

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

**ELIPSOIDES XENERALIZADOS ACTIVOS:
APLICACIÓN Á SEGMENTACIÓN DE
IMAXES MÉDICAS 3D**

RAQUEL DOSIL LAGO

NOVEMBRO, 2000

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA E COMPUTACIÓN

Ós meus pais

Agradecementos

Quero expresar o meu sincero agradecemento a tódalas persoas que contribuíron á realización desta tesina.

En primeiro lugar ó director desta memoria, Xosé Manuel Pardo López, pola súa colaboración, pero sobre todo polo interese e a confianza que depositou no meu traballo.

A Diego Cabello e Antonio Mosquera por contar comigo, pois o apoio recibido por ambos facilitou enormemente o meu labor neste grupo de investigación.

A Víctor Leborán e a Fernando Vilariño por inverter tanto tempo en axudarme a poñer esto en marcha.

A Manolo Penedo pola información facilitada e as suxestións sobre algúns aspectos do traballo.

A Paula López pola axuda que me mandou dende Italia a cerca dos algoritmos xenéticos.

A Víctor Brea, Juanjo e Nando polos consellos e por darme ánimos e, en xeral, a tódolos compañeiros deste departamento, que realmente conseguen que viva un ambiente estupendo.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN.....	1
2 RECONSTRUCCIÓN DE IMAXES 3D.....	5
2.1 Procesamento de imaxes médicas	6
2.2 Segmentación baseada en modelos	7
2.3 Inicialización de superficies deformables	11
2.4 Modelo de forma global: o superelipsoide.....	12
2.5 Recoñecemento de baixo nivel	13
3 MODELOS DE SUPERFICIE.....	17
3.1 Esquemas de representación	17
3.1.1 Distribución de puntos de fronteira	17
3.1.2 Ecuacións implícitas	19
3.1.3 Ecuacións explícitas	20
3.1.4 Representacións “de varrido”	21
3.1.5 Técnicas de subdivisión do espacio.....	22
3.1.6 Transformación do eixe medio	25
3.1.7 Representacións cualitativas.....	26
3.1.8 Xeometría constructiva: CSG	27
3.1.9 Esquemas de representación comparados.....	28
3.2 Métodos de reconstrucción	30
3.2.1 Posta en correspondencia mediante transformacións ríxidas	30
3.2.2 Métodos deformables.....	32
3.2.3 Técnicas de optimización	39
4 SUPERCUÁDRICAS.....	45
4.1 Medidas de erro.....	46
4.2 Xeneralización para posición e orientación arbitrarias.....	48
4.3 Ambigüidade na representación mediante superelipsoides	49
4.4 Inicialización dos parámetros de transformación ríxida	50
4.5 Deformacións globais.....	53
4.6 Optimización con algoritmos xenéticos	55
4.6.1 Codificación.....	56
4.6.2 Rendemento do AX.	57
4.6.3 Mecanismos de selección	58
4.6.4 Función de adaptación	59
4.7 Posta en correspondencia con modelos a priori	59
5 EXTRACCIÓN DE PARCHES DE SUPERFICIE	61

5.1	Filtros multiescala recursivos.....	62
5.1.1	Filtros multiescala.....	62
5.1.2	Implementación recursiva dos filtros	64
5.2	Detección de puntos de fronteira	66
5.3	Cálculo das curvaturas locais.....	67
5.4	Extracción de parches de superficie.....	70
5.4.1	Agrupamento de puntos en parches de superficie	71
5.4.2	Selección de parches de superficie	72
5.5	Observacións	75
6	RESULTADOS.....	79
6.1	Optimización da función implícita.....	79
6.2	Preprocesado	82
6.2.1	Detección de puntos de fronteira.....	82
6.2.2	Detección de parches de superficie	83
6.2.3	Etiquetado e selección de parches de superficie.....	83
6.3	Posta en correspondencia	84
7	CONCLUSIÓN E PRINCIPAIS APORTACIÓN.....	99
	BIBLIOGRAFÍA.....	101

1 INTRODUCCIÓN

A importante mellora que están a experimentar as imaxes médicas tridimensionais de alta resolución, está derivando nun maior desenvolvemento das técnicas de reconstrución de estruturas anatómicas, que cada vez poden ofrecer resultados de mellor calidade. A extracción da xeometría a partir das imaxes médicas serve de apoio a actividades clínicas dende a diagnose ata a planificación cirúrxica e simulación do comportamento fisiolóxico. Pero a pesar dos recentes avances nas tecnoloxías de adquisición de imaxes, que proporcionan vistas excepcionais da anatomía interna, o uso do computador para cuantificar e analizar as estruturas involucradas con precisión e eficiencia é aínda limitada. A dificultade na análise das imaxes médicas está en dotar ós sistemas de reconstrución de obxectos 3D da suficiente flexibilidade para tratar coa complexidade e variabilidade das formas anatómicas entre distintos individuos. Ademais, os inconvenientes típicos dos datos mostreados e o ruído provocan a miúdo que os contornos das estruturas resulten indistinguíbles e desconectados.

Durante os últimos anos, os modelos deformables [28] fixéronse moi populares en recoñecemento e delineación de obxectos, particularmente no campo das imaxes médicas [37]. O esquema básico dun modelo deformable consiste nunha curva, se traballamos en 2D, ou superficie, en 3D, que se deforma localmente ata axustarse á fronteira do obxecto máis próximo. Os modelos deformables 3D foron inicialmente propostos por Terzopoulos en [56]. Aquel primeiro modelo consistía nun esquema de elementos finitos guiado por técnicas dinámicas. Posteriores traballos foron contribuíndo a darlles flexibilidade. Exemplos da aplicación dos modelos deformables poden atoparse en [34, 38, 47, 50, 52, 53].

Cando os modelos deformables son aplicados a datos 3D existen dúas modalidades de segmentación: 2D (corte a corte) e 3D. En ambos casos o modelo inicial debe estar o suficientemente próximo á fronteira do obxecto que se quere segmentar para que o axuste sexa correcto. Unha das vantaxes da segmentación corte a corte é que se pode partir dunha inicialización semiautomática ou manual dun corte. Despois de segmentar ese corte mediante un modelo deformable 2D utilízase o contorno resultante como modelo inicial no corte veciño, repetindo o proceso para tódolos cortes da imaxe. Esta inicialización baséase na proximidade espacial entre cortes adxacentes, que asegura contornos próximos en forma e localización. O principal inconveniente é que non hai outra interacción entre contornos de cortes veciños no proceso de deformación, a parte da inicialización, o que pode levar a inconsistencias na superficie resultante. Se o contorno se perde nun corte en particular, o método fallaría. Ademais, require unha etapa de postprocesado para conecta-la secuencia da contornos e obter a superficie continua.

O uso de verdadeiros modelos de superficie podería conducir a métodos de segmentación máis robustos, xa que aseguraría a coherencia e a suavidade global nos

resultados e evitaría a perda de contornos nalgúns cortes. Pero no caso da segmentación 3D, a inicialización dunha superficie por delineación manual non resulta práctica polo laborioso da tarefa e o tempo que é necesario inverter. É preciso dispoñer dun método automático ou semiautomático que permita obter unha superficie inicial a partir da cal se inicie a deformación cunhas certas garantías de éxito. Para eso hai que asegurar que a superficie inicial estea o suficientemente próxima á superficie do obxecto de interese na escena 3D.

Neste traballo abordamos precisamente a obtención dun método automático para a construción de superficies que sirvan de inicialización para unha posterior fase de axuste mediante modelos activos 3D. Aínda que a calidade dos resultados ofrecida polos modelos deformables depende fortemente do estado dos modelos iniciais, o aspecto da inicialización de tales modelos non ten recibido demasiada atención. Existen algúns traballos nesta dirección que ofrecen solucións diversas ó problema.

McInerney e Terzopoulos [35] describen un modelo 3D para o seguimento do movemento do ventrículo. Trátase dun modelo de balón (superficie topoloxicamente isomórfica a unha esfera) que se inicializa dentro do obxecto. Unha forza de presión interna trata de expandi-la superficie cara ó contorno do obxecto, combinando a súa acción con forzas de gradiente, mentres que forzas internas de resorte e forzas externas definidas polo usuario impoñen restricións sobre a evolución da superficie. A mesma idea foi proposta simultaneamente por Cohen e Cohen [13], equivalente á que determina a evolución nos modelos activos non paramétricos [32].

Neunshwander e col. [43] propuxeron un método que permite ó usuario inicializar un modelo de superficie 3D proporcionando un conxunto pequeno de puntos semente e as súas correspondentes normais á superficie. Durante o proceso de deformación da superficie, esta debe conter en todo momento a eses puntos, debendo coincidir tamén as normais da superficie coas da semente, que actúan xa que logo coma áncoras. Pero a selección de puntos nunha imaxe de volume non resulta trivial, pois debe facerse mediante inspección visual e de forma coidadosa, xa que estes puntos forman parte do resultado. Como exemplo de aplicación á segmentación de datos médicos, concretamente á do ventrículo, defínese a superficie inicial como a envolvente convexa (*convex hull*) da nube de puntos semente, obtida por tetraedrización e deseñada de forma interactiva. A segmentación pode ser supervisada polo usuario por medio da introducción de novos puntos áncora.

Sandor e Leahy [50] describen un método para atopar de xeito automático a superficie cortical do cerebro en imaxes 3D de resonancia magnética. O método baséase no uso dun atlas (superficie B-spline) preetiquetado do cerebro. O atlas rexístrase globalmente mediante transformacións ríxidas ó cerebro do doente (modelo inicial) e despois dáselle propiedades elásticas para axustalo ás estruturas presentes na imaxe por un proceso de deformación guiado por información de bordes 3D. A posta en correspondencia faise considerando unha caixa que encerra o cerebro a segmentar e outra que encerra o cerebro do atlas, e determinando as transformación de rotación, translación e escalado que as fan coincidir. Un preprocesado dos bordes mediante operadores morfolóxicos permítelles illar o cerebro e identificar os pregues, chamados *sulci*. A distancia entre os *sulci* definidos na imaxe, xunto cos termos de regularización de forma clásicos, constitúen a información necesaria para a deformación.

A aproximación que se presenta neste traballo consiste tamén nunha posta en correspondencia pero, nesta ocasión, levarase a cabo tamén a construción dos modelos que compoñen o atlas a partir de imaxes de proba. Estes modelos iniciais non pretenden ofrecer unha descrición detallada da morfoloxía dos obxectos, senón que se deixa esa tarefa para as técnicas de superficies deformables. Isto vai permitir elixir un esquema de representación do modelo inicial moito máis sinxelo que os utilizados en [50], pois non se pretende acadar unha correspondencia absoluta entre as superficies do modelo e da imaxe, senón que se tenta aproximalas o suficiente para guiar correctamente o modelo deformable. O esquema de representación seleccionado para a construción dos modelos iniciais é o de superelipsoides con deformacións globais, definida por unha función implícita. Os parámetros da ecuación implícita regulan tan só o aspecto global do obxecto, ademais da localización, orientación e tamaño. O feito de dispor dunha expresión analítica para o modelo, facilita a tarefa de posta en correspondencia, que aquí realizamos mediante a minimización dunha función de distancia dos puntos da imaxe á superficie, moi sinxela de calcular.

Aínda que en ocasións se teñen abordado os procesos de posta en correspondencia e deformación local mediante un sistema integrado, coma o desenvolto por Terzopoulos e Metaxas [55], que efectúa o cálculo dos parámetros de localización, forma global e deformación local de forma simultánea, cremos que a secuenciación destas dúas tarefas pode resultar vantaxosa en canto a robustez e rapidez, especialmente en imaxe médica. No caso das imaxes estáticas, non parece necesario ter que calcula-los parámetros de forma global sempre que se desexe segmentar unha estrutura anatómica, se se dispón de modelos dos órganos definidos a priori. Bastará un proceso de posta en correspondencia entre modelo a priori e obxecto e a posterior deformación da superficie inicial. No caso de ter que modelar a evolución temporal dun órgano, semella ser máis útil a inicialización de cada secuencia da imaxe co resultado da anterior. Só na primeira secuencia habería que definir un modelo inicial.

A aplicación descrita neste traballo aborda en primeiro lugar a construción de modelos a priori. Para isto emprégase un método de minimización dunha función de erro que estima as distancias da superficie a unha distribución de puntos de fronteira do obxecto medio. Esta nube de puntos obtense mediante técnicas estatística a partir de imaxes de proba. O algoritmo de optimización elixido é de tipo xenético. A outra tarefa que se realiza é a utilización dos modelos para a inicialización das superficies deformables, mediante a posta en correspondencia cun obxecto dentro dun volume 3D. A forma de levar a cabo este proceso á análogo ó modelado, pero agora é preciso determinar un conxunto de puntos pertencentes á fronteira do obxecto contido nunha imaxe en particular, que se usarán para o cálculo das distancias ó modelo. A técnica empregada para a extracción dos puntos de superficie do obxecto, consiste nunha detección de puntos de fronteira, mediante a aplicación dun filtrado recursivo. Da imaxe resultante vanse extraer fragmentos de superficie conexos, ós que imos chamar *parches*. Das estruturas resultantes hai que conseguir illar os parches pertencentes ó obxecto de interese. Isto farase mediante unha clasificación dos parches en función de propiedades dos mesmos, relacionadas co nivel de gradiente, a área e descritores de forma dependentes da curvatura.

Os diversos aspectos estudiados nesta memoria sobre o uso dos modelos de supercuádricas na inicialización das superficies deformables en xeral, e concretamente da súa aplicación en imaxes médicas, están organizados do seguinte xeito:

No **capítulo 2** analízase a problemática das tarefas de recoñecemento e reconstrución de imaxes. Preséntase unha introducción as estratexias de segmentación baseadas en datos e ás baseadas en modelos, para concluír que estas últimas son máis axeitadas para a reconstrución de imaxes médicas, mentres que para a fase de posta en correspondencia, é utilizar unha metodoloxía baseada en datos, pois é preciso obter información para a clasificación dos obxectos presentes na imaxe a partir dos niveis de gris.

No **capítulo 3** realízase unha revisión dalgunhas das técnicas de representación e reconstrución de imaxes máis utilizadas. O obxectivo deste resume é a comparación de características de interese na aplicación a desenvolver.

No **capítulo 4** procédese a unha descrición en detalle do modelo empregado, tanto do esquema de representación de elipsoides xeneralizados con deformacións globais, como do método empregado para a súa reconstrución e posta en correspondencia co obxecto da imaxe, para o que se empregará un algoritmo xenético.

No **capítulo 5** descríbese a etapa de procesado das imaxes previa á posta en correspondencia co modelo. Describíranse os filtros de cálculo das derivadas direccionais, utilizadas para o cálculo dos puntos de fronteira e os correspondentes descritores de forma, e tamén o algoritmo de detección e selección de parches de superficie.

Unha vez descrita por completo a metodoloxía desenvolta, a súa eficiencia será estudada e contrastada, para o que se poñerá a proba con distintos casos típicos no **capítulo 6**. Estudiarase a eficacia do método de selección de parches de superficie, así como a do algoritmo de optimización para as tarefas de modelado e posta en correspondencia, poñendo especial énfase na robustez ante distintos tipos de ruído.

Para por fin a esta memoria, no **capítulo 7** recóllense ás conclusións e principais aportacións do traballo que presentado, así como as posibles vías de continuidade do mesmo.

2 RECONSTRUCCIÓN DE IMAXES 3D

A finalidade da análise de imaxes é, por un lado, identificar os obxectos presentes nunha escena, e por outro, describilos correctamente e de forma o máis precisa posible. Entre estes dous obxectivos maniféstase un conflito. Describir un obxecto cun alto grao de detalle implica manexar un gran volume de datos, que representan información a nivel moi local. Isto é un obstáculo para a tarefa de identificación, pois pérdese a noción da estrutura, o aspecto global do obxecto, e polo tanto da disposición relativa na imaxe. Para poder clasifica-las formas que aparecen nunha imaxe trabállase cun conxunto reducido de parámetros que constitúen unha caracterización máis simple e esencial, o que facilita a comparación con modelos. Dito doutra forma, hai que realizar unha simplificación ou idealización das propiedades do obxecto, xa sexan morfolóxicas ou doutro tipo, eliminando características non discriminatorias.

O tipo de representación co que se traballa determina o nivel de abstracción da información que contén. Se traballamos directamente cos datos da imaxe, dise que temos unha representación de baixo nivel. Cada dato só informa do nivel de gris ou da cor dun único punto, pero non permite realizar unha análise da imaxe coma un todo, interpretando o seu contido, polo que ás veces identifícanse nivel de abstracción baixo con representación local. No extremo oposto, unha representación de alto nivel traballa cunha información máis abstracta, onde cada obxecto é unha entidade que se etiqueta cun nome. A un nivel intermedio, os obxectos caracterízanse por unha serie de descriptores que son parámetros que dan idea da súas propiedades globais.

Se, como dicimos, existe un conflito entre representacións de alto e baixo nivel, a análise de imaxes debe buscar a maneira de relaciona-la información que ambas aportan, ou sexa, asociar datos da imaxe con obxectos. Esta tarefa pódese enfocar de dous xeitos. Por unha parte, pódese tomar unha imaxe e tentar identifica-los obxectos que nela aparecen, vendo que información estrutural se pode extraer. Estas metodoloxías chámanse *baseadas en imaxes*, ou tamén *baseadas en datos*, pois parten da representación a máis baixo nivel e van creando unha xerarquía de estruturas ata chegar ós niveis máis altos (*bottom-up*).

A outra opción consiste precisamente no proceso inverso e denomínase análise *guiada por modelos*. Un modelo é unha representación dun obxecto que impón certas restriccións sobre as súas características. A elección do modelo determina que características quedan predeterminadas e que parámetros se poden configurar libremente para defini-los distintos obxectos. Pois ben, as técnicas de análise baseadas en modelos, parten dun modelo dun obxecto e tentan localizalo dentro dunha imaxe. Habitualmente pártese dun modelo moi esquemático, é dicir, moi conceptual, e unha vez que se localiza vaise refinando ata axustarse totalmente ós datos. Temos entón un proceso que parte dunha representación a alto nivel e descende ata chegar ó nivel máis baixo (*top-down*). Este tipo de técnicas requiren un coñecemento sobre o contido da

imaxe previo á análise, pois é preciso saber que obxecto se está buscando na imaxe e dispor dun modelo do mesmo.

A elección entre unha e outra metodoloxías dependerá do tipo de imaxes que se vaian manexar e dos requirimentos da aplicación. No caso concreto das imaxes médicas, onde o especialista necesita unha visualización moi precisa dos órganos, esta débese obter a partir de imaxes que con frecuencia son de baixa calidade, ou nas que inevitablemente aparecen multitude de estruturas ademais da de interese, que hai que eliminar. Isto dificulta enormemente aplicación de técnicas baseadas en imaxes, pois o procesado de baixo nivel vese moi afectado polo ruído ou por artefactos presentes na imaxe, de maneira que, se se parte xa de resultados erróneos, toda a análise posterior será tamén errónea. Pola contra, as técnicas *top-down* resultan moi apropiadas, xa que é posible dispor de modelos anatómicos. Deste xeito, pártese dende un principio dunha boa aproximación, o que garante a corrección dos resultados. A utilización de representacións de cada vez máis baixo nivel para o refinamento do modelo, estará sempre guiada polo modelo de partida. Se se impide que durante o refinamento o modelo se desvíe en exceso da configuración inicial tense unha garantía de bo funcionamento. Así obtéñense representacións de alta resolución sen perder robustez.

Esta é a idea na que se basea este traballo, que está centrado no desenvolvemento dunha aplicación que ten como obxectivo a localización dun obxecto nunha imaxe, ó tempo que se ofrece unha descrición global, aportando información estrutural sobre a súa morfoloxía, para o que se utilizará unha técnica baseada en modelos. Aínda que o dominio de aplicación no que se vai a experimentar é o da imaxe médica, concretamente de imaxes óseas obtidas mediante tomografía computerizada (CT), a nosa pretensión é que o sistema sexa aplicable a calquera tipo de imaxes. Considérase que un modelo de superficie é suficiente para esta fin, pois non se pretende neste traballo aborda-lo tema da simulación do comportamento dun obxecto sometido a forzas externas, onde sería máis axeitado un modelo volumétrico. Concretamente escolleuse un esquema de representación do modelo de elipsoide xeneralizado por ter un bo compromiso entre flexibilidade de representación e simplicidade. A tarefa de refinamento da forma a nivel local, se esta é necesaria, déixase para unha etapa posterior, que non se contempla aquí, e que empregaría modelos máis axeitados para os requirimentos dese problema. Actualmente está a ser realizado neste mesmo grupo outro traballo, no que se implementa un modelo de forma local baseado en B-splines deformables. O sistema formado por ambos modelos, o de forma global complementado co deformable, conforma unha metodoloxía de análise completa, no sentido de que se abordan os problemas de recoñecemento e reconstrucción de forma conxunta.

2.1 Procesamento de imaxes médicas

A utilización de técnicas de procesado dixital de imaxes é unha práctica habitual no ámbito da medicina. Estas tecnoloxías facilitan o proceso de análise, ofrecendo ó especialista unha axuda moi importante nas tarefas de diagnose e de planificación do tratamento que se debe aplicar ó paciente.

A necesidade de procesar as imaxes ten múltiples motivacións. Unha delas é permitir a extracción de información estrutural cuantitativa dos órganos, relacionada tanto coa súa morfoloxía, como coas propiedades de densidade e textura. Estas medidas facilitan os labores de clasificación e avaliación de patoloxías e tamén a planificación cirúrxica. Un dato morfométrico de interese é por exemplo o volume, moi importante no estudio de patoloxías coronarias ou vasculares. Esta é unha medida que non se pode extraer directamente dunha imaxe sen que sexa sometida a un tratamento previo.

Tamén a simple visualización das imaxes pode ser un problema. Resulta ás veces complexo marcar a separación entre distintos tecidos mediante a simple inspección visual, agravándose a situación coa presenza de ruído, polo que en ocasións é conveniente illa-lo obxecto de interese do resto da imaxe. Se traballamos con imaxes 2D o obxectivo a acadar é, fundamentalmente, a segmentación dos órganos. No caso tridimensional, ademais, haberá que encara-lo problema da presentación dos resultados. As imaxes 3D obtidas a partir dun conxunto de cortes paralelos non se poden visualizar coma un todo, senón que hai que ver cada corte por separado. O procesado de imaxes permite a posterior reconstrucción 3D da superficie ou volume dun obxecto a partir dos cortes. Aínda que este punto se sae dos obxectivos deste traballo, hai que comentar que esta é unha etapa ineludible no desenvolvemento de calquera aplicación de procesado tridimensional, que vai esixir un cambio na representación do modelo para poder aplicarlle a secuencia de pasos que xa están estandarizados en visualización de imaxes 3D. Algunhas destas representación están contempladas no capítulo de revisión de esquemas de representación.

Un tipo de aplicacións médicas no que se está a traballar moito nos últimos anos é a simulación do comportamento mecánico ou fisiolóxico dos órganos. A idea é modelar, non só a morfoloxía do obxecto, senón tamén as súas propiedades físicas, de modo que se poida reproducir-lo comportamento que tería o órgano ó ser sometido a forzas externas, como podería se-la provocada pola incisión dun instrumento cortante. Deste xeito, é posible o adestramento de cirurxiáns sen risco para os pacientes, ou tamén a experimentación de novas técnicas cirúrxicas.

As tecnoloxías máis empregadas na captura de imaxes anatómicas en 3D son a tomografía computerizada (CT), a resonancia magnética (MR) e a tomografía de emisión de positróns (PET). En xeral, todas elas son bastante ruidosas, especialmente a resonancia magnética. A tomografía computerizada, que non é senón un conxunto imaxes 2D tomadas mediante raios X paralelamente ó longo dun eixo, que determinará a terceira coordenada, é a modalidade que se usa comunmente para o estudo de imaxes óseas. Este é o tipo de aplicacións coas que se vai probar esta aplicación. A calidade que presenta este tipo de imaxes é bastante boa. Non obstante, tratarase de implementar unha metodoloxía o suficientemente robusta como para que poida ser aplicable tamén a imaxes de resonancia magnética.

2.2 Segmentación baseada en modelos

A metodoloxía de segmentación que se propón neste traballo, aborda dúas tarefas. Unha é a da reconstrucción da forma dun obxecto 3D, que se realizou mediante unha

técnica *top-down*, é dicir, baseada en modelos. Partindo dunha descrición de alto nivel representada por un modelo definido a priori, e despois dunha fase de localización do mesmo na imaxe, aplicaríase un proceso de deformación local que ofrece unha descrición de máis baixo nivel. A outra tarefa é a do preprocesado da imaxe, necesaria para a posta en correspondencia co modelo. O enfoque que se lle deu a este problema foi o dun proceso *bottom-up*, como se verá no capítulo 1. Partindo dos datos da imaxe, vaise organizando a información ata obter unha representación que permita decidir que puntos da imaxe poden pertencer ó obxecto e cales non. A posta en correspondencia realízase entre o modelo a priori estes e puntos.

Cabe pensar que esta fase de preprocesado podería aproveitarse directamente para obter unha descrición do modelo de forma global, en lugar de servirse dela simplemente para a posta en correspondencia cun modelo definido de antemán. Sen embargo, imos ver nesta sección que o procesado *bottom-up* non é unha técnica robusta da que se poida obter unha descrición de alto nivel fiable. A continuación imos facer unha comparación das características que presentan as técnicas baseadas en imaxes e as baseadas en modelos, para concluír que as primeiras son, polo xeral, as máis adecuadas para calquera tipo de aplicación.

Como se dixo antes, uns dos problemas que afronta a análise de imaxes son o recoñecemento de formas e a reconstrucción de imaxes para visualización en 3D, onde os datos cos que se vai traballar representan un nivel de intensidade de gris ou ben compoñentes de cor. A segmentación de baixo nivel non baseada en modelos traballa unicamente sobre esta información, analizando as propiedades locais da imaxe para dividir a escena en obxectos. Isto non se pode acadar sen facer ningún tipo de suposición sobre as características da imaxe. Por exemplo, se se fai unha segmentación baseada en rexións, estarase establecendo a hipótese de que áreas ou volumes de distinta cor pertencen a obxectos distintos. Tamén podemos realizar unha detección de bordes, na que se asume que a variación do nivel de gris se corresponde cunha fronteira entre diferentes obxectos se supera un determinado umbral. O mesmo se pode facer operando no dominio da frecuencia, atribuíndolle ás baixas frecuencias a información de bordes ou superficies fronteirizas.

Todas estas aproximacións son perfectamente válidas cando as hipóteses nas que están baseadas se cumpren. O feito é que estas case nunca se verifican de xeito estrito. Son moitos os efectos que se están obviando ó establecer as hipóteses anteriores, como as variacións de contraste ou iluminación en distintas partes dunha imaxe, a presenza doutras estruturas ademais das de interese, as texturas na superficie dos obxectos, as oclusións e, en xeral, calquera tipo de distorsión ou de degradación que poida sufrir unha imaxe no proceso de captura.

As técnicas non baseadas en modelos non teñen a capacidade de manexar información de tipo estrutural. Isto non só vai repercutir na calidade dos resultados, senón que ademais, dificulta a extracción de propiedades globais dos obxectos. Por exemplo, se aplicamos unha detección de bordes a unha imaxe ruidosa ou con texturas, o resultado vai ser un conxunto de segmentos de curva ou de superficie, segundo traballemos en dúas ou tres dimensións, inconexos e ramificados, e non a fronteira completa dun obxecto, e só dese obxecto, diferenciándoo así do resto da imaxe. Polo tanto, tampouco se van poder extraer propiedades xeométricas do obxecto, como posición, área ou

volume, etc., e menos aínda, ir máis alá e pretender compara-lo obxecto con outros coñecidos e identificalo como membro dunha clase.

Existen técnicas que, como se mencionou ó principio desta introducción, pretenden extraer información da estrutura global das imaxes, tentando identifica-los obxectos que contén partindo dos resultados obtidos no procesado de baixo nivel, ás que chamabamos técnicas guiadas por datos. Hai desenrolados métodos, coma o que se presenta no libro de Ballard e Brown [1], que, partindo dunha detección de puntos de fronteira, tentan conectar os fragmentos de superficie resultantes para formar superficies pechadas que definan obxectos. O inconveniente que teñen estes métodos é que parten xa de resultados que poden ser erróneos, o que desvirtúa todo o proceso posterior. Por eso estas técnicas nunca van te-la robustez e a fiabilidade das técnicas baseadas en modelos.

Tódalas consideracións anteriores son trabas que xorden a causa de traballar a nivel local sen empregar modelos. Hai outro aspecto que se pode cuestionar nesta clase de técnicas, e é que non se fai uso de coñecemento a priori sobre os obxectos, nin predeterminando certas propiedades, nin impoñendo limitacións, baseándose en hipóteses sobre o contido das imaxes. Ben é certo que, como se comentou anteriormente, sempre que se procesa unha imaxe estase a realizar algún tipo de suposición sobre a información que contén. Sen embargo, as premisas sobre as que se leva a cabo esta modalidade de segmentación non teñen en conta ningún tipo de información específica da clase particular de imaxe que se está a analizar, non sendo o axuste dalgún posible umbral de nivel de gris ou de gradiente de nivel de gris. Será raro o dominio de aplicación do tratamento de imaxes no que non se teña ningunha noción sobre a súa natureza ou do seu contido. Podemos descoñecer que é ou como é o que a imaxe representa exactamente, pero en moitas ocasións vai ser posible intuír certas características. Por exemplo, se os obxectos teñen contornos pechados ou abertos, se as súas superficies son planas ou curvas. Nalgunhas aplicacións incluso se sabe de antemán que é o que estamos vendo na imaxe.

Tanto a falta de visión de conxunto, como o desaproveitamento do coñecemento a priori, como a imposibilidade de exercer ningún tipo de control sobre as propiedades xeométricas dos obxectos, poñen os métodos anteriores en desvantaxe con respecto ás técnicas baseadas en modelos, que por definición son o método axeitado para tratar con este tipo de información. O feito de poder controlar ou prefixar determinados parámetros da representación dunha superficie, implica poder forzar a que os obxectos se adapten ás características desexadas e tamén introducir coñecemento. A definición e o modo de utilización dun modelo vai depender do tipo de aplicación.

Se o que queremos é obter a reconstrucción dun obxecto, o modelo vai consistir nun esquema de representación que caracterice ó obxecto de forma apropiada e nun método de reconstrucción para obte-los parámetros do esquema a partir da imaxe. Nestes casos, aínda o modelo non impón ningunha restricción sobre a forma concreta do obxecto, si pode limitar os graos de liberdade na representación da forma. Isto sucede cando, por exemplo, queremos modelar un obxecto mediante unha función implícita cuadrática. Os únicos parámetros que podemos variar son radios e os parámetros de transformacións afíns. Un esquema de representación sempre vai limitar en certa medida a xeometría dun obxecto, pero tamén se poden controlar determinadas propiedades no proceso de

reconstrucción. Un exemplo claro desta situación dáse no modelos de *snakes* ou contornos activos. O modelo non é tan só o esquema de representación, que non deixa de ser unha simple distribución de puntos no espacio, senón que incorpora unha técnica de reconstrucción que permite guiar a evolución dos puntos ata que se adaptan á fronteira do obxecto, definindo forzas entre os puntos, como se fosen partículas físicas.

En aplicacións de recoñecemento o enfoque é distinto. Pártese dun modelo a priori, e entón o que hai que implementar é un método de busca que explore imaxe para atopar obxectos de características similares á primitiva dada. Deste xeito soluciónanse as limitacións do procesado de baixo nivel, pois podemos identifica-lo obxecto como un caso particular do modelo, ou sexa realizar unha clasificación dos obxectos que aparecen na escena. Ademais, podemos obter medidas das súas propiedades, que veñen dadas polo modelo de forma explícita, na súa parametrización, ou de forma implícita. Neste tipo de tarefas é preciso ter un certo coñecemento do tipo de obxectos que van aparecer na imaxe e dispor dun modelo a priori de cada un deles.

Existen tamén aplicacións nas que, a pesar de teren como obxectivo a descrición detallada da forma dun obxecto, vaise precisar tamén dunha fase de recoñecemento dese obxecto nunha escena, que é o caso que comentabamos anteriormente, sobre o que versa este traballo. A maneira máis común de enfoca-lo problema é partir dun modelo a priori, que representa un prototipo do obxecto. Con el realízase unha primeira etapa de recoñecemento do obxecto. Logo permítese a deformación do modelo para obter finalmente o modelo particular desa imaxe. Este é o caso do sistema de segmentación 2D desenvolvido por Altman e Brinkley [10], que emprega un modelo de forma promedio, obtida a partir de imaxes de adestramento. O proceso de axuste consiste en realizar unha estimación dos puntos do contorno da imaxe cada vez máis refinada a medida que se van introducindo novos puntos do modelo a priori. A estimación realízase mediante un filtro de Kalman en función da información de correlación entre modelo e imaxe. En ocasións, os modelos a priori e a posteriori van vir representados mediante esquemas distintos. Na metodoloxía que máis adiante presentamos, esto vai ser inevitable, posto que o modelo de supercuádricas ofrece unha descrición de forma moi global. Isto faino moi axeitado como modelo a priori, pero moi pobre como descrición local, polo que se, cando sexa precisa unha fase de refinamento vai haber que realizar un cambio de representación. No caso de utilizar o modelo de supercuádricas como inicialización dun modelo deformable, unha simple mostraxe da superficie será suficiente.

Á hora de expresa-las restriccións impostas, o tipo de información que hai que manexar vai ser, usualmente, aínda que non necesariamente, de baixo ou alto nivel en aplicacións de reconstrucción ou recoñecemento respectivamente. Podemos, por exemplo, pretender limitar a rugosidade dunha superficie nun proceso de reconstrucción, e entón estaremos operando a baixo nivel, ou podemos querer encontrar obxectos de forma aproximadamente esférica en tarefas de recoñecemento, e aquí estaremos utilizando información de máis alto nivel. O esquema de representación que escollamos debe ser capaz de parametrizar a información coa que vaíamos traballar. En consecuencia, a representación escollida é determinante na construción dun bo método de modelado. Ademais, condicionará ou limitará os posibles métodos de

reconstrucción ou de busca. Para o obxectivo que nós propoñemos, a elección de supercuádricas parece ser a máis adecuada.

2.3 Inicialización de superficies deformables

Aínda que a nosa pretensión é que o sistema sexa aplicable a calquera tipo de imaxes 3D, o dominio de aplicación que o motiva é o modelado de estruturas anatómicas, concretamente de estruturas óseas. Así, observárase que as imaxes coas que traballamos son todas deste tipo. A idea de facer este tipo de aproximación no ámbito da imaxe médica, xorde como consecuencia dun problema que presentan os modelos de deformación local.

Os modelos deformables, coñecidos tamén como modelos activos, ofrecen un gran nivel de detalle nos resultados, que a penas se ven afectados polo ruído presente na imaxe, posto que permiten controlar a suavidade da forma do contorno ou superficie, de aí que sexa unha das técnicas máis empregadas neste campo. A forma de reconstruír o modelo é mediante a evolución da súa forma guiada pola información de gradiente de nivel de gris. As ecuacións que rexen a evolución dos puntos de fronteira resultan de resolver o problema de minimización dunha funcional que representa a enerxía asociada á fronteira. Entre os termos que contribúen a esa enerxía, está o orixinado polas forzas que atraen ós puntos cara ós máximos de gradiente. Este algoritmo de reconstrucción iterativo tende a estabilizarse en mínimos locais da enerxía, é dicir, os puntos de fronteira máis próximos ó punto de partida. Deste xeito, se na imaxe aparece máis dun obxecto, o resultado pode non ser o desexado. A superficie ou contorno debe estar inicialmente moi próxima á do obxecto de interese para que outras estruturas non interfiran.

Ata o de agora unha das formas máis sinxelas de solucionar isto é mediante a interacción co usuario, ó que se lle permite inicializar manualmente o modelo. Como xa se comentou na introducción, o método de inicialización de cada corte por separado, deseñando manualmente o contorno inicial no primeiro corte e propagando os resultados ós cortes veciños, non proporciona resultados totalmente satisfactorios. Outra opción é definir unha primitiva simple, como por exemplo unha esfera, e permitir ó usuario elixir a posición do seu centro e tal vez o radio. Tampouco esta é, en xeral, unha boa solución en imaxe médica, pois a presenza de gran número de tecidos no volume esixe unha inicialización mellor [37].

Estas consideracións sobre os modelos deformables obrigan a pensar nunha maneira de inicializa-lo contorno activo, que neste caso será unha superficie pois traballaremos en 3D, mediante un modelo a priori. Nalgúns estudos [29] realizados óptase por obter estes modelos mediante a reconstrucción manual dun primeiro prototipo de obxecto mediante unha representación de distribución espacial de puntos, como unha triangulación, que representaría un modelo promedio dese tipo de obxecto. Nós consideramos que isto é innecesario, posto que a obtención e almacenamento deste modelo a priori non compensa se despois se vai someter a unha deformación, que é a que decide a forma final. Pensamos que unha descrición a groso modo é suficiente para a inicialización, especialmente no caso de estruturas óseas, e que resulta máis sinxela

de obter e manexar, ademais de que ten unha parametrización moito máis reducida. Isto levounos á elección dos modelos de elipsoides xeneralizados.

2.4 Modelo de forma global: o superelipsoide

O esquema de representación que se escolleu para crear o modelo de forma global foi o de supercuádricas, tamén chamadas elipsoides xeneralizados ou superelipsoides. Vén descrito por unha función implícita non lineal. Os motivos desta escolla son dous: o bo compromiso que ofrece entre potencia de representación e parametrización reducida e a invariancia ante transformacións ríxidas. Esta representación emprega un número reducido de graos de liberdade, o que aporta facilidade de manexo e eficiencia no almacenamento en memoria. Esta simplicidade non se obtén a costa de reducir en exceso a variedade de formas que pode adoptar, pois ofrece unha potencia de representación aceptable para o dominio de aplicación, o que o fai moi atractivo para o noso propósito. Para aumenta-la potencia de representación destas primitivas, se así fose necesario, é posible aplicar sobre este modelo unha serie de transformacións de forma global de modo moi sinxelo (como se fixo neste traballo) obtendo así unha flexibilidade de representación moito maior, sen incrementar en exceso o número de parámetros do modelo. Por outro lado, o vector de parámetros do modelo, ademais dos parámetros de forma, debe incorporar variables que den información sobre a posición, a orientación e o tamaño con que aparece na imaxe. No proceso de obtención do modelo, ben sexa para recoñecemento ou para reconstrucción, vai haber que determinar estes parámetros. Isto vaise facer buscando a transformación ríxida que aplicada ó modelo proporcione a mellor aproximación ó obxecto. Por este motivo, o esquema de representación debe ser invariante a este tipo de transformacións, que engloban translación, rotación e escalado, que tamén se chaman transformacións ríxidas porque non alteran a forma do modelo. Non tódolos esquemas presentan invariancia a estas transformacións, un motivo máis a favor dos superelipsoides, que si teñen esta propiedade.

Dispoñendo dun modelo a priori para un determinado obxecto podemos localizar dito obxecto nunha imaxe mediante a posta en correspondencia entrambas (ver figura 2.1). Tanto para a obtención do modelo de partida (figura 2.1, 1º paso), como para a súa posterior posta en correspondencia co obxecto na imaxe (figura 2.1, 4º paso), o xeito de calcular os parámetros do modelo que se axusta adecuadamente ós puntos de superficie é realizando un proceso de optimización, no que se tenta minimizar unha función que depende da distancia de cada punto do obxecto ó punto máis próximo da superficie da primitiva. No primeiro caso habería que obter tódolos parámetros do modelo de obxecto, tanto os que describen a súa forma, coma os de transformación ríxida. Para a posta en correspondencia os parámetros de forma están prefixados e só hai que determina-la transformación ríxida.

Para extraer os puntos pertencentes á superficie do obxecto é necesario realizar un preprocesado que elimine da imaxe outros puntos de fronteira que poidan aparecer (pasos 2º e 3º), aínda que isto pódese evitar empregando técnicas de crecemento de modelos. Na aplicación que aquí se describe recórrese á primeira das dúas opcións. O crecemento de modelos o que fai é inicializar un gran número de superelipsoides por

todo o volume e, a continuación, entrar nun proceso iterativo que fai evolucionar a algúns deles ata adaptarse ás formas existentes na imaxe, mestres que os demais van sendo eliminados. Como resultado aparecerán segmentados tódolos obxectos presentes na imaxe, e non só o de interese. Para poder adaptar isto ás necesidades da aplicación sería necesario realizar unha selección do modelo correcto, empregando para elo coñecemento a cerca da súa xeometría. Coa outra estratexia, o coñecemento aplícase antes do modelado, na selección dos puntos de fronteira.

Temos entón que o método de construción dos modelos vai ser o cálculo do mínimo dunha función non lineal nun espacio multidimensional. De entre o amplo conxunto de técnicas que se poden empregar para a optimización, a elixida foi un algoritmo xenético. Esta elección ten varias xustificacións, relacionadas principalmente coa converxencia a mínimos globais e coa súa adecuación a funcións complexas. Neste caso a complexidade radica na non linearidade e na gran dimensionalidade do problema, que non afectan en absoluto á codificación do vector de parámetros no algoritmo xenético, e tamén no manexo de restricións no rango dos parámetros, que se tratan dun xeito moi sinxelo. De todos modos o algoritmo de optimización non vai ser un factor crítico no resultado final. Lembremos que o obxectivo non é unha descrición detallada do obxecto.

2.5 Recoñecemento de baixo nivel

O procesado da imaxe previo ó modelado ou á posta en correspondencia ten como obxectivo a extracción dun conxunto de puntos que, presumiblemente, pertencen á superficie do obxecto. Para determinar esta distribución de puntos pódense utilizar técnicas de procesado de baixo nivel non baseado en modelos. O resultado que vai ofrecer, como cabe esperar dese tipo de tratamento da imaxe, será moi pobre, polos motivos que mencionamos no apartado 2.2, pero a etapa de modelado será capaz de extraer a información global implícita nesa nube de puntos.

O preprocesado consta de dúas fases (ver figura 2.1). En primeiro lugar hai que facer unha detección de bordes (figura 2.1, 2º paso). Para esta fin pódense aplicar filtros no dominio da frecuencia, que actúan eliminando a información de baixa frecuencia, ou pódense empregar filtros espaciais, que detectan variacións locais do nivel de gris. Dentro desta última modalidade, existen varias estratexias. Por un lado están aquelas baseadas nunha estimación das primeiras derivadas direccionais do nivel de gris, calculadas para cada punto da imaxe nunha certa veciñanza. Como combinación das distintas compoñentes calculadas obtense unha magnitude que nos informa do brusca que é a variación da cor en cada punto, que xeralmente será unha aproximación ó gradiente no dominio discreto. A continuación hai que definir un criterio que, a partir desta información, determine que puntos pertencen á fronteira dun obxecto. Un criterio é definir un umbral, de forma que tódolos puntos que teñan valor de gradiente maior ca el considérase que pertencen a unha fronteira. A imaxe que resulta de tomar esta opción pode presentar superficies de fronteira de grosor maior que a unidade. Unha solución mellor, que foi a empregada neste traballo, é determinar os máximos locais do gradiente de nivel de gris. Por outro lado están as técnicas baseadas no cálculo das derivadas segundas direccionais, que permiten realizar unha aproximación á laplaciana.

Os puntos de fronteira son nesta ocasión aqueles nos que a función laplaciana cruza polo valor cero.

A segunda fase consiste no etiquetado das superficies resultantes da detección de bordes, mediante o cómputo das propiedades que as caracterizan. Estas etiquetas servirán logo para realiza-la selección de superficies pertencentes ó obxecto, baseándonos en coñecemento (figura 2.1, 3º paso). En función do tipo de obxecto a segmentar, definirase unha función de avaliación de cada parche de superficie que indica en que medida se parece cada parcela de superficie ó prototipo da clase de obxecto. Esta función dependerá de propiedades xeométricas, como a curvatura, que caracteriza a forma dun modelo determinada, e dos niveis de gris e de gradiente de nivel de gris que, en imaxes médicas, poden axudar a determinar o tipo de tecido do órgano. Os parches que tomen un valor da función maior son bos candidatos a pertencer á superficie do obxecto a modelar

Á final desta etapa o que temos é un conxunto de parches de superficie con alta probabilidade de pertencer ó obxecto, pero que non describen correctamente a súa forma, pois aparecerán rexións inconexas e outras ramificadas pola unión con parches pertencentes a outros obxectos. Sen embargo, estes datos son bos dabondo para realiza-la posta en correspondencia co modelo, que será o que realmente utilizaremos como descrición da superficie, e non os parches de fronteira, resolvendo así o problema da carencia de información estrutural.

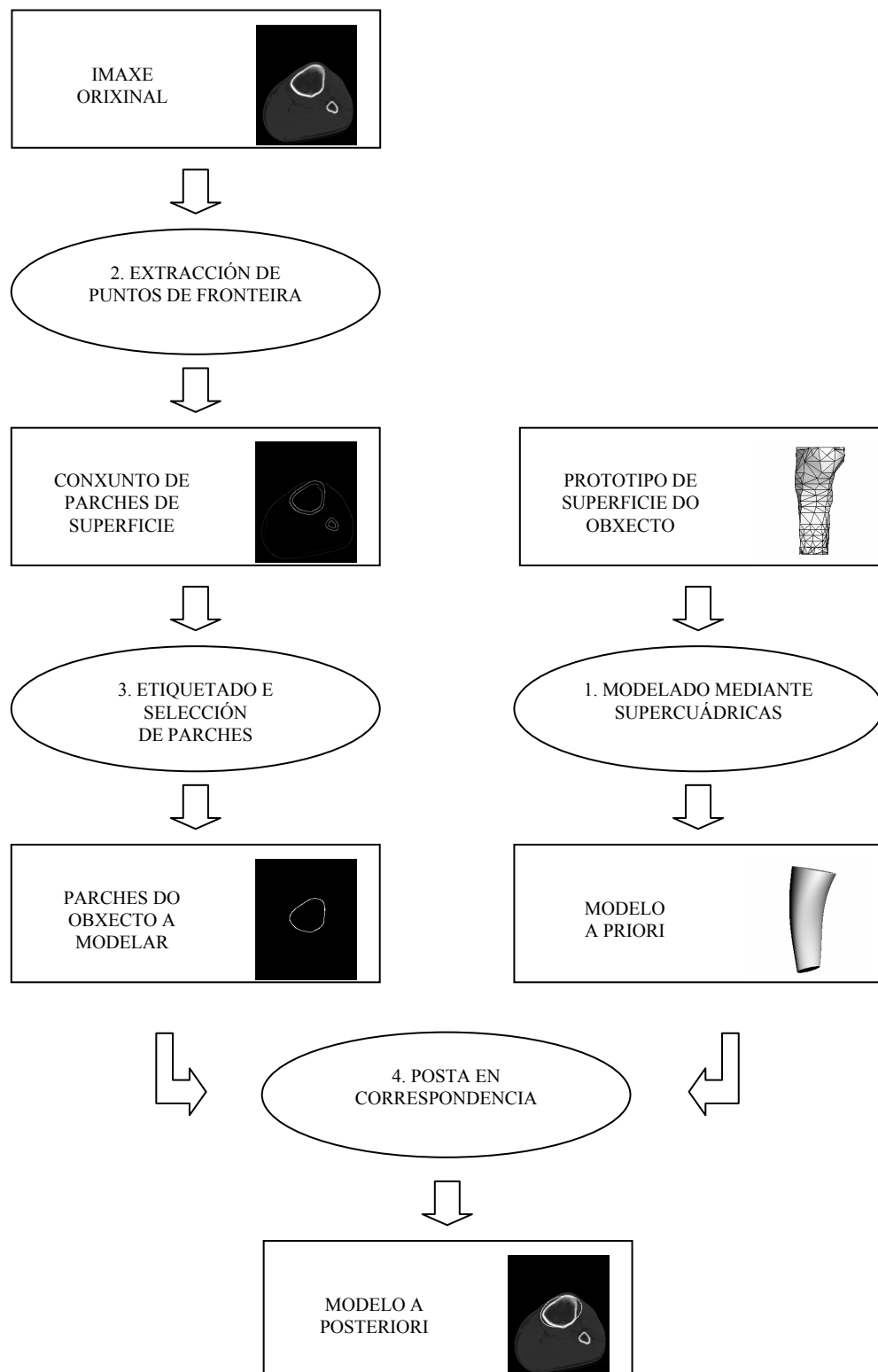


Figura 2.1. Secuencia de procesado para a inicialización dun modelo deformable. No paso 1 defínese un modelo de forma a priori a partir da superficie promedio do obxecto extraída de imaxes de adestramento. Os pasos 2 e 3 constitúen a fase de preprocesado de baixo nivel, da que se obteñen os puntos de fronteira para a posta en correspondencia co modelo a priori, no paso 4.

3 MODELOS DE SUPERFICIE

3.1 Esquemas de representación

Á hora de elixir un esquema de representación de superficie debemos ter en conta varios aspectos. En primeiro lugar hai que considerar se é apropiada para o tipo de imaxes que imos tratar. Neste sentido haberá que estudia-las seguintes propiedades:

- **potencia**; qué variedade de formas á capaz de adoptar e se estas son suficientes no dominio da aplicación.
- **completitude**; buscarase un método que non presente ambigüidades, é dicir, que dous obxectos diferentes non teñan a mesma representación.
- **unicidade**; que a un obxecto só lle corresponda unha única representación.

A definición formal destes conceptos pódese encontrar no traballo de Flynn e Jain [24].

En segundo lugar hai que ter en conta outras cuestións máis prácticas, relacionadas co custe computacional da obtención do modelo, cos requirimentos de memoria e coa facilidade de implementación dos métodos de reconstrucción.

A continuación preséntase unha revisión dalgunhas das técnicas de representación máis comúns. Para cada unha delas indícanse as súas propiedades, que quedan resumidas na táboa 3.1 á final deste apartado. Tamén se estudia unha característica moi importante en aplicacións de modelado, que é a invariancia ante transformacións ríxidas.

3.1.1 Distribución de puntos de fronteira

Descibir unha superficie ou un volume por medio dunha nube de puntos ten a vantaxe de que a súa obtención a partir dunha imaxe é bastante directa. Sen embargo, a información aportada soamente polas coordenadas dos puntos é insuficiente á hora de visualizar o resultado ou de aplicar un postprocesado. Haberá que dotar á representación de estrutura, incluíndo información acerca da conectividade entre os puntos. Por este motivo, os datos organízanse xeralmente en forma de grafo [24]. Segundo o tipo de aplicación será interesante organizar a información dun xeito ou doutro. Pódese estruturar de forma xerárquica, por exemplo nunha árbore, de tal xeito que os nodos folla sexan os puntos, e capas superiores da xerarquía emparellarían nodos para formar arestas, agruparían arestas para formar polígonos, polígonos para construír poliedros e incluso se podería operar sobre poliedros simples para obter figuras máis complexas.

Haberá ocasións nas que a complexidade destas representacións será innecesaria. Para estas situación hai técnicas máis sinxelas, como é a coñecida como *wireframes* (figura

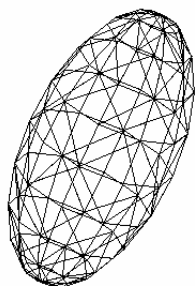


Figura 3.1. Wireframes

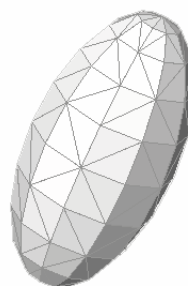


Figura 3.2. Triangulación

3.1), que tan só define arestas que unen pares de puntos, sen especificar caras ou adxacencias entre arestas.

Unha forma máis usual de defini-la conectividade é agrupando os puntos para formar polígonos, indicando tamén as adxacencias entre estes. Isto facilita a manipulación da representación cando se usen técnicas de modelado baseadas en elementos finitos ou similares. Con frecuencia, veremos tamén que a cada polígono se lle asigna tamén un vector normal á súa superficie. Aínda que a orientación da superficie se pode extraer directamente a partir dos vértices, a normal será imprescindible sempre que sexa necesario indicar a que lado queda o volume interior, mediante o sentido do vector.

Dentro das representacións mediante poligonalización, a máis usada, por ser a máis simple, é a triangulación, que se soe obter a partir dun subconxunto dos puntos de fronteira que sexa suficiente para o nivel de resolución desexado. Na figura 3.2 temos un exemplo de triangulación na que se resalta a diferenza cos *wireframes* da figura 3.1, xerando un efecto do sombreado dos triángulos. Isto é posible porque están definidas as caras do poliedro.

A complexidade do problema da triangulación dunha dun conxunto de vértices radica na determinación da conectividade, que non é única. Existen multitude de algoritmos de triangulación que ofrecen resultados moi distintos. A calidade destes será maior canto maior sexa a uniformidade dos triángulos, é dicir, canto máis se aproximen ó triángulo equilátero. A triangulación que asegura a solución óptima en canto a uniformidade é a triangulación de Delaunay.

Triangulación de Delaunay

O método de obtención dunha triangulación desenrolado por Delaunay, obtense a partir do diagrama de Voronoi [7, 8], que é unha descomposición do espazo en rexións, chamadas celas de Voronoi. Cada vértice leva asociada a rexión dos puntos do espazo que o teñen a el como vértice máis próximo. Se se unen mediante segmentos os vértices cuxas celas son adxacentes, obtéñense as arestas da triangulación óptima.

Respecto ás características que antes mencionabamos para avaliar os distintos esquemas de representación, hai que dicir que a potencia de representación estará limitada a figuras poliédricas, pero temos que pensar que esta pode se-la mellor aproximación se se dispón de dunha densidade de puntos elevada, especialmente á hora de describir formas moi irregulares que dificilmente se poden aproximar mediante

ecuacións matemáticas analíticas. Aparece, eso si, o problema da non unicidade na representación, dado que para unha determinada distribución de vértices poden existir distintas estruturacións dos mesmos que den lugar a figuras idénticas.

Por outra banda, o nivel de resolución que pode acadar este modelo, que como dixemos está directamente relacionado coa densidade de puntos, entra en conflito coas prestacións que ofrece, pois os requirimentos que esixe en canto almacenamento en memoria son altos. Se se consegue obter unha maior densidade de puntos nas rexións da superficie que definen de forma máis característica a súa forma, reducindo o número de puntos en zonas máis uniformes aforrariase moito espacio en memoria. Isto faise en ocasións fixando a densidade local de puntos en función da curvatura.

3.1.2 Ecuacións implícitas

A utilización de ecuacións implícitas permite representa-las superficies como un conxunto de parámetros de forma global, $\vec{q}$. A definición da superficie paramétrica vén determinada por unha expresión do tipo:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) = cte.$$

Os modelos máis empregados son os de cuádricas e supercuádricas [51]. No caso das cuádricas, como o seu nome indica, f é un polinomio de segundo grao en x , y e z . O conxunto de formas representables mediante esta ecuación comprende elipsoides, paraboloides e hiperboloides. Polo xeral, só as primeiras serán de interese en tarefas de modelado. Os superelipsoides, tamén chamados elipsoides xeneralizados ou supercuádricas, son unha extensión das cuádricas, onde se substitúen as potencias cadradas por variables reais.

$$f = \left[\left(\frac{x}{a_1} \right)^{2/\varepsilon_2} + \left(\frac{y}{a_2} \right)^{2/\varepsilon_2} \right]^{\varepsilon_2/\varepsilon_1} + \left(\frac{z}{a_3} \right)^{2/\varepsilon_1}$$

onde a_1 , a_2 , e a_3 son os radios medidos sobre os eixes principais do superelipsoide e ε_1 e ε_2 son os chamados parámetros de cuadratura, que definen a forma das seccións transversal e axial da superficie, como se pode comprobar na figura 3.3. Cando os parámetros de cuadratura ε_1 e ε_2 toman o valor 2, o que temos é un elipsoide, pero ademais vanse poder modelar dende cubos ata cilindros, ou tamén figuras cerradas non convexas.

O maior inconveniente que presenta é a non unicidade. Para unha única figura pódese obter máis de un conxunto de parámetros que a describa, o que pode ser un grave problema en aplicacións de reconstrución, a menos que se poida limita-lo rango dos posibles valores que estes parámetros poden tomar. Por outro lado, tanto para cuádricas como para supercuádricas vai haber que incluír na representación parámetros de posición e orientación no espazo, o cal supón tamén un problema de ambigüidade, pois ó traballar con variables angulares haberá que salvar o problema da periodicidade das relacións trigonométricas. Ademais, algunhas figuras, como a esfera, presentan simetría de rotación, agravando o problema da non unicidade.

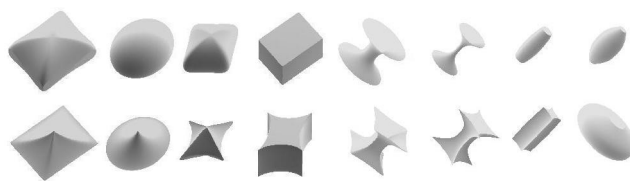


Figura 3.3. Superficies supercuádricas para diferentes valores de ε_1 e ε_2

En ámbolos dous casos destaca a simplicidade dos modelos, que se poden caracterizar cun conxunto moi reducido de parámetros. Por outra banda, a flexibilidade das formas está moi limitada e impón fortes restriccións de simetría. Por eso estes modelos son de gran utilidade cando queremos modelar obxectos artificiais creados pola man humana, como por exemplo en aplicacións CAD. Se o tipo de imaxes que imos tratar é máis complexo, esta representación permite realizar unha descrición a groso modo que, en tarefas de recoñecemento ou análise, pode ser suficiente. Pero se o obxectivo é obter unha reconstrución do obxecto de alta resolución, existen representación que permiten obter unha definición cun nivel de detalle moito maior, permitindo un axuste local moi bo. O inconveniente destes esquemas é que non incorporan parámetros que describan a forma e a localización do obxecto de forma global, polo que soen ser moi susceptibles de desviarse do obxectivo a causa da presenza na imaxe de artefactos indesexados ou ruído. Cando sexa así, o modelo implícito pode ser moi útil para complementar ou guiar un modelado de tipo local. Sobre este aspecto volveremos máis adiante cando entremos a describi-la metodoloxía que neste traballo se implementa.

3.1.3 Ecuacións explícitas

No modelado mediante funcións explícitas as superficies adoitan estar definidas en espacios paramétricos.

$$\vec{r} = \vec{f}(u, v)$$

No que segue expoñeranse algunhas das aproximacións máis empregadas en 2D [21]. A extensión de 2D a 3D realízase mediante o produto tensorial de dúas curvas paramétricas para obter unha superficie.

Moitas das aproximacións empregadas habitualmente están baseadas no modelo de curvas splines (figura 3.4). Unha spline é unha curva definida por partes. O espacio paramétrico divídese en intervalos equiespaciados (*spans*) separados por nodos (*knots*). Os nodos están asociados ós datos do axuste. A cada intervalo do espacio paramétrico correspóndelle un segmento de polinomio. A curva resultante interpola os puntos que interveñen no axuste, e gardan tamén continuidade as derivadas nos puntos do axuste. As características negativas que presenta a representación mediante splines son, por un lado, as curvas que se obteñen son pouco suaves, debido a que se interpolan os puntos de control, o que da lugar a rugosidades cando se traballe con imaxes ruidosas, e por outro, que cada un dos puntos inflúe en toda a forma da curva, debido ás condicións de continuidade.

Para imaxes con baixa relación sinal ruído debemos buscar unha aproximación que proporcione formas máis suaves. Unha solución mellor neste sentido obtense coas B-splines. A B-spline, é unha spline que se calcula como unha suma de funcións base $b^n(t)$ polinómicas de grao n , pesadas cunha serie puntos de control p . A expresión paramétrica da curva sería a seguinte:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k-1} p_i b_i^n(t)$$

Unha propiedade importante das B-splines, que as diferencia das splines ordinarias, é que teñen soporte local. Isto débese a que as funcións base están definidas para cada intervalo do espazo paramétrico de maneira que só toman valores non nulos nunha veciñanza dese intervalo. Deste xeito, a influencia dun punto de control está limitada a esa veciñanza. Canto maior é o grao da función base, maior é o número de intervalos nos que se estende polo cal a curva será máis suave. Polo mesmo motivo, a influencia dun punto de control de forma individual diminúe co grao dos polinomios. Outra diferencia cos splines é que os B-splines non interpolan necesariamente ós puntos de control.

As B-splines diferéncianse entre uniformes e non uniformes segundo como se faga a división en intervalos do espazo paramétrico. Das B-splines non uniformes derívanse as curvas NURBS (*Non Uniform Rational Bezier Splines*), que se obteñen como cociente de dúas curvas B-splines non uniformes. As vantaxes respecto ás B-splines estándar son notables, posto que permiten construír de forma precisa seccións cónicas, mentres que cos B-splines só se pode aproximar empregando un número moi elevado de puntos de control. Temos entón nas NURBS un esquema de representación válido tanto para formas xeométricas simples como figuras irregulares complexas. Ademais, a diferencia das B-splines, as NURBS son invariantes baixo transformacións de perspectiva, o que mellora as prestacións á hora da visualización, xa que só será preciso aplica-la transformación de perspectiva ós puntos de control e non a toda a curva.

3.1.4 Representacións “de varrido”

O nome “*representación de varrido*” fai referencia ó modo en que se xeran as superficies a partir do vector de parámetros do modelo. Este vén descrito por unha curva definida nun espazo tridimensional e un contorno pechado plano. A liña actuará como xeneratriz dun volume de revolución e o contorno como sección transversal do volume. As primitivas que xera tamén son coñecidas como cilindros xeneralizados. Se a sección transversal é lineal, o eixo de rotación é recto e a forma da sección non varía ó longo do eixo - é homoxénea -, entón o cilindro xeneralizado pódese describir mediante unha ecuación implícita. En calquera outro caso, isto non é posible, e o tratamento matemático destas primitivas resulta moi dificultoso.

En xeral, sóense empregar liñas rectas como eixes de rotación, polo que as superficies resultantes van ter simetría axial. Este é o caso que se ilustra na figura 3.5. O dominio de aplicación vai estar entón limitado a obxectos que posúan esta propiedade, aínda que, igual que no caso das cuádricas e supercuádricas, tamén se pode empregar en combinación con modelos de forma libre. Outro inconveniente, é que polo xeral os

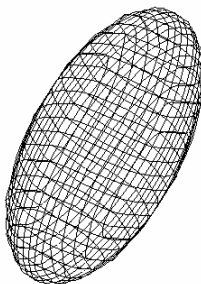


Figura 3.4. Representación dunha superficie mediante Splines

métodos de reconstrucción para os cilindros xeneralizados só van ser invariantes respecto a rotacións e translacións no plano normal ó eixo de revolución.

3.1.5 Técnicas de subdivisión do espacio

As técnicas de subdivisión do espacio, [48 ,49], non son representacións de superficie propiamente, senón de rexións. En 3D, o espacio divídese en elementos volumétricos, voxels, e faise unha distinción entre aqueles voxels que pertencen ó interior dun volume e aqueles que son externos. A partir dun esquema deste tipo é fácil construí-la superficie de fronteira mediante a simple inspección dos voxels. Pero almacenar e procesar esta información voxel a voxel pode ser moi custoso en canto a requirimentos de memoria.

Na práctica, a información pódese comprimir aproveitando as adxacencias. Isto pódese acadar adaptando o grao de subdivisión de cada rexión do espacio – o tamaño dos voxels – de acordo coa resolución precisa en cada rexión. Así, se temos un volume cunha superficie curva irregular, necesitaremos moitos voxels de pequeno tamaño para describir a fronteira, pero moi poucos voxels de gran tamaño no interior. Un esquema que reúne estas características é a subdivisión do espacio nunha árbore de octantes (*octree*), que permite obter a mesma representación mediante un grafo moito máis simple. A pesar desta vantaxe, o feito de utilizar voxels como primitivas de representación, da lugar a superficies con aspecto de dentes de serra. Un solución mellor ofrécena o método de *Marching Cubes*, que utiliza unha técnica de subdivisión do espacio para obter un esquema de triangulación, que como xa se veu, ofrece mellores prestacións para a tarefa de visualización. Ambos esquemas cos seus respectivos métodos de obtención describíense a continuación.

Árbores de octantes

O esquema de representación de *octree* é unha árbore binaria, onde as follas representan voxels. A súa obtención a partir dunha imaxe é moi sinxela. O nodo raíz correspóndese ó volume completo da imaxe. A continuación divídese este espacio en octantes, que serán os nodos fillos, e estúdanse as súas propiedades. Se un octante está totalmente contido no volume dun obxecto ou é totalmente externo a el, entón non se subdivide máis. En caso contrario continúaase particionando cada subvolume ata acadar un tamaño de voxel mínimo. Deste xeito poderase compactar a información, en maior ou menor medida segundo as características da imaxe, respecto á subdivisión total. A

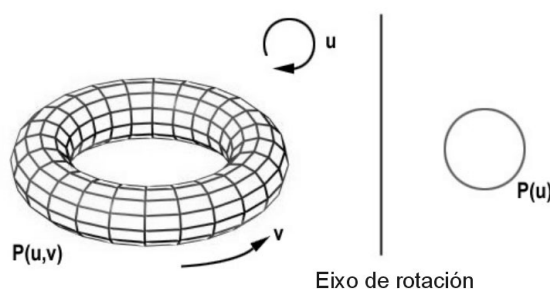


Figura 3.5. Cilindro xeneralizado: toro

parte desto, ten tamén a vantaxe de que resulta moi sinxelo efectuar o cómputo de propiedades xeométricas, como volume ou área da superficie externa, centros de masas, etc. Ademais, dada a natureza xerárquica da árbore, vaise poder traballar ó nivel de resolución que se desexe. Sen embargo, esta non é unha boa representación para tarefas de análise e recoñecemento de patróns, pois non é invariante ante transformacións ríxidas, posto que nestes casos prodúcese unha modificación total da árbore.

Na figura 3.6 temos un diagrama dunha árbore de cuadrantes (*quadtree*), que é unha representación análoga á arbore de octantes pero definida nun espacio bidimensional. Na figura (a) temos un exemplo de como queda particionado o espacio para unha curva irregular. Nas figuras (b) e (c) móstrase a diferenciación entre bloques internos e externos para o cuadrante etiquetado co número 3 no primeiro nivel da árbore. Na figura (b) os bloques ocupados están pintados de negro. A figura (c) represéntase unha das ramas da árbore. Os nodos folla clasifícanse como ocupados ou baleiros.

En xeral, as primitivas de forma empregadas nas árbores de octantes, son voxels, é dicir, cubos nos que o lado é unha potencia de 2. Isto esixe que as imaxes teñan tamén dimensións $2^n \times 2^n$. Isto facilita o cálculo da árbore pero reverte nun menor aproveitamento das adxacencias. Permitindo que o espacio se subdivida en poliedros de caras con orientación arbitraria poderíanse empregar menos primitivas para a partición do mesmo volume. A técnica que utiliza esta estratexia chámase árbore de partición binaria do espacio ou árbore BSP. O que fai é ir subdividindo o espacio mediante planos, que non teñen porque ser paralelos ós eixes coordenados, senón que se lles permite calquera orientación. Inicialmente teremos que determinar cal é o plano que divide ó volume, o nodo pai, en dúas rexións de forma óptima. A imaxe queda dividida en dous semiespacios. Para distingui-los nodos fillo defínese o semiespacio dereito como a rexión dos puntos $\vec{r}$ que verifican $f(\vec{r}) = ax + by + cz + d \geq 0$, onde $f(\vec{r})$ é a ecuación do plano. O semiespacio esquerdo virá definido por $f(\vec{r}) < 0$. Na seguinte iteración buscarase, para cada subespacio por separado, o plano de subdivisión óptimo, así sucesivamente ata que se considere que un subespacio está totalmente contido ou é totalmente externo á figura.

Este esquema da lugar a representacións máis compactas que a árbore de octantes. A gran desvantaxe é que agora é necesario empregar un tempo adicional de cálculo en

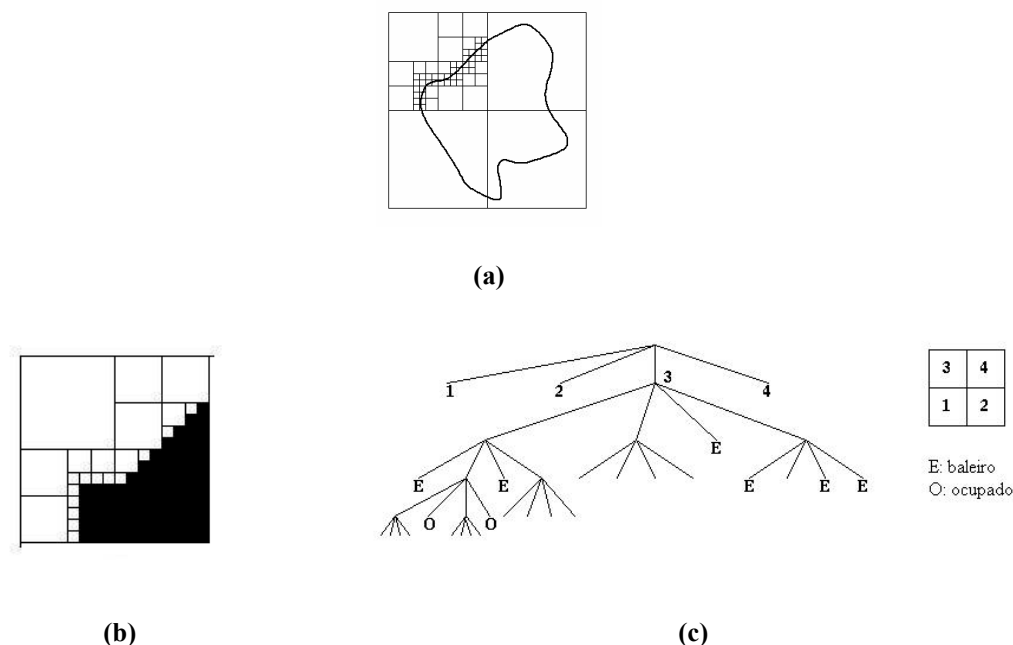


Figura 3.6. Quadtree

determina-lo plano óptimo. Por outra parte, este método non soluciona o problema da non invariancia fronte a transformacións rixidas, co agravante de que, a diferenza dos *octrees*, a árbore non é única para unha imaxe dada. Isto é moi fácil de ver. Se temos unha imaxe negra cunha figura branca, teremos infinitos planos que cortan a imaxe en dúas rexións e que deixan a figura totalmente contida nunha delas, quedando a outra baleira, mentres que na árbore de octantes as divisións están prefixadas.

Marching Cubes

A técnica de *Marching Cubes*, máis que un esquema de representación, é un método de reconstrucción de superficies trianguladas, polo que se podería incluír esta técnica no primeiro desta serie de apartados, xunto coa triangulación de *Delaunay*. Sen embargo, ten a particularidade de que fai uso dunha voxelización da imaxe para dividir o espazo en rexións, a partir do cal extrae a triangulación. O método consiste na extracción dunha isosuperficie a partir dunha imaxe volumétrica. A isosuperficie é o análogo a unha curva de nivel, pero estendida a 3D. Neste caso vén definida por un nivel de gris, que marca a fronteira do obxecto, así que, dalgún xeito esta é unha técnica de detección de puntos de fronteira baseada en rexións, xa que require dunha umbralización. Tamén a árbore de octantes se pode estender deste xeito, pois as imaxes definidas en niveis de gris hai que transformalas a binarias.

O mecanismo é o seguinte. Supoñamos, simplificando un pouco as cousas, que temos un volume onde o espazo baleiro aparece coloreado cun nivel de gris en torno a i , e que ese volume contén un obxecto de cor media j . Na zona de transición haberá unha variación do nivel de gris de i a j que será máis ou menos suave. Entre eses dous valores podemos definir un umbral de nivel de gris que establece unha división entre puntos internos e externos ó obxecto. Este é un proceso de baixo nivel, con tódalas

limitación que esto supón. Do que se trata agora e de obter unha representación da isosuperficie en forma de triangulación a partir desa clasificación dos puntos.

A idea é que, se dous puntos adxacentes están situados en rexións distintas, é dicir, se un pertence ó interior do obxecto e o outro é externo, entón a isosuperficie debe pasar por entre os dous. O que fai o algoritmo de *Marching Cubes* é, en primeiro lugar, agrupar os puntos en cubos (voxels). Para cada cubo estudíase a que rexión pertence cada un dos seus 8 vértices. A continuación haberá que determinar cal é o plano ou planos que dividen o cubo de forma que os puntos internos e externos queden situados en semiespacios separados. Se por exemplo temos un único vértice pertencente ó volume do obxecto, entón o plano de división será un que corte ás arestas do cubo que comparten ese vértice. A intersección deste plano e as arestas do cubo prodúcese por tres puntos, definindo un triángulo da superficie do obxecto. Este é só un dos 15 posibles casos que se poden dar, contando co caso trivial, onde tódolos vértices están na mesma rexión. A triangulación correspondente a cada caso pódese ver na figura 3.7.

Agora só resta decidir por que punto da aresta vai a cruzar cada plano de división. A solución máis sinxela é cortar sempre polo punto medio da aresta. Esta aproximación moi poucas posibilidades para as orientacións dos triángulos, polo que a superficie que se obtén resulta moi pouco suave, especialmente se a imaxe se toma cunha frecuencia de mostraxe baixa. Outra aproximación, máis usada que a anterior, é realizar unha interpolación lineal dos niveis de gris sobre os puntos das arestas dos cubos. O punto de corte será o que tome o nivel de gris umbral que se definiu para a clasificación das rexións. Deste xeito obtéñense superficies máis suaves.

3.1.6 Transformación do eixe medio

Como comentabamos, a representación dun obxecto mediante voxelización, indicando para cada punto da imaxe se pertence ó volume do obxecto ou non, é moi custoso no almacenamento. Algunhas das técnicas que vimos conseguen comprimi-la representación, substituíndo a voxelización punto a punto por outra máis compacta, onde os voxels son rexións do espazo de tamaño variable. A técnica de transformación do eixe medio (MAT, *Medial Axis Transform*) [48, 49], permite obter resultados aínda mellores, pois un volume vai quedar reducido ó seu esqueleto. O esqueleto dunha superficie é unha liña, ou conxunto de liñas que recolle a súa estrutura. A esta liña é que se lle chama eixo medio. Se o que temos é un volume, o esqueleto será unha superficie, polo que, en ocasións, farase referencia ó obxecto medio (*medial object*), en lugar do eixo medio, para englobar ámbalas dúas definicións.

Para determina-lo esqueleto dun obxecto hai que definir unha métrica que proporcione, para cada punto do interior do volume, unha medida da distancia ó punto do contorno da superficie ou superficie do volume máis próximo. Unha vez determinado o mapa de distancias, extráese a liña que une os máximos e ese será o esqueleto. Intuitivamente vese que esta liña vai equidistar do contorno da superficie, de aí o nome transformada de eixo medio. A representación MAT consiste no esqueleto e no valor da distancia asociado a cada un dos seus puntos. Por tanto, a métrica empregada vai ser moi importante para a posterior reconstrución da figura. Algunhas das medidas que se soen utilizar son a distancia euclídea, a distancia Manhattan, tamén chamada *city block*, que representa a suma das compoñentes do vector diferenza, e a distancia tomada como o

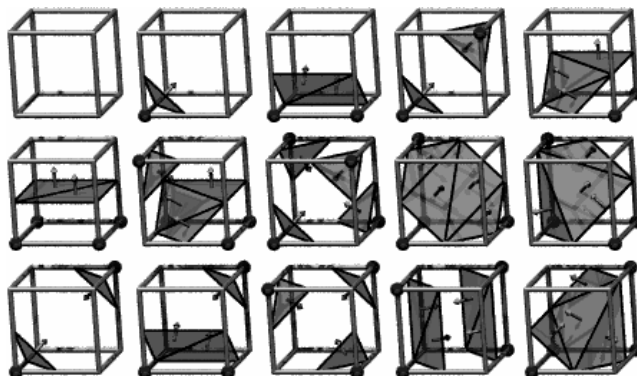


Figura 3.7 As 15 posibles divisións do cubo

máximo de entre estas compoñentes. O esqueleto calculado a partir da distancia euclídea pódese interpretar como o lugar xeométrico dos centros das circunferencias, no caso 2D, inscritas no contorno, que con radio máximo, percorren o interior da superficie. En 3D pódese definir igual só que agora son esferas. Isto é moi fácil de ver mediante un exemplo, coma o da figura 3.8, que mostra o esqueleto tanto para dúas como para tres dimensións. As dúas últimas métricas son aproximacións que, en certas aplicacións poden ser suficientes. Supoñen un aforro en tempo de cálculo.

En calquera dos tres casos a relación entre unha figura e a súa representación MAT é sempre válida e biunívoca, ou sexa, que a representación é completa e única. Ó mesmo tempo, a potencia de representación é moi alta, pois permite definir formas arbitrarias con gran resolución, e todo isto nunha representación compacta que require moi pouco espacio para o seu almacenamento.

3.1.7 Representacións cualitativas

As representacións cualitativas manexan un tipo de información totalmente distinto ó dos esquemas anteriores. Non se parametrizan magnitudes características dunha figura xeométrica, senón que se sobe no nivel de abstracción para intentar facer unha descrición cualitativa do aspecto que presenta. Aínda que o tratamento cuantitativo é necesario en moitas das áreas da visión artificial, no caso concreto da realización de tarefas de análise ou recoñecemento pode ser suficiente establecer unha distinción entre clases de obxectos empregando un conxunto de descritores das súas propiedades, relacionados coa percepción que temos deles. A idea foi proposta por Biederman, quen elaborou unha clasificación do que el chamou *geons* (*GEometrical iONS*), diferenciándose cada un deles polos valores dun conxunto de propiedades cualitativas. En tarefas de análise esta idea pode ser interesante, sempre que o número de clases de obxectos definidos sexa suficiente no campo de aplicación. En caso contrario, a clasificación resulta ambigua, pois nunha mesma clase estamos englobando obxectos distintos que nos interesa diferenciar. En xeral este tipo de representación soe ser incompleta.

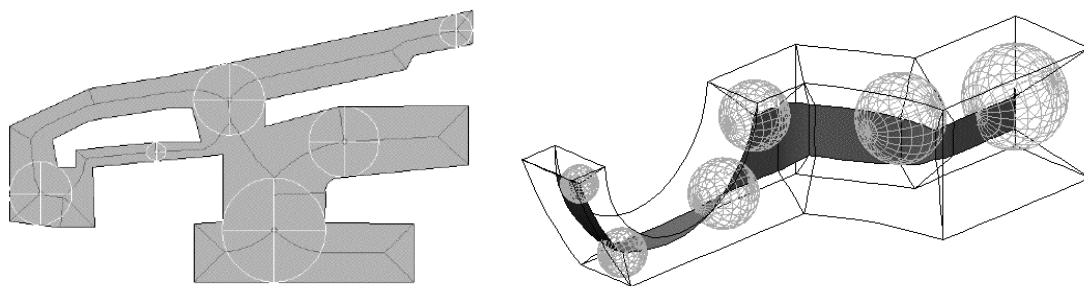


Figura 3.8. Obxecto medio en 2D e 3D

3.1.8 Xeometría constructiva: CSG

CSG son as siglas de *Constructive Solid Geometry*. Esta representación fai uso dalgunhas das que vimos anteriormente, a modo de primitivas de volume. Obxectos máis complexos confecciónanse a partir das primitivas aplicando sobre elas transformacións xeométricas e/ou combinando varias figuras mediante operacións de unión, intersección ou diferenza. Para crear un obxecto pode ser necesaria toda unha xerarquía de operacións sobre as primitivas, que se estruturan en forma de árbore binaria (figura 3.9).

As primitivas de forma que se empregan soen vir definidas mediante ecuacións implícitas, incluídos algúns volumes de revolución como cilindros e conos, e tamén poliedros, pero estes últimos, en lugar de representárense mediante unha distribución de vértices, veñen dados polo volume encerrado por un conxunto de planos. Deste xeito, todas estas primitivas se poden descompoñer en subárbores, nos que os nodos folia son expresións do tipo

$$f(x, y, z) \geq 0$$

ás que se lles chama semiespacios, pois definen unha superficie que divide o espazo en dúas rexións. Se f é lineal teremos un poliedro, e se é de segundo grao, teremos as cuádricas. Substituíndo na árbore CSG a subárbores correspondente a cada primitiva, poderemos obter formas complexas como combinación de semiespacios. Tamén existen sistemas deste tipo que, ademais das primitivas anteriores, empregan superficies spline pechadas e incluso NURBS.

Este esquema de representación está pensado para aproveitar a potencia de representación das distintas primitivas que emprega. Nese sentido a solución é mellor que calquera das anteriores, pero a costa dunha serie de inconvenientes moi importantes. Un é que o emprego de semiespacios e de operacións booleanas fan desta unha representación moi descritiva, volvéndose dificultoso o cálculo de propiedades xeométricas. O outro é que a árbore CSG non é única para un obxecto determinado.

Este sistema é completo e válido na medida en que o son as primitivas de superficie empregadas. O feito de combinar estas primitivas non impón ningún tipo de ambigüidade adicional nin da lugar representacións erróneas.

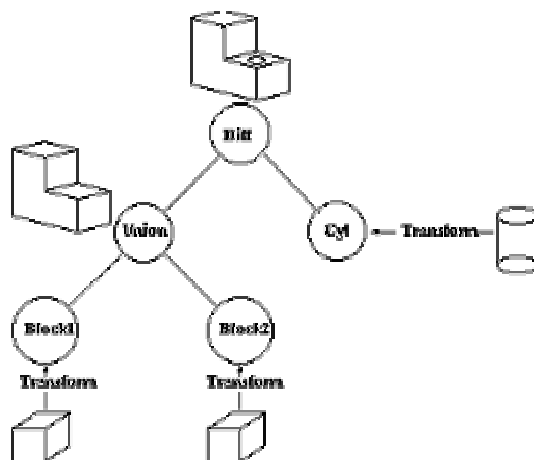


Figura 3.9. Árbore CSG

3.1.9 Esquemas de representación comparados

Botando unha ollada ás características que presentan os distintos esquemas de representación descritos nesta revisión podemos construír a táboa 3.1, onde se especifican para cada esquema as propiedades que se mencionaban ó principio desta sección. A modo de resume preséntase a continuación unha comparativa entre os distintos esquemas, facendo referencia ás propiedades de potencia de representación, completitude e unicidade.

Sobre a potencia de representación, pódese dicir que os esquemas baseados en nubes de puntos teñen unha potencia de representación tan alta como se desexe, en función da densidade superficial de puntos que se elixa. Sen embargo, esta representación estará limitada a figuras poliédricas. O mesmo problema presentan os esquemas de subdivisión do espacio. Dende este punto de vista, as ecuacións explícitas son máis potentes, pois é posible escoller o grao das funcións polinómicas, o que permite definir superficies con curvaturas tan suaves como se crea conveniente. Tamén a representación MAT ten unha potencia de representación alta. No extremo oposto están as ecuacións implícitas, que soen ter un número moi limitado de graos de liberdade. Respecto ós *GEONS*, o simple feito de ser unha representación cualitativa xa supón unha forte restricción en canto á capacidade descritiva, pero eso dependerá de como se definan as clases de obxectos. Finalmente, temos os sistema *CSG* que, como herdán as propiedades das primitivas que emprega para construír obxectos, é o esquema máis flexible.

Da completitude diciamos que se cumpre cando unha determinada configuración dos parámetros do esquema de representación lle corresponde unha única superficie. Isto verifícase en xeral para tódolos esquemas que acabamos de ver, coa excepción dos *GEONS*, que nunha mesma clase poden agrupar a distintas superficies.

De entre os esquemas de representación que acabamos de revisar, só a transformación de eixe medio e os *geons* cumpren a propiedade de unicidade. Para o resto das técnicas existirán múltiples representacións dun mesmo obxecto. Os esquemas de distribución

de puntos teñen o problema de que existen innumerables formas de determina-la conectividade. Incluso cando se escolle un método sistemático de poligonalización, do tipo da triangulación de *Delaunay* ou de *Marching Cubes*, a representación non é única. Por exemplo, se se quere triangular unha superficie plana con forma de cadrado, existen dúas posibles configuracións da conectividade, segundo a diagonal que se elixa para forma-los triángulos. Coas ecuacións implícitas, a non unicidade é debida en xeral ás simetrías de rotación, pero tamén en casos particulares existen outro tipo de ambigüidades, como sucede no caso dos superelipsoides cos parámetros de cuadratura. No caso das representacións mediante ecuacións explícitas, sucede que unha mesma superficie se pode definir empregando distintos conxuntos de puntos de control. Tampouco a construción da árbore *CSG* é única para unha superficie determinada, pois un obxecto pódese construír mediante diversas composicións de primitivas simples.

A elección dun ou doutro esquema debe ter en conta estes tres aspectos, pero tamén outro de tipo máis práctico, relativos á eficiencia en tempo de cálculo e tamén ó compacta que sexa a representación. Neste sentido, calquera representación que involucre unha descrición en forma de distribución de puntos, de elementos finitos, ou de voxelización do espacio permite realizar certo tipo de tarefas, como por exemplo a visualización, de forma máis rápida. Noutro tipo de representacións haberá que levar a cabo unha discretización da superficie. Sen embargo, non todo son vantaxes. Para obter unha boa resolución na definición das superficies é preciso dispor dun volume de datos moi elevado, co conseguinte uso de espacio en memoria. Ademais, nalgúns métodos de reconstrución, o feito de non dispor dunha expresión analítica que defina a superficie pode ser un problema. É o caso das técnicas de rexistro, onde o cálculo das distancias entre superficies e puntos de imaxe non se pode facer de forma directa.

Dado que no presente traballo se vai realizar o modelado precisamente mediante un proceso de posta en correspondencia, pensamos que é máis interesante empregar un modelo descrito por unha ecuación implícita. A perda potencia de representación que esto supón, en comparación cos esquemas de nubes de puntos, non é aquí un problema, senón máis ben unha vantaxe, pois a información que se manexa é de máis alto nivel, o que, como veremos, aporta robustez ó proceso. O axuste a pequena escala xa se introduce posteriormente na etapa de deformación local e o cambio de representación que debe mediar entre ambas fases efectúase con rapidez por medio dunha simple discretización.

Esquema de Representación	Potencia	Compleitude	Unicidade
Wireframes	alta	si	non
Poligonalización	alta	si	non
Triangulación de <i>Delaunay</i>	alta	si	non
Cuádricas	moi baixa	si	non
Supercuádricas	baixa	si	non
Cilindros xeneralizados	baixa	si	non
Splines	alta	si	non
B-splines	alta	si	non
NURBS	moi alta	si	non
Árbores de octantes	alta	si	non
Marching cubes	alta	si	non
MAT	alta	si	si
Geons	moi baixa	non	si
CGS	moi alta	-	non

Táboa 3.1 Características de varios esquemas de representación

3.2 Métodos de reconstrucción

Unha vez seleccionado o esquema de representación que se vai empregar para defini-lo modelo, hai que estudar a estratexia de obtención dos parámetros correspondentes a partir da imaxe. Para a reconstrucción dun modelo existen multitude de técnicas. Nesta sección vanse presentar algunhas das máis comúns, que se clasifican en dous grupos: técnicas de posta en correspondencia con modelos a priori mediante transformacións ríxidas, e modelos de deformacións. En realidade, ambas estratexias son complementarias, como xa se comentou no capítulo introductorio. Para rematar esta revisión presentaranse unha serie de algoritmos de optimización que poden ser aplicados para implementar estes métodos de reconstrucción.

3.2.1 Posta en correspondencia mediante transformacións ríxidas

Cando se ten un coñecemento exacto da morfoloxía do obxecto que se desexa modelar, é posible evita-la reconstrucción do modelo para cada imaxe. Partindo dunha conxunto de imaxes de adestramento pódese obter un modelo a priori do obxecto, co que a análise dunha nova imaxe queda reducida á busca da transformación que superpón modelo e obxecto. Estas transformacións deben manter a forma orixinal do modelo a priori, polo que se aplican transformacións ríxidas: de translación, de rotación e de

escala. A forma de determina-los parámetros da transformación varía segundo o tipo de representación elixido. Besl e McKey [6] presentaron unha revisión completa dos distintos métodos de rexistro de imaxes. A continuación explícanse os métodos utilizados para modelos de superficies paramétricas, definidos mediante ecuacións implícitas, e modelos de distribucións espaciais de puntos.

Funcións implícitas

Para a reconstrucción de funcións implícitas sóense aplicar técnicas que implican un proceso de optimización dunha función que reflexa a calidade do axuste do modelo ós datos. Unha das aproximacións máis usadas consiste en tratar de minimizar unha función que represente unha medida relacionada coa distancia da superficie ós puntos da imaxe [6, 9]. En xeral, calcular a distancia exacta entre un punto do espazo e unha superficie pode ser complexo e custoso computacionalmente, o que leva a utilización doutras métricas. A propia función implícita, dada por $f(x,y,z)$, pode ser empregada para estimar en que medida se desvían os puntos da imaxe do modelo, sempre e cando a función sexa monotonamente crecente ou decrecente coa distancia exacta. Na revisión de Bolle e Vemuri [9], e tamén no traballo de Whaite de Ferrie [58] preséntanse algunhas aproximacións para os casos de cuádricas e supercuádricas.

Tamén con este esquema de representación se pode aplicar un método probabilístico, intentando maximiza-la probabilidade de que a superficie sexa a correcta. Para superficies simples, como cuádricas é sinxelo definir unha función de probabilidade. Por exemplo, para o caso da esfera, onde haberá que determina-los valores óptimos do seu centro $\vec{c}$ e do radio $\vec{R}$, preséntase en [9] a seguinte función de probabilidade:

$$p \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^N \left(\|\vec{x}_i - \vec{c}\| - \vec{R} \right)^2 \right\}$$

Para outro tipo de funcións implícitas máis complexas, como conos ou supercuádricas, é máis complicado definir unha función de probabilidade axeitada.

Nubes de puntos

Cando a modelo non vén dado por unha función analítica, senón que se representa por unha colección de puntos contidos na superficie, o cálculo das distancias entre puntos do modelo e da imaxe é máis complicado. O máis frecuente é que a correspondencia entre puntos de obxecto e imaxe non sexa coñecida, polo que non se pode aplicar unha técnica de minimización de distancias de forma directa. Haberá que establecer un criterio para emparellar os puntos da superficie do modelo cos do obxecto. Isto é importante non só na posta en correspondencia do modelo co obxecto, senón tamén na definición dos modelos a priori, que xeralmente se obteñen a partir de varias imaxes de proba, que hai que relacionar entre si.

Para salvar este problema Krahnstöver [29] e Feldmar e Ayache [22] utilizan unha técnica baseada en marcas (*landmarks*), que son un conxunto reducido de puntos característicos da superficie. O primeiro dos autores permite a definición destas marcas por parte do usuario. Definidas estas marcas tanto no modelo coma no obxecto, temos unha relación un a un entre elas e podemos calcular distancias entre os pares de puntos. Entón xa se pode aplicar o algoritmo de rexistro de ambas imaxes. Se o modelo se vai

empregar como superficie inicial dun algoritmo do tipo dos anteriores, basta con determinar a transformación ríxida que hai que aplicar ó modelo para que as marcas queden o máis próximas posible. Se se desexa un maior axuste dos puntos ó modelo, pódese permitir transformacións afíns doutro tipo, ademais das ríxidas, que supoñen unha deformación global do modelo, e incluso outras transformacións máis complexas.

Pola súa banda, Feldmar presenta un algoritmo totalmente automático, no que a correspondencia entre puntos de ambas figuras se realiza en función de propiedades xeométricas. Con este obxectivo propón unha técnica na que se van aplicando de forma sucesiva unha serie de transformacións sobre o modelo.

En primeiro lugar realízase unha transformación ríxida, onde un conxunto de puntos da superficie do modelo se emparellan con aqueles outros pertencentes ó obxecto que teñan curvaturas similares. Isto vai seguido dunha deformación global do modelo para acadar un maior axuste, aplicando unha transformación afín non ríxida. Á hora de implementala busca da transformación afín global, utiliza un criterio de emparellamento co máis próximo, só que a medida da distancia que se utiliza está tomada nun espazo 8D, onde se mide a proximidade entre as coordenadas espaciais, pero tamén entre as curvaturas principais e as compoñentes do vector normal en cada punto. Concretamente utilízase unha medida da distancia euclídea d , onde os eixes das 8 coordenadas están escalados con cadanseu factor α_i , de modo que cada termo teña o mesmo peso no cálculo da distancia. A expresión é a seguinte.

$$d(P, P') = \{\alpha_1(x - x')^2 + \alpha_2(y - y')^2 + \alpha_3(z - z')^2 + \alpha_4(n_x - n_x')^2 + \alpha_5(n_y - n_y')^2 + \alpha_6(n_z - n_z')^2 + \alpha_7(k_1 - k_1')^2 + \alpha_8(k_2 - k_2')^2\}^{1/2}$$

Finalmente, temos a etapa de deformación local. A diferenza dos modelos de forma global, onde hai que efectuar un cambio de representación, discretizando a superficie, na representación mediante distribución de puntos xa se pode aplicar unha fase de deformación local. Esta podería ser algunha das que máis adiante se exporán nesta sección. No algoritmo de Feldmar óptase polas transformacións afíns, pero esta vez serán independentes para cada punto da superficie.

3.2.2 Métodos deformables

Os métodos deformables, sexan de deformacións locais ou globais, precisan da definición dun modelo de partida, a partir da cal se deforman para axustarse ós datos da imaxe imaxe. A inicialización da superficie deformable pode realizarse mediante a interacción co usuario pero, dependendo do modelo de deformación empregado, pode ser necesaria unha maior aproximación inicial. Cando isto é así, é habitual utiliza-lo modelo de deformación como un refinamento dun modelo a priori, que previamente se puxo en correspondencia coa imaxe mediante transformacións ríxidas. Neste apartado preséntanse algunhas técnicas que utilizan deformacións para a reconstrución detallada dos obxectos.

Snakes.

A técnica coñecida como modelo de contornos activos -superficies activas no caso 3D- ou *snake* é un método de segmentación moi coñecido pola súa robustez. Entre os

moitos autores que investigaron sobre os modelos de *snakes*, tal vez os máis destacados sexan Terzopoulos e McInerney [28, 33, 35, 36, 37, 39, 55]. Trátase de simular o comportamento da superficie como un corpo sometido ás leis da física. Para levar esta idea a cabo hai que definir un conxunto de forzas de interacción dos puntos da superficie entre eles e cos puntos da imaxe. A cada par de puntos do mallado da superficie asóciase unha forza de atracción definida en función dunha serie de propiedades dos materiais, como elasticidade ou rixidez. Estas interaccións, comunmente chamadas forzas externas ou de imaxe, van selas que controlen as propiedades xeométricas intrínsecas da superficie, regulando a curvatura e a continuidade. As forzas externas, tamén chamadas de imaxe, deben producir unha atracción cara os puntos da imaxe. A superficie final será aquela para a que o total das forzas estean en equilibrio.

Se en lugar de empregar a formulación Newtoniana, aplicamos as ecuacións de Euler-Lagrange, o problema tradúcese na minimización da integral dunha función de densidade de enerxía ou, no dominio discreto, a suma dunha función de enerxía local estendida a tódolos nodos da superficie. A solución de mínima enerxía correspóndese coa posición de equilibrio. As forzas antes citadas derivaríanse desta enerxía:

$$E_{snake} = \iint_S [(E_{int.}(f) + E_{ext.}(f))] dudv$$

onde $f = f(u, v)$ é a superficie, expresada en función dos parámetros naturais $u, v \in [0, 1]$.

Explicuemos agora máis en detalle os termos que contribúen á enerxía dun nodo. Por unha parte teremos a enerxía responsable da atracción cara a fronteira dos obxectos. Pódense definir de moitas formas, en función das características das imaxes en xogo, pero habitualmente provocan a atracción da superficie cara ós máximos do gradiente, onde se supón que debe haber unha fronteira entre dous obxectos, como por exemplo

$$E_{ext.}(f) = -\|\nabla I(f)\|^2$$

Para regula-la continuidade ou a curvatura da superficie introdúcense termos de enerxía interna relacionados coa elasticidade e a flexibilidade da superficie, como se se tratase dunha lámina en tensión ou unha membrana. Unha posible definición de enerxía interna é a seguinte

$$E = \alpha(f)(f_u^2 + f_v^2) + \beta(f)(f_{uu}^2 + 2f_{uv}^2 + f_{vv}^2)$$

A variable α controla a elasticidade, a resistencia ó estiramento. Cando α toma o valor cero, unha forza suficientemente grande pode produci-la rotura da membrana. A variable β é a responsable da rixidez e regulará a facilidade coa que se dobra a lámina e ata que punto se pode flexionar. Se β é nulo, estamos permitindo que haxa descontinuidades na orientación da superficie, é dicir, que se formen esquinas. Os parámetros de elasticidade e de rixidez poden ser constantes ou funcións. Os valores de α e de β escóllense en función do tipo de obxectos a reconstruír e da calidade das

imaxes en canto a ruído. Así é como se aproveita o coñecemento para guiar o modelado.

As funcións de enerxía que acabamos de describir son só un exemplo de cómo se pode controlar modelar o comportamento da superficie. Para cada tipo de aplicación haberá que estudar que funcións de enerxía son as que ofrecen mellores resultados. Se a definición da funcional de enerxía é adecuada, obtense un método de reconstrución moi robusto, pouco sensible ó ruído.

Ademais do problema da inicialización, os *snakes*, igual que a maioría dos modelos de superficie, presentan outro importante problema, que é a representación de obxectos con ocos, que teñan unha superficie exterior e unha ou máis interiores. En xeral, con calquera tipo de modelo de superficie, a solución é realizar procesos de reconstrución de cada superficie do obxecto de forma independente. Isto requirirá unha boa inicialización das superficies e ademais modelar comportamentos distintos para as superficies externa e internas. Así, nun modelo de *snakes* debemos asegurarnos de que a superficie interior inicial estea contida totalmente na cavidade do obxecto, e que as forzas que a controlan sexan tales que a fagan expandirse. Coa exterior sería ó revés.

Sen embargo existe unha técnica que permite solucionar este problema de forma sinxela, mediante o que se denomina crecemento de modelos. Esta técnica consiste en inicializar un conxunto de pequenos modelos de *snake* por todo o volume da imaxe, chamados “sementes” (*seeds*). Estas sementes irán crecendo progresivamente, sendo este crecemento orixinado comunmente por un tipo de forzas chamadas de inflación. Se un modelo en particular está dentro do volume do obxecto acabará por acadar as rexións fronteirizas tanto interior como exterior. Cando dous modelos crecen ata tocarse entre si, é posible fusionalos nun só modelo. O resultado de fusionar tódolos modelos do interior do obxecto é que en lugar de unha superficie acabarán formando dúas ou máis, segundo sexa o caso. As demais sementes, que están no exterior ou dentro das cavidades do obxecto irán desaparecendo.

Modelado bayesiano

O obxectivo do modelado bayesiano, igual que o das *snakes*, é tamén na optimización dunha funcional. No caso dos *snakes* había que minimizar unha enerxía, que viña dada pola integral dunha densidade de enerxía estendida a tódolos elementos da superficie. Nesta ocasión hai de maximizar unha probabilidade, definida como a integral dunha función de densidade de probabilidade, definida para todo elemento de superficie. O que se fai é asumir que a superficie do obxecto, representada por unha malla ou un matriz de puntos x , é a que fai máxima a función $p(x|z)$, é dicir a probabilidade de que dada unha imaxe z a superficie do obxecto que representa estea definida por x . A función $p(x|z)$ vén determinada polo teorema de Bayes.

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{z}) \propto \pi(\mathbf{x}) f(\mathbf{z} | \mathbf{x})$$

Tanto a probabilidade a priori da existencia da superficie x como a probabilidade condicional de observar a imaxe z a partir de x , representadas na expresión anterior como $\pi(x)$ e $f(z|x)$ respectivamente, pódense modelar en función do tipo de imaxes en xogo. Unha exemplo de como modelar estas funcións é o das seguintes ecuacións, nas que Z_{int} e Z_{ext} son constantes de normalización.

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_{\text{int}}} e^{-U_{\text{int}}(\mathbf{x})}$$

$$f(\mathbf{z} | \mathbf{x}) = \frac{1}{Z_{\text{ext}}} e^{-U_{\text{ext}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$$

Os termos U_{int} e U_{ext} son funcións de enerxía análogas ás definidas para *snakes*. De feito, poden empregarse as mesmas funcións descritas nesa sección. Desta forma, a maximización da probabilidade total equivale á minimización da suma da enerxía de cada punto x_i da superficie, como se pode ver a continuación.

$$p = \prod_i p(x_i | z_i) \propto \prod_i \exp\{-(U_{\text{int}}(x_i) + U_{\text{ext}}(x_i, z_i))\} = \exp\left\{-\left(\sum_i U(x_i, z_i)\right)\right\}$$

No traballo de Storvik [54] preséntase un sistema de segmentación baseado nesta técnica, que utiliza método de optimización de *temperado simulado*, que se describe máis adiante, para a enerxía da superficie. Ó utilizar unha técnica de minimización global, a superficie non se estabiliza en mínimos locais, polo que resulta unha sistema de segmentación robusto, que permite evitar a etapa de inicialización do modelo.

Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é unha técnica que serve para estimar o estado dun sistema, ou actualizar unha estimación previa, mediante a utilización do coñecemento que proporciona un conxunto de medidas dalgunha forma relacionadas coas variables de estado. Ás veces sucede que non é posible obter os valores das variables de estado de forma exacta, pero si podemos tomar medidas de outras magnitudes que, a pesar de que non gardan unha relación directa coñecida cos parámetros que queremos determinar, si manteñen unha certa dependencia. A forma de determinar en que medida está o conxunto de variables de estado condicionado ós valores que tome o conxunto de medidas, é calculando a covarianza entre unhas e outras magnitudes. Nun sistema dinámico, isto implica que se pode facer un seguimento do estado dun sistema coñecendo a evolución dun conxunto de medidas indirectas e da súa covarianza coas variables de estado.

Esta idea pode aplicarse á reconstrucción de modelos de superficie. Neste caso os parámetros que definen o estado da superficie do obxecto son unha distribución de puntos de fronteira, x . Sobre a imaxe podemos tomar medidas aproximadas deses puntos de fronteira, pero estas non son os valores exactos, sempre vai haber un sinal de ruído que corrompe a imaxe. De maneira que os datos da imaxe tomada gardarán a seguinte relación coa imaxe real

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

Aquí H é a función de transformación, que neste caso vai ser linear, que representa a relación entre as variables de estado e as medidas e $\mathbf{n}$ é o sinal de ruído. Como $\mathbf{n}$ non é coñecido non é posible determinar x de forma directa da expresión anterior. A forma de adaptar a técnica do filtro de Kalman, habitualmente empregada para predecir o comportamento de sistemas dinámicos, utilízase por exemplo no traballo desenvolto

por Altman e Brinkley [10] sobre segmentación 2D. Trátase de ir refinando o estado do sistema a medida que se van introducindo os valores de novas medidas. Canto maior sexa o número de puntos de medida, maior será a calidade da estimación da superficie, obtendo maior resolución a nivel local.

O vector de estado soe inicializarse cun modelo a priori, representado mediante unha distribución de puntos, tomados de tal xeito que cada un se poida referenciar e, desa forma, relacionalo cunha posterior medida do mesmo punto. Unha forma de facer isto é empregando coordenadas esféricas, dando a distancia do punto ó centro de masas do obxecto para valores prefixados dos ángulos. Sobre un conxunto de imaxes de adestramento, determinanse os valores estimados destes puntos mediante o cálculo da superficie promedio, que se corresponderán co estado inicial do sistema $\mathbf{x}_0$, e calcúlase tamén a matriz de correlación dese estado inicial C_0 . Nas expresións seguintes para $\mathbf{x}_0$ e C_0 a función $E(r_i)$ representa o valor esperado para o punto de superficie r_i .

$$\mathbf{x}_0 = [E(r_1), E(r_2), \dots, E(r_n)]$$

$$C_0 = \{\sigma(r_i, r_j)\} = \{E(r_i r_j) - E(r_i)E(r_j)\}$$

Unha vez que se dispón da inicialización da superficie, éntrase nun proceso iterativo, no que se van actualizando os valores das variables de estado a medida que se van introducindo novas medidas de puntos de superficie. O cambio que se produce no estado será a diferenza entre a nova medida z_i e o valor que se predixo para ela, $\hat{z}_i$, ponderado pola ganancia de Kalman, K_i , que é función da matriz de correlación, e da incerteza asociada á medida, Λ_i . En cada iteración o estado do sistema actualízase segundo a expresión

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + K_i(z_i - \hat{z}_i)$$

onde

$$K_i = C_{i-1} H_i^T (H_i C_{i-1} H_i^T + \Lambda_i)^{-1}$$

$$\hat{z}_i = H_i \mathbf{x}_{i-1}$$

En cada iteración z_i vai ser un subconxunto de puntos do vector de estado, polo que os elementos de H_i tomarán valores 0 ou 1 segundo corresponda.

Ó tempo que se actualiza o valor das variables de estado, faise o mesmo coa matriz de correlación, de forma que cando o proceso se da por terminado, ademais de ter o modelo da superficie teremos tamén información sobre o erro asociado a cada estimación.

$$C_i = C_{i-1} - K_i H_i C_{i-1}$$

Os resultados obtidos por Altman e Brinkley [10] en segmentación de imaxes de ril son moi satisfactorios, demostrando que cun número non moi elevado de medidas se pode acadar a converxencia de tódolos puntos do modelo a priori, e non só de aqueles sobre

os que se realizan medidas, cara a superficie do obxecto particular, ó tempo que se obteñen valores moi reducidos do erro estatístico asociado ó resultado final.

Análise de compoñentes principais

Unha forma moi usual de introducir coñecemento no modelado de forma é facer un estudio estatístico sobre un conxunto de imaxes de adestramento. Un modelo a priori coma o que se emprega na técnica do filtro de Kalman, pode definirse determinando a superficie promedio a partir dunha colección de exemplos do obxecto a modelar. Sen embargo, dispoñendo de tal colección pódese extraer unha maior cantidade de información útil. Pode, por exemplo realizarse unha análise modal. Isto consiste en determina-las principais deformacións que presenta o conxunto de mostras respecto á forma media. Calquera mostra poderá expresarse como unha combinación linear destas deformacións principais.

As deformacións principais deben ser tales que permitan captar as posibilidades de variación do obxecto particular. O modo de obter estas deformacións é a de realizar unha análise de compoñentes principais (*PCA*), mediante a cal se determinan os principais modos de variación no conxunto de adestramento, que se considerarán como as deformacións principais para ese obxecto. Se o conxunto de adestramento vén descrito por un conxunto de N superficies representadas todas elas mediante unha distribución de M puntos característicos $\mathbf{m} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$, será necesario calcular a superficie promedio.

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i$$

Os modos de variación principais veñen dados polos autovectores $\mathbf{e}_i$, da matriz de covarianza C , de dimensión $3M \times 3M$

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}})^2$$

Desta forma podemos expresar un exemplo concreto do obxecto como a suma da superficie promedio e unha serie de deformacións locais expresadas como unha combinación linear das deformacións principais.

$$\mathbf{m}_i = \bar{\mathbf{m}} + \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{e}_i$$

onde w_i son os pesos que hai que determinar.

Unha vez definido o modelo mediante a superficie promedio e os autovalores da covarianza, axustar o modelo a un conxunto de puntos pertencente a un novo caso do obxecto consistirá en determinar, ademais da transformación ríxida que superpón o obxecto coa superficie promedio, os pesos w_i da descomposición en deformacións principais, por medio dalgún algoritmo de minimización da distancia entre os novos puntos e os do modelo, similar ós que se viron no apartado de posta en correspondencia

con transformacións ríxidas. No traballo de Fleute [23] pódese ver un bo exemplo de aplicación deste método a reconstrución da articulación do xeonllo.

Deformacións aplicadas a esquemas combinados

Ata agora expuxéronse unha serie de métodos de reconstrución que se poden aplicar a distintos esquemas de representación, principalmente a distribucións espaciais de puntos e de ecuacións implícitas. Un tratamento especial requiren os modelos que combinan máis dun esquema de representación. A continuación preséntanse dúas alternativas para reconstrución de modelos que unifican as representacións de forma global e local

Terzopoulos e Metaxas [55] propoñen a representación das superficies 3D mediante a combinación de distintos esquemas de representación, de maneira que as carencias dun e doutro se vexan compensadas. A implementación concreta que eles realizan nese traballo, involucra dous tipos de representación: os superelipsoides para describir a forma global do obxecto, e un conxunto de deformacións locais, que eles optan por definir utilizando un esquema de elementos finitos como funcións base, que son modeladas con *splines*. Así, a superficie do modelo $\mathbf{r}$ será unha versión da superficie do superelipsoide $\mathbf{s}$ deformada, trasladada e rotada. Se a deformación vén dada por un conxunto de vectores de desprazamento $\mathbf{d}$ respecto á superficie orixinal do superelipsoide

$$\mathbf{r} = \mathbf{t} + R(\mathbf{s} + \mathbf{d})$$

onde $\mathbf{t}$ representa a translación e R é a matriz de rotación.

Os vectores de desprazamento virán dados como combinación de funcións base b_i . Se $diag(b_i)$ é matriz diagonal construída a partir desas funcións base e $\vec{q}_d$ son os puntos de control, entón

Desta forma o vector de parámetros a optimizar englobaría ós parámetros de forma do superelipsoide, $\mathbf{q}_s$, que definen a superficie $\mathbf{s}$, os parámetros de transformación ríxida, que á súa vez se descompoñen en parámetros de translación, $\mathbf{q}_t = \mathbf{t}$, e de rotación $\mathbf{q}_r$, que determinan a matriz de rotación, e un amplo conxunto de parámetros de deformación local, $\mathbf{q}_d$, que son o puntos de control das *splines*. Os vectores de deformación defínense como unha suma de funcións base b_i pesadas por estes puntos de control. Se $diag(b_i)$ é a matriz diagonal construída a partir desas funcións base, entón os vectores de desprazamento exprésanse do seguinte xeito.

$$\mathbf{d} = \sum_i diag(b_i)(\mathbf{q}_d)_i$$

De modo que o vector de parámetros a optimizar $\mathbf{q}$ será o seguinte

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_t, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_d)$$

Todos estes parámetros optimízanse simultaneamente, empregando un modelo activo, no que se define unha enerxía interna asociada unicamente ós parámetros de *spline*, correspondente á enerxía dunha membrana, e unha enerxía externa de imaxe, responsable das forzas que actúan sobre o total dos graos de liberdade do sistema.

Por outro lado, Chang e Col. [15] presentan unha representación que segue nesta mesma liña, pero opta por un método de reconstrucción distinto, mediante a descomposición xerárquica das transformacións. Esta aproximación, igual que a anterior, foi pensada para a súa aplicación en modelado dinámico. Nesta ocasión tamén se busca un modelo que permita captar distintos niveis de detalle nunha mesma representación, utilizando tamén unha combinación de esquemas de forma global e local. A diferenza principal está na maneira de abordar a obtención dos parámetros do modelo. En lugar de intentar recuperar tódolos parámetros de forma simultaneamente, aquí trátase de descompoñer o vector de parámetros en subconxuntos asociados cada un a un tipo de movemento. O obxectivo desta descomposición é facer uso do coñecemento que se ten sobre os patróns de movemento do obxecto, que serían independentes entre si, de forma que se poidan modelar e analizar por separado mediante técnicas sinxelas.

Unha forma de realizar esta descomposición é distinguir entre as seguintes categorías de movemento: un movemento ríxido global, T , que abarcaría translación, rotación e escalado; movemento global non ríxido, D , e aquí poderíanse incluír toda unha serie de deformacións globais, como as que máis adiante describiremos para o noso modelo de superelipsoides, como son o curvado ou a torsión; movemento ríxido local, t , que esta vez estaría asociado, non á totalidade do obxecto, senón a pequenos elementos de volume; e por último, deformacións locais, d , descritas mediante unha combinación linear de funcións de deformación base.

A optimización dun modelo m levaríase a cabo na seguinte orde:

$$\mathbf{m}' = T(D(t(d(\mathbf{m}))))$$

En certo modo, esta é a filosofía na que está baseado este traballo, aínda que neste caso o modelo sexa estático. Nel describiremos en detalle os procesos polos cales se obtería un modelo de forma global e transformación ríxida, que posteriormente podería ser refinado mediante a optimización dos parámetros de forma local de xeito totalmente independente.

3.2.3 Técnicas de optimización

Decidida a estratexia de reconstrucción, é dicir, o criterio en que se vai fundamentar a extracción dos parámetros do esquema de representación, hai que buscar unha técnica que permita dar coa configuración óptima segundo ese criterio. Estas técnicas poden agruparse en locais ou globais, en función da visión que teñen do espazo de solucións. Os algoritmos locais máis típicos son os de gradiente, que só permiten determinar a solución óptima máis próxima ó punto de partida, pero que, nesa rexión, ofrece unha solución moi exacta. Dentro das técnicas globais, destacamos o *temperado simulado* e os algoritmos xenéticos, que permiten unha maior exploración do espazo de solucións.

Algoritmos de gradiente

O cálculo do gradiente en problemas de optimización, cando estas están definidas en espazos multidimensionais, utilízase para determinar a dirección de máxima variación. Facendo evoluciona-lo estado do sistema nesa dirección acabárase por acadalo extremo da función. O algoritmo máis sinxelo deste estilo é o de gradiente descendente,

onde o sistema evoluciona a pasos constantes cara ó extremo. En cada iteración do algoritmo de gradiente o vector de parámetros a optimizar $\vec{x}$ desprázase unha distancia k , sendo k un valor constante, na dirección do vector de gradiente normalizado, do seguinte xeito

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + k \frac{\nabla f(\vec{x}_i)}{|\nabla f(\vec{x}_i)|}$$

Esta aproximación presenta un problema que pode ser bastante grave. Se o valor da constante k é grande, pódense producir oscilacións en torno ó extremo sen chegar a acadalo nunca con precisión suficiente. Para eso habería que reduci-lo valor do paso, pero faría o algoritmo moi lento. Unha posible solución a este problema sería permitir que k fose diminuindo nas sucesivas iteracións do algoritmo. En cada iteración pódese calcular o valor óptimo de k . O valor de k fai a que conduce ó menor valor posible de f na seguinte iteración, determínase pola condición de mínimo:

$$\frac{\partial}{\partial k} f(\vec{x}_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial k} f\left(\vec{x}_i + k_i \frac{\nabla f(\vec{x}_i)}{|\nabla f(\vec{x}_i)|}\right) = \vec{0}$$

Calculado o valor de k_i , substitúese na expresión de $\vec{x}_{i+1}$. Isto diminúe a taxa de converxencia, pero o tempo de cálculo en cada iteración increméntase.

Máis eficiente é o algoritmo de Newton-Raphson, que emprega o cálculo de derivadas segundas para acadar un maior axuste do extremo. Derívase empregando unha aproximación en serie de Taylor de primeira orde

$$f(\vec{x}_{i+1}) \approx f(\vec{x}_i) + \nabla f(\vec{x}_i)(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i)$$

e da condición de extremo $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$. Se o sistema está inicializado nas proximidades do extremo podemos realiza-la seguinte aproximación

$$\nabla f(\vec{x}_{i+1}) = \vec{0} = \nabla f(\vec{x}_i) + \nabla \nabla f(\vec{x}_i)(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \Rightarrow$$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - H^{-1}(\vec{x}_i) \nabla f(\vec{x}_i)$$

Este algoritmo ten o inconveniente de que hai que calcula-la matriz hessiana H en cada iteración. De novo podemos recorrer á suposición de estar preto dun extremo local, o que nos serve para poder realizar unha aproximación de segunda orde da función. co cal a matriz hessiana é constante e non será necesario recalculala de cada vez. Deste xeito, a aplicación deste algoritmo resulta moi interesante para a optimización de funcións non lineais.

O principal problema será conducir as variables do sistema ás proximidades do extremo local. Se isto non é posible hai que recorrer á técnica de gradiente descendente, que pola súa parte, non ofrece unha boa aproximación do mínimo. O ideal sería poder empregar a técnica de gradiente descendente nunha etapa inicial do algoritmo e finalmente o algoritmo de Newton-Raphson para un mellor axuste do extremo.

O algoritmo que consegue levar a cabo este propósito é o de Levenberg-Marquardt. É unha variante do algoritmo de Newton-Raphson que introduce un parámetro que regula o a evolución. O que se fai é substituír a matriz hessiana por outra

$$A_{ii} = (1 + \lambda)H_{ii}$$

$$A_{ij} = H_{ij} \quad i \neq j$$

Inicialmente o parámetro λ toma un valor elevado, de forma que na matriz A dominan os elementos da diagonal, dando lugar a un comportamento similar ó de gradiente descendente. Isto conduce ó sistema ás proximidades do extremo máis próximo. Se o longo da execución do algoritmo se fai decrecer o parámetro, A vai tender a H, e entón teremos de novo o algoritmo de Newton-Raphson, acadando o extremo con precisión.

Temperado simulado

O temperado simulado (*Simulated Annealing*, SA) é un bo algoritmo para a obtención de extremos globais, especialmente útil cando a función posúe ademais moitos extremos locais. É apropiada tanto para funcións continuas definidas en espazos multidimensionais, como é o caso que nos interesa, como para funcións avaliadas sobre un espazo de configuracións discreto pero extenso, onde, por un lado, non se poden aplicar algoritmos de gradiente, e por outro, realizar unha busca exhaustiva resulta inabordable. O principio de funcionamento está extraído da termodinámica, concretamente da cristalización das moléculas cando son sometidas a un arrefriamento lento. Dunha forma moi simplificada, pódese describir este fenómeno deste xeito: a perda de enerxía das moléculas ó descender a temperatura produce unha redución da mobilidade térmica. Se isto sucede a un ritmo suficientemente lento, estas partículas teñen a oportunidade de “bailar” entre distintos estados ata atopar o de mínima enerxía, estabilizándose e formando a estrutura cristalina. Para un determinado valor da temperatura, a probabilidade que ten unha partícula de estar nun estado de enerxía E vén dada pola fórmula de distribución de probabilidade de Boltzmann.

$$p(E) \propto \exp\left(-\frac{E - E_{\min}}{kT}\right)$$

Se T decrece lentamente ata cero chégase á situación en que a probabilidade de estar no estado de mínima enerxía será a unidade e o resto serán inaccesibles. Pero para calquera valor de $T > 0$ sempre existe unha certa probabilidade de que a partícula evolucione cara un estado enerxeticamente peor. Vexamos como se aplica esta idea.

Se $E = f(\vec{x})$ é unha función que queremos optimizar –vaise aplicar ó caso da busca dun mínimo global-, o que faremos será ir xerando valores de $\vec{x}$ aleatoriamente en cada iteración do algoritmo. Para cada nova configuración determínase a súa correspondente enerxía e avalíase a probabilidade do sistema de evolucionar cara o novo estado mediante

$$p = \begin{cases} 1 & E_i \leq E_{i-1} \\ \exp\left(-\frac{E(\tilde{x}_i) - E(\tilde{x}_{i-1})}{kT}\right) & E_i > E_{i-1} \end{cases}$$

En función desa probabilidade resólvese se o salto se fai efectivo ou non. En caso afirmativo substitúese o vector de parámetros anterior polo novo. Observando a función vemos que efectivamente, para un valor de T maior que cero, e a diferenza do que sucede nun algoritmo de gradiente, a probabilidade de pasar a un estado con enerxía maior non é nula, o que vai permitir saír de mínimos locais. Isto é moi útil nas primeiras iteracións do algoritmo, onde se require unha exploración do espazo de configuracións na procura do mínimo global, pero a medida que o sistema evoluciona, isto supón un inconveniente, pois introduce imprecisión á hora de situar con exactitude o extremo. Aquí é onde intervéñ o parámetro T , que simula o efecto do descenso da temperatura. Inicialmente tómasse un valor alto de T , co cal asegúrase que o sistema poida cambiar tanto para mellor como para peor. Despois dunha exploración do espazo onde se estima en que rexión pode estar situado o mínimo global, a redución paulatina da temperatura fai que diminúa a probabilidade de que a enerxía suba. Finalmente case tódalas iteracións se resolverán a favor do descenso, cambiando o comportamento do sistema.

En conclusión, este método consegue detectar un extremo global cunha precisión boa, aínda que non se pode asegurar ó cen por cen que o extremo sexa o óptimo. Canto máis lento sexa o decrecemento da temperatura maior seguridade se poderá ter no resultado. Por iso, a pesar de ser un sistema moi efectivo, é pouco eficiente computacionalmente.

Algoritmos xenéticos

A aplicación dos principios da xenética á busca adaptativa e a optimización de funcións deu lugar ó desenvolvemento do que se coñece como algoritmos xenéticos (AX). Os fundamentos sobre os que se constrúe un algoritmo xenético, a saber, os mecanismos de evolución dos cromosomas e o principio de supervivencia do mellor adaptado de Darwin, son simulados artificialmente sobre unha poboación de posibles solucións a un problema determinado. Isto da lugar a un eficaz sistema para aborda-la busca de extremos globais, válido para todo tipo de funcións, por complexas que sexan estas. Algúns estudos interesantes sobre este tipo de sistemas recóllense no traballos de Goldberg [25] e Holland [26].

Os AX son, coma o temperado simulado, técnicas probabilísticas de exploración do espazo de solucións dun problema, pero a diferenza doutras técnicas desta natureza, non traballan cunha única solución en cada iteración, que de aquí en diante imos chamar xeración, senón que se xera toda unha poboación de individuos, representados mediante unha cadea de parámetros a modo de xenes dun cromosoma. As operacións que conducen dunha xeración á seguinte son principalmente a reprodución, que é a transcrición sen alteracións dun cromosoma, o intercambio de xenes, chamado cruzamento (*crossover*), e a mutación. O papel que xoga a función a optimizar na evolución da poboación, é o de outorgar a un individuo maior ou menor probabilidade de intervir na creación da nova xeración, avaliando a bondade de cada solución, que se

correspondería co grao de adaptación ó medio. Pos eso á función a optimizar se lle chama función de adaptación (*fitness function*).

Polo xeral, para a implementación das operacións de variación xenética, soe ser de gran utilidade a codificación dos vectores de parámetros, aínda que esto non é imprescindible. Habitualmente empréganse codificación de tipo binario. Así, unha representación moi usual dunha solución da función é unha cadea de bits formada pola concatenación das codificacións asociadas a cada un dos parámetros. Isto facilita tanto a operación de mutación, que consistiría na selección aleatoria dun dos bits da cadea e a negación do seu valor, como o cruzamento, para o que bastaría seleccionar unha ou máis posicións de truncamento da cadea e o intercambio dos anacos resultantes.

Aínda que existen múltiples variantes do AX, a liña xeral de funcionamento é a que describe o seguinte pseudocódigo.

```

codificación.
inicialización aleatoria da poboación a N individuos.
avaliación da poboación.
repetir
    repetir
        seleccionar 1 individuo e reproducilo.
        seleccionar 2 individuos e recombinalos.
        seleccionar 1 individuo e mutalo.
    ata xerar N novos individuos.
    avalia-la nova poboación.
ata que se acade o criterio de terminación.
```

A terminación da execución do algoritmo pode fixarse cando se acada un determinado grao de aproximación da solución, pero para iso hai que dispor dun certo coñecemento sobre a función que se está a optimizar. Outra solución é deter o proceso de evolución cando se deixen de observar variacións significativas na composición da poboación. Por se esta situación tampouco chega a darse, tamén se pode limitar o número de xeracións.

O por que do funcionamento dos AX está implícito na forma de representar e manipular as variables. A hipótese dos bloques constituíntes (*building blocks*) xustifica a converxencia do algoritmo baseándose no estudo dos esquemas (*schemata*) que compoñen a cadea de xenes. En [5, 25, 27] preséntase unha introducción a esta teoría. Un esquema é unha secuencia de valores determinados dun subconxunto de xenes pertencentes ó cromosoma –na codificación binaria soen representarse polos valores correspondentes, marcando o resto dos bits como variables, como por exemplo 10***, ou 11*0*-. A lonxitude dun esquema mídese como o número de bits de separación entre o de maior e o de menor orde. Os esquemas representan rexións no espacio de solucións. Para que o AX converxa, os seus mecanismos de evolución deben conseguir que dentro da poboación abonden os individuos con esquemas correspondentes a

rexións próximas á solución óptima, ou polo menos a solucións boas. Mediante o principio de supervivencia do máis adaptado permítese unha maior participación dos individuos con esquemas bos nas operacións de cruzamento, permitindo que esquemas curtos se combinen para formar esquemas longos, é dicir máis preto da solución óptima. Son os esquemas curtos os que xogan un papel máis importante, pois son os que maior probabilidade de sobrevivir xeración tras xeración, dado que canto máis longo é o esquema maior é a probabilidade de ser fragmentado. Por este motivo se tentará deseñar algoritmos que permitan aproveitar ó máximo a información aportada por estes esquemas curtos asociados a altos valores da función de adaptación, que se soen chamar bloques constituíntes. Pola súa banda, a mutación serve para introducir esquemas novos na poboación. Deste xeito, cruzamento e mutación constitúen un método de exploración excelente na procura do extremo global da función.

Tódalas consideracións anteriores marcan unha serie de diferencias co resto de técnicas de optimización de propósito xeral, que a continuación se resumen.

O AX traballa con varias solucións simultaneamente. Digamos que ten un paralelismo implícito. Ademais, pódese dicir que as solucións existentes nunha determinada xeración teñen memoria das xeracións anteriores, a diferenza de outras técnicas como o SA, onde a información de estados anteriores non se aproveita. Estas dúas características permiten unha visión máis global do espazo de busca e polo tanto maior probabilidade de dar co resultado correcto.

O AX non traballa coas variables do problema, senón que polo miúdo o fará unha cunha codificación das mesmas. É dicir, as operacións de evolución xenética non precisan dispor de ningún tipo de coñecemento sobre o problema en particular, nin sobre a natureza das funcións a optimizar. Non sucede así cos algoritmos de gradiente, que a parte de precisar dunha inicialización próxima á solución desexada, necesitan realizar cálculos do gradiente e da matriz hessiana da función. Se a función é demasiado complexa, estes cálculos serán aproximados e introducirán erros.

O tratamento das restriccións nos valores dos parámetros é moi sinxelo. Só é necesario engadir un termo de penalización á función cando se estea a avaliar unha solución non válida.

Como inconveniente, hai que dicir que os AX aseguran a converxencia ó extremo global pero nun tempo ilimitado, o que quere dicir que nos podemos cansar de esperar e que o criterio de terminación se cumpra antes de que se acade unha boa estimación da solución óptima. Sen embargo, este problema pódese paliar en gran medida realizando unha implementación paralela, o que resulta sinxelo dadas as características do algoritmo.

4 SUPERCUÁDRICAS

As funcións implícitas chamadas supercuádricas ou superelipsoides son unha familia de superficies paramétricas que se caracterizan pola flexibilidade que posúen en contraposición coa simplicidade da súa representación. Moitos son os autores que nos últimos anos se están interesando polo uso desta representación, ben sexa de modo único ou combinada con outros modelos. Proba desto é a multitude de traballos publicados sobre aplicacións que fan uso de superelipsoides, dos que cabe destacar os de Terzopoulos e Metaxas [39, 55], Solina [30, 51], Bardinet [2, 3, 4], e Chen [15] entre outros .

Os superelipsoides son a extensión a 3D das figuras 2D coñecidas como superelipses, ou supercuádricas. Estas obtéñense a súa vez como unha extensión das cuádricas, substituíndo o expoñente 2 das ecuacións dunha curva cónica por unha variable real. Nunha parametrización natural, a superelipse ten a seguinte expresión

$$\begin{aligned}x &= a \cos^\varepsilon \theta, & -\pi \leq \theta < \pi \\y &= b \sin^\varepsilon \theta\end{aligned}$$

onde o parámetro ε é un número real positivo e a e b son os radios sobre os eixes x e y respectivamente. Como as funcións trigonométricas coseno e seno poden tomar valores negativos, hai que substituí-la operación de potenciación, de forma que en todo o rango de definición de θ estea tamén definida a superelipse no dominio dos números reais. Entón, na expresión da superelipse substitúese a operación de potenciación dunha variable u a un número real positivo ε pola seguinte

$$u^\varepsilon := \text{signo}(u)|u|^\varepsilon$$

O parámetro ε coñécese como parámetro de cuadratura, pois é o responsable da forma da curva. Cando ε tende a cero, a superelipse aproxímase a unha figura rectangular, sendo a e b as dimensións dos lados, para $\varepsilon=1$ tense a ecuación dunha elipse e para $\varepsilon=2$, a superelipse é un rombo con a e b como semidiagonais. Para valores maiores os lados dos rombo vanse curvando cara ó interior, formando unha figura cóncava con aparencia de estrela.

Realizando o produto esférico da superelipse consigo mesma, obtéñense as ecuacións do superelipsoide.

$$\begin{aligned}x &= a_1 \cos^{\varepsilon_1}(\theta) \cos^{\varepsilon_2}(\phi), & -\pi/2 \leq \theta < \pi/2 \\y &= a_2 \cos^{\varepsilon_1}(\theta) \sin^{\varepsilon_2}(\phi), & -\pi \leq \phi < \pi \\z &= a_3 \sin^{\varepsilon_1}(\theta)\end{aligned}$$

A superficie que describen estas ecuacións pode tomar formas moi diversas en función dos valores concretos dos seus parámetros. O parámetro ε_1 determina a cuadratura nos planos que conteñen ó eixo z e ε_2 nos planos normais ó eixo z . Se z , ε_1 e ε_2 son moi pequenos a superficie aproximarase a un paralelepípedo, para $\varepsilon_1 \ll 1$ e $\varepsilon_2 = 2$ temos un cilindro e con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ as ecuacións anteriores corresponden ás dun elipsoide. Para valores destes parámetros maiores que 2 a superficie presenta concavidades. En calquera caso, as supercuádricas sempre son simétricas respecto ós eixes principais. A ecuación implícita correspondente é a seguinte:

$$f(\vec{r}, \vec{q}) = \left(\left(\frac{x}{a_1} \right)^{2/\varepsilon_2} + \left(\frac{y}{a_2} \right)^{2/\varepsilon_2} \right)^{\varepsilon_2/\varepsilon_1} + \left(\frac{z}{a_3} \right)^{2/\varepsilon_1} = 1$$

sendo $\vec{r} = (x, y, z)$ o vector de posición dun punto sobre a superficie e $\vec{q} = (a_1, a_2, a_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ o vector de parámetros do superelipsoide.

4.1 Medidas de erro

Para poder empregar os superelipsoides como esquema de representación do modelo de forma global, é preciso definir unha función de medida do axuste da superficie ós puntos da imaxe. Como se comentou anteriormente, os dous métodos máis usados para a optimización de funcións implícitas son o que define unha función que estima a probabilidade de que haxa correspondencia e a que emprega funcións relacionadas coa distancia entre modelo e imaxe. Esta última é a opción escolleita no presente estudio para a optimización dos superelipsoides. Se se dispón dun conxunto de N puntos da imaxe pertencentes á fronteira do obxecto, a función E que mide o erro cometido no axuste dos parámetros da superficie, será a suma das contribucións D de cada un dos puntos.

$$E(\vec{q}) = \sum_{i=1}^N D^2(\vec{r}_i, \vec{q})$$

O cálculo exacto da distancia dun punto a unha superficie pode resultar moi custoso computacionalmente, polo que se soe utilizar unha aproximación para o cálculo de D . Para o caso concreto das supercuádricas a propia ecuación da superficie pode ofrecer unha medida de erro, posto que a función $f(\vec{r}, \vec{q})$, para valores positivos de q_i , é monotonamente crescente coa distancia radial se o punto pertence á rexión do espacio que queda fóra da superficie, e monotonamente decrecente no interior.

- $f(\vec{r}, \vec{q}) = 1$ o punto está sobre a superficie
- $f(\vec{r}, \vec{q}) > 1$ o punto está no exterior da superficie
- $f(\vec{r}, \vec{q}) < 1$ o punto está no interior da superficie

Por esta razón $f(\vec{r}, \vec{q})$ é coñecida como a función interior-exterior. Unha análise en profundidade desta función e de como se pode utilizar para obter medidas da función de

erro pódese ver no traballo de Whaite e Ferrie [58]. A función de erro que se deriva directamente desta propiedade é a seguinte:

$$D_1 = f(\vec{r}, \vec{q}) - 1$$

Sen embargo esta non é unha boa función de erro, pois asigna valores menores a superelipsoides cun valor de ε_1 maior. Por esta razón, as superficies resultantes dun axuste con esta función de erro tenderán a ter unha sección transversal máis redondeada que a superficie óptima. Unha función moi empregada que reduce este problema é D_2 , defínese a partir da anterior, de xeito que compensa este comportamento.

$$D_2 = f^{\varepsilon_1}(\vec{x}, \vec{q}) - 1$$

En ocasións vai ser necesario realiza-lo axuste sobre imaxes incompletas, nas que non se dispón de información sobre a forma dunha parte da superficie. Pode darse o caso de que, por exemplo, nunha zona da imaxe haxa unha perda de contraste, o que provoca que non se detecte o borde do obxecto. Noutros casos é preciso facer unha reconstrución de obxectos 3D a partir dunha única vista 2D, polo que hai unha oclusión da parte posterior do obxecto. En ambas situacións, a utilización de superelipsoides, soluciona este problema de falta de información baixo a hipótese de simetría axial. A pesar desto, a ambigüidade non queda totalmente resolta, xa que para unha imaxe descrita parcialmente pode haber varias superficies igualmente válidas. A medida de erro D_2 , sen embargo, vai avaliar estas superficies de distinto modo, asignando valores menores ás superficies que encerran un volume maior. Isto débese a que puntos con igual distancia radial á superficie contribúen máis se están no exterior que se están no interior, polo que o tamaño tenderá a aumentar para aproximarse ós puntos do exterior e compensar esta diferenza. Dado que o habitual é realizar hipóteses de volume mínimo é frecuente encontrar que a medida de erro D_2 se modifica, engadindo un factor $g(a_1, a_2, a_3)$ relacionado coas dimensións do superelipsoide, que penaliza ás superficies que encerran un volume maior. No artigo de Solina e Bajcsy [51] realízase un estudio empregando distintas expresións para o factor g , para chegar a conclusión de que a función de erro que perceptualmente mellores resultados da é

$$D_3 = (a_1 a_2 a_3)^{1/2} \{f^{\varepsilon_1}(\vec{x}, \vec{q}) - 1\}$$

Ningunha das funcións presentadas ata agora é invariante ante transformacións de escala. Para que se cumprise esta condición necesitaríamos unha medida de erro que fose unha métrica euclídea, pero, como se dixo antes, o cálculo da distancia exacta sería moi custoso, debido á gran non linearidade da función. Unha aproximación máis sinxela de calcular, que si é euclídea, é a distancia radial δ do punto á superficie (ver figura 4.1), estudada por Whaite e Ferrie [58] e por Bardin et al. [2]. Se trazamos unha recta que una o punto en cuestión co centro do superelipsoide, a distancia radial mídese entre os puntos r e r_0 , no que a recta interseca á superficie. Esta distancia pódese calcular facilmente coñecendo a relación que garda coa función f .

Da distancia radial sabemos que verifica $\|\vec{r}\| = \delta + \|\vec{r}_0\|$. Como non coñecemos a expresión de $\|\vec{r}_0\|$, buscaremos unha segunda ecuación que a relacione cos termos

coñecidos. Na figura 4.1 pódese ver que, dado que os puntos o , r e r_0 son colineares, débese cumprir que $\|\vec{r}_0\| = \mu\|\vec{r}\|$, sendo $\mu > 0$. É fácil comprobar que a función $F(\vec{r}) = f^{\varepsilon^{1/2}}(\vec{r})$ é homoxénea de orde 1, polo que se ten que $F(\mu x, \mu y, \mu z) = \mu F(x, y, z)$. Tendo en conta que $F(\vec{r}_0) = 1$, obtemos $\mu = 1/F(x, y, z)$. Operando con estas expresións tense

$$f = \left(1 + \frac{\delta}{\|\vec{r}_0\|}\right)^{2/\varepsilon^1}$$

Desta expresión derivase unha ecuación para δ , da que se pode eliminar $\vec{r}_0$, tendo en conta que $\|\vec{r}\| = \delta + \|\vec{r}_0\|$

$$D_4 = \delta = \|\vec{r}\| \left\{1 - \frac{1}{f^{\varepsilon^1}(\vec{r}, \vec{q})}\right\}$$

Hai que recalcar que esta última función de erro sobreestima a medida exacta da distancia, excepto naqueles puntos onde a dirección da recta que une o punto co centro do superelipsoide coincida coa normal á superficie en $\vec{r}_0$. Con todo, os autores están de acordo en que esta última é a mellor estimación do erro do axuste, a pesar de que en casos especiais poida ser conveniente empregar algunha das outras.

Por último, é posible facer unha aproximación de primeira orde á distancia euclídea exacta, d , como apunta Bardin et al. en [2], que corresponde a distancia medida sobre unha recta normal a superficie.

$$D_5 = |F(\vec{r}) - 1| / \|\nabla F(\vec{r})\|$$

Esta aproximación é boa tan só para puntos próximos á súa proxección na superficie, ou sexa, para valores pequenos de d . Ademais require o cálculo do gradiente de F .

4.2 Xeneralización para posición e orientación arbitrarias

Calquera que sexa a medida de erro que se escolla, vai ser sempre preciso o cálculo da función interior-exterior $f(\vec{r}, \vec{q})$. Tal e como a presentamos, esta función describe unha figura centrada na orixe do sistema de referencia e cos eixes principais ó longo dos eixes coordenados, mentres que o obxecto a modelar pode estar situado en calquera parte dentro do volume da imaxe e cunha orientación calquera. Se unha superficie descrita por unha ecuación implícita non ten o centro na orixe de coordenadas, e os eixes principais orientados na dirección dos eixes coordenados, na ecuación da superficie van aparecer novos parámetros, que ata agora non se tiveron en conta. A expresión xeral dos puntos da superficie obtense aplicando as transformacións de translación e rotación necesarias para situala primitiva nunha posición e orientación xenéricas.

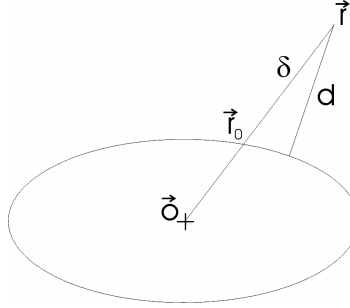


Figura 4.1 Distancias radial, δ , e normal, d , dun punto a unha superficie.

Para determina-la transformación T que hai que aplicar ó superelipsoide para que se superpoña co obxecto na imaxe, ou sexa, para pasar o superelipsoide do sistema de referencia da imaxe a outro centrado no obxecto, será necesario introducir os parámetros correspondentes no proceso de optimización, polo que, ós cinco parámetros de forma do superelipsoide, haberá que engadir os tres de translación, t_1 , t_2 , e t_3 , máis os tres ángulos de Euler, α , β e γ que describen a rotación.

$$\vec{q}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_1, a_2, a_3, t_1, t_2, t_3, \alpha, \beta, \gamma)$$

Transformar o superelipsoide respecto á imaxe para superpoñe-la co obxecto, equivale á realiza-la transformación inversa sobre a imaxe para superpoñe-lo obxecto co superelipsoide. Se r' é o punto da imaxe dado no sistema de referencia centrado no obxecto, entón hai que substituír $f(\vec{r}, \vec{q})$ na función de erro seleccionada por esta outra expresión

$$\hat{f}(\vec{r}, \vec{q}) = f(\vec{r}, \vec{q}') = f(T^{-1}(\vec{r}), \vec{q}) = f(\vec{r}', \vec{q})$$

Deste xeito pódense incorporar novas transformacións á definición da superficie, como veremos máis adiante, cando apliquemos deformacións globais ó superelipsoide.

4.3 Ambigüidade na representación mediante superelipsoides

Na sección dedicada ós distintos esquemas de representación adiantabamos xa que os superelipsoides xeneralizados non cumpren a propiedade de unicidade. As simetrías de rotación que caracterizan tanto a cuádricas como a supercuádricas, que provocan unha ambigüidade na determinación dos ángulos de Euler. O caso máis claro é o da esfera, para a cal os ángulos de Euler están totalmente indeterminados. Coa figura do cubo, calquera rotación de 90° respecto ós eixes principais da lugar a un novo valor válido do ángulo de Euler. En xeral, calquera outra forma do superelipsoide presentará polo menos simetría ante calquera rotación de 180° en torno ós eixes principais.

Pero as simetrías non son as únicas fontes de ambigüidade da representación. Tamén é posible obter formas idénticas variando os valores dos parámetros de cuadratura. A orixe deste comportamento está en que os valores $\varepsilon \ll 1$ e $\varepsilon = 2$ na ecuación da superelipse, da que se deriva o superelipsoide, correspóndense respectivamente co

rectángulo e o rombo. Se os parámetros a_1 e a_2 son iguais temos dous cadrados, rotados 45° un respecto ó outro. Un exemplo no caso 3D sería unha superficie que verifique $a_1=a_2=1$ e $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.1$, que pode tamén ser descrita por $a_1=a_2=\sqrt{2}$, $\varepsilon_1=0.1$ e $\varepsilon_2=1.9$, só que rotada $\pi/4$ respecto ó eixo z .

Estas ambigüidades só supoñen un inconveniente en tarefas de recoñecemento, pois os parámetros recuperados na optimización deben compararse cos modelos predeterminados. O vector de parámetros obtido pode non coincidir co modelo a priori, a pesar de describir figuras idénticas, e entón considerárase que non hai correspondencia entre un e outro. Definindo un conxunto de clases de equivalencia para as posibles formas que se poden representar, resolveríase o problema. Outra solución é limita-lo rango dos valores dos parámetros de cuadratura ó intervalo $0.1 < \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq 1$, como fan Solina e Bajcsy en [51]. Desta forma estamos impedindo a posibilidade de representar figuras cóncavas, pero verase máis adiante que existe unha forma alternativa de representar certos tipos de concavidades, cando estudemos as transformacións de deformación global máis comúns.

Se dende un principio temos coñecemento do tipo de obxecto que aparece no volume da imaxe, e o único que nos interesa é a reconstrución do obxecto, a non unicidade non supón un problema. Así sucede en moitas ocasións na segmentación de imaxes médicas, onde é usual utilizar técnicas de reconstrución para a simple visualización dos órganos. Noutros casos a reconstrución realízase para a extracción de información estrutural cuantitativa dos obxectos, como por exemplo para o cálculo aproximado do volume encerrado pola superficie do obxecto. Para a fin que nos propoñemos neste traballo, a inicialización de modelos deformables, non é necesario ten en consideración o problema da non unicidade.

4.4 Inicialización dos parámetros de transformación ríxida

A optimización dos parámetros do superelipsoide vaise facer empregando un algoritmo xenético. Desta forma, esperamos obter o extremo global da función, aínda sen dispor dunha estimación inicial dos parámetros. Se ademais se pode obter unha boa inicialización, aínda que só sexa dalgunhas das variables, o espazo de busca estará máis limitado e entón a converxencia será máis rápida e o mínimo da función de erro máis preciso. No caso do superelipsoide é posible realizar un cálculo aproximado dos parámetros de translación, rotación e os radios na dirección dos eixes principais. Para os parámetros de cuadratura e os correspondentes as deformacións globais que se vaian introducindo, a busca debe realizarse en toda a rexión na que estean definidos.

As compoñentes do vector de translación aproxímanse polas coordenadas do centro de gravidade da superficie.

$$t_1 = \bar{x}, \quad t_2 = \bar{y}, \quad t_3 = \bar{z}$$

Esta aproximación será mellor canto máis simétrico sexa o obxecto. Tamén se vai ver influenciado pola calidade da imaxe. Se unha parte da imaxe non se detecta, a estimación da translación será mala, pero pode servir para dar unha idea de en que rexión poden estar os valores óptimos.

En canto ós ángulos de Euler, unha boa aproximación é a que vén dada pola rotación que transforma os eixes do superelipsoide nos eixes de momentos inercia principais da superficie do obxecto. Estes calcúlanse facilmente a partir da matriz M de momentos do obxecto. Se N é o número de puntos da superficie, a matriz de momentos virá dada por:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} (y_i - \bar{y})^2 + (z_i - \bar{z})^2 & -(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) & -(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x}) \\ -(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) & (x_i - \bar{x})^2 + (z_i - \bar{z})^2 & -(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y}) \\ -(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) & -(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}) & (x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \end{bmatrix}$$

onde x_i , y_i , e z_i son as compoñentes dos puntos de fronteira do obxecto a modelar. Os eixes de inercia principais son os autovalores desta matriz. A matriz de transformación entre o sistema de referencia da imaxe e o definido por estes eixes de inercia principais é a que diagonaliza a matriz anterior, converténdoa en M' , e correspóndese coa matriz de rotación que superpón os eixes de ambos sistemas.

$$M' = R^{-1}MR$$

Unha vez determinados os autovalores da matriz de momentos centrais, é dicir, os vectores columna da matriz de rotación R , ós que imos chamar $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, asegurándonos de que formen un sistema de coordenadas dextróxiro, debemos identificalos cos eixes do novo sistema coordenado, $\vec{u}_x'$, $\vec{u}_y'$ e $\vec{u}_z'$. O criterio que adoptamos é o mesmo que Solina e Bajcsy no seu artigo [51], polo cal se asigna o eixo $\vec{u}_z'$ ó máis longo dos eixes de inercia principais, que é o que está asociado ó menor dos autovalores de momento de inercia. Esta regra xeral ten como excepción o caso particular das superficies de forma aplanada, onde se desexa que o eixo $\vec{u}_z'$ corresponda ó eixo de maior momento de inercia. Supoñendo que os autovectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ están ordenados de forma que os correspondentes autovalores verifican $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, este criterio pódese expresar da seguinte forma.

$$\text{Se } |\lambda_1 - \lambda_2| < |\lambda_2 - \lambda_3| \quad \text{entón } \vec{u}_z' = \vec{e}_3$$

$$\text{En caso contrario} \quad \vec{u}_z' = \vec{e}_1$$

A aplicación deste criterio a imaxes CT de oso, concretamente ó de tibia ou fémur é moi apropiado, xa que nos datos da imaxe a dirección $\vec{u}_z$ correspóndese coa dirección lonxitudinal do oso. En cambio, as direccións $\vec{u}_x'$ e $\vec{u}_y'$ non van a coincidir con $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$, pois a imaxe ten sección circular e existe simetría de rotación en torno ó eixo $\vec{u}_z'$.

Unha vez asignados os eixes, da matriz de rotación $R = [\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z']$ imos poder extraer os valores aproximados dos ángulos de Euler. A representación das rotacións mediante ángulos de Euler consiste en descompoñer unha rotación en tres rotacións respecto ós eixes coordenados, descritas polos ángulos correspondentes, chamados ángulos de Euler. Co manexo dos ángulos de Euler hai que ter coidado, pois a composición de

rotacións non é conmutativa, polo cal, unha vez definida unha orde na secuencia de rotacións, hai que ter coidado de respectala en todo momento. A secuencia de rotacións utilizada neste traballo é a seguinte:

1. rotación dun ángulo α en torno ó eixo z ,
2. rotación dun ángulo β en torno ó eixo y ,
3. rotación dun ángulo γ en torno ó novo eixo z' ,

dando lugar á seguinte matriz de rotación:

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha & \sin \gamma \cos \beta \\ \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\sin \gamma \cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha \\ -\cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Á hora de extraer os valores dos ángulos a partir destas nove ecuacións hai que ter en conta a periodicidade das relacións trigonométricas. Se empregamos as tres expresións da última columna da matriz para o cálculo obtemos dous posibles valores para β , e para cada un deles, outros dous valores tanto de α como de γ . En total, oito posibles solucións, das cales só dúas son correctas, pois ambas representarán a mesma rotación. Para determinar cales son as combinacións correctas basta substituílas no resto das ecuacións de R e comprobar que se verifican. De entre as dúas posibilidades correctas pódese escoller calquera.

Tamén é posible aproximar os parámetros a_1 , a_2 e a_3 ós correspondentes a un elipsoide, comparando a matriz de momentos diagonalizada M' , coa expresión xenérica da matriz de momentos do elipsoide, J .

$$J = \frac{\mu}{3} \begin{bmatrix} a_2^2 + a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^2 + a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

μ corresponderíase coa masa do elipsoide, que aquí se toma como a unidade. Igualando os elementos da diagonal de ambas matrices

$$a_1^2 = \frac{2}{3\mu}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)$$

$$a_2^2 = \frac{2}{3\mu}(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2)$$

$$a_3^2 = \frac{2}{3\mu}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 son os autovalores da matriz de momentos de inercia. Esta aproximación será mellor canto máis próxima estea a forma do superelipsoide á do elipsoide. De novo podemos empregar a estimación para reduci-la rexión onde se vai levar a cabo a busca.

4.5 Deformacións globais

A pesar de que os superelipsoides constitúen un esquema de representación bastante potente, tendo en conta a súa simplicidade –a única diferenza cos elipsoides son os dous parámetros de cuadratura –, é posible aumentar a flexibilidade incorporando á súa descrición unha serie de transformacións globais, que permiten modelar certos aspectos da morfoloxía dos obxectos moi interesantes para a utilización con imaxes anatómicas, xa que eliminan as simetrías. A continuación preséntanse algunhas destas deformacións, todas elas moi empregadas neste tipo de aplicacións, como en [31, 39, 45, 55], coñecidas como afiado (*tapering*), torsión (*twisting*), e curvado (*bending*). Poderá observarse que os parámetros que é necesario incorporar á definición do modelo son poucos, mentres que a complexidade das figuras representables aumenta de forma considerable.

Afiado

Como o seu nome indica, esta transformación consiste en deformar a superficie, xeralmente na dirección do eixo z , de modo que o tamaño da sección se vaia reducindo dun extremo a outro. Esta variación da sección, f , que será función unicamente de z , soe ser independente para as compoñentes x e y .

$$\begin{aligned}x' &= f_x(z)x \\ y' &= f_y(z)y \\ z' &= z\end{aligned}$$

A función f soe ser linear, dando lugar á posibilidade de representar superficies con forma de fuso ou de cuña. Desta forma só será preciso engadir dous parámetros á representación, C_x e C_y .

$$\begin{aligned}f_x(z) &= C_x z + 1 \\ f_y(z) &= C_y z + 1\end{aligned}$$

Teremos entón que para $z=0$, a sección non se ve alterada, e nos extremos $z=z_{max}$ e $z=-z_{max}$ verase estirada ou reducida nalgunha das direccións x ou y . Para evitar que algunha das compoñentes de f cambie de signo nalgún punto ó longo do eixo z , o que faría que a superficie se cortase consigo mesma, o valor dos parámetros C_x e C_y está acoutado a $-1/z_{max} \leq C_x, C_y \leq 1/z_{max}$.

Torsión

Unha deformación moi empregada por exemplo en modelado de corazón, é a torsión respecto ó eixo lonxitudinal. Para describir esta transformación basta especificar un único parámetro que indique o ángulo xirado por unidade de lonxitude do eixo de torsión, θ .

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(z\theta) - y \sin(z\theta) \\ y' &= x \sin(z\theta) + y \cos(z\theta) \\ z' &= z\end{aligned}$$

A magnitude θ non está acoutada, pode tomar calquera valor real.

Curvado

O curvado consiste en transformar o segmento rectilíneo correspondente ó eixo z —e tódalas rectas paralelas a esta— nun segmento circular. Esta deformación caracterízase pola curvatura que se lle da ó eixo, k , e pola dirección na que se dobra, que se representa por un ángulo φ medido sobre o plano xy . Para determinar como se ven transformadas as compoñentes cartesianas dos puntos da superficie, proxectamos primeiro tódolos puntos (x,y,z) sobre o plano de curvado, definido polo ángulo φ e o eixo z . A magnitude da proxección das compoñentes x e y sobre este plano, á que chamaremos r , define xunto con z un espazo bidimensional. Sobre os puntos (r,z) proxectados aplícase a transformación de curvado 2D e finalmente a proxección inverte para recupera-los puntos 3D.

A proxección dun punto (x,y) sobre o plano de curvado vén dada por (ver figura 4.2 (b))

$$r = \cos(\varphi - \psi) \sqrt{x^2 + y^2}$$

O ángulo ψ é a compoñente angular na representación en coordenadas polares do punto (x,y) .

$$\psi = \text{atan}(x/y)$$

Vexamos agora como afecta o curvado a un punto (r,z) . Podemos considerar que o que fai esta transformación é converter un segmento de arco de circunferencia noutro da mesma lonxitude pero sobre unha circunferencia de radio menor, é dicir, de maior curvatura, só que na primeira circunferencia a curvatura é nula —é unha recta—. Se z é o arco de circunferencia, que debe manterse constante na transformación, e k é a curvatura da nova circunferencia, o ángulo varrido polo arco será

$$\gamma = zk = z/R$$

Se se observa a figura 4.2 (a), poderá verse que o valor transformado de r corresponde a $r' = R - a$, onde R é o radio de curvatura, que para a circunferencia coincide co radio da mesma. Substituíndo o valor de a en función dos datos coñecidos.

$$r' = \frac{1}{k} - \cos(\gamma) \left(\frac{1}{k} - r \right)$$

Coñecendo as magnitudes r , r' , e γ podemos dar xa unha expresión para as tres compoñentes da transformación. Da figura (a) deducimos que $z' = \sin(\gamma)b$, onde $b = R - r$. Para o cálculo de x' e y' , é fácil ver na figura (b) que $(x', y') = (x, y) + \vec{v}$, sendo $\vec{v}$ un vector definido no plano de módulo $(r' - r)$ e dirección φ . Desenrolando estas expresións temos

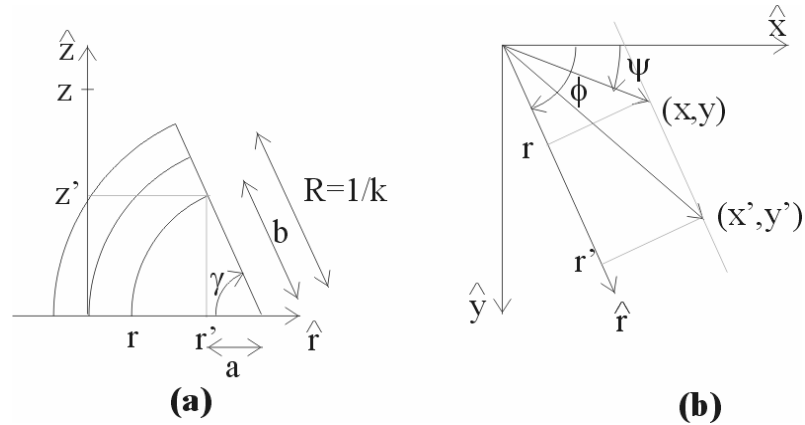


Figura 4.2 Curvado. (a) Transformación de z. (b) Transformación de x e y.

$$\begin{aligned}x' &= x + \cos(\phi)(r' - r) \\y' &= y + \sin(\phi)(r' - r) \\z' &= \sin(\gamma)(1/k - r)\end{aligned}$$

As ecuacións da transformación inversa deriváanse de forma directa para x e y a partir de x' e y' . Sen embargo para z debemos recorrer á relación

$$z = \gamma / k$$

onde r se calcula mediante

$$\gamma = \arctan \frac{z'}{1/k - r'}$$

Secuencia de deformacións globais.

A combinación de varias destas deformacións globais non é conmutativa. A orde en que se aplica a secuencia de transformacións afectará á forma final do modelo. Será preciso prefixar unha orde na sucesión das transformacións. A forma habitual de calcular a superficie transformada inversamente, que haberá de substituírse na expresión da función de erro, é a seguinte:

$$\vec{r} = \text{Curvado}^{-1} \circ \text{Torsión}^{-1} \circ \text{Afiado}^{-1} \circ \text{Rotación}^{-1} \circ \text{Traslación}^{-1}(\vec{r}')$$

Un cambio na orde en que se efectúan estas transformación producirá modificacións no aspecto das superficies resultantes.

4.6 Optimización con algoritmos xenéticos

Engadindo as deformacións anteriores á definición do modelo de superelipsoide, temos para optimizar un vector de 16 parámetros

$$\vec{q} = (a_1, a_2, a_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, t_1, t_2, t_3, \alpha, \beta, \gamma, C_x, C_y, \theta, k, \varphi)$$

Para unha imaxe dada, a obtención do modelo particular farase empregando algunha das funcións de erro descritas nesta sección para o axuste ós puntos de fronteira. O método de axuste da función elixida que se vai utilizar nesta ocasión é un algoritmo xenético que, como se demostra en [31], resulta moi axeitado para este tipo de funcións.

No capítulo 3 fíxose unha introducción ós AX, da que se concluíu que é un algoritmo de optimización global moi robusto, pero que o seu tempo de converxencia pode ser excesivo. Como a aplicación a desenvolver non está pensada en principio para sistemas dinámicos, a rapidez non é aquí unha prioridade. Sen embargo, existe un serie de variacións sobre o AX básico, que de seguido se van a especificar, que permiten axilizar o proceso sen afectar substancialmente os seus principios de funcionamento, mantendo tódalas prestacións do AX máis sinxelo.

Utilizando algoritmos xenéticos temos unha gran liberdade á hora de especificar cales e como van se-los mecanismos evolutivos. Xa só do operador de recombinación pódense implementar varias versións, que serán máis ou menos axeitadas segundo o tipo de problema a tratar. Ademais, non existe unha norma que nos indique como fixar certos parámetros do algoritmo, como o número de individuos da poboación, probabilidades de cruzamento e mutación, porcentaxe de individuos que se reproducen, etc., polo que a elección destas magnitudes se fará de forma empírica.

O esquema de creación dunha nova xeración de individuos inclúe a aplicación de operadores de reprodución, mutación e cruzamento. No traballo que aquí se presenta, experimentábase con tres variantes do cruzamento, que se diferencian no número de puntos polos que se secciona un par de cromosomas para a recombinación: por un punto, por dous puntos e uniforme, onde cada xene do cromosoma se pode intercambiar independentemente dos demais. Este último operador ten o inconveniente de que non favorece a formación de bloques constituíntes, dada a elevada fragmentación dos cromosomas, o que dificulta a herdanza da información contida nos cromosomas dunhas xeracións a outras.

4.6.1 Codificación

Decididos os operadores a empregar, o primeiro e posiblemente máis importante aspecto a considerar é como codificar o vector de parámetros do modelo. Para dar coa codificación máis axeitada haberá que ter en conta o seguintes factores:

- como afecta o tipo de codificación, é dicir, que sexa binaria, real, etc., á eficiencia dos operadores xenéticos. Esta eficiencia estará relacionada coa capacidade para xerar esquemas útiles;
- como inflúe na eficiencia a ordenación dos parámetros na cadea;

Posto que os algoritmos xenéticos constitúen un método de optimización moi robusto, o tipo de codificación que se manexa, non afectará á efectividade do algoritmo, pero si a eficiencia. Por exemplo, coas codificacións real e binaria os operadores xenéticos impleméntanse de forma distinta. Se unha variable está representada por un número

real, ese número constituirá por si só un xene do cromosoma, mestres que na codificación binaria, cada un dos bits equivale a un xene. Isto fai que a implementación dos operadores xenéticos para a codificación binaria sexa máis sinxelo, posto que a representación como unha restrita de bits permite que se modifique un único bit ou que se seccione en dous anacos o parámetro. Isto non é posible coa codificación real, para o que hai que definir operadores máis complexos, como os que propón Kalyanmoy en [27].

Unha opción mellor incluso que a codificación binaria é a utilización do código Gray [25, 27]. A vantaxe respecto ó código binario normal radica en que dúas cadeas de bits que representan números consecutivos diferéncianse en un e só un bit. Desta forma, a modificación dun bit da cadea que representa o cromosoma, ten sempre a mesma repercusión, independentemente de en que posición da cadea estea situado dito bit nin, dos valores que nese momento teñan o resto de bits. Non sucede así co binario normal, onde para pasar do valor 7 ó 8, hai que modificar os 3 primeiros bits e sen embargo pasar de 1000 a 1100 implica variar o valor da cadea en 8 unidades decimais. Isto provoca que haxa interacción entre os xenes. A interacción, en ocasións chamada epistase, entre os xenes consiste en que a contribución dun xene á función de adaptación depende do valor de outros xenes.

No que respecta á ordenación dos parámetros na cadea, é importante que se faga de modo que as variables que están relacionadas entre si se sitúen en localizacións contiguas, pois esta é a maneira de que os esquemas correspondentes a estes xenes sobrevivan ó cruzamento. Se se atopasen moi separados na cadea correrían maior risco de seren separados. O problema é que moitas veces estas relacións entre os parámetros non son coñecidas. Outras veces existen demasiadas interrelacións entre as variables como para poder xuntalas a todas adecuadamente. Entón o obxectivo será buscar a colocación óptima.

4.6.2 Rendemento do AX.

Outro aspecto a ter en conta no deseño do algoritmo xenético é a elección de parámetros coma o tamaño da poboación, que é o número de individuos por xeración, ou a probabilidade de que, unha vez seleccionados os individuos que van intervir nunha operación de mutación ou cruzamento, esta sexa efectiva. Na escolla destas cantidades haberá que estudar o seu efecto tanto na eficacia como no rendemento do algoritmo, que, coma sempre, serán obxectivos en conflito. No caso do tamaño da poboación sucede que, canto maior é esta, maior probabilidade existirá de dar coa solución correcta, posto que haberá un maior número de esquemas en xogo, o que se traduce nunha exploración máis ampla do espazo de busca. Pero, por outra parte, a poboación tardará máis en converxer cara a rexión de función de adaptación alta, pois haberá que ir eliminando un gran número de esquemas non adaptados. Coa probabilidade de mutación sucede algo parecido. Se é moi baixa, realizarase unha exploración precaria do espazo. Lembremos que a mutación encárgase de xerar novos esquemas dentro da poboación, e se isto non se produce en suficiente medida, a poboación estancarase, non haberá evolución. Pola contra, se a mutación se produce con demasiada frecuencia, pode suceder que esquemas moi adaptados desaparezan temporalmente ou tarden en dominar na poboación, o ralentizaría o proceso.

No estudio realizado por De Jong [16], no que se testaron diversas configuracións do AX na optimización dun conxunto de funcións de características diversas, puido comprobarse que os mellores resultados se obteñen para tamaños da poboación moderados, probabilidade de cruzamento elevada e probabilidade de mutación baixa, da orde da inversa do número de individuos da poboación, o que correspondería a unha media de unha mutación por xeración. Mellores estimacións destes parámetros se poden establecer en base a cálculos estatísticos para problemas concretos, como fixo Kalyanmoy [27] para o cálculo da poboación inicial.

4.6.3 Mecanismos de selección

A converxencia do AX está supeditada á correcta simulación do principio de supervivencia dos máis adaptados. A maneira máis común de simular este comportamento é a de permitir unha maior intervención dos individuos con maior función de adaptación nos procesos responsables da creación das sucesivas xeracións. O modo máis simple se levar esto a cabo é asignar a cada cromosoma unha probabilidade de ser seleccionado como pai dun novo cromosoma que sexa directamente proporcional ó seu grao de adaptación, no caso do problema da maximización da función de erro –un problema de minimización pode transformarse facilmente nun de maximización substituíndo a función pola súa inversa-. Este o que se chama esquema de selección de ruleta (*roulette wheel*) ou tamén mostraxe estocástica con reposición. Pero os AX que utilizan este método adoecen dun descenso prematuro da variedade de esquemas na poboación. As causas deste comportamento son, por un lado, o feito de que non se pode medir o valor promedio da función de adaptación para un esquema determinado, e por outro, que o número de veces que un individuo intervéen nos procesos evolutivos presenta unha gran desviación respecto ó número que se estima que é o correcto, debido a que en cada selección non se ten en conta cales foron as seleccións anteriores.

Existen múltiples esquemas de selección que tentan resolver estes problemas. No libro de Goldberg [25] realízase unha comparación de varios destes esquemas. Un método de selección que tenta paliar este último problema é o modelo de valor esperado, tamén chamado mostraxe estocástica sen reposición, para diferenciarlo do esquema de ruleta, pois agora, a medida que un individuo vai sendo seleccionado para o cruzamento, vai perdendo posibilidades de volver a selo. Isto lévase a cabo calculando para cada individuo o número de descendentes que debe ter como a súa probabilidade de selección $p_i = f_i / f_{media}$, e cada vez que sae elixido para cruzarse, réstaselle 0.5 se o cruzamento é efectivo e 1.0 se non o é. Este método reduce de considerablemente a perda precoz de esquemas.

Outro método de selección moi popular é o torneo (*tournament selection*). Consiste en tomar toda a poboación e dividila en grupos de n individuos. De cada grupo escóllese o máis adaptado para participar nos procesos de recombinación. Habitualmente os individuos compiten por parellas. Deste xeito asegúrase que o máis adaptado da poboación participe na formación da seguinte xeración. Unha variante de esta técnica, chamada selección de torneo probabilístico (*probabilistic tournament selection*), permite que nas primeiras xeracións exista unha probabilidade de que o menos

adaptado dos dous individuos saia elixido. Esta probabilidade vai descendendo a medida que evoluciona o sistema, de forma similar a como o fai o temperado simulado.

4.6.4 Función de adaptación

A probabilidade que se lle asigna a un individuo de formar parte na creación dunha nova xeración, vai depender unicamente da súa función de adaptación. Se empregamos unha técnica de selección proporcional ó valor da función de adaptación e na poboación inicial aparecen individuos cunha adaptación moi alta, aínda que non estean cerca do óptimo, de contado dominarán a poboación, contribuíndo de novo á perda de esquemas e polo tanto reducindo o grao de exploración do espacio de busca. Por esta razón é práctica habitual realizar un transformación das mediadas de erro. A forma máis sinxela é realizar unha ordenación por adaptación dos individuos, chamada *ranking*. Sendo f' a función de adaptación transformada, $f'_{\max}$ e $f'_{\min}$ as cotas do intervalo ó que se mapea f , e $\text{rank}(i)$ a función que da a posición do individuo i nunha ordenación descendente con f , entón:

$$f' = \frac{f'_{\max} - f'_{\min}}{N - 1} \text{rank}(i) - f'_{\min}$$

Tamén se soe facer unha normalización linear

$$f' = \sigma \cdot (N - \text{rank}(i))$$

en función da desviación estándar σ dos valores de f , sendo N o número de individuos da poboación.

4.7 Posta en correspondencia con modelos a priori

O procedemento que se acaba de describir para a obtención dos parámetros da ecuación implícita é igualmente válido para a reconstrucción dun modelo e para a posta en correspondencia entre o obxecto nunha imaxe e un modelo a priori. A única diferenza está en que no segundo caso o número de parámetros a determinar é menor, pois toda a información asociada á forma da superficie pode ser “reciclada”. Entón a optimización vese reducida ó cálculo dos parámetros de transformación ríxida: translación, rotación e escalado e un novo parámetro de escalado, a_0 , que se introduce nas ecuacións do superelipsoide do seguinte xeito.

$$\begin{aligned} x &= a_0 a_1 \cos^{\varepsilon_1}(\theta) \cos^{\varepsilon_2}(\phi), & -\pi/2 \leq \theta < \pi/2 \\ y &= a_0 a_2 \cos^{\varepsilon_1}(\theta) \sin^{\varepsilon_2}(\phi), & -\pi \leq \phi < \pi \\ z &= a_0 a_3 \sin^{\varepsilon_1}(\theta) \end{aligned}$$

O obxectivo que nos propuxemos neste traballo, a inicialización de superficies deformables, pode abordarse mediante a segunda das dúas tarefas. Isto require da definición do modelo a priori, pero a reconstrucción deste modelo farase só unha vez. Para que o modelo sexa representativo da clase de obxectos cos que vai traballar, é

preciso utilizar algún tipo de técnicas estadísticas para a súa obtención. É usual utilizar para a optimización da superficie a priori unha imaxe promedio do obxecto, calculada a partir dun conxunto de imaxes de proba. Tamén é interesante a utilización dun modelo PCA, o que requiriría, ademais da optimización dos parámetros de transformación ríxida, os pesos da combinación linear de modos de variación principais. Esta técnica pode ser especialmente útil cando se considere que o modelo promedio non é suficientemente representativo do conxunto de imaxes de proba, é dicir, cando os diversos exemplares do obxecto presenten unha gran varianza. Outra opción é empregar como modelo a priori o modelo medio, pero permitindo na posta en correspondencia a variación dos parámetros de forma, ou sexa, transformacións globais non ríxidas, aínda que aquí se faría de forma moi limitada.

En ambos casos, para a extracción da colección de puntos sobre os que se axustará o modelo a priori, é preciso poñer en correspondencia as imaxes do conxunto de proba. Calquera dos métodos comentados na sección 3.2.1 para posta en correspondencia entre distribucións espaciais de puntos pode ser utilizada nesta ocasión.

5 EXTRACCIÓN DE PARCHES DE SUPERFICIE

Ata agora fíxose unha descrición bastante detallada da reconstrución dos superelipsoides a partir dos puntos da imaxe, pero en ningún momento se fixo mención a como se efectúa a selección de puntos que interveñen na optimización. Neste capítulo explícanse os procesos de baixo nivel empregados, os cales ofrecerán como resultado unha distribución de puntos de fronteira, que serán os que se empreguen para o cálculo das distancias á superficie do modelo.

Unha das solucións máis comunmente usadas para a detección de puntos de fronteira en 2D é o filtrado espacial para a estimación das derivadas direccionais dos niveis de gris das imaxes. Nesta ocasión débese aborda-la tarefa do filtrado en imaxes volumétricas, e entón debemos preguntarnos ata que punto a aproximación 2D se pode estender ó tipo de imaxes 3D que imos manexar garantindo a calidade dos resultados. O problema que aparece é que as imaxes médicas, como por exemplo as provenientes de CT, non son verdadeiramente 3D, senón un conxunto apiado de imaxes 2D. A repercusión que este feito ten sobre a calidade dos datos é evidente. Todo dependerá da resolución na dirección axial que se ofrezca, pero xeralmente observarase que a frecuencia de mostraxe nesa dirección será inferior que nas direccións contidas no plano das imaxes 2D, