ tal que $f'(x_c) = 0$.

Tomamos o punto crítico $x_c \in (x_f, b)$ máis próximo a x_f , vexamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in (x_f, x_c]$. Como $x > f(x)$ para todo $x \in (x_f, x_c] \subset (x_f, b)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_f, x_c)$ (pois $f'(x_c) = 0$, $f'(x_f) = 1$ e x_c é o punto crítico máis próximo a x_f), temos que $x > f(x) > x_f$, para todo $x \in (x_f, x_c]$.

Para cada $x \in (x_f, x_c]$, consideramos a sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, que é monótona decrecente e limitada inferiormente por x_f , polo tanto, é converxente e existe $L \in [x_f, x_c)$ tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L$. Agora ben, como f é continua, volvendo a utilizar a Proposición 1.2, temos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{n-1}(x)) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n-1}(x)\right) = f(L).$$

En consecuencia, $f(L) = L$, é dicir, L é punto fixo, pero o único punto fixo en $[x_f, x_c]$ é x_f , entón $L = x_f$.

□

Como consecuencia dos Lemas 2.21 e 2.23, temos o resultado que buscábamos, que permitirá abordar o estudo da estabilidade global en modelos con propiedades similares ás do modelo de Ricker.

Teorema 2.24. *Sexa $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f \in \mathcal{C}^3([0, +\infty))$, unha función cun único punto crítico x_c e tal que:*

(i.1) $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ en $(0, \infty)$,

(i.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

(i.3) $f'(x) > 0$ en $(0, x_c)$,

(i.4) $f'(x) < 0$ en (x_c, ∞) ,

(i.5) $f''(x) < 0$ en $(0, x_c)$,

(i.6) $S_f(x) < 0$ en $[0, +\infty) \setminus \{x_c\}$.

Se f ten un único punto fixo $x_f \in (0, +\infty)$ e se cumpre que $|f'(x_f)| \leq 1$, entón x_f é un atractor global en $(0, +\infty)$.

Demostración. Consideramos por separado os casos $|f'(x_f)| < 1$ e o caso $|f'(x_f)| = 1$, para os que usaremos, respectivamente, o Lema 2.21 e o Lema 2.23.

Supoñamos que $|f'(x_f)| < 1$, polo Teorema 2.7, temos que x_f é un atractor local. Como, respectivamente, por (i.3) e (i.4), $f'(x) > 0$ con $x \in (0, x_c)$ e $f'(x) < 0$ con $x \in (x_c, \infty)$, entón x_c é un máximo. En consecuencia, para cada par de valores $a, b \in [0, +\infty)$ tales que $0 < a < \min\{x_c, x_f\} \leq \max\{x_c, x_f\} < b$, tendo en conta a condición (i.6), $f|_{[a,b]}$ cumpre as condicións do Lema 2.21, así x_f é un atractor global en $[a, b]$. Agora ben, para probar que x_f é un atractor global en $(0, +\infty)$, facemos uso das propiedades (i.1)–(i.3) e (i.5).

- Usando as condicións (i.1), (i.3) e (i.5), como x_f é punto fixo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > x$ para todo $x \in (0, \varepsilon)$. Polo tanto, tomando $a = \frac{\varepsilon}{2}$, temos asegurado que para todo $x_0 \in (0, \varepsilon)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_0) \in [a, x_f] \subset [a, b]$. Así, a sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_f .
- Usando agora a condición (i.2), $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, temos que

para todo $\tilde{\varepsilon}$, existe $M_{\tilde{\varepsilon}}$ tal que, se $x > M_{\tilde{\varepsilon}}$, entón $|f(x)| < \tilde{\varepsilon}$.

Tomando o valor de ε fixado no punto previo, podemos considerar $b = M_{\varepsilon}$, dado que, se $x_0 \in (M_{\varepsilon}, +\infty)$, entón $f(x_0) \in (0, \varepsilon)$ e estamos nas condicións do punto anterior.

Supoñamos agora que $|f'(x_f)| = 1$, f cumpre as hipóteses do Lema 2.23 e temos:

- (a) se $x_c < x_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in [x_c, x_f)$,
- (b) se $x_c > x_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$, para todo $x \in (x_f, x_c]$.

Sexa $x_0 \in (0, +\infty)$ arbitrariamente fixado, probemos que $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_f en cada un destes 2 casos:

- se $x_c < x_f$, polas condicións (i.1)–(i.5), temos unha función cunha gráfica similar á da Figura 2.5.

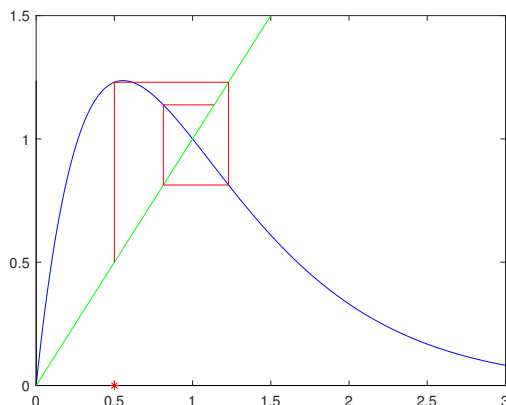


Figura 2.5: Ilustración do diagrama de Cobweb para o modelo de Ricker con $r = 1,8$, $x_c < x_f$, onde a recta verde representa á identidade, a recta azul á función de Ricker, o asterisco vermello é o punto inicial $x_0 = 0,5$ e as liñas vermellas son as iteracións.

Consideramos o punto $f_+^{-1}(x_c) = \max\{x \in [0, +\infty) : f^{-1}(x) = x_c\}$. Por (a), podemos afirmar que x_f é un atractor global en $[x_c, f_+^{-1}(x_c)]$.

Sexa agora $x_0 \in (0, x_c)$, pola forma que ten a gráfica de f e a definición de $f_+^{-1}(x_c)$, existirá $k > 0$ tal que $f^k(x_0) \in [x_c, f_+^{-1}(x_c)]$ (tal e como se ilustra na Figura 2.5). En consecuencia, $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe a x_f .

Por último, se $x_0 \in (f_+^{-1}(x_c), +\infty)$, temos que $f(x_0) \in (0, x_c)$ e, utilizando o caso anterior, concluimos que $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe a x_f .

Como $(0, +\infty) = (0, x_c) \cup [x_c, f_+^{-1}(x_c)] \cup (f_+^{-1}(x_c), +\infty)$, podemos concluir que x_f é un atractor global en $(0, +\infty)$.

- se $x_c > x_f$, polas condicións (i.1)–(i.5), temos unha función cuxa representación gráfica é como a da Figura 2.6.

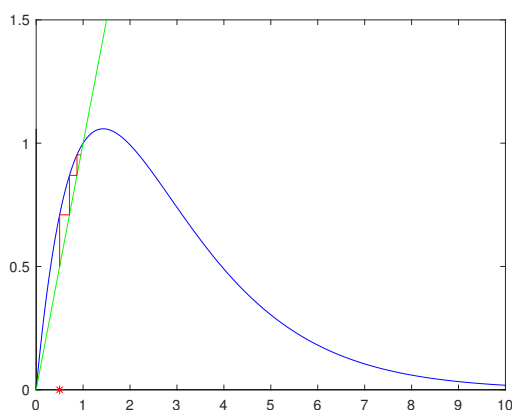


Figura 2.6: Ilustración do diagrama de Cobweb para o modelo de Ricker con $r = 0,7$, $x_c > x_f$, onde a recta verde representa á identidade, a recta azul á función de Ricker, o asterisco vermello é o punto inicial $x_0 = 0,5$ e as liñas vermellas son as iteracións.

Por (b), podemos afirmar que x_f é un atractor global en $[x_f, x_c]$.

Sexa agora $x_0 \in (0, x_f)$, como $x_c > x_f$, pola forma que ten a gráfica de f (ilustrada na Figura 2.6, tense que $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crecente e limitada superiormente por x_f . Seguindo argumentos similares aos de demostracións previas, tense que $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe a x_f .

Por último, se $x_0 \in (x_c, +\infty)$, temos que $f(x_0) \in (0, x_c)$ e, utilizando os casos anteriores, concluimos que $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe a x_f .

Como $(0, +\infty) = (0, x_f) \cup [x_f, x_c] \cup (x_c, +\infty)$, podemos concluir que x_f é un atractor global en $(0, +\infty)$.

□

2.3. Bifurcacións

Os contidos recollidos nesta sección foron consultados en [16].

Supoñamos que a función $f : I \rightarrow I$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervalo) que define o sistema dinámico $x_{n+1} = f(x_n)$ depende dun parámetro $r \in \mathbb{R}$. Expresemos dita dependencia escribindo

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(x_n, r) \text{ ou } f(x) = f(x, r).$$

Denotamos un punto fixo de f por (x_f, r_f) , que cumpre que $f(x_f, r_f) = x_f$. Para os distintos valores de $r \in \mathbb{R}$, xorden naturalmente as seguintes cuestións:

1. Os puntos fixos de $f(x, r)$ son L.A.S. ou inestables?
2. Como se ve afectada a estabilidade cando r varía?

Para comezar a responder estas preguntas, podemos realizar un estudo da primeira derivada da función no punto fixo, pois, na Sección 2.1, vimos que o comportamento local do sistema dinámico preto dun punto fixo (x_f, r_f) queda totalmente determinado se este é hiperbólico, é dicir, se $|f'(x_f, r_f)| \neq 1$. En concreto, se $|f'(x_f, r_f)| < 1$, entón (x_f, r_f) é un atractor local e, se $|f'(x_f, r_f)| > 1$, entón (x_f, r_f) é inestable. En consecuencia, a estabilidade dun punto fixo (x_f, r_f) (ou dun punto periódico) adoita verse afectada nos puntos non hiperbólicos, é dicir, cando $|f'(x_f, r_f)| = 1$. No que vén a continuación, imos describir os cambios no comportamento a longo prazo das solucións da ecuación $x_{n+1} = f(x_n, r)$ nunha veciñanza dun punto fixo non hiperbólico. Distinguímos dous casos: $f'(x_f, r_f) = 1$ e $f'(x_f, r_f) = -1$.

A estes cambios na dinámica asintótica referirémonos como bifurcacións, sendo puntos de bifurcación aqueles nos que se producen. Para cada tipo de cambio ou bifurcación, comezamos proporcionando a descrición e continuamos cun exemplo de función que a cumpre. Ademais, no caso da bifurcación de tipo sela-nodo, deduciremos as condicións analíticas necesarias para que se produza. Nas restantes situacións poderían facerse razoamentos análogos, facendo uso do Teorema 1.12 (Teorema da función implícita).

Comezamos co caso $f'(x_f, r_f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_f, r_f) = 1$, no que poden aparecer 3 tipos de bifurcacións diferentes:

1. Bifurcación de tipo sela-nodo

Unha bifurcación de tipo sela-nodo ocorre cando dous puntos fixos coexistentes (un deles localmente asintoticamente estable e outro inestable) coliden nun único punto fixo x_f tal que $f'(x_f) = 1$ e despois desaparecen.

Exemplo 2.25. Considerando a función $(x, r) \rightarrow f(x, r) = x + r - x^2$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = 1 - 2x$, polo que $(x_f, r_f) = (0, 0)$ é un punto fixo non hiperbólico xa que $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.

Estamos interesados nos puntos fixos nunha veciñanza de $(x_f, r_f) = (0, 0)$. Sabemos que os puntos fixos son da forma $f(x, r) - x = r - x^2 = 0$, é dicir, $x_f^1 = +\sqrt{r}$, $x_f^2 = -\sqrt{r}$. Vemos que os puntos fixos existen se, e só se, $r \geq 0$, coincidindo se $r = 0$. Ademais, substituindo en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^1, r) = 1 - 2\sqrt{r} < 1, \text{ para todo } r > 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^2, r) = 1 - 2(-\sqrt{r}) = 1 + 2\sqrt{r} > 1, \text{ para todo } r > 0.$$

En consecuencia, para $r > 0$ suficientemente pequeno, x_f^1 é un atractor local e x_f^2 é inestable. Deste xeito, acabamos de comprobar que existe unha bifurcación de tipo sela-nodo en $(x_f, r_f) = (0, 0)$, como se representa na Figura 2.7.

