ÁGORA — Papeles de Filosofía — (2004), 23/2: 227-232 ISSN 0211-6642

LO QUE ES Y LO QUE NO ES LA VERDAD MATEMÁTICA

Nota introductoria a *La verdad matemática* de Paul Benacerraf

Francisco Rodríguez Consuegra
Universidad de Valencia

Según Benacerraf, cualquier explicación de la verdad matemática debe satisfacer dos requisitos básicos: erigirse sobre la base de una semántica y de una epistemología paralelas a las usuales en el discurso no matemático. La semántica usual es necesaria para que los términos de los enunciados matemáticos se refieran a entidades reales, si tales enunciados han de ser verdaderos, como suponemos en nuestros usos lingüísticos habituales. La epistemología usual se necesita para que la verdad de los enunciados matemáticos presuponga algún conocimiento de las entidades referidas por los términos de tales enunciados, como suponemos en nuestro discurso habitual.

Ahora bien, prosigue Benacerraf, en general las explicaciones disponibles de la verdad matemática no logran satisfacer ambos requisitos, sino más bien alguno de ellos a expensas del otro. En sus palabras:

> las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y el no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras aquellas que atribuyen a las proposiciones matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de los enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su *verdad*.

Recibido: 08/04/05. Aceptado: 10/10/05

De forma más clara y menos retórica: cuando la semántica usual se aplica a los enunciados matemáticos que se dicen verdaderos, concediendo referencia a sus términos, entonces no se explica cómo conocemos las entidades referidas por tales términos. Y cuando se les aplica el patrón usual del conocimiento matemático, entonces se deja de lado la semántica referencial.

Estamos ante lo que a veces se llama "el dilema de Benacerraf". En efecto, un dilema es una disyunción (inclusiva) inevitable, ambos de cuyos cuernos conducen a situaciones inaceptables. Resumiendo una vez más: necesitamos semántica y epistemología matemáticas, pero el cuerno de la semántica nos lleva a fallar la epistemología y el cuerno de la epistemología a fallar la semántica.

Las leyes se elaboran en términos generales pero se inspiran en situaciones concretas, que son las que los legisladores tienen en mente al redactarlas. Del mismo modo, también Benacerraf nos ofrece un dilema general pensado realmente en explicaciones concretas, a la luz de las cuales su dilema se entiende mejor. Más aún, así como las leyes se promulgan para evitar ciertos delitos, así también la concepción de Benacerraf de lo que debería ser la verdad matemática está pensada para denunciar a quienes cometen el delito de cumplir sólo con alguno de los requisitos a expensas del otro.

Y ¿qué delincuentes filosóficos son esos? Básicamente dos: los platonistas, que utilizan un esquema realista de la verdad, y los formalistas, que usan un esquema meramente "combinatorio", o sintáctico, de ella. Los primeros conceden referencia plena a los términos de los enunciados matemáticos que toman por verdaderos, pero fracasan al justificar esa referencia epistemológicamente, es decir, al explicar cómo conocemos las entidades involucradas. Un ejemplo: Gödel. Los segundos dan por bueno el conocimiento matemático habitual, que se obtiene mediante demostraciones aceptables por la comunidad matemática, pero fracasan al justificar ese conocimiento referencialmente, pues niegan que los términos de los enunciados matemáticos que toman como verdaderos designen entidades reales. Un ejemplo: Hilbert. A los dos se les debe aplicar el mismo castigo filosófico, según Benacerraf: negarles el derecho a hablar de auténtica verdad matemática dentro de sus respectivas concepciones. Así, ambos fracasan en su intento de explicar el *concepto* de verdad matemática: su "verdad" matemática es espúrea.

