ADAXE -Revista de Estudos e Experiencias Educativas- (1999), 14-15: 327-339 *ISSN 0213-4705*

A COMPRENSIÓN DAS MATEMÁTICAS. UN PROBLEMA BÁSICO DE INVESTIGACIÓN PARA A DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA

José A. Cajaraville Pegito
Facultade de Ciencias da Educación. USC.

Resumo:

A comprensión das matemáticas constitúe un problema de investigación básico para a Didáctica da Matemática. As teorías do significado dos obxectos matemáticos tentan clarificar en que consiste a comprensión das matemáticas. Caracterizan os obxectos matemáticos como emerxentes de sistemas de prácticas ligadas á resolución de problemas, ofrecendo unha visión constructiva e evolutiva dos conceptos matemáticos. Partindo dunha situación-problema, analisamos neste artigo, algúns dos problemas didácticos ligados á comprensión das matemáticas.

Palabras clave: Educación Matemática, comprensión, significado, concepcións.

Abstract:

The understanding of Mathematics is a basic research problem for Mathematics Education. The theories about the meaning of mathematical objects try to clarify what is Mathematics understanding. These theories characterize the mathematical objects as emergents of systems of practices related to problem solving, providing a constructive and evolving view of mathematical concepts. In this paper we analyse, from a situation-problem, some of the teaching and learning problems related to the understanding of Mathematics.

Keywords: Mathematics Education, understanding, meaning, misconceptions.

Introducción

Son múltiples os campos e problemas de investigación dentro da Didáctica da Matemática. Partindo do poblema de fondo: ¿como adquiren os individuos o coñecemento matemático?, a Didáctica da Matemática ocúpase de tódolos problemas asociados: as dimensións e os fins da educación matemática; as relacións entre aprendizaxe e epistemoloxía; ás implicacións da psicoloxía cognitiva no proceso da educación matemática; o papel do currículo e da avaliación no proceso de ensinanza/aprendizaxe das matemáticas; a formación

Aceptación: IV/1999

de profesores de matemáticas; o papel das novas tecnoloxías na educación matemática, etc.

Dende o ponto de vista da análise de como as persoas aprenden matemáticas, as investigacións desenvolvidas durante os 80 e os 90, son numerosas e relevantes. Destacan aquelas que partindo das teorías constructivistas da aprendizaxe, teñen que ver co paradigma da aprendizaxe por cambio conceptual (Hewson, 1981, Posner e cols, 1982). Vamos a referirnos a un enfoque específico desenvolvido pola chamada Escola Francesa de Didáctica da Matemática (con destacados representantes como Vergnaud (1990), Brousseau (1983, 1986, 1990), Chevallard (1985, 1989, 1992), Douady (1986) e Artigue (1989, 1990)), pola súa relevancia de cara á prescripción de metodoloxías alternativas para a ensinanza das Matemáticas.

Partindo das hipóteses constructivistas de que o suxeto vai construindo o seu propio coñecemento ó integra-la nova información en redes conceptuais preexistentes, a través de procesos activos resultantes dunha amplia variedade de interaccións, os estudios dende o enfoque da antropoloxía cognitiva desenvoltos por Chevallard (1989, 1992, 1997), e a teoría das situacións didácticas de Brousseau (1983, 1986), abriron novas perspectivas para abordar as particularidades específicas da comprensión dos conceptos e procesos matemáticos por parte dos estudiantes, dos fenómenos asociados ó proceso didáctico e dos obstáculos epistemolóxicos e didácticos que xurden na aprendizaxe das matemáticas.

A esta análise fan relevantes aportacións os estudios realizados sobre a epistemoloxía da creación e desenvolvemento dos obxetos matemáticos; sobre as concepcións espontáneas que teñen os alumnos dos obxetos matemáticos que se estudian no ámbito escolar e sobre as crenzas e concepcións dos profesores de matemáticas sobre o proceso de ensinanza/aprendizaxe das matemáticas.