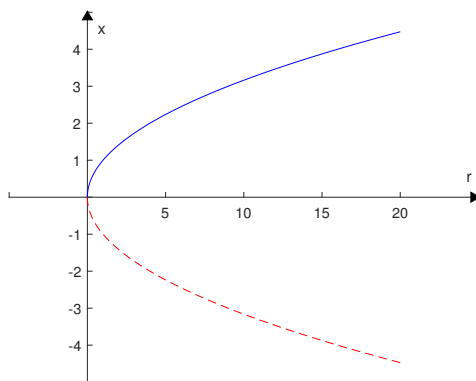


Figura 2.7: Ilustración da bifurcación de tipo sela-nodo para $f(x, r) = x + r - x^2$, en vermello represéntanse os puntos fixos inestables ($x_f = -\sqrt{r}$ para $r > 0$) e, en azul, os localmente asintoticamente estables ($x_f = +\sqrt{r}$ para $r > 0$).

Para rematar, vexamos as condicións analíticas para que se dea unha bifurcación de tipo sela-nodo.

Teorema 2.26. *Sexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, r) \mapsto f(x, r)$ unha función en $C^2(\mathbb{R}^2)$. Existe unha bifurcación de tipo sela-nodo no punto fixo $(x_f, r_f) = (0, 0)$ se f cumpre as seguintes condicións:*

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0. \quad (2.9)$$

Coas condicións de (2.9), pode ocorrer que

$$\frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial r}(0,0)} > 0 \quad (2.10)$$

ou que

$$\frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial r}(0,0)} < 0. \quad (2.11)$$

En cada un destes casos debe cumprirse algunha das seguintes condicións adicionais para $r > 0$ ou $r < 0$, respectivamente:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| < 1, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| > 1, \quad x < 0 \quad (2.12)$$

ou

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| > 1, \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| < 1, \quad x < 0. \quad (2.13)$$

Demostración. Consideramos a función auxiliar $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, r) = f(x, r) - x$. Os puntos fixos da función f cumpren $h(x, r) = 0$, polo tanto, $h(0, 0) = 0$. Por outra banda, da primeira condición en (2.9), temos que

$$\frac{\partial h}{\partial r}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial r}(0,0) \neq 0$$

e o Teorema 1.12 (Teorema da función implícita) implica que unha única curva de puntos fixos de f pasa por $(x_f, r_f) = (0, 0)$; ademais, para x suficientemente pequeno, esta curva de puntos fixos pode representarse como un gráfico sobre a variable x , é dicir, existe unha función única $r(x) \in \mathcal{C}^2(-\varepsilon, \varepsilon)$, con ε suficientemente pequeno, de xeito que

$$h(x, r(x)) = f(x, r(x)) - x = 0. \quad (2.14)$$

As condicións (2.8) e (2.9) permiten xustificar que

$$\frac{\partial r}{\partial x}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0) \neq 0, \quad (2.15)$$

o que asegura a existencia de dúas curvas de puntos fixos como as da Figura 2.8. Facemos entón uso das condicións (2.8) e (2.9) para probar que se cumpre (2.15). En primeiro lugar, derivando implícitamente con respecto a x en (2.14), obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, r(x)) - 1 + \frac{\partial f}{\partial r}(x, r(x)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x) = 0, \quad (2.16)$$

que, avaliando en $x = 0$ e despexando, implica que:

$$\frac{\partial r}{\partial x}(0) = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - 1)}{\frac{\partial f}{\partial r}(0,0)} = 0.$$

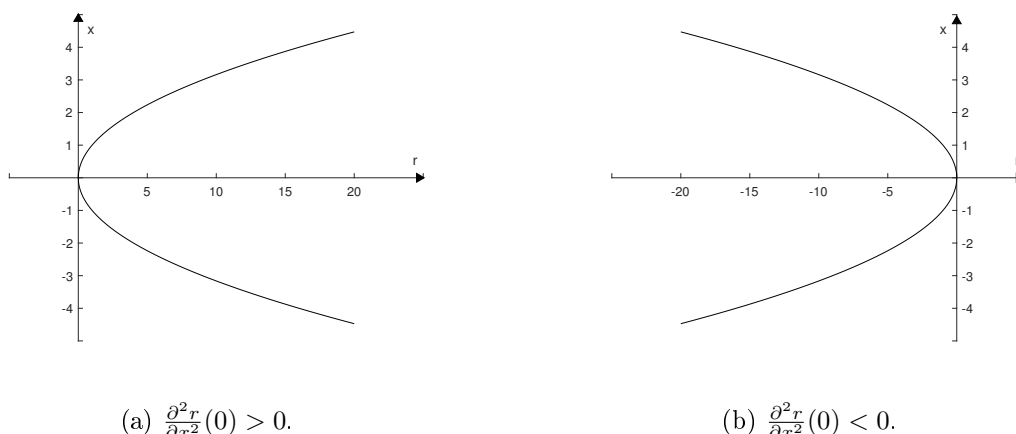


Figura 2.8: Ilustración das curvas de puntos fixos $r(x)$, para x suficientemente pequeno, que verifican: $r(0) = 0$, $\frac{\partial r}{\partial x}(0) = 0$ e $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0) \neq 0$.

En segundo lugar, derivando implicitamente con respecto a x en (2.16) tense:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, r(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x, r(x)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x}(x, r(x)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x) \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(x, r(x)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x}(x) \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}(x, r(x)) \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x) = 0, \end{aligned}$$

que, avaliando en $x = 0$ e usando que $\frac{\partial r}{\partial x}(0) = 0$, permite deducir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial r}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0) = 0$$

e, despxando, obtense:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial r}(0, 0)} \neq 0.$$

Unha vez probado que as curvas de puntos fixos son da forma representada na Figura 2.8, é claro que as condicións (2.12) ou (2.13) implican os requirimentos de estabilidade da bifurcación de tipo sela-nodo. \square

2. Bifurcación transcítica

Unha bifurcación transcítica ocorre cando dous puntos fixos coexistentes (un deles localmente asintoticamente estable e outro inestable) coliden nun único punto fixo x_f tal que $f'(x_f) = 1$ e despois intercambian a súa estabilidade.

Exemplo 2.27. Considerando a función $(x, r) \rightarrow f(x, r) = x + rx - x^2$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = 1 + r - 2x$, polo que é fácil verificar que $(x_f, r_f) = (0, 0)$ é un punto fixo non hiperbólico xa que $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.

Estamos interesados nos puntos fixos nunha veciñanza de $(x_f, r_f) = (0, 0)$. Sabemos que

os puntos fixos son da forma $f(x, r) - x = rx - x^2 = 0$, é dicir, $x_f^1 = 0, x_f^2 = r$. Vemos que os puntos fixos existen para todo $r \in \mathbb{R}$, coincidindo se $r = 0$. Ademais, substituíndo en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^1, r) = 1 + r \begin{cases} < 1 \text{ se } r < 0, \\ > 1 \text{ se } r > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^2, r) = 1 - r \begin{cases} < 1 \text{ se } r > 0, \\ > 1 \text{ se } r < 0. \end{cases}$$

En consecuencia, para $r > 0$ suficientemente pequeno, x_f^1 é inestable e x_f^2 é un atractor local. Porén, para $r < 0$ suficientemente pequeno, x_f^1 é un atractor local e x_f^2 é inestable. Así, acabamos de comprobar que existe unha bifurcación transcítica en $(x_f, r_f) = (0, 0)$, representada na Figura 2.9.

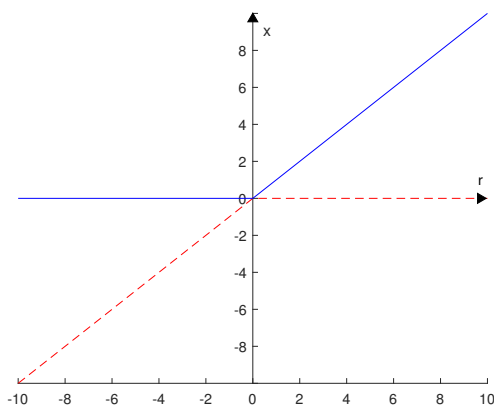


Figura 2.9: Ilustración da bifurcación transcítica para $f(x, r) = x + rx - x^2$. En vermello, represéntase os puntos fixos inestables ($x_f = r$ para $r < 0$ e $x_f = 0$ para $r > 0$) e, en azul, os localmente asintoticamente estables ($x_f = 0$ para $r < 0$ e $x_f = r$ para $r > 0$).

3. Bifurcación de tipo pitchfork

Unha bifurcación de tipo pitchfork ocorre cando tres ramas de puntos fixos coliden nun punto fixo x_f tal que $f'(x_f) = 1$ e entón só queda unha. No caso supercrítico, dous puntos fixos L.A.S. chocan cun punto fixo inestable e o punto fixo resultante é L.A.S. No caso subcrítico, dous puntos fixos inestables chocan cun punto fixo L.A.S. e o punto fixo resultante é inestable.

Exemplo 2.28. Considerando a función $(x, r) \rightarrow f(x, r) = x + rx - x^3$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = 1 + r - 3x^2$, polo que é fácil verificar que $(x_f, r_f) = (0, 0)$ é un punto fixo non hiperbólico xa que $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.

Estamos interesados nos puntos fixos nunha veciñanza de $(x_f, r_f) = (0, 0)$. Sabemos que os puntos fixos son da forma $f(x, r) - x = rx - x^3 = 0$, é dicir, $x_f^1 = 0$, $x_f^2 = +\sqrt{r}$, $x_f^3 = -\sqrt{r}$. Vemos que os puntos fixos existen se, e só se, $r \in \mathbb{R}$ para x_f^1 e $r > 0$ para x_f^2 e x_f^3 , coincidindo se $r = 0$. Ademais, substituíndo en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^1, r) = 1 + r \begin{cases} < 1 \text{ se } r < 0, \\ > 1 \text{ se } r > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^2, r) = 1 + r - 3(+\sqrt{r})^2 = 1 - 2r < 1, \text{ para todo } r > 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^3, r) = 1 + r - 3(-\sqrt{r})^2 = 1 + r - 3r = 1 - 2r < 1, \text{ para todo } r > 0,$$

En consecuencia, para $r > 0$ suficientemente pequeno, x_f^1 é inestable e x_f^2, x_f^3 son atractores locais. Sen embargo, para $r < 0$ suficientemente pequeno, x_f^1 é un atractor local, como se representa na Figura 2.10.

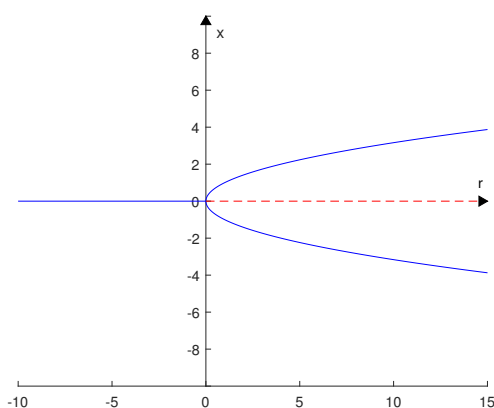


Figura 2.10: Ilustración da bifurcación pitchfork (caso supercrítico) para $f(x, r) = x + xr - x^3$. En vermello, represéntanse os puntos fixos inestables ($x_f = 0$ para $r > 0$) e, en azul, os localmente asintoticamente estables ($x_f = 0$ para $r < 0$ e $x_f = \pm\sqrt{r}$ para $r > 0$).

Consideramos agora o caso $f'(x_f, r_f) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_f, r_f) = -1$ no que só pode aparecer un tipo de bifurcación:

1. Bifurcación de dobramento de período

Unha bifurcación de dobramento de período ocorre cando un punto fixo x_f , cumprindo que $f'(x_f) = -1$, cambia a súa estabilidade e aparece unha órbita de período 2. No caso supercrítico, un punto fixo L.A.S. pasa a ser inestable e aparece unha órbita de período 2 L.A.S. No caso subcrítico, un punto fixo inestable pasa a ser L.A.S. e aparece unha órbita de período 2 inestable.

