



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# O NÚMERO DE VOLTAS DUNHA CURVA AO REDOR DUN PUNTO

Sabela Varela Rey

Curso 2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# O NÚMERO DE VOLTAS DUNHA CURVA AO REDOR DUN PUNTO

Sabela Varela Rey

Xullo, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Xeometría e Topoloxía
<b>Título:</b> O número de voltas dunha curva ao redor dun punto
<b>Breve descrición do contido</b>
Neste TFG farase unha revisión do concepto de número de voltas dunha curva pechada ao redor dun punto e das súas aplicacións a diversos campos das matemáticas.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. O número de voltas en Topoloxía</b>	<b>1</b>
1.1. Primeiros conceptos e definición . . . . .	1
1.2. Invarianza do número de voltas . . . . .	10
1.3. O número de voltas e o Grupo Fundamental . . . . .	14
<b>2. O número de voltas no plano complexo</b>	<b>19</b>
2.1. A función índice . . . . .	19
2.2. Propiedades . . . . .	20
<b>3. O número de voltas e o grao</b>	<b>23</b>
3.1. Homoloxía singular . . . . .	23
3.2. O grao dunha aplicación . . . . .	27
<b>4. A propiedade de punto fixo</b>	<b>33</b>
<b>5. Aplicacións</b>	<b>37</b>
5.1. O Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .	37
5.2. O Teorema do bocadillo de xamón . . . . .	38

---

5.3. O Teorema da curva de Jordan . . . . .	41
5.4. Teoría de Xogos e o Equilibrio de Nash . . . . .	47
5.5. Conclusión . . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



---

## Resumo

O número de voltas que realiza unha curva pechada ao redor dun punto é un concepto topolóxico con interesantes aplicacións en diversos campos das matemáticas. Neste traballo definiremos formalmente esta idea partindo de coñecementos elementais de topoloxía. Relacionarémolo con outros conceptos topolóxicos importantes como son o grao dunha aplicación ou o Grupo Fundamental, e estudaremos algunhas das súas destacadas aplicacións, tanto dentro da propia topoloxía como noutras ramas das matemáticas.

## Abstract

The winding number, or the number of times a loop winds around a point, is a topological notion that has interesting applications in diverse mathematical fields. In this paper we will give a formal definition of this idea that builds upon fundamental topological concepts. We will explore the interrelationships between this concept and other significant topological notions, such as the degree of a map or the Fundamental Group, and we will examine some of its applications, not only in topology, but also in other mathematical fields.



# Introdución

A topoloxía é unha das ramas matemáticas máis novas. Xorde a mediados do século XIX, ao procurar responder ás necesidades da análise, e comeza a formar unha entidade específica dentro das matemáticas a finais do mesmo século. A partir do ano 1930, o seu desenvolvemento prodúcese a un ritmo acelerado. As súas ideas penetraron en case todos os campos das matemáticas: álgebra, xeometría, cálculo, etc. Por este motivo, é considerada unha rama fundamental das matemáticas, que ademais conta con interesantes aplicacións a outras ciencias.

Un concepto interesante dentro da topoloxía é o do número de voltas, o cal nos permite medir o número de veces que un punto en movemento realiza unha volta completa ao redor dun punto fixo. Considérase un dos invariantes máis básicos, e desempeña tamén un papel fundamental en análise complexa, presentándose de modo inevitable en teoremas de destacada importancia. En particular, é esencial para probar o teorema dos residuos de Cauchy, que representa a culminación da integración complexa.

Porén, as súas ramificacións non se limitan á análise complexa, xa que este concepto nos permite demostrar algúns dos teoremas clásicos da topoloxía, como son o Teorema de punto fixo de Brouwer, o Teorema de Borsuk-Ulam ou o Teorema da curva de Jordan. Ademais de atoparse na base da topoloxía, estes teoremas teñen tamén importantes aplicacións a outras ramas das matemáticas. O teorema de Brouwer, por exemplo, é imprescindible para demostrar a existencia de equilibrios de Nash, de suma importancia en Teoría de Xogos.

O número de voltas é tamén a clave para poder definir conceptos intuitivos como a distinción entre *dentro* e *fóra* dunha curva pechada no plano. Ademais, é a partir deste concepto que podemos obter unha demostración sinxela do Teorema Fundamental da Álgebra.

Temos así que, a pesar de partir dunha idea simple, o estudo do número de voltas dunha curva pechada ao redor dun punto pode ser sumamente interesante, ademais de contar cunha gran cantidade de aplicacións a outras ramas das matemáticas.

O obxectivo deste traballo será polo tanto o estudo deste concepto e das súas diversas aplicacións. No primeiro capítulo, partindo da idea intuitiva de que debe representar o número de

voltas e empregando nocións básicas de topoloxía, daremos unha definición formal do concepto. Posteriormente, estudaremos algunhas das súas propiedades máis destacadas e analizaremos a súa relación co Grupo Fundamental, que a miúdo é considerado unha xeneralización da idea do número de voltas. No segundo capítulo, trasladarémonos ao plano complexo para estudar o concepto de índice, que como veremos, coincide co número de voltas. Isto permitiranos coñecer novas propiedades que serán de interese nos seguintes capítulos. Na terceira parte deste traballo definiremos o grao dunha aplicación, que está estreitamente relacionado co número de voltas. Para isto, precisaremos coñecer nocións básicas de topoloxía alxébrica. No cuarto capítulo estudaremos a propiedade de punto fixo de Brouwer, que conta con multitude de aplicacións tanto en matemáticas como en física ou bioloxía, e nos permitirá, no último capítulo, demostrar o xa mencionado Teorema de Nash. Finalmente, a modo de conclusión, estudaremos algunhas das máis interesantes aplicacións dos conceptos aprendidos ao longo deste traballo.

# Capítulo 1

## O número de voltas en Topoloxía

Neste primeiro capítulo, definiremos o número de voltas dunha curva pechada ao redor dun punto a partir de noções de topoloxía elemental, tendo como referencia principal [2]. Seguidamente, estudaremos as súas propiedades de interese e enunciaremos algúns resultados importantes.

### 1.1. Primeiros conceptos e definición

Antes de comezar, cómpre recordar as seguintes definicións:

**Definición 1.1.** Unha *curva* ou *camiño* nun plano  $\mathbb{P}$  é unha aplicación continua  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$ , na que podemos considerar cada  $t \in [a, b]$  como un instante de tempo e a correspondente imaxe,  $\varphi(t) \in \mathbb{P}$ , como a localización no instante  $t$  dun punto que se move. Deste xeito, pódese considerar unha curva como a traxectoria dun punto móbil.

**Definición 1.2.** Unha *curva pechada* é unha curva que comeza e remata no mesmo punto:  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

Agora, dada unha curva pechada  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  e un punto  $y \in \mathbb{P}$  que non pertenza á imaxe da curva, podemos definir intuitivamente o *número de voltas* de  $\varphi$  ao redor de  $y$  como o número de veces que a curva  $\varphi$  realiza unha volta completa ao redor de  $y$ . Como a curva é pechada,  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , este número será enteiro.

De xeito máis preciso, designando por  $L_t$  a semirecta de orixe  $y$  que pasa por  $\varphi(t)$ , temos que cando  $t$  varía de  $a$  a  $b$ , o punto  $\varphi(t)$  percorre a curva mentres a semirecta  $L_t$  xira sobre o punto  $y$  un número enteiro de veces ( $L_a = L_b$ ). O número de voltas que realice durante o seu movemento esta semirecta sobre  $y$  será o número de voltas da curva pechada  $\varphi$  ao redor do punto  $y$  e denotáremolo por  $W(\varphi, y)$ . Por convenio, asígnaselle o signo positivo ás rotacións



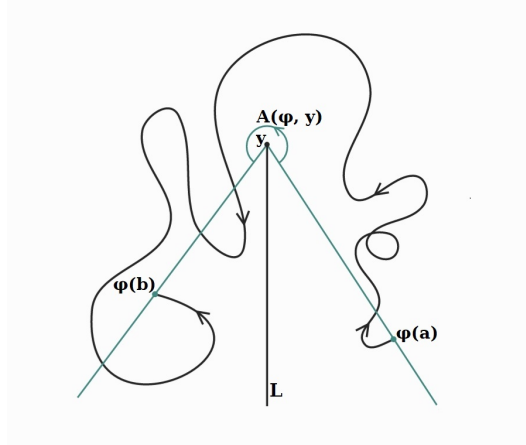


Figura 1.3: Curva corta relativa ao punto  $y$  percorrida en sentido positivo.

**Exemplo 1.7.** Podemos observar, na figura 1.3, como esta definición nos prepara para poder cancelar movementos positivos e negativos. Neste caso, a recta  $L_t$  comeza xirando en sentido positivo e deseguida anula este movemento xirando no sentido contrario ata volver á posición inicial  $L_a$ . Deste xeito, podemos calcular manualmente o ángulo barrido como se indicou na definición 1.6:  $A(\varphi, y) = \sphericalangle L_a L_b = 290^\circ = \frac{29}{18}\pi$ .

A función  $A(\varphi, y)$  ten unha propiedade denominada *aditividade* en  $\varphi$  que será fundamental para estender a definición de ángulo barrido a calquera tipo de curva. Sexan  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a < b < c$ , e  $\varphi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  e  $\varphi_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{P}$  dúas curvas verificando que a súa unión,  $\varphi: [a, c] \rightarrow \mathbb{P}$ , sexa corta relativa a  $y$ . É evidente que  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  son tamén cortas relativas a  $y$  e que o ángulo barrido por  $\varphi$  verifica que  $A(\varphi, y) = \sphericalangle L_a L_c = \sphericalangle L_a L_b + \sphericalangle L_b L_c = A(\varphi_1, y) + A(\varphi_2, y)$ .

Para definir  $A(\varphi, y)$  nunha curva calquera, estudaremos primeiro como descompoñer unha curva  $\varphi$  nunha xustaposición ou produto de curvas cortas.

**Definición 1.8.** Sexa  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  unha curva. Unha *partición*  $\mathcal{P}$  de  $\varphi$  é unha descomposición de  $\varphi$  en produto finito de curvas. Consta, en primeiro lugar, dunha sucesión crecente de números que comezan en  $a$  e rematan en  $b$ :  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ , e, en segundo lugar, dunha sucesión de curvas  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , onde  $\varphi_i$  designa a restrición de  $\varphi$  ao intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Definición 1.9.** Diremos que unha partición de  $\varphi$  é *suficientemente fina* para un punto  $y \notin \varphi([a, b])$  se cada unha das partes  $\varphi_i$  é corta con relación a  $y$ .

Sexa  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  unha curva e  $\mathcal{P}$  unha partición de  $\varphi$  suficientemente fina para  $y \notin \varphi([a, b])$ . Temos que cada un dos  $A(\varphi_i, y)$  está definido e a súa suma désignase por:  $A(\mathcal{P}, y) = \sum_{i=1}^m A(\varphi_i, y)$ . Veremos a continuación como este valor é independente da elección de  $\mathcal{P}$  e nos permite definir  $A(\varphi, y)$  nunha curva calquera.

**Proposición 1.10.** *Se  $\varphi$  é unha curva calquera e  $y$  un punto que non pertence a  $\varphi$ , existe unha partición suficientemente fina para  $y$ .*

*Demostración.* Dado  $p = \varphi(t)$  un punto calquera da curva, tomamos a circunferencia de centro  $p$  e raio  $d(p, y)$ . Calquera parte da curva no interior desta circunferencia é corta relativa a  $y$ , xa que non corta á semirrecta  $L$  de orixe  $y$  que é continuación do segmento  $\overline{py}$  (ver figura 1.4). Tomando agora  $\epsilon_t = d(p, y)$ , pola continuidade de  $\varphi$  en  $t$  temos que existe un  $\delta_t > 0$  tal que  $\varphi(t') \in B(p, \epsilon_t)$  para cada  $t' \in B(t, \delta_t)$ . En consecuencia, para cada intervalo  $I' \subset B(t, \delta_t)$ , a curva  $\varphi|_{I'}$  será corta relativa a  $y$ .

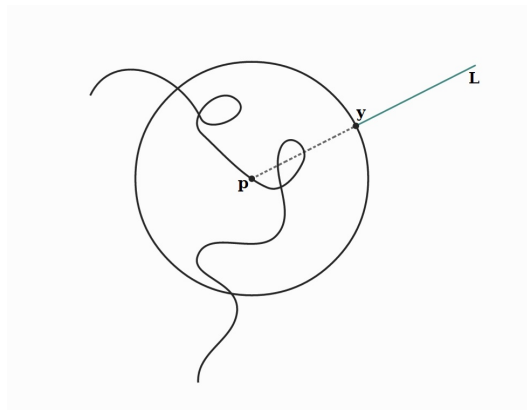


Figura 1.4

Posto que  $[a, b]$  é compacto e os entornos  $B(t, \delta_t)$  forman un recubrimento de  $[a, b]$ , podemos extraer un subrecubrimento finito  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  do intervalo. Sexa  $S$  o conxunto de todos os puntos extremos dos intervalos abertos  $B_1, B_2, \dots, B_k$ . Denotemos por  $\delta$  a metade da menor das distancias  $d(s, t)$ , con  $s, t \in S$ ,  $s \neq t$ , e tomemos unha partición calquera  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  por intervalos de lonxitude máxima  $\delta$ . Queremos ver que  $\mathcal{P}$  é suficientemente fina para  $y$ . Para comprobar isto, é suficiente demostrar que cada subintervalo  $I'$  de  $\mathcal{P}$  está contido nalgún dos  $B_1, B_2, \dots, B_k$ .

Dado que a lonxitude de  $I'$  é como máximo  $\delta$ ,  $I'$  contén ao sumo un punto de  $S$  que chamaremos  $c$ , ou ben ningún. Neste último caso, como  $I'$  está cuberto por  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ , tomamos calquera  $B_i$  que corte a  $I'$  e temos que  $I' \subset B_i$ , xa que o intervalo  $I'$  non contén ningún punto extremo do intervalo aberto  $B_i$ . No primeiro caso, tomamos calquera  $B_i$  que conteña a  $c$  e temos de novo que  $I'$  non contén ningún punto extremo de  $B_i$  e, polo tanto,  $I' \subset B_i$ . Concluimos así que a partición  $\mathcal{P}$  é suficientemente fina para  $y$ .  $\square$

**Proposición 1.11.** *Se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  son dúas particións de  $\varphi$  suficientemente finas para  $y$ , resulta que  $A(\mathcal{P}, y) = A(\mathcal{P}', y)$ .*

*Demostración.* Sexan  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  dúas particións de  $\varphi$ , con  $\mathcal{P}' < \mathcal{P}$ , é dicir, os puntos  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$

da partición  $\mathcal{P}$  están contidos nos de  $\mathcal{P}'$ . Entón cada subintervalo de  $\mathcal{P}'$  estará contido nun subintervalo de  $\mathcal{P}$ . Así, se  $\mathcal{P}$  é suficientemente fina, tamén o será  $\mathcal{P}'$ . Ademais, podemos tomar os puntos de  $\mathcal{P}'$  que non pertencen a  $\mathcal{P}$  e engadilos un a un nunha sucesión de refinamentos  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2 > \dots > \mathcal{P}_s = \mathcal{P}'$ .

Para ver que  $\mathcal{P}' < \mathcal{P}$ , con  $\mathcal{P}$  suficientemente fina, implica  $A(\mathcal{P}, y) = A(\mathcal{P}', y)$ , basta ver que dada unha partición  $\mathcal{P}_i$  suficientemente fina de  $\varphi$  e unha partición  $\mathcal{P}_{i+1}$  obtida de  $\mathcal{P}$  introducindo un novo punto,  $A(\mathcal{P}_i, y) = A(\mathcal{P}_{i+1}, y)$ . Habendo tales particións, temos que o punto engadido divide un subintervalo  $I_k$  en dous subintervalos  $I'$  e  $I''$ . Pola aditividade da función  $A(\varphi, y)$ , podemos afirmar que  $A(\varphi|_{I'}, y) + A(\varphi|_{I''}, y) = A(\varphi|_{I_k}, y)$ . Finalmente, sumando a ambos lados da igualdade os termos  $A(\varphi|_{I_j}, y)$ , para todo  $j \neq k$ , chegamos ao resultado  $A(\mathcal{P}_i, y) = A(\mathcal{P}_{i+1}, y)$ .

Sexan agora  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  dúas particións calquera suficientemente finas para  $y$ . A unión dos puntos de  $\mathcal{P}_1$  e de  $\mathcal{P}_2$  forma unha nova partición  $\mathcal{P}_3$ . É evidente que  $\mathcal{P}_3 < \mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_3 < \mathcal{P}_2$ ; e, polo resultado do caso anterior, temos que  $A(\mathcal{P}_1, y) = A(\mathcal{P}_3, y)$  e  $A(\mathcal{P}_2, y) = A(\mathcal{P}_3, y)$ . Concluimos polo tanto que  $A(\mathcal{P}_1, y) = A(\mathcal{P}_2, y)$ .  $\square$

**Definición 1.12.** Sexa  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  unha curva e  $\mathcal{P}$  unha partición de  $\varphi$  suficientemente fina para  $y \notin \varphi([a, b])$ . Definimos o *ángulo barrido* por  $\varphi$  con respecto a  $y$  como o valor de  $A(\mathcal{P}, y)$ . Denótase  $A(\varphi, y)$ .

