



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría de Hodge discreta y sistemas de clasificación

Alicia Mascareñas Pazos

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría de Hodge discreta y sistemas de clasificación

Alicia Mascareñas Pazos

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

| |
|---|
| Área de Coñecemento: Geometría y topología |
| Título: Teoría de Hodge discreta y sistemas de clasificación |
| Breve descripción do contido |
| El continuo crecimiento de la tecnología hace imprescindible manejar y analizar grandes volúmenes de datos. Para ello, en muchas ocasiones interesa realizar rankings de estos datos con el fin de obtener información útil. En este trabajo se describe una técnica para obtener dichos rankings, haciendo uso de grafos y trasladando a estos objetos “discretos” nociones continuas como pueden ser el rotacional, la divergencia, el concepto de laplaciano y la teoría de Hodge. |
| Recomendacións |
| |
| Outras observacións |
| |

Índice

| | |
|---|------------|
| Resumen | VII |
| Introducción | IX |
| 1. Complejos simpliciales y grafos | 1 |
| 1.1. Complejos simpliciales | 1 |
| 1.2. Grafos y complejos simpliciales de pandillas | 6 |
| 2. Homología y cohomología simplicial | 11 |
| 2.1. Espacios vectoriales y dualidad | 11 |
| 2.2. Homología | 13 |
| 2.3. Cohomología | 20 |
| 3. Teoría de Hodge discreta | 23 |
| 3.1. Teorema de descomposición de Hodge | 23 |
| 3.2. Descomposición de Hodge sobre grafos | 30 |
| 4. Aplicación sobre rankings | 39 |
| 4.1. Grafo de comparación por pares | 39 |
| 4.2. Descomposición de Hodge aplicada a rankings | 42 |
| Bibliografía | 47 |

Resumen

En este trabajo se exponen dos versiones del *Teorema de descomposición de Hodge discreto*: una en el contexto de complejos simpliciales y otra en el contexto de grafos. A continuación, se aplican los citados resultados al estudio de sistemas de clasificación (rankings). En particular, se interpretan cada uno de los sumandos que intervienen en la descomposición de Hodge en términos de la consistencia de rankings.

Abstract

This dissertation sets out two versions of the *Discrete Hodge Decomposition theorem*: one of them in the simplicial complex context and another one in the context of graphs. Afterwards, we apply each one of them over the study of rating systems (rankings). Notably, we read each of the factors involved on the Hodge decomposition in terms of rankings.

Introducción

Los individuos nos enfrentamos cada día a una miríada de posibilidades sobre las que realizar una elección; ¿Qué website ofrece la mejor respuesta a mi pregunta?, ¿dónde debería ir a comer?, ¿qué película debería ver? Aplicaciones como el mecanismo de búsqueda de Google o el sistema de recomendación de películas de Netflix reúnen las valoraciones de otros individuos y nos ayudan a tomar tal decisión. Estas aplicaciones se enfrentan a conjuntos de datos de gran dimensión, difíciles de abordar por su tamaño y características. Por tanto, se requiere algún tipo de método o algoritmo para elaborar el ranking que facilite la identificación de elementos destacables y contribuya a las operaciones de búsqueda y clasificación en esos conjuntos.

En definitiva, el problema fundamental que se plantea es la elaboración de un ranking global de un conjunto de *alternativas*, basándose en las puntuaciones dadas por una serie de *votantes*. Aquí, las palabras “alternativas” y “votantes” toman distintos significados, adaptándose a los distintos contextos que se presenten. Por ejemplo, con las alternativas nos referimos a páginas web indexadas por Google, vendedores de eBay o películas de Netflix; los votantes en los respectivos contextos podrían ser otras páginas webs, compradores o espectadores. Más aún, los votantes pueden ser puramente “abstractos” si se construyen como una mera colección de diferentes criterios que se usan para juzgar las alternativas.

Las puntuaciones se almacenan en bases de datos digitales, que organizan los registros de datos a través de tablas o matrices. En este caso, las filas de las tablas serán los votantes, sus columnas las distintas alternativas y, su valor, la puntuación asignada por ese votante a esa alternativa. En el Cuadro 1, se muestra una tabla de datos correspondiente a las opiniones de cinco críticos de cine sobre cinco películas. Las películas están valoradas mediante la escala de 5-estrellas ★, así, el intervalo de puntuaciones abarca de 0 a 5 estrellas. Es habitual utilizar rangos de puntuaciones pequeños, ya que resulta más sencillo elegir una nota entre 0 – 5 que entre 0 – 50.

Una de las principales barreras a la hora realizar el ranking proviene de la incompletitud del conjunto de datos proporcionado, es decir, no todos los votantes habrán valorado todas las

| | Película A | Película B | Película C | Película D | Película E |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Crítico 1 | 5 | 2 | 4.5 | - | - |
| Crítico 2 | 3.5 | - | - | 3 | - |
| Crítico 3 | - | 2 | - | - | 5 |
| Crítico 4 | - | - | - | 2.5 | 4 |
| Crítico 5 | 4 | - | - | - | - |

Cuadro 1: Tabla con estrellas otorgadas por cinco críticos de cine a cinco películas.

alternativas; como se observa en el Cuadro 1, la tabla correspondiente al conjunto de datos puede presentar entradas vacías. Más aún, es habitual encontrarse un desequilibrio de información: la cantidad de entradas vacías suele variar notablemente entre las distintas alternativas. Este obstáculo es fácil de observar en los ejemplos expuestos. Por ejemplo, en el marco de Netflix la amplia mayoría de espectadores solo habrán evaluado una porción reducida de las películas. Además, la cantidad de público de una película exitosa no será comparable al de la vasta mayoría de películas, que recibirán un número moderado de críticas. Por ejemplo, se aprecia sobre el Cuadro 1 como la película *A* ha sido valorada por tres críticos, mientras que la película *C* solo por uno.

Existe otra dificultad añadida cuando se condensan las opiniones de distintos votantes en un solo ranking global. Un ranking consiste en un listado ordenado de los elementos de un grupo. Así, se exige que presente *transitividad*:

“Si se prefiere *A* sobre *B* y *B* sobre *C* , entonces se prefiere *A* sobre *C*.”

Pero si se tienen en cuenta las preferencias de un grupo de votantes, no siempre va a ser posible escoger un orden. Esta situación es conocida como “Paradoja de Condorcet”, donde las preferencias colectivas no son transitivas aunque las preferencias individuales lo sean. Veámoslo a través de un ejemplo.

Se quiere elegir la mejor de entre tres películas *A*, *B*, *C* a partir de las opiniones de tres votantes 1, 2, 3. Sus preferencias son de mayor a menor:

- Votante 1: $A > B > C$
- Votante 2: $B > C > A$
- Votante 3: $C > A > B$

En este caso, cada votante elabora un listado ordenado de preferencias que es claramente transitivo. Sin embargo, si se toman en consideración todos los listados, se da una situación de empate

y no se puede realizar una clasificación global. Otro ejemplo de esta situación es el conocido juego de piedra-papel-tijera.

Esta circunstancia paradójica (intransitividad) puede darse incluso para un solo votante si basa su elección en distintos factores. Por ejemplo, imaginémosnos que queremos elegir entre tres restaurantes y los evaluamos en función de su precio, localización y la calidad de su comida:

- El restaurante A es barato y está situado relativamente cerca, pero la comida no es de nuestro agrado.
- El restaurante B colinda con nuestra casa y preferimos su comida a la del restaurante A , pero sus precios son muy elevados.
- El restaurante C sirve nuestra comida favorita y su precio es asequible, pero se sitúa a las afueras de la ciudad.

Bajo estas circunstancias sería adecuado decir que preferimos:

- El restaurante A sobre el B .
- El restaurante B sobre el C
- El restaurante C sobre el A .

Entonces, ¿qué restaurante elegiremos? A la vista de lo anterior, la tarea de realizar un ranking global es compleja, no siempre factible y puede dar una visión incompleta.

En este trabajo se describe un método denominado *HodgeRank*, que utiliza la *Teoría de Hodge* para afrontar conjuntos de datos con esta problemática. El método no solo proporciona un ranking global de las alternativas; lo acompaña también de un “certificado de fiabilidad” que cuantifica los conflictos entre los propios datos. Este certificado indica si un conjunto de datos admite un ranking global fiable o si por el contrario las inconsistencias de los propios datos, consecuencia de la Paradoja de Condorcet, invalidan un ranking global. En este último caso, el método informa sobre la naturaleza de las inconsistencias.

La táctica que a la que recurre nuestro método para lidiar con las entradas vacías (valores perdidos) es la comparación dos a dos de las alternativas. A partir de la comparación por pares, surge de manera natural la estructura de grafo: colocamos sobre los vértices del mencionado grafo las alternativas que se quieren comparar, y las preferencias de los votantes se cuantifican en un flujo de aristas sobre el grafo (más tarde explicaremos como se construye). En la Figura 1, se muestra el grafo correspondiente a la tabla del Cuadro 1. Los cinco vértices del grafo corresponden

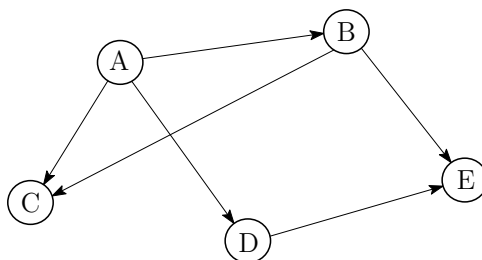


Figura 1: Grafo correspondiente a la Cuadro 1.

a las cinco películas, y las aristas conectan aquellas películas que hayan sido comparadas por algún crítico. La incompletitud de datos, se aprecia en la estructura del grafo. Un gran número de entradas vacías se traduce en la escasez de ejes, mientras que el desequilibrio de información se aprecia en la cantidad de ejes entrando en cada vértice: sobre las alternativas juzgadas por muchos votantes entrarán un gran número de ejes, mientras que en aquellas con pocas valoraciones sucederá lo contrario.

Es sobre el grafo donde aplicaremos la *Teoría de Hodge*. Usualmente, esta teoría está reservada para otras ramas matemáticas donde se estudia sobre contextos continuos. Lo novedoso del método es adaptarla al escenario discreto, en particular, a los grafos. Hablaremos por tanto de *Teoría de Hodge discreta*, que en otras cosas traslada al caso discreto las nociones gradiente, rotacional, divergencia, laplaciano y forma armónica propias del cálculo vectorial. En ese sentido, esta teoría proporciona una descomposición ortogonal del flujo de aristas del grafo, que reúne las valoraciones de los votantes, en tres componentes: un **flujo rotacional**, un **flujo armónico** y un **flujo gradiente**:

$$\text{Flujo de aristas} = \text{Flujo rotacional} \oplus \text{Flujo armónico} \oplus \text{Flujo gradiente}$$

La utilidad de la descomposición reside en que el **flujo gradiente** permite reconstruir un ranking global de las alternativas, que es nuestro objetivo primario. Además, las dos componentes restantes del flujo proporcionan la prometida información sobre la validez de este ranking global y sobre la inconsistencia de los datos. El flujo rotacional y armónico cuantifican distintos tipos de inconsistencias. A grandes rasgos, el flujo rotacional “mide” las inconsistencias de origen local mientras que el flujo armónico cuantifica las inconsistencias globales.

Por ejemplo, un flujo con una componente rotacional (local) “pequeña” y una componente armónica (global) “grande”, puede interpretarse como que el ranking global no es fiable para alternativas con valoraciones similares pero sí cuando son muy distintas. Es decir, no podemos afirmar con

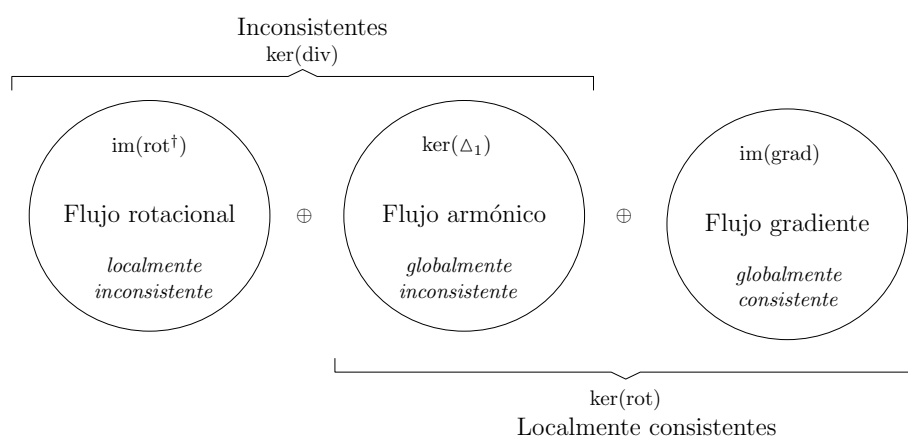


Figura 3: Esquema de los distintos tipos de flujo.

seguridad que las alternativas 27^a, 28^a, 29^a están bien ordenadas en el ranking global que hemos inducido, pero si que es apropiado decir que la 4^a, 60^a, 100^a alternativas deben colocarse en ese orden. Esta situación se da frecuentemente cuando se requiere la ordenación de un conjunto de alternativas muy variado. Por ejemplo, si se solicita a un equipo de gastrónomos que declaren sus preferencias sobre una amplia gama de alimentos, puede que no lleguen a un acuerdo en subgrupos de alimentos similares; no sabrán seleccionar entre la hamburguesa, la pizza o la pasta y quizás tampoco entre la trufas, el foie gras y el caviar. Sin embargo, probablemente coincidan sobre qué subgrupo de alimentos prefieren. Por tanto, el pacto o ranking final que se obtenga, tendrá validez a gran escala pero a pequeña escala será erróneo.

Organizamos el trabajo como sigue. En el Capítulo 1 introducimos los complejos simpliciales. Además presentamos como construir un complejo simplicial (“complejo simplicial de pandillas”) a partir de un grafo. Dedicamos el Capítulo 2 a estudiar la homología y cohomología simpliciales. En el Capítulo 3 combinamos las herramientas introducidas hasta el momento y enunciamos y demostramos el Teorema de Descomposición de Hodge. Finalmente, en el Capítulo 4 exhibimos la aplicación de la teoría desarrollada previamente al problema de clasificación o rankings.

Para la realización de este trabajo hemos seguido el artículo de investigación [5]. En particular hemos detallado y desarrollado las explicaciones, ejemplos y demostraciones allí presentes.

Capítulo 1

Complejos simpliciales y grafos

Este primer capítulo se dedica al estudio de los complejos simpliciales y su relación con los grafos. En particular, exhibimos como construir el complejo de pandillas asociado a un grafo. Para ello seguiremos las referencias [5, 6, 8, 9].

1.1. Complejos simpliciales

Comenzaremos introduciendo el concepto de *complejo simplicial geométrico*. Intuitivamente, un complejo simplicial geométrico consiste en la generalización a cualquier dimensión de un poliedro tridimensional. Este conjunto, lo construimos a partir de piezas elementales (puntos, aristas, triángulos...) que denominaremos *símplices*.

Definición 1.1 (Conjunto afínmente independiente). Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^m . Este conjunto se dice *afínmente independiente* si es no vacío y se cumple que para cualesquiera escalares reales $\{t_i\}_{i=0}^n \subseteq \mathbb{R}$ verificando:

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0,$$

tenemos que $t_i = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Observación 1.2. De la Definición 1.1 se sigue que un conjunto de un solo punto siempre será afínmente independiente.

Observación 1.3. Se tiene que un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es afínmente independiente si y solo si los vectores $\overrightarrow{a_1 - a_0}, \dots, \overrightarrow{a_n - a_0}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^m (véase [8, Teorema 2.4, Pág 33]).

Observación 1.4. Sea $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ conjunto afínmente independiente. Entonces necesariamente $m \geq n$.

Como ya comentamos, queremos construir los complejos simpliciales pegando “piezas lego”. Comenzamos por presentar los objetos que actuarán como piezas elementales.

Definición 1.5 (n -símplice geométrico). Sea $\{a_0, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto de puntos afínmente independiente. Definimos el n -símplice σ generado por a_0, \dots, a_n como el conjunto de puntos:

$$\left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \quad \text{y} \quad t_i \geq 0 \quad \text{para todo} \quad i \in \{0, \dots, n\} \right\}.$$

Los puntos a_0, \dots, a_n que generan σ se denominan *vértices de σ* y llamaremos al número n *dimensión de σ* . Cuando queremos indicar los vértices que generan el n -símplice σ lo denotamos por $[a_0, \dots, a_n]$.

En ocasiones, nos referiremos a n -símplice geométrico como símplice geométrico o simplemente símplice.

Ejemplo 1.6. Ilustramos en la Figura 1.1 símplices geométricos de distintas dimensiones. Avanzando de izquierda a derecha en los elementos de la figura, el primero se corresponde con un 0-símplice cuya representación coincide con la de un *punto* en el espacio. El segundo elemento es un 1-símplice generado por a_0 y a_1 . Está formado por todos los puntos de la forma:

$$x = t a_0 + (1 - t) a_1$$

con $0 \leq t \leq 1$; es decir, es el *segmento* que une a_0 y a_1 . De manera similar, se puede ver que el siguiente elemento correspondiente a un 2-símplice generado por a_0, a_1 y a_2 forma un *triángulo* cuyos vértices son estos puntos. Por último, se muestra un 3-símplice que adopta la forma de un *tetraedro*.

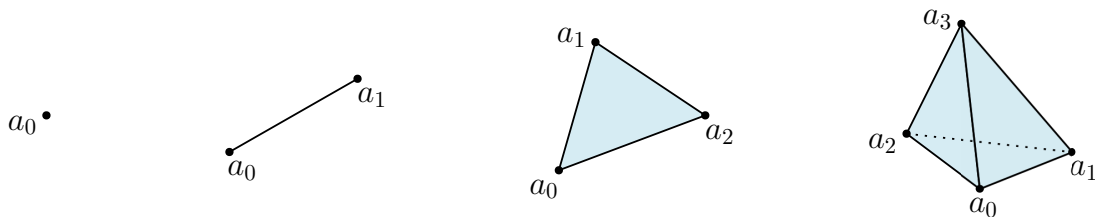


Figura 1.1: De izquierda a derecha 0-símplice, 1-símplice, 2-símplice y 3-símplice.

Enunciamos una proposición que usaremos posteriormente para estudiar los símplices en un encuadro más abstracto. La demostración puede consultarse en [6, Pág 5]

Proposición 1.7. *Dado un símplice geométrico σ , existe un único conjunto afínmente independiente de puntos (vértices) generando a σ .*

Definición 1.8 (Cara de simple). Sea σ un n -simplejo geométrico generado por a_0, \dots, a_n . Cualquier simplejo generado por un subconjunto de $\{a_0, \dots, a_n\}$ se denomina *cara de σ* . Las caras de σ distintas del propio σ se denominan *caras propias de σ* . En particular, si eliminamos el elemento a_i de la lista mediante el símbolo $\hat{}$, la cara de σ generada por $a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n$ se denomina *cara opuesta de a_i* .

Ejemplo 1.9. Consideremos el 2-simplejo $[a_0, a_1, a_2]$ de la Figura 1.2. Las caras propias del simplejo serán de dimensión a lo sumo 1. Veámos cuáles son:

- Tiene 3 caras de dimensión 0: $[a_0], [a_1], [a_2]$.
- Tiene 3 caras de dimensión 1: $[a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_0]$. Más aún, son las caras opuestas de a_2, a_0 y a_1 respectivamente.

La única cara no propia es el propio 2-simplejo $[a_0, a_1, a_2]$ de dimensión 2.

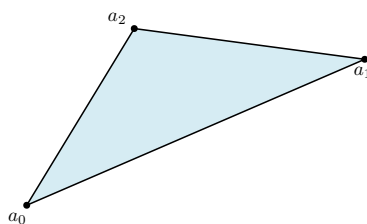


Figura 1.2: 2-simplejo $[a_0, a_1, a_2]$.

Una vez definidos los simplejos, ya podemos proceder a construir los “poliedros”. Intuitivamente, formamos un complejo tomando varios simplejos y pegándolos por su frontera, de tal manera que el pegado se produzca a través de las caras de igual dimensión de los simplejos.

Definición 1.10 (Complejo simplicial geométrico finito). Un *complejo simplicial geométrico finito* K en \mathbb{R}^m es una colección finita y no vacía de simplejos geométricos de \mathbb{R}^m verificando:

- (1) Si σ es un simplejo geométrico de K , $\sigma \in K$, entonces todas sus caras son simplejos geométricos.
- (2) La intersección de cualesquiera dos simplejos geométricos de K , es, o bien el vacío, o bien una cara de ambos (que debe estar en K por (1)).

Llamaremos *conjunto de vértices de K* a la unión de los vértices de todos sus simplejos.

Definición 1.11 (Dimensión de complejo). Sea K un complejo simplicial geométrico finito en \mathbb{R}^m . Al máximo de las dimensiones de sus simplejos lo llamamos *dimensión de K* .

Ejemplo 1.12. La colección no vacía de símlices de la primera imagen de la Figura 1.3, es finita y verifica (1) y (2). Está formado por símlices de dimensión 0, 1, 2. Constituye pues, un complejo simplicial geométrico finito de dimensión dos.

Las restantes imágenes de la Figura 1.3 no se corresponden con complejos simpliciales. La pieza central no verifica la hipótesis (1) ya que el segmento tiene tan solo uno de sus extremos. En la última imagen se incumple la hipótesis (2). Por ejemplo, en la componente conexa superior, la intersección de 1-símplex (segmentos) no es un símplex. En la componente conexa inferior, el 1-símplex y el 2-símplex tampoco intersecan en un símplex.

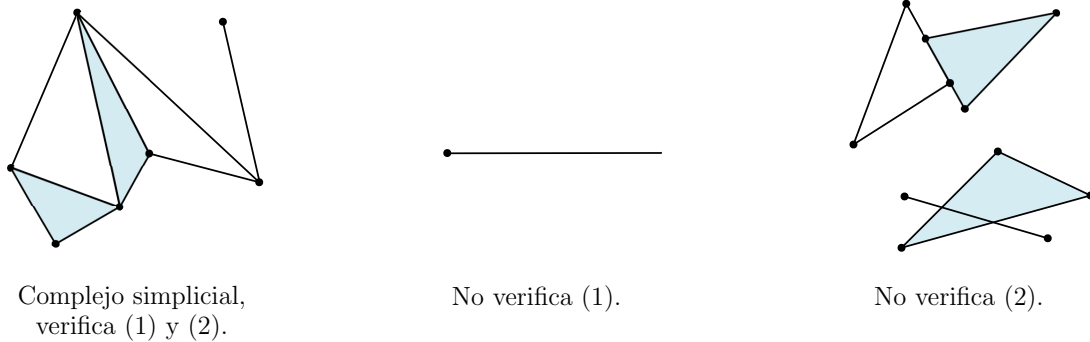


Figura 1.3: Ejemplos de complejos simpliciales.

Observación 1.13. Si σ es un símplex geométrico, entonces la colección de todas sus caras es un complejo simplicial. Esto se puede constatar en la Figura 1.2, donde la colección de todas las caras descritas

$$K = \{[a_0], [a_1], [a_2], [a_0, a_1], [a_0, a_2], [a_1, a_2], [a_0, a_1, a_2]\}$$

conforma un complejo simplicial geométrico finito.

Definición 1.14 (Poliedro subyacente). Sea K un complejo simplicial geométrico finito en \mathbb{R}^m . Definimos *espacio subyacente de K* y denotamos por $|K|$ como la unión de todos sus símlices dotada con la topología relativa que hereda de \mathbb{R}^m :

$$|K| = \cup \{\sigma \mid \sigma \in K\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Observación 1.15. Nótese que si σ es un símplex geométrico, entonces $|\sigma|$ y σ coinciden como conjuntos (el primero es un espacio topológico).

Los complejos simpliciales pueden examinarse desde un enfoque puramente combinatorio.

Definición 1.16 (Complejo simplicial abstracto finito). Sea V un conjunto finito. Un *complejo simplicial abstracto finito* S es una colección no vacía finita de subconjuntos no vacíos de V , llamados *símlices abstractos*. La colección es cerrada bajo la relación de inclusión: si A es un elemento de S , también lo será cualquier subconjunto no vacío de A .

Los elementos de V son los *vértices de S* . Un *símplice abstracto* $A \in S$ formado por $n + 1$ vértices tendrá dimensión n y se nombrará por *n -símplice abstracto*. Así, de manera paralela al caso geométrico, definimos la *dimensión de un complejo simplicial abstracto finito S* como la mayor dimensión de uno de sus símlices.

Llegados a este punto, resulta natural preguntarse cómo se relacionan los puntos de vista geométrico y abstracto. La Proposición 1.7 nos dice que los símlices geométricos quedan determinados por sus vértices. Por tanto, se pueden ver como símlices abstractos considerando su conjunto de vértices. Si K es un complejo simplicial geométrico, extendemos esta idea a cada uno de sus símlices. Podemos identificar el símplice $[a_0 \dots a_n] \in K$ con su conjunto de vértices $\{a_0, \dots, a_n\}$. La colección de subconjuntos de vértices correspondientes a los símlices de K se denomina *esquema de vértices de K* y constituye un complejo simplicial abstracto finito.

Ejemplo 1.17. Consideremos el complejo simplicial geométrico K de la Figura 1.2, cuyo conjunto de vértices es $V = \{a_0, a_1, a_2\}$. Tal y como acabamos de describir, podemos tomar uno de sus símlices e identificarlo con un subconjunto de V . Por ejemplo, el símplice $[a_1, a_2] \in K$ se corresponde con $\{a_1, a_2\} \subseteq V$. Procediendo así sobre cada uno de sus símlices, obtenemos el esquema de vértices de K :

$$\left\{ \{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_0, a_2\}, \{a_0, a_1, a_2\} \right\}.$$

Recíprocamente, si S es un complejo simplicial abstracto finito podemos asociar su conjunto de vértices V a un conjunto de puntos afínmente independientes $\{a_0, \dots, a_n\}$ de \mathbb{R}^m , con m suficientemente grande (Observación 1.4). Así, a cada símplice abstracto $A \in S$ le asignamos un símplice geométrico en \mathbb{R}^m , eligiendo los puntos de $\{a_0, \dots, a_n\}$ correspondientes a sus vértices. La colección de estos símlices geométricos conforma un complejo simplicial geométrico. El espacio subyacente a este complejo, se denomina *realización geométrica de complejo S* .

Ejemplo 1.18. Partimos de un complejo simplicial abstracto finito S con conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d\}$:

$$S = \left\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\} \right\}$$

Está formado por símlices de dimensión a lo sumo 2, por tanto, la dimensión de S es 2.

Para su realización geométrica es suficiente escoger el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Elegimos un conjunto de 4 puntos afínmente independientes de \mathbb{R}^3 y le asignamos a cada vértice de S uno de estos puntos. Una posible elección de los puntos es:

$$a = (0, 0, 0) \quad b = (3, 0, 0) \quad c = (1, 2, 0) \quad d = (3, 0, 3)$$

En la Figura 1.4 se muestra la realización geométrica resultado de elegir esos puntos sobre \mathbb{R}^3 .

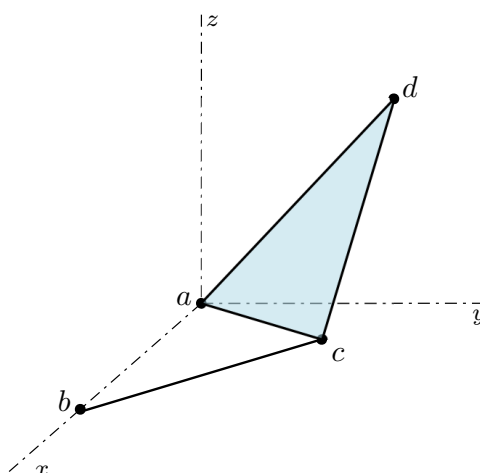
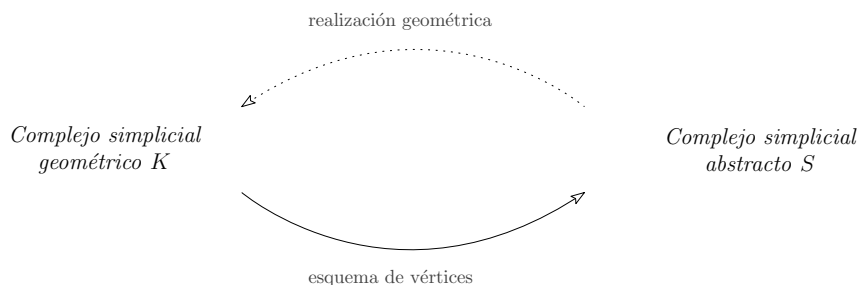


Figura 1.4: Realización geométrica del complejo simplicial abstracto S .

En el siguiente esquema, se esboza la relación entre ambos conceptos. El trazo punteado de la flecha superior pretende remarcar que la realización geométrica de un complejo simplicial abstracto no es un complejo simplicial geométrico, sino su espacio subyacente. Quiere aludir también al hecho de que la realización no es única, ya que la elección del conjunto de puntos afínmente independientes es arbitraria.



Se puede consultar un desarrollo más formal en [6, Pág 12-18]. Usando este vínculo, los trataremos de manera indistinta. Hablaremos a partir de ahora de símlices y complejos simpliciales (en general).

1.2. Grafos y complejos simpliciales de pandillas

En esta sección recordaremos el concepto de grafo y lo relacionaremos con los complejos simpliciales a través de los cliques y complejos de pandillas. Para las primeras definiciones relativas a grafos, seguiremos [9].

Comenzamos recordando el concepto de grafo no orientado.

Definición 1.19 (Grafo no orientado). Un *grafo finito no orientado* G es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío y E es un conjunto formado por subconjuntos de 2 elementos de V . Los elementos de V se denominan *vértices*, y los elementos de E se denominan *aristas*. El número de vértices de G es su *orden* y se denota por G .

Ejemplo 1.20. La Figura 1.5 representa un grafo finito no orientado cuyo conjunto de vértices V es $\{A, B, C, D, E, F\}$ y cuyo conjunto de aristas consiste en:

$$E = \{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\} \text{ y } \{E, F\}.$$

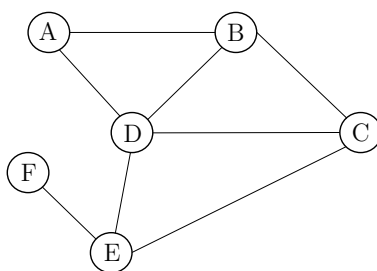


Figura 1.5: Grafo finito no orientado dado por el par (V, E) .

Definición 1.21 (Vértices adyacentes). Sea G un grafo finito no orientado. Decimos que dos vértices x, y de G son *adyacentes* si $\{x, y\} \in E$ es una arista de G .

Definición 1.22 (Grafo completo). Decimos que un grafo finito no orientado G es *completo* si todos los pares de vértices de V son adyacentes.

Definición 1.23 (Subgrafo). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces decimos que $G' = (V', E')$ es un *subgrafo de G* , y lo denotamos por $G' \subseteq G$.