1. A comprensión das Matemáticas

Unha das premisas básicas aceptadas na Educación Matemática é que os estudiantes deberían comprender ás Matemáticas (Hiebert e Carpenter, 1992). Sierpinska (1994), pregúntase cómo ensinar de maneira que os estudiantes comprendan; que é o que realmente comprenden a partir do acto de instrucción e como comprenden. Esta autora diferencia entre acto e proceso de comprensión, asociando a «boa comprensión» dos obxetos matemáticos (conceptos, teorías, problemas) á superación dos obstáculos específicos que plantexa cada situación problemática.

Chevallard (1992), fala dunha antropoloxía cognitiva e didáctica, facendo fincapé na necesidade de clarificar en que consiste a comprensión. Este investigador considera que un obxeto matemático é un emerxente dun sistema de prácticas, donde son manipulados obxetos materiais que se desglosan en diferentes rexistros semióticos: o que se expresa con palabras ou xestos; o que se escribe ou debuxa (grafismos, tablas, fórmulas, cálculos).

Chevallard, tentando explicar o problema da comprensión, distingue entre *relación persoal* dun suxeito cun obxecto matemático (conxunto de prácticas persoais que desenvolve o suxeito das que emerxe ese obxecto), e *relación institucional* entre unha institución determinada (os matemáticos profesionais, os educadores matemáticos), e ese mesmo obxecto matemático (conxunto de prácticas institucionalmente compartidas, das que emerxe o obxecto matemático como «saber sabio»). Esta dimensión antropolóxica resulta fundamental para interpretar como a partir duns mesmos obxectivos educativos e do planeamento de actividades comúns na clase, o significado que os alumnos lle atribúen a un mesmo obxecto matemático pode resultar dispar.

1.1. Significado dos obxectos matemáticos

Resulta necesario clarificar o significado dun obxecto matemático e relacionalo co concepto de comprensión. Godino e Batanero (1994, 1997) fan aportacións neste sentido, baseándose en hipóteses cognitivas e epistemolóxicas sobre as Matemáticas, que teñen en conta recentes tendencias en filosofía das Matemáticas (Ernest, 1991) e nas teorías pragmáticas do significado (Kutschera, 1971). Para estos autores as Matemáticas son unha actividade humana implicada na resolución de situacións problemáticas; os problemas matemáticos e as súas solucións son compartidos por institucións ou colectivos específicos que se ocupan do estudio de tales problemas; a Matemática adopta unha linguaxe simbólica para expresar e comunicar as solucións encontradas, configurando un sistema formal loxicamente organizado.

As situacións-problema convértense así na orixe dos campos de problemas dos que emerxen os obxectos matemáticos, o que lle confire á resolución de problemas o núcleo fundamental da creación e desenvolvemento das Matemáticas. O suxeito realiza diferentes tipos de prácticas ou accións coa intención de resolver un problema matemático, comunicarlle a súa solución a outras persoas, valida-la e xeneralizala a outras situacións ou problemas. A xénese do coñecemento matemático do suxeito ten lugar a partires das interaccións do mesmo con determinados campos de problemas e coa mediación de contextos institucionais, en particular cos profesores de matemáticas.

Nestas interaccións prodúcense toda unha gama de representacións, imáxes mentais, e concepcións a partires das súas relacións con coñecementos previos, das que emerxen interpretacións (significados persoais), que poden estar de acordo ou discrepar abertamente con aqueles significados que, para o mesmo campo de problemas, se obtiveron no seo de institucións «sabias» que se ocupan do seu estudio científico (significado institucional).

Esta relatividade do coñecemento fai obligado distinguir entre obxecto institucional, como emerxente dun sistema de prácticas sociais asociadas a un campo de problemas realizadas nunha determinada institución, e obxecto persoal, como emerxente dun sistema de prácticas persoais significativas, postas en práctica por un determinado suxeito ante o mesmo campo de problemas.

