



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

ECUACIONES DIOFÁNTICAS NAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

María Alonso Rodríguez

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

ECUACIONES DIOFÁNTICAS NAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

María Alonso Rodríguez

Febreiro, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

| |
|--|
| Área de Coñecemento: Álgebra |
| Título: Ecuacións diofánticas nos problemas de olimpíadas |
| Breve descrición do contido |
| Trátase de facer unha revisión dos principais conceptos que aparecen nos problemas das distintas fases da Olimpíada Matemática Española e olimpíadas internacionais sobre ecuacións diofánticas (ecuacións diofánticas lineares, ternas pitagóricas, ecuacións diofánticas cuadráticas e de orde superior, ecuacións de Pell,...), facer unha recollida de enunciados e presentar unha escolma de problemas resoltos resaltando algunhas das técnicas clásicas (factorización, parámetros, desigualdades, fraccións continuas, aritmética modular, indución matemática,...). |
| Recomendacións |
| |
| Outras observacións |
| |

Índice

| | |
|---|-------------|
| Resumo | VIII |
| Introdución | XI |
| 1. Contexto histórico | 1 |
| 1.1. Diofanto de Alexandría | 1 |
| 1.2. Os problemas diofánticos | 1 |
| 1.3. Ecuacións diofánticas en diversas culturas | 2 |
| 2. Ecuacións diofánticas | 5 |
| 2.1. Ecuacións diofánticas lineais | 5 |
| 2.1.1. Ecuación diofántica $ax - by = c$ | 5 |
| 2.1.2. Ecuación diofántica $ax + by = c$ | 6 |
| 2.1.3. Exemplos | 6 |
| 2.1.4. Sistemas de ecuacións | 9 |
| 2.2. Ecuacións diofánticas cuadráticas | 10 |
| 2.2.1. Ecuación $x^2 - y^2 = t$ | 10 |
| 2.2.2. Fraccións continuas | 12 |
| 2.2.3. Ecuación de Pell | 12 |
| 2.2.4. Ecuación Pitagórica | 14 |
| 2.2.5. Teorema de Lagrange | 14 |

| | |
|--|-----------|
| 2.3. Ecuacións diofánticas de outros graos | 14 |
| 2.3.1. Problema de Hilbert-Waring | 14 |
| 2.3.2. Gran Teorema de Fermat | 15 |
| 3. Problemas de Olimpíada | 17 |
| 3.1. Que son as Olimpíadas Matemáticas? | 17 |
| 3.2. Fase Local da OME | 18 |
| 3.3. Olimpíada Nacional | 24 |
| 3.4. Olimpíada Internacional | 36 |
| Bibliografía | 49 |

Resumo

O obxectivo principal deste traballo será explorar e analizar diferentes métodos de resolución das ecuacións diofánticas nos problemas de olimpiada matemática. Preténdese comprender como estas ecuacións, que requiren solución enteira, poden aplicarse en problemas competitivos e de que maneira os conceptos teóricos se traducen en técnicas para a súa resolución.

Deste xeito, o traballo está dividido en tres capítulos. O primeiro deles trata sobre a historia destes problemas, o seguinte sobre diferentes tipos de ecuacións diofánticas e a súa resolución. Por último, unha escolma dos diferentes problemas que nos podemos atopar nas olimpiadas locais, nacionais e internacionais.

Abstract

The main goal of this work is to explore and analyze several methods to solve the diophantine equations that appear in mathematical olympiads. It tries to understand how these equations, that require integer solutions, are used in competition problems and the way in which the theoretical concepts translate into technics useful to solve them. In this way, the work is divided in three chapters. The first one, about the history of these problems. The second one, about different types of diophantine equations and their resolution. And finally, a selection of problems that can be found in local, national and international mathematical olympiads.

Introdución

As ecuacións diofánticas, nomeadas en honra ó matemático grego Diofanto de Alexandría, son unha clase especial de ecuacións polinómicas con coeficientes enteiros que buscan solucións nos números enteiros. Estas ecuacións foron obxecto de estudo desde a antigüidade e xogan un papel crucial en diversas áreas das matemáticas, incluíndo a teoría de números e a xeometría alxébrica. Nas olimpíadas matemáticas, os problemas que implican ecuacións diofánticas son frecuentes e presentan desafíos interesantes tanto pola súa simplicidade aparente como pola profundidade das técnicas necesarias para a súa resolución.

Ao longo dos anos, desenvolvéronse numerosas técnicas e métodos para abordar as ecuacións diofánticas. Con todo, moitos problemas expostos nas competicións matemáticas requiren unha comprensión profunda e unha aplicación innovadora destas técnicas. A pesar da abundante literatura sobre o tema, segue existindo unha necesidade de estratexias máis efectivas e eficientes para resolver estes problemas no contexto das olimpíadas.

O obxectivo principal deste traballo é explorar e analizar o uso das ecuacións diofánticas nos problemas de olimpíada matemática. En particular, búscase comprender como os conceptos teóricos se traducen en técnicas prácticas para resolver os devanditos problemas. Para iso, levarase a cabo unha intensa revisión da literatura, analizaranse problemas representativos de diversas competicións e propoñeranse solucións detalladas e comentadas.

Con este estudo pretendemos, non só enriquecer a comprensión das ecuacións diofánticas, senón que tamén proporcionar unha guía práctica para estudantes e profesado con interese nas olimpíadas matemáticas.

O traballo está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 preséntase un pequeno contexto histórico sobre o nacemento e a evolución ó longo dos anos das ecuacións diofánticas. O capítulo 2 céntrase nos diferentes métodos de resolución e exemplos sobre eles. Finalmente, no capítulo 3 preséntanse os problemas das olimpíadas nas fases establecidas.

Capítulo 1

Contexto histórico

1.1. Diofanto de Alexandría

No referente á matemática grega, un dos autores máis relevantes da denominada “Idade de Prata” (250-350 d.c) foi Diofanto de Alexandría. Malia que a súa principal obra, “Aritmetica”, non é en absoluto o tipo de material que constitúe a base da álgebra elemental moderna, nin de lonxe semellante á álgebra xeométrica que se atopa en Euclides, Diofanto é a miúdo chamado o pai da álgebra.

A pesar de non conservar na súa totalidade esta colección, nos volumes existentes pódense observar as abreviaturas que empregaba, tanto para representar potencias de números como para establecer relacións e operacións entre eles. Un número descoñecido representábase por un símbolo que se parece a letra grega ς . Os coeficientes numéricos escribíanse despois dos símbolos que foron elixidos para representar as incógnitas asociadas. A suma de termos representábase unindo os símbolos dos termos en cuestión.

Estas notacións si que poderían xustificar o título de pai da álgebra e grazas a elas, Diofanto puido escribir polinomios con unha única incógnita dun xeito moi similar ó que se fai hoxe en día ([1]).

1.2. Os problemas diofánticos

Defínese unha ecuación como unha igualdade na que interveñen tanto cantidades coñecidas como descoñecidas, estas últimas chámanse incógnitas. Encontrar unha solución dunha ecuación dentro dun conxunto numérico é encontrar unha serie de valores dentro dese mesmo conxunto de forma que ó substituír nas incógnitas a igualdade quede verificada. No caso das ecuacións

diofánticas o conxunto onde se atoparán esas solucións será o dos números naturais ou dos enteiros.

No documento anteriormente mencionado “Arithmetica”, desenvólvense 150 problemas de exemplos numéricos concretos e cabe destacar que non se facían referencias a problemas cotiáns senón que eran números completamente abstractos. Aínda que se supón que a idea central de Diofanto era dar un método xeral, en ningún momento atopa dita mecanización. Tampouco hai distinción entre ecuacións determinadas e indeterminadas, así mesmo non se chegan as solucións totais. Por exemplo, nas ecuacións de segundo grao con dúas raíces positivas só se da a maior delas e non se pronuncia sobre o resto de raíces. De feito, suponse que foi Bramagupta (S. VII) o primeiro que deu unha solución completa á ecuación diofántica linear $ax + by = c$.

Un problema que pode servir para ilustrar o anterior sería o seguinte: **“calcular dous números tales que a suma sexa 20 e a suma dos seus cadrados 208”** ([3]). En notación actual, destacar que non representaba as incógnitas como x e y , senón que poñía $(10 + x)$ e $(10 - x)$; entón terá que verificarse que:

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208. \quad (1.1)$$

Operando teríase que $x = 2$ e os números buscados son 8 e 12.

Neste problema, como se pode observar, aparecen cuestións determinadas, pero Diofanto empregaba a mesma forma de resolución para as indeterminadas. Mais explicitamente, sempre que dous números teñan que satisfacer dúas condicións, devéñse elixir os números indeterminados de tal maneira que unha das dúas condicións se cumpran automaticamente, e despois imponse a segunda condición para determinalos. Isto confronta cos sistemas de ecuacións que se traballan na actualidade, xa que se resolven as dúas ecuacións simultaneamente.

Entre os problemas indeterminados que aparecen en *Arithmetica*, hai algúns que levan a ecuacións como $x^2 = 1 + 30y^2$ ou $x^2 = 1 + 26y^2$, nestes casos Diofanto confórmase con atopar unha solución, xa que nesa época o foco estaba en resolver problemas e non ecuacións ([3]).

1.3. Ecuacións diofánticas en diversas culturas

A vinculación académica de Diofanto achégase mais os pobos orientais, coma os recoñecidos alxebristas babilonios, os chinos, os indios ou os exipcios, cós matemáticos gregos. Este suceso débese a que o documento “Arithmetica” non é un libro como tal, senón un conxunto de problemas sobre as aplicacións da álgebra. Porén, os seus números son completamente abstractos e non se refire a medidas de grao ou a dimensións de campos. Está interesado unicamente en solucións exactas, mentres que os babilonios estaban dispostos a aceptar aproximacións de números

irracionais como solucións das súas ecuacións. Por esta razón, rara vez imos atopar as ecuacións cúbicas na obra de Diofanto.

Así mesmo, Diofanto tivo unha influencia moito maior sobre a teoría moderna. Por exemplo, Pierre Fermat, achou a gloria co seu célebre “Gran Teorema” cando tentaba resolver o problema de “*Dividir un cadrado en dous cadrados*”, que vira na tradución latina, por Bachet de Méziriac, da “*Arithmetica*” de Diofanto ([1]).

O desenvolvemento de métodos de resolución de problemas de análise indeterminado constitúe un dos maiores logros da matemática india. Isto débese a necesidade de estudar fenómenos que se repiten periodicamente, como a astronomía.

Jonh Pell foi un matemático inglés que viviu durante o século XVII. A ecuación de Pell é unha ecuación diofántica da seguinte forma: $x^2 - dy^2 = 1$, $d \in \mathbb{Z}$.

Como resultado dos esforzos de moitos matemáticos de comezos de século XIX estudáronse as ecuacións xerais non homoxéneas de segundo grao con dúas incógnitas e con coeficientes enteiros:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0,$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i = 1, 2, \dots, 6$.

Capítulo 2

Ecuacións diofánticas

2.1. Ecuacións diofánticas lineais

Dentro das ecuacións alxébricas, considéranse as chamadas ecuacións diofánticas lineais, neste caso estudaranse en dúas variables, dando unha ecuación da forma:

$$ax \pm by = c,$$

sendo a, b e c números enteiros dados. Xeometricamente, este problema significa que buscamos os puntos no plano de coordenadas enteiras que están situados sobre unha recta.

2.1.1. Ecuación diofántica $ax - by = c$

A condición necesaria e suficiente para que unha ecuación do xeito $ax - by = c$ teña solución é que o máximo común divisor de a e b sexa divisor de c , sendo a e b números primos entre si. Podemos converter a ecuación inicial de tal forma que

$$ax - by = c \implies ax = c + by.$$

Está claro que o número enteiro $c + by$ é múltiplo do número natural a . Pola propia definición dos números congruentes módulo a temos que $c + by \equiv 0 \pmod{a}$, agora ben, como $\text{mcd}(a, b) = 1$ temos que b é invertible módulo a , de onde se $b_i \equiv b_j \pmod{a}$ para calquera i, j números enteiros implicaría que $i \equiv j \pmod{a}$.

Obteríamos así, a restos distintos: $0, 1, 2, \dots, a - 1$; se lle asignamos valores a incógnita y teríamos un sistema completo de números incongruentes módulo a :

$$c + b \cdot 0, c + b \cdot 1, \dots, c + b \cdot (a - 1),$$

equivalentemente, temos a restos distintos entre si.

Finalmente un deses restos deberá ser igual a cero, polo xa visto. Deste xeito tense un valor para $x \pmod a$ que logo substituiremos na ecuación orixinal para obter o segundo valor de y , chegando a solución xeral buscada ([3]).

2.1.2. Ecuación diofántica $ax + by = c$

Para resolver a ecuación $ax + by = c$ empregamos o método anterior de xeito totalmente análogo, esta ecuación tratarase como un caso particular de $ax - by = c$. Partiremos de ecuación inicial de tal forma que,

$$ax + by = c \implies by = c - ax,$$

empregando a congruencia chegaremos a solución xeral da mesma forma.

2.1.3. Exemplos

Estudaremos exemplos do que acabamos de ver ata agora para clarificar os coñecementos así como a notación ([2]).

Exemplo 1.

Atopar as solucións enteiras non negativas da seguinte ecuación:

$$2x - 3y = 5.$$

SOLUCIÓN.

Vexamos se ten solución: $\text{mcd}(2, 3) = 1$ e como 1 divide a 5, a ecuación ten solucións enteiras. Calculamos unha solución particular usando congruencias.

$$2x - 3y = 5 \implies 2x = 5 + 3y.$$

Esta forma é equivalente a resolver:

$$2x \equiv 5 \pmod{3}.$$

Polas propiedades das congruencias podemos sumar a conveniencia para conseguir o desexado, entón

$$2x \equiv 8 \pmod{3},$$

e, como 2 ten inverso módulo 3,

$$x \equiv 4 \pmod{3}.$$

Deste xeito chegamos a que $x = 4$ polo que

$$y = \frac{2 \cdot 4 - 5}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Logo a solución particular é $x = 4$ e $y = 1$.

A solución xeral no caso de x vén dada por $x = 4 + 3t$, substituíndo dito valor na ecuación orixinal chegamos a que $y = 1 + 2t$, como era de esperar.

Entón:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

é a solución xeral para todo $t \in \mathbb{Z}$. Como o enunciado pide as solucións non negativas:

$$x \geq 0 \implies 4 + 3t \geq 0 \implies 3t \geq -4 \implies t \geq -\frac{4}{3} \implies t \geq -1$$

$$y \geq 0 \implies 1 + 2t \geq 0 \implies 2t \geq -1 \implies t \geq -\frac{1}{2} \implies t \geq 0$$

Polo tanto, as solucións non negativas son $x = 4 + 3t$ e $y = 1 + 2t$, con $t \geq 0$.

Exemplo 2.

Atopar as solucións enteiras non negativas da seguinte ecuación:

$$11x + 2y = 3.$$

SOLUCIÓN.

Vexamos se ten solución: $m.c.d(11, 2) = 1$ e como 1 é divisor de 3, a ecuación ten solucións enteiras. Resolver a ecuación do enunciado é equivalente a resolver

$$2y = 3 - 11x \Leftrightarrow -2y = -3 + 11x.$$

Botamos man das congruencias, polo que

$$-2y \equiv -3 \pmod{11} \implies 2y \equiv 3 \pmod{11}.$$

Sumamos, por conveniencia, grazas as propiedades das congruencias

$$2y \equiv 14 \pmod{11}$$

$$y \equiv 7 \pmod{11}$$

$$y = 7$$

Se agora tomamos $y = 7$, tense

$$x = \frac{3 - 2 \cdot 7}{11} = \frac{-11}{11} = -1$$

Logo a solución particular sería $x = -1$ e $y = 7$. A solución xeral no caso de y vén dada por $y = 7 + 11t$, substituíndo dito valor na ecuación orixinal chegamos a que $x = -1 - 2t$, con $t \in \mathbb{Z}$.

Por último a solución xeral sería:

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 11t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.

Nunha batalla na que participan entre 100000 e 110000 soldados, resultan mortos $\frac{23}{165}$ do total, e feridos $\frac{35}{143}$ do total. Atopar cuantos soldados resultan ilesos.

SOLUCIÓN.

Chamamos:

- x o número de soldados ilesos.
- y o número total de soldados.

O número total de soldados é a suma dos soldados feridos, os soldados mortos e os que resultan ilesos. Expoñemos a ecuación cos datos do problema:

$$\frac{23}{105}y + \frac{35}{143}y + x = y$$

Multiplicando ambos termos polo $m.c.m.(165, 143) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145$, queda a seguinte ecuación:

$$299y + 525y + 2145x = 2145y$$

$$2145x - 1321y = 0$$

$$2145x = 1321y$$

$$\frac{y}{2145} = \frac{x}{1321},$$

Ecuación diofántica lineal de dúas incógnitas xa que a solución ten que ser un número natural. Polo tanto, as dúas fraccións son un número natural k :

$$\frac{y}{2145} = \frac{x}{1321}$$

tales que

$$\begin{cases} x = 2145k \\ y = 1321k \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero o número total de soldados está comprendido entre 100000 e 110000, é dicir:

$$100000 < y < 110000.$$

Polo tanto:

$$\text{Se } 100000 < y \Rightarrow 100000 < 2145k \Rightarrow 4,66 < k \Rightarrow 5 \geq k.$$

$$\text{Se } y < 110000 \Rightarrow 2145k < 110000 \Rightarrow k < 5,13 \Rightarrow k \geq 5.$$

A solución é para $k = 5$, logo:

$$x = 1321k \Rightarrow x = 1321 \cdot 5 \Rightarrow x = 6605.$$

O número de soldados que resultan ilesos é 6605.

2.1.4. Sistemas de ecuacións

Os sistemas de ecuacións lineais diofánticas son un conxunto de ecuacións diofánticas que deberemos resolver conxuntamente, é dicir, deberemos estudar un conxunto de solucións de forma que ámbalas dúas ecuacións queden resoltas simultaneamente.

Vexamos un pequeno exemplo aplicando os coñecementos teóricos xa vistos ata agora, xunto co que sabemos de resolución de sistemas de ecuacións mediante a regra de Cramer, o método de Gauss-Jordan e o teorema de Frobenius ([3]).

É importante facer fincapé neste último teorema que será o que nos dirá que un sistema ten solución se e só se o rango da matriz de coeficientes coincide co rango da matriz ampliada.

Ademais, un sistema lineal diofántico ten solucións enteiras se triangulando en forma mónica, a última ecuación admite a súa vez solucións enteiras. A triangulación mónica é posible se en cada paso queda algunha incógnita que en dúas das ecuacións pendentes de graduar teñan coeficientes primos entre si. Deste xeito, confirmamos que as solucións atopadas son enteiras.

Exemplo. 3

Atopar as solucións enteiras do seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 17 \\ 3x - 7y + 4z = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

Igual ca nos casos vistos ata agora, miramos se o sistema ten solución. O rango da matriz de

coeficientes é 2, igual que o da matriz ampliada polo que en virtude do teorema de Frobenius o sistema ten solución.

Procedemos coma no caso dun sistema ordinario e, manipulando as ecuacións, despexaremos unha das incógnitas.

Sumando as dúas ecuacións despexamos z

$$z = 6x - 3y - 19,$$

substituíndo z en calquera das dúas ecuacións do sistema

$$3x - 7y + 4(6x - 3y - 19) = 2$$

$$27x - 19y = 78. \tag{2.1}$$

Agora estamos diante dunha ecuación diofántica xa coñecida, $27x \equiv 78 \pmod{19}$ que é equivalente a $x \equiv 5 \pmod{19}$, polo tanto $x = 5 + 19t$ para $t \in \mathbb{Z}$. Se substituímos x en 2.1, obtemos $y = 3 + 27t$. Temos entón dous valores de x e y para atopar o z non temos mais que substituír eses dous valores en (2.23) de onde $z = 2 + 30t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. Finalmente xa temos as solucións buscadas.

2.2. Ecuacións diofánticas cuadráticas

2.2.1. Ecuación $x^2 - y^2 = t$

Nesta sección veremos ecuacións de segundo grao con dúas incógnitas x e y , o que vén sendo unha ecuación diofántica cuadrática, esta ecuación pódese escribir como:

$$(x + y)(x - y) = t.$$

Para escribir un sistema podemos descompor o número enteiro t de tódalas formas posibles $t = t_1 t_2$, onde t_1 e t_2 son simultaneamente pares ou impares, xa que a suma e diferenza de dous enteiros x e y teñen a mesma paridade. Deste xeito:

$$\begin{cases} x + y = t_1 \\ x - y = t_2 \end{cases}$$

Para obter x sumamos as ecuacións anteriores e temos que $x = \frac{t_1 + t_2}{2}$ e, do mesmo xeito, restando obtemos $y = \frac{t_1 - t_2}{2}$. Esta forma de operar lévanos a pensar que existe solución se é so se t se pode descompor como produto de números coa mesma paridade. En función da disto

teremos diferentes casos a estudar.

Dentro desta mecánica imos ver un exemplo para clarificar o exposto.

Exemplo. 4

Atopar as solucións enteiras non negativas da seguinte ecuación:

$$x^2 - y^2 = 98.$$

SOLUCIÓN.

Tratamos de resolver a ecuación diofántica de dúas incógnitas, onde escribimos a diferenza de cadrados como suma por diferenza:

$$(x + y)(x - y) = 98.$$

A descomposición factorial do número 98 é $98 = 2 \cdot 7^2$, que é un número par pero non divisible por 4. Polo tanto, a ecuación non ten solucións enteiras.

descompomos 98 como produto de dous factores: $98 = t_1 \cdot t_2$. Chegado a este punto temos tres posibilidades:

- $t_1 = 1, t_2 = 98$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 98 \end{cases}$$

sumando as ecuacións, temos:

$$x = \frac{1 + 98}{2} = \frac{99}{2}$$

polo tanto, $x \notin \mathbb{Z}$. De xeito análogo, restando as ecuacións,

$$x = \frac{1 - 98}{2} = \frac{-97}{2}$$

polo tanto, $y \notin \mathbb{Z}$.