Definición 1.24 (Subgrafo inducido). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado y sea $S \subseteq V$ cualquier conjunto de vértices de G . Denominamos *subgrafo inducido por S* y denotamos $G[S]$, al subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es S y cuyo conjunto de aristas consta de todos los elementos de E que tienen ambos extremos en S . Es decir, dos vértices cualesquiera $v_1, v_2 \in S$ son adyacentes en $G[S]$ si y solo si son adyacentes en G .

Ejemplo 1.25. En la Figura 1.6 se presenta un grafo finito no orientado de orden seis, cuyo conjunto de vértices es $V = \{A, B, C, D, E, F\}$. No es un grafo completo ya que, por ejemplo, los vértices C y F no son adyacentes. Cualquier subgrafo de orden uno o dos, es trivialmente completo. Contiene además tres subgrafos completos de orden mayor o igual que tres:

- El subgrafo inducido por $V_1 = \{A, E, F\}$ de orden 3.

- El subgrafo inducido por $V_2 = \{B, C, D\}$ de orden 3.
- El subgrafo inducido por $V_3 = \{A, B, D, E\}$ de orden 4.

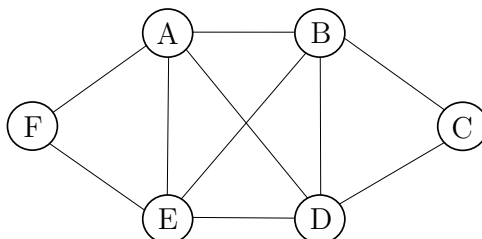


Figura 1.6: Grafo no completo con 3 subgrafos completo de orden mayor o igual que tres.

Observación 1.26. Nótese que los grafos no orientados pueden verse como complejos simpliciales de dimensión 1, donde los vértices son los 0-símplices del complejo y las aristas son los 1-símplices.

Los grafos únicamente permiten expresar relaciones binarias entre objetos. Por tanto, considerarlos como complejos simpliciales, nos va a permitir establecer relaciones de orden superior. Para ello, definiremos en el grafo los denominados *cliques*, que serán equivalentes a los símplices. Aparecerán “a través de” los subgrafos completos del grafo.

Definición 1.27 (Clique). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Un k -clique de G es un elemento $\{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{V}{k}$ tal que $\{i_p, i_q\} \in E$ para todo $1 \leq p < q \leq k$. Al conjunto de todos los k -cliques de G lo denotamos por $K_k(G)$.

Observación 1.28. Es frecuente en la literatura referirse a los cliques como pandillas.

Ejemplo 1.29. Trabajemos con el grafo G de la Figura 1.6. Se puede comprobar que $K_1(G) = V$ y $K_2(G) = E$. El conjunto de 3-cliques es justamente $\{V_1, V_2\}$ y el conjunto de 4-cliques es $\{V_3\}$. Para $k > 4$, el conjunto de k -cliques es vacío.

Por tanto, teniendo en cuenta el Ejemplo 1.25, los subgrafos completos de G de orden k son exactamente los inducidos por los k -cliques. En la Figura 1.7 se puede comprobar como los subgrafos completos de G se convierten a través de sus vértices en símplices.

A partir del Ejemplo 1.29, es sencillo extraer las siguientes observaciones.

Observación 1.30. Nótese que los k -cliques son justamente el conjunto de vértices de los subgrafos completos de G de orden k .

Observación 1.31. Un k -clique de G es un $k - 1$ símplice.

Nos interesarán en especial los 3-cliques, que llamaremos *tríadas*. Al conjunto de tríadas $K_3(G)$ lo denotaremos por $T(E)$.

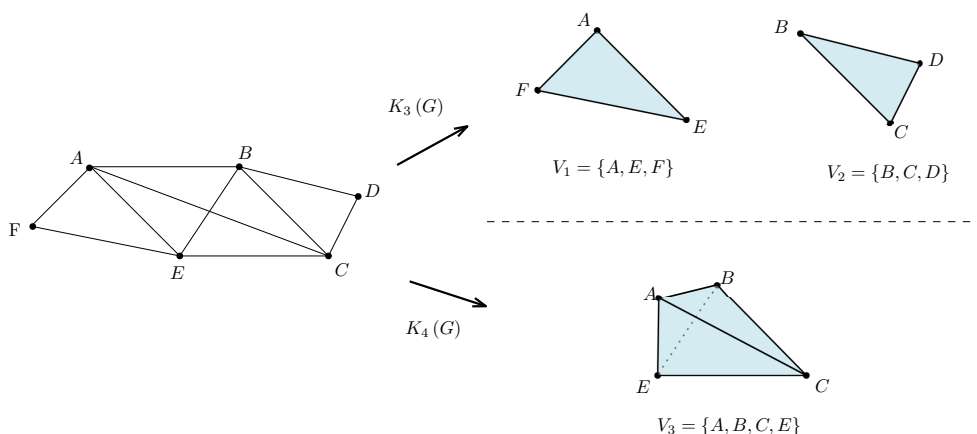
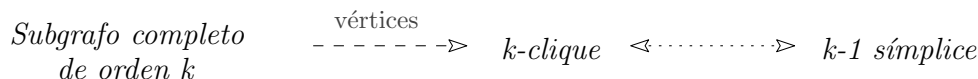


Figura 1.7: Los k -cliques de G se convierten en $k - 1$ símplices.



Definición 1.32 (j -complejo simplicial de cliques). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Definimos como j -complejo de cliques de G y denotamos por $K^j(G)$, al complejo simplicial $j - 1$ dimensional formado por todos los k -cliques de G con $k = 1, \dots, j$. Es decir:

$$K^j(G) := \bigcup_{k=1}^j K_k(G)$$

Si j es máximo (igual al número de vértices del clique más grande de G), obtenemos lo llamado *complejo de cliques de G* y lo denotamos por $K(G)$.

Ejemplo 1.33. Consideremos la Figura 1.8:

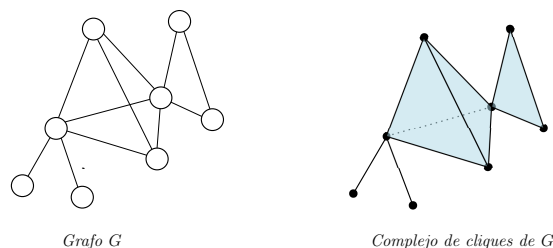


Figura 1.8: Un grafo y su complejo de cliques.

A la izquierda se muestra un grafo G de orden ocho. El clique más grande de G es el formado por los cuatro vértices del centro. Teniendo en cuenta esto, el complejo de cliques $K(G)$ coincide con $K^4(G)$ y se construye tal y como aparece en la derecha de la Figura 1.8. El 3-complejo de cliques $K^3(G)$, se diseña igual que $K^4(G)$, pero tetraedro central no es macizo, está hueco.

Nuestro estudio se reducirá al 3-complejo de cliques de G , $K^3(G) = (V, E, T(E))$ que en ocasiones denotaremos como $K_G \equiv K^3(G)$.

Capítulo 2

Homología y cohomología simplicial

Es habitual en topología algebraica asociar a los espacios topológicos, objetos algebraicos. El estudio de los objetos algebraicos permite sacar conclusiones sobre los espacios topológicos. En este capítulo presentamos los espacios vectoriales de homología y cohomología. Tales espacios se asocian a complejos simpliciales y aportan información sobre los segundos. Seguimos las referencias [2, 3, 4, 6, 8].

2.1. Espacios vectoriales y dualidad

Antes de proceder a definir homología y cohomología, presentaremos algunas herramientas algebraicas que usaremos a lo largo del desarrollo. En todo momento asumiremos que los espacios vectoriales con los que trabajamos son de dimensión finita.

2.1.1. Espacio vectorial cociente

Sea F un cuerpo. Sea V un F -espacio vectorial y U un subespacio de V . Podemos definir en V una relación de equivalencia dada por U de tal manera que dados $v, v' \in V$

$$v \sim_U v' : \iff v' - v \in U$$

Con esta relación de equivalencia podemos hacer una partición del conjunto V en clases de equivalencia ($v \sim_U v' : \iff [v] = [v']$). La clase de equivalencia de $v \in V$ es el conjunto:

$$[v] := \{v' \in V \mid v \sim_U v'\} = v + U$$

El conjunto de clases de equivalencia dotado con la suma y el producto por escalares forma un espacio vectorial que denominamos *espacio cociente de V módulo U* . Lo denotamos por V/U .

2.1.2. Matriz asociada a una aplicación lineal

Una aplicación entre espacios vectoriales $f: V \rightarrow W$ es lineal si verifica que:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \text{ para todo } u, v \in V \text{ y } \alpha, \beta \in F$$

Escojamos las bases $B = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ en V y $B' = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ en W . La *matriz asociada a f* con respecto de estas bases es la matriz $M_{BB'}(f)$ de dimensión $m \times n$ cuyas columnas son las coordenadas respecto de B' de las imágenes de los vectores de B .

$$M_{BB'}(f) = \left((f(v_1))_{B'} \mid \dots \mid (f(v_n))_{B'} \right)_{m \times n}$$

Existen una serie de subespacios asociados a una aplicación lineal. Se llama *imagen de f* y se representa por $\text{im}(f)$ al subespacio $f(V)$ de W . Se llama *núcleo de f* y se denota por $\ker(f)$ al subespacio de vectores de V cuya imagen por f es 0. El *Teorema de rango-nulidad* relaciona las dimensiones de estos subespacios:

$$\dim(V) = \dim(\text{im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

y además $\dim(\text{im}(f)) = \text{rango}(M_{BB'}(f))$.

El conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en W forma un F -espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Lo denotaremos por $L_F(V, W)$.

Observación 2.1. Todo cuerpo F es un F -espacio vectorial. El producto de escalares por vectores coincide con el producto de F .

2.1.3. Dualidad

Definición 2.2 (Espacio dual). Sea V un espacio vectorial sobre F . Llamamos *espacio vectorial dual de V* y denotamos por V^* , como el espacio vectorial de aplicaciones lineales de V a F :

$$V^* = L_F(V, F) = \{f: V \rightarrow F \mid f \text{ es aplicación lineal}\}$$

Definición 2.3 (Base dual). Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . La *base dual de V^** asociada a B viene dada por una colección de aplicaciones $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ definidas por:

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

El espacio dual del espacio dual $(V^*)^*$, es isomorfo al espacio de partida.

Definición 2.4 (Aplicación lineal dual). Sean V, W espacios vectoriales sobre F y $L: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Llamamos *aplicación dual de L* y denotamos por $L^*: W^* \rightarrow V^*$ a la aplicación dada por $L^*(f) = f \circ L$.

$$V \xrightarrow{L} W \quad \sim \quad W^* \xleftarrow{L^*} V^*.$$

Sean V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{R} de dimensión n y m respectivamente, y escojamos las bases B y B' . Sus espacios duales serán V^* y W^* , y podemos tomar las bases duales B^* y B'^* . Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5. Sea $L: V \rightarrow W$ una \mathbb{R} -aplicación lineal con matriz asociada $M_{BB'}(L) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces si $L^*: W^* \rightarrow V^*$ es la aplicación dual de L :

$$M_{B^*B'^*}(L^*) = \left(M_{BB'}(L) \right)_{n \times m}^T,$$

donde el símbolo T denota la matriz traspuesta.

2.2. Homología

Conduciremos esta sección hacia la definición de homología simplicial, que nos ofrecerá un método para medir los agujeros de un complejo simplicial.

Una noción clave previa a la definición de la homología simplicial es el concepto de orientación de un símlice. Si pensamos en los vértices de un símlice como un conjunto ordenado, podemos obtener diferentes disposiciones de la lista de vértices permutando o cambiando su orden. Además, las permutaciones pueden descomponerse en un producto de transposiciones, es decir, en sucesivos intercambios de elementos dos a dos. En particular, si el número de transposiciones en la descomposición es par diremos que es una permutación par.

Definición 2.6 (Orientación de símlice). Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ un símlice. Decimos que 2 ordenaciones de sus vértices son *equivalentes* si difieren en un número par de permutaciones. Para $\dim(\sigma) > 0$, aparecen dos clases de equivalencia en la ordenación de sus vértices. Cada una de estas clases se denomina *orientación de σ* .

Así, cada símlice de dimensión mayor que 0 tiene exactamente dos orientaciones, de manera que al cambiar el orden de 2 de sus vértices cambia su orientación. Un *símlice orientado* es un símlice acompañado de una orientación.

En lo sucesivo, especificaremos la orientación de un símlice a partir de los subíndices de sus vértices mediante la regla: si $i < j$, colocamos primero a_i y después a_j . Denotaremos también por $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ a los símlices orientados.

Observación 2.7. Si la $\dim(\sigma) = 0$, entonces σ tiene un único vértice. En consecuencia, hay una única clase y por tanto una única orientación.

Ejemplo 2.8. En la Figura 2.1 se presentan símlices orientados de dimensión menor a mayor de izquierda a derecha.

En un 1-símlice, la elección de una orientación se corresponde a escoger una de las dos posibles direcciones. A menudo se traza una flecha para indicar la dirección, tal y como se observa en el 1-símlice orientado de la Figura 2.1.

En el caso de un 2-símlice, la orientación se suele presentar mediante una flecha circular. Representa las dos posibles direcciones: en el sentido de las agujas del reloj o el contrario. El 2-símlice orientado $[a_0, a_1, a_2]$ de la Figura 2.1 la flecha sigue en sentido de las agujas del reloj, de a_0 a a_1 a a_2 .

Por último, para la representación de la orientación de un 3-símlice se utiliza la convención de la 'Regla de la mano derecha'. La flecha en espiral de la Figura 2.1 indica la dirección del símlice $[a_0, a_1, a_2, a_3]$. Se corresponde con la dirección dada por la mano derecha: si curvas los dedos de tu mano derecha en la dirección de a_0 a a_1 a a_2 , tu dedo pulgar apunta hacia a_3 . La orientación opuesta la obtendríamos usando nuestra mano izquierda.

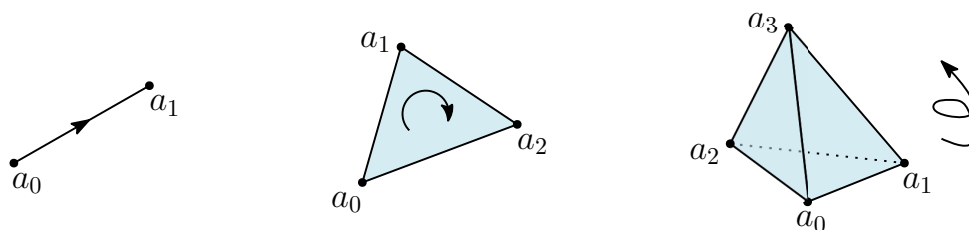


Figura 2.1: Símlices orientados de dimensión uno, dos y tres.

Observación 2.9. Los ejemplos expuestos en la Figura 2.1 ilustran como la definición de orientación dada, coincide con la intuición geométrica heredada del cálculo vectorial. A lo largo del trabajo, presentaremos más definiciones que serán también la noción discreta de conceptos continuos del cálculo vectorial ya conocidos (gradiente, rotacional, ...).

Procedemos a definir las cadenas de un complejo orientado, que nos permiten avanzar por los símlices del complejo teniendo en cuenta la orientación. De ahora en adelante asumiremos que trabajamos sobre el cuerpo de los números reales.

Definición 2.10 (p -cadena). Sea K un complejo simplicial finito. Una p -cadena de K es una función c del conjunto de p -símlices orientados de K al cuerpo \mathbb{R} , tal que $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' son el mismo símlice con orientaciones opuestas.