Exemplo 2.29. Considerando a función $(x, r) \rightarrow f(x, r) = -x - rx + x^3$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r) = -1 - r + 3x^2$, polo que é fácil verificar que $(x_f, r_f) = (0, 0)$ é un punto fixo non hiperbólico, xa que $f(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$.

Estamos interesados nos puntos fixos nunha veciñanza de $(x_f, r_f) = (0, 0)$. Sabemos que os puntos fixos son da forma

$$f(x, r) - x = -2x - rx + x^3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - (2 + r)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, r \in \mathbb{R}, \\ x^2 = \underbrace{(2 + r)}_{\geq 0 \Leftrightarrow r \geq -2}. \end{cases}$$

Polo tanto, os puntos fixos son $x_f^1 = 0, x_f^2 = +\sqrt{2+r}$ e $x_f^3 = -\sqrt{2+r}$. Vemos que os puntos fixos existen se, e só se, $r \in \mathbb{R}$ para $x_f^1, r \geq -2$ para x_f^2 e x_f^3 . Ademais, se $r = -2$, coinciden. Substituíndo en $\frac{\partial f}{\partial x}(x, r)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_f^1, r) = -1 - r \begin{cases} > 1, & r < -2, \\ = 1, & r = -2, \\ \in (-1, 1), & r \in (-2, 0), \\ = -1, & r = 0, \\ < -1, & r > 0. \end{cases}$$

En consecuencia, para $r \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, x_f^1 é inestable, e para $r \in (-2, 0)$, x_f^1 é un atractor local.

De xeito análogo, poderíamos estudar a estabilidade dos puntos fixos x_f^2 e x_f^3 , pero estes non son do noso interese neste momento, pois en conxunto con x_f^1 forman unha bifurcación de tipo pitchfork para $r = 2$, que xa foi estudada anteriormente.

Centrámonos entón no que ocorre preto do punto fixo non hiperbólico $(x_f, r_f) = (0, 0)$. Como queremos probar a existencia dun dobramento de período, calculamos as órbitas de período 2 ou puntos fixos de f^2 :

$$\begin{aligned} f^2(x, r) &= f(f(x, r), r) = -f(x, r) - rf(x, r) + (f(x, r))^3 \\ &= -(-x - rx + x^3) - r(-x - rx + x^3) + (-x - rx + x^3)^3 \\ &= -(1 + r)(-x - rx + x^3) + (-x - rx + x^3)^3. \end{aligned}$$

Utilizamos MATLAB para resolver $f^2(x, r) = x$, obtendo diversas expresións, entre as que nos interesan $x = +\sqrt{r}$ e $x = -\sqrt{r}$.

Estudamos agora a estabilidade destes puntos fixos de f^2 , que nos indica a estabilidade da órbita de período 2 correspondente. Facendo de novo uso de MATLAB, chegamos á seguinte expresión simplificada:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(\pm\sqrt{r}, r) = (1 - 2r)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2r < 1 \Leftrightarrow -2 < -2r < 0 \Leftrightarrow 1 > r > 0.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial f^2}{\partial x}(\pm\sqrt{r}, r) = (1 - 2r)^2 \in [0, 1), \forall r \in (0, 1).$$

Polo tanto, a órbita de período 2 é L.A.S. para $r > 0$ suficientemente próximo a 0. Con isto, concluímos que existe unha bifurcación de dobramento de período en $(x_f, r_f) = (0, 0)$.

Véxase a Figura 2.11.

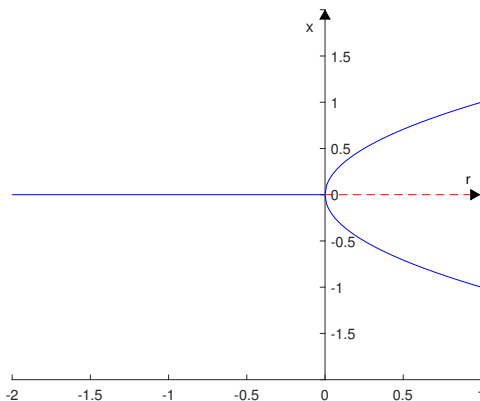


Figura 2.11: Ilustración da bifurcación de dobramento de período (caso supercrítico) para $f(x, r) = -x - rx + x^3$. En vermello, represéntanse os puntos fixos inestables ($x_f = 0$ para $r > 0$), en azul, os localmente asintoticamente estables ($x_f = 0$ para $r < 0$ e a órbita de período 2, $x_f = \pm\sqrt{r}$ para $r > 0$).

Capítulo 3

Aplicacións a modelos biolóxicos

Neste capítulo, centrámonos en estudar modelos de tipo Reprodutores-Recrutas, focalizando nos modelos de Beverton-Holt e Ricker. Primeiro, deducimos con detalle a expresión de cada modelo. Despois, estudamos os seus puntos fixos, interesándonos só os non negativos e facemos unha análise da estabilidade nestes puntos. No caso do modelo de Ricker, usamos dous métodos distintos para chegar á mesma conclusión da estabilidade global. Por último, estudamos e representamos as bifurcacións destes modelos.

3.1. Descrición dalgúns modelos clásicos

Os contidos desta sección atópanse en [13]. Traballamos con modelos de tipo Reprodutores-Recrutas (ou *Spawning-Recruitment*, en inglés). Estes modelos consideran poboacións que seguen o seguinte esquema reprodutivo:

$$\text{Ovos} \longrightarrow \text{Larvas} \longrightarrow \text{Xjuvenís} \longrightarrow \text{Recrutas} \longrightarrow \text{Reprodutores} \longrightarrow \text{Ovos} \longrightarrow \dots$$

No modelo máis simple, a abundancia en cada etapa suponse proporcional á da etapa anterior, así:

- $N_0 = \hat{f}S$, onde N_0 é a produción de ovos, \hat{f} é o promedio da fecundidade neta da poboación e S é a poboación reprodutora.
- $R = lN_0$, onde R é o número de recrutas e l é a supervivencia temperá dende a fase ovo ata a de recruta.

Substituíndo a primeira ecuación na segunda, quedamos:

$$R = \alpha S, \tag{3.1}$$

sendo $\alpha = l\hat{f}$ o parámetro de produtividade (número de recrutas aos que dá lugar cada reprodutor).

Baixo as condicións previamente mencionadas, temos que a relación $R/S = \alpha$ é independente da densidade da poboación. Isto fai que o modelo non sexa realista, xa que o número de recrutas (R) aumenta sen límite en función da poboación reprodutora (S).

Se, nalguna das etapas do esquema reprodutivo, hai efectos que dependen da densidade, entón o modelo sinxelo (3.1) non é válido. A continuación, imos deducir os modelos clásicos de Beverton-Holt e Ricker. Ambos modelos seguen considerando que o número de ovos é proporcional ao número de reprodutores ($N_0 = \hat{f}S$), pero establecen unha relación de dependencia no transcurso de ovo a recruta. Esta relación de dependencia virá determinada por unha ecuación diferencial do tipo:

$$\frac{dN}{dt} = -Z_t N, \quad N(0) = N_0, \quad (3.2)$$

onde $N(0) = N_0$ é o número de ovos, Z_t é a mortandade no tempo de vida t e $t = T$ é a idade na que os individuos da poboación $N(t)$ se convierten en recrutas ($R = N(T)$).

3.1.1. Modelo de Beverton-Holt

Supoñamos que Z_t ten tanto efectos dependentes como independentes da densidade:

$$Z_t = a_1 + b_1 N. \quad (3.3)$$

Substituíndo Z_t na ecuación (3.2), queda:

$$\frac{dN}{dt} = -(a_1 + b_1 N)N. \quad (3.4)$$

Isto suxire que a poboación xoven antes do recrutamento se inhibe pola competencia de comida e espazo.

A solución desta ecuación obtense mediante o método de variables separadas, así, para cada t , temos:

$$N(t) = \frac{N_0}{e^{a_1 t} - \frac{b_1}{a_1} N_0 + \frac{b_1}{a_1} N_0 e^{a_1 t}}. \quad (3.5)$$

Facendo uso de que $N_0 = \hat{f}S$ e de que T é a idade de recrutamento, tense:

$$R \equiv N(T) = \frac{S}{\frac{e^{a_1 T}}{\hat{f}} + \frac{b_1}{a_1} (e^{a_1 T} - 1)S} = \frac{\alpha S}{1 + \beta S}, \quad (3.6)$$

onde $\alpha = \hat{f}e^{-a_1 T}$ e $\beta = \frac{\hat{f}b_1(1-e^{-a_1 T})}{a_1}$, sendo α o parámetro de produtividade e β o parámetro que controla o nivel de dependencia da densidade.

Se consideramos a función $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida mediante $x \mapsto \tilde{f}(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$, temos o sistema dinámico discreto unidimensional de Beverton-Holt dado por:

$$w_{n+1} = \tilde{f}(w_n) = \frac{\alpha w_n}{1 + \beta w_n}. \quad (3.7)$$

Esta relación vén dada por unha función \tilde{f} , dependente dos reprodutores S e estritamente crecente e, ademais, cando S tende a infinito, $\tilde{f}(S)$ achégase á asíntota

$$R = \frac{\alpha}{\beta},$$

que podemos interpretar como o número máximo de recrutas. Polo tanto, o efecto da dependencia da densidade na etapa temperá de vida é producir efecto limitante sobre o recrutamento a medida que aumenta a poboación reproductora.

Cabe mencionar que non é necesario que a dependencia da densidade opere durante todas as primeiras etapas da historia de vida antes do recrutamento. Se a dependencia da densidade opera en calquera período de tempo e a relación entre outras etapas é independente da densidade, entón o modelo segue sendo válido.

Para facilitar o estudo do modelo de Beverton-Holt establecido en (3.7), imos reescribilo en función dun único parámetro $r > 1$.

Utilizando o cambio de variable $x_n = \beta w_n$, quedanos $x_{n+1} = \frac{r x_n}{1 + x_n}$, onde $r = \alpha$. Polo tanto, escribimos o modelo como segue:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{r x_n}{1 + x_n}. \quad (3.8)$$

Por tanto, pódese considerar $f(x) = \frac{rx}{1+x}$. Esta función está representada para $r = 2$ na Figura 2.1a.

3.1.2. Modelo de Ricker

Supoñamos que Z_t ten tanto efectos dependentes como independentes da densidade:

$$Z_t = (a_2 + b_2 S)N. \quad (3.9)$$

Polo tanto, substituindo Z_t na ecuación (3.2), queda:

$$\frac{dN}{dt} = -(a_2 + b_2 S)N. \quad (3.10)$$

Isto suxire que a poboación xoven antes do recrutamento se inhibe polo canibalismo.

A solución desta ecuación obtense mediante o método de variables separadas, así, para cada t , temos:

$$N(t) = N_0 e^{-(a_2 + b_2 S)t}. \quad (3.11)$$

Facendo uso de que $N_0 = \hat{f}S$ e que T é a idade de recrutamento, tense:

$$R \equiv N(T) = (\hat{f}e^{-a_2T})Se^{-b_2TS}$$

ou

$$R = \alpha Se^{-\beta S}, \quad (3.12)$$

sendo $\alpha = \hat{f}e^{-a_2T}$ o parámetro de produtividade e $\beta = b_2T$ o parámetro que controla o nivel de dependencia da densidade.

Se consideramos a función $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida mediante $x \mapsto \tilde{f}(x) = \alpha xe^{-\beta x}$, temos o **sistema dinámico discreto unidimensional de Ricker**, dado por:

$$w_{n+1} = \tilde{f}(w_n) = \alpha w_n e^{-\beta w_n}. \quad (3.13)$$

Esta relación ten forma de cúpula en función dos reprodutores, cun máximo en $(S, R) = (\frac{\alpha}{\beta e}, \frac{1}{\beta})$. Tamén sucede que, cando S tende a ∞ , R se aproxima a 0. Polo tanto, o efecto dunha influencia negativa dos reprodutores nas primeiras etapas de vida, mediante canibalismo, é producir un efecto cada vez máis prexudicial sobre o recrutamento a medida que aumenta a poboación reprodutora.