- $t_1 = 2, t_2 = 49$.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 49 \end{cases}$$

sumando as ecuacións, temos:

$$x = \frac{2 + 49}{2} = \frac{51}{2}$$

polo tanto, $x \notin \mathbb{Z}$. De xeito análogo, restando as ecuacións,

$$x = \frac{2 - 49}{2} = \frac{-47}{2}$$

polo tanto, $y \notin \mathbb{Z}$.

- $t_1 = 14, t_2 = 7$.

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

sumando as ecuacións, temos:

$$x = \frac{14 + 7}{2} = \frac{21}{2}$$

polo tanto, $x \notin \mathbb{Z}$. De xeito análogo, restando as ecuacións,

$$x = \frac{14 - 7}{2} = \frac{7}{2}$$

polo tanto, $y \notin \mathbb{Z}$.

2.2.2. Fraccións continuas

As fraccións continuas son uns dos temas máis interesantes dentro da teoría de números, así como tamén un dos máis antigos.

Unha fracción continua é unha expresión do tipo:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

onde a_0 é un número enteiro e os demais a_i son enteiros positivos. Os numeradores son todos iguais a 1, e os coeficientes a_i , $1 \leq i \leq n$ son números naturais e a_0 é a parte enteira da fracción. Esta forma é pouco práctica, por iso pensouse outra notación menos complexa. A mais aceptada pola comunidade é: $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Vexamos un exemplo disto xa que na sección seguinte imos empregar esta notación. Sexa a fracción $\frac{59}{11}$

$$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11} = 5 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Expresado na notación anterior sería $\frac{59}{11} = [5; 2, 1, 3]$. Cando se permiten que os numeradores ou os denominadores parciais tomen valores arbitrarios, a expresión resultante é unha fracción continua xeneralizada.

2.2.3. Ecuación de Pell

Axel Thue demostrou o seguinte teorema importante:

Sexa $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio irreducible de grado maior ou igual ca 3 con coeficientes enteiros e consideremos o polinomio homoxéneo correspondente:

$$F(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n \quad (2.2)$$

Para un enteiro non nulo, m , a ecuación $F(x, y) = m$, ou ben non ten solucións enteiras, ou ben só ten un número finito delas.

Este resultado contrasta coa situación na que o grado de F é 2, é dicir, $n = 2$. Neste caso, se $F(x, y) = x^2 - Dy^2$, onde D é un enteiro positivo non cadrado, entón para todos os enteiros non nulos m , ou ben a ecuación non ten solución ou ten infinitas solucións enteiras. Esta última ecuación coñécese co nome de Ecuación de Pell. Esta ecuación foi estudada durante moitos anos dando como resultado un algoritmo perfecto para aproximar diferentes raíces ([3]).

Vexamos un exemplo de importancia histórica xa que as primeiras ecuacións tipo Pell estudáronse cara o ano 400 a. C. polos gregos e indios. Referímonos á ecuación con $D = 2$, pois, como veremos, podemos aproximar $\sqrt{2}$ mediante números racionais, $\frac{x}{y}$, cocientes de solucións enteiras positivas da ecuación ([4], [2]).

Exemplo

Atopar as infinitas solucións de:

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

SOLUCIÓN.

Supoñamos que $x^2 - y^2 = 0$ tivese unha solución enteira; entón $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$, sería racional; pero, como sabemos, non o é. Non obstante, toda solución enteira de (2.40) dá unha aproximación racional de $\sqrt{2}$, sen máis que considerar a ecuación equivalente, $\frac{x^2-1}{y^2} = 2$. Parece lóxico intentar resolver (2.40) estudando esas aproximacións mediante o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1 = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} \\ x_1 &= \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \sqrt{2} - 1 = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} \\ x_2 &= \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \frac{1}{x_3} = \sqrt{2} - 1 = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

a partir deste punto repítense os cocientes incompletos: 1, 2, 2, 2, ... seguindo o mesmo método, que permiten calcular unha sucesión de fraccións reducidas coñecidas como converxentes da fracción continua completa.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}$$

Operando cara atrás,

$$r_1 = 1; r_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; r_3 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}; r_4 = \frac{17}{12}; r_5 = \frac{41}{29}; r_6 = \frac{99}{70}; \dots$$

Empregando a notación anterior sobre fraccións continuas temos $[1; 2, 2, 2, \dots]$ e así obtendo sucesivamente os restos temos unha aproximación de $\sqrt{2}$ e como consecuencia infinitas solucións.

2.2.4. Ecuación Pitagórica

Trátase dunha ecuación moi similar a anterior, consta de tres incógnitas e un signo positivo, escríbese matematicamente como $x^2 + y^2 = z^2$, xeometricamente significa obter os triángulos rectángulos cuxos lados teñen lonxitudes enteiras.

Os primeiros números pitagóricos empregados foron o 3, 4 e 5, a partir dos cales podemos obter infinitos números pitagóricos sen mais que multiplicalos por calquera enteiro λ : $3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$. Este resultado lévanos a que se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é unha solución da ecuación entón $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$ tamén é solución para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$ ([3]).

2.2.5. Teorema de Lagrange

Durante o século XVII, o matemático Bachet de Méziriac conxecturou que todo número natural se podía escribir como suma de catro cadrados. Máis adiante, Pierre Fermat asegurou de palabra que demostrara dita conxectura pero nunca se atopou a súa demostración formal.

Foi Joseph-Louis Lagrange quen deu solución ó seguinte enunciado: Dado m natural, a ecuación diofántica $m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ten solución.

A demostración lévase a cabo tomando unha identidade de Euler que permita reducir a demostración aos casos nos que m é un número primo. Posteriormente demostra que dado calquera primo m maior que dous, existen $n, x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq n < \frac{m}{2}$ e que $mn = 1 + x_0^2 + y_0^2$, xuntando isto cos resultados sobre a teoría de congruencias chégase a solución do problema ([3]).

2.3. Ecuacións diofánticas de outros graos

Dentro das ecuacións diofánticas que xa coñecemos existen outras de distinto grao, que veremos explicitamente nos seguintes subapartados, que son os mais representativos dentro desta sección.

2.3.1. Problema de Hilbert-Waring

No ano 1770, Edward Waring conxecturou que as ecuacións diofánticas:

$$\begin{aligned} m &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ m &= x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_8^3 + x_9^3 \\ m &= x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{18}^4 + x_{19}^4 \end{aligned}$$

tiñan solución. É dicir, todo natural pódese escribir como suma de 4 cadrados, 9 cubos e 19 bicadrados. Ao parecer non se considera que Waring tivese a suficiente capacidade para probar

a súa propia conxectura, de feito nin sequera para probar algún dos casos particulares que el mesmo conxecturou. Pero aí quedou a cousa, como un reto do mesmo xeito que calquera outra conxectura, para quen a quixese tomar. A comezos do século XX, David Hilbert, xeneralizou estes resultados demostrando que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe outro número natural k_n de forma que a ecuación diofántica:

$$m = x_1^n + x_2^n + \dots + x_{k_n-1}^n + x_{k_n}^n,$$

admite solución con valores naturais. Dado un $n \in \mathbb{N}$ o mínimo dos k_n que verifica o teorema de Hilbert será nomeado por $g(n)$. O problema reside en atopar o mínimo valor posible $g(n)$ para que sempre exista solución da ecuación diofántica $m = x_1^n + x_2^n + \dots + x_{g(n)-1}^n + x_{g(n)}^n$. Cabe destacar que o teorema afirma a existencia pero non dá unha estimación para os k_n .

Outro aspecto importante que se traballou durante a última metade do século XX, foi estudar a obtención desa solución salvo para un conxunto finito de posibles valores de m .

2.3.2. Gran Teorema de Fermat

Pierre Fermat (século XVII) dedicouse, por afección, as matemáticas, contribuíndo á fundación da xeometría analítica, ó cálculo de probabilidades e á aritmética moderna. Gran parte da súa obra matemática coñécese a través das anotacións que tiñan seus libros; neles abundan os resultados formulados sen demostración, cuxo exemplo máis famoso é o da súa conxectura.

O estudio de técnicas de análise numérico introducidos por Diofanto levouno a varios descubrimentos importantes da teoría dos números, entre os que cabe mencionar o método de descenso infinito, así como toda unha serie de proposicións e teoremas.

NÚMERO DE FERMAT

Son os números F_n , tal que $F_n = 2^{2^n} + 1$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Introduciunos crendo que se trataba de números primos para todo n . Sen embargo, sábese con seguridade que non o son para $5 \leq n \leq 16$, así como para algúns valores superiores de n .

TEOREMA DE FERMAT

Comunmente coñécese co nome do "Pequeno teorema de Fermat". Establece que dado un número enteiro a calquera, non divisible por p , sendo p primo, entón $a^{p-1} - 1$ é divisible por p , é dicir $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, que se coñece como congruencia de Fermat.

GRAN TEOREMA DE FERMAT

Se n é un número enteiro maior que 2, a ecuación $x^n + y^n = z^n$ non ten solución enteira positiva distinta de $x = y = z = 0$.

O teorema foi formulado por Fermat nunha nota no seu exemplar do "Arithmetica" de Diofanto. Fermat escribiu que tiña unha demostración, pero que era demasiado longa para caber

nas marxes do libro. Non se coñece a demostración que Fermat afirmou ter, e durante séculos o teorema permaneceu sen demostrar. Os traballos para a súa demostración foron impresionantes:

- Cen anos despois, Leonhard Euler traballou na súa resolución, aínda que só é capaz de demostrar o caso $n = 3$.
- No 1825, Johann Peter Gustav L. Dirichlet e Adrien-Marie Legendre demostraron o caso $n = 5$.
- No 1840, Gabriel Lamé fixoo para $n = 7$.
- No 1847, Ernst Kummer demostra o teorema para todos os valores de n menores ou iguais a 100, excepto os casos 37, 59 e 67.
- No 1854, a Academia de Ciencias de París, promove un premio de 300.000 francos de ouro para aquel que puidese demostrar o teorema. Este premio queda deserto.
- Os medios informáticos utilizados no século XX permitiron a demostración do teorema para valores de n de varias decenas de miles.

A solución o Gran Teorema de Fermat chegou antes da finalización do século XX. Foi o inglés Andrew Wiles quen, a partir do estudo de curvas elípticas, logrou unha demostración deste teorema no ano 1995. A conquista de Wiles aporta unha solución parcial doutro difícil problema, coñecido por "conxectura de Shimura Taniyama-Weil", publicada en 1995, onde afirma que toda curva elíptica da forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ podería ser interpretada como unha forma modular. O feito de que esta conxectura fose certa, implicaría a solución do teorema de Fermat.