El conjunto de p -cadenas de K se denota por $C_p(K)$. Podemos definir una suma $+$ en $C_p(K)$, sumando los valores que toman las p -cadenas en cada símlice. Esta operación, junto con la multiplicación por escalares $\cdot: \mathbb{R} \times C_p(K) \rightarrow \mathbb{R}$ dota al conjunto $C_p(K)$ de estructura de espacio vectorial $(C_p(K), +, \cdot)$.

Notación 2.11. Usaremos $C_p(K)$ para referirnos a $(C_p(K), +, \cdot)$.

Definición 2.12 (p -cadena elemental). Sea K un complejo simplicial finito. Dado un p -símlice orientado σ de K , definimos la p -cadena elemental c correspondiente a σ como la cadena:

- $c(\sigma) = 1$.
- $c(\sigma') = -1$, si σ' y σ son el mismo símlice con orientaciones opuestas.
- $c(\tau) = 0$ cualquier otro símlice orientado τ .

Observación 2.13. Si σ, σ' son símlices con orientación opuesta y c, c' son sus cadenas elementales asociadas respectivamente, entonces $c' = -c$.

Notación 2.14. Por abuso de notación, usaremos el símbolo σ para denotar también la p -cadena elemental correspondiente al p -símlice orientado σ . Teniendo en cuenta la Observación 2.13, escribiremos $-\sigma$ para referirnos a la cadena elemental asociada al símlice con orientación opuesta a σ .

Sea K un complejo simplicial finito y dotemos a su conjunto de p -símlices de una orientación. Entonces el conjunto de p -cadenas elementales correspondientes a estos símlices forman una base de $C_p(K)$. Es decir, podemos expresar cada p -cadena de K como una combinación lineal finita:

$$c = \sum_{i=0}^N k_i \sigma_i \text{ para } c \in C_p(K)$$

donde cada escalar k_i es un elemento de \mathbb{R} , cada σ_i la p -cadena elemental correspondiente al p -símlice orientado σ_i y N es el número de p -símlices orientados de K .

En la Figura 2.1 se puede observar que la frontera de un p -símlice $[a_0, \dots, a_p]$ se recorre a siguiendo las caras opuestas de cada uno de sus vértices, es decir, los $(p-1)$ -símlices $[a_0, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_p]$. Así, en términos de cadenas, podemos decir que la frontera de $[a_0, \dots, a_p]$ es la $(p-1)$ -cadena formada por la suma de las caras propias $[a_0, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_p]$. De cualquier manera, para mantener la coherencia con las orientaciones de las caras del símlice, se introducen signos como indica la siguiente definición.

Definición 2.15 (Aplicación frontera). Sea K un complejo simplicial finito. Para $p > 0$, definimos

la *aplicación frontera* de K y denotamos por ∂_p , como la \mathbb{R} -aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \partial_p: \quad C_p(K) &\longrightarrow C_{p-1}(K) \\ \sigma = [a_0, \dots, a_p] &\longmapsto \partial_p \sigma = \sum_{k=0}^p (-1)^k [a_0, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_p] \end{aligned}$$

donde utilizamos el símbolo \hat{a}_k para saltarnos el vértice a_k .

Ejemplo 2.16. En la Figura 2.2 se muestra como actúa la aplicación frontera sobre los ejemplos de la Figura 2.1.

- Sobre la 1-cadena elemental $[a_0, a_1]$:

$$\partial_1 [a_0, a_1] = [a_1] - [a_0]$$

- Sobre la 2-cadena elemental $[a_0, a_1, a_2]$:

$$\partial_2 [a_0, a_1, a_2] = [a_1, a_2] - [a_0, a_2] + [a_0, a_1]$$

- Sobre la 3-cadena elemental $[a_0, a_1, a_2, a_3]$:

$$\partial_3 [a_0, a_1, a_2, a_3] = [a_1, a_2, a_3] - [a_0, a_2, a_3] + [a_0, a_1, a_3] - [a_0, a_1, a_2]$$

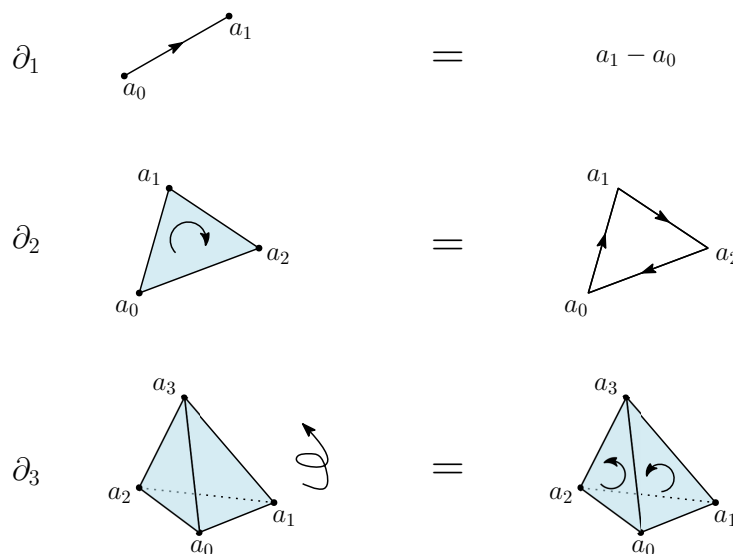


Figura 2.2: Aplicaciones frontera.

Como se puede observar, la aplicación frontera coloca un signo negativo delante de la cadena, si la dirección en la que se recorre la frontera no coincide con la orientación del símplex asociado a la cadena.

Reparemos en la 1-cadena $\partial_2 [a_0, a_1, a_2]$ ilustrada en la fila central de la Figura 2.2. Si aplicamos el operador ∂_1 sobre esta 1-cadena, obtenemos el cero; todo se cancela ya que cada vértice aparece como el punto inicial de una de la aristas y como punto final de otra.

Los cálculos realizados en el Ejemplo 2.16, motivan el siguiente resultado:

Lema 2.17. *La frontera de una frontera es nula:*

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$$

Demostración. Sea $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ una p -cadena elemental en la base de $C_p(K)$. Entonces :

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \circ \partial_p \sigma &= \partial_{p-1} \circ \partial_p [a_0, \dots, a_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p] + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p] \end{aligned}$$

Los términos de los sumatorios se cancelan por pares, ya que al intercambiar i y j en el segundo sumando, se convierte en el negativo del primero. \square

Corolario 2.18. *Para todo $p > 0$, la imagen de ∂_{p+1} , es un subespacio vectorial del núcleo de ∂_p . Es decir, $\text{im } \partial_{p+1} \subseteq \ker \partial_p$.*

Notación 2.19. En ocasiones, escribiremos C_p para referirnos a $C_p(K)$

Definición 2.20 (Complejo de cadenas). Sea K un complejo simplicial finito. La colección de cadenas y aplicaciones borde se agrupan en una secuencia de aplicaciones lineales sobre espacios vectoriales, que llamamos *complejo de cadenas* :

$$\dots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Nótese que hemos extendido la secuencia hacia la derecha mediante un 0 y $\partial_0 = 0$.

Para la definición de homología, resulta imprescindible definir una serie de subespacios.

Definición 2.21. El núcleo de $\partial_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ se denomina subespacio de p -ciclos y se denota por $Z_p(K)$. Cada elemento de $Z_p(K)$ se denomina p -ciclo.

Definición 2.22. La imagen de $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$ se denomina subespacio de p -fronteras y se denota por $B_p(K)$. Cada elemento de $B_p(K)$ se denomina p -frontera.

Sustancialmente, los ciclos serán aquellos elementos con frontera nula y que no son bordes. Las fronteras son los bordes de otros elementos. No resulta sorprendente por tanto la siguiente observación, resultado directo del Corolario 2.18:

Observación 2.23. Para todo $p > 0$, cada $p + 1$ -frontera es un p -ciclo, tal y como nos dice el Corolario 2.18. Es decir, $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$.

Partiendo de la relación $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$, podemos finalmente definir los *espacios de homología*.

Definición 2.24. Se define como p -ésimo espacio de homología de K , y se denota por $H_p(K)$, al espacio cociente sobre \mathbb{R} :

$$H_p(K) := Z_p(K) / B_p(K)$$

Los elementos de $H_p(K)$ se denominan *clases de homología*. Dos ciclos pertenecen a la misma clase si su diferencia es una frontera:

$$[\sigma] = \{\tau \in Z_p(K) \mid \sigma - \tau \in B_p(K)\}$$

La dimensión del p -ésimo espacio de homología de K se denomina p -ésimo número de Betti de K y se denomina por $\beta_p(K)$.

Observación 2.25. Como ya mencionamos en la introducción, los espacios de homología nos proporcionan un método para estudiar los agujeros de un complejo. Para $p > 0$, el número de Betti proporciona el número de agujeros p -dimensionales del complejo. En el caso de $p = 0$, nos informa sobre el número de componentes conexas del complejo.

Ejemplo 2.26. Para ilustrar estas definiciones, usaremos el complejo simplicial K presentado en la Figura 1.3. Consiste en un complejo simplicial de dimensión 2, formado por 7 vértices. Tal y como precisa la Figura 2.3, dotamos al complejo de una orientación mediante los subíndices de sus vértices. Señalemos unas aclaraciones de notación:

- *Dimensión 2:* Denotemos $\sigma_1 = [a_0, a_1, a_2]$ y $\sigma_2 = [a_2, a_3, a_4]$.
- *Dimensión 1:* Denotemos $e_{ij} = [a_i, a_j]$.
- *Dimensión 0:* Denotemos $a_k = [a_k]$, con $k = 0, \dots, 6$.

Así, el complejo K está formado por los símlices orientados:

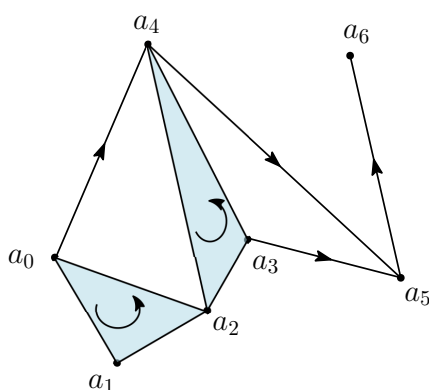
- Dos símlices de *dimensión 2*: σ_1, σ_2
- Diez símlices de *dimensión 1*: $e_{01}, e_{02}, e_{04}, e_{12}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{35}, e_{45}, e_{56}$
- Siete símlices de *dimensión 0* o vértices: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

Así, los espacios de cadenas de K están generados por las bases:

$$C_2(K) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \quad C_1(K) = \langle e_{01}, \dots, e_{56} \rangle \quad C_0(K) = \langle a_0, \dots, a_6 \rangle$$

Se forma el complejo de cadenas, conectándolas mediante las aplicaciones frontera:

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{0} 0.$$

Figura 2.3: Complejo simplicial orientado K .

Para estudiar los espacios de homología, analicemos primero las fronteras y los ciclos de K .

Empecemos por las fronteras $B_p(K)$:

$$B_1 := \text{im } \partial_2 = \partial_2 (\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle) \quad B_0 := \text{im } \partial_1 = \partial_1 (\langle e_{01}, \dots, e_{56} \rangle)$$

Por ser ∂ una aplicación lineal:

$$B_1 = \langle \partial_2(\sigma_1), \partial_2(\sigma_2) \rangle = \langle e_{12} - e_{02} + e_{01}, e_{34} - e_{24} + e_{23} \rangle$$

$$B_0 = \langle \partial_1(e_{01}), \dots, \partial_1(e_{56}) \rangle = \langle a_1 - a_0, \dots, a_6 - a_5 \rangle$$

Examinemos ahora los ciclos de K . Por la Observación 2.23, sabemos que $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$. Así:

$$Z_1 := \ker \partial_1 = B_1 \cup \langle e_{24} - e_{04} + e_{02}, e_{45} - e_{35} + e_{34} \rangle$$

$$Z_0 := \ker \partial_0 = \ker 0 = C_0(K)$$

Para $p \neq 0, 1$, es sencillo comprobar que $B_p = Z_p = 0$. Analicemos por tanto el 0,1- espacios de homología.

$$H_1(K) := Z_1(K) / B_1(K) \cong \mathbb{R}^4 / \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$$

$$H_0(K) := Z_0(K) / B_0(K) \cong \mathbb{R}^7 / \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{R}$$

Así, el primer número de Betti de K será 2 y el 0-ésimo número de Betti de K será 1.

Observación 2.27. En el Ejemplo 2.26 anterior es sencillo observar que los ciclos son los “camino cerrados” a lo largo del complejo. Entonces, para encontrar los agujeros, nos interesan aquellos caminos cerrados que no sean frontera de un símlice. Así, se pone de manifiesto la utilidad del número de Betti. El complejo de la Figura 2.3 tiene justamente una componente conexa y dos agujeros 1-dimensionales, que son los “triángulos sin rellenar”.

Tomando como base las cadenas elementales, podemos calcular las matrices asociadas a las aplicaciones lineales ∂_1 y ∂_0 :

$$M(\partial_2) = \left(\partial_2(\sigma_1) \mid \partial_2(\sigma_2) \right)_{10 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{10 \times 2}$$

$$M(\partial_1) = \left(\partial_1(e_{01}) \mid \dots \mid \partial_1(e_{56}) \right)_{7 \times 10} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{7 \times 10}$$

2.3. Cohomología

La cohomología es una variación algebraica de homología, resultado de una dualización en su definición. La principal herramienta que usaremos más adelante para aplicar sobre rankings.

Vamos a exponer las definiciones duales de las dadas en homología.

Definición 2.28 (Cocadena). Sea K un complejo simplicial finito. Llamamos *espacio de p-cadenas de K* y denotamos por $C^p(K, \mathbb{R})$, al espacio vectorial dual de $C_p(K)$:

$$C^p(K, \mathbb{R}) := C_p(K)^* = L_{\mathbb{R}}(C_p(K), \mathbb{R})$$

Sea $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ la base de p-cadenas elementales de $C_p(K)$, obtenemos su base dual $\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_N^*\} \subseteq C^p(K, \mathbb{R})$ definida para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ por:

$$\sigma_i^*(\sigma_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N$$

Definición 2.29 (Aplicación cofrontera). Sea K un complejo simplicial finito. Para $p > 0$, definimos la *aplicación cofrontera* de K y denotamos por δ_p , como la aplicación dual del operador frontera $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$:

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \quad \rightsquigarrow \quad C^{p+1}(K, \mathbb{R}) \xleftarrow{\delta_p \equiv \partial_{p+1}^*} C^p(K, \mathbb{R})$$

Por tanto, la aplicación δ_p asigna a la función $\sigma^*: C_p(K) \rightarrow \mathbb{R}$ la composición:

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\sigma^*} \mathbb{R}$$

Esto es, $\delta_p(\sigma^*) = \sigma^* \circ \partial_{p+1}$

Observación 2.30. Tenemos que ∂ disminuye en uno la dimensión mientras que δ la aumenta.

Notación 2.31. Con frecuencia, escribiremos C^p para referirnos a $C^p(K, \mathbb{R})$.