De xeito similar ao mencionado para o modelo de Beverton-Holt, o modelo de Ricker segue sendo válido se o efecto de mortandade non afecta a todas as etapas temperás da historia da vida ata o recrutamento e a relación entre as restantes etapas non depende da densidade.

Como se fixo co modelo de Beverton-Holt, o modelo de Ricker establecido en (3.13) pode ser reescrito en función dun só parámetro $r > 0$.

Utilizando o cambio de variable $z_n = \beta w_n$, obtemos $z_{n+1} = \alpha z_n e^{-z_n}$. Agora, utilizando $\alpha = e^r$ con $r > 0$, quedáanos $z_{n+1} = z_n e^{r-z_n}$. Se, finalmente, empregamos o cambio de variable $x_n = \frac{z_n}{r}$, chegamos a $x_{n+1} = y_n e^{r(1-x_n)}$. Reescribimos o modelo como segue:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n e^{r(1-x_n)}. \quad (3.14)$$

Polo tanto, pódese considerar $f(x) = xe^{r(1-x)}$. Esta función está representada para $r = 1,5$ na Figura 2.1b.

3.2. Existencia de puntos fixos

Imos analizar a existencia de puntos fixos non negativos para as funcións que definen ambos modelos.

3.2.1. Modelo de Beverton-Holt

Consideramos o modelo de Beverton-Holt (3.8), dado pola función $f(x) = \frac{rx}{1+x}$, $x \in [0, \infty)$, onde $r > 0$. Calculamos os puntos fixos a través da definición, é dicir, os puntos $x \in [0, \infty)$ tales que $f(x) = x$:

$$\frac{rx}{1+x} = x \Leftrightarrow rx = (1+x)x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ r = 1+x, \end{cases} \quad (3.15)$$

quedando $x = 0$ ou $x = r - 1$. Polo tanto, para que existan puntos fixos non negativos, necesariamente debemos considerar $r > 1$.

3.2.2. Modelo de Ricker

Consideramos o modelo de Ricker (3.14), dado pola función $f(x) = xe^{r(1-x)}$, $x \in [0, \infty)$, onde $r > 0$. Calculamos os puntos fixos de f , é dicir, os puntos $x \in [0, \infty)$ tales que $f(x) = x$:

$$xe^{r(1-x)} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{r(1-x)} = 1 \Leftrightarrow x = 1, \end{cases} \quad (3.16)$$

isto é, $x = 0$ ou $x = 1$. Neste caso, para todo $r > 0$ existe un único punto fixo positivo $x = 1$ que non depende do parámetro.

3.3. Análise da estabilidade dos puntos de equilibrio

Veremos a estabilidade asintótica local e global dos puntos fixos non negativos para as funcións que definen os modelos anteriores.

3.3.1. Modelo de Beverton-Holt

Para o modelo de Beverton-Holt, estudamos a estabilidade local e global:

- Estabilidade local:

Como $f'(x) = \frac{r}{(1+x)^2}$, $x \in [0, \infty)$ e $r > 1$, $|f'(0)| = r > 1$, polo tanto, $x = 0$ é inestable en virtude do Teorema 2.9 e, como $|f'(r-1)| = \frac{1}{r} \in (0, 1)$, entón $x = r - 1$ é asintoticamente estable polo Teorema 2.7.

- Estabilidade global:

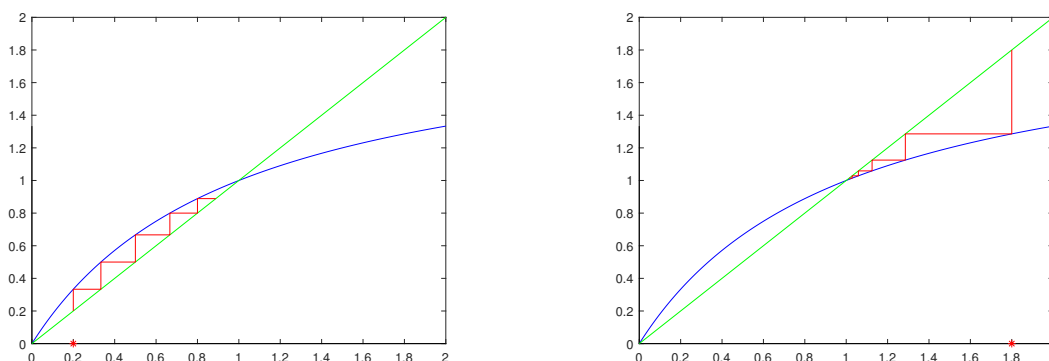
Como $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto f(x) = \frac{rx}{1+x}$ é unha función continua tal que $f(0) = 0$,

$x = r - 1$ é o único punto fixo positivo e cumpre que $x < f(x) < r - 1$ en $(0, r - 1)$ e $x > f(x) > r - 1$ en $(r - 1, \infty)$, entón $r - 1$ é un atractor global en $(0, \infty)$, en virtude do Teorema 2.13. Este resultado de estabilidade global aparece ilustrado na Figura 3.1.

En efecto, para $x > 0$, comprobamos as condicións descritas anteriormente.

Por unha banda, consideramos o caso $x \in (0, r - 1)$. En primeiro lugar, $f(x) = \frac{rx}{1+x} > x$ equivale a $x < r - 1$. En segundo lugar, como f é estritamente crecente, xa que $f'(x) > 0$, e $r - 1$ é punto fixo, temos que $f(x) < f(r - 1) = r - 1$. Polo tanto, $x < f(x) < r - 1$ para todo $x \in (0, r - 1)$.

Por outra banda, consideramos o caso $x \in (r - 1, \infty)$. En primeiro lugar, $f(x) = \frac{rx}{1+x} < x$ equivale a $x > r - 1$. En segundo lugar, como f é estritamente crecente, xa que $f'(x) > 0$, e $r - 1$ é punto fixo, temos que $r - 1 = f(r - 1) < f(x)$. Polo tanto, $r - 1 < f(x) < x$ para todo $x \in (r - 1, \infty)$.



(a) Convergencia pola esquerda, $x_0 = 0,2 \in (0, 1)$. (b) Convergencia pola dereita, $x_0 = 1,8 \in (1, \infty)$.

Figura 3.1: Ilustración da estabilidade global en $(0, \infty)$ do punto fixo positivo $x = 1$ do modelo de Beverton-Holt dado por $f(x) = \frac{rx}{1+x}$, $x \in [0, 2]$, con $r = 2$ (curva azul). A recta verde representa á función identidade e, en vermello, ilústranse as iteracións do diagrama Cobweb para dúas condicións iniciais distintas $x_0 \in (0, \infty)$.

3.3.2. Modelo de Ricker

Analogamente, para o modelo de Ricker, estudamos a estabilidade local e global:

- Estabilidade local:

Da mesma forma que fixemos para o modelo de Beverton-Holt, utilizaremos o Teorema 2.7 e o Teorema 2.9.

Como $f'(x) = (1 - rx)e^{r(1-x)}$, $x \in [0, \infty)$, $r > 0$, entón $|f'(0)| = e^r > 1$, polo que $x = 0$ é inestable e $|f'(1)| = |1 - r|$. Se $|f'(1)| > 1$, é dicir, se $r > 2$, temos que $x = 1$ é inestable. Por outra banda, se $|f'(1)| < 1$, é dicir, se $r \in (0, 2)$, entón $x = 1$ é asintoticamente estable. No caso $|f'(1)| = 1$, que se corresponde con $r = 2$, o criterio non decide. Este resultado aparece ilustrado na Figura 3.2, onde a gráfica 3.2a representa o caso asintoticamente estable e a gráfica 3.2b o caso inestable.

■ Estabilidade global:

Estudemos a estabilidade global para o modelo de Ricker de dúas formas distintas, nunha utilizaremos o Teorema 2.15, onde non se incluíría $r = 2$ e, para a outra forma, usaremos o Teorema 2.24, onde si se incluíría $r = 2$.

Método 1: Xustificación mediante o Teorema 2.15 ou método envolvente.

A función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto f(x) = xe^{r(1-x)}$ con $r > 0$, é unha función continua e $x = 1$ é o único punto fixo positivo de f , con $f(x) > x$ en $(0, 1)$, $f(x) < x$ en $(1, \infty)$ e $f(x) > 0$ en $(0, \infty)$. En efecto, para $x > 0$, $f(x) = xe^{r(1-x)} < x$ se, e só se, $x > 1$. De xeito similar, tense que para $x > 0$, $f(x) = xe^{r(1-x)} > x$ se, e só se, $x < 1$. Ademais, para $x > 0$, como $e^y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, tense que $f(x) > 0$.

Entón pódese tomar $\phi(x) = 2 - x$, que é monótona decrecente (xa que $\phi'(x) = -1$), con $\phi^2(x) = x$ e ϕ positiva no intervalo $(0, x_-) = (0, 2)$. Ademais, verifica que $\phi(x) > f(x)$ en $(0, 1)$ e que $\phi(x) < f(x)$ en $(1, \infty)$. Polo tanto, quedaría probado que $x_f = 1$ é un atractor global en $(0, \infty)$, en virtude do Teorema 2.15.

Comprobemos estas dúas últimas desigualdades entre f e ϕ . En primeiro lugar, temos que f e ϕ son continuas, $\phi(0) = 2 > 0 = f(0)$, $\phi(1) = f(1) = 1$, $\phi'(x) = -1$ e, por último, $f'(x) = (1 - rx)e^{r(1-x)}$ para todo $x \in [0, \infty)$. Interésanos estudar a pendente da función f , para isto calculamos

$$f''(x) = -2re^{r(1-x)} + r^2xe^{r(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{r}.$$

Así, a mínima pendente de f acádase para $x = \frac{2}{r}$ e vale $f'(\frac{2}{r}) = -e^{r-2}$. Polo tanto, temos que

$$f' \left(\frac{2}{r} \right) > -1 \Leftrightarrow e^{r-2} < 1 \Leftrightarrow r - 2 < \log(1) = 0 \Leftrightarrow r < 2,$$

ademais, $f'(\frac{2}{r}) = -1$ se, e só se, $r = 2$. En consecuencia, podemos afirmar que, se $0 < r < 2$, entón $f(x) < \phi(x)$ para todo $x \in (0, 1)$ e $f(x) > \phi(x)$ para todo $x \in (1, \infty)$.

Método 2: Estudo baseado no Teorema 2.24 para funcións con derivada Schwarziana negativa.

Comezamos estudando a existencia de puntos críticos de f . Como

$$f'(x) = (1 - rx)(e^{r(1-x)}) = 0 \Leftrightarrow 1 - rx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{r},$$

vemos que f só ten un único punto crítico $x_c = \frac{1}{r}$. Ademais, a función de Ricker cumpre que $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ en $(0, \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Comprobemos esta última propiedade tendo en conta que $r > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{r(1-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{r(1-x)}}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{r e^{r(x-1)}} = 0.$$

Traballamos agora coas condicións sobre a primeira derivada, é dicir, $f'(x) > 0$ en $(0, x_c)$ e $f'(x) < 0$ en (x_c, ∞) :

$$f'(x) = (1 - rx) \underbrace{e^{r(1-x)}}_{>0} > 0 \Leftrightarrow 1 - rx > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{r},$$

polo tanto, $f'(x) > 0$ en $(0, x_c) = (0, \frac{1}{r})$ e, ademais,

$$f'(x) = (1 - rx) \underbrace{e^{r(1-x)}}_{>0} < 0 \Leftrightarrow 1 - rx < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{r},$$

polo que $f'(x) < 0$ en $(x_c, \infty) = (\frac{1}{r}, \infty)$.

Respecto á segunda derivada, temos que $f''(x) < 0$ en $(0, x_c)$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (r^2x - 2r) \underbrace{e^{r(1-x)}}_{>0} < 0 \Leftrightarrow (r^2x - 2r) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r(rx - 2) < 0 \Leftrightarrow (rx - 2) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{r} < \frac{2}{r}$, temos que $f''(x) < 0$ en $(0, x_c) = (0, \frac{1}{r})$.

Por último, faltaría ver a hipótese da derivada Schwarziana, comprobemos que $S_f(x) < 0$ en $[0, +\infty) \setminus \{x_c\}$.