Capítulo 3

Problemas de Olimpíada

3.1. Que son as Olimpíadas Matemáticas?

Trátase de concursos entre mozos e mozas, cuxo obxectivo primordial é estimular o estudo das Matemáticas e o desenvolvemento de novos talentos nesta Ciencia.

A Olimpíada Española de Matemáticas (OME) está organizada anualmente pola Real Sociedade Matemática Española e desenvólvese en dúas fases:

- A Fase Local (Fase de Distrito ou Fase Autonómica)

Celébrase á final do primeiro trimestre en cada Comunidade Autónoma ou Distrito Universitario e poden participar alumnos matriculados no sistema educativo español en Bacharelato, ou de 3^o e 4^o da ESO con excelentes capacidades; Consta de dúas probas escritas nas que se deben resolver un total de seis problemas.

- A Fase Nacional

Nesta fase, ou concurso final, participa unha selección das mellores puntuacións das Fases Autonómicas (a contía fíxase para cada Comunidade Autónoma/Cidade) e consta de dúas probas escritas de tres horas e media cada unha, nas que teñen que facer fronte a un total de seis problemas propostos por un xulgado.

A OME chegou este ano á súa sexaxésimo quinta edición, dúas delas en Galicia (a primeira, en Santiago de Compostela, en 2005, e a segunda, en Ourense, en 2019).

- Olimpíadas Internacionais

As seis mellores puntuacións con nacionalidade española da Fase Final recibirán unha medalla de ouro e terán dereito a participar na Olimpíada Internacional de Matemáticas (IMO) representando a España.

Unha selección de catro destes gañadores participará posteriormente na Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas (Ibero).

Unha selección de 4 mulleres participantes na OME (este ano, por primeira vez, realizouse a través da Olimpíada Matemática Feminina Española) acudirá á Olimpíada Matemática Europea Feminina (EGMO).

Ao longo deste capítulo estudaremos algúns dos problemas máis salientables dentro de cada fase así como pequenos exercicios e observacións que poden xurdir a consecuencia destes ([6]).

3.2. Fase Local da OME

Comezaremos con problemas propostos na fase local galega ([5]).

Exercicio 1. (Problema 5 de 2014)

Atopar as solucións enteiras da ecuación:

$$x^4 + y^4 = 3x^3y.$$

SOLUCIÓN.

A simple vista vemos que a primeira solución é a trivial; para $x = 0$, $y^4 = 0$ e, polo tanto, $y = 0$.

Se $x \neq 0$, podemos dividir todos os termos da ecuación por x^4 ,

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + y^4}{x^4} &= \frac{3xy^3}{x^4} \\ 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 &= 3 \cdot \frac{y}{x} \end{aligned}$$

e, facendo o cambio de variable $t = \frac{y}{x}$,

$$\begin{aligned} 1 + z^4 &= 3z \\ z^4 - 3z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

As solucións enteiras da primeira ecuación son as solucións racionais da segunda. Según o teorema da raíz racional, se ten solucións racionais, o denominador da fracción debe ser divisor do coeficiente de maior grado é dicir de z^4 , e o numerador un divisor do termo independente, 1. Os candidatos a raíces son 1 e -1 , que non verifican a ecuación.

Polo tanto non hai solucións racionais, e a ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$ non ten solucións enteiras distintas da trivial $x = 0, y = 0$.

Exercicio 2. (Problema 1 de 2005)

Demostrar que a ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 - x - 3y - z - 4 = 0$$

posúe infinitas solucións nos números enteiros.

SOLUCIÓN.

Tratamos de resolver unha ecuación diofántica de segundo grao con tres incógnitas. Primeiramente imos intentar reescribir a ecuación buscando cadrados:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} = 0$$

organizando a ecuación, queda diferenza de cadrados en ámbolos lados:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$

podémolos escribir como suma por diferenza:

$$\left(x - \frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2} - z - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} + y - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} - y + \frac{3}{2}\right)$$

$$(x + z)(x - z - 1) = (y + 1)(4 - y)$$

Se $x - z - 1 = y + 1$ e $x + z = 4 - y$, a ecuación ten solución. Entón agora trátase de resolver un sistema de ecuacións diofánticas:

$$\begin{cases} x - z = y + 2 \\ x + z = 4 - y \end{cases}$$

que ten infinitas solucións. Sumando as dúas ecuacións:

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3.$$

Por outro lado, restando as ecuacións:

$$-2z = -2 + 2y \Leftrightarrow 2z = 2 - 2y \Leftrightarrow 2z \equiv 2 \pmod{2} \Leftrightarrow z \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow z = 1 - t$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Finalmente temos que a terna $(3,t,1-t)$, con $t \in \mathbb{Z}$, son solucións da ecuación. Polo tanto, demostramos que ten infinitas solucións de números enteiros.

Exercicio 3. (Problema 4 de 2015)

Dados tres números enteiros positivos x, y, z , atopar o valor do seu produto xyz sabendo que cumpren:

$$x + 2y = z \quad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

SOLUCIÓN.

Da primeira ecuación despexamos $2y$,

$$2y = z - x,$$

substituímos na segunda ecuación o valor despexado:

$$\begin{aligned} x^2 - (z - x)^2 + z^2 &= 310 \\ x^2 - (z^2 - 2xz + x^2) + z^2 &= 310 \\ 2xz &= 310 \\ xz &= 155 \end{aligned}$$

Temos así un produto no primeiro membro. Descompomos 155 nos seus factores primos:

$$155 = 5 \cdot 31.$$

Tense agora que z debe tomar un dos valores 155, 31, 5, 1, tomando x , respectivamente, 1, 5, 31, 155. Como ademais $z = x + 2y > x$, os dous últimos casos quedan descartados. Vexamos os dous primeiros:

- Caso 1: $x = 1, z = 155$.

$$y = \frac{z - x}{2} = \frac{155 - 1}{2} = 77,$$

polo que os tres números enteiros positivos serían: $x = 1, y = 77, z = 155$ e o seu produto $xyz = 11935$.

- Caso 2: $x = 5, z = 31$.

$$y = \frac{z - x}{2} = \frac{31 - 5}{2} = 13,$$

polo que os tres números enteiros positivos serían: $x = 5, y = 13, z = 31$ e o seu produto $xyz = 2015$.

Finalmente concluimos que os posibles valores do produto son 11935 e 2015.

Observación.

Pódese expor un problema similar resolvendo unha ecuación diofántica lineal con dúas incógnitas na que interveña un parámetro descoñecido, como por exemplo o seguinte problema que simplemente imos mencionar.

Exercicio 4.

Un rei quere dividir os seus empregados en grupos de forma que o primeiro grupo poda formar un rectángulo de cinco en liña, e o segundo un rectángulo de sete en liña. Se durante nove días non se repite o número de empregados en cada grupo, cal é o número mínimo de empregados?

Sigamos cos problemas propostos na fase local da Olimpíada Matemática.

Exercicio 5. (2014)

Atopar para que valores do número enteiro a , todas as raíces do polinomio $x^3 - 2x^2 - 25x + a$ son números enteiros.

SOLUCIÓN.

Trátase de ver para que valores de a ten solucións a ecuación diofántica de unha incógnita:

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a = 0.$$

Se α, β e γ son solucións enteiras da ecuación, temos as seguintes igualdades:

$$\alpha + \beta\gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\alpha = -25$$

$$\alpha\beta\gamma = -a$$

desenvolvemos o cadrado:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta\gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2^2 - 2(-25) = 4 + 50 = 54 \end{aligned}$$

É dicir, temos que atopar ternas de valores que verifiquen:

$$\alpha + \beta\gamma = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 54$$

as posibles solucións enteiras da segunda ecuación son:

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 7), (\pm 2, \pm 5, \pm 5), (\pm 3, \pm 3, \pm 6)$$

Só a primeira terna verifica a primeira ecuación. Neste caso:

$$a = -\alpha\beta\gamma = -(2 \cdot 5 \cdot (-5)) = -(-50) = 50.$$

Logo o valor buscado de a é 50.

Exercicio 6. (2016)

Atopar a solución enteira máis pequena da ecuación:

$$\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{240} \right\rfloor = 210$$

sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte enteira de x .

SOLUCIÓN.

Se dividimos x entre 240, obtemos un cociente c_1 e un resto r_1

$$x = 240c_1 + r_1,$$

e se dividimos agora r_1 entre o outro denominador, 40, obtemos un cociente c_2 e un resto r_2

$$r_1 = 40c_2 + r_2$$

Do mesmo xeito, dividimos r_2 entre o último denominador, 8, obtemos un cociente c_3 e un resto r_3 :

$$r_2 = 8c_3 + r_3$$

Con $0 \leq r_1 < 240$, e polo tanto $0 \leq c_2 < 6$.

Con $0 \leq r_2 < 40$, e polo tanto $0 \leq c_3 < 5$.

Con $0 \leq r_3 < 8$.

Substituíndo en $x = 240c_1 + r_1$,

$$x = 240c_1 + r_1 = 240c_1 + 40c_2 + r_2 = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3$$

substituímos o valor de x na ecuación inicial:

$$210 = \left\lfloor \frac{240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3}{240} \right\rfloor$$

Quedamos coas partes enteiras de cada termo:

$$210 = (30c_1 + 5c_2 + c_3) - (6c_1 + c_2) + c_1 = 25c_1 + 4c_2 + c_3$$

Sabendo que $0 \leq c_2 < 6$ e $0 \leq c_3 < 5$, podemos probar os diferentes valores e a única solución é para:

$$c_1 = 8, c_2 = 2, c_3 = 2.$$

Polo tanto, substituíndo en $x = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3$,

$$x = 240 \cdot 8 + 40 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + r_3 = 2016 + r_3$$

onde $0 \leq r_3 < 8$.

Dando valores a r_3 , a solución enteira mais pequena é $x = 2016$.

Vexamos por último, un dos problemas mais sinxelos que nos podemos atopar nesta fase, tomemos por referencia o que se presentou no ano 2004.

Exercicio 7. (Problema 6 de 2004)

Atopar todas as posibles formas de escribir 2003 como suma de dous cadrados de números enteiros positivos.

SOLUCIÓN.

Trátase de buscar as solucións enteiras positivas da ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = 2003.$$

Vemos os números congruentes módulo 4. Os cadrados dos números enteiros positivos:

- Se $x = 1$, entón $x^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
- Se $x = 2$, entón $x^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
- Se $x = 3$, entón $x^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
- Se $x = 4$, entón $x^2 = 4^2 = 16 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
- Se $x = 5$, entón $x^2 = 5^2 = 25 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$.
- Se $x = 6$, entón $x^2 = 6^2 = 36 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{4}$.

E así sucesivamente. É dicir, se x e y son números enteiros, entón x^2 e y^2 poden ser congruentes con 0 ou 1 módulo 4. Logo a suma dos cadrados $x^2 + y^2$ poden ser congruentes con 0, 1 ou 2 módulo 4. Dividimos 2003 entre 4, e vemos que 2003 é congruente con 3 módulo 4.

Polo tanto non é posible escribir 2003 como suma de dous cadrados de números enteiros positivos.

Observación.