Lema 2.32.

$$\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0$$

Demostración. Sea σ^* un elemento de la base de C^p entonces :

$$\begin{aligned} \delta_{p+1} \circ \delta_p \sigma^* &= \delta_{p+1} (\delta_p (\sigma^*)) = \delta_{p+1} (\sigma^* \circ \partial_{p+1}) \\ &= (\sigma^* \circ \partial_{p+1}) \circ \partial_{p+2} = \sigma^* \circ (\partial_{p+1} \circ \partial_{p+2}) = \sigma^* (0) = 0 \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad la tenemos por Lema 2.17. □

Definición 2.33 (Complejo de cocadenas). Obtenemos el *complejo de cocadenas*, la noción dual del complejo de cadenas:

$$\dots \longleftarrow C^{p+1} \xleftarrow{\delta_p} C^p \xleftarrow{\delta_{p-1}} \dots \xleftarrow{\delta_1} C^1 \xleftarrow{\delta_0} C^0 \longleftarrow 0$$

Definición 2.34 (Cociclo). El núcleo de $\delta_p: C^p(K, \mathbb{R}) \rightarrow C^{p+1}(K, \mathbb{R})$ se denomina \mathbb{R} -espacio de p -cociclos y se denota por $Z^p(K, \mathbb{R})$ ó Z^p .

Definición 2.35 (Cofrontera). La imagen de $\delta_{p-1}: C^{p-1}(K, \mathbb{R}) \rightarrow C^p(K, \mathbb{R})$ se denomina \mathbb{R} -espacio de p -cofronteras y se denota por $B^p(K, \mathbb{R})$ ó B^p .

Definición 2.36 (Cohomología). Se define como p -ésimo \mathbb{R} -espacio de cohomología de K y se denota por $H^p(K, \mathbb{R})$ ó H^p al espacio :

$$H^p(K, \mathbb{R}) := Z^p(K, \mathbb{R}) / B^p(K, \mathbb{R})$$

Ejemplo 2.37. Retomemos el complejo del Ejemplo 2.26. Tomamos las bases duales de las bases de cadenas definidas en el ejemplo anterior. Así, los espacios de cocadenas de K están generados por:

$$C^2 = \langle \sigma_1^*, \sigma_2^* \rangle \quad C^1 = \langle e_{ij}^* \rangle \quad C^0 = \langle a_k^* \rangle$$

Las aplicaciones cofrontera son las duales de las aplicaciones frontera definidas en el Ejemplo 2.26:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{0} & 0 \\ \dots & \longleftarrow & 0 & \xleftarrow{0} & C^2 & \xleftarrow{\delta_1} & C^1 & \xleftarrow{\delta_0} & C^0 & \xleftarrow{0} & 0 \end{array}$$

$$\delta_1(e_{ij}^*) = e_{ij}^* \circ \partial_2 \quad \delta_0(a_k^*) = a_k^* \circ \partial_1$$

$$M(\delta_1) = \left(\delta_1(\sigma_1^*) \mid \delta_1(\sigma_2^*) \right)_{2 \times 10} = (M(\partial_2))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 10}$$

$$M(\delta_0) = \left(\delta_0(e_{01}^*) \mid \dots \mid \delta_0(e_{56}^*) \right)_{10 \times 7} = (M(\partial_1))^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{10 \times 7}$$

Las matrices asociadas a las aplicaciones cofrontera δ_1 y δ_0 respecto a las bases duales que acabamos de calcular, son las traspuestas de las matrices calculadas en el Ejemplo 2.26:

Sabemos que la dimensión de la imagen de una aplicación coincide con el rango de su matriz asociada, y además que una matriz y su traspuesta tienen el mismo rango. Por tanto:

$$\begin{aligned} B^2 &:= \text{im } \delta_1 \quad \text{y} \quad \dim(\text{im } \delta_1) = \text{rg}(M(\delta_1)) = \text{rg}(M(\partial_2)) = 2 \\ B^1 &:= \text{im } \delta_0 \quad \text{y} \quad \dim(\text{im } \delta_0) = \text{rg}(M(\delta_0)) = \text{rg}(M(\partial_1)) = 6 \end{aligned}$$

y $B^p = 0$ para $p \neq 1, 2$. Para calcular la dimensión de los cociclos, usaremos el Teorema de rango-nulidad. Teniendo en cuenta que $C^2 \cong \mathbb{R}^2$, $C^1 \cong \mathbb{R}^{10}$ y $C^0 \cong \mathbb{R}^7$:

$$\begin{aligned} Z^2 &:= \ker \delta_2 = \ker 0 = C^2 \quad \text{y} \quad \dim(\ker \delta_2) = 2 \\ Z^1 &:= \ker \delta_1 \quad \text{y} \quad \dim(\ker \delta_1) = \dim(C^1) - \dim(\text{im } \delta_1) = 10 - 2 = 8 \\ Z^0 &:= \ker \delta_0 \quad \text{y} \quad \dim(\ker \delta_0) = \dim(C^0) - \dim(\text{im } \delta_0) = 7 - 6 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, los 0,1-espacios de cohomología de K vendrán dados por:

$$\begin{aligned} H^2(K) &:= Z^2(K) / B^2(K) \cong \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^2 \cong 0 \\ H^1(K) &:= Z^1(K) / B^1(K) \cong \mathbb{R}^8 / \mathbb{R}^6 \cong \mathbb{R}^2 \\ H^0(K) &:= Z^0(K) / B^0(K) \cong \mathbb{R} / 0 \cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

Fijándonos en el Ejemplo 2.26, se puede observar que son isomorfos con los espacios de homología del complejo.

Capítulo 3

Teoría de Hodge discreta

En la primera sección de este capítulo, describiremos en qué consiste la Teoría de Hodge discreta. Dedicaremos la segunda sección a vincular la cohomología simplicial y la Teoría de Hodge discreta a los grafos. En el Capítulo 1 ya estudiamos el nexo entre los grafos y los complejos simpliciales. Veremos ahora como las funciones y operadores sobre grafos son, respectivamente, los espacios de cocadenas y las aplicaciones frontera. Una vez trasladados los grafos al marco simplicial, aplicaremos la Teoría de Hodge estudiada en la primera sección sobre los grafos. Seguiremos las referencias [1, 5].

3.1. Teorema de descomposición de Hodge

3.1.1. Producto escalar, operador adjunto y ortogonalidad

Definición 3.1 (Producto escalar). Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Definimos un *producto escalar en V* , como una operación $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que es:

- Bilineal

$$\langle \alpha v + \beta v', v'' \rangle = \alpha \langle v, v'' \rangle + \beta \langle v', v'' \rangle$$

$$\langle v, \alpha v' + \beta v'' \rangle = \alpha \langle v, v' \rangle + \beta \langle v, v'' \rangle$$

- Simétrica

$$\langle v, v' \rangle = \langle v', v \rangle$$

- Definida positiva

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle v, v \rangle = 0 \text{ si y solo si } v = 0$$

para todo $v, v', v'' \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2 (Operador adjunto). Sea V, W espacios vectoriales con ciertos productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$ y sea $L: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Decimos que una aplicación lineal $L^\dagger: W \rightarrow V$ es el *operador adjunto de L* si:

$$\langle w, L(v) \rangle_W = \langle L^\dagger(w), v \rangle_V \quad \text{para cualesquiera } v \in V \text{ y } w \in W$$

Observación 3.3. El operador adjunto es una generalización de la aplicación dual.

Una vez escogido un producto escalar en un espacio vectorial, podemos hablar de la *ortogonalidad*, una generalización de la idea de perpendicularidad vista en geometría euclidiana.

Definición 3.4 (Vectores ortogonales). Sea V un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Decimos que dos vectores $v, v' \in V$ son *ortogonales* y denotamos por $v \perp v'$ si $\langle v, v' \rangle_V = 0$. Dos subespacios $U_1, U_2 \subseteq V$ son *ortogonales* si $u_1 \perp u_2$ para todo $u_1 \in U_1$ y todo $u_2 \in U_2$.

Definición 3.5 (Base ortonormal). Sea V un espacio vectorial de dimensión n , con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Decimos que una base de V $\{v_1, \dots, v_n\}$ es *ortonormal* si verifica:

$$\langle v_i, v_j \rangle_V = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Definición 3.6 (Complemento ortogonal). Sea V un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ y sea U un subespacio de V . Llamamos *complemento ortogonal de U* y denotamos por U^\perp al subespacio vectorial de V formado por el conjunto de vectores de V ortogonales a U :

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Definición 3.7 (Suma ortogonal). Sea V un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ y sean U_1, U_2 subespacios de V . Decimos que V es *suma ortogonal de U_1 y U_2* y denotamos $V = U_1 \oplus U_2$ si verifican que:

$$V = U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \quad \text{y} \quad U_1 \perp U_2$$

Proposición 3.8. Sea V un espacio vectorial con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ y sea U un subespacio de V . Entonces:

$$V = U \oplus U^\perp$$

3.1.2. Laplaciano y Descomposición de Hodge

Vamos a describir en el contexto discreto algunos conceptos de cálculo vectorial.

Sea K un complejo simplicial finito orientado, podemos equipar a cada uno de los espacios de cocadenas C^p con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Elegido este producto, definimos el operador adjunto δ_p^\dagger de la aplicación co-frontera $\delta_p: C^p \rightarrow C^{p+1}$:

$$\langle \delta_p(f), g \rangle_{p+1} = \langle f, \delta_p^\dagger(g) \rangle_{p+1} \text{ para todo } f \in C^p, g \in C^{p+1}$$

Definición 3.9 (Laplaciano combinatorio). Sea K un complejo simplicial finito orientado, cuyos espacios de cocadenas C^p están dotados con un producto escalar. El *Laplaciano combinatorio* p -dimensional es el operador $\Delta_p: C^p(K, \mathbb{R}) \rightarrow C^p(K, \mathbb{R})$ definido por :

$$\Delta_p = \delta_p^\dagger \circ \delta_p + \delta_{p-1} \circ \delta_{p-1}^\dagger$$

En particular:

- Para $p = 0$:

$$\Delta_0 = \delta_0^\dagger \circ \delta_0$$

- Para $p = 1$:

$$\Delta_1 = \delta_1^\dagger \circ \delta_1 + \delta_0 \circ \delta_0^\dagger$$

Lema 3.10. *La dimensión de $\ker(\Delta_p)$ coincide con $\beta_p(K)$, el p -ésimo número de Betti de K .*

Exponemos a continuación el teorema principal del trabajo, cuya demostración abordaremos en la Sección 3.1.3.

Teorema 3.11 (Teorema de descomposición de Hodge). *Sea K un complejo simplicial finito orientado, equipamos a cada uno de los espacios de cocadenas C^p con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. El espacio $C^p(K, \mathbb{R})$ admite una descomposición ortogonal:*

$$C^p(K, \mathbb{R}) = \text{im}(\delta_p^\dagger) \oplus \ker(\Delta_p) \oplus \text{im}(\delta_{p-1})$$

Aún más:

$$\ker(\Delta_p) = \ker(\delta_p) \cap \ker(\delta_{p-1}^\dagger).$$

3.1.3. Demostración del Teorema de descomposición de Hodge

Para facilitar el seguimiento de la demostración, trabajaremos con las matrices asociadas a las aplicaciones δ_p y δ_{p-1} :

Una cocadena de K , está determinada de forma unívoca por la colección de las imágenes de los p -símplices de K . Por lo tanto:

$$C^{p+1} = \mathbb{R}^m \quad C^p = \mathbb{R}^n \quad C^{p-1} = \mathbb{R}^s$$

donde m, n, s son el número de $p+1, p, p-1$ símlices respectivamente.

Las matrices asociadas a los operadores adjuntos δ_p^\dagger y δ_{p-1}^\dagger las denotaremos por:

$$A^\dagger = M(\delta_p^\dagger) \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad B^\dagger = M(\delta_{p-1}^\dagger) \in \mathbb{R}^{s \times n}$$

Notación 3.12. Por abuso del lenguaje, si M es la matriz asociada a la aplicación lineal f , usaremos $\text{im}(M)$ y $\text{ker}(M)$ para referirnos a los subespacios imagen y núcleo de f .

Tras estas aclaraciones de notación, comencemos la demostración.

El Lema 2.32 nos decía que $\delta_p \circ \delta_{p-1} = 0$. Así, en términos de matrices tenemos que :

$$AB = 0$$

o equivalentemente $\text{im}(B) \subseteq \text{ker}(A)$. El espacio de cohomología H^p viene dado por:

$$\text{ker}(A) / \text{im}(B)$$

Un elemento de $\text{ker}(A) / \text{im}(B)$ es una clase de equivalencia, es decir, un conjunto de vectores

$$x + \text{im}(B) := \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \text{im}(B)\}$$

para cierto $x \in \text{ker}(A)$. Se podría prescindir de las clases de equivalencia si, en cada clase, fuésemos capaces escoger de manera única un elemento $x_H \in x + \text{im}(B)$ que representase a todo el conjunto. La manera habitual de proceder, es escoger x_H de tal manera que sea ortogonal a cualquier otro vector de $\text{im}(B)$.

Así, teniendo en cuenta que $\text{im}(B)^\perp = \text{ker}(B^\dagger)$ (véase Lema 3.13), se selecciona un $x_H \in \text{ker}(A) \cap \text{ker}(B^\dagger)$. El elemento x_H se denomina *representante armónico* de la clase de cohomología $x + \text{im}(B)$.

La aplicación que lleva la clase de cohomología $x + \text{im}(B)$ a su único representante armónico x_H define un isomorfismo de espacios vectoriales (véase 3.14) :

$$\text{ker}(A) / \text{im}(B) \cong \text{ker}(A) \cap \text{ker}(B^\dagger) \quad (3.1)$$

Esto nos permite redefinir el espacio de cohomología con respecto A y B como un subespacio $\text{ker}(A) \cap \text{ker}(B^\dagger)$, y una clase de homología puede ser considerada como un vector, su representante armónico.

Justifiquemos la elección del nombre *armónico* para los elementos de $\text{ker}(A) \cap \text{ker}(B^\dagger)$. En la sección anterior, definimos el operador Laplaciano combinatorio como $\Delta_p = \delta_p^\dagger \circ \delta_p + \delta_{p-1} \circ \delta_{p-1}^\dagger$. En términos de matrices asociadas:

$$A^\dagger A + BB^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Es sencillo comprobar que (veáse Teorema 3.14):

$$\ker(A^\dagger A + BB^\dagger) = \ker(A) \cap \ker(B^\dagger) \quad (3.2)$$

Así, un representante armónico $x_H \in \ker(A) \cap \ker(B^\dagger)$ es una solución de la *ecuación de Laplace*:

$$(A^\dagger A + BB^\dagger)x = 0$$

cuyas soluciones son habitualmente referidas como funciones *armónicas*.

A través de los resultados 3.1 e 3.2, observamos que el espacio de cohomología con respecto a A y B también se concibe como el núcleo del operador Laplaciano combinatorio:

$$\ker(A) / \text{im}(B) \cong \ker(A^\dagger A + BB^\dagger) \quad (3.3)$$

El Lema 3.10 es consecuencia directa de esta relación 3.3, ya que la dimensiones de los espacios de homología coinciden con las dimensiones de sus duales, los espacios de cohomología.

Además, la Relación 3.3 es la que nos permite descomponer ortogonalmente el espacio \mathbb{R}^n en la llamada **Descomposición de Hodge** 3.11:

$$\mathbb{R}^n = \text{im}(A^\dagger) \oplus \ker(A^\dagger A + BB^\dagger) \oplus \text{im}(B)$$

En otras palabras, cuando $AB = 0$, cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se puede descomponer de manera única como:

$$x = A^\dagger w + x_H + Bv, \quad \langle A^\dagger w, x_H \rangle = \langle x_H, Bv \rangle = \langle A^\dagger w, Bv \rangle = 0$$

para ciertos $v \in \mathbb{R}^p$ y $w \in \mathbb{R}^p$.