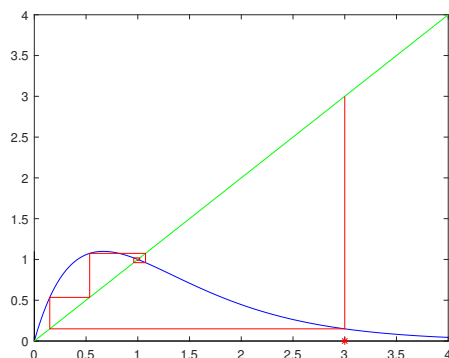
Primeiro, necesitamos calcular a derivada terceira,

$$f'''(x) = r^2 e^{r(1-x)} + (r^2x - 2r)(-r e^{r(1-x)}) = (-r^3x + 3r^2) e^{r(1-x)}.$$

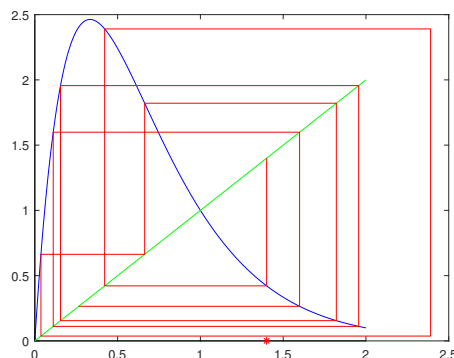
Estamos en condicións de calcular a derivada Schwarziana mediante a expresión (2.4):

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = \frac{(-r^3x + 3r^2) e^{r(1-x)}}{(1 - rx)(e^{r(1-x)})} - \frac{3}{2} \left(\frac{(r^2x - 2r) e^{r(1-x)}}{(1 - rx)(e^{r(1-x)})} \right)^2 \\ &= \frac{-r^3x + 3r^2}{1 - rx} - \frac{3}{2} \frac{(r^2x - 2r)^2}{(1 - rx)^2} = \frac{-r^3x + 3r^2}{1 - rx} - \frac{3}{2} \left(\frac{r^4x^2 - 4r^3x + 4r^2}{(1 - rx)^2} \right) \\ &= \frac{-r^3x + 3r^2}{1 - rx} - \frac{3r^4x^2 - 12r^3x + 12r^2}{2(1 - rx)^2} \\ &= \frac{2(1 - rx)(-r^3x + 3r^2) - 3r^4x^2 + 12r^3x - 12r^2}{2(1 - rx)^2} \\ &= \frac{-2r^3x + 6r^2 + 2r^4x^2 - 6r^3x - 3r^4x^2 + 12r^3x - 12r^2}{2(1 - rx)^2} \\ &= \frac{\overbrace{-6r^2 - r^4x^2 + 4r^3x}^{<0}}{\underbrace{2(1 - rx)^2}_{>0}} < 0. \end{aligned}$$

Dado que $r > 0$, como $6r^2 + r^4x^2 > 4r^3x$, temos que $-6r^2 - r^4x^2 + 4r^3x < 0$ e, polo tanto, $S_f(x) < 0$ en $[0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{r}\}$. Así, estamos en condicións de poder aplicar o Teorema 2.24 e, como $f(x)$ ten un único punto fixo en $(0, \infty)$, tal e como demostramos no método anterior, entón $x_f = 1$ é un atractor global en $(0, \infty)$ para $r \in (0, 2]$.



(a) Globalmente asintoticamente estable: $r = 1,5 \leq 2$, $x_0 = 3$.



(b) Inestable: $r = 3 > 2$, $x_0 = 1,4$.

Figura 3.2: Ilustración da estabilidade en $(0, \infty)$ do punto fixo positivo $x = 1$ do modelo de Ricker dado por $f(x) = xe^{r(1-x)}$, $x \in [0, 4]$, para distintos valores de r (curva azul). A recta verde representa á función identidade e, en vermello, ilústranse as iteracións do diagrama Cobweb para dúas condicións iniciais distintas $x_0 \in (0, \infty)$.

3.4. Diagramas de bifurcación

Un diagrama de bifurcación contén información para predicir a dinámica asintótica dun sistema, pois neste represéntase o comportamento a longo prazo das solucións. Dita dinámica pode cambiar de forma bastante drástica co cambio dos parámetros do sistema e é importante saber que estes cambios non son só cuantitativos, como, por exemplo, o cambio na localización dun punto fixo, senón tamén cualitativos, é dicir, os puntos fixos pódense crear ou destruír, a súa estabilidade pode cambiar, o comportamento do sistema pode cambiar de regular (estabilidade dun punto fixo ou órbita periódica) a irregular. A estes cambios cualitativos na dinámica do sistema denotámolos bifurcacións e os valores dos parámetros nos que se producen son os puntos de bifurcación.

Nos diagramas de bifurcación que aparecen a continuación, representamos no eixe vertical varios valores de x_n , para $n \in \mathbb{N}$ grande, fronte a varios valores do parámetro r ao longo do eixe horizontal. Unha mostra dos programas que elaboramos en MATLAB para obter ditos gráficos pode consultarse nos Programas A.13 e A.14, nestes, para cada valor de r fixado, comezamos

realizando $Npre$ iteracións a partir dunha condición inicial $x_0 = 0,5$, gardamos a última iteración e realizamos, a partir dela, outras N iteracións adicionais, que serán as que utilizemos como mostra do comportamento a longo prazo. Estes valores quedan almacenados nun vector x que se debuxa fronte ao valor correspondente de r . Traballaremos cos modelos de Beverton-Holt e Ricker.

3.4.1. Modelo de Beverton-Holt

A continuación, na Figura 3.3, móstrase a representación realizada co programa A.13 que constrúe un diagrama de bifurcación para o modelo de Beverton-Holt (3.8) co parámetro r no intervalo $(0, 5]$. Utilizamos $Npre = 200$ e $N = 100$. Como vemos na figura, cando $r \in (0, 1]$, o

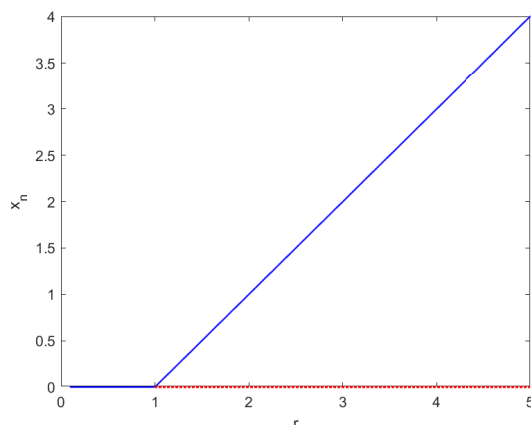


Figura 3.3: Ilustración do diagrama de bifurcación para o modelo de Beverton-Holt $f(x) = \frac{rx}{1+x}$, $x \in [0, 4]$, con $r \in (0, 5]$. A liña de puntos en vermello representa o punto fixo inestable $x_f^1 = 0$, mentres que os puntos de cor azul representan a dinámica asíntótica.

único punto fixo $x_f^1 = 0$ é localmente asíntoticamente estable, e cando $r > 1$, temos dous puntos fixos, $x_f^1 = 0$, que é inestable e $x_f^2 = r - 1$, que é globalmente asíntoticamente estable. O estudo da estabilidade no caso $r > 1$ xa foi realizado na Sección 3.3. Vexamos a estabilidade global para o punto fixo $x_f^1 = 0$ cando $r \in (0, 1]$. Como $f(0) = 0$ e $x > f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, temos que a sucesión $\{f^n(x)\}$ é monótona decrecente e acotada inferiormente, polo que usando a Proposición 1.2 podemos concluír que $x_f^1 = 0$ é atractor global en $[0, \infty)$. Probemos entón as desigualdades $x > f(x) > 0$ en $(0, \infty)$: por ser $f'(x) = \frac{r}{(1+x)^2}$ para $x \in [0, \infty)$ e $r > 0$, f é unha función estritamente crecente e, posto que $f(0) = 0$, temos que $f(x) > 0$. Como $f'(x) < 1$ para todo $r \in (0, 1]$, $x \in (0, \infty)$ e $f(0) = 0$, f está por debaixo da recta $y = x$ para $r \in (0, 1]$, entón, $f(x) < x$ en $(0, 1]$.

De todo isto, concluímos que, en $(x_f^1, r_f^1) = (0, 1)$, temos unha bifurcación de tipo pitchfork

(caso subcrítico), xa que dous puntos fixos coexistentes (un L.A.S. e outro inestable) coliden nun único punto fixo $(x_f^1, r_f^1) = (0, 1)$ tal que $f'(x_f^1, r_f^1) = f'(0, 1) = 1$ e despois só se mantén o que era L.A.S., que pasa a ser inestable. Cabe mencionar que a bifurcación non é exactamente da maneira que a describimos na Sección 2.3, pois aquí coliden dúas ramas de puntos fixos en lugar de tres.

3.4.2. Modelo de Ricker

Recollemos agora, na Figura 3.4, a representación do programa A.14, que constrúe un diagrama de bifurcación para o modelo de Ricker (3.14) co parámetro r no intervalo $(0, 4]$. Neste caso, tamén utilizamos $Npre = 200$ e $N = 100$. Para a interpretación da figura, cómpre recordar que

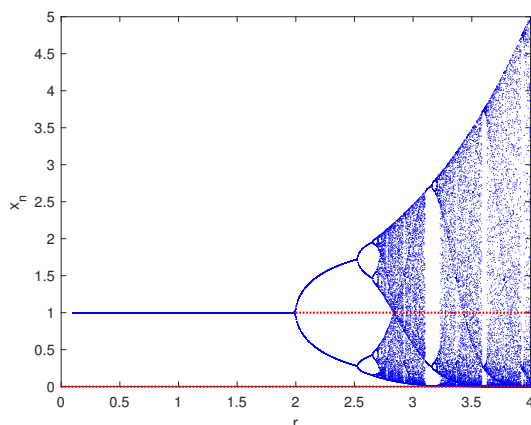


Figura 3.4: Ilustración do diagrama de bifurcación para o modelo de Ricker $f(x) = xe^{r(1-x)}$, $x \in [0, 5]$, tomando $r \in (0, 4]$. As liñas de puntos en vermello representan puntos fixos inestables, mentres que os puntos azuis representan o comportamento a longo prazo das órbitas.

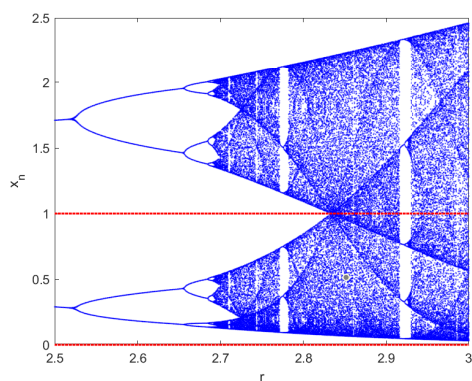
cada liña vertical contén N puntos, entón, se vemos só un pequeno número de puntos aparecendo para un valor de r fixado, significa que estes puntos son visitados repetidamente pola órbita e, polo tanto, haberá una órbita periódica L.A.S.

Con respecto á estabilidade de puntos fixos, temos que, para $r > 0$, o punto fixo $x_f^1 = 0$ é inestable, mentres que o punto fixo $x_f^2 = 1$ é localmente asintoticamente estable para $r \in (0, 2)$, pasando a ser inestable cando $r > 2$. Ademais, como vimos con anterioridade, o punto fixo $x_f^2 = 1$ é atractor global para $r \in (0, 2]$.

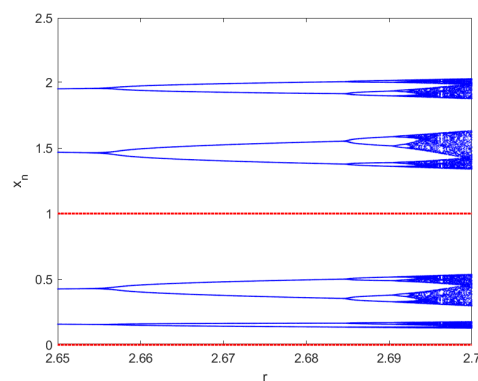
A primeira bifurcación ocorre en $(x_f^2, r_f^2) = (1, 2)$, trátase dunha bifurcación de dobramento de período, xa que o punto fixo $x_f^2 = 1$, tal que $f'(x_f^2, r) = f'(1, 2) = -1$ ($f'(x) = (1 - rx)e^{r(1-x)}$), cambia a súa estabilidade e aparece unha órbita de período 2 L.A.S. Como o punto fixo pasa de ser L.A.S. a ser inestable e a órbita de período 2 que aparece é L.A.S., estamos no caso

supercrítico.