Dende o ponto de vista da ensinanza das Matemáticas, esta relativización entre significado personal e institucional, pon de manifesto cal é o papel do profesor de matemáticas: durante o acto de instrucción e, tendo en conta as directrices curriculares, debe preparar entornos de aprendizaxe, seleccionando un conxunto de situacións, símboloxía, notacións, procedementos etc., que xeneran un significado restrinxido para o obxecto matemático considerado. O profesor tenta que os significados persoais que, da acción docente, derivan os seus alumnos sexan o mais parecidos ó significado institucional deste obxecto matemático. Este obxectivo non se logra en moitas ocasións e xenera un problema relevante e difícil para a investigación en Didáctica das Matemáticas: ¿cáles son as condicións didácticas idóneas para a converxencia destes significados? É tarefa do profesor, deseñar e por en práctica propostas didácticas para a clase, que permitan controlar os significados que constrúen os alumnos. Neste sentido, a teoría das situacións didácticas de Brousseau aporta información relevante.

2. A teoría das situacións didácticas

A teoría das situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986) ten por obxectivo analisa-las interaccións entre o profesor e os seus alumnos nun medio concreto —a aula— , e a súa relación co coñecemento posto en xogo. Ademáis ofrece un marco para elaborar unha proposta didáctica baseada en situacións-problema dos que poidan emerxer os coñecementos que se pretenden enseñar. Brousseau (1986) distingue diferentes tipos de situacións didácticas:

•*Situacións de acción*: que favorecen as eleccións do alumno cando se enfronta á situación-problema, para esto non é necesario que as accións que o alumno realiza se expresen, se proben nin que sexan formulables. O alumno aprende por adaptación a un medio que é factor de contradiccións, desequilibrios e dificultades.

•*Situacións de formulación*, nas que o alumno intenta describi-la situación utilizando representacións e linguaxes explícitos para organiza-las súas accións, coa intención de comunicar —a él mesmo e ós demáis— as accións que puxo en práctica.

•*Situacións de validación*, nas que o alumno debe argumenta-las súas decisións de maneira razoada, e contrasta-las coas decisións alternativas dadas polos demáis. Estas argumentacións teñen duas compoñentes diferentes: validez sintáctica e validez semántica.

• *Situacións de institucionalización do saber*, nas que se ha de dar un estatus oficial ós coñecementos adquiridos, comunicando axeitadamente a producción obtida en relación coa práctica social dese saber, a nivel cultural e científico.

Estamos de acordo con Godino (1991), cando manifesta que:

> «na teoría das situaciones didácticas o proceso de resolución dun problema compárase cun xogo de estratexia ou cun proceso de toma de decisións. Existen diferentes estratexias pero só algunhas delas conducen á solución do problema e á construcción polo alumno do coñecemento necesario para obte-la solución. Este coñecemento é o que se pode gañar, o que está en xogo na situación. Neste sentido, a teoría de situacións didácticas é unha teoría da aprendizaxe constructivista, na que a aprendizaje prodúcese a través da resolución de problemas...» (p. 133).

3. Un exemplo de situación-problema

Un aspecto relevante dentro do sistema educativo (que podemos considerar como unha institución particular), é a avaliación da aprendizaxe do estudiante, que debe permiti-la confrontación do significado que o profesor quixo transmitir e o efectivamente construido polo alumno. Esta avaliación non resulta doada posto que moitas das prácticas personais que o alumno puxo en acción para darlle significado ó obxeto en cuestión, non se fan explícitas. Dende logo non responden ó modelo de avaliación a través de probas escritas: faise necesaria a observación do traballo do alumno, das súas opinións e interaccións cos seus compañeiros e co profesor.