Podemos preguntarnos que pasaría se o termo independente fose 2017 por exemplo en vez de 2003. É dicir, a ecuación sería:

$$x^2 + y^2 = 2017$$

Neste caso, dividimos 2017 entre 4, e vemos que 2017 é congruente con 1 módulo 4, polo que é posible que teña solución. A solución neste caso é $x = 9, y = 44$.

3.3. Olimpíada Nacional

Nesta penúltima sección imos presentar algúns dos problemas que están presentes na fase Nacional das Olimpíadas Matemáticas ([7]). De xeito análogo ó anterior imos deixar algúns exercicios simplemente propostos para familiarizarnos cos diferentes tipos de enunciados.

Exercicio 1. (Problema 1 de 2005, Valladolid)

Sexan a e b números enteiros, demostrar que a ecuación

$$(x - a)(x - b)(x - 3) + 1 = 0$$

admite ó sumo unha solución enteira.

SOLUCIÓN.

Comezaremos a resolución pasando o 1 ó segundo membro, queda unha ecuación diofántica de terceiro grao cunha incógnita, onde o primeiro membro é un produto de tres factores:

$$(x - a)(x - b)(x - 3) = -1.$$

Supoñamos que a solución enteira da ecuación é p . O produto dos tres números enteiros ten que ser -1 . Estudamos os casos posibles:

- Se $p - 3 = 1$ entón $p = 4$.

- $p - a = -1 \Rightarrow a = 4 + 1 = 5$

- $p - b = 1 \Rightarrow b = 4 - 1 = 3,$

a ecuación queda $(x - 5)(x - 3)(x - 3) = -1$. Desenvolvendo o produto:

$$(x - 5)(x^2 - 6x + 9) = -1$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 5x^2 + 30x - 45 = -1$$

$$x^3 - 11x^2 + 39x - 44 = 0$$

quitando a solución enteira $x = 4$, queda a ecuación de segundo grao $x^2 - 7x + 11 = 0$, cuxa solución é $x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$, que non ten solucións enteiras.

- $p - a = 1 \Rightarrow a = 4 - 1 = 3$

- $p - b = -1 \Rightarrow b = 4 + 1 = 5$

queda a mesma ecuación que no caso anterior.

- Se $p - 3 = -1$ entón $p = 2$.

- $p - a = 1 \Rightarrow a = 2 - 1 = 1$

- $p - b = 1 \Rightarrow b = 2 - 1 = 1$

a ecuación queda $(x - 1)(x - 1)(x - 3) = -1$. Desenvolvendo o produto,

$$-1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x - x^2 + 4x - 3$$

de onde,

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$$

quitando a solución enteira $x = 2$, queda a ecuación de segundo grao $x^2 - 3x + 1 = 0$, cuxa solución é $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, que non ten solucións enteiras.

- $p - a = -1 \Rightarrow a = 2 + 1 = 3$

- $p - b = -1 \Rightarrow b = 5 + 1 = 2$

a ecuación neste caso quedaría $(x - 3)^3 = -1$. Desenvolvemos o cubo:

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 1 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = 0$$

quitando a solución enteira $x = 2$, queda a ecuación de segundo grao $x^2 - 7x + 13 = 0$, cuxa solución é $x = \frac{7 \pm \sqrt{-3}}{2}$, que non ten solucións enteiras.

Polo tanto, despois de analizar os casos chegamos a que a ecuación admite unha solución enteira.

Exercicio 2. (Problema 4 de 1995, Castellón)

Atopar tódalas solucións enteiras da ecuación

$$p(x + y) = xy$$

onde p é un número primo.

SOLUCIÓN.

Se p é un número primo, entón p divide a x ou divide a y . Neste caso, x e y son simétricos,

podemos supoñer que p divide a x , e polo tanto existe un número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = kp$. O outro caso resolvese analógicamente a este. Substituíndo na ecuación queda:

$$\begin{aligned} p(kp + y) &= kpy \\ kp + y &= ky \\ ky - kp - y &= 0 \\ k(y - p) - y &= 0 \end{aligned}$$

sumando p en ambos os lados da igualdade, podemos obter un produto de dous factores no segundo membro:

$$\begin{aligned} k(y - p) - y + p &= p \\ (k - 1)(y - p) &= p \end{aligned}$$

sendo p un número primo, consideremos as diferentes factorizacións de p :

| | | | | |
|---------|------|------|-----|-----|
| $k - 1$ | $-p$ | -1 | 1 | p |
| $y - p$ | -1 | $-p$ | p | 1 |

Estudamos entón os catro casos:

■ Caso 1

$$\begin{aligned} k - 1 = -p &\Rightarrow k = 1 - p \Rightarrow x = p(1 - p). \\ y - p = -1 &\Rightarrow y = p - 1. \end{aligned}$$

■ Caso 2

$$\begin{aligned} k - 1 = -1 &\Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 0. \\ y - p = -p &\Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

■ Caso 3

$$\begin{aligned} k - 1 = 1 &\Rightarrow k = p + 1 \Rightarrow x = 2p. \\ y - p = p &\Rightarrow y = 2p. \end{aligned}$$

■ Caso 4

$$\begin{aligned} k - 1 = p &\Rightarrow k = p + 1 \Rightarrow x = p(p + 1). \\ y - p = 1 &\Rightarrow y = p + 1. \end{aligned}$$

Polo tanto temos catro solucións enteiras.

Observación.

Chegados a este punto, podemos preguntarnos se é posible resolver do mesmo xeito que antes un exercicio no que teñamos dous números primos positivos na ecuación. Vexámolo no seguinte exercicio:

Exercicio 3.

Atopar tódalas solucións enteiras da ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$$

onde p, q son números enteiros primos positivos.

SOLUCIÓN.

Operamos para quitar os denominadores da ecuación e así ter algo similar o exercicio anterior:

$$\begin{aligned} \frac{y+x}{xy} &= \frac{1}{pq} \\ pq(y+x) &= xy \\ pqy + pqx &= xy \end{aligned}$$

Buscamos poñer o primeiro membro como produto de dous factores para estudar os diferentes casos. Sumamos en ámbolos lados p^2q^2 :

$$\begin{aligned} xy - pqx - pqy + p^2q^2 &= p^2q^2 \\ (x - pq)(y - pq) &= p^2q^2 \end{aligned}$$

agora consideramos as diferentes factorizacións de p^2q^2 :

| | | | | | | | | |
|----------|----------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|----------|
| $x - pq$ | 1 | p | q | p^2 | q^2 | p^2q | pq^2 | p^2q^2 |
| $y - pq$ | p^2q^2 | pq^2 | p^2q | q^2 | p^2 | q | p | 1 |

Estudamos os casos:

- Caso 1

$$x - pq = 1 \Rightarrow x = 1 + pq.$$

$$y - pq = p^2q^2 \Rightarrow y = pq(pq + 1).$$

- Caso 2

$$x - pq = p \Rightarrow x = p(q + 1).$$

$$y - pq = pq^2 \Rightarrow y = pq(q + 1).$$

- Caso 3

$$x - pq = q \Rightarrow x = q(p + 1).$$

$$y - pq = p^2q \Rightarrow y = pq(p + 1).$$

- Caso 4

$$x - pq = p^2 \Rightarrow x = p(p + q).$$

$$y - pq = q^2 \Rightarrow y = q(p + q).$$

- Caso 5

$$x - pq = q^2 \Rightarrow x = q(p + q).$$

$$y - pq = p^2 \Rightarrow y = p(p + q).$$

- Caso 6

$$x - pq = p^2q \Rightarrow x = pq(p + 1).$$

$$y - pq = q \Rightarrow y = q(p + 1).$$

- Caso 7

$$x - pq = pq^2 \Rightarrow x = pq(q + 1).$$

$$y - pq = p \Rightarrow y = p(q + 1).$$

- Caso 8

$$x - pq = p^2q^2 \Rightarrow x = pq(pq + 1).$$

$$y - pq = 1 \Rightarrow y = pq + 1.$$

Polo tanto as solucións son tódalas anteriores sendo p, q números enteiros positivos.

Exercicio 4. (Problema 4 de 2009, Girona)

Determina xustificadamente tódolos pares de números enteiros (x, y) que verifican a ecuación:

$$x^2 - y^4 = 2009.$$

SOLUCIÓN.

Trátase dunha ecuación diofántica con dúas incógnitas, que se pode escribir como unha diferenza de cadrados e factorizar o segundo membro tal e como levamos feito nos anteriores casos.

$$(x - y^2)(x + y^2) = 2009.$$

A descomposición factorial do número 2009 é:

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

considerando as diferentes factorizacións de 2009:

| | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|-----|-----|----|----|-------|-------|------|------|-----|-----|
| $x - y^2$ | 1 | 2009 | 7 | 287 | 49 | 41 | -1 | -2009 | -7 | -287 | -49 | -41 |
| $x + y^2$ | 2001 | 1 | 287 | 7 | 41 | 49 | -2009 | -1 | -287 | -7 | -41 | -49 |

agora temos que estudar os diferentes casos:

- Caso 1:

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 2009 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$2x = 2010$$

$$x = 1005$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$-2y^2 = -2008$$

$$y^2 = 1004$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

- Caso 2:

$$\begin{cases} x - y^2 = 2009 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$2x = 2010$$

$$x = 1005$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$-2y^2 = -2008$$

$$y^2 = -1004$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

- Caso 3:

$$\begin{cases} x - y^2 = 7 \\ x + y^2 = 287 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$2x = 294$$

$$x = 147$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= -280 \\ y^2 &= 140 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

■ Caso 4:

$$\begin{cases} x - y^2 = 287 \\ x + y^2 = 7 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= 294 \\ x &= 147 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= 280 \\ y^2 &= -140 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

■ Caso 5:

$$\begin{cases} x - y^2 = 49 \\ x + y^2 = 41 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= 90 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= 8 \\ y^2 &= -4 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

■ Caso 6:

$$\begin{cases} x - y^2 = 41 \\ x + y^2 = 49 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= 90 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= -8 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$$

logo ten solución enteira $y = \pm 2$.

■ Caso 7:

$$\begin{cases} x - y^2 = -1 \\ x + y^2 = -2009 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -2010 \\ x &= -1005 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= 2008 \\ y^2 &= -1004 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

■ Caso 8:

$$\begin{cases} x - y^2 = -2009 \\ x + y^2 = -1 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -2010 \\ x &= -1005 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= -2008 \\ y^2 &= 1004 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

■ Caso 9:

$$\begin{cases} x - y^2 = -7 \\ x + y^2 = -287 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -294 \\ x &= -147 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= 280 \\ y^2 &= -140 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

- Caso 10:

$$\begin{cases} x - y^2 = -287 \\ x + y^2 = -7 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -294 \\ x &= -147 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= -280 \\ y^2 &= 140 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

- Caso 11:

$$\begin{cases} x - y^2 = -49 \\ x + y^2 = -41 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -90 \\ x &= -45 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= -8 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$$

logo ten solución enteira $y = \pm 2$.