Dada una matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, por el Lema 3.13 sabemos que:

$$\mathbb{R}^n = \ker(C) \oplus \text{im}(C^\dagger), \quad \mathbb{R}^m = \ker(C^\dagger) \oplus \text{im}(C)$$

Combinando esta y la descomposición de Hodge 3.1 obtenemos:

$$\mathbb{R}^n = \text{im}(A^\dagger) \oplus \overbrace{\ker(A^\dagger A + BB^\dagger)}^{\ker(B^\dagger)} \oplus \text{im}(B)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\ker(A)}$$

La intersección de $\ker(A)$ y $\ker(B^\dagger)$ coincide con $\ker(A^\dagger A + BB^\dagger)$, confirmando la Expresión 3.2

En definitiva, partiendo de la relación $AB = 0$, hemos visto tres maneras de definir el espacio de cohomología con respecto a A y a B :

$$\ker(A) / \text{im}(B), \quad \ker(A) \cap \ker(B^\dagger), \quad \ker(A^\dagger A + BB^\dagger).$$

Demostremos ahora todos los resultados que hemos usado en este desarrollo:

Lema 3.13. *Sea $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces:*

1. $\ker(C) = \ker(C^\dagger C)$
2. $\text{im}(C^\dagger) = \text{im}(C^\dagger C)$
3. $\ker(C^\dagger) = \text{im}(C)^\perp$
4. $\text{im}(C^\dagger) = \ker(C)^\perp$
5. $\mathbb{R}^n = \ker(C) \oplus \text{im}(C^\dagger)$

Demostración. 1. Si $x \in \ker(C)$, entonces $Cx = 0$. Por tanto, $C^\dagger Cx = 0$, es decir $x \in \ker(C^\dagger C)$. Por otra parte, si $x \in \ker(C^\dagger C)$ tenemos que:

$$\|Cx\|^2 = (Cx)^\dagger Cx = x^\dagger C^\dagger Cx = 0$$

Por ser el producto escalar definido positivo, $Cx = 0$, equivalentemente $x \in \ker(C)$.

2. Si $y \in \text{im}(C^\dagger C)$, entonces $y = C^\dagger Cx = C^\dagger(Cx)$. Por tanto, $y \in \text{im}(C^\dagger)$. El *Teorema de rango-nullidad*, nos dice que $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\ker(C)) + \dim(\text{im}(C))$. Así, por el apartado 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} \dim(\text{im}(C^\dagger C)) &= n - \dim(\ker(C^\dagger C)) = n - \dim(\ker(C)) \\ &= \dim(\text{im}(C)) = \dim(\text{im}(C^\dagger)) \end{aligned}$$

De $\text{im}(C^\dagger C) \subseteq \text{im}(C^\dagger)$, se sigue el resultado.

3. Si $x \in \ker(C^\dagger)$, entonces $\langle x, Cy \rangle = \langle C^\dagger x, y \rangle = 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, $x \in \text{im}(C)^\perp$. Por otro lado, si $x \in \text{im}(C)^\perp$, entonces $0 = \langle x, Cy \rangle = \langle C^\dagger x, y \rangle$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$. Así, $C^\dagger x = 0$, equivalentemente $x \in \ker(C^\dagger)$.
4. Por 3, $\text{im}(C^\dagger)^\perp = \ker(C^\dagger C^\dagger) = \ker(C)$ de lo que se sigue el resultado.
5. Se obtiene directamente a partir los resultados anteriores.

□

Teorema 3.14. *Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ dos matrices tal que $AB = 0$.*

1. $\ker(A^\dagger A + BB^\dagger) = \ker(A) \cap \ker(B^\dagger)$
2. $\ker(A) / \text{im}(B) \cong \ker(A) \cap \ker(B^\dagger)$

Demostración. 1. Recordemos que $\text{im}(B) \subseteq \ker(A)$ pues $AB = 0$ y $\text{im}(A^\dagger) \subseteq \ker(B^\dagger)$ pues $B^\dagger A^\dagger = 0$. Para ver la igualdad, veamos las inclusiones en ambos sentidos.

(“ \supseteq ”) Tomamos $x \in \ker(A) \cap \ker(B^\dagger)$. Entonces, por el resultado 1 de Lema 3.13:

$$x \in \ker(A) = \ker(A^\dagger A) \quad \text{y} \quad x \in \ker(B^\dagger) = \ker(BB^\dagger).$$

Por tanto,

$$0 = A^\dagger Ax + BB^\dagger x = (A^\dagger A + BB^\dagger)x.$$

Es decir, $x \in \ker(A^\dagger A + BB^\dagger)$.

(“ \subseteq ”) Tomamos $x \in \ker(A^\dagger A + BB^\dagger)$. Entonces:

$$(A^\dagger A + BB^\dagger)x = 0 \implies A^\dagger Ax = -BB^\dagger x.$$

- Si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por la matriz A :

$$A(A^\dagger A)x = AA^\dagger Ax = -ABB^\dagger x = 0$$

pues $AB = 0$. Así, $A^\dagger Ax \in \ker(A)$.

Sabemos además que $A^\dagger Ax \in \text{im}(A^\dagger) = \ker(A)^\perp$, por el resultado 4 de Lema 3.13. Necesariamente $A^\dagger Ax = 0$. Por tanto aplicando nuevamente el resultado 1 de Lema 3.13, tenemos que $x \in \ker(A^\dagger A) = \ker(A)$.

- Si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por la matriz B^\dagger

$$0 = B^\dagger A^\dagger Ax = -B^\dagger BB^\dagger x$$

pues $B^\dagger A^\dagger = 0$. Así, $BB^\dagger x \in \ker(B^\dagger)$.

Sabemos además que $BB^\dagger x \in \text{im}(B) = \ker(B^\dagger)^\perp$ por el resultado 3 de Lema 3.13. Necesariamente $BB^\dagger x = 0$. Por tanto aplicando nuevamente el resultado 1 de Lema 3.13, tenemos que $x \in \ker(BB^\dagger) = \ker(B^\dagger)$.

En conclusión, $x \in \ker(A) \cap \ker(B^\dagger)$.

2. Sea $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{im}(B)^\perp$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n sobre el complemento ortogonal de $\text{im}(B)$. Entonces, cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ admite una única descomposición en dos componentes mutuamente ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \text{im}(B)^\perp \oplus \text{im}(B) \\ x &= \pi(x) + (1 - \pi)(x). \end{aligned}$$

Sea π_A la restricción de π al subespacio $\ker(A)$. Entonces, cualquier elemento $x \in \ker(A)$ admite una única descomposición en dos componentes mutuamente ortogonales

$$\begin{aligned}\ker(A) &= (\ker(A) \cap \operatorname{im}(B)^\perp) \oplus \operatorname{im}(B) \\ x &= \pi_A(x) + (1 - \pi_A)(x).\end{aligned}$$

teniendo presente que $\ker(A) \cap \operatorname{im}(B) = \operatorname{im}(B)$ pues $\operatorname{im}(B) \subseteq \ker(A)$.

Por ser π una aplicación sobreyectiva, su restricción al subespacio $\ker(A)$ también lo será. Así, $\operatorname{im}(\pi_A) = \ker(A) \cap \operatorname{im}(B)^\perp$. Además, para cualquier $x \in \ker(A)$:

$$\pi_A = 0 \iff \text{la componente de } x \text{ en } \operatorname{im}(B)^\perp \text{ es cero} \iff x \in \operatorname{im}(B).$$

Así, $\ker(\pi_A) = \operatorname{im}(B)$. Teniendo en cuenta estas dos igualdades, el primer teorema de isomorfía nos brinda el resultado:

$$\ker(A) / \ker(\pi_A) \cong \operatorname{im}(\pi_A) = \ker(A) \cap \operatorname{im}(B)^\perp.$$

ya que por la igualdad 3 del Lema 3.13 sabemos que $\operatorname{im}(B)^\perp = \ker(B^\dagger)$. \square

Por último, demosetremos el resultado principal de la sección, el **Teorema de descomposición de Hodge**. Queremos ver que:

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{im}(A^\dagger) \oplus \ker(A^\dagger A + BB^\dagger) \oplus \operatorname{im}(B).$$

Por el resultado 5 del Lema 3.13, podemos descomponer \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \ker(B^\dagger) \oplus \operatorname{im}(B).$$

Aplicando de nuevo 5 tenemos que:

$$\begin{aligned}\ker(B^\dagger) &= \mathbb{R}^n \cap \ker(B^\dagger) = [\ker(A) \oplus \operatorname{im}(A^\dagger)] \cap \ker(B^\dagger) \\ &= [\ker(A) \cap \ker(B^\dagger)] \oplus [\operatorname{im}(A^\dagger) \cap \ker(B^\dagger)] \\ &= \ker(A^\dagger A + BB^\dagger) \oplus \operatorname{im}(A^\dagger)\end{aligned}$$

donde la última igualdad la tenemos por el Teorema 3.14 y porque $B^\dagger A^\dagger = 0$.

3.2. Descomposición de Hodge sobre grafos

3.2.1. Funciones sobre grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$, podemos definir funciones sobre sus vértices, aristas y tríadas. Además, pediremos a las funciones definidas sobre estos dos últimos conjuntos que verifiquen la propiedad de “alternancia”.

Definición 3.15 (Función potencial). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Definimos una *función potencial* como cualquier función real sobre sus vértices, es decir, $s: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.16 (Flujo de aristas). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Definimos un *flujo de aristas* como cualquier función real “alternada” sobre sus aristas, es decir, $X: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donde:

$$X(i, j) = \begin{cases} -X(j, i) & \text{si } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

Definición 3.17 (Flujo triangular). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. Definimos un *flujo triangular* como cualquier función real “alternada” sobre sus tríadas, es decir, $\phi: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donde:

$$\phi(i, j, k) = \begin{cases} \phi(j, k, i) = \phi(k, i, j) = -\phi(j, i, k) = -\phi(i, k, j) = -\phi(k, j, i) & \text{si } \{i, j, k\} \in T(E) \\ 0 & \text{si } \{i, j, k\} \notin T(E). \end{cases}$$

3.2.2. Relación cocadenas y funciones sobre grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado y sea $K_G \equiv K^3(G) = (V, E, T(E))$ su 3-complejo de cliques.

Recordemos que $C^0(K_G, \mathbb{R})$ es el espacio de aplicaciones lineales que llevan las 0-cadenas de K_G en \mathbb{R} . Por otra parte, el espacio de 0-cadenas es por definición el espacio vectorial generado por los 0-símplices, en este caso, los vértices. Dado que una aplicación lineal viene determinado por los elementos de la base, es inmediato ver que una 0-cocadena viene determinado por una función potencial. Y, del mismo modo, una función potencial determina una cocadena.

Por un razonamiento análogo, deducimos la correspondencia que existe entre una 1-cocadena y un flujo de aristas y entre una 2-cocadena y un flujo triangular. En conclusión, tenemos que:

1. $C^0(K_G, \mathbb{R})$ es el espacio de funciones potenciales.

$$s: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad s^*: C_0(K_G) \rightarrow \mathbb{R}$$

2. $C^1(K_G, \mathbb{R})$ es el espacio de flujos de aristas.

$$X: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad X^*: C_1(K_G) \rightarrow \mathbb{R}$$

3. $C^2(K_G, \mathbb{R})$ es el espacio de flujos triangulares.

$$\phi: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi^*: C_2(K_G) \rightarrow \mathbb{R}$$

Observación 3.18. Los grafos que manejamos en este trabajo son grafos sin pesos ni orientación. Un grafo orientado, es simplemente uno equipado con la elección de un flujo de aristas X . Así, una arista no orientada $\{i, j\}$ se convierte en orientada $[(i, j)$ si $X(i, j) > 0$ ó (j, i) si $X(i, j) < 0]$ y la magnitud de $X(i, j)$ se puede tomar como el peso de esa arista en el grafo orientado. Por decirlo de otra forma, C^1 reúne todos los grafos orientados con peso con la misma estructura subyacente de grafo no orientado.

3.2.3. Operadores sobre grafos

Dado un grafo $G = (V, E)$, podemos definir una serie de operadores que actúan sobre las funciones definidas en el apartado anterior 3.2.1. Los operadores que expondremos consisten en la versión discreta de los operadores continuos del cálculo vectorial ya conocidos: gradiente, rotacional, divergencia y laplaciano.

Definición 3.19 (Gradiente combinatorio). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. El *gradiente combinatorio* es el operador $grad$ que lleva una función potencial sobre los vértices $s : V \rightarrow \mathbb{R}$ a un flujo de aristas mediante $grad(s) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$(grad(s))(i, j) = \begin{cases} s(j) - s(i) & \text{si } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

Ejemplo 3.20. Consideremos el grafo de la Figura 3.3:

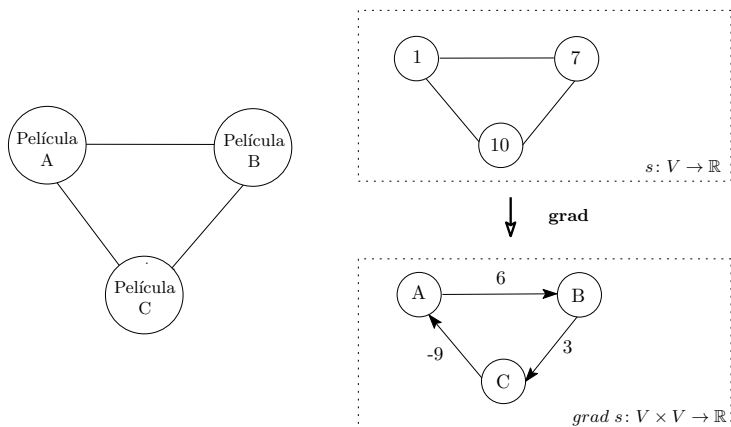


Figura 3.3: Grafo representando la valoración de las películas.

Los vértices representan tres películas A , B y C , que han sido valoradas por un crítico cinematográfico con una nota del 0 al 10. Podemos definir una función potencial s sobre los vértices, asignándole a cada película su nota:

$$s(A) = 1 \quad s(B) = 7 \quad s(C) = 10.$$

En ese caso, el grad(s) asignará a cada arista el grado de preferencia del crítico de una película sobre otra:

$$X(A, B) = 6 \quad X(B, C) = 3 \quad X(C, A) = -9$$

La Figura 3.4 muestra como la función potencial de las notas ordena las películas en un ranking y como la flujo mide cuánto varía la puntuación entre las películas. Además, observamos que si partimos de la película C, si “recorremos todas las escaleras” para regresar a esa película, debemos subir y bajar lo mismo.

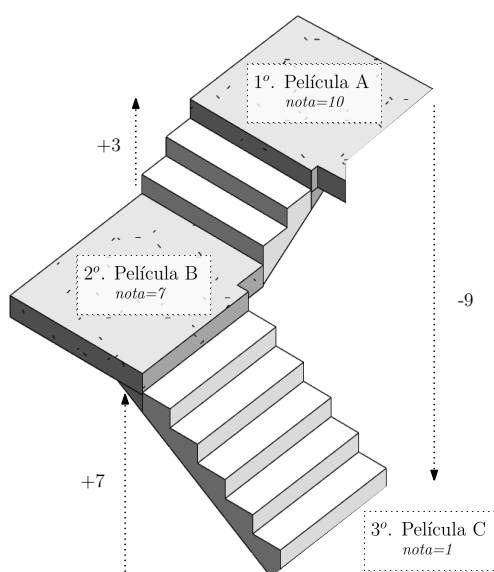


Figura 3.4: Representación simbólica de correspondencia entre función potencial y flujo gradiente.