Apliquemos el zoom a este último párrafo para ver los entresijos con más detalle y comenzar a identificar problemas. Conceder referencia a los términos de un enunciado implica, en el marco fregeano presupuesto, exigir que verdad y referencia, los conceptos semánticos básicos, vayan de la mano. Los términos de un enunciado verdadero deben tener referencia. A la inversa, sólo si tales términos poseen referencia podemos hablar de verdad con justificación. En eso los platonistas están en lo cierto: asimilan los enunciados matemáticos a la semántica referencial que nos gusta utilizar usualmente. Un primer problema es que Benacerraf no justifica ese principio implícito, que podemos llamar *principio de Frege*, el cual suelda verdad y referencia inextricablemente.

Movamos el microscopio un poco más y detengámonos en el conocimiento que falla a los platonistas. Para Benacerraf, ese conocimiento debe estar basado en lo que llama "teoría causal del conocimiento": las entidades conocidas, que constituyan la referencia de nuestros términos matemáticos, deben hacer posible una relación causal con nosotros. Los objetos físicos habituales nos son conocidos cuando podemos establecer una relación causal con ellos, que comienza con la percepción sensorial, que explicamos causalmente. Por tanto, si aplicamos la semántica referencial a los objetos matemáticos debemos pechar también con la misma relación causal. Ahora bien, las entidades matemáticas son causalmente inertes, al no hacer posible ningún tipo de percepción causal; en consecuencia no puede haber auténtico conocimiento de ellas. Esa "especie de percepción" de la que habló Gödel no le parece a Benacerraf más que una entelequia edificante. Un segundo problema que sale a relucir inmediatamente es que Benacerraf no justifica la teoría causal del conocimiento (y de la referencia), que exige a cualquier concepción aceptable de la verdad matemática.

Enfoquemos ahora el "conocimiento" matemático de los formalistas. En este caso no se habla de conocimiento en el sentido causal, sino de algo muy diferente: los matemáticos consideran "verdadero" un teorema sencillamente cuando son capaces de proporcionar una demostración de él que tome como premisas otros enunciados ya aceptados, bien como axiomas bien como teoremas ya probados, y que utilice como reglas de inferencia las usualmente aceptadas en su práctica profesional. Así, la fuente básica del conocimiento matemático habitual es la demostración, técnica esencialmente sintáctica, que no necesita aceptar ningún tipo de semántica referencial. Un tercer problema es que en su célebre dilema Benacerraf usa "conocimiento" en sentidos muy diferentes, por lo que la trayectoria de los dos cuernos del dilema no es comparable, ni por tanto complementaria, a la hora de conducir a situaciones igualmente inaceptables.

Además, en la medida en que consideremos conocimiento lo que se obtiene a través de las demostraciones matemáticas, y por tanto aceptemos como verdaderos los enunciados demostrados de modo correcto, estaremos identificando pragmáticamente verdad con demostración. En su práctica habitual los matemáticos hacen precisamente eso, aunque la mayoría han oído hablar de los resultados de incompletud de Gödel, que paradójicamente impiden esa identificación. En efecto, según el primer teorema de incompletud todo sistema matemático suficientemente potente contiene al menos un enunciado evidentemente verdadero pero indemostrable dentro del sistema; ello basta para mostrar que el concepto de demostración no puede servir para explicar el de verdad. Un cuarto problema es pues que cuando se contempla como aceptable la versión combinatoria del conocimiento se olvida que sólo lo es en sentido profesional, corporativo, práctico, pero no teórico ni filosófico.

Por otro lado, puesto que el único sentido de conocimiento, según la acepción causal, que podrían aceptar los formalistas, es el conocimiento de los símbolos físicos en los que las demostraciones se realizan, resulta claro que tampoco ese conocimiento sería admisible en el marco general de nuestro dilema. La relación usual entre verdad y conocimiento presupondría que lo verdadero lo sea de las combinaciones de símbolos que representan las entidades extra-lingüísticas, es decir de los enunciados, y los formalistas no admiten tal semántica referencial. Así, un quinto problema, si aceptamos esa forma de pseudoconocimiento, entendido como el obtenido al seguir las reglas del manejo de símbolos sin referencia, es que tampoco a través de él logramos el paralelismo buscado en los dos cuernos del dilema.