Para poder realizar un traballo de observación reflexiva na aula que faga posible detectar as concepcións dos alumnos, e os erros e obstáculos epistemolóxicos e didácticos que condicionan os significados que os alumnos atribúen ós conceptos matemáticos obxeto de ensinanza, permitindo ó profesor tomar as decisións oportunas para o control e a autorregulación do proceso de ensinanza/aprendizaxe, é necesario o deseño e exploración de situacións-problema. A que propoñemos a modo de exemplo (figura 1), está pensada para o último curso da ESO. Este tipo de situacións demandan algo máis ca simple aplicación de fórmulas.

No traballo dos matemáticos profesionais, o saber constituído adquire unha despersonalización, deshistorización e descontextualización progresiva perseguindo atopar unha teoría xeral. Este traballo, indispensable para unha mellora na comunicación de resultados e o intercambio científico, dificulta, sin embargo, a comunicación dos saberes en determinados niveis educativos.

As abellas constrúen, con cera, paneis en forma de hexágono regular para almacena-lo mel. Para recubrir unha superficie plana, usando unha única forma, teñen só tres opcións.

a)*¿Estás de acordo con que as tres opcións do debuxo son as únicas que hai?*

b)*¿Consideras que pode existir algunha razón para elexir a forma de hexágono regular para as celdas, habendo outras posibilidades?*

Suxerencias:

1. A cantidade total de cera a empregar é fixa.

2. A profundidade das celdas, tamén é fixa e igual para todas.

3. Supón que asignas un perímetro fixo, para cada celda regular, de *36* cm.

(toma $\sqrt{3}$= 1.732)

¿Ves alguna outra razón para elexir hexágonos?

c) *Tenta xeneralizar o estudio para o caso dun perímetro arbitrario* **P**. *¿obtés as mesmas conclusións? ¿Qué diferencias notas con respecto ó caso anterior?*

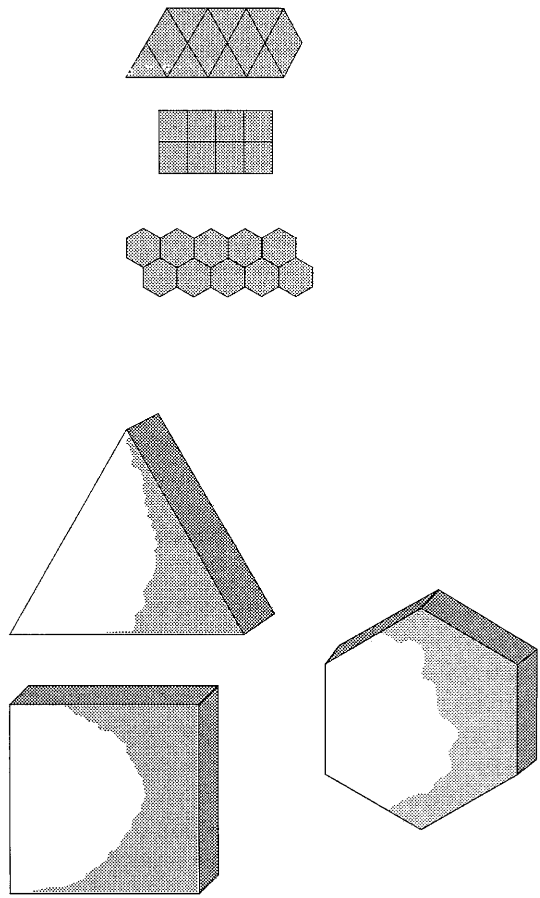


Figura 1

Para Chevallard (1985), a *transposición didáctica* consiste na adaptación do coñecemento matemático actualizado, transformándoo en coñecemento para ser ensinado. Dentro do proceso de transposición didáctica, o saber ensinado debe permitir unha recontextualización progresiva que se adapte ós niveis de ensinanza para os que foi deseñado.