Definición 3.21 (Rotacional combinatorio). Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado. El *rotacional combinatorio* es el operador rot que lleva un flujo de aristas $X: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a un flujo triangular mediante $\text{rot}(X): V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\text{rot}(X)(i, j, k) = \begin{cases} X(i, j) + X(j, k) + X(k, i) & \text{si } \{i, j, k\} \in T(E) \\ 0 & \text{si } \{i, j, k\} \notin T(E). \end{cases}$$

Ejemplo 3.22. Este ejemplo pretende advertir sobre una conclusión errónea a la que se puede llegar sobre el rotacional combinatorio, consecuencia de la idea intuitiva de rotacional en el caso continuo.

Consideremos los flujos de aristas sobre los grafos G_3 y G_4 de la Figura 3.5. Veamos cuánto valen sus rotacionales combinatorios.

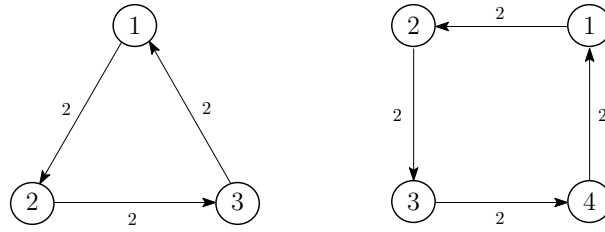


Figura 3.5: Flujos de aristas sobre G_3 (izquierda) y G_4 (derecha).

Fijándonos en la imagen, vemos que el flujo sobre el grafo G_3 viene dado por:

$$X(1, 2) = X(2, 3) = X(3, 1) = 2 = -X(2, 1) = -X(3, 2) = -X(1, 3).$$

Así, el rotacional evaluado en $\{1, 2, 3\} \in T(G_3)$ es por definición:

$$\text{rot}(X)(1, 2, 3) = X(1, 2) + X(2, 3) + X(3, 1) = 6.$$

En el caso de G_4 , en una primera impresión podríamos erróneamente llegar a la conclusión de que su rotacional es $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Sin embargo, el grafo G_4 no posee triadas, es decir, $T(G_4) = \emptyset$. Por tanto, cualquier flujo de aristas que se considere sobre ese grafo tendrá rotacional 0.

Definición 3.23 (Divergencia combinatoria). Sea $G = (V, E)$ un grafo no orientado. La *divergencia combinatoria* es el operador div que lleva un flujo de aristas $X : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a una función potencial $\text{div}(X) : V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\text{div}(X)(i) = \sum_{j \text{ tal que } \{i,j\} \in E} X(i, j) \quad \text{para todo } i \in V.$$

3.2.4. Relación aplicaciones cofrontera y operadores grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado y sea $K_G \equiv K^3(G) = (V, E, T(E))$ su 3-complejo de cliques. Entonces:

1. δ_0 es el operador gradiente combinatorio.

$$\text{grad}(s)(i, j) = \delta_0([a_i, a_j]^*) = s(j) - s(i).$$

2. δ_1 es el operador rotacional combinatorio.

$$\text{rot}(X)(i, j, k) = \delta_1([a_i, a_j, a_k]^*) = X(i, j) + X(j, k) + X(k, i).$$

3. $-\delta_0^\dagger$ es el operador divergencia combinatorio.

$$\text{div}(X)(i) = -\delta_0^\dagger([a_i]^*) = \sum_{j \text{ tal que } \{i,j\} \in E} X(i, j).$$

si tomamos el adjunto con respecto al producto escalar sobre C^1

$$\langle f, g \rangle_1 = \sum_{[a_i, a_j] \in C_1(K)} w_{ij} f([a_i, a_j]) g([a_i, a_j]) \quad \text{para } f, g \in C^1. \quad (3.4)$$

donde los pesos w_{ij} están dados por cualquier valor positivo invariante bajo permutaciones arbitrarias de los índices.

Partiendo de estas relaciones, tenemos también el operador laplaciano sobre el grafo:

1. $\Delta_0 = -\text{div} \circ \text{grad}$.
2. $\Delta_1 = \text{rot}^\dagger \circ \text{rot} - \text{grad} \circ \div$.

3.2.5. Descomposición de Hodge sobre grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo finito no orientado y sea $K_G \equiv K^3(G) = (V, E, T(E))$ su 3-complejo de cliques. El siguiente esquema resume las relaciones establecidas en las secciones anteriores:

$$\begin{array}{ccccc}
 C^0(K_G, \mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\delta_0^\dagger} \end{array} & C^1(K_G, \mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\delta_1^\dagger} \end{array} & C^2(K_G, \mathbb{R}) \\
 \\
 \begin{array}{c} \text{Función potencial} \\ \mathbf{s} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{grad}} \\ \xleftarrow{-\text{div} \equiv \text{grad}^\dagger} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Flujo de aristas} \\ \mathbf{X} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{rot}} \\ \xleftarrow{\text{rot}^\dagger} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Flujo triangular} \\ \phi \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.6: Representación de la relación entre flujos y cohomología.

Observación 3.24. Como consecuencia de esta equivalencia y del Lema 2.32, obtenemos sobre los operadores combinatorios la conocida identidad del cálculo vectorial:

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0.$$

Es sencillo constatar esta identidad sobre el Ejemplo 3.20; a lo largo de una tríada se anula el flujo de aristas.

A continuación enunciamos el Teorema de descomposición de Hodge para descomponer los flujos de aristas X :

Teorema 3.25 (Teorema de descomposición de Hodge). *Sea $G = (V, E)$ un grafo no orientado y sea K_G su 3-complejo de cliques. El espacio de flujo de aristas de G , es decir, $C^1(K_G, \mathbb{R})$ admite una descomposición ortogonal:*

$$C^1(K_G, \mathbb{R}) = \text{im}(\delta_1^\dagger) \oplus \ker(\Delta_1) \oplus \text{im}(\delta_0) = \overbrace{\text{im}(\text{rot}^\dagger) \oplus \ker(\Delta_1)}^{\ker(\text{div})} \oplus \underbrace{\text{im}(\text{grad})}_{\ker(\text{rot})}$$

Fijándonos en la relación:

$$\ker(\Delta_1) = \ker(\delta_1) \cap \ker(\delta_0^\dagger) = \ker(\text{rot}) \cap \ker(\text{div}).$$

Denominaremos por:

- **Flujo rotacional:** $X \in \text{im}(\text{rot}^\dagger)$
- **Flujo armónico:** $X \in \ker(\Delta_1)$
- **Flujo gradiente:** $X \in \text{im}(\text{grad})$

Descubramos una de las informaciones que nos proporciona Hodge sobre los grafos. En el Ejemplo 3.22 vimos como a partir de una función potencial sobre los vértices $s : V \rightarrow \mathbb{R}$ éramos capaces de obtener un flujo de aristas $X = \text{grad } s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. A continuación estudiamos qué condiciones se deben dar para que partiendo de un flujo de aristas X , podamos construir una función potencial sobre los vértices s coherente con el flujo, es decir, tal que $X = \text{grad}(s)$.

Por la Observación 3.24, sabemos que necesariamente el flujo X no puede tener rotacional.

Pero, ¿es cierto que si $X \in C^1(K_G, \mathbb{R})$ no tiene rotacional, X es un gradiente?

Ejemplo 3.26. Retomemos el grafo G_4 de la Figura 3.5 del Ejemplo 3.22. Veamos que el flujo X dado sobre G_4 , proporciona un contraejemplo para la pregunta anterior. Es decir, consiste justamente en un ejemplo de flujo sin rotacional que no es gradiente de una función potencial.

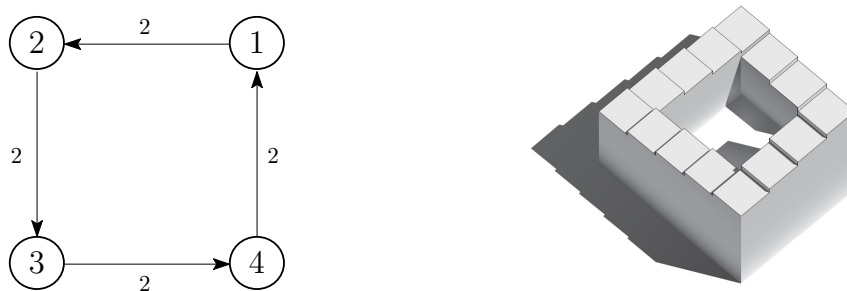


Figura 3.8: En la izquierda, flujo sobre G_4 . La imagen de la derecha extraída de [1].

En el Ejemplo 3.22 ya indicamos que el rotacional era 0, pues $T(G_4) = \emptyset$. Comprobemos que no es un gradiente por reducción al absurdo. Supongamos que $X = \text{grad } s$, entonces:

$$s(2) - s(1) = 2 \quad s(3) - s(2) = 2 \quad s(4) - s(3) = 2 \quad s(1) - s(4) = 2$$

Sumando las ecuaciones llegamos a una contradicción “ $0 = 8$ ”. La imagen de la derecha de la Figura 3.8 trata de simbolizar que no es posible definir una función potencial sobre los vértices, contrastando con la Figura 3.4.

Con este ejemplo vemos que la respuesta a la pregunta planteada anteriormente es, en general, no. El siguiente teorema señala para qué familia de grafos sí se verifica.

Teorema 3.27. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no orientado y sea $K_G = (V, E, T(E))$ su 3-complejo de cliques. Si K_G no contiene agujeros 1-dimensionales, entonces cualquier flujo de aristas sobre G sin rotacional es un flujo gradiente.*

En otras palabras, si $\beta_1(K_G) = 0$, entonces para cualquier flujo $X \in C^1(K_G, \mathbb{R})$ tal que

$$(\text{rot } X)(i, j, k) = 0 \text{ para toda } \{i, j, k\} \in T(E)$$

existe $s \in C^0(K_G, \mathbb{R})$ de manera que

$$X = \text{grad } s$$

Demostración. Por el Teorema de descomposición de Hodge 3.25 sabemos que

$$\ker(\text{rot}) = \ker(\Delta_1) \cap \text{im}(\text{grad})$$

Además, el Lema 3.10, nos dice que $\beta_1(K_G) = \dim \ker(\Delta_1)$. Así, por hipótesis $\ker(\Delta_1) = 0$. Necesariamente, cualquier $X \in \ker(\text{rot})$ pertenece a $\text{im}(\text{grad})$. \square

Observación 3.28. El Teorema 3.27 es la versión discreta del resultado de cálculo vectorial:

“Un campo de vectores irrotacional sobre un dominio simplemente conexo
es gradiente de una función potencial.”

Para más detalles, se puede consultar la referencia [7, p. 10].

Ejemplo 3.29. Veamos que el grafo G_4 del Ejemplo 3.26 tiene un agujero 1-dimensional y no está bajo las hipótesis del Teorema. Por esto, pese a que el flujo X es irrotacional, no es un flujo gradiente.

La imagen de la derecha de la Figura 3.9 se corresponde con $K_{G_4} \equiv K^3(G_4)$, el 3-complejo de cliques de G_4 . Es un complejo simplicial de dimensión 1, formado por cuatro 0-símplices y cuatro 1-símplices. Es sencillo verificar que el 1-número de Betti de K_{G_4} es 1. En la Figura 3.9 se observa que, como “no está relleno”, es un agujero.

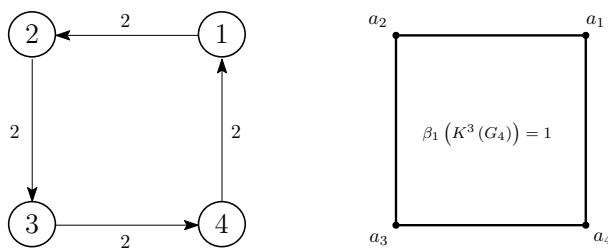


Figura 3.9: A la izquierda el grafo G_4 , acompañado de un flujo de aristas. A la derecha su 3-complejo de cliques

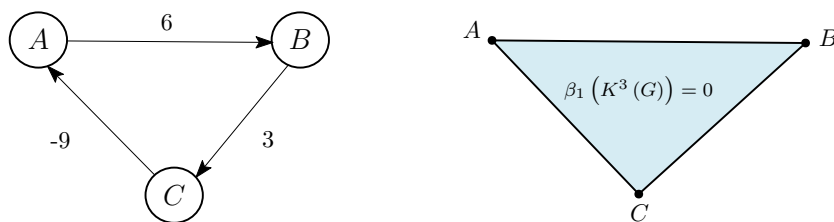


Figura 3.10: A la izquierda el grafo G , acompañado de un flujo de aristas. A la derecha su 3-complejo de cliques

Ejemplo 3.30. Para contrastar con este caso, recuperemos el grafo G de la Figura 3.3 del Ejemplo 3.20. Veamos que se verifica el Teorema 3.27 con el flujo $grad(s)$ que, por definición, sabemos que es un flujo gradiente.

Trivialmente es un flujo sin rotacional. La imagen de la derecha de la Figura 3.10 se corresponde con $K_G \equiv K^3(G)$, el 3-complejo de cliques de G . Es un complejo simplicial de dimensión 2, formada por un 2-símplice y todas sus caras. Es sencillo verificar que el 1-número de Betti de K_G es 0. En la Figura 3.10 se observa que, como “está relleno”, no es un agujero.

Así, el Teorema 3.27 funciona; un flujo sin rotacional sobre un grafo con $\beta_1(K_G) = 0$ es un flujo gradiente.

Capítulo 4

Aplicación sobre rankings

Como ya mencionamos en la Introducción, el desafío central de este trabajo es determinar, a partir de un conjunto de datos, un ranking global de una serie de alternativas calificadas por un grupo de votantes. El objetivo es doble: queremos deducir un ranking global de las alternativas, y además, examinar la fiabilidad de este ranking y cuáles son las obstrucciones a su validez.

En este capítulo expondremos la aplicación de la teoría desarrollada previamente a los rankings. Principalmente, asignaremos a los objetos matemáticos descritos hasta este momento una acepción en el contexto de rankings. Para ello seguiremos el artículo de investigación [5].

4.1. Grafo de comparación por pares

En orden a estudiar la posibilidad de establecer rankings globales sobre un conjunto de alternativas comenzaremos por construir un *grafo de comparación por pares* G como sigue. Supongamos que $V = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de alternativas que queremos ordenar y $\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de votantes.

El primer problema al que nos enfrentamos para la construcción de un grafo de comparación por pares es la incompletitud de los datos, es decir, que cada votante $\alpha \in \Lambda$ no haya valorado la totalidad de las alternativas. Para solucionarlo, ignoramos los valores perdidos y, en las opciones valoradas por cada individuo, fabricamos un *ranking de comparación por pares*; de cada par $\{i, j\}$ de las alternativas, revelamos que opción prefiere el individuo α .

Esta preferencia se infiere de la tabla de datos $A = [a_{\alpha i}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Por ejemplo, si un votante ha asignado 4 estrellas a la película i y 2 a la película j , podemos deducir la preferencia de la película i sobre la j .

Para cada votante $\alpha \in \Lambda$, el *ranking de comparación por pares* puede traducirse en una matriz Y^α que mida este “grado de preferencia” de una alternativa sobre la otra. Si Y_{ij}^α es el grado por el que se escoge la alternativa i sobre la j , es natural suponer que $Y_{ji}^\alpha = -Y_{ij}^\alpha$ es el grado por el que se rechaza j sobre i . Existen distintas alternativas para construir esta matriz, por ejemplo:

1. Diferencia de valoraciones: $Y_{ij}^\alpha = a_{\alpha j} - a_{\alpha i}$
2. Proporción de valoraciones: $Y_{ij}^\alpha = \log(a_{\alpha j}/a_{\alpha i})$
3. Comparación binaria de valoraciones: $Y_{ij}^\alpha = \text{sign}(a_{\alpha j} - a_{\alpha i})$

Para extender la matriz al conjunto global de alternativas, le asignamos el valor 0 si el votante α no comparó las alternativas i y j , entonces $Y_{ij}^\alpha = 0$. La ventaja de este enfoque (comparación por pares) es que desaparecen los valores perdidos de la tabla inicial. Nótese que no sería correcto asignar el valor 0 en la tabla a los elementos que el votante no haya comparado.