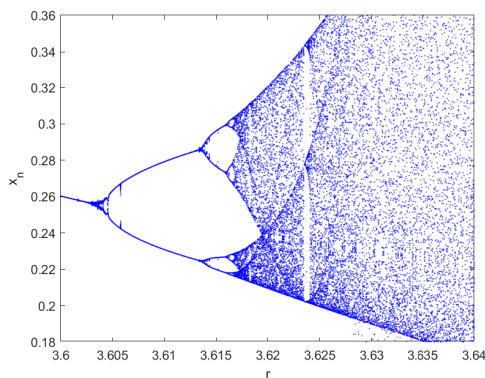
En segundo lugar, ilustramos e comentamos outros detalles do diagrama de bifurcación que se poden consultar en [6]. Nos diagramas que se presentan nas Figuras 3.4 e 3.5, podemos cotexar que, para $2 < r < 2,525$ (aprox.), as órbitas do sistema converxen a unha órbita de período 2. Aproximadamente en $r = 2,525$, hai outra bifurcación de dobramento de período, onde unha órbita de período 2 L.A.S. pasa a ser inestable e aparece unha órbita de período 4 L.A.S. De feito, unha mirada máis atenta revela que o aumento de r dá como resultado toda unha ferverza de bifurcacións que duplican os períodos que se producen cada vez máis preto unhas das outras e producen órbitas dos períodos 8, 16, 32, 64, etc., ilústramolo nas Figuras 3.5a e 3.5b. A maiores,



(a) Representación das órbitas periódicas de período 4 e 8 para $r \in [2,5, 3]$.



(b) Representación das órbitas periódicas de período 8 e 16 para $r \in [2,65, 2,7]$.



(c) Representación dun diagrama para $r \in [3,6, 3,64]$, idéntico ao diagrama completo.

Figura 3.5: Ilustración de varios diagramas de bifurcación para o modelo Ricker. As liñas de puntos en vermello representan puntos fixos inestables, mentres que os puntos azuis ilustran a dinámica asíntótica.

na Figura 3.5c, vemos unha copia case exacta de todo o diagrama. En realidade, o diagrama

contén infinitas copias deste tipo de si mesmo, pódese ver que esta autosemellanza se repite con resolucións cada vez máis finas. Tal comportamento é característico das entidades xeométricas chamadas fractais, por iso se di que o diagrama de bifurcación do modelo Ricker é un fractal.

3.5. Interpretación biológica

Nesta sección, imos facer uso dos diagramas de bifurcación para interpretar, en termos biolóxicos, o comportamento asintótico do número de individuos da especie nos modelos de Beverton-Holt e Ricker prestando especial atención á influencia dos parámetros. Antes de comezar, recordemos o que modelan cada un destes sistemas dinámicos discretos unidimensionais de tipo Reprodutores-Recrutas, pódense consultar os detalles na Sección 3.1. En ambos modelos, o número de ovos é proporcional ao número de reprodutores e, no transcurso de ovo a recruta, temos efectos independentes e dependentes da densidade que provocarán a mortandade dos individuos nas fases temperás evitando que aumente sen límite a poboación recruta. No modelo de Beverton-Holt, estes efectos dependentes da densidade serán causados pola competencia de comida e espazo, mentres que no modelo de Ricker se deben ao canibalismo. Vexamos que consecuencias teñen estas relacións entre as diferentes etapas de evolución da especie na dinámica asintótica.

3.5.1. Modelo de Beverton-Holt

Na sección 3.1, para o modelo de Beverton-Holt, chegamos a unha primeira formulación dada pola función $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida mediante $x \mapsto \tilde{f}(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$, cuxo sistema dinámico discreto unidimensional asociado dado por (3.7) é:

$$w_{n+1} = \tilde{f}(w_n) = \frac{\alpha w_n}{1 + \beta w_n},$$

no que recordamos que α é o parámetro de produtividade (número de recrutas aos que dá lugar cada reprodutor) e β é o parámetro que controla o nivel de dependencia da densidade de poboación. Para simplificar o estudo do modelo, fixemos unha reescritura deste en función dun único parámetro $r = \alpha$, mediante o cambio de variable $x_n = \beta w_n$, obtendo a formulación (3.8):

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{r x_n}{1 + x_n}.$$

A Figura 3.3 ilustra o comportamento a longo prazo deste último modelo, do que se interpreta que, para $r \in (0, 1]$, tendo calquera número positivo de reprodutores S , como 0 é atractor global, a poboación de individuos que chegan a recrutas R tende a cero e, polo tanto, a especie extingúese. Para $r > 1$ e calquera número positivo de reprodutores S , como $r - 1$ é atractor global, o número de recrutas estabilízase en $r - 1$ individuos, que aumenta con r .

Interpretemos agora o comportamento a longo prazo en función dos parámetros α e β . Como $r = \alpha$ para $\alpha \in (0, 1]$, o nivel de produtividade é baixo, prevalece sobre el a mortandade provocada pola competitividade e a especie extingúese. Para $\alpha > 1$, a produtividade supera á mortandade e, independentemente do número inicial de individuos, a especie estabilízase arredor dun número fixo que aumenta coa produtividade α . Para concluír, cómpre mencionar que o parámetro $\beta > 0$ aparece na relación $x_n = \beta w_n$ ou, equivalentemente, $w_n = \frac{1}{\beta} x_n$. Entón, fixado β , teríamos que, se a poboación dada por x_n se extingue, tamén o fai a de w_n , mentres que, se x_n se estabiliza arredor de $r - 1 = \alpha - 1 > 0$ ($\alpha > 1$), entón w_n estabiliza arredor de $\frac{\alpha-1}{\beta}$.

3.5.2. Modelo de Ricker

No caso do modelo de Ricker, a primeira formulación que obtivemos na Sección 3.1 vén dada pola función $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida mediante $x \mapsto \tilde{f}(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, á que lle corresponde o sistema dinámico discreto unidimensional dado por (3.13):

$$w_{n+1} = \tilde{f}(w_n) = \alpha w_n e^{-\beta w_n}$$

e que reescribimos facendo un par de cambios de variable, obtendo a formulación (3.14):

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n e^{r(1-x_n)}.$$

Neste caso, temos as seguintes relacións entre os parámetros e variables destes dous modelos: $\alpha = e^r$ ($r = \ln(\alpha)$) e $x_n = \frac{\beta}{\ln(\alpha)} w_n$ ou, equivalentemente, $w_n = \frac{\ln(\alpha)}{\beta} x_n$.

A ilustración da dinámica asintótica deste último modelo recóllese nas Figuras 3.4 e 3.5. Para $r \in (0, 2]$, partindo de calquera número positivo de reprodutores S , como 1 é atractor global, a poboación de recrutas estabilízase arredor de $R = 1$. Para $r > 2$, próximo a 2, para calquera número positivo de reprodutores S , como hai unha órbita de período 2 atractora, temos que o número de individuos se estabiliza oscilando preto dos dous valores da órbita periódica. Por último, para $r > 3$, aparece unha situación inestable na que resulta complicado predicir o número de recrutas que teremos nun determinado momento.

Concluimos coa interpretación da dinámica asintótica en función dos parámetros α e β . Como $r = \ln(\alpha)$ e a función exponencial é estritamente crecente, para $r \in (0, 2]$,

$$0 < \ln(\alpha) \leq 2 \Leftrightarrow 1 < \alpha \leq e^2,$$

mentres que, se $r > 2$ ($r > 3$),

$$\ln(\alpha) > 2 (> 3) \Leftrightarrow \alpha > e^2 (> e^3).$$

Para todos estes casos temos que 0 é inestable, polo que deducimos que a produtividade supera á mortandade (parte dela provocada polo canibalismo) en todo momento, eliminando a posibilidade

de extinción da poboación. Porén, a medida que α se incrementa, aumentan as oscilacións no número de individuos, chegando a ser moi inestables e próximas a cero para $\alpha > e^3$, situación indesexable, posto que unha pequena influencia dun factor externo podería levar á poboación á extinción.

De novo, o parámetro $\beta > 0$ aparece unicamente na relación entre tamaños de poboación, neste caso, $w_n = \frac{\ln(\alpha)}{\beta} x_n$. Polo tanto, de xeito similar ao que ocorre no modelo de Beverton-Holt, se a poboación x_n se achega a un ou varios valores, a de w_n achegarase a eses valores multiplicados polo factor $\frac{\ln(\alpha)}{\beta}$.

Anexo A

Código de MATLAB

Neste apartado, xuntamos todos os códigos de MATLAB que se necesitaron, por orde, para a realización do traballo. Nunha primeira sección, recollemos o código para representar funcións, na seguinte sección, o correspondente á representación de diagramas Cobweb (consultado en [9]) e, na última, as que teñen que ver cos diagramas de bifurcacións, onde rematamos traballando cos modelos de Beverton-Holt e Ricker (consultado en [6]).

A.1. Representación dos modelos

Programa A.1: Código representación de funcións (representarsi.m)

```
1 % Funcion para representar funciones
2 function representarsi(f,xmin,xmax)
3 % f e o nome da funcion, xmin e xmax dan o rango de valores de x que
   se van representar
4
5 hold on % conserva as representacions nos eixes actuais para que as
   novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
   existentes
6
7 dx=(xmax-xmin)/1000; % diferenza dividido por mil, sera o paso
8 x=xmin:dx:xmax; % crea o vector x dende xmin ata xmax con paso dx, e
   dicir, a diferenza entre un valor e o anterior e dx
9
10 y=feval(f,x); % avaliamos a funcion f para cada valor de x, obtendo
   o vector y
```

```

11
12 plot(x,y,'b') % representamos a funcion en cor azul

```

Programa A.2: Código representación de funcións coa identidade (representarci.m)

```

1 % Funcion para representar funcions coa identidade
2 function representarci(f,xmin,xmax,l)
3 % f e o nome da funcion, xmin e xmax dan o rango de valores de x que
  se van representar e l a cor
4
5 hold on % conserva as representacions nos eixes actuais para que as
  novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
  existentes
6 dx=(xmax-xmin)/1000; % diferenza dividido por mil, sera o paso
7 x=xmin:dx:xmax; % crea o vector x dende xmin ata xmax con paso dx, e
  dicir, a diferenza entre un valor e o anterior e dx
8
9 y=feval(f,x); % avaliamos a funcion f para cada valor de x, obtendo
  o vector y
10
11 plot(x,y,l,[xmin xmax],[xmin xmax],'g') % a funcion f en cor l e a
  funcion identidade y=x en cor verde

```

Programa A.3: Código representación dos modelos (chamadas.m)

```

1 % Representacions graficas
2 clc,clear;
3 % Representacion Beverton-Holt (r=2)
4 BevertonHolt2=@(x) 2.*x./(1.+x);
5 representarsi(BevertonHolt2,0,2);
6
7 % Representacion Ricker (r=1.5)
8 Ricker1=@(x) x.*exp(1.5*(1.-x));
9 representarsi(Ricker1,0,4,'b');
10 xlim([0 2.5]);
11 ylim([0 2.5]);

```

A.2. Diagrama Cobweb

Programa A.4: Código do diagrama Cobweb (iterates.m)

```

1 % Funcion iterates
2 function Y=iterates(f,x0,N)
3 % f e o nome da funcion, x0 e o valor inicial e N e o numero de
   iteracions
4
5 Y=[x0]; % garda en Y o valor inicial x0
6 x=x0; % garda en x o valor inicial x0
7
8 for i=1:N % crea un bucle dende 1 ata o numero de iteracions N
9
10 y=feval(f,x); % avalia x na funcion f e gardaa en y
11
12 Y=[Y y]; % crea o vector de dimension 2 (x0,f^i(x0))
13
14 x=y; % cambiamos x polo novo valor da iteracion f(x)
15 end
16
17 %E dicir, esta funcion crea os puntos (x0,f^i(x0))