Veremos a continuación un modo de calcular o ángulo barrido por unha curva de xeito que se reduzan significativamente os cálculos necesarios. Para isto, tomamos unha circunferencia  $C$  de centro  $y$  e raio 1. Dada unha partición suficientemente fina da curva  $\varphi$  para  $y$ , de puntos  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ , designamos por  $p_i$  o punto de intersección de  $C$  coa semirrecta de orixe  $y$  que pasa por  $\varphi(t_i)$ . Tomamos agora un punto  $q$  de  $C$  distinto de  $p_0, p_1, \dots, p_m$ , e denotamos por  $\theta$  o ángulo determinado polo arco orientado de  $p_0$  a  $p_m$  que non contén a  $q$ . Podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 1.13.** *Represente  $r$  o número de arcos  $p_{i-1}p_i$  que conteñen  $q$  de orientación positiva, e sexa  $s$  o número de arcos  $p_{i-1}p_i$  que conteñen  $q$  de orientación negativa. Logo,*

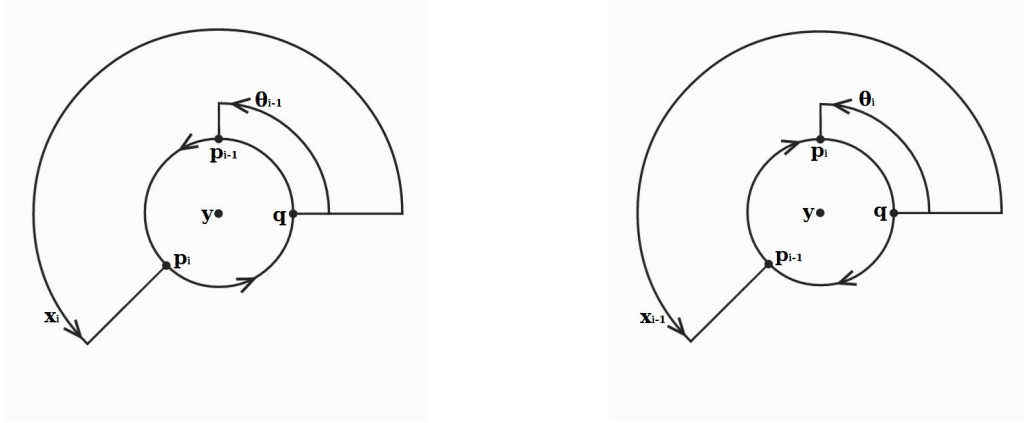
$$A(\varphi, y) = \theta + 2\pi(r - s).$$

*Demostración.* En primeiro lugar, recordemos que

$$A(\varphi, y) = \sum_{i=1}^m A(\varphi_i, y).$$

Designemos agora por  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$  os ángulos determinados polos arcos orientados positivamente de  $q$  aos puntos  $p_0, p_1, \dots, p_m$ , respectivamente. Cada valor  $\theta_i$  está comprendido entre 0 e  $2\pi$ . Expresaremos cada  $A(\varphi_i, y)$ , que é a medida angular do arco  $p_{i-1}p_i$ , en termos de  $\theta_{i-1}$  e  $\theta_i$ .

Consideremos primeiro un  $i$  tal que o arco  $p_{i-1}p_i$  non conteña  $q$ . Segundo a nosa definición de ángulo barrido por unha curva corta,  $A(\varphi_i, y) = \sphericalangle L_{i-1}L_i = \theta_i - \theta_{i-1}$  (ver figura 1.5).



(a) Cando o arco ten orientación positiva.

(b) Cando o arco ten orientación negativa.

Figura 1.5: Ilustración do cálculo do ángulo barrido polo arco  $p_{i-1}p_i$ , que non contén a  $q$ , nos dous casos posibles.

Consideremos a continuación un  $i$  tal que o arco  $p_{i-1}p_i$  estea orientado positivamente e conteña a  $q$ , como na figura 1.6. Sumando os ángulos determinados polos arcos  $p_{i-1}q$  e  $qp_i$ , obtemos

$$A(\varphi_i, y) = \theta_i + (2\pi - \theta_{i-1}) = \theta_i - \theta_{i-1} + 2\pi.$$

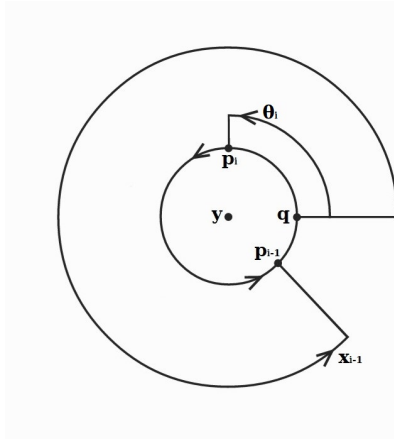


Figura 1.6

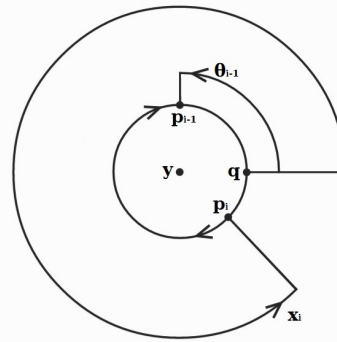


Figura 1.7

Por último, consideremos un  $i$  tal que o arco  $p_{i-1}p_i$  estea orientado negativamente e conteña a  $q$ , como na figura 1.7. Sumando os ángulos determinados polos arcos  $p_{i-1}q$  e  $qp_i$ , obtemos

$$A(\varphi_i, y) = -\theta_{i-1} - (2\pi - \theta_i) = \theta_i - \theta_{i-1} - 2\pi.$$

Os tres casos anteriores esgotan todas as posibilidades. Se sumamos todos os  $A(\varphi_i, y)$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$ , cada termo terá un  $\theta_i - \theta_{i-1}$ ,  $r$  dos termos terán un  $+2\pi$  e  $s$  dos termos, un  $-2\pi$ . Polo tanto,

$$\begin{aligned} A(\varphi_i, y) &= (\theta_m - \theta_{m-1}) + (\theta_{m-1} - \theta_{m-2}) + \dots + (\theta_1 - \theta_0) + 2\pi r - 2\pi s \\ &= \theta_m - \theta_0 + 2\pi(r - s). \end{aligned}$$

Finalmente, como  $\theta_m - \theta_0 = \theta$ , temos que  $A(\varphi_i, y) = \theta + 2\pi(r - s)$ .  $\square$

**Exemplo 1.14.** Calculemos o ángulo barrido pola curva  $\varphi$  da figura 1.8 seguindo os dous métodos coñecidos, e vexamos que os valores coinciden.

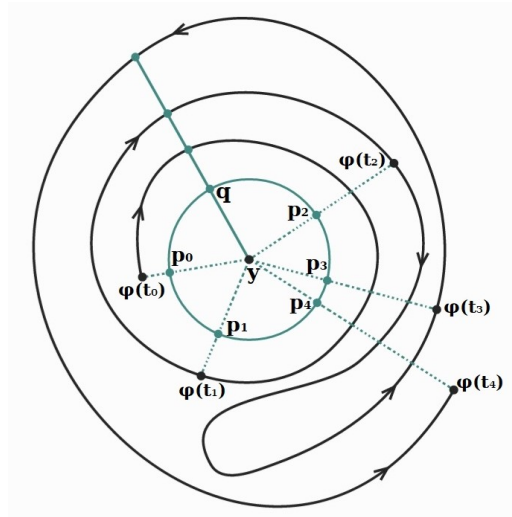


Figura 1.8

En primeiro lugar, consideremos a súa partición en curvas cortas  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ , definidas nos intervalos  $[t_0, t_1], \dots, [t_3, t_4]$ , respectivamente. Podemos calcular os ángulos barridos por estas curvas seguindo a definición dada en 1.6, como se indica na figura 1.9, e obtemos:

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, y) &= -302,5^\circ = -\frac{121}{72}\pi, \\ A(\varphi_2, y) &= -215,0^\circ = -\frac{43}{36}\pi, \\ A(\varphi_3, y) &= -48,7^\circ = -\frac{487}{1800}\pi, \\ A(\varphi_4, y) &= +343,1^\circ = +\frac{3431}{1800}\pi. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando estes valores o resultado será:  $A(\varphi, y) = -\frac{2231}{1800}\pi$ .

Por outra banda, se aplicamos a fórmula proporcionada polo teorema anterior, calculando  $\theta$  como se indica na figura 1.10, temos que  $A(\varphi, y) = \theta + 2\pi(r - s) = \frac{1369}{1800}\pi + 2\pi(1 - 2) = -\frac{2231}{1800}\pi$ .

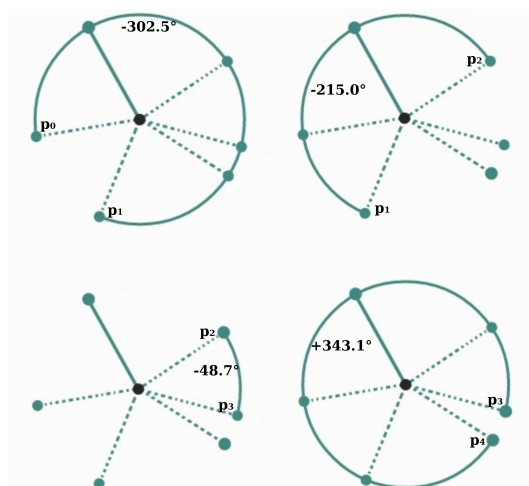


Figura 1.9: Ilustración do cálculo, en graos, dos ángulos  $A(\varphi_1, y)$ ,  $A(\varphi_2, y)$ ,  $A(\varphi_3, y)$  e  $A(\varphi_4, y)$ .

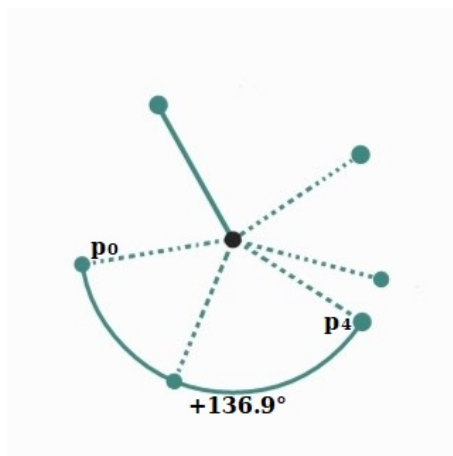


Figura 1.10: Ilustración do cálculo, en graos, do ángulo  $\theta$ .

**Corolario 1.15.** Se  $\varphi$  é unha curva pechada, resulta  $A(\varphi, y) = 2\pi(r - s)$ .

*Demostración.* É evidente. □

**Definición 1.16.** O número de voltas dunha curva pechada  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  ao redor dun punto  $y \in \mathbb{P} \setminus \varphi([a, b])$  vén dado por:  $W(\varphi, y) = A(\varphi, y)/2\pi = r - s$ .

**Exemplo 1.17.** Seguindo esta definición, calculemos o número de voltas da curva  $\varphi$  ao redor do punto  $y$  da seguinte figura:

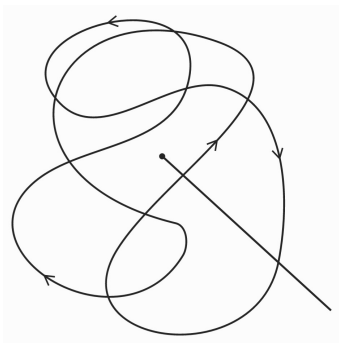


Figura 1.11

Tomando unha recta como se mostra na imaxe, calculamos  $r$  como o número de arcos que a intersecan de orientación positiva e  $s$  os de orientación negativa. Como  $r = s = 1$ , temos que  $W(\varphi, y) = 0$ .

**Exemplo 1.18.** Do mesmo modo, podemos calcular  $W(\varphi, y)$  en:

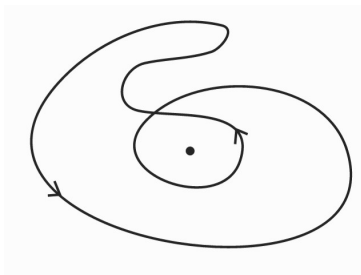


Figura 1.12

Neste caso, resulta claro que  $r = 2$  e  $s = 0$ , polo que  $W(\varphi, y) = 2$ .

A partir desta definición, resulta evidente que o número de voltas é un enteiro. Vexamos agora outras propiedades de  $A(\varphi, y)$  e  $W(\varphi, y)$ :

1. Se  $\varphi$  é unha curva constante, entón  $A(\varphi, y) = W(\varphi, y) = 0$ . A comprobación é inmediata, xa que como  $\varphi([a, b])$  é un punto, temos que  $\varphi$  é unha curva corta e  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Polo tanto,  $A(\varphi, y) = \langle L_a L_b \rangle = 0$  e  $W(\varphi, y) = A(\varphi, y)/2\pi = 0$ .
2.  $A(\varphi, y)$  é aditiva en  $\varphi$ . Isto é, dados  $a < b < c$  e  $\varphi: [a, c] \rightarrow \mathbb{P}$ , con  $\varphi_1 = \varphi|_{[a,b]}$  e  $\varphi_2 = \varphi|_{[b,c]}$ , entón  $A(\varphi, y) = A(\varphi_1, y) + A(\varphi_2, y)$ . Ademais, no caso de que  $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$ , teremos que  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  serán curvas pechadas, e  $W(\varphi, y) = W(\varphi_1, y) + W(\varphi_2, y)$ .

Para comprobar que isto é certo, tomemos  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  particións suficientemente finas de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , respectivamente. Logo, a unión dos vértices de ambas daranos unha partición

suficientemente fina  $\mathcal{P}$  de  $\varphi$ . Dado que os termos da suma  $A(\mathcal{P}, y)$  son os mesmos que os da suma  $A(\mathcal{P}_1, y) + A(\mathcal{P}_2, y)$ , é evidente que  $A(\mathcal{P}, y) = A(\mathcal{P}_1, y) + A(\mathcal{P}_2, y)$ , demostrando así a primeira relación.

No caso de que  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sexan curvas pechadas, cada termo da igualdade anterior será un múltiplo enteiro de  $2\pi$ . Aplicando a definición de  $W(\varphi, y)$ , obtemos a aditividade do número de voltas en  $\varphi$ .

## 1.2. Invarianza do número de voltas

Nesta nova sección probaremos que o número de voltas dunha curva ao redor dun punto non muda se a curva ou o punto varían dunha forma continua. Isto é, o valor mantense invariable por homotopías de curvas e é constante nos puntos dunha mesma rexión conеха por camiños.

Para isto, recordamos:

**Definición 1.19.** Dúas curvas  $\varphi_0, \varphi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  dinse *homótopas*,  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ , se existe unha aplicación continua  $\Phi: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}$  tal que, para todo  $t \in [a, b]$ ,  $\Phi(t, 0) = \varphi_0(t)$  e  $\Phi(t, 1) = \varphi_1(t)$ . No caso de que  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  sexan pechadas,  $\Phi$  deberá verificar, ademais, que  $\Phi(a, \tau) = \Phi(b, \tau)$  para todo  $\tau \in [0, 1]$ . Esta aplicación  $\Phi$  dise que é unha *homotopía* entre  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ .

Dada unha homotopía  $\Phi$  definida deste xeito, temos que as aplicacións  $\varphi_\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  definidas por  $\varphi_\tau(t) = \Phi(t, \tau)$  serán continuas e, polo tanto,  $\{\varphi_\tau \mid \tau \in [0, 1]\}$  será unha familia de curvas definidas en  $[a, b]$ .

**Teorema 1.20.** *Sexa  $\Phi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$  unha homotopía de  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$  como curvas pechadas e sexa  $y$  un punto que non pertence a  $\Phi(\mathbb{Q})$ . O número de voltas  $W(\varphi_\tau, y)$  é constante cando  $\tau$  varía de 0 a 1. En particular,  $W(\varphi_0, y) = W(\varphi_1, y)$ .*

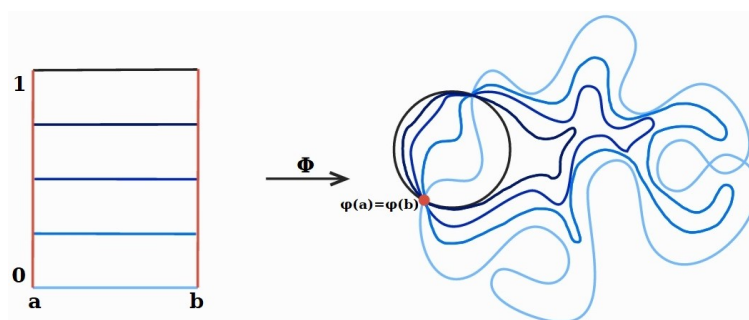


Figura 1.13

*Demostración.* Definimos  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ , con  $f(\tau) = W(\varphi_\tau, y)$ .

Sexa  $\alpha \in [0, 1]$ . É suficiente demostrar a constancia de  $f$  nas proximidades de  $\alpha$ , é dicir, que existe un entorno  $N_\alpha$  de  $\alpha$  tal que  $f(\tau) = f(\alpha) \forall \tau \in N_\alpha$ . Unha vez probado isto, teremos que, como  $f$  é constante en  $N_\alpha$ ,  $f$  será continua neste entorno e, polo tanto, en  $\alpha$ . Como, ademais, o valor de  $\alpha$  foi escollido arbitrariamente, isto implica a continuidade de  $f$  en  $[0, 1]$ . Finalmente, como cada valor de  $f$  é enteiro, conclúese que  $f$  é constante.

Tomamos unha partición  $\mathcal{P}$  de  $\varphi_\alpha$  suficientemente fina para  $y$ . Isto é, tal que cada unha das partes  $\varphi_\alpha(I_k)$ , con  $I_k = [t_{k-1}, t_k]$  e  $t_0, t_1, \dots, t_m$  os vértices de  $\mathcal{P}$ , é corta con relación a  $y$ . Para cada subintervalo  $I_k$  existe unha semirecta de orixe  $y$ ,  $L_k$ , que non corta  $\varphi_\alpha(I_k)$ . Sexa  $D_k$  o segmento de recta en  $\mathbb{Q}$  dende  $(t_{k-1}, \alpha)$  ata  $(t_k, \alpha)$ , vexamos que existe un rectángulo  $E_k$ , con  $D_k \subset E_k$ , tal que  $\Phi(E_k) \cap L_k = \emptyset$ .

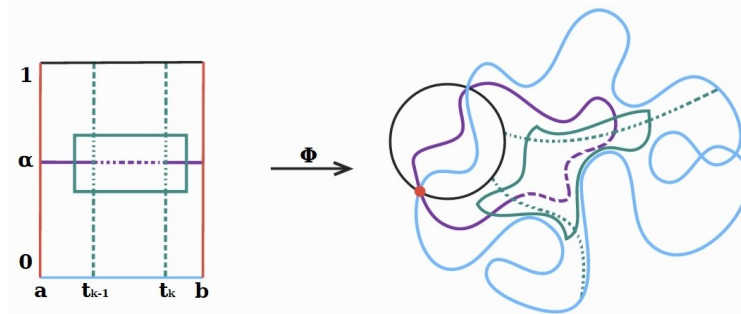


Figura 1.14

Denotemos agora  $V_k = \Phi^{-1}(\mathbb{P} \setminus L_k)$ . Como  $\Phi$  é continua e  $\mathbb{P} \setminus L_k$  un aberto en  $\mathbb{P}$ , temos que  $V_k$  é aberto en  $\mathbb{Q}$ . Ademais, de  $\Phi(D_k) = \varphi_\alpha(I_k) \subset \mathbb{P} \setminus L_k$ , deducimos que  $D_k \subset V_k$ , xa que  $D_k \subset \Phi^{-1}(\Phi(D_k)) \subset V_k$ . Polo tanto, para cada  $p \in D_k$ , podemos tomar un entorno circular  $N(p) \subset V_k$ . Designemos agora por  $M(p)$  o interior do maior cadrado en  $N(p)$  cuxos lados son paralelos aos eixos  $(t, \tau)$ . A colección destes  $\{M(p)\}_{p \in D_k}$  forma un recubrimento de  $D_k$ . Como  $D_k$  é compacto, este recubrimento contén un subrecubrimento finito  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Designemos por  $\delta_k$  a metade do lado do menor destes cadrados, e por  $E_k$  o rectángulo en  $(t, \tau)$  tal que  $t \in I_k$  e  $|\tau - \alpha| < \delta_k$ .

Pola elección de  $\delta_k$ , dedúcese que  $E_k \subset M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \subset V_k$ . Así, temos un rectángulo  $E_k$ , con  $D_k \subset E_k$ , tal que  $\Phi(E_k) \subset \Phi(V_k) = \Phi(\Phi^{-1}(\mathbb{P} \setminus L_k)) \subset \mathbb{P} \setminus L_k$ . Polo tanto,  $\Phi(E_k) \cap L_k = \emptyset$ .

Isto significa que  $\varphi_\tau(I_k) \subset \Phi(E_k) \subset \mathbb{P} \setminus L_k$  para cada  $\tau \in B(\alpha, \delta_k)$ . Supoñendo a construción feita para cada un dos intervalos  $I_k$ , con  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$  e  $N' = B(\alpha, \delta)$ . Deste modo, se  $\tau \in N'$ , temos que  $\varphi_\tau(I_k) \subset \mathbb{P} \setminus L_k \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Probamos así que para cada  $\tau \in N'$ ,  $\mathcal{P}$  é suficientemente fina para  $\varphi_\tau$ .

Agora, empregando o método do cómputo do número de voltas visto en 1.13, queremos atopar outro entorno  $N \subset N'$  no que cada paso do cálculo permaneza constante. Para isto, tomamos  $C$ ,

a circunferencia de centro  $y$  e raio 1, e  $g: \mathbb{P} \setminus \{y\} \rightarrow C$ , a proxección radial de centro  $y$  sobre  $C$ . Temos que  $g \circ \Phi: \mathbb{Q} \rightarrow C$  e  $g \circ \varphi_\tau: [a, b] \rightarrow C$  son continuas por ser composición de continuas. Denotemos  $p_k(\tau) = g \circ \varphi_\tau(t_k)$  e  $A_k(\tau) = \text{“arco de } C \text{ dende } p_{k-1}(\tau) \text{ ata } p_k(\tau) \text{ que non corta a } L_k\text{”}$ .

Tomamos un  $q \in C$  distinto de  $p_0(\alpha), \dots, p_m(\alpha)$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ , tomamos un entorno  $U_k$  de  $p_k(\alpha)$  en  $C$  que non conteña a  $q$  e non corte a  $L_k$  nin a  $L_{k-1}$ . Entón,  $U_k$  é un arco corto de  $C$  que contén a  $p_k(\alpha)$ . Dado que  $g \circ \Phi$  é continua,  $U_k$  é un entorno de  $p_k(\alpha)$  e  $g \circ \Phi(t_k, \alpha) = p_k(\alpha)$ , séguese que existe un entorno  $N_k$  de  $\alpha$  en  $[0, 1]$  tal que  $g \circ \Phi(t_k, \tau) = p_k(\tau)$  pertence a  $U_k$  para todo  $\tau \in N_k$ . Designemos por  $N$  o menor dos entornos  $N', N_1, N_2, \dots, N_m$ . Temos que  $\tau \in N$  implica que  $p_k(\tau) \in U_k \forall k \in \{1, \dots, m\}$  (Obsérvese que  $p_m(\tau) = p_0(\tau)$ , xa que cada  $\varphi_\tau$  é unha curva pechada). En particular, como  $q$  non pertence a ningún dos  $U_k$ , temos que será distinto de  $p_0(\tau), \dots, p_{m-1}(\tau)$ .

Para rematar, veremos que para calquera  $\tau \in N$  e  $t \in \{1, \dots, m\}$ , os arcos  $A_k(\tau)$  e  $A_k(\alpha)$  teñen a mesma relación con respecto de  $q$ , é dicir, a cantidade  $r - s$  será igual para  $\varphi_\tau$  e  $\varphi_\alpha$ .

Caso 1: Sexa  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $U_k$  e  $U_{k-1}$  teñen un punto común. Temos que  $U_{k-1} \cup U_k$  é un arco conexo e  $D = C \setminus (U_{k-1} \cup U_k)$  é un arco conexo que corta a  $L_k$ , contén a  $q$  e, para todo  $\tau \in N$ , non contén nin a  $p_{k-1}(\tau)$  nin a  $p_k(\tau)$ . Como  $D$  é conexo, está totalmente contido nun dos dous arcos de  $C$  de  $p_{k-1}(\tau)$  a  $p_k(\tau)$ ; un destes é  $A_k(\tau)$  e o outro corta a  $L_k$ . Dado que  $D$  corta a  $L_k$ , dedúcese que  $D$  non corta a  $A_k(\tau)$ . Como  $q \in D$ , séguese que, para todo  $\tau \in N$ ,  $q \notin A_k(\tau)$ . Neste caso, a relación de  $A_k(\tau)$  a  $q$  é constante para todo  $\tau \in N$  e, se  $A_k(\alpha)$  non contén a  $q$ , entón tampouco o contén  $A_k(\tau)$  para  $\tau \in N$ .



Figura 1.15

Caso 2: Sexa  $k \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $U_k$  e  $U_{k-1}$  non teñen puntos comúns. Temos que  $C \setminus (U_{k-1} \cup U_k)$  está formado polos arcos  $D$  e  $E$ , sendo  $D$  o que corta a  $L_k$ . Co mesmo razoamento que no caso anterior, deducimos que  $D$  non corta a  $A_k(\tau)$  para ningún  $\tau \in N$ . Ademais, como  $E$  non corta a  $L_k$ , todos os arcos  $A_k(\tau)$  conteñen a  $E$  e están analogamente orientados de  $U_{k-1}$  a  $U_k$ . Agora  $q \notin U_{k-1} \cup U_k$ , polo tanto  $q \in D \cup E$ . Se  $q \in D$ , ningún dos arcos  $A_k(\tau)$ ,

con  $\tau \in N$ , contén a  $q$ . Se  $q \in E$ , todos os  $A_k(\tau)$ ,  $\tau \in N$ , conteñen  $q$  e están analogamente orientados. Así, a relación de  $A_k(\tau)$  a  $q$  é constante cando  $\tau$  varía en  $N$ .

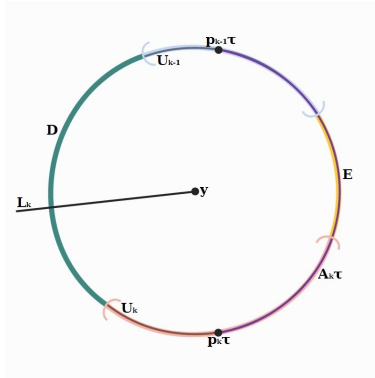


Figura 1.16

Temos entón demostrado que existe un entorno de  $\alpha$ ,  $N_\alpha = N$ , verificando que  $f(\tau) = f(\alpha) \forall \tau \in N_\alpha$ . □

**Teorema 1.21.** *Seja  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}$  unha curva pechada. Representen  $y_0$  e  $y_1$  dous puntos de  $\mathbb{P}$  que non pertencen á curva e que se poidan unir mediante un camiño  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}$  que non corta a  $\varphi$ . Temos entón igualdade no número de voltas:  $W(\varphi, y_0) = W(\varphi, y_1)$ .*

*Demostración.* Para cada  $t \in [a, b]$  e  $\tau \in [0, 1]$ , definimos  $\Phi(t, \tau)$  como o extremo do vector que comeza en  $\varphi(t)$  e é paralelo e da mesma lonxitude que o vector de orixe  $\psi(\tau)$  e extremo  $y_0$ . Deste modo, para un  $\tau$  fixado, temos que a curva  $\varphi_\tau(t) = \Phi(t, \tau)$  é obtida por unha traslación paralela da curva  $\varphi$ .

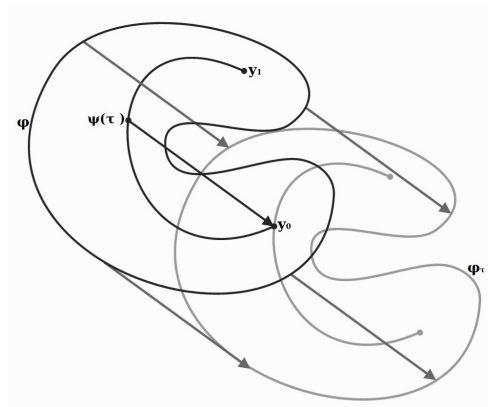


Figura 1.17

Da constancia do número de voltas por homotopía, dedúcese que  $W(\varphi_0, y_0) = W(\varphi_\tau, y_0)$ . Ademais, o par  $(\varphi_\tau, y_0)$  é congruente co par  $(\varphi_0, \psi(\tau))$  respecto á traslación do plano representada

polo vector con orixe  $\psi(\tau)$  e extremo  $y_0$ . Dado que o número de voltas queda invariable para unha congruencia, temos que  $W(\varphi_\tau, y_0) = W(\varphi_0, \psi(\tau))$ . Finalmente, combinando estas dúas igualdades temos que  $W(\varphi_0, y_0) = W(\varphi_0, \psi(\tau))$ , para todo  $\tau \in [0, 1]$ , polo que concluímos que  $W(\varphi, y_0) = W(\varphi, y_1)$ .  $\square$

Empregando agora os resultados e conceptos coñecidos, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 1.22.** *Sexa  $f: D \rightarrow \mathbb{P}$  unha representación dun disco no plano,  $C$  o contorno de  $D$  e  $y$  un punto do plano que non pertence a  $f(C)$ . Se o número de voltas de  $f|_C$  respecto de  $y$  é distinto de 0, resulta que  $y \in f(D)$ ; é dicir,  $\exists x \in D$  tal que  $f(x) = y$ .*

*Demostración.* Sexa  $y \in \mathbb{P}$  tal que  $y \notin f(D)$ . Sexa  $\varphi_0: [0, 1] \rightarrow C$  a representación estándar da curva  $C$  como curva pechada. Sexa  $\Phi$  a homotopía que contrae  $\varphi_0$  ata o centro  $z$  de  $D$ ,  $\Phi(t, \tau) = (1 - \tau)\varphi_0(t) + \tau z$ . Temos que  $f \circ \Phi$  é unha homotopía de  $f(\varphi_0)$  na curva pechada constante  $f(z)$ . Dado que  $f \circ \Phi([0, 1]^2) \subset f(D)$ , resulta que  $y \notin f \circ \Phi([0, 1]^2)$ . Xa vimos que  $W(f \circ \varphi_0, y) = W(f \circ \varphi_1, y)$ . Como  $f \circ \varphi_1 = f(z)$  é unha curva constante,  $W(f \circ \varphi_1, y) = 0$ . Polo tanto,  $W(f \circ \varphi_0, y) = 0$ .

Temos así que se  $y \notin f(D) \Rightarrow W(f \circ \varphi_0, y) = 0$ . É dicir,  $W(f \circ \varphi_0, y) \neq 0 \Rightarrow y \in f(D)$ .  $\square$

### 1.3. O número de voltas e o Grupo Fundamental

Nesta sección, empregaremos as referencias [1] e [3] para relacionar o número de voltas co Grupo Fundamental. En primeiro lugar, recordaremos algunhas definicións relevantes.

**Definición 1.23.** Sexan  $X$  un espazo topolóxico e  $x_0 \in X$  un punto. Diremos que o par  $(X, x_0)$  é un *espazo topolóxico con punto distinguido*, ou *espazo punteado*, e  $x_0$  é o seu *punto base*.

**Definición 1.24.** Dado un espazo punteado  $(X, x_0)$ , definimos un *lazo* en  $(X, x_0)$ , ou un *lazo en  $X$  con punto base  $x_0$* , como unha aplicación continua  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  verificando  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ . O conxunto dos lazos en  $(X, x_0)$  denótase por  $\Omega(X, x_0)$ .

**Definición 1.25.** O grupo  $\Omega(X, x_0)/\simeq$ , coa multiplicación de clases de homotopía de camiños, denomínase *grupo fundamental* do espazo punteado  $(X, x_0)$ , ou *grupo fundamental* de  $X$  en  $x_0$ , e denótase  $\pi_1(X, x_0)$ .

Cada elemento de  $\pi_1(X, x_0)$  será unha clase de homotopía de lazos. En particular, o grupo fundamental do plano sen un punto  $P$  ten un elemento para cada enteiro  $n$ , que se corresponde coa clase de homotopía formada polos lazos con número de voltas  $n$  ao redor de  $P$  ([3]).

Na sección anterior, demostramos que o número de voltas ao redor dun punto é invariante por homotopías. Veremos agora como, de feito, dous lazos en  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  son homótopos se e só se teñen o mesmo número de voltas ao redor de  $P$ .

En primeiro lugar, tomemos unhas coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  centradas en  $P$ . Definimos  $p: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$  como:

$$p(r, \theta) = P + (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

**Definición 1.26.** Dado un lazo  $\varphi$  con punto base  $a$  e  $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$ , diremos que unha curva  $\tilde{\varphi}: [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$ , con  $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{a}$  e  $p(\tilde{\varphi}(t)) = \varphi(t) \forall t$ , será un *levantamento* de  $\varphi$  con punto base  $\tilde{a}$ .

Agora, podemos reescribir a definición do número de voltas ao redor de  $P$  como:

$$W(\varphi, P) = \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}(1)) - \theta(\tilde{\varphi}(0))), \quad (1.1)$$

onde  $\theta: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a proxección á segunda coordenada. Esta definición non depende da elección do punto  $\tilde{a}$  nin do levantamento  $\tilde{\varphi}$ , e este sempre existe e é único para cada  $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$  ([1]).

Para concluír esta sección veremos algúns resultados de interese, mais primeiro definiremos os seguintes conceptos:

**Definición 1.27.** Dous curvas  $\varphi_0, \varphi_1: [0, 1] \rightarrow X$  cos mesmos puntos extremos son *homótopas con puntos extremos*,  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ , se existe unha función continua  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  verificando que:

- $H(t, 0) = \varphi_0(t) \forall t \in [0, 1]$
- $H(t, 1) = \varphi_1(t) \forall t \in [0, 1]$
- $H(0, \tau) = \varphi_0(0) \forall \tau \in [0, 1]$
- $H(1, \tau) = \varphi_0(1) \forall \tau \in [0, 1]$ .

A aplicación  $H$  será unha *homotopía conservando puntos extremos* de  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$ . No caso de dous lazos homótopos con puntos extremos, diremos que son *homótopos con punto base* e denotarémolo por  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ .

**Definición 1.28.** Dado un espazo topolóxico  $X$  e unha aplicación sobrexectiva  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , diremos que  $p$  é un *recubrimiento* e que  $\tilde{X}$  é un *espazo de recubrimiento* de  $X$  se, para cada  $x \in X$ , existe unha veciñanza  $U$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U)$  é a unión disxunta de abertos homeomorfos a  $U$  a través de  $p$ . A veciñanza  $U$  denomínase *veciñanza elemental* do recubrimiento.

*Observación 1.29.* Temos entón que un recubrimento será localmente un homeomorfismo, aínda que non necesariamente de xeito global.

**Exemplo 1.30.** A aplicación  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  é un recubrimento de  $\mathbb{S}^1$ . De feito, é a aplicación cociente da circunferencia como espazo cociente da recta real coa relación

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

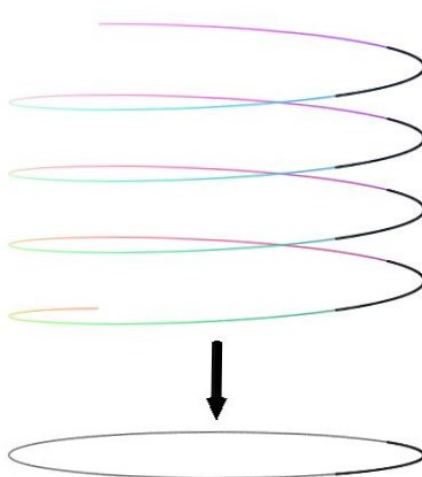


Figura 1.18: Representación do recubrimento anterior, mostrando  $\mathbb{R}$  con forma helicoidal sobre  $\mathbb{S}^1$ .

*Observación 1.31.* Dada unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  e un recubrimento de  $Y$   $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$ , unha función  $\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{Y}$  será un *levantamento* de  $f$  se se verifica que  $f = p \circ \tilde{f}$  ([1]).

**Lema 1.32** (Levantamento de homotopías). *Sexan  $\varphi_0, \varphi_1: [0, 1] \rightarrow X$  dúas curvas con  $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = a$  e  $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = b$ . Sexan  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimento de  $X$  e  $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$ . Supoñamos que  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  son homótopas a través dunha homotopía  $H$ . Entón, existe un único levantamento  $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  de  $H$  que comece en  $\tilde{a}$ .*

*Observación 1.33.* Este resultado será necesario para probar o seguinte teorema, mais a súa demostración non será incluída neste traballo. Se o lector o considera de interese, pode consultala en [1].

**Teorema 1.34.** *Dous lazos  $\varphi_0, \varphi_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$  son homótopos con punto base se e só se o seu número de voltas ao redor de  $P$  coincide:*

$$\varphi_0 \sim \varphi_1 \Leftrightarrow W(\varphi_0, P) = W(\varphi_1, P).$$

En particular, se  $W(\varphi, P) = n$ , entón  $\varphi$  é homótopo ao lazo  $\varphi_n(t) = P + (\cos 2n\pi t, \text{sen } 2n\pi t)$ .

*Demostración.* Probaremos cada implicación por separado.

En primeiro lugar, se os lazos son homótopos con punto base  $b$ , podemos aplicar o Lema 1.32 e temos que, para cada  $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$ , os seus levantamentos con punto base  $\tilde{b}$  serán tamén homótopos. Polo tanto, rematarán no mesmo punto e  $W(\varphi_0, P) = W(\varphi_1, P)$ .

Agora, no caso de que  $W(\varphi_0, P) = W(\varphi_1, P)$ , tomamos levantamentos  $\tilde{\varphi}_0$  e  $\tilde{\varphi}_1$  dos lazos  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  con punto base  $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$ . Así, ambos levantamentos rematan no mesmo punto e, polo tanto, serán curvas en  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  con puntos extremos comúns. Como  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  é convexo,  $\tilde{\varphi}_0$  e  $\tilde{\varphi}_1$  serán homótopas por algunha homotopía  $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Finalmente,  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  serán homótopas a través de  $H = p \circ \tilde{H}$ .  $\square$

**Corolario 1.35.** Dada  $\varphi_n$  a curva  $\varphi_n(t) = (\cos 2n\pi t, \text{sen } 2n\pi t)$ , cada lazo  $\varphi$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  con punto base  $(1, 0)$  será homótopo a un único lazo  $\varphi_n$ .

*Demostración.* É consecuencia inmediata do teorema anterior.  $\square$

**Definición 1.36.** Diremos que dous lazos  $\varphi_0, \varphi_1: [0, 1] \rightarrow X$  son *homótopos como lazos* se existe unha homotopía  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H(0, \tau) = H(1, \tau) \forall \tau$ . De ser así, diremos que cada curva  $\varphi_\tau$  definida por  $\varphi_\tau(t) = H(t, \tau)$  será un lazo.

**Corolario 1.37.** Dous lazos  $\varphi_0, \varphi_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  serán homótopos como lazos se e só se  $W(\varphi_0, 0) = W(\varphi_1, 0)$ .

*Demostración.* Para probar a primeira implicación, supoñamos que  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  son homótopos por unha homotopía  $H$ . Sexa  $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R}$  un levantamento de  $H$ . Como  $H$  é unha homotopía de lazos,  $p(\tilde{H}(0, \tau)) = p(\tilde{H}(1, \tau)) \forall \tau \in [0, 1]$ . Polo tanto,  $\theta(\tilde{H}(1, \tau)) - \theta(\tilde{H}(0, \tau))$  será un múltiplo de  $2\pi$  para todo  $\tau$ . Como ademais  $\theta(\tilde{H}(1, \tau)) - \theta(\tilde{H}(0, \tau))$  é unha función continua en  $\tau$ , isto implica que  $\theta(\tilde{H}(1, \tau)) - \theta(\tilde{H}(0, \tau))$  é constante. Así:

$$\theta(\tilde{H}(1, 0)) - \theta(\tilde{H}(0, 0)) = \theta(\tilde{H}(1, 1)) - \theta(\tilde{H}(0, 1))$$

e, pola definición do número de voltas estudada nesta sección:

$$W(\varphi_0, 0) = W(\varphi_1, 0).$$

Para demostrar a segunda implicación, tomemos  $n = W(\varphi_0, 0) = W(\varphi_1, 0)$ . Sexan  $\tilde{\varphi}_0$  e  $\tilde{\varphi}_1$  levantamentos de  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ , respectivamente. Sexa

$$\tilde{H}(t, \tau) = \tau\tilde{\varphi}_1(t) + (1 - \tau)\tilde{\varphi}_0(t).$$

Como  $\theta(\tilde{H}(1, \tau)) - \theta(\tilde{H}(0, \tau)) = 2\pi n \forall \tau \in [0, 1]$ , temos que  $p(\tilde{H}(0, \tau)) = p(\tilde{H}(1, \tau)) \forall \tau$  e, finalmente,  $H = p \circ \tilde{H}$  será unha homotopía de lazos de  $\varphi_0$  a  $\varphi_1$ .  $\square$

Por último, veremos unha nova propiedade do número de voltas que será empregada no terceiro capítulo deste traballo. Para demostrala, empregaremos a definición do número de voltas dada na Ecuación 1.1.

**Lema 1.38.** *Sexan  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dúas curvas pechadas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$  e sexa  $\varphi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$ . Temos entón que*

$$W(\varphi, P) = W(\varphi_1, P) + W(\varphi_2, P).$$

*Demostración.* Sexan  $\tilde{\varphi}_1$  un levantamento calquera de  $\varphi_1$ , e sexa  $\tilde{\varphi}_2$  un levantamento de  $\varphi_2$  verificando que  $\tilde{\varphi}_2(0) = \tilde{\varphi}_1(1)$ . Podemos garantir a existencia de  $\tilde{\varphi}_2$  en virtude do Lema 1.32. Deste modo:

$$\begin{aligned} W(\varphi_1, P) + W(\varphi_2, P) &= \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}_1(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_1(0))) + \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}_2(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_2(0))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}_1(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_1(0)) + \theta(\tilde{\varphi}_2(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_2(0))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}_1(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_1(0)) + \theta(\tilde{\varphi}_2(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_1(1))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\theta(\tilde{\varphi}_2(1)) - \theta(\tilde{\varphi}_1(0))) \\ &= W(\varphi, P). \end{aligned}$$

Esta última igualdade é consecuencia de que  $\tilde{\varphi}_1 \cdot \tilde{\varphi}_2$  é un levantamento de  $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ , que  $(\tilde{\varphi}_1 \cdot \tilde{\varphi}_2)(0) = \tilde{\varphi}_1(0)$  e que  $(\tilde{\varphi}_1 \cdot \tilde{\varphi}_2)(1) = \tilde{\varphi}_2(1)$ .  $\square$

## Capítulo 2

# O número de voltas no plano complexo

Neste novo capítulo consideraremos o plano complexo  $\mathbb{C}$ , que podemos identificar co plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , e estudaremos o concepto de índice dun punto respecto dun camiño pechado, que se corresponderá coa definición xa vista de número de voltas. Seguiremos as referencias [1], [3], [8] e [9].

### 2.1. A función índice

En primeiro lugar, queremos coñecer a función índice. Para isto, precisamos antes definir os seguintes conceptos:

**Definición 2.1.** Dado un camiño  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos a súa *traza*, que denotamos por  $\varphi^*$ , como a súa imaxe en  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi([a, b])$ .

**Definición 2.2.** Sexan  $\varphi_1: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\varphi_2: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dous camiños. Diremos que son *equivalentes* se existe unha aplicación continua e estrictamente crecente  $g: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow [c, d]$  tal que  $\varphi_2 \circ g = \varphi_1$ .

**Definición 2.3.** Dado un camiño  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos o seu *camiño oposto*,  $\varphi^-$ , como o camiño  $\varphi^-: t \in [-b, -a] \rightarrow \varphi^-(t) = \varphi(-t) \in \mathbb{C}$ .

**Definición 2.4.** Dada unha curva  $\varphi$  en  $\mathbb{C}$ , diremos que esta é *regular a cachos* se é continuamente diferenciable a cachos, é dicir, se existe unha partición de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ , tal que  $\varphi_i \in C^1([t_{i-1}, t_i])$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Definición 2.5.** Definimos a *lonxitude* dunha curva regular a cachos  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , que denotamos por  $long(\varphi)$ , como:

$$long(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

**Definición 2.6.** Sexa  $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  unha curva regular a cachos e  $f$  unha función continua na traza de  $\varphi$ . Definimos a *integral de  $f$  ao longo da curva  $\varphi$* , que denotamos por  $\int_{\varphi} f$ , como:

$$\int_{\varphi} f = \int_a^b (f \circ \varphi) \varphi'.$$

Cómpre mencionar algunhas das propiedades de interese da integral dunha función  $f$  ao longo dun camiño  $\varphi$ , como son:

- Se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  son equivalentes, entón:  $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$ .
- $\int_{\varphi^-} f = - \int_{\varphi} f$ .
- $\left| \int_{\varphi} f(z) dz \right| \leq \sup\{|f(z)|; z \in \varphi^*\} \text{long}(\varphi)$ .

A continuación, veremos unha nova definición para o concepto xa coñecido de *número de voltas*:

**Definición 2.7.** Dados un camiño pechado  $\varphi$  e un punto  $z \in \mathbb{C} \setminus \varphi^*$ , definimos o *índice do punto  $z$  respecto a  $\varphi$* , que denotamos por  $Ind_{\varphi}(z)$ , como:

$$Ind_{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{w-z} dw.$$

*Observación 2.8.* Pódese comprobar que o resultado de facer esta operación coincide co de dividir entre  $2\pi$  a diferenza dos argumentos en  $\varphi(b) - z$  e  $\varphi(a) - z$  ([8]). Coñecendo entón a interpretación xeométrica do argumento, é claro que a definición anterior coincide con  $W(\varphi, z)$ . Polo tanto, as propiedades que estudemos da función índice serán propiedades de  $W(\varphi, z)$ .

## 2.2. Propiedades

Agora que coñecemos outro modo de calcular o número de voltas, estudaremos algunhas das propiedades desta función.

**Proposición 2.9.** Sexa  $\varphi$  un camiño pechado. A función  $Ind_{\varphi}: z \in \mathbb{C} \setminus \varphi^* \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{w-z} dw$  verifica:

- É continua en  $\mathbb{C} \setminus \varphi^*$ .
- Toma valores enteiros.
- É constante en cada compoñente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \varphi^*$ .

*Demostración.* En primeiro lugar, vexamos que  $Ind_\varphi$  é continua en  $\mathbb{C} \setminus \varphi^*$ . Para isto, fixemos un  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \varphi^*$  e tomemos  $0 < r = d(z_0, \varphi^*)$ . Temos así que, para calquera  $z \in \mathbb{C} \setminus \varphi^*$ :

$$\begin{aligned} |Ind_\varphi(z) - Ind_\varphi(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\varphi \frac{z - z_0}{(w - z)(w - z_0)} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{long}(\varphi) \frac{|z - z_0|}{\min_{w \in \varphi^*} |w - z| \min_{w \in \varphi^*} |w - z_0|}, \end{aligned}$$

e, como  $\min_{w \in \varphi^*} |w - z_0| = r$  e  $\min_{w \in \varphi^*} |w - z| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} r$ , concluímos que

$$|Ind_\varphi(z) - Ind_\varphi(z_0)| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

Para demostrar agora que se verifica a segunda propiedade, parametricemos o camiño como  $\varphi: t \in [a, b] \rightarrow \varphi(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)} \in \mathbb{C}$ , para un  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \varphi^*$  calquera. Como é pechado, temos que  $r(a) = r(b)$  e, pola periodicidade da exponencial,  $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Para finalizar, apliquemos a definición de índice e a de integral dunha función ao longo dun camiño:

$$\begin{aligned} Ind_\varphi(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b i\theta'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\log(r(b)) - \log(r(a))) + \frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) = k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A última propiedade dedúcese directamente das dúas anteriores.  $\square$

*Observación 2.10.* A proba desta demostración foi realizada imitando argumentos empregados na materia de Variable Complexa.

Para rematar esta sección, estudaremos unha interesante calidade da función índice que será empregada nos seguintes capítulos:

**Proposición 2.11.** *Sexan  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus P$  curvas pechadas tales que  $|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - P| \forall t \in [0, 1]$ . Entón  $Ind_\alpha(P) = Ind_\beta(P)$ .*

*Observación 2.12.* Para interpretar xeometricamente esta proposición, é habitual empregar a seguinte lectura informal: Se unha persoa (que percorrería o camiño  $\alpha$ ) leva un can (camiño  $\beta$ ) atado cunha correa de lonxitude menor que a distancia da persoa a unha determinada árbore ( $P$ ), entón a persoa e o can darán o mesmo número de voltas ao redor desta árbore.

*Demostración.* Definimos unha homotopía  $H$  de  $\alpha$  en  $\beta$  por:

$$H(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t).$$

Esta homotopia leva  $\alpha$  a  $\beta$  por segmentos de recta de  $\alpha(t)$  en  $\beta(t)$ . Como ademais  $|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - P| \forall t \in [0, 1]$ ,  $H$  será unha homotopia de curvas pechadas en  $\mathbb{C}^2 \setminus P$ . Aplicando o Corolario 1.37, concluímos que  $Ind_\alpha(P) = Ind_\beta(P)$ .  $\square$

## Capítulo 3

# O número de voltas e o grao

Procedemos agora a definir o grao dunha aplicación continua e relacionalo co que xa coñecemos como índice, baseándonos nas referencias [1], [3], [5], [6] e [7]. Isto permitiranos enunciar algúns resultados de interese para o último capítulo.

En primeiro lugar, debemos familiarizarnos con algúns conceptos básicos de homoloxía singular que serán necesarios para esta parte.

### 3.1. Homoloxía singular

**Definición 3.1.** Definimos o  $n$ -símplex estándar,  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , como:

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}, \sum_{i=0}^n x_i = 1\}.$$

Os puntos  $v_1(1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_3 = (0, \dots, 0, 1)$  denomínanse os *vértices* de  $\Delta^n$ .

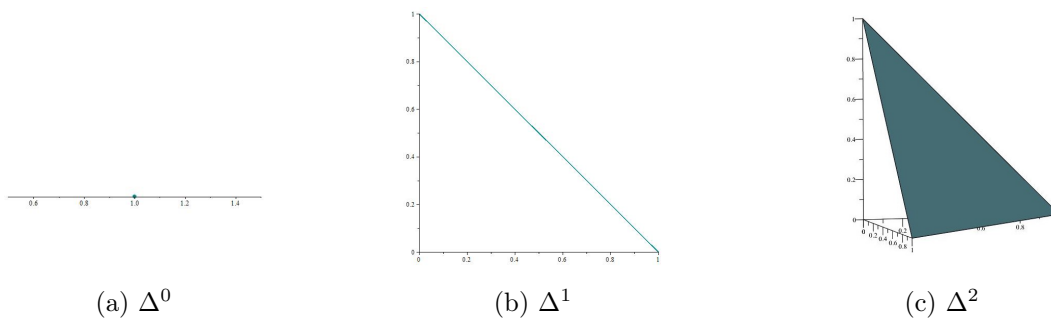


Figura 3.1: Representación gráfica dos tres primeiros  $n$ -símplices estándar.

**Definición 3.2.** Dado un espazo topolóxico  $X$ , denominamos *n-símplice singular* a unha aplicación continua de  $\Delta^n$  en  $X$ . Denotaremos por  $S_n(X)$  o conxunto de todos os  $n$ -símplices singulares  $f: \Delta^n \rightarrow X$ .

*Observación 3.3.* Cando facelo non dea lugar a ambigüidades, poderemos abreviar  $S_n(X)$  por  $S_n$ .

Para determinar agora o *borde* dun  $n$ -símplice, definimos as aplicacións  $d^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $0 \leq i \leq n$ , como

$$d^i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

Temos entón que  $d^i(\Delta^{n-1}) \subset \Delta^n$ , polo que podemos restrinxir a aplicación a  $d^i|_{\Delta^{n-1}}: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ . Así, definimos o borde de  $\Delta^n$  como:

$$d^0(\Delta^{n-1}) \cup d^1(\Delta^{n-1}) \cup \dots \cup d^n(\Delta^{n-1}).$$

De aquí séguese que, dado un  $n$ -símplice singular  $f: \Delta^n \rightarrow X$ , compoñéndoo cas  $n + 1$  aplicacións  $d^i$ , obtemos  $n + 1$   $(n - 1)$ -símplices singulares  $f \circ d^i: \Delta^{n-1} \rightarrow X$ , que conformarán o borde de  $f$ . O obxectivo será agora definir un *operador borde*, que a partir dun símplice nos devolva o borde do mesmo. Para isto, definimos  $C_n(X)$  (ou  $C_n$ ) como o grupo abeliano libre en  $S_n(X)$ , é dicir, o conxunto das combinacións lineais de  $n$ -símplices singulares con coeficientes enteiros. Os elementos de  $C_n$  son da forma

$$\sum_{j \in J} m_j \varphi_j,$$

con  $\varphi_j \in S_n$ ,  $m_j \in \mathbb{Z}$  e  $J$  un conxunto finito de índices, e denomínanse *n-cadeas singulares*. A fronteira dun  $n$ -símplice singular  $f$  será a  $(n - 1)$ -cadea singular

$$\delta_n(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ d^i.$$

Extendendo isto aditivamente obtemos un homomorfismo ([6])  $\delta_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ , ao que denominaremos *operador borde singular*.

*Observación 3.4.* Tanto as aplicacións  $d_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  como os homomorfismos  $\delta_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$  están definidas para  $n \geq 1$ . Para  $n = 0$ , consideraremos  $\delta_0: C_n \rightarrow 0$  ([5]).

Vexamos agora unha propiedade importante deste operador:

**Lema 3.5.** *Para cada  $n \geq 1$ , a composición*

$$\delta_n \circ \delta_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_{n-1}$$

*da lugar ao homomorfismo nulo.*

*Demostración.* Estudemos primeiro a composición  $d^i \circ d^j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} d^i \circ d^j(x_0, \dots, x_{n-1}) &= d^i(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1}) \\ &= \begin{cases} (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \dots, x_{n-1}) & \text{se } i > j, \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-1}) & \text{se } i \leq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Deducimos entón que

$$d^i \circ d^j = \begin{cases} d^j \circ d^{i-1} & \text{se } i > j, \\ d^{j+1} \circ d^i & \text{se } i \leq j. \end{cases}$$

Agora, pola definición de  $C_{n+1}$ , como  $\delta_n$  e  $\delta_{n+1}$  son aditivos, basta ver que  $\delta_n \circ \delta_{n+1}(f) = 0$  para un  $(n+1)$ -símplece singular  $f : \Delta^{n+1} \rightarrow X$ :

$$\begin{aligned} \delta_n \circ \delta_{n+1}(f) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f \circ d^i \right) \circ d^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) + \sum_{j=0}^n \sum_{i=j+1}^{n+1} (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) + \sum_{j=0}^n \sum_{i=j+1}^{n+1} (-1)^{i+j} f \circ (d^j \circ d^{i-1}) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j+i} f \circ (d^i \circ d^{j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} f \circ (d^i \circ d^j) + \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j+1} f \circ (d^i \circ d^j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} (f \circ (d^i \circ d^j) - f \circ (d^i \circ d^j)) = 0. \end{aligned}$$

□

**Definición 3.6.** Diremos que unha  $n$ -cadea singular  $c \in C_n(X)$  é un  $n$ -ciclo se  $\delta_n(c) = 0$ . Denotaremos o conxunto dos  $n$ -ciclos de  $X$  por  $Z_n(X) = \ker \delta_n$ .

*Observación 3.7.* No caso de  $n = 0$ , toda 0-cadea singular será un 0-ciclo, polo que  $Z_0(X) = C_0(X)$ .

**Definición 3.8.** Un  $n$ -borde é unha cadea  $d \in C_n(X)$  para a cal existe un  $e \in C_{n+1}(X)$  verificando que  $d = \delta_n(e)$ . O conxunto dos  $n$ -bordes de  $X$  será denotado por  $B_n(X) = \text{Im } \delta_{n+1}$ .

*Observación 3.9.* Como as aplicacións  $\delta_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , con  $n \geq 0$ , son homomorfismos, é claro que tanto  $Z_n(X)$  como  $B_n(X)$  serán subgrupos de  $C_n(X)$ .

Vistos xa estes conceptos, agora podemos definir:

**Definición 3.10.** O  $n$ -ésimo grupo de homoloxía dun espazo topolóxico  $X$  é o grupo cociente

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}.$$

Deste xeito, os elementos de  $H_n(X)$  serán clases de equivalencia de  $n$ -ciclos, pola relación de equivalencia

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_n(X),$$

con  $c, c' \in Z_n(X)$ . Cando se verifique que  $c \sim c'$ , diremos que os ciclos son *homólogos*.

Dende un punto de vista máis informal, os grupos de homoloxía poden ser interpretados como un modo de 'contar buracos'  $n$ -dimensionais. Deste xeito, a  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n$  terá un buraco  $n$ -dimensional ( $H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ ) e ningún  $m$ -dimensional ( $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$ ) para  $m \neq n$ , agás para o caso excepcional  $m = 0$ . No caso de  $m = 0$ , podemos considerar que  $H_0(X)$  nos proporciona información acerca do número de compoñentes conexas do espazo topolóxico  $X$  ([6]).

A continuación, enunciaremos algunhas das propiedades dos grupos de homoloxía que serán de interese tanto neste capítulo como no seguinte.

**Teorema 3.11.** *Dados dous espazos topolóxicos  $X$  e  $Y$ , e unha aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$ , existe un homomorfismo inducido  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  para cada  $n \geq 0$  verificando:*

- Se  $g: Y \rightarrow Z$  é outra aplicación continua, con  $Z$  un espazo topolóxico, entón  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .
- Se  $id_X: X \rightarrow X$  é a aplicación identidade, entón  $id_{X*}: H_n(X) \rightarrow H_n(X)$  é o homomorfismo identidade para cada  $n$ .
- Se  $h: X \rightarrow Y$  é homótopa a  $f$ , entón  $h_* = f_*$ .

*Observación 3.12.* Omitiremos a proba deste teorema por non ser necesaria para este traballo, mais pode consultarse na referencia [6].

**Corolario 3.13.** *Se  $X$  e  $Y$  son homotopicamente equivalentes, entón para cada  $n \geq 0$ ,  $H_n(X)$  e  $H_n(Y)$  serán grupos isomorfos.*

*Observación 3.14.* Recordamos que dous espazos topolóxicos  $X$  e  $Y$  dinse *homotopicamente equivalentes* se existen dúas aplicacións continuas  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f$  é homótopa a  $id_X$  e  $f \circ g$  é homótopa a  $id_Y$ .

**Lema 3.15.** *Se  $X$  é un espazo formado por un único punto, entón  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n(X) = 0$  para  $n > 0$ .*

*Demostración.* Para todo  $n \geq 0$  existe un único  $n$ -símplice singular  $\varphi_n: \Delta^n \rightarrow X$  e, polo tanto

$$C_n(X) = \{k \varphi_n; \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ademais, para  $n > 0$  temos que  $\varphi_n \circ d^i = \varphi_{n-1}$ , polo que

$$\begin{aligned} \delta_n(\varphi_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi_n \circ d^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi_{n-1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é impar,} \\ \varphi_{n-1} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outra banda, xa sabemos que para  $n = 0$  temos que  $\delta_0(\varphi_0) = 0$ .

Do anterior, deducimos que

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \begin{cases} C_n(X) & \text{se } n \text{ é impar ou } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \text{ é par e } n > 0. \end{cases} \\ B_n(X) &= \begin{cases} C_n(X) & \text{se } n \text{ é impar,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

□

*Observación 3.16.* A partir deste lema e do corolario anterior, é inmediato que  $H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_k(D^n) = 0$  para  $k > 0$ .

**Teorema 3.17.** *Sexa  $n$  un enteiro positivo. Verifícase que*

$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\}, \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

*Observación 3.18.* A demostración deste teorema pode consultarse en [7].

## 3.2. O grao dunha aplicación

Agora que coñecemos os grupos de homoloxía, podemos traballar con novos conceptos relacionados co número de voltas.

Tomando entón unha curva pechada calquera  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ , consideremos o homomorfismo inducido:

$$F_*: H_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P).$$

Como  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  é homotopicamente equivalente a unha circunferencia,  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus P)$  será isomorfo a  $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ , e a aplicación  $F_*$  será a multiplicación por unha constante. Esta constante será o que denominaremos como *grao* de  $F$ , denotado por  $\deg(F)$ , e o seu valor coincidirá con  $W(F, P)$  ([1]).

Buscando extender o concepto de grao a aplicacións definidas en calquera  $\mathbb{S}^n$ , con  $n \geq 1$ , tomamos unha aplicación  $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Como  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , teremos que  $F$  inducirá un homomorfismo en  $H_n$  que consistirá de novo en multiplicar por un enteiro, o grao da aplicación. Ademais, podemos afirmar que o grao é un invariante homotópico e que verifica:

- $\deg(F \circ G) = (\deg F)(\deg G)$
- $\deg id_{\mathbb{S}^n} = 1$
- $\deg A = (-1)^n$ , sendo  $A$  a aplicación que leva cada punto de  $\mathbb{S}^n$  no seu antipodal
- $\deg F = \deg G$  se e só se  $F \simeq G$

Neste traballo consideraremos unicamente o grao en aplicacións definidas en  $\mathbb{S}^1$ , relacionándoo así co índice. Xa sabemos que, dada  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ ,  $\deg(F) = W(F, P)$ . Como ata agora traballamos co número de voltas dunha curva definida nun intervalo, é preciso concretar a definición de  $W(F, P)$ .

Sexa  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha curva pechada. Identificando de novo o plano euclidiano co complexo, podemos tomar unha aplicación  $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , con  $\pi(t) = e^{i2\pi t}$  para  $t \in [0, 1]$ . Así, definimos  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ , con  $P$  un punto de  $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi([0, 1])$ , por

$$F(e^{i2\pi t}) = \varphi(t), \text{ con } t \in [0, 1],$$

polo que  $\varphi$  será a composición  $F \circ \pi$ . Pola continuidade de  $\varphi$ , a aplicación  $F$  será continua. Ademais, temos unha correspondencia bixectiva entre as curvas pechadas  $\varphi$  e as aplicacións  $F$  definidas na esfera unidade ([1]).

Definimos entón con esta notación  $W(F, P) = W(\varphi, P)$ , polo que  $\deg(F) = W(F, P) = W(\varphi, P)$ .

**Exemplo 3.19.** Sexa  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $f(z) = z^n$ . Considerando  $\varphi: t \in [0, 1] \rightarrow \varphi(t) = (f \circ \pi)(t)$ , temos que  $\varphi(t) = e^{i2n\pi t} = (\cos 2n\pi t, \sin 2n\pi t)$ . Como  $W(\varphi, 0) = n$ , o grao de  $f$  será  $\deg(f) = n$ .

A continuación, veremos algúns resultados que empregan estes novos conceptos estudados e que serán relevantes no último capítulo deste traballo.

**Proposición 3.20.** *Sexan  $F, G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$  tales que  $|F(x) - G(x)| < |F(x) - P| \forall x \in \mathbb{S}^1$ . Entón  $W(F, P) = W(G, P)$ .*

*Demostración.* Definamos dous camiños  $\alpha$  e  $\beta$  como:  $\alpha(t) = F(e^{i2\pi t})$  e  $\beta(t) = G(e^{i2\pi t})$ . Aplicando a Proposición 2.11, temos que  $W(\alpha, P) = W(\beta, P)$ . Polo tanto,  $W(F, P) = W(G, P)$ .  $\square$

**Proposición 3.21.** *Sexa  $D$  un disco en  $\mathbb{R}^2$ ,  $C = \partial D$  e  $F: C \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ . Entón  $W(F, P) = 0$  se e só se  $F$  se estende a unha aplicación continua  $\tilde{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ .*

*Demostración.* Podemos supoñer, sen perda de xeneralidade, que  $D$  é o disco unidade no plano complexo. Vexamos que se verifican as dúas implicacións por separado.

Se  $W(F, P) = 0$ , entón  $F$  é homótopo a unha aplicación constante por unha homotopía  $H: C \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ , con  $H(x, 0) = F(x) \forall x \in C$  e  $H(x, 1) = b \forall x \in C$ , para certo  $b \in \mathbb{R}^2 \setminus P$ . Escribindo os puntos  $x \in D$  como  $x = re^{i\theta}$ , podemos definir a extensión de  $F$  por:

$$\tilde{F}(re^{i\theta}) = H(e^{i\theta}, r).$$

Supoñamos agora que  $F$  se estende a unha aplicación continua  $\tilde{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus P$ . Entón, para cada par  $(e^{i\theta}, r) \in C \times I$  definimos  $H(e^{i\theta}, r)$  como:

$$H(e^{i\theta}, r) = \tilde{F}(re^{i\theta}).$$

Temos así unha homotopía  $H$  entre  $F$  e unha aplicación constante que leva  $I$  en  $\tilde{F}(0, 0)$ .  $\square$

Cando definimos o grao dunha aplicación  $F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  afirmamos que era un invariante homotópico. No seguinte lema probaremos este resultado cando  $n = 1$ .

**Lema 3.22.** *Dúas aplicacións  $F, G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  teñen o mesmo grao se e só se son homótopas.*

*Demostración.* A proba da segunda implicación é inmediata. Se  $F$  e  $G$  son homótopas, entón deben inducir unha mesma aplicación en homoloxía. Polo tanto, terán o mesmo grao.

Agora, supoñendo que  $F$  e  $G$  teñen o mesmo grao, entón  $W(F, 0) = W(G, 0)$ . Polo Teorema 1.34, existe unha homotopía  $H$  de  $F$  en  $G$ . Porén, a imaxe de  $H$  pode non estar contida en  $\mathbb{S}^1$ . Definimos entón unha aplicación  $p: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , que será a proxección radial en  $\mathbb{S}^1$ :

$$p(r \cos \theta, r \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

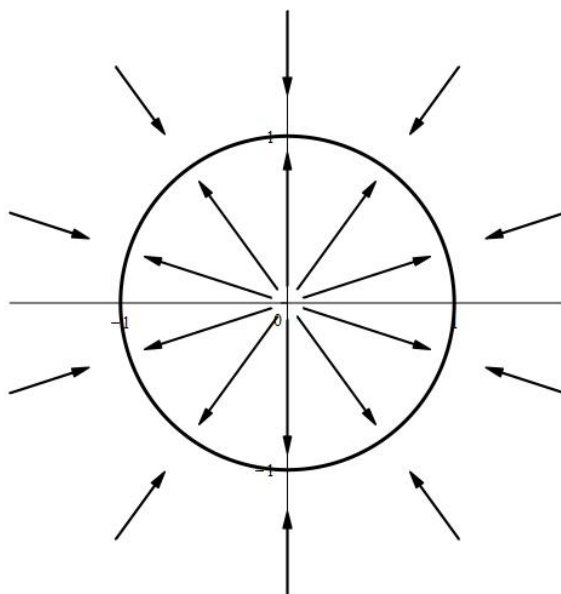


Figura 3.2

Así, a homotopía  $H': \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , con

$$H'(t, \tau) = p \circ H(t, \tau),$$

será unha homotopía de  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  en  $G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .  $\square$

*Observación 3.23.* A partir deste lema podemos deducir que toda aplicación  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  de grao  $n$  será homótopa á aplicación  $f(z) = z^n$  (considerando de novo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ).

Para rematar este capítulo, vexamos agora algunhas propiedades interesantes do grao dunha aplicación:

**Lema 3.24.** *Sexan  $F, G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Denotemos por  $H$  a composición  $F \circ G$ . Temos así que:*

$$\deg(H) = \deg(F) \deg(G).$$

*Demostración.* En primeiro lugar, debemos advertir que se  $F$  varía por unha homotopía  $F_\tau$ , entón  $H$  varía a través da homotopía  $F_\tau \circ G$ . Do mesmo modo, se  $G$  varía por unha homotopía  $G_\tau$ , entón  $H$  varía a través da homotopía  $F \circ G_\tau$ .

Supoñamos que  $\deg(F) = m$  e  $\deg(G) = n$ . Pola Observación 3.23,  $F$  será homótopa á aplicación  $z \rightarrow z^m$  e  $G$  a  $z \rightarrow z^n$ . Polo parágrafo anterior, isto implica que  $H$  será homótopa á composición destas aplicacións,  $z \rightarrow z^{mn}$ . Finalmetente, polo Lema 3.22, o grao de  $H$  será  $mn$ .  $\square$

**Proposición 3.25.** *Unha aplicación par  $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  terá grao par, e unha aplicación impar  $G: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  terá grao impar.*

*Demostración.* Comecemos co caso de  $F$  par. Definimos unha nova función  $H: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  por

$$H(z) = F(w), \text{ con } w^2 = z.$$

Como  $F$  é par,  $H$  está ben definida.

Vexamos agora como, ademais,  $H$  é continua. Sexa  $\epsilon > 0$ . Como  $F$  é continua, existe un  $\delta > 0$  tal que  $|w_1 - w_2| < \delta$  implica  $|F(w_1) - F(w_2)| < \epsilon$ . Supoñamos que  $|z_1 - z_2| < \delta^2$ , con  $z_1 = w_1^2$  e  $z_2 = w_2^2$ . Entón:

$$|w_1 - w_2||w_1 + w_2| = |w_1^2 - w_2^2| < \delta^2,$$

polo que  $|w_1 - w_2|$  ou  $|w_1 + w_2|$  debe ser menor que  $\delta$ . Cunha elección adecuada do signo de  $w_1$  e  $w_2$ , podemos arranxar para que  $|w_1 - w_2| < \delta$ . Deste modo, temos probada a continuidade de  $H$ :  $|z_1 - z_2| < \delta^2 \Rightarrow |H(z_1) - H(z_2)| < \epsilon$ .

Agora, podemos escribir  $F$  como  $F = H \circ S$ , con  $S(w) = w^2$ . Como  $\deg(S) = 2$ , basta aplicar o lema anterior para probar que o grao de  $F$  debe ser múltiplo de 2.

Para demostrar o caso de  $G$  impar, definimos a función par  $F(z) = zG(z)$ . Xa vimos que o grao de  $F$  será par. Aplicando o Lema 1.38, temos que  $\deg(F) = 1 + \deg(G)$ , polo que concluímos que  $G$  terá grao impar.  $\square$



## Capítulo 4

# A propiedade de punto fixo

Neste capítulo estudaremos o que se denomina como a propiedade de punto fixo, para o que seguiremos as referencias [2], [3], [5] e [6].

**Definición 4.1.** Dado un espazo topolóxico  $X$ , un subconxunto  $A \subset X$  será un *retracto* de  $X$  se existe unha aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = id_A$ , onde  $i: A \rightarrow X$  é a inclusión. A aplicación  $r$  denominarase unha *retracción*.

**Teorema 4.2.** *Non existe unha aplicación continua  $f: D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Sexa  $f: D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  continua verificando  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Tomamos a inclusión  $i: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow D^n$ . Como  $f$  é un retracto, o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{i} & D^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^{n-1} \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & id_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{array}$$

Polo Teorema 3.11, sabemos que estas aplicacións inducen, para cada  $k \geq 0$ , uns homomorfismos  $i_*$ ,  $f_*$  e  $id_{\mathbb{S}^{n-1}*} = f_* \circ i_*$ :

$$\begin{array}{ccccc} H_k(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_k(D^n) & \xrightarrow{f_*} & H_k(\mathbb{S}^{n-1}) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & id_{\mathbb{S}^{n-1}*} \end{array}$$

Basta tomar  $k = n - 1$  para chegar a unha contradición, xa que  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_{n-1}(D^n) = 0$ , o que nos daría unha composición

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & id_{\mathbb{Z}} \end{array}$$

o cal non pode ocorrer. □

*Observación 4.3.* É evidente que o caso  $n = 1$  pode ser resolto de xeito inmediato sen recorrer á homoloxía, empregando o feito de que  $D^1 = [0, 1]$  é conexo e  $\mathbb{S}^0 = \{0, 1\}$  non o é. Ademais, é habitual estudar tamén o caso  $n = 2$  por separado, xa que se pode resolver utilizando as propiedades da función índice que xa coñecemos: Sexa  $f: D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  a aplicación descrita, definimos unha familia de aplicacións  $h_t: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , con  $h_t(e^{i\theta}) = f(te^{i\theta})$ . Temos que  $h$  é unha homotopía con  $h_1 = id_{\mathbb{S}^1}$  e  $h_0 \equiv f(0) = cte$ . Porén, sabemos que a aplicación identidade  $id_{\mathbb{S}^1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  ten índice 1 e unha aplicación constante ten índice 0. Aplicando finalmente o Teorema 1.20 chegamos a unha contradición, xa que non pode existir tal homotopía.

**Teorema 4.4** (Teorema de Brouwer de punto fixo). *Sexa  $g: D^n \rightarrow D^n$  unha aplicación continua. Entón  $g$  ten un punto fixo. Noutras palabras, existe un punto  $x \in D^n$  tal que  $g(x) = x$ .*

*Demostración.* Supoñamos que  $g$  non ten ningún punto fixo. Definimos entón unha aplicación  $f: D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  de modo que: Para cada  $x \in D^n$ , como  $g(x) \neq x$ , temos unha única semirrecta que comeza en  $g(x)$  e pasa por  $x$ . Definimos  $f(x)$  como o único punto no que esta semirrecta interseca con  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

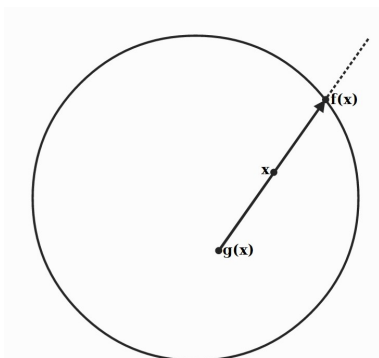


Figura 4.1: Representación da construción de  $f$  para  $n = 2$ .

Será suficiente con demostrar que  $f$  é continua. Deste modo temos que, pola construción de  $f$ ,  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Isto implica que  $f$  é unha retracción, o que nos leva a unha contradición co teorema anterior.

Para demostrar a continuidade de  $f$ , tomemos un punto calquera  $x_0 \in D^n$  e  $V \subset \mathbb{S}^{n-1}$  un entorno de  $f(x_0)$ . Queremos construír un entorno  $U \subset D^n$  de  $x_0$  tal que  $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$ .

En primeiro lugar, existe un real  $r > 0$  tal que, se  $x \in B(x_0, r)$  e  $g(x) \in B(g(x_0), r)$ , entón  $f(x) \in V$ . Na seguinte imaxe mostramos esta construción para  $n = 2$ :

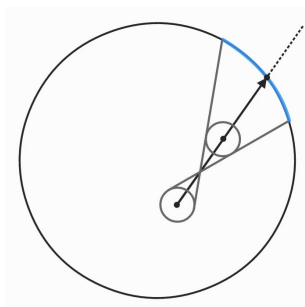


Figura 4.2: Representación dos entornos  $B(x_0, r)$ ,  $B(g(x_0), r)$  e  $V$  (en azul). Pódese comprobar que calquera recta que interseque con ambas bólas abertas intersecará coa circunferencia na rexión  $V$ .

Agora, como  $g$  é continua, existe un real  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in B(x_0, \delta)$ ,  $g(x) \in B(g(x_0), \delta)$ . Polo tanto, bastará tomar  $U = B(x_0, \delta')$ , con  $\delta' = \min\{r, \delta\}$ .  $\square$

*Observación 4.5.* A demostración deste Teorema depende unicamente das propiedades topolóxicas de  $D^n$ . Polo tanto, podemos afirmar que todo espacio topolóxico  $X$  homeomorfo a  $D^n$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , terá a propiedade de punto fixo.



## Capítulo 5

# Aplicacións

A modo de conclusión, neste último capítulo traballaremos con algunhas das xa mencionadas aplicacións dos conceptos estudados a diversos campos das matemáticas. Veremos que a noción de número de voltas é interesante, non só para Topoloxía e Análise Complexo, senón tamén noutras áreas nas que, directa ou indirectamente, nos permite demostrar resultados de considerable importancia.

### 5.1. O Teorema Fundamental da Álgebra

Nesta sección seguiremos as referencias [1] e [10] para demostrar o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$  é alxebricamente pechado. Para isto, precisamos antes recordar os seguintes conceptos:

**Definición 5.1.** Sexa  $E|F$  unha extensión de corpos. Diremos que un elemento  $\alpha \in E$  é *alxébrico* sobre  $F$  se existe un polinomio non nulo  $f \in F[X]$  tal que  $f(\alpha) = 0$ .

**Definición 5.2.** Unha extensión de corpos  $E|F$  dirase *alxébrica* se todo elemento  $\alpha \in E$  é alxébrico sobre  $F$ .

**Definición 5.3.** Un corpo  $E$  será *alxebricamente pechado* cando todo polinomio non constante en  $F[X]$  teña unha raíz en  $F$ .

Con estas definicións xa podemos enunciar o teorema.

**Teorema 5.4** (Teorema Fundamental da Álgebra). *O corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$  é alxebricamente pechado.*

*Demostración.* É suficiente demostrar que para todo  $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$  con  $\deg(P) \geq 1$ , existe un complexo  $z_0$  tal que  $P(z_0) = 0$ .

Sexa  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Podemos escribilo como:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

con  $a_n \neq 0$ .

Sexa agora  $C^r \subset \mathbb{C}$  a circunferencia centrada en 0 e de raio  $r$ . Queremos demostrar que, para un  $r$  suficientemente grande, o polinomio  $P(x)$  se comportará como  $P_n(x) = a_n z^n$  e, polo tanto, o grao da aplicación  $P|_{C_r}: C_r \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  será distinto de 0. Definimos entón

$$R = \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|}{|a_n|}.$$

Dado un  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \geq R$ . Como  $a_n \neq 0$  e  $R > 1$ , temos:

$$\begin{aligned} |P(z) - P_n(z)| &= |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \cdots + |a_1| |z| + |a_0| \\ &< (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) |z|^{n-1} \\ &< |a_n| R |z|^{n-1} \\ &\leq |a_n| |z|^n = |P_n(z)|. \end{aligned}$$

Polo tanto,  $|P(z) - P_n(z)| < |P_n(z)|$  cando  $z \in C_r$ , con  $r \geq R$ . Pola proposición 3.20,  $\deg(P|_{C_r}) = W(P|_{C_r}, 0) = W(P_n|_{C_r}, 0) = n$ . Pola proposición 3.21, isto implica que  $P|_{C_r}$  non se estende a unha aplicación continua do disco  $\overline{B(0, r)}$  con imaxe en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Finalmente, como  $P$  estaba definido en todo  $\mathbb{C}$  e, polo tanto, en  $\overline{B(0, r)}$ , concluimos que existe un  $z_0 \in \overline{B(0, r)}$  que verifica  $P(z_0) = 0$ .  $\square$

## 5.2. O Teorema do bocadillo de xamón

A continuación, probaremos dous novos teoremas recorrendo aos conceptos xa estudados do grao dunha aplicación. Seguiremos as referencias [1] e [3].

En primeiro lugar, traballaremos co Teorema Borsuk-Ulam, para o que veremos unha interesante interpretación. Posteriormente, enunciaremos o comunmente denominado Teorema do bocadillo de xamón, que probaremos aplicando o anterior.

**Definición 5.5.** Sexan  $a, b \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Diremos que son *antípodais* se  $a = -b$  como vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso,  $b$  dirase a *antípoda* de  $a$  e escribirase  $b = A(a)$ .

**Teorema 5.6** (Teorema Borsuk-Ulam). *Sexa  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha aplicación continua. Existe un punto  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x) = f(A(x))$ .*

*Observación 5.7.* Unha coñecida ilustración deste teorema é a seguinte: Tomando a superficie terrestre como unha esfera  $\mathbb{S}^2$ , podemos afirmar que sempre haberá dous puntos antipodais cuxa temperatura e presión atmosférica sexa exactamente igual.

*Demostración.* Supoñamos que isto non é certo. Entón, para cada  $x \in \mathbb{S}^2$ , o vector  $f(x) - f(A(x))$  será non nulo. Sexa  $u(x) \in \mathbb{S}^1$  o vector unitario na dirección de  $f(x) - f(A(x))$ . Logo  $u: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  é unha aplicación continua verificando que

$$u(A(x)) = -u(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^2.$$

Restrinxindo  $u$  á copia ecuatorial de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{S}^2$ , temos unha aplicación impar  $v: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Pola Proposición 3.25, o grao de  $v$  debe ser impar, polo que, en particular, será non nulo. Porén, a aplicación  $u$  describe unha homotopía entre  $v$  e unha aplicación constante, que terá grao cero. Isto lévanos a unha contradición co Lema 3.22.  $\square$

**Teorema 5.8** (Teorema do bocado de xamón). *Sexan  $A, B$  e  $C$  corpos sólidos en  $\mathbb{R}^3$ . Existe sempre un plano que divida os tres corpos na metade por volume.*

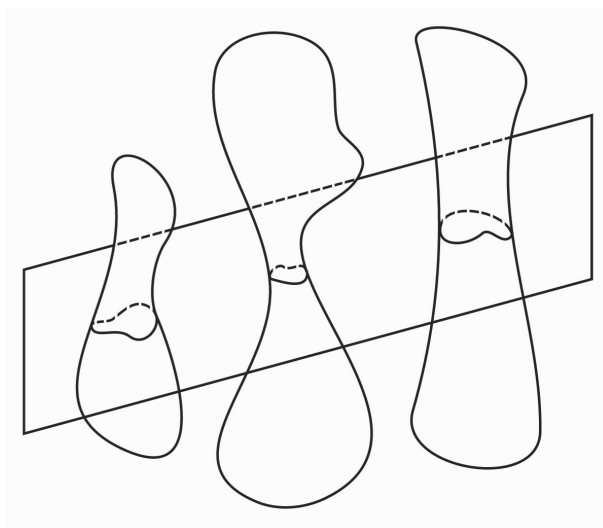


Figura 5.1

*Observación 5.9.* O nome deste teorema débese á seguinte interpretación do mesmo: Consideramos os corpos  $A, B$  e  $C$  como as dúas rebandas de pan e o xamón que forman un bocado. Entón podemos, cun único corte, partir o bocado de xeito que as dúas rebandas e o fiambre queden todos divididos pola metade en volume.

*Demostración.* En primeiro lugar, estudemos o caso simplificado no que un ou máis dos corpos son unha bóla pechada. Un plano biselector dunha bóla será un que pase polo seu centro. Deste

modo, no caso de ser os tres corpos bólas, a demostración sería inmediata xa que bastaría tomar o plano que conteña os tres centros.

Se un dos corpos, por exemplo  $A$ , é unha bóla pechada, entón cada vector  $v \in \mathbb{S}^2$  terá exactamente un plano perpendicular que sexa bisector de  $A$ , aquel que pase polo centro da bóla. Denominemos este plano  $P_v$ . Definimos  $x(v)$  como o volume da sección de  $B$  na parte positiva de  $P_v$  con respecto ao vector  $v$ , e  $y(v)$  como o análogo para  $C$ . Describimos agora unha aplicación  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(v) = (x(v), y(v))$ .

Polo teorema anterior, existe un  $v \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(v) = f(A(v))$ . Isto é, os volumes das rexións de  $B$  e  $C$  na parte positiva con respecto ao vector  $v$  de  $P_v$  coinciden cos seus respectivos valores na parte negativa, polo que  $P_v$  será bisector dos tres corpos.

Para estudar o caso xeral, precisaremos supoñer certas propiedades para o corpo  $A$ , que se deducen de principios básicos de volume e medida que non probaremos neste traballo:

- Dado un vector  $v$ , existe un punto  $p_v$  de  $A$  tal que o plano perpendicular a  $v$  neste punto sexa bisector de  $A$ . De novo, denominaremos este plano  $P_v$ .
- A posición de  $p_v$  é unha función continua en  $v$ . En particular, tomando unha esfera que encerre  $A$  e definindo, para cada punto  $q$  da esfera, o vector  $v(q)$  como aquel na dirección que une  $q$  co seu antipodal, temos que  $p_v(q)$  é unha función continua en  $q$ .

A primeira das condicións é razoable de esperar: Considerando todos os planos perpendiculares a  $v$  parametrizados por un real  $t$  que designe a distancia do plano á orixe, temos que a variación de  $t$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$  suporá unha variación da fracción do volume de  $A$  na parte positiva do plano con respecto ao vector  $v$  entre 0 e 1. Así, aplicando o Teorema do valor intermedio de Bolzano, deducimos que existe un  $t$  para o cal esta fracción sexa  $\frac{1}{2}$ , é dicir, existe un plano bisector de  $A$ . No caso de existir máis de un valor de  $t$  verificando o anterior, estes valores formarán un intervalo pechado, polo que definiremos  $P_v$  como o plano correspondente ao punto medio deste intervalo.

Agora, podemos reproducir o método empregado para o caso no que  $A$  era unha bóla, definindo de novo  $x(v)$ ,  $y(v)$  e  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e aplicando o teorema anterior. Deste modo, concluímos que existirá un vector  $v$  para o cal  $P_v$  sexa un plano bisector dos tres corpos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .  $\square$

*Observación 5.10.* Recordemos que o Teorema do valor intermedio de Bolzano establece que: Dado  $I$  un intervalo e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  unha función continua en  $I$ , se  $a, b \in I$  e  $k \in \mathbb{R}$  satisfai  $f(a) < k < f(b)$ , entón existe un punto  $c \in I$  entre  $a$  e  $b$  tal que  $f(c) = k$  ([12]).

*Observación 5.11.* Nótese que este resultado non será aplicable no caso de ter catro corpos sólidos. Basta supoñer  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  catro bólas pachadas cuxos centros non sexan coplanarios.

### 5.3. O Teorema da curva de Jordan

Nesta sección estudaremos un dos teoremas máis destacados en Topoloxía: o Teorema da curva de Jordan. Para isto, seguiremos a referencia [3].

En primeiro lugar, precisamos definir que consideramos por *curva de Jordan*:

**Definición 5.12.** Unha curva pechada no plano será unha *curva de Jordan* cando non teña autointerseccións, é dicir, cando veña dada por unha aplicación continua e inxectiva  $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ .

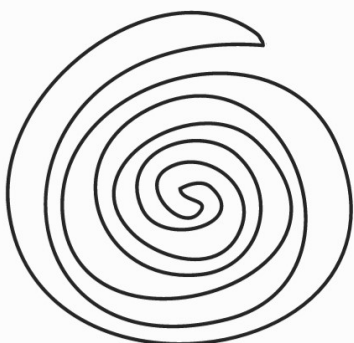


Figura 5.2: Exemplo dunha curva de Jordan

Agora si, procedemos a enunciar o teorema e estudar os conceptos necesarios para a súa demostración.

**Teorema 5.13** (Teorema da curva de Jordan). *Calquera curva de Jordan en  $\mathbb{C}$  divide o plano en, exactamente, dúas rexións conexas, as cales terán unha mesma fronteira.*

Antes de proseguir, recordemos como definimos a fronteira dun subconxunto nun espazo métrico, e vexamos un resultado interesante sobre a mesma:

**Definición 5.14.** Sexa  $X$  un espazo métrico e  $U \subset X$ . Un punto  $x \in X$  será un *punto fronteira* de  $U$  se, para cada  $\epsilon > 0$ , a bóla  $B(x, \epsilon)$  contén tanto puntos de  $U$  como de  $X \setminus U$ . A *fronteira*  $\partial U$  de  $U$  será o conxunto dos seus puntos fronteira.

**Lema 5.15.** *Para cada compacto  $K \subset \mathbb{C}$ , a fronteira de cada compoñente conexas por camiños de  $\mathbb{C} \setminus K$  estará contida en  $K$ .*

*Demostración.* Sexa  $U$  unha compoñente conexas por camiños de  $\mathbb{C} \setminus K$  e sexa  $W$  a unión das demais compoñentes conexas por camiños de  $\mathbb{C} \setminus K$ . Tomando un punto  $p \in \partial U$ , para cada  $\epsilon > 0$ , a bóla  $B(p, \epsilon)$  conterá un punto  $z_0 \in U$  e un punto  $z_1 \notin U$ . O segundo punto polo tanto debe

pertencer, ou ben a  $W$ , ou ben a  $K$ . Se estamos no primeiro caso, o segmento de recta que une  $z_0$  e  $z_1$  debe conter un punto de  $K$ , xa que os puntos pertencen a distintas compoñentes conexas por camiños de  $\mathbb{C} \setminus K$ . Polo tanto, deducimos que para cada  $\epsilon > 0$ , a bóla  $B(p, \epsilon)$  contén algún punto de  $K$ . Isto implica que  $p$  pertence á clausura de  $K$ . Como  $K$  é pechado por ser compacto, concluímos que  $p \in K$ .  $\square$

O primeiro resultado que precisamos para probar o Teorema da curva de Jordan é o Criterio de Eilenberg, que nos permite demostrar que certos conxuntos compactos teñen complementario conexo.

**Proposición 5.16** (Criterio de Eilenberg). *Sexa  $K$  un subconxunto compacto de  $\mathbb{C}$ . Un punto  $p \in \mathbb{C} \setminus K$  pertence á compoñente non acotada de  $\mathbb{C} \setminus K$  se e só se a función de  $k: K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definida por  $k(z) = z - p$  ten un levantamento  $f(z)$ ,  $k(z) = \exp(f(z))$ , definido en  $K$ .*

*Demostración.* Vexamos que se verifica a primeira implicación. Se  $p$  dista o suficiente do conxunto  $K$ , entón  $z - p$  está contido nun semiplano fixo para todo  $z \in K$ , polo que podemos definir un levantamento. O movemento de  $p$  ao longo dun camiño na compoñente acotada de  $\mathbb{C} \setminus K$  trasládase nunha homotopía da función  $k$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Polo lema 1.32, existe un levantamento desta homotopía.

Estudemos agora o recíproco. Supoñamos que  $p$  pertence a algunha compoñente acotada  $U$  de  $\mathbb{C} \setminus K$  e que  $k(z) = \exp(f(z))$  para unha función continua  $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ . Sexa  $X$  o espazo métrico  $\mathbb{C} \setminus U$ . É evidente que  $X$  contén ao conxunto compacto  $K$  e á compoñente non acotada de  $\mathbb{C} \setminus K$ ,  $W$ .

Con estas condicións, existe unha extensión continua de  $f$  ([3]),  $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ . En particular,  $z - p = \exp(g(z)) \forall z \in K$ . Agora, polo Lema 5.15,  $\partial U \subset K$  e, polo tanto,  $\bar{U} \subset U \cup K$ . Consideremos as dúas funcións continuas  $z \mapsto z - p$ , en  $\bar{U}$ , e  $z \mapsto \exp(g(z))$ , en  $X = \mathbb{C} \setminus U$ . Tanto  $\bar{U}$  como  $X = \mathbb{C} \setminus U$  son conxuntos pechados, e as imaxes das funcións coinciden nos puntos nos que ambas están definidas, polo que a súa función combinada  $u: \mathbb{C} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  será continua ([3]). Consideremos agora  $W(u \circ \gamma_r, 0)$ , onde  $\gamma_r$  é a circunferencia con centro  $p$  e raio  $r$ . A variación de  $r$  tradúcese nunha homotopía, polo que o índice será o mesmo. Porén, tomando un  $r$  o suficientemente pequeno,  $\gamma_r$  estará totalmente contido en  $U$  e  $W(u \circ \gamma_r, 0) = 1$ , e tomando un  $r$  suficientemente grande,  $\gamma_r$  estará totalmente contido en  $W \subset X$  e  $W(u \circ \gamma_r, 0) = 0$ . Con esta contradición concluímos a demostración.  $\square$

**Proposición 5.17.** *Sexa  $K$  un subconxunto compacto e contráctil de  $\mathbb{C}$ . Entón o seu complementario é conexo.*

*Observación 5.18.* Recordemos que un espazo topolóxico é contráctil se é homotopicamente equivalente a un punto ([7]).

*Demostración.* Se  $K$  é contráctil, entón existe unha homotopía  $H: [0, 1] \times K \rightarrow K$  entre a aplicación identidade  $id_K: K \rightarrow K$  e unha aplicación constante. Supoñamos unha aplicación continua  $f: K \rightarrow X$ , con  $X$  un espazo topolóxico calquera. A composición

$$[0, 1] \times K \xrightarrow{H} K \xrightarrow{f} X.$$

proporcionáanos unha homotopía entre  $f$  e unha aplicación constante  $K \rightarrow X$ . Isto quere dicir que unha aplicación continua partindo dun espazo contráctil e con imaxe nun espazo calquera sempre será homótopa a unha aplicación constante.

En particular, para cada punto  $p \in \mathbb{C} \setminus K$ , a aplicación  $\varphi: z \mapsto z - p$  é homótopa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  a unha aplicación constante. Polo Lema 1.32, existe un levantamento desta homotopía. Polo Criterio de Eilenberg, isto implica que  $p$  pertence á compoñente non acotada de  $\mathbb{C} \setminus K$ . Como  $p$  foi tomado arbitrariamente, todo punto de  $\mathbb{C} \setminus K$  debe pertencer á compoñente non acotada, polo que se deduce que  $\mathbb{C} \setminus K$  é conexo.  $\square$

*Observación 5.19.* Un exemplo que será de utilidade para probar o Teorema da curva de Jordan é o do arco. Definimos un arco en  $\mathbb{C}$  como un subconxunto homeomorfo ao intervalo compacto  $[0, 1]$ . Como este é contráctil, tamén o será calquera arco. Deste modo, a proposición anterior establece que o complementario dun arco en  $\mathbb{C}$  será conexo.

Ca seguinte proposición comezamos a proba do teorema, que dividiremos en tres partes: unha proposición e dous lemas.

**Proposición 5.20.** *Sexa  $\gamma$  unha curva de Jordan en  $\mathbb{C}$  e supoñamos que  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  non é conexo por camiños. Entón a fronteira de cada compoñente conexas de  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  será todo  $\gamma^*$ .*

*Demostración.* Sexa  $z = \gamma(t)$  un punto de  $\gamma^*$ . Sexan  $U$  unha compoñente acotada de  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  e  $W$  a compoñente non acotada. Será suficiente demostrar que, para cada  $\epsilon > 0$ , a bóla aberta  $B(z, \epsilon)$  contén tanto puntos de  $U$  como de  $W$ .

Por continuidade, existe un  $\delta > 0$  tal que o arco  $B = \gamma([t - \delta, t + \delta])$  está totalmente contido na bóla  $B(z, \epsilon)$ . Sexa  $A$  o seu arco complementario  $\gamma(\mathbb{S}^1 \setminus (t - \delta, t + \delta))$ . A Observación 5.19 indícanos que  $A$  non dividirá o plano, polo que existirá un camiño  $\psi$  en  $\mathbb{C} \setminus A$  unindo un punto  $p \in U$  cun punto  $q \in W$ . Como  $p$  e  $q$  pertencen a distintas compoñentes conexas por camiños, este camiño debe intersecar con  $\gamma$  e, como non interseca con  $A$ , debe facelo con  $B$ . Sexa  $s_0 = \inf\{s \in [0, 1]; \psi(s) \in B\}$ , temos que  $\psi(s_0) \in B(z, \epsilon)$ . Por continuidade, podemos afirmar que  $\psi(s) \in B(z, \epsilon)$  para todo  $s < s_0$  suficientemente próximo a  $s_0$ . Como  $\psi(s) \in U \forall s < s_0$ , isto implica que  $B(z, \epsilon)$  debe conter puntos de  $U$ .

Analogamente, podemos definir  $s_1 = \sup\{s \in [0, 1]; \psi(s) \in B\}$  para deducir que  $B(z, \epsilon)$  conterá tamén puntos de  $W$ .  $\square$

A continuación, enunciaremos unha proposición que que nos permitirá demostrar os dous lemas restantes.

**Proposición 5.21.** *Sexa  $R$  un rectángulo pechado no plano e sexan  $A, B, C$  e  $D$  catro puntos no contorno de  $R$ , tomados en orde cíclica. Sexan  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  camiños unindo  $A$  con  $C$  e  $B$  con  $D$ , respectivamente, e cuxas imaxes están contidas, agás nos seus extremos, no interior de  $R$ . Entón  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  intersecan nalgún punto.*

*Demostración.* Tomemos un arco poligonal  $\gamma_0$  que una  $C$  con  $A$  cuxa imaxe, agás nos seus extremos, estea contida no exterior de  $R$ , que sexa percorrido sempre en sentido positivo e que non acade a realizar unha volta completa ao redor de  $R$ . A concatenación de  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  dá lugar a un lazo  $\gamma$ .

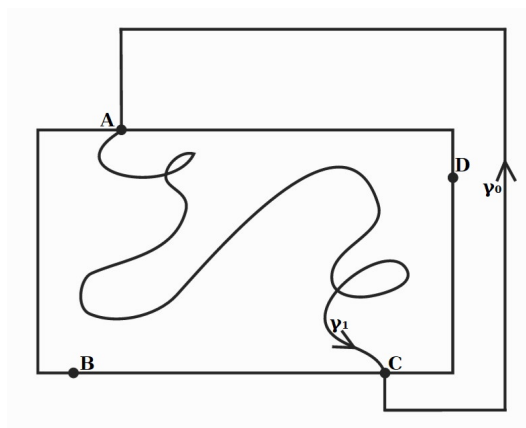


Figura 5.3: Exemplo de representación das curvas  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

Calculando agora o número de voltas do mesmo modo que no Exemplo 1.17, bastará tomar unha recta  $L_1$  que parta de  $B$  e non interseque con  $R$  e outra recta  $L_2$  que parta de  $D$  e tampouco interseque con  $R$ . No caso de que os puntos fosen tomados en sentido positivo, teríamos que  $W(\gamma, D) = 1$  e  $W(\gamma, B) = 0$ , xa que  $L_1$  non intersecaría con  $\gamma_0$  e  $L_2$  faríao unha única vez, na que  $r = 1$  e  $s = 0$  (ver Figura 5.3). En caso contrario, podemos intercambiar na imaxe a posición dos puntos  $B$  e  $D$ , obtendo que  $W(\gamma, D) = 0$  e  $W(\gamma, B) = 1$ . De calquera modo, o resultado sería que  $B$  e  $D$  non poden ser unidos por un camiño en  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  (Teorema 1.21). Concluimos polo tanto que  $\gamma_2$  debe intersecar con  $\gamma$  nalgún punto e, como a súa traza está no interior de  $R$ ,  $\gamma_2$  intersecará con  $\gamma_1$ .  $\square$

No que resta da demostración do teorema, denotaremos por  $J$  a traza da curva de Jordan. Como esta é un compacto, existirán dous puntos  $P$  e  $Q$  en  $J$  tales que a distancia entre eles sexa máxima. Polo tanto,  $J$  estará totalmente contida na rexión do plano  $\overline{B(P, r)} \cap \overline{B(Q, r)}$ , con  $r = d(P, Q)$ . En particular, estará totalmente contida nun rectángulo  $R$  con lados perpendiculares

e paralelos ao segmento  $PQ$ , e intersectará co seu contorno unicamente en  $P$  e  $Q$ . Deste modo,  $J$  será a unión de dous arcos,  $J_1$  e  $J_2$ , con extremos nestes puntos.