Volvamos sobre el Cuadro 1 presentado en la Introducción: Fijémonos en las estrellas otorgadas

| | Película A | Película B | Película C | Película D | Película E |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Crítico 1 | 5 | 2 | 4.5 | - | - |
| Crítico 2 | 3.5 | - | - | 3 | - |
| Crítico 3 | - | 2 | - | - | 5 |
| Crítico 4 | - | - | - | 2.5 | 4 |
| Crítico 5 | 4 | - | - | - | - |

Cuadro 4.1: Tabla con estrellas otorgadas por cinco críticos de cine a cinco películas.

por el crítico 1 en la tabla de datos del Cuadro 4.1. Vemos como su orden de preferencia de películas es $A > C > B$ y no conocemos su opinión sobre las películas D, E . Exhibimos las diferentes construcciones de las matrices $Y^{\text{Crítico 1}}$, que miden el grado de preferencia del Crítico 1:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Media aritmética} & \text{Proporción} & \text{Comparación binaria} \\
 \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -3 & -0,5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \log(2/5) & \log(4.5/5) & 0 & 0 \\ \log(5/2) & 0 & \log(4.5/2) & 0 & 0 \\ \log(4.5/5) & \log(2/4.5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Todas ellas son antisimétricas de dimensión 5×5 , ya que existen 5 alternativas.

Las preferencias individuales de cada votante α se agregan en una única matriz de preferencia $Y = [y_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que engloba las opiniones de todos los votantes. Sus elementos Y_{ij} , se consiguen de diferentes modos:

1. Media aritmética: $Y_{ij} = \frac{\sum_{\alpha} (a_{\alpha j} - a_{\alpha i})}{w_{ij}}$ tal que $a_{\alpha i}, a_{\alpha j}$ existen.
2. Media geométrica: $Y_{ij} = \frac{\sum_{\alpha} (\log(a_{\alpha j}) - \log(a_{\alpha i}))}{w_{ij}}$ tal que $a_{\alpha i}, a_{\alpha j}$ existen.
3. Comparación binaria¹: $Y_{ij} = \frac{\text{card}(\{\alpha \mid a_{\alpha j} > a_{\alpha i}\}) - \text{card}(\{\alpha \mid a_{\alpha j} < a_{\alpha i}\})}{w_{ij}}$ tal que $a_{\alpha i}, a_{\alpha j}$ existen.

Donde w_{ij} denota el número de votantes total que han valorado las dos alternativas i, j :

$$w_{ij} = \text{card}(\{\alpha \mid a_{\alpha i}, a_{\alpha j} \text{ existen}\}).$$

Sin embargo, estas construcciones no tienen en cuenta el desequilibrio en el número de votantes. Imaginémonos que se da la siguiente situación: una película A es votada por una sola persona con 5 estrellas, y una película B la votan 100 personas, 99 de ellas con 5 estrellas y 1 con 2 estrellas. Si hacemos una media, llegaremos a la conclusión errónea de que la película A es mejor que la B . Para resolver esto, tendremos en cuenta más adelante la función *función peso* $w : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ descrita arriba, donde almacenamos el número de votantes que valoran cada par de alternativas.

A partir de esta matriz, surge de manera natural la construcción un grafo no orientado sin pesos G , cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas viene dado por:

$$E = \left\{ \{i, j\} \subseteq \binom{V}{2} \mid \sum_{\alpha} |Y_{ij}^{\alpha}| > 0 \right\}$$

i.e, el conjunto de pares de alternativas $\{i, j\}$ que han sido comparadas. Ilustramos la construcción del grafo de comparación por pares correspondiente al Cuadro 4.1 en la Figura 4.1:

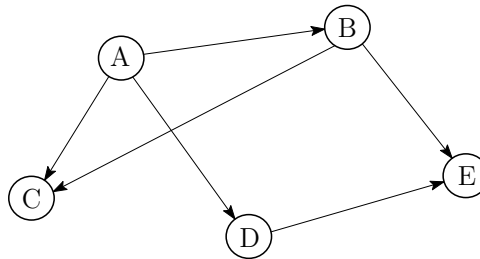


Figura 4.1: Grafo correspondiente al Cuadro 4.1.

¹Con card (conjunto) nos referimos al número de elementos que contiene el conjunto

Ahora, el *ranking de comparación por pares* Y puede verse como un flujo de aristas $X: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ en el grafo G :

$$\text{ranking por pares} \iff \text{Matriz antisimétrica } Y = [Y_{ij}] \iff \text{Flujo de aristas } X(i, j) = [Y_{ij}]$$

Ilustramos en la Figure 4.2 la construcción del flujo de aristas asociado al ranking de comparación por pares, utilizando el modo de comparación binaria, para el ejemplo presentado en el Cuadro 1.

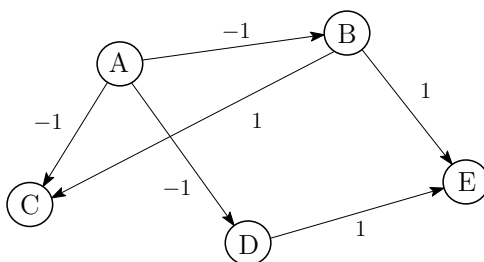


Figura 4.2: Flujo de aristas correspondiente al Cuadro 4.1.

En definitiva, expresamos el *ranking de comparación por pares* como un grafo no orientado $G = (V, E)$ dotado de un flujo de aristas X , que describe el grado de preferencia conjunto.

4.2. Descomposición de Hodge aplicada a rankings

Recordemos nuestro primer objetivo: a partir de este flujo por pares X , nos gustaría estudiar si es posible construir un ranking global de las alternativas. Como se puede intuir en el Ejemplo 3.20, un ranking global es análogo a una función “nota” o “valoración” $s: V \rightarrow \mathbb{R}$ sobre las alternativas. Para construir tal función seguimos la regla: si $s(i) > s(j)$, entonces i se coloca por delante de j en el ranking. Así, la nueva meta se convierte en encontrar esta función s a partir de X . La cuestión ahora consiste en estudiar bajo qué condiciones es posible construir la función s a partir de X .

Tal y como adelantamos en la Introducción, en general nos es posible garantizar la existencia de la función s pues cabe la posibilidad de que nuestros datos sean inconsistentes (“Paradoja de Condorcet”) y no se pueda ofrecer un ranking global.

Para poder construir la función “nota” s , necesitamos que la que comparación por pares X sea *globalmente consistente*. Es decir, siguiendo cualquier bucle en el grafo $i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow i$, tal que los vértices están conectados por aristas de E , el número de puntuaciones aumentadas debería ser igual al número de puntuaciones bajadas, de tal manera que después del bucle deberíamos regresar a la misma nota sobre la alternativa i .

Si el *ranking por pares* X verifica esta propiedad, entonces será el gradiente de la función “nota” (potencial) $s: V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$X = \text{grad}(s)$$

En este caso, diremos que X es un *flujo gradiente* o *globalmente consistente*. Cabe destacar que a la función “nota” obtenida no será única. Sin embargo, dos funciones distintas construidas de este modo, diferirán, todo lo más, en una constante. Y ello no interferirá a la hora de hacer el ranking. Realizando el camino inverso en el Ejemplo 3.20, podemos partir del flujo de aristas $\text{grad}(s)$ y obtener una familia de funciones “nota” $\tilde{s} = s + C$, con $C \in \mathbb{R}$. El ranking obtenido a partir de todas las funciones “nota” es el mismo.

A continuación nos planteamos qué sucede si X no es *globalmente consistente*. Nace nuestro segundo objetivo: conocer el tamaño y la naturaleza de la inconsistencia (local o global).

Pensemos como medir la inconsistencia en nuestro grafo G . El subconjunto mínimo de alternativas entre las que puede aparecer inconsistencia es de 3 elementos. Si lo pensamos en el grafo, serán las tríadas: puede suceder que opte por i sobre j , por j sobre k y k sobre i . En términos del flujo de aristas X :

$$\text{rot}(X)(i, j, k) = X(i, j) + X(j, i) + X(k, i) \neq 0$$

De ser así, decimos X es *inconsistente* en la tríada $\{i, j, k\} \in T(E)$ y por tanto X es un *flujo localmente inconsistente*. Como se puede observar, el rotacional rot nos permite medir la “inconsistencia triangular” del ranking por pares X .

Resumamos entonces las distintas alternativas que han ido apareciendo.

Definición 4.1. Sea $G = (V, E)$ un *grafo de comparación por pares* vinculado a un flujo de aristas $X: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

- Decimos que X es *globalmente consistente* si es el gradiente de una función escalar, i.e:

$$X = \text{grad}(s) \text{ para cierta función potencial } s: V \rightarrow \mathbb{R}$$

- Decimos que X es *localmente consistente* o *triangularmente consistente* si es consistente, libre de rotación, en toda tríada de $T(E)$, i.e. $\text{rot}(X) = 0$.
- Decimos que X es *localmente inconsistente* si es inconsistente en alguna tríada, i.e:

$$\exists \{i, j, k\} \in T(E) \text{ tal que } \text{rot}(X)(i, j, k) = X(i, j) + X(j, i) + X(k, i) \neq 0$$

Una pregunta razonable es si un flujo X localmente consistente, i.e. $\text{rot}(X) = 0$, será también globalmente consistente. Fijándonos en el capítulo anterior, esta pregunta coincide justamente con la que nos planteamos justo antes del Teorema 3.27. Como nos decía este Teorema, esto solo sucede para un familia de grafos en particular, aquellos verificando $\beta_1(K^3(G)) = 0$.

- Así, diremos que X es *globalmente inconsistente* si X si es local pero no globalmente consistente. Es decir,

$$\text{rot}(X) = 0 \quad \text{pero} \quad \nexists s: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad X = \text{grad}(s)$$

La reflexión previa permite traducir el esquema de la Figura 3.6 en términos de cohomología y flujos:

$$\begin{array}{ccccc}
 C^0(K_G, \mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\delta_0^\dagger} \end{array} & C^1(K_G, \mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\delta_1^\dagger} \end{array} & C^2(K_G, \mathbb{R}) \\
 \\
 \text{Función potencial} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{grad}} \\ \xleftarrow{-\text{div} \equiv \text{grad}^\dagger} \end{array} & \text{Flujo de aristas} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{rot}} \\ \xleftarrow{\text{rot}^\dagger} \end{array} & \text{Flujo triangular} \\
 \mathbf{s} & & \mathbf{X} & & \phi
 \end{array}$$

Figura 4.3: Representación de la relación entre flujos y cohomología

a sus correspondencias en términos de rankings:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Función nota} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{grad}} \\ \xleftarrow{-\text{div} \equiv \text{grad}^\dagger} \end{array} & \text{Ranking por pares} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{rot}} \\ \xleftarrow{\text{rot}^\dagger} \end{array} & \text{Ranking por tríos} \\
 \mathbf{s} & & \mathbf{X} & & \phi
 \end{array}$$

Figura 4.4: Representación de la relación entre operadores y rankings

Notemos que en el esquema de la Figuras 4.3 y 4.3, el adjunto se toma con respecto al producto escalar definido en el conjunto de flujos de aristas ó ranking por pares (ver Ecuación 3.4):

$$\langle X, Y \rangle_1 = \sum_{\{i,j\} \in E} w_{ij} Y(i,j) X(i,j) \quad \text{para } X, Y \text{ flujos de aristas} \quad (4.1)$$

Como se puede advertir, es en este producto escalar donde tenemos la función peso w , que corregirá el desequilibrio del número de votantes.

Fijémonos en que :

- X es *globalmente consistente* $\iff X \in \text{im}(\text{grad})$
- X es *localmente consistente* $\iff X \in \text{ker}(\text{rot})$
- X es *localmente inconsistente* $\iff X \in \text{ker}(\text{rot})^\perp = \text{im}(\text{rot}^\dagger)$
- X es *globalmente inconsistente* $\iff X \in \text{ker}(\text{rot}) \cap \text{im}(\text{grad})^\perp = \text{ker}(\text{rot}) \cap \underbrace{\text{ker}(\text{grad}^\dagger)}_{\text{ker}(-\text{div})}$

Llegados a este punto, podemos hacer uso del *Teorema de descomposición de Hodge* (Teorema 3.11):

$$\begin{aligned}
 C^1(K_G, \mathbb{R}) &= \overbrace{\text{im}(\text{rot}^\dagger) \oplus \ker(\Delta_1) \oplus \text{im}(\text{grad})}^{\ker(\text{div})} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\ker(\text{rot})} \\
 &= \text{flujo rotacional} \oplus \text{flujo armónico} \oplus \text{flujo gradiente}
 \end{aligned}$$

que puede ser interpretado como:

$$\text{ranking por pares} = \text{localmente inconsistente} \oplus \text{globalmente inconsistente} \oplus \text{globalmente consistente}$$

Así, el Teorema de Hodge nos dice que si tenemos un flujo de aristas, o, equivalentemente, ranking por pares, X , se puede descomponer de manera única como:

$$X = \text{rot}^\dagger(\phi) \oplus X_a \oplus \text{grad}(s)$$

donde, tomando como distancia en el espacio de flujos de aristas la proporcionada por el producto escalar explicitado en la Ecuación 4.1:

- s es la función potencial que minimiza la distancia entre el flujo gradiente $\text{grad}(s)$ y X , y de la que extraemos el ranking global.
- $\|X_a \oplus \text{rot}^\dagger(\phi)\|$ mide el tamaño de la inconsistencia de los datos. Es por tanto una medida de como de fiable es s como ranking.
- X_a es el flujo globalmente inconsistente o armónico, es decir, que es local pero no globalmente consistente. Si $\|X_a\|$ es grande, significa que nuestro ranking no es fiable a gran escala.
- $\text{rot}^\dagger(\phi)$ es el flujo localmente inconsistente o rotacional, que contiene toda la información sobre las inconsistencias locales. Si $\|\text{rot}^\dagger(\phi)\|$ es grande, el ranking no es fiable a escala pequeña.

Por tanto, obtenemos dos implicaciones inmediatas del Teorema de descomposición de Hodge (ver Teorema 3.11 y Teorema 3.25). La primera implicación permite que el algoritmo *HodgeRank* nos proporcione el ranking globalmente consistente más cercano a los datos y además nos de información del tamaño de las inconsistencias de los datos (tanto locales como globales). La segunda implicación nos indica que la consistencia local garantiza consistencia global cuando el

complejo de cliques de grafo de comparación por pares no tiene agujeros (sucede si no existe componente armónica en los datos) (ver Figura 3).

Bibliografía

- [1] Crane K., de Goes F., Desbrun M., Schröder P. (2013). Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus. *In ACM SIGGRAPH 2013 Courses*, pp. 1–126. New York, USA.
- [2] Dummit D. S., Foote R. M. (2004). *Abstract algebra*. 3rd ed. Chichester, Wiley.
- [3] Ghrist R.W. (2014). *Elementary applied topology*. Createspace.
- [4] Hatcher A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [5] Jiang, X. et al., (2011). Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Math. Program.* 127, No. 1 (B), 203–244
- [6] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California.
- [7] Papachristou C. J. (2019). *Aspects of integrability of differential systems and fields. A mathematical primer for physicists*. Springer
- [8] Rotman, J. J. (1988). *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics, 119, Springer-Verlag, New York.
- [9] Wilson, R. J. (1996). *Introduction to graph theory*. 4th ed. Harlow. Longman.