```

Programa A.5: Código del diagrama Cobweb (cobweb.m)

```

1 % Funcion Cobweb
2 function cobweb(f,x0,N,xmin,xmax)
3 % f e o nome da funcion, x0 e o valor inicial, N e o numero de
   iteracions, xmin e xmax dan o rango de valores de x que se van
   representar
4
5 dx=(xmax-xmin)/1000; % diferenza dividido por mil, sera o paso
6 x=xmin:dx:xmax; % crea o vector x dende xmin ata xmax con paso dx, e
   dicir, a diferencia entre un valor e o anterior e dx
7
8 y=feval(f,x); % avaliamos a funcion f para cada valor de x, obtendo
   o vector y
9
10 plot(x,y,'b',[xmin xmax],[0 0],'k',[0 0], ...
11 [min(y)-.1*abs(min(y)) max(y)],'k',[xmin xmax],[xmin xmax],'g')

```

```

12 %debuxamos a grafica de y con respecto a x en azul , a recta dende
    xmin a xmax en y=0 en negro , a recta en x=0, dende min(y) a max(y)
    e a funcion identidade en verde
13
14 hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
    novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
    existentes
15
16 Y=iterates(f,x0,N); %chama a funcion iterates , que aplica
    repetidamente a funcion f a partir do valor inicial x0 e realiza N
    iteracions
17
18 YY(1)=Y(1); %almacena o primeiro valor da iteracion nunha nova
    variable YY=Y(1)
19
20 for i=1:N %crea un bucle dende 1 ata o numero de iteracions N
21
22 XX(2*i-1)=Y(i); %almacena nas entradas impares o noso novo valor de
    x, que denotamos por XX, cos valores do vector Y das iteracions
23
24 XX(2*i)=Y(i); %almacena as entradas pares , XX=(Y(1),Y(1),Y(2),Y(2)
    ,... ,Y(N),Y(N))
25
26 YY(2*i)=Y(i+1); %almacena nas entradas pares o noso novo valor de Y
    , que denotamos por YY, cos valores do vector Y das iteracions
27
28 YY(2*i+1)=Y(i+1); %almacena as entradas impares menos a primeira
    entrada , YY=(Y(1),Y(2),Y(2),Y(3),Y(3),... ,Y(N+1),Y(N+1))
29 end
30
31 XX(2*N+1)=Y(N+1); %faltaria por completar un valor no vector XX
    para que tenan a mesma lonxitude XX e YY, en particular , faltaria
    a entrada N+1, co ultimo valor da iteracion , XX=(Y(1),Y(1),Y(2),Y
    (2),... ,Y(N),Y(N),Y(N+1))
32
33 plot(XX,YY,'r',x0,0,'r*') %representamos XX sobre YY en cor
    vermello e no punto (x0,0) facemos unha marca cun asterisco de cor
    vermello (rectas verticais e horizontais entre f e a funcion

```

```
identidade).
```

Programa A.6: Código representación dos modelos 2 (chamadas.m)

```

1  % Representacions graficas
2  clc , clear ;
3
4  % Grafica paso a paso do diagrama de Cobweb de Ricker (r=1.5)
5  Ricker1=@(x) x.*exp(1.5*(1.-x));
6  % Paso 1
7  representarci(Ricker1,0,2.5,'b');
8  plot([2 2],[2 Ricker1(2)],'r',2,0,'r*', [2.5 0],[2.5 2.5], 'k', [2.5
9      2.5],[0 2.5], 'k')
10 % Paso 2
11 cobweb(Ricker1,2,1,0,2.5);
12 % Paso 3
13 cobweb(Ricker1,2,1,0,2.5);
14 plot([0.44626 0.44626], [0.44626 Ricker1(0.44626)], 'r')
15 % Paso 4
16 cobweb(Ricker1,2,2,0,2.5);
17
18 % Ilustracion Teorema 2.13, Ricker (r=0.5) con diagrama Cobweb con 3
19   iteracions en [0,3] cos puntos iniciais x01=0.3 e x02=1.5
20 Ricker5=@(x) x.*exp(0.5*(1.-x));
21 cobweb(Ricker5, 0.3, 8, 0, 3);
22 cobweb(Ricker5, 1.5, 3, 0, 3);
23
24 % Representacions funcion envolvente e funcion de Ricker (r=1.5) coa
25   identidade
26 Envoltura=@(x) 2-x;
27 Ricker1=@(x) x.*exp(1.5*(1.-x));
28 representarsi(Envoltura,0,2,'-r');
29 representarci(Ricker1,0,2,'-b');
30
31 % Ilustracion Teorema 2.24, Ricker (r=1.8), xc < xf con diagrama
32   Cobweb con 3 iteracions en [0,3], punto inicial x0=0.5
33 Ricker8=@(x) x.*exp(1.8.*(1.-x));
34 representar2(Ricker8,0,3,'-b');
35 ylim([0 1.5]);

```

```

32 cobweb(Ricker8,0.5,3,0,3);
33 ylim([0 1.5]);
34 % Ilustracion Teorema 2.24, Ricker (r=0.7),  $x_c > x_f$  con diagrama
    Cobweb con 3 iteracions en [0,10], punto inicial  $x_0=0.5$ 
35 Ricker7=@(x) x.*exp(0.7.*(1.-x));
36 representarci(Ricker7,0,10,'-b');
37 cobweb(Ricker7,0.5,3,0,10);
38 ylim([0 1.5]);

```

A.3. Representación de bifurcaciones

Programa A.7: Código das curvas de puntos fixos da bifurcación de tipo sela-nodo na Figura 2.8 (CurvaPtsFixos.m)

```

1 % Curva de puntos fixos nas condicions da bifurcacion de tipo sela
    nodo
2 clc, clear; % limpiar memoria da consola
3 % Para x positivos
4 hold on % conserva as representacions nos eixes actuais para que as
    novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
    existentes
5 x=0:0.01:20; % crea o vector x dende 0 ata 20 con paso 0.01, e dicir
    , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
6 Y=-sqrt(x); % curva de puntos fixos
7 plot(x,Y,'k') % represento Y sobre x en cor negra
8 ylim([-5 5]); % limito ao eixe y
9 xlim([-5 25]); % limito ao eixe x
10
11 Z=sqrt(x); % curva de puntos fixos
12 plot(x,Z,'black') % represento Z sobre x en cor negra
13 ylim([-5 5]); % limito ao eixe y
14 xlim([-5 25]); % limito ao eixe x
15 ax = gca; % aspecto dos eixes localizados na orixe, debuxando as
    frechas e etiquetando os eixes
16 ax.XAxisLocation = 'origin';
17 ax.YAxisLocation = 'origin';
18 plot(max(x+4.7), 0, '>k', 'markerfacecolor', 'k')

```

```

19 plot(0,max(Z+0.4),'^k','markerfacecolor','k')
20 xlabel('r');ylabel('x');
21
22 %Para x negativos
23 clc , clear; %limpar memoria da consola
24 hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
      novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
      existentes
25 x=-20:0.01:0; %crea o vector x dende -20 ata 0 con paso 0.01, e
      dicir , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
26 Y=-sqrt(-x); %curva de puntos fixos
27 plot(x,Y,'k') %represento Y sobre x en cor negra
28 ylim([-5 5]); %limito ao eixe y
29 xlim([-25 5]); %limito ao eixe x
30
31 Z=sqrt(-x); %curva de puntos fixos
32 plot(x,Z,'black') %represento Z sobre x en cor negra
33 ylim([-5 5]); %limito ao eixe y
34 xlim([-25 5]); %limito ao eixe x
35 ax = gca; %aspecto dos eixes localizados na orixe , debuxando as
      frechas e etiquetando os eixes
36 ax.XAxisLocation = 'origin';
37 ax.YAxisLocation = 'origin';
38 plot(4.5,0,'>k','markerfacecolor','k')
39 plot(0,4.8,'^k','markerfacecolor','k')
40 xlabel('r');ylabel('x');

```

Programa A.8: Código da representación da bifurcación de tipo sela-nodo na Figura 2.7 (BifurSN.m)

```

1 %Representacion da bifurcacion de tipo sela nodo
2 clc , clear %limpar memoria da consola
3 hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
      novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
      existentes
4 x=0:0.01:20; %crea o vector x dende 0 ata 20 con paso 0.01, e dicir
      , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
5 Y=-sqrt(x); %curva de puntos fixos
6 plot(x,Y,'-r') %represento Y sobre x en cor vermella con linea

```

```

    discontinua (inestable)
7 ylim([-5 5]); %limito ao eixe y
8 xlim([-5 25]); %limito ao eixe x
9
10 Z=sqrt(x); %curva de puntos fixos
11 plot(x,Z,'b') %represento Z sobre x en cor azul (estable)
12 ylim([-5 5]); %limito ao eixe y
13 xlim([-5 25]); %limito ao eixe x
14 ax = gca; %aspecto dos eixes localizados na orixe , debuxando as
    frechas e etiquetando os eixes
15 ax.XAxisLocation = 'origin';
16 ax.YAxisLocation = 'origin';
17 plot(max(x+4.7),0,'>k','markerfacecolor','k')
18 plot(0,max(Z+0.4),'^k','markerfacecolor','k')
19 xlabel('r');ylabel('x');

```

Programa A.9: Código da representación da bifurcación transcítica na Figura 2.9 (BifurTC.m)

```

1 %Representacion da bifurcacion transcritica
2 clc , clear; %limpar memoria da consola
3 hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
    novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
    existentes
4 x=-10:0.01:10; %crea o vector x dende -10 ata 10 con paso 0.01, e
    dicir , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
5 U=x.*(x<0); %curva de puntos fixos definida por condicions
6 plot(x,U,'-r') %represento U sobre x en cor vermella con linea
    discontinua (inestable)
7 ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
8 xlim([-10 10]); %limito ao eixe x
9
10 V=x.*(x>0); %curva de puntos fixos definida por condicions
11 plot(x,V,'b') %represento V sobre x en cor azul (estable)
12 ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
13 xlim([-10 10]); %limito ao eixe x
14 ax = gca; %aspecto do eixe y localizado na orixe , debuxando as
    frechas e etiquetando os eixes
15 ax.YAxisLocation = 'origin';
16 plot(max(x)-0.3,0,'>k','markerfacecolor','k')

```

```

17 plot(0, max(x) - 0.3, '^k', 'markerfacecolor', 'k')
18 text(max(x) - 0.4, 1, 'r', 'color', 'k');
19 ylabel('x');

```

Programa A.10: Código da representación da bifurcación de tipo pitchfork na Figura 2.10 (BifurPF.m)

```

1  % Representacion da bifurcacion de tipo pitchfork
2  clc, clear; %limpar memoria da consola
3  hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
      novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
      existentes
4  x=0:0.01:20; %crea o vector x dende 0 ata 20 con paso 0.01, e dicir
      , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
5  y=-20:0.01:0; %crea o vector y dende -20 ata 0 con paso 0.01, e
      dicir , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
6  U=sqrt(x); %curva de puntos fixos
7  plot(x,U, 'b') %represento U sobre x en cor azul (estable)
8  ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
9  xlim([-10 15]); %limito ao eixe x
10
11 V=sqrt(x); %curva de puntos fixos
12 plot(x,V, 'b') %represento V sobre x en cor azul (estable)
13 ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
14 xlim([-10 15]); %limito ao eixe x
15
16 Z=0.*x; %curva de puntos fixos
17 plot(x,Z, '—r') %represento Z sobre x en cor vermella con linea
      discontinua (inestable)
18 ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
19 xlim([-10 15]); %limito ao eixe x
20
21 T=0.*y; %curva de puntos fixos
22 plot(y,T, 'b') %represento T sobre x en cor azul (estable)
23 ylim([-10 10]); %limito ao eixe y
24 xlim([-10 15]); %limito ao eixe x
25 ax = gca; %aspecto do eixe y localizado na orixe , debuxando as
      frechas e etiquetando os eixes
26 ax.YAxisLocation = 'origin';