Para organizar unha situación didáctica nun ambiente de aprendizaxe onde os alumnos desenvolvan as secuencias de aprendizaxe seguindo as distintas fases propostas por Brousseau, o profesor debe informar previamente ós alumnos sobre os obxectivos da tarefa a realizar, a organización e a dinámica das súas actividades. En segundo lugar o profesor deberá xestionar a evolución da marcha das actividades suxerindo pautas para a experimentación e a representación, propiciando a comunicación entre os alumnos, incentivando o debate e a reflexión sobre as diferentes propostas alternativas, institucionalizando a conceptualización e controlando e, no seu caso, activando a reflexión e a recursión. O alumno, individualmente, en pequenos grupos ou a nivel de toda a clase, unha vez comprendidas e aceptadas as reglas de xogo, fará seu o proceso e o desenvolverá, tanto a nivel persoal como compartido, realizando actividades individuais fruto das súas experiencias e coñecementos previos, para lograr unha aprendizaxe personal , que deberá contrastar cas dos demáis compañeiros, discutindo, reflexionando sobre a pertinencia das súas opinións. Se non se logra a devolución da situación ós estudiantes, haberá que renegociar as concidións da situación.

Na orixe dunha situación de acción, os alumnos deben reflexionar sobre os conceptos, relacións e procesos matemáticos implicados no problema.

O apartado a) do problema ten que ver coa medida dos ángulos internos das formas (en este caso iguais) que se encastran en cada vértice, e a súa relación co ángulo completo -360 graos-. Implica, por unha parte o estudio das medidas dos ángulos internos dos polígonos regulares -que se poden obter en función do número de lados- e, pola outra, atopar divisores de 360. Á construcción dunha táboa (táboa I) -un patrón heurístico moi recomendado na resolución de problemas- pode contribuir a clarifica-la solución:

Polígono	Medida ángulo interno	Múltiplo (nº de formas que inciden en cada vértice)	Producto	¿Conseguimos obter o ángulo completo?
Triángulo equilátero	60 graos	6	360	Si
Cadrado	90 ”	4	360	Si
Pentágono regular	108 ”	3 ou 4	324 ou 432	Non
Hexágono regular	120 ”	3	360	Si
Heptágono regular	128.57 ”	2 ou 3	217.14 ou 385.71	Non
....	....	....	....	....

Táboa I

Os alumnos chegan á conclusión de que, repetindo a mesma forma regular, non hai mais posibilidades de rechear unha superficie plana que co triángulo equilátero, o cadrado e o hexágono regular.

Respecto ó apartado b), ¿a capacidade de cada celda para almacenar mel, depende exclusivamente da superficie da celda? (a suxerencia 2 aclara a cuestión); ¿a qué se reduce, entón o problema (qué modelo matemático, representa á situación)?.

Estas preguntas fomentan un debate que resulta relevante para negociar as condicións da devolución do problema ós estudiantes. Os alumnos estan familiarizados coas fórmulas para calcula-lo perímetro dun polígono e a área do triángulo, cadrado e polígonos regulares. Coñecen a relación que hai entre a lonxitude dun lado é o perímetro, nun polígono regular. Sin embargo teñen dificultades para aplicar ós seus coñecementos en situacións problemáticas abertas.

Despois de contrastar opinións, chégase á conclusión de que se trata dun problema de cálculo de áreas. Pero ¿non quedamos en que triángulo, cadrado e hexágono regular teñen o mesmo perímetro?. «*Logo terán a mesma área*», opinan algúns alumnos. O que permite o profesor sacar á luz concepcións erróneas dos estudiantes:

-Traballen. Calcúlen as áreas..¡Xa veremos qué pasa!.