Enfoquemos finalmente el microscopio hacia la semántica no referencial del formalismo en sí misma, como algo independiente del conocimiento. El hecho cierto es que los formalistas niegan la necesidad de admitir la existencia de entidades matemáticas, y por tanto la necesidad de conceder referencia a sus términos, que no pasan de ser manchas de tinta sobre papel. Ahora bien, eso no demuestra que esa sea la única posición posible; es decir, que no se pueda construir una posición diferente, en la que se utilice una semántica referencial aunque no presuponga entidades en el sentido platónico del término. (Para el platonismo los objetos son algo independiente de nuestra mente, la cual no los produce sino que se limita a reconocerlos, del mismo modo que el espejo refleja los objetos físicos pero no los crea.) Pero de hecho existe una posición que tiene precisamente esas características: el intuicionismo. Para el intuicionista los términos matemáticos posen referencia en el mundo de las entidades mentales, y obviamente tenemos conocimiento causal de tales entidades. Un sexto problema sería, consiguientemente, que el dilema de Benacerraf no es exhaustivo, pues existen posiciones a las que no alcanza.

Fuera ya del marco del zoom sobre nuestro párrafo analizado, todavía podría alegarse que el mismo concepto de verdad matemática puede ser ilusorio. Bastaría sencillamente con negar la existencia de entidades matemáticas, al modo nominalista, para que, aplicando de forma inesperada el principio de Frege, obtuviéramos enunciados que no serían verdaderos ni falsos, sino, en todo caso, aceptados o rechazados, por razones extrínsecas, por la comunidad matemática. Un ejemplo de esa postura: Tarski. Por tanto, un séptimo, y último, problema sería la falta de justificación de la existencia del mismo concepto de verdad matemática. Si no hubiese verdad matemática no haría falta determinar su naturaleza; por tanto no harían falta ni semántica ni epistemología matemáticas. Y la carga de la prueba corresponde a quien afirma.

Para continuar leyendo

El artículo original de Benacerraf se publicó en 1973: "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy* 70, pp. 661-80, y apareció reimpreso en P. Benacerraf y H., Putnam, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge Univ. Press, 1984, 2ª ed., entre otros lugares. Asimismo, ha sido ya traducido a varias lenguas. Este trabajo ha ejercido una enorme influencia en la filosofía de la matemática contemporánea, especialmente de la mano de su primo hermano, "What numbers could not be", publicado en 1965. Para entender mejor el estilo provocador de Benacerraf es muy aconsejable leer este último, disponible también castellano, junto a una nota introductoria de quien esto escribe, en la revista *Mathesis* 9 (1993): 317-343.

Sobre Benacerraf la literatura es casi inabarcable, pero puedo citar aquí dos colecciones de ensayos que resultan muy útiles, tanto por los trabajos que contienen como por la bibliografía que señalan. La primera es el volumen 68 (1991), pp. 7-181, de la revista *Crítica*, dedicado íntegramente a la filosofía de Benacerraf. La segunda es A. Morton y S. P. Stich (eds.), *Benacerraf and his critics*, Oxford, Blackwell, 1996. Permítaseme terminar señalando aún un artículo más reciente, escrito desde una óptica crítica simpatizante de cierto platonismo, y que es muy aconsejable para profundizar en el dilema mencionado: Bob Hale y Crispin Wright, "Benacerraf's Dilemma Revisited", *European Journal of Philosophy* 10 (2002), pp. 101-129. Recuérdese, sin embargo, que ninguna literatura secundaria puede reemplazar el análisis y estudio personales de los textos filosóficos mismos.

Agradecimientos

Gracias a la generosa renuncia del profesor Benacerraf a sus derechos de impresión sobre la traducción castellana del artículo original, y a sus

buenos oficios, la revista *The Journal of Philosophy* autorizó la publicación de la traducción sin cargo alguno para la revista *Ágora*, facilitando así esa publicación, y por tanto el acceso de los estudiantes de habla castellana a este artículo ya clásico.