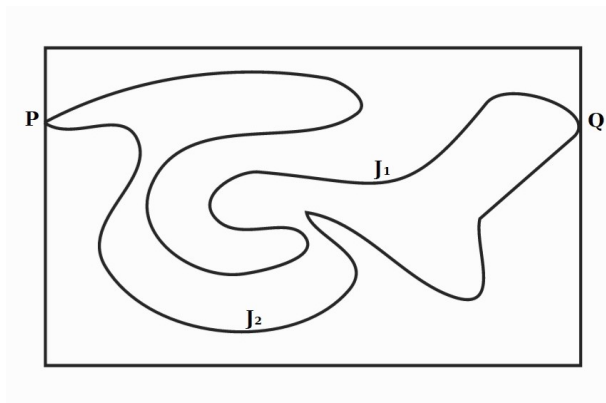


Figura 5.4

**Lema 5.22.** *O complementario de  $J$  ten, polo menos, dúas compoñentes conexas.*

*Demostración.* O obxectivo será atopar un punto que non pertenza á compoñente non acotada do complementario de  $J$ . O procedemento será o seguinte. Tomamos un punto  $A$  na parte superior do rectángulo  $R$  e trazamos unha liña vertical  $AB$  unindo  $A$  coa parte inferior de  $R$ , no punto  $B$ . A Proposición 5.21 garante que esta recta intersectará tanto con  $J_1$  como con  $J_2$ . Podemos supoñer, sen perda de xeneralidade, que o primeiro punto de intersección, dende  $A$ , será en  $J_1$ . Denotemos este punto por  $K$  e sexa  $L$  o último punto de intersección de  $AB$  con  $J_1$ .

Vexamos que existen puntos en  $J_2 \cap AB$  máis baixos que  $L$ . De non ser así, o camiño formado polo segmento  $AK$ , o arco  $\alpha$  de  $J_1$  que une  $K$  con  $L$  e o segmento  $LB$  conectaría  $A$  con  $B$  sen intersectar con  $J_2$ , contradicindo así a Proposición 5.21. Sexan entón  $M$  o primeiro destes puntos e  $N$  o último.

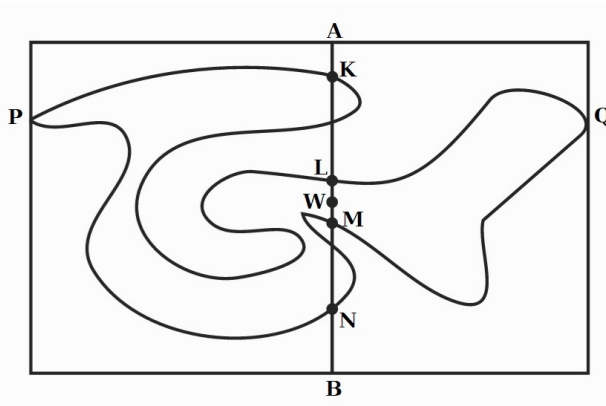


Figura 5.5

Sexa agora  $W$  o punto medio do segmento  $LM$ . Por construción,  $W$  non pertence nin a  $J_1$  nin a  $J_2$ , polo que está en  $\mathbb{C} \setminus J$ . Bastará probar entón que  $W$  non pertence á compoñente non acotada deste subconxunto.

Supoñamos o contrario. Entón existe un camiño  $\Gamma$  en  $R \setminus J$  unindo  $W$  cun punto  $Z$  na fronteira de  $R$ . Temos dous casos posibles: ou ben  $Z$  pertence ao arco fronteira  $PAQ$ , ou ben pertence ao arco fronteira  $PBQ$ .

Estudemos o primeiro caso. Podemos concatenar  $\Gamma$  co segmento  $WB$  para obter un camiño  $\Gamma \cdot WB$  unindo  $Z$  con  $B$  sen intersecar con  $J_1$ . Deste modo, chegamos a unha contradición coa Proposición 5.21.

No segundo caso, concatenamos  $AK$ ,  $\alpha$ ,  $LW$  e  $\gamma$ . Así, o camiño  $AK \cdot \alpha \cdot LW \cdot \gamma$  conectaría  $A$  con  $Z$  sen intersecar con  $J_2$ , polo que de novo chegamos a unha contradición coa proposición anterior.  $\square$

**Lema 5.23.** *O complementario de  $J$  ten, ao sumo, dúas compoñentes conexas.*

*Demostración.* Mantemos a notación do lema anterior. Definimos ademais un novo camiño  $\beta$ , que será o arco de  $J_2$  que conecta  $M$  con  $N$ . Sexa  $\Delta$  o camiño de  $A$  en  $B$  obtido pola seguinte concatenación:

$$\Delta = AK \cdot \alpha \cdot LM \cdot \beta \cdot NB.$$

Todos puntos deste camiño pertencen a un dos seguintes subconxuntos de  $\mathbb{C}$ : a  $J$ , á compoñente non acotada de  $\mathbb{C} \setminus J$  ou á compoñente conexa por camiños á que pertence  $W$ . Tomemos agora un real  $\epsilon > 0$  o suficientemente pequeno para que  $B(P, \epsilon)$  e  $B(Q, \epsilon)$  non intersequen co arco  $\Delta$ .

Supoñamos que  $U$  é outra compoñente conexa por camiños de  $\mathbb{C} \setminus J$ , acotada e que non conteña a  $W$ . Pola Proposición 5.20,  $\partial U = J$ . En particular, existirán dous puntos  $P'$  e  $Q'$  en  $U$  que pertencen a  $B(P, \epsilon)$  e  $B(Q, \epsilon)$ , respectivamente. Como os puntos no exterior do rectángulo  $R$  pertencen á compoñente non acotada,  $P'$  e  $Q'$  deben estar en  $R$ . Ademais, existe un camiño  $\Lambda$  en  $U$  unindo  $P$  e  $Q$ .

Como, por construción,  $\Delta$  non pode ter ningún punto en  $U$ , basta tomar os camiños  $\Delta$  e  $\Lambda' = PP' \cdot \Lambda \cdot QQ'$  para chegar a unha contradición coa Proposición 5.21.  $\square$

Con este resultado, concluimos a demostración do Teorema de Jordan, que establece que calquera curva de Jordan divide o plano en dúas rexións conexas, unha acotada e unha non acotada, cuxa fronteira será a mesma curva. Ademais, pódese comprobar que o número de voltas dunha curva de Jordan ao redor dun punto calquera de  $\mathbb{C} \setminus J$  será  $-1$ ,  $0$  ou  $1$  ([1]). Así, podemos saber se un punto  $P$  se atopa no interior (compoñente acotada) ou no exterior (compoñente non

acotada) de  $J$  coñecendo o valor de  $W(P, \gamma)$ , que será 0 no segundo caso e 1 ou  $-1$  no primeiro, dependendo do sentido no que se percorra a curva.

## 5.4. Teoría de Xogos e o Equilibrio de Nash

Habitualmente, podemos toparnos con moitas situacións, tanto sociais como políticas, que poden ser modelizadas polo que se coñece como un xogo. Por ese motivo, o equilibrio de Nash e a teoría de xogos exercen unha labor fundamental no progreso das ciencias sociais, principalmente en economía. Nesta sección, seguiremos as referencias [1] e [11] para adentrarnos na Teoría de Xogos e demostrar o Teorema de Nash a partir do xa estudado Teorema de punto fixo de Brouwer.

A teoría de xogos defínese como a teoría matemática que se encarga dos problemas de decisión interactivos. Denominaremos polo tanto xogo a un problema de decisión interactivo, xogador a cada axente que participa no xogo, estratexias ás posibles decisións que os xogadores poden tomar, etc.

En particular, traballaremos co que se coñece como teoría de xogos non cooperativa, que supón que todos os elementos do xogo e todas as posibilidades estratéxicas dos xogadores poden describirse con precisión a través dun modelo matemático. A finalidade será entón, analizar dito modelo procurando para cada xogador as súas mellores estratexias, considerando que os demais xogadores procederán tamén do mesmo modo.

O obxectivo desta sección será polo tanto demostrar o teorema de Nash, que supuxo un gran avance na teoría de xogos e en economía, motivo polo cal John Nash recibiu, no ano 1994, o Premio Nobel de Economía.

Definamos primeiro os conceptos necesarios para poder enunciar o teorema:

**Definición 5.24.** Un *xogo en forma estratéxica*  $G$  con conxunto de xogadores  $N = \{1, \dots, n\}$  é unha  $2n$ -tupla  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  onde, para todo  $i \in N$ ,  $X_i$  é o conxunto de estratexias do xogador  $i$  e  $H_i: X = \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$  é a súa función de pago, que asigna a cada perfil de estratexias  $x \in X$  o pago que  $i$  obtén se se xoga de acordo a tal perfil.

*Observación 5.25.* Conforme este modelo, os xogadores toman as súas decisións de xeito simultáneo e independente.

**Definición 5.26.** Dado un xogo en forma estratéxica  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ , diremos que un perfil de estratexias  $x \in X$  é un *equilibrio de Nash* se verifica que:

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i),$$

para todo  $x'_i \in X$  e todo  $i \in N$ , onde o perfil  $(x_{-i}, x'_i)$  é:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

*Observación 5.27.* Un equilibrio de Nash será, polo tanto, un perfil de estratexias no que ningún xogador poida mellorar o seu pago ao cambiar de estratexia de xeito independente aos demais xogadores.

**Definición 5.28.** Un *xogo finito* é un xogo en forma estratéxica  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  cuxos xogadores teñen conxuntos de estratexias finitos, isto é,  $|X_i| = m_i \forall i \in N$ .

**Definición 5.29.** Sexa  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  un xogo finito. Denominamos a *extensión mixta* de  $G$  ao xogo en forma estratéxica  $E(G) = (S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n)$  onde, para cada xogador  $i \in N$ ,

$$S_i = \{s_i \in \mathbb{R}^{|X_i|} : s_i(x_i) \geq 0 \forall x_i \in X_i, \sum_{x_i \in X_i} s_i(x_i) = 1\}$$

e

$$H_i(s) = \sum_{x \in X} H_i(x) s(x) \forall s \in S,$$

onde  $S = \prod_{i \in N} S_i$  e  $s(x)$  denota o produto  $s_1(x_1), \dots, s_n(x_n)$ .

*Observación 5.30.* Debemos entender  $E(G)$  como unha extensión de  $G$  no seguinte sentido: Para todo xogador  $i$ , cada elemento de  $X_i$  pode ser identificado cun elemento de  $S_i$ , polo que podemos escribir  $X_i \subset S_i$ . Ademais, as funcións de pago dos xogadores en  $E(G)$  son extensións das funcións de pago dos xogadores en  $G$ . Deste modo, a extensión mixta consiste en aumentar as posibilidades estratéxicas dos xogadores e considerar que, ademais das súas estratexias iniciais, tamén poden optar por tomar *loterías* ou distribucións de probabilidade sobre o conxunto de alternativas.

*Observación 5.31.* Identificaremos o conxunto das estratexias do xogador  $i$  co  $m_i$ -simplex:

$$\Delta^{m_i} = \{s_i = (s_i^1, \dots, s_i^{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : s_i^k \geq 0 \forall k \in \{1, \dots, m_i\}, \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k = 1\}.$$

Considerando agora a definición de *equilibrio de Nash* na extensión mixta de  $G$ , é dicir, onde o xogo en forma estratéxica sexa  $E(G)$ , podemos xa estudar o teorema:

**Teorema 5.32** (Teorema de Nash). *A extensión mixta dun xogo finito terá sempre, polo menos, un equilibrio de Nash.*

*Demostración.* A idea principal desta demostración é simple. Como o espazo de todas as posibles estratexias é homeomorfo a un disco  $\sum_{i=1}^n m_i$ -dimensional, podemos aplicar o Teorema de Brouwer (4.4). Definimos entón unha aplicación continua que leve cada perfil de estratexias nun novo perfil de modo que os puntos fixos desta aplicación sexan equilibrios de Nash.

En primeiro lugar, tiñamos que  $S_i = \Delta^{m_i}$  e  $S = \prod_{i \in N} S_i$ . Como  $\Delta_{m_i}$  é homeomorfo a un disco  $m_i$ -dimensional, é inmediato que o espazo  $S$  de todas as posibles estratexias será homeomorfo a un disco  $\sum_{i=1}^n m_i$ -dimensional.

Agora, como xa vimos na Observación 5.30, identificamos as estratexias de  $X_i$  con estratexias de  $S_i$ , polo que podemos denotar por  $x_i^k$  á estratexia en  $S_i$  tal que  $s_i^k = 1$  e  $s_i^j = 0 \forall j \neq k$ . Definimos entón:

$$c_i^k(s) = \text{máx}\{0, H_i(x_i^k, s_{-i}) - H_i(s)\}, \text{ con } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } k \in \{1, \dots, m_i\}.$$

Deste modo,  $c_i^k(s)$  representará o pago que o xogador  $i$  gañaría escollendo a estratexia  $x_i^k$  en lugar de  $s_i$ . Esta é unha función continua en  $s$ .

A continuación, definimos a aplicación  $g: S \rightarrow S$  por  $g(s) = (s'_1, \dots, s'_n)$ , onde

$$(s'_i)^k = \frac{s_i^k + c_i^k(s)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} c_i^j(s)}, \text{ con } i \in \{1, \dots, n\} \text{ e } k \in \{1, \dots, m_i\}. \quad (5.1)$$

As aplicacións  $(s'_i)^k$  son continuas en  $s$  por ser combinación de funcións continuas. Polo tanto,  $g$  será tamén continua e, polo Teorema de Brouwer, terá un punto fixo. Sexa  $u$  este punto. É fácil ver que, se  $c_i^k(s) = 0$  para todo  $k \in \{1, \dots, m_i\}$  e para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entón  $s$  é un punto fixo de  $g$ . Vexamos entón que se verifica o recíproco.

Tomemos un xogador  $i$  calquera. Sabemos que non se dará o caso de que  $H_i(x_i^k, u_{-i}) > H_i(u) \forall k \in \{1, \dots, m_i\}$ , pois isto implicaría que

$$H_i(u) = \sum_{k=1}^{m_i} u_i^k H_i(x_i^k, u_{-i}) > \sum_{k=1}^{m_i} u_i^k H_i(u) = H_i(u).$$

Deducimos polo tanto que  $c_i^k(u) = 0$  para algún  $k$ . Aplicamos agora a ecuación 5.1 e o feito de que  $u$  é un punto fixo e, neste  $k$ , temos:

$$\begin{aligned} u_i^k &= \frac{u_i^k + c_i^k(u)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} c_i^j(u)} \\ u_i^k &= \frac{u_i^k}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} c_i^j(u)} \\ 1 + \sum_{j=1}^{m_i} c_i^j(u) &= 1 \\ \sum_{j=1}^{m_i} c_i^j(u) &= 0. \end{aligned}$$

Polo tanto,  $c_i^j(u)$  debe ser nulo para todo  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ . De aquí deducimos que

$$H_i(u) \geq H_i(x_i^k, u_{-i}) \forall k \in \{1, \dots, m_i\}.$$

Finalmente, como  $H_i(u) = \sum_{k=1}^{m_i} u_i^k H_i(x_i^k, u_{-i})$  e  $H_i(s_i, u_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} s_i^k H_i(x_i^k, u_{-i})$ ,

$$H_i(u) \geq H_i(s_i, u_{-i}) \text{ para todo } s_i \in S_i.$$

Concluimos así que  $u$  é un equilibrio de Nash do xogo. □

## 5.5. Conclusión

Para finalizar este traballo, recordemos cal era o noso obxectivo e fagamos unha breve revisión dos puntos clave seguidos. A intención do traballo era coñecer o concepto do número de voltas e as súas aplicacións a diversos campos das matemáticas. Comezamos con este estudo partindo dunha base topolóxica, que proseguimos apoiándonos posteriormente en nocións de análise complexa. Isto permitiunos relacionar o número de voltas con outro destacado concepto topolóxico: o grao dunha aplicación. Despois, estudamos a propiedade de punto fixo e observamos como o número de voltas nos permite probar esta propiedade de modo sinxelo nun disco de dimensión 2. Finalmente, estudamos algunhas das súas aplicacións en matemáticas. Ademais, vimos como algunhas destas aplicacións poden ser tamén útiles noutras ciencias como Economía. Deste modo, fixemos evidente a relevancia do concepto de número de voltas, que pese a súa simplicidade, ten ramificacións tanto na base da mesma topoloxía, como noutras ramas das matemáticas e incluso fóra delas.

# Bibliografía

- [1] William F. Basener, *Topology and Its Applications*, John Wiley & Sons, 2006.
- [2] W. G. Chinn e N.E. Steenrod, *Primeros conceptos de topología*, Alhambra, 1975.
- [3] John Roe, *Winding Around: The Winding Number in Topology, Geometry, and Analysis*, American Mathematical Society, 2015.
- [4] Sue E. Goodman, *Beginning Topology*, American Mathematical Society, 2005.
- [5] R. Ghrist, *Elementary Applied Topology*, ed. 1.0, CreateSpace, 2014.
- [6] Martin D. Crossley, *Essential Topology*, Springer-Verlag, London, 2005.
- [7] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona, 1992.
- [8] G. J. O. Jameson, *A First Course on Complex Functions*, Chapman and Hall, 1982.
- [9] I. Márquez e J. J Nieto, *Variable Compleja*, NINO-CID, 2017.
- [10] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, 3<sup>a</sup> ed., Addison-Wesley, 1982.
- [11] B. Casas Méndez, G. Fiestras Janeiro, I. García Jurado e J. González Díaz, *Introducción a la Teoría de Juegos*, USC Editora, 2012.
- [12] R. G Bartle e D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, 2<sup>a</sup> ed., Limusa Wiley, 2004.