Pero *¿ónde están os datos*?. Só hai un: *36 cm* -o perímetro-. Os alumnos non están acostumbrados, en xeral, a reflexionar sobre os conceptos e as relacións matemáticas. Se se lles ofrecen posibilidades de traballar as matemáticas, rápidamente preguntan: *¿qué operacións teño que facer?,¿qué fórmula teño que usar?*. Esperan que o profesor, despois de resistirse uns momentos, llela facilite. A partir de aquí, acabóuse o problema. Os alumnos saben facer contas; saben desenvolver procesos rutineiros; pasaron moito tempo na escola desenvolvendo procesos rutineiros. Forma parte do seu contrato. A noción de contrato didáctico débese a Brousseau (1990). Para este investigador o contrato didáctico é:

> «o conxunto de relacións implícita e/ou explícitamente establecidas entre un alumno ou un grupo de alumnos, o medio -no que se inclúen medios, recursos e instrumentos- e o profesor, co obxectivo de facer que o alumno se apropie dun saber constituído ou en vías de constitución. Estas relacións establécense como resultado dunha negociación entre o profesor e os alumnos nunha especie de «contrato», no que se fixan o un e os outros unha serie de regras de xogo que asignan, a cada protagonista, medios para a acción, medios de información e obligacións». (p. 318).

Algunhas das características do contrato didáctico son ben perceptibles e desencadenan fenómenos didácticos específicos. Si se establece un contrato no que o profesor é o portador do saber, reservando ó alumno un papel pasivo e receptivo, este tipo de preguntas resulta natural e frecuente. O profesor pode ter a tendencia a respostar a estas demandas dos estudiantes e, como consecuencia, o significado personal que constrúen dos conceptos matemáticos ten moitas lagoas e limitacións. O coñecemento fenomenolóxico (Freudenthal, 1983) dos conceptos implicados é moi escaso e imposibilita transferir a súa potencia explicativa a aquelas situacións-problema ás que sirven como modelo matemático.

O profesor debe resistirse á tentación de respostar a estas preguntas. Constitúen a parte esencial da resolución do problema. Son as que deben xenerar ó debate, do que deben emerxer os conceptos é relacións matemáticas implicadas na situación. Algún alumno tamén pregunta *¿porqué nos facilita un valor para a raíz de 3*?:

Profesor: - *¿Cómo calcularía vostede a área dun triángulo*?.

Alumno: « *(base x altura) / 2*».

Profesor: *Pois siga buscando a maneria de relacionar esa fórmula co dato 36 cm, tal vez obteña a resposta a esa pregunta.*

Seguir esta suxerencia conduce á necesidade de utiliza-lo teorema de Pitágoras, para relacionar *base* e *altura* con *36*, o que implica o estudio de novos conceptos e resultados matemáticos.

O apartado c) do problema orixina un eslabón máis no poder comunicativo da Matemática. Trátase agora de comenzar a xeneralizar á solución a un perímetro arbitrario *P*. As operacións aritméticas convírtense en simbólicas: é o paso da aritmética á alxebra. Agora, a comparación entre as áreas do triángulo equilátero, cadrado e hexágono regular, dependen de consideracións mais sutís que teñen que ver coa razón entre dúas cantidades, unha delas simbólica. Surxe a necesidade de verificar se se seguen cumplindo as mesmas condicións do apartado b) –a igual perímetro a área é maior no caso de hexágono-. Normalmente os alumnos, verifican con casos particulares, pero.. ¿e no caso xeral?. O debate e as aportacións dos estudiantes á análise da situación resulta clarificador*: ¿cales son as condicións de aumento ou disminución dunha razón entre dúas cantidades*?.

A seguinte fase de xeneralización do problema ten que ver coas intuicións que a situación propicia. A igual perímetro, a área do triángulo é menor ca do cadrado, ésta é menor ca do hexagono regular.... esta, a súa vez, ¿será menor ca do heptagono regular e maior ca do pentágono regular?. E, si a resposta é afirmativa, e a área segue medrando en función do aumento do número de lados ¿ata onde seguirá medrando?