```

```

27 plot(15-0.3,0,'>k','markerfacecolor','k')
28 plot(0,10-0.3,'^k','markerfacecolor','k')
29 text(15-0.5,1,'r','color','k');
30 ylabel('x');

```

Programa A.11: Código da representación da bifurcación de dobramento de período na Figura 2.11 (BifurDP.m)

```

1 % Representacion da bifurcacion de dobramento de periodo
2 clc , clear; %limpar memoria da consola
3 hold on %conserva as representacions nos eixes actuais para que as
   novas representacions engadidas aos eixes non eliminen as
   existentes
4 x=0:0.01:20; %crea o vector x dende 0 ata 20 con paso 0.01, e dicir
   , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
5 y=-20:0.01:0; %crea o vector y dende -20 ata 0 con paso 0.01, e
   dicir , a diferenza entre un valor e o anterior e 0.01
6 U=sqrt(x); %curva de puntos fixos de f^2
7 plot(x,U,'b') %represento U sobre x en cor azul (estable)
8 ylim([-2 2]); %limito ao eixe y
9 xlim([-2 1]); %limito ao eixe x
10
11 V=-sqrt(x); %curva de puntos fixos de f^2
12 plot(x,V,'b') %represento V sobre x en cor azul (estable)
13 ylim([-2 2]); %limito ao eixe y
14 xlim([-2 1]); %limito ao eixe x
15
16 T=0*y; %curva de puntos fixos
17 plot(y,T,'b') %represento T sobre x en cor azul (estable)
18 ylim([-2 2]); %limito ao eixe y
19 xlim([-2 1]); %limito ao eixe x
20
21 R=0*x; %curva de puntos fixos
22 plot(x,R,'-r') %represento Z sobre x en cor vermella con linea
   discontinua (inestable)
23 ylim([-2 2]); %limito ao eixe y
24 xlim([-2 1]); %limito ao eixe x
25 ax = gca; %aspecto do eixe y localizado na orixe , debuxando as
   frechas e etiquetando os eixes

```

```

26 ax.YAxisLocation = 'origin';
27 plot(1-0.05,0, '>k', 'markerfacecolor', 'k')
28 plot(0,2-0.07, '^k', 'markerfacecolor', 'k')
29 text(1-0.1,0.18, 'r', 'color', 'k');
30 ylabel('x');

```

Programa A.12: Código representación dos modelos 3 (chamadas.m)

```

1 %Diagrama Cobweb do modelo Beverton-Holt (r=2) con 5 iteracions en
  [0,2] con 2 condicions iniciais x01=0.2 (converxe pola esquerda) e
  x02=1.8 (converxe pola dereita)
2 BevertonHolt2=@(x) 2.*x./(1.+x);
3 cobweb(BevertonHolt2, 0.2, 5, 0, 2);
4 cobweb(BevertonHolt2, 1.8, 5, 0, 2);
5
6 %Diagrama Cobweb do modelo Ricker(r1=1.5 e r2=3) con 6 e 10
  iteracions respectivamente (en [0,4] e en [0,2]) cos puntos
  iniciais x01=3 e x02=1.4
7 Ricker1=@(x) x.*exp(1.5*(1.-x));
8 cobweb(Ricker1,3,6,0,4);
9 Ricker3=@(x) x.*exp(3.*(1.-x));
10 cobweb(Ricker3,1.4,10,0,2);

```

A.3.1. Modelo de Beverton-Holt

Programa A.13: Código representación do diagrama de bifurcación do modelo de Beverton-Holt na Figura 3.3 (BHbifur.m)

```

1 %Diagrama de bifurcacion do modelo de Beverton-Holt
2 Npre = 200; N = 100; %Npre e o numero de puntos da orbita que
  queremos descartar (numero de iteracions previas), e N, o numero
  de puntos da orbita que queremos representar para cada valor do
  parametro r (numero de iteracions)
3 x = zeros(N,1); %crea unha matriz x de dimension (N x 1) con todos
  os valores 0
4
5 for r = 0.1:0.001:5.0 %crea un bucle dende r=0.1 ata 5 con paso
  0.001, todo o seguinte farase para cada valor de r

```

```

6 x(1) = 0.5; %tomamos como valor inicial 0.5, e dicir, o punto de
   inicio da orbita
7
8 for n = 1:Npre %calculamos as preiteracions pero non as almacenamos
   e substituímos o valor inicial polo novo valor do punto da orbita
   do modelo de Beverton–Holt, enton x cambiaria a súa primeira
   columna da seguinte forma, x=(f^(Npre)(x(1)),0,...,0) onde agora x
   (1)= f^(Npre)(x(1))
9 x(1) = r*x(1)/(1 + x(1));
10 end
11
12 for n = 1:N-1 %calculamos as iteracions a partir do punto da orbita
   calculado no bucle anterior, e dicir, creamos o vector columna x
   =(x(1),f(x(1)),...,f^N(x(1)))
13 x(n+1) = r*x(n)/(1 + x(n));
14 end
15
16 plot(r*ones(N,1),x,'.b','markersize',2) %creamos o vector columna
   de todos os valores r, para que tena a mesma lonxitude que o
   vector columna x, e representase os puntos de x sobre os puntos de
   r de cor azul, representamos mediante puntos e reducimos o tamaño
   destes para que non se superponan
17 hold on; %usamolo para reter todos os puntos representados mentres
   trazamos orbitas para os valores posteriores do parametro r
18 end %todo isto para cada valor de r ata que remate o bucle
19 xlabel('r');ylabel('x_n'); %anade etiquetas aos eixes
20 set(gca,'xlim',[0 5.0]); %facemos zoom nos parametros de r en [0,5]
21 plot([1 5],[0 0],':r','LineWidth',1.5); %represento cunha recta de
   puntos vermellos (y=0 e x en [1,5]) a inestabilidade de Beverton
   Holt e aumento o seu tamaño
22 hold off; %deixamos de reter

```

A.3.2. Modelo de Ricker

Programa A.14: Código da función do diagrama de bifurcación do modelo de Ricker na Figura 3.5 (bifRickerdiag.m)

```

1 %Funcion diagrama de bifurcacion do modelo de Ricker con zoom

```

```

2 function bifRickerdiag(Npre, N, r0, rf, rN)
3 x = zeros(N,1); %crea unha matriz x de dimension (N x 1) con todos
   os valores 0
4 dr = (rf-r0)/rN;
5 for r = r0:dr:rf %crea un bucle dende r=r0 ata rf con paso dr, todo
   o seguinte farase para cada valor de r
6 x(1) = 0.5; %tomamos como valor inicial 0.5, e dicir, o punto de
   inicio da orbita
7
8 for n = 1:Npre %calculamos as preiteracions pero non as almacenamos
   e substituímos o valor inicial polo novo valor do punto da orbita
   do modelo de Ricker, enton x cambiaria a súa primeira columna da
   seguinte forma, x=(f^(Npre)(x(1)),0,...,0) onde agora x(1)= f^(
   Npre)(x(1))
9 x(1) = x(1)*exp(r*(1-x(1)));
10 end
11
12 for n = 1:N-1 %calculamos as iteracions a partir do punto da orbita
   calculado no bucle anterior, e dicir, creamos o vector columna x
   =(x(1),f(x(1)),...,f^N(x(1)))
13 x(n+1) = x(n)*exp(r*(1-x(n)));
14 end
15
16 plot(r*ones(N,1),x, 'b', 'markersize',2) %creamos o vector columna
   de todos os valores r, para que tena a mesma lonxitude que o
   vector columna x, e representase os puntos de x sobre os puntos de
   r de cor azul, representamos mediante puntos e reducimos o tamaño
   destes para que non se superponan
17 hold on; %usámolo para reter todos os puntos representados mentres
   trazamos orbitas para os valores posteriores do parametro r
18 end %todo isto para cada valor de r ata que termine o bucle
19 plot([2 4],[1 1], 'r', 'LineWidth',1.5) %represento cunha recta de
   puntos vermellos (y=1 e x en [2,4]) un punto fixo inestable e
   aumento o seu tamaño
20 plot([0 4],[0 0], 'r', 'LineWidth',1.5) %represento cunha recta de
   puntos vermellos (y=0 e x en [0,4]) un punto fixo inestable e
   aumento o seu tamaño
21 xlabel('r');ylabel('x_n'); %anade etiquetas aos eixes

```

```

22 set(gca, 'xlim', [r0 rf]); % hacemos zoom nos parametros de r en [r0,
    rf]
23 % ylim([0.18 0.36]); para facer zoom con respecto ao eixe y
24 hold off; % deixamos de reter
25
26 % Chamadas
27 bifRickerdiag(200,100,0.1,4,780)
28 bifRickerdiag(200,100,2.5,3,100)
29 bifRickerdiag(200,100,2.65,2.70,1000)

```

A.3.3. Cálculos para a bifurcación de dobramento de período

Programa A.15: Código de cálculos para a bifurcación de dobramento de período (ContasDP.m)

```

1  clc , clear ;
2  syms x r ; % declaro variables simbolicas
3
4  simplify(-(1+r)*(-x-r*x+x^3)+(-x-r*x+x^3)^3) % simplifico expresions
5  simplify((x*(r + 1)*(- x^2 + r + 1) - x^3*(- x^2 + r + 1)^3)-x)
6
7  solve((x*(r + 1)*(- x^2 + r + 1) - x^3*(- x^2 + r + 1)^3) - x==0,x)
    % resollo a ecuacion respecto a x
8  diff(-(1+r)*(-x-r*x+x^3)+(-x-r*x+x^3)^3,x) % derivo respecto a x
9
10 simplify((r + 1)*(- 3*(-sqrt(r))^2 + r + 1) - 3*(- 3*(-sqrt(r))^2 + r
    + 1)*(-sqrt(r) + r*(-sqrt(r)) - (-sqrt(r)^3))^2) % simplifico
    expresions
11 simplify((r + 1)*(- 3*(sqrt(r))^2 + r + 1) - 3*(- 3*(sqrt(r))^2 + r +
    1)*(sqrt(r) + r*sqrt(r) - (sqrt(r)^3))^2)

```

Bibliografía

- [1] Bartle, R. G. e Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, Jonh Wiley & Sons, New York.
- [2] Braverman, E. e Liz, E. (2012). Global stabilization of periodic orbits using a proportional feedback control with pulses, *Nonlinear Dyn.*, **67**, 2467–2475.
- [3] de Burgos Román, J. (2006). *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill, Madrid.
- [4] Coppel, W. A. (1955). The solution of equations by iteration, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **51**(1), 41–43.
- [5] Cull, P. (2007). Population models: stability in one dimension, *Bull. Math. Biol.*, **69**, 989–1017.
- [6] Davidchack, R. (2003). *Bifurcation diagrams*, University of Leicester, Leicester. Disponible en: <http://www.math.le.ac.uk/people/rld8/ma1251/lab3.html>.
- [7] Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison-Wesley, California.
- [8] Franco, D. e Perán, J. (2020). Stability for one-dimensional discrete dynamical systems revisited, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **25**, 635–650.
- [9] Hundley, R. D. (2008). *Getting started with Matlab*, Whitman College, Washington. Disponible en: <http://people.whitman.edu/~hundledr/courses/Chaos/matlab.pdf>.
- [10] Liz, E., Tkachenko, V. e Trofimchuk, S. (2003). A global stability criterion for scalar functional differential equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **35**(3), 596–622.
- [11] MATLAB. (2020). version 9.9.0.1495850 (R2020b). The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts.
- [12] Munkres, J. R. (2002). *Topología*, 2^a ed., Pearson Educación, Madrid.

- [13] Quinn II T. J., Deriso R. B. (1999). *Quantitative fish dynamics*, Oxford University Press, New York.
- [14] Rodríguez, G. (2003). *Diferenciación de funciones de varias variables reales*, Vol. 4, Universidade de Santiago de Compostela.
- [15] Singer, D. (1978). Stable orbits and bifurcations of maps of the interval, *SIAM J. Appl. Math.*, **35**(2), 260–267.
- [16] Wiggins, S. (1990). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York.