- Caso 12:

$$\begin{cases} x - y^2 = -41 \\ x + y^2 = -49 \end{cases}$$

sumamos as ecuacións,

$$\begin{aligned} 2x &= -90 \\ x &= -45 \end{aligned}$$

restamos as ecuacións e atopamos o valor de y ,

$$\begin{aligned} -2y^2 &= 8 \\ y^2 &= -4 \end{aligned}$$

como consecuencia disto non ten solución enteira.

En resumo, as solucións enteiras son:

$$(x, y) = (45, 2); (45, -2); (-45, 2); (-45, -2).$$

Observación.

O anterior problema pódese resolver dun xeito mais sinxelo e intuitivo, a continuación presentamos a solución orixinal.

SOLUCIÓN ORIXINAL.

Dada unha solución (x, y) calquera, é claro que tamén son solucións $(x, -y)$, $(-x, y)$ e $(-x, -y)$, entón pódemos asumir sen perda de xeneralidade que $x, y \geq 0$. Supoñamos entón que é así. Está claro que $(x - y^2)(x + y^2) = 7^2 \cdot 41$.

Se $x - y^2$ e $x + y^2$ non son primos entre si, o seu máximo común divisor o cadrado divide a $2009 = 7 \cdot 41$, logo é 7 e divide a $(x + y^2) + (x - y^2) = 2x$ e $(x + y^2) - (x - y^2) = 2y^2$, o que implica que existan enteiros non negativos u e v tales que $x = 7u$, $y = 7v$ e $u + 7v^2 = 41$ e $u - 7v^2 = 1$, entón resolvendo o sistema normal temos que $u = 21$ e $v^2 = \frac{10}{7}$. Non existen pois, solucións enteiras neste caso.

Se $x - y^2$ e $x + y^2$ son primos entre si, un posible caso é que $x - y^2 = 1$ e $x + y^2 = 2009$, entón $y^2 = 1004$, suceso totalmente absurdo xa que $31^2 = 961 < 1004 < 32^2$.

Queda entón tan só o caso no que $x - y^2 = 41$ e $x + y^2 = 49$, que produce $x = 45$, $y^2 = 4$, co que a única solución con enteiros non negativos é $x = 45$ e $y = 2$, e as únicas solucións en enteiros son $(x, y) = (\pm 45, \pm 2)$.

Exercicio 5. (Problema 4 de 2012, Santander)

Atopar tódolos números enteiros positivos n e k tales que:

$$(n + 1)^n = 2n^k + 3n + 1.$$

SOLUCIÓN.

Para $n = 1$ a ecuación queda:

$$2 = 2^k + 4 \Rightarrow -2 = 2^k,$$

que non ten solución para ningún valor de k . Para $n \geq 2$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n^k + 3n.$$

Desenvolvendo o primeiro membro mediante o binomio de Newton:

$$\begin{aligned} (n+1)^n - 1 &= \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \dots + \binom{n}{n}n^n - 1 \\ &= n^2 + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \dots + \binom{n}{n}n^n - 1. \end{aligned}$$

Chegados a este punto, temos que estudar dous casos:

- Se $k=1$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n + 3n = 5n$$

entón n^2 divide a $5n$, polo tanto, n divide a 5. Temos que tomar $n = 5$.

$$6^5 - 1 = 25$$

igualdade que non é certa.

- Se $k \geq 2$:

$$(n+1)^n - 1 = 2n^k + 3n$$

entón n^2 divide a $2n^k + 3n$ pero como divide a $2n^k$ ten que dividir a $3n$. Logo n divide a 3, entón $n = 3$.

$$4^3 - 1 = 2 \cdot 3^k + 9$$

$$4^3 - 10 = 2 \cdot 3^k$$

$$27 = 3^k$$

cuxa solución é para $k = 3$.

Polo tanto a solución sería par $n = 3$ e $k = 3$.

Chegados a este punto, imos propor un exercicio un pouco mais práctico.

Exercicio 6.

Unha muller cobra un cheque por e euros e c céntimos nun banco. O caixeiro, por un erro, dá c euros e e céntimos. A muller non se dá conta ata que gasta 23 céntimos e observa que nese momento ten $2e$ euros e $2c$ céntimos. Cal era o valor do cheque?

SOLUCIÓN.

Pasando os euros a céntimos, expoñemos a ecuación no momento en que a muller se dá conta do erro:

$$\begin{aligned}100c + e &= 200e + 2c + 23 \\98c - 199e &= 23.\end{aligned}$$

Ecuación diofántica lineal con dúas incógnitas. Ten solución xa que o máximo común divisor de 98 e 199 é 1, que é divisor de 23.

Para encontrar unha solución particular, empregamos o algoritmo (estendido) de Euclides:

$$\begin{aligned}199 &= 2 \cdot 98 + 3 \\3 &= (-2) \cdot 98 + 1 \cdot 199 \\98 &= 32 \cdot 3 + 2 \\&= 32(-2 \cdot 98 + 1 \cdot 199) + 2 \\&= -64 \cdot 98 + 32 \cdot 199 + 2 \\2 &= 65 \cdot 98 - 32 \cdot 199 \\3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\-2 \cdot 98 + 1 \cdot 199 &= 1 \cdot (65 \cdot 98 - 32 \cdot 199) + 1 \\1 &= (-67) \cdot 98 + 33 \cdot 199\end{aligned}$$

Entón $c = -67$, $e = -33$ son solución da ecuación $98c - 199e = 1$. Multiplicando esta solución por 23 temos unha solución particular de $98c - 199e = 23$, é dicir, $c = -1541$, $e = -759$. A solución xeral sería:

$$\begin{cases}c = -1541 + 199t \\e = -759 + 98t\end{cases}$$

Pero e e c teñen que ser valores enteiros positivos, logo:

$$\begin{aligned}-1541 + 199t > 0 &\Rightarrow 199t > 1541 \Rightarrow t > \frac{1541}{199} \Rightarrow t \geq 8 \\-759 + 98t > 0 &\Rightarrow 98t > 759 \Rightarrow t > \frac{759}{98} \Rightarrow t \geq 8\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para $t = 8 \Rightarrow c = 5, e = 25$.

Para $t = 9 \Rightarrow c = 250, e = 123$. Como se pode observar, para valores maiores a 8, c é maior que 100, cousa que non pode ser.

Polo tanto, o valor buscado do cheque era de 25 euros e 51 céntimos.

Exercicio 7. (Problema 6 de 2022, La Rábida)

Atopar tódalas ternas de enteiros positivos (x, y, z) . con $z \geq 1$, que satisfán simultaneamente que

$$x \text{ divide a } y + 1, y \text{ divide a } z - 1, z \text{ divide a } x^2 + 1$$

SOLUCIÓN.

As solucións son $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 5)$ e $(2n + 1, 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ con $n \geq 1$. Vexámolo:

Se $x = 1$ a única solución é $(1, 1, 2)$ (z divide a 2, polo que $z = 2$, e y divide a 1).

Se $x = 2$ a única solución é $(2, 1, 5)$ (z divide a 5, e y divide a 4 que é impar).

Supoñamos agora que $x \geq 3$.

Sexan $y + 1 = rx$, $z - 1 = sy$ e $x^2 + 1 = tz$. Entón substituíndo sucesivamente, obtemos que

$$x^2 + 1 = tz = sty + t = rstx - st + t.$$

Desta igualdade tense que $st - 1 \equiv -1 \pmod{x}$. Isto implica que $st - t \geq x - 1$, e que a vez $st \geq x$. Se $r \geq 2$, entón

$$x^2 + 1 = rstx - st + t \geq (2x - 1)st + 1 \geq (2x - 1)x + 1;$$

que, recordando, deixa $x(x - 1) \geq 0$, o que non é certo para $x \geq 3$. Polo tanto, concluímos que $r = 1$ nas solucións restantes. Temos entón

$$x^2 + 1 = st(x - 1) + t$$

Se tomamos módulo $x - 1$ a ámbolos lados, temos $t \equiv 2 \pmod{x - 1}$. Se $t = 2$, entón a anterior ecuación é equivalente a $s = \frac{x+1}{2}$. Entón x é un número impar (da forma $2n + 1$), $y = rx - 1 = 2n$, e $z = sy + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. Se $t \neq 2$, entón $t \geq x + 1$. De (3.148) obtemos $x^2 + 1 \geq (x + 1)(x - 1) + x + 1$, ou $x \leq 1$, con isto chegamos a unha contradición. Polo tanto non hai máis solucións. Comprobamos que tódalas posibles solucións que obtivemos satisfán as condicións do enunciado.

3.4. Olimpíada Internacional

Nesta última sección imos estudar diferentes problemas que se presentan na última das fases da Olimpíada Matemática. A fase internacional, como xa explicamos celébrase cada ano nun país diferente, imos centrarnos nalgúns dos exercicios mais estudados para esta fase ([8]).

Exercicio 1. (Problema 4 de 2006, Eslovenia)

Determinar tódalas parellas de enteiros (x, y) tales que:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

SOLUCIÓN.

Para $x < 0$, a ecuación non ten solución enteira.

Para $x = 0$, teremos dúas solucións:

$$y^2 = 1 + 2^0 + 2^1 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

Supoñeremos agora que $x > 0$, e tamén $y > 0$, xa que (x, y) é solución se e só se, $(x, -y)$ o é. Pasamos o 1 ó segundo membro:

$$2^x + 2^{2x+1} = y^2 - 1.$$

E como o segundo membro é unha diferenza de cadrados:

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y + 1)(y - 1).$$

Os dous factores do segundo membro son da mesma paridade, e non poden ser impares. Logo son pares, e polo tanto un ten que ser múltiplo de 4. Entón $x \geq 3$. Un dos factores da dereita ten que se divisible entre 2^{x-1} . Podemos escribir:

$$y = 2^{x-1}m + k,$$

onde m é impar, $k = \pm 1$. Substituíndo na ecuación orixinal:

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + k)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2 \cdot 2^{x-1}mk + k^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x km,$$

dividindo tódolos termos por 2^x :

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + km$$

$$1 - km = 2^{x-2}m^2 - 2^{x+1}$$

$$1 - km = 2^{x-2}(m^2 - 8)$$

- Para $k = 1$, $m^2 - 8 \leq 0$, entón $m = 1$, pero substituíndo o seu valor en $1 - m = 2^{x-2}(m^2 - 8)$, vemos que non ten solución.
- Para $k = -1$, a ecuación queda

$$1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8),$$

de onde

$$2m^2 - m - 17 \leq 0.$$

Resolvendo, $m \leq 3$. Como para $m = 1$ non satisfai a ecuación, quedanos $m = 3$. Substituímos:

$$1 + 3 = 2^{x-2}(3^2 - 8)$$

$$4 = 2^{x-2}$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

Calculamos o valor de y

$$y = 2^{4-1}3 - 1 = 2^3 \cdot 3 - 13$$

Por tanto, $(4, -23)$ tamén é solución da ecuación.

Entón as solucións enteiras (x, y) son $(0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)$.

Exercicio 2. (Problema 2 de 2003, Tokio)

Determine tódalas parellas de enteiros (x, y) tales que

$$\frac{x^2}{2xy^2 - y^3 + 1}$$

é un enteiro positivo.

SOLUCIÓN.

Sexa t un enteiro positivo. A ecuación diofántica a resolver sería:

$$\frac{x^2}{2xy^2 - y^3 + 1} = t$$

Estudamos diferentes casos:

- Se $y = 1$, a ecuación queda:

$$\frac{x^2}{2x} = t$$

entón $2x$ divide a x^2 , e 2 divide a x . Polo tanto x é par, $x = 2k$, para todo $k \geq 1$ enteiro positivo. Neste caso a solución é $(2k, 1)$.

- Se $x = 1$, a ecuación queda:

$$\frac{1}{2y^2 - y^3 + 1} = t$$

entón $2y^2 - y^3 + 1$ divide a 1 . Temos dúas opcións:

- $2y^2 - y^3 + 1 = 1$ divide a 1. Entón $y^2(2 - y) = 0$, que ten dúas solucións: $y = 0$, $y = 2$. Como piden solucións enteiras positivas a solución é $(1, 2)$.
- $2y^2 - y^3 + 1 = -1$. Ecuación que non ten solucións enteiras.

■ Suporemos $x, y > 1$. Desenvolvendo a ecuación inicial:

$$x^2 = t(2xy^2 - y^3 + 1 = 2txy^2 - ty^3 + t,$$

de onde,

$$x^2 - 2ty^2x + ty^3 - t = 0,$$

ecuación de segundo grao na variable x , e resolvendo temos

$$x = \frac{2ty^2 \pm \sqrt{(2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t)}}{2}.$$

Chamamos D^2 o discriminante, que para que sexa x un número enteiro, ten que ser un cadrado perfecto. imos ver entre que dous cadrados está D^2 :

- Vemos se $(2ty^2 - y - 1)^2 < D^2$.

$$\begin{aligned} (2ty^2 - y - 1)^2 &< (2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t) \\ 4t^2y^4 - 4ty^2(y + 1) + (y + 1)^2 &< 4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t \\ -4ty^3 - 4ty^2 + (y + 1)^2 &< -4ty^3 + 4t \\ (y + 1)^2 &< 4t + 4ty^2 \\ y^2 + 2y + 1 &< 4t(y^2 + 1) \\ 2y &< 4t(y^2 + 1) - (y^2 + 1) \\ 2y &< (y^2 + 1)(4t - 1) \end{aligned}$$

desigualdade que é certa xa que $(y - 1)^2 \geq 0$, entón $y^2 + 1 \geq 2$ e ademais $4t - 1 \geq 0$, tense que $2y > (y^2 + 1)(4t - 1)$.

- Vemos se $(2ty^2 - y - 1)^2 > D^2$.

$$\begin{aligned} (2ty^2 - y - 1)^2 &> (2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t) \\ 4t^2y^4 - 4ty^2(y + 1) + (y + 1)^2 &> 4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t \\ -4ty^3 - 4ty^2 + (y + 1)^2 &> -4ty^3 + 4t \\ (y + 1)^2 &> 4t - 4ty^2 \\ (y + 1)^2 &> -4t(y^2 + 1) \\ (y + 1)^2 &> -4t(y + 1)(y - 1) \\ y - 1 &> -4t(y + 1) \\ 1 - y &< 4t(y + 1) \end{aligned}$$

desigualdade que é certa xa que $t, y > 1$.

Entón tense que $(2ty^2 - y - 1)^2 < D^2 < (2ty^2 - y + 1)^2$, é dicir, $D^2 = (2ty^2 - y)^2$:

$$\begin{aligned}(2ty^2)^2 - 4(ty^3 - t) &= (2ty^2 - y)^2 \\ 4t^2y^4 - 4ty^3 + 4t &= 4t^2y^4 - 4ty^3 + y^2 \\ 4t &= y^2\end{aligned}$$

como son números enteiros positivos, $t = k^2$, con k positivo:

$$\begin{aligned}y^2 &= 4k^2 \\ y &= 2k\end{aligned}$$

calculamos x substituíndo D^2 :

$$\begin{aligned}x &= \frac{2ty^2 \pm \sqrt{(2ty^2 - y)^2}}{2} \\ x &= \frac{2ty^2 \pm (2ty^2 - y)}{2}\end{aligned}$$

Temos dúas solucións para x , onde $y = 2k$, $t = k^2$:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2ty^2 + 2ty^2 - y}{2} = \frac{4ty^2 - y}{2} = \frac{4k^2(2k)^2 - 2k}{2} = \frac{16k^4 - 2k}{2} = 8k^4 - k \\ x_2 &= \frac{2ty^2 - 2ty^2 + y}{2} = \frac{y}{2} = \frac{2k}{2} = k\end{aligned}$$

Polo tanto, as solucións enteiras positivas (x, y) son $(2k, 1)$, $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$, onde k é un enteiro positivo.

Exercicio 3. (Problema 6 de 2001, Estados Unidos)

Sexan $a > b > c > d$ enteiros positivos e supuñamos que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Probar que $ab + cd$ non é primo.

SOLUCIÓN.

Imos comprobar que:

$$ab + cd > ac + bd > ad + bc$$

Xa que:

$$(ab + cd) - (ac + bd) = ab + cd - ac - bd = a(b - c) - d(b - c) = (a - d)(b - c)$$

Polas condicións do enunciado está claro que $a > b > c > d$:

$$(a - d)(b - c) > 0$$

entón $ab + cd > ac + bd$. Por outro lado:

$$(ac + bd) - (ad + bc) = ac + bd - ad - bc = a(c - d) - b(c - d) = (a - b)(c - d)$$

Polas condicións do enunciado, $a > b > c > d$, temos

$$(a - b)(c - d) > 0$$

e entón $ac + bd > ad + bc$. Desenvolvemos a ecuación inicial:

$$\begin{aligned} ac + bd &= (b + d + a - c)(b + d - a + c) \\ &= b^2 + bd - ab + bc + bd + d^2 - ad + cd + ab + ad - a^2 + ac - bc - cd + ac - c^2, \end{aligned}$$

de onde

$$a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2.$$

Multiplicamos $(ac + bd)(b^2 + bd + d^2)$

$$ac(b^2 + bd + d^2) + bd(b^2 + bd + d^2)$$

Substituíndo $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$,

$$\begin{aligned} &ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) \\ &ab^2c + abac + acd^2 + a^2bd - abcd + bc^2d \\ &ab(bc + ad) + cd(ad + bc) \\ &(ad + cd)(ad + bc) \end{aligned}$$

É dicir, $(ac + bd)(b^2 + bd + d^2) = (ab + cd)(ad + bc)$. Entón, $(ac + bd)$ divide a $(ab + cd)(ad + bc)$.

Supomos que $(ab + cd)$ é primo. Como é $ab + cd > ac + bd$, non pode ter factores comúns con $(ac + bd)$. Polo tanto, $(ac + bd)$ debe dividir ó outro factor $(ad + bc)$, pero isto é unha contradición xa que $ac + bd > ad + bc$.

Polo tanto, $(ab + cd)$ non é primo.

Exercicio 4. (Problema 6 de 1997, Alemania)

Determina tódolos números primos p para os que o sistema

$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2 \\ p^2 + 1 = 2y^2 \end{cases}$$

ten solución enteira.

SOLUCIÓN.

É un sistema de ecuacións diofánticas con dúas incógnitas. Podemos asumir sen perda de xeneralidade que $x, y \geq 0$. Vemos que si $p + 1 = 2x^2$, entón $p + 1$ é par, e polo tanto p é impar, é dicir, $p \neq 2$. Por outro lado, $2x^2 \equiv 1 \equiv 2y^2$ módulo p , o que indica que $x \equiv \pm y$ módulo p , xa que p é un primo impar. Como $x < y < p$, entón temos que $x + y = p$. Substituíndo $y = p - x$ na segunda ecuación do sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} p^2 + 1 &= 2(p - x)^2 \\ &= 2p^2 - 4px + 2x^2 \\ &= 2p^2 - 4px + p + 1 \\ 4px &= p^2 + p \\ 4x &= p + 1 \end{aligned}$$

e substituíndo na primeira ecuación,

$$\begin{aligned} 4x &= 2x^2 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

cuxas solucións son $x = 0, x = 2$. Calculamos os valores de p :

$$p = 2x^2 - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Pero $p = -1$ non é un número primo.

$$p = 2x^2 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Polo tanto, $p = 7$ é o único primo que podemos tomar para que sistema teña solución enteira. A solución do sistema é $(x, y) = (2, 5)$.

A continuación, imos propor e resolver o seguinte exercicio de grande interese.

Exercicio 5.

Demosta que a ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

non ten solucións enteiras excepto $x = y = z = 0$.

SOLUCIÓN.

Como o segundo membro é par, os termos do primeiro membro ou son os tres pares ou un par e dous impares. Se un fora par, o lado dereito sería divisible por 4 e o da esquerda só por 2. Polo tanto, os tres termos son pares.

Podemos escribir $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ e, substituíndo, temos

$$\begin{aligned}4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 &= 2 \cdot 2x_1 \cdot 2y_1 \cdot 2z_1 \\x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 4x_1y_1z_1\end{aligned}$$

facendo o mesmo razoamento, temos que $x - 1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z - 1 = 2z_2$, e substituíndo,

$$\begin{aligned}4x_2^2 + 4y_2^2 + 4z_2^2 &= 4 \cdot 2x_2 \cdot 2y_2 \cdot 2z_2 \\x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 8x_2y_2z_2\end{aligned}$$

continuando de xeito sucesivo temos

$$\begin{aligned}x &= 2x_1 = 2^2x_2 = 2^3x_3 = \dots = 2^n x_n = \dots \\y &= 2y_1 = 2^2y_2 = 2^3y_3 = \dots = 2^n y_n = \dots \\z &= 2z_1 = 2^2z_2 = 2^3z_3 = \dots = 2^n z_n = \dots\end{aligned}$$

Se (x, y, z) é unha solución. entón x, y, z son divisibles por 2^n para calquera n . Pero isto só é posible se $x = y = z = 0$.

Observación.

Chegados a este punto, podemos pensar que pasaría se a ecuación ten solucións enteiras cando o segundo membro é $3xyz$; temos o seguinte problema.

Exercicio 6 (Problema 1 de 2021, Rusia).

Sexa $n \geq 100$ un número enteiro. Iván escribe os números $n, n + 1, \dots, 2n$ en diferentes cartas. Logo, mestura estas $n + 1$ cartas e divídeas en dúas pilas. Demostra que polo menos unha das pilas contén dúas cartas cuxa suma de números é un cadrado perfecto.

SOLUCIÓN.

Se podemos garantir que existen 3 cartas tal que cada par delas suma un cadrado perfecto, entón podemos garantir que unha das pilas contén 2 cartas cuxa suma é un cadrado perfecto. Supomos que os cadrados perfectos p^2, q^2 e r^2 satisfán o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned}a + b &= p^2 \\b + c &= q^2 \\a + c &= r^2\end{aligned}$$

onde a, b e c son os números de tres das cartas. Resolvendo para a, b e c en función de p, q e r , temos que $a = \frac{p^2+r^2-q^2}{2}$, $b = \frac{p^2+q^2-r^2}{2}$ e $c = \frac{q^2+r^2-p^2}{2}$. Podemos entón substituír $p^2 = (2e - 1)^2$, $q^2 = (2e)^2$ e $r^2 = (2e + 1)^2$ para cancelar os 2 no denominador, e a simplificación dá $a = 2e^2 + 1$,

$b = 2e(e - 2)$ e $c = 2e(e + 2)$. Agora, temos que demostrar que existen tres números con estas formas entre n e $2n$ cando $n \geq 100$. Observamos que b sempre será o menor dos tres e c sempre será o maior dos tres. Polo tanto, é suficiente demostrar que existen números na forma $2e(e - 2)$ e $2e(e + 2)$ entre n e $2n$.

Para que dous números na forma de $2e(e - 2)$ e $2e(e + 2)$ estean entre n e $2n$, as desigualdades

$$2e(e - 2) \geq n$$

$$2e(e + 2) \leq 2n$$

deben cumprirse. Podemos multiplicar e simplificar para obter que

$$e^2 - 2e - \frac{n}{2} \geq 0$$

$$e^2 + 2e - n \leq 0.$$

Entón, podemos completar o cadrado nos lados esquerdos de ámbalas desigualdades e illar e para obter que

$$e \geq \sqrt{1 + \frac{n}{2}} + 1$$

$$e \leq \sqrt{1 + n} - 1$$

Observa que e debe ser un número enteiro, polo que debe haber un número enteiro entre $\sqrt{1 + n} - 1$ e $\sqrt{1 + \frac{n}{2}} + 1$.

Se $\sqrt{1 + n} - 1$ e $\sqrt{1 + \frac{n}{2}} + 1$ difiren polo menos en 1, entón podemos garantir que hai un número enteiro entre eles (e isos números enteiros son os posibles valores de e).

Establecendo a desigualdade $\sqrt{1 + n} - \sqrt{1 + \frac{n}{2}} - 2 \geq 1$ e resolvendo para n , sabemos que $n \in [107, \infty)$ sempre funciona. Probando os 7 números restantes (100 a 106) manualmente dinos que hai un número enteiro entre $\sqrt{1 + n} - 1$ e $\sqrt{1 + \frac{n}{2}} + 1$ cando $n \geq 100$.

Polo tanto, existe un trío de números enteiros (a, b, c) con $a, b, c \in n, n + 1, \dots, 2n$ cando $n \geq 100$ tal que cada par dos números suma un cadrado perfecto. Polo *Principio do pombal*, sabemos que 2 dos números deben estar en cartas da mesma pila, e así, cando $n \geq 100$, sempre haberá unha pila con 2 números que suman un cadrado perfecto.

Exercicio 7.

Existen números enteiros positivos a, b, c , tales que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$, e que $\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{a+c}, \frac{c^2}{a+b}$ sexan tamén números enteiros positivos?

SOLUCIÓN.

En primeiro lugar, vemos que a, b e c deben ser números primos dous a dous. Se o número

primo p divide a $\text{mcd}(a, b)$, entón que $(a + b)$ divida a c^2 implica que p divide a c , pero é unha contradición xa que o $\text{mcd}(a, b, c) = 1$. Como son divisores de números primos dous a dous, entón $a + b, b + c, a + c$, son tamén primos dous a dous.

Por outro lado, como $a + b$ divide a c^2 , $a + c$ divide a b^2 , $b + c$ divide a a^2 , entón $a + b, b + c, a + c$ divide a:

$$D = (a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Imos ver que $a + b$ divide a D . Desenvolvemos os dous cadrados de D

$$\begin{aligned} D &= (a + b)^2 + a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= (a + b)^2 + 2ac + c^2 + 2bc \\ &= (a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2 \end{aligned}$$

os tres termos son divisibles por $a + b$, polo tanto divide a D .

Analogamente faise para $a + c$ e $b + c$.

Entón o produto $(a + b)(a + c)(b + c)$ tamén divide a D .

Sen perda de xeneralidade, supoñemos que $a \leq b \leq c$, e que $a + b \leq a + c \leq b + c$. Entón:

$$(a + b)(a + c)(b + c) \leq D$$

É como:

$$D = (a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 3(b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 3(b + c)^2$$

Entón:

$$\begin{aligned} (a + b)(a + c)(b + c) &\leq D < 3(b + c)^2 \\ (a + b)(a + c) &< 3(b + c) \end{aligned}$$

Polo tanto:

$$(a + b)c < (a + b)(a + c) < 3(b + c) < 3b + 3c \leq 6c,$$

o que implica que:

$$a + b < 6.$$

Como a e b son primos entre si, a súa suma é menos que 6 e $a \leq b \leq c$, o único caso posible é:

$$a = 2, b = 3, c \leq 3.$$

Pero se substituímos os valores:

$$\frac{4}{3+c}, \frac{9}{2+c}, \frac{c^2}{5},$$

vemos que é imposible, polo tanto non ten solucións enteiras positivas.

Exercicio 8. (Problema 6 de 1988, Australia)

Sexan a e b enteiros positivos tales que $(ab+1)$ divide a a^2+b^2 . Demostrar que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

é o cadrado dun enteiro.

SOLUCIÓN.

Imos demostralo por redución ó absurdo. Se $(ab+1)$ divide a a^2+b^2 , entón existe un número enteiro positivo k , tal que:

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$$

Entón:

$$a^2+b^2 = k(ab+1)a^2 - kab + b^2 = k$$

Suporemos que k non é un cadrado perfecto. Vemos que a e b son non nulos, se un é cero, k é un cadrado perfecto. Ademais ambos teñen o mesmo signo, xa que entón $ab < 0$, o que implica que $a^2 - kab + b^2 > k$.

Suporemos que a e b son números enteiros tales que

- $a^2 - kab + b^2 = k$.
- $a \geq b > 0$.
- a mínimo.

Sen perda de xeneralidade xa que é simétrica en a, b . Observamos primeiro que $a > b$, pois se $a = b$ entón $(2-k)a^2 = k$, e o membro esquerdo é non positivo. Consideraremos agora a expresión:

$$a^2 - kab + b^2 = k$$

como unha ecuación cuadrática en a . Ten entón dos solucións a e a_1 . Como $a + a_1 = kb$, entón a_1 é un enteiro. Temos un novo par que satisfai a ecuación (a_1, b) . Como $b > 0$ entón $a_1 > 0$.

Ademais $aa_1 = b^2 - k$, polo tanto:

$$a_1 = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{a^2 - 1}{a} < a$$

en consecuencia o par (a_1, b) satisfai a ecuación pero $a_1 < a$, o cal contradí a minimalidade de a .

Observación.

A pesar de que este enunciado é bastante antigo, foi premiado no seu tempo por ser a solución mais orixinal da IMO do ano 1988 en Australia.

Exercicio 9. (Problema 1 de 2023, Xapón)

Determina tódolos enteiros compostos $n > 1$ que satisfán a seguinte propiedade: se d_1, d_2, \dots, d_k son todos os divisores positivos de n con $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, entón d_i divide a $d_{i+1} + d_{i+2}$ para todo $1 \leq i \leq k - 2$.

SOLUCIÓN.

Se n ten polo menos 2 divisores primos, sen perda de xeneralidade, supoñamos que $p < q$ son os dous menores destes primos. Entón, a tupla ordenada de divisores ten a forma $(1, p, p^2 \dots, p^a, q \dots, n)$ para algún enteiro $a \geq 1$.

Para demostrar esta afirmación, nota que p é o menor primo que divide a n , polo que é o menor divisor que non é igual a 1, o que significa que os primeiros 2 divisores son 1 e p . Ademais, o menor divisor de n que non é igual a unha potencia de p (isto é, non é igual a $(1, p, p^2 \dots)$) é igual a q . Isto débese a que tódolos outros divisores inclúen un primo z diferente tanto de q como de p , que é maior que q (xa que q e p son os dous menores divisores primos de n), ou non inclúen un primo diferente z .

No primeiro caso, como $z > q$, o divisor é maior que q .

No segundo caso, todos os divisores múltiplos de q^2 tamén son maiores que q , e doutro xeito, son da forma $p^x \cdot q^1$ ou p^x para algún enteiro non negativo x . Se o divisor é da forma p^x , entón é unha potencia de p . Se é da forma $p^x \cdot q^1$, o menor destes factores é $p^0 \cdot q^1 = q$.

Polo tanto, (no caso de que 2 ou máis primos dividan n) a tupla ordenada de divisores ten a forma $(1, p, p^2 \dots, p^a, q \dots, n)$ para algún enteiro $a \geq 1$, xa que despois de cada divisor p^x , o seguinte divisor máis pequeno é ou p^{x+1} ou simplemente q .

Se $a \geq 2$, a condición falla. Isto débese a que $p^{a-1} \nmid p^a + q$, xa que p^a é divisible por p^{a-1} , pero q non, xa que é un primo diferente de p . Se $a = 1$, entón $p^{a-1} = p^0 = 1$, o cal si divide a q . Polo tanto, a debe ser igual a 1 para que a condición se cumpra neste caso.

Con todo, sabemos que a lista ordenada de divisores satisfai $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$, o que significa que xa que os primeiros 3 divisores son $(1, p, q)$, entón os últimos 3 divisores son $(\frac{n}{q}, \frac{n}{p}, n)$, polo que $(\frac{n}{q})$ debe dividir a $(\frac{n}{p} + n)$. Pero $\frac{n}{q}$ é divisible por p , polo que $\frac{n}{p} + n$ tamén debe ser divisible por p , pero xa que $a = 1$, $\frac{n}{p}$ é e n non.

Cando $n = p^x$, é fácil verificar que isto funciona para tódolos primos p e todos os $x \geq 2$, xa que p^y divide $p^{y+1} + p^{y+2}$, e os divisores están ordenados como $\{1, p, p^2, \dots, p^x\}$.

Bibliografía

- [1] Carl Benjamin Boyer (1974). *Historia de la Matemática*
- [2] Cristóbal Sánchez-Rubio, Manuel Ripollés Amela (2000). *Manual de Matemáticas para preparación Olímpica*.
- [3] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu (2010). *An Introduction to Diophantine Equations (A Problem-Based Approach)*
- [4] Ecuación de Pell-Wikipedia, Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_Pell, [visitado en abril 2024].
- [5] Web da Olimpíada Matemática Galega, Disponible en: <https://www.usc.gal/olympia/>, [visitado en maio 2024].
- [6] Web da Real Sociedad Matemática Española, Disponible en: <https://www.rsme.es/>, [visitado en maio 2024].
- [7] Web da Olimpíada Matemática Española, Disponible en: <https://www.rsme.es/olimpiada-matematica-espanola/problemas-propuestos-y-resultados/>, [visitado en maio 2024].
- [8] Web da Olimpíada Internacional de Matemáticas, Disponible en: <https://www.imo-official.org/?language=es>, [visitado en maio 2024].