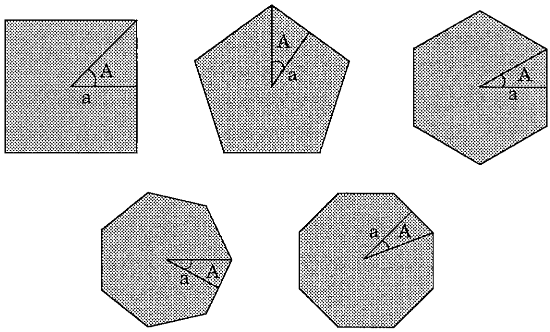
-Ata o» infinito» –apunta algún alumno-

¿Tí crees? –di o profesor-. *Pensa nunha celda rodeada por un fío de lá de 36 cm. Dalle a forma de polígono regular que tí queiras. ¿Pensas que pode «caber» unha área infinita?.*

Para analisar con máis detalle o problema, convén amplia-la situación-problema de partida cunha nova proposta de traballo (figura 2). Nela vense implicados novos conceptos e relacións matemáticas que teñen que ver coa trigonometría, en particular coa noción de tanxente trigonométrica. Trátase dun traballo que pode resultar moi fructífero para atribuírlle significado semántico á trigonometría, como teoría matemática moi útil en contextos de medida. Ademais, posibilita á comparación entre o primeiro traballo de xeneralización que se fixo con anterioridade, atopando fórmulas para as áreas do triángulo equilátero, cadrado e hexágono regular, en función de *P*, nas que os alumnos puideron arreglarse sin necesidade de acudir á trigonometría.

Supoñamos agora que temos polígonos regulares de calqueira número de lados e *todos de igual perímetro* **P**.

Notamos por **a**, a apotema do polígono, e por **A** o ángulo formado polo radio e a apotema do polígono (mirar figura)



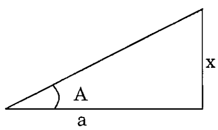
d) *Atopar unha fórmula que exprese a área de cada polígono en función do perímetro **P**, e do seu número de lados **n**.*

Suxerencias:

-Partir da coñecida fórmula:

Area= (**P** . **a**) /2

-Poñer **a** en función de **P**.
Pode axudarse da figura do lado para tomar decisións.



-Intente escribi-lo ángulo *A* en función do número de lados do polígono regular.

e) *¿Como evoluciona a área?*.

f) *¿Cando se alcanzará a máxima área a perímetro fixo **P**?*

Figura 2

Pero a trigonometría é unha ferramenta máis poderosa e proporciona tamén para estes casos particulares (triángulo, cadrado, hexágono) un proceso xeral que sirve para obte-la área de calqueira polígono regular en función de P. ¿estas duás maneiras diferentes de analisa-lo problema, conducen ó mesmo resultado, no caso do triángulo equilátero, cadrado e hexágono regular?.

A resposta a esta pregunta ten que ver cunha consideración interesante, dende o ponto de vista da didáctica: moitos problemas teñen a posibilidade de ser analisados dende diferentes pontos de vista; hai máis dunha forma de resolvelos. Os alumnos non perciben con claridade esta circunstancia. No seu contrato didáctico existe unha cláusula implícita: os problemas que se fan na clase normalmente conducen á aplicación directa dunha fórmula estándar a un conxunto de datos preparados; se non se recorda a fórmula ou non se ten claro que fórmula empregar os alumnos bloquéanse e fracasan diante da situación. Chevallard, e cols. (1997), chámanlle a ésto unha *enfermidade didáctica*. Xurden fenómenos didácticos como a irresponsabilidade matemática do alumno, que non considera importante reflexionar sobre o proceso que está a desenvolver cando resolve un problema matemático, nin cales son os motivos polos que usa unha determinada estratexia en lugar doutras posibles. Desta maneira, e a veces por simples erros de cálculo, obtén resultados totalmente irracionais sobre os que non fai ningunha reflexión: acadou unha resposta e rematou o problema.

Esta irresponsabilidade non se pode explicar só considerando que o «alumno non sabe», ou o «alumno non estudia». Forma parte do propio contrato: o profesor de matemáticas non soe considerar que os seus alumnos poidan actuar como matemáticos. Os problemas -sobre todo exercicios- que lles propón soen estar descontextualizados, son mecánicos e rutineiros, ás veces os datos dos problemas que se propoñen ós alumnos, tamén soen estar desfasados, non son realistas. Os alumnos perciben estas circunstancias: as matemáticas escolares están illadas da realidade; o profesor otorga mellores cualificacións ós alumnos que son capaces de reproduci-las súas explicacións e razoamentos; non paga a pena tratar de inventar formas orixinais para resolver un determinado problema, normalmente conducen ó fracaso ou, o que é peor, a obter malas notas.

A segunda proposta conduce, finalmente, a abordaxe dun problema máis difícil: mira-lo círculo como a situación límite dunha secuencia de polígonos regulares, todos de igual perímetro, que se construén co criterio de aumentarlle o número de lados, reducindo, ó mesmo tempo, a lonxitude do lado. O círculo como un polígono regular de «infinitos» lados de lonxitude «infinitamente» pequena. O círculo como caso óptimo para á área a perímetro fixo. Surxe un coñecemento: se che dan unha cantidade determinada de tela de aramio para pechar unha finca, e che dan libertade para deseña-la finca que ti queiras, debes coloca-la tela en forma de círculo para consegui-la maior cantidade de terreo posible.

Polo medio, se construimos unha táboa que permita observar como varía a área, en función do número de lados, vemos que aumenta continuamente, pero cada vez mais paseñinamente; nunha palabra, vemos intuitivamente que converxe. Boa ocasión para dotar de significado ás nocións matemáticas -maís difíciles e para outros niveis educativos- como sucesión de Cauchy, ou sucesión converxente, e establecer relacións entre estas nocións.

A situación-problema plantexada ten un enfoque sustancialmente distinto dos típicos exercicios que soen propoñerse na clase para practicar e consolidar os conceptos que previamente introduce o profesor. Posibilita observar e reflexionar sobre as concepcións erróneas e os obstáculos de aprendizaxe que manifestan os alumnos diante das estratexias que poñen en práctica para tentar de resolve-lo problema, permitindo un maior control dos significados construidos polos estudiantes.

Bibliografía

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9 (3), pp. 283-307.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (3), pp. 241-283

Brousseau, G. (1983) Les obstacles epistémologiques et les problémes en didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), pp.164-198

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phenoménes d'Enseignement des Mathématiques*. Thése d'Etat. Université de Bourdeaux.

Brousseau, G. (1990) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9 (3), pp. 309-336

Chevallard, Y. (1985). *La transpositión didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989).Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG. Grenoble. Université Joseph-Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 12 (1), pp. 73-112

Chevallard, Y; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona. ICE-Horsori Editorial.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7 (2), pp. 5-31

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London. The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. Reidel P.C.

Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez (ed.): *Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid. Síntesis.

Godino J.D.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14 (3), pp. 325-355

Godino, J.D.; Batanero, C. (1997). El análisis del significado de los objetos matemáticos como área prioritaria de investigación en Educación Matemática. En A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (ed.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (p. 177-195). Dordrecht. Kluwer A.P.

Hewson, P. W. (1981). A conceptual Change approach to Learning Science. *European Journal of Science Education*, 3 (4). pp. 383-396

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouws (ed.). *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (p. 65-97). New York. McMillan.

Kutschera, F. Von (1971). *Filosofía del lenguaje*. Madrid. Gredos.

Posner, G.; Strike, K.; Hewson, P. e Gertzog, W. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education*. 66 (2), pp. 211-227.

Sierpinska, A. (1994). *Understandig in mathematics*. London. The Falmer Press.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptueles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2,3), pp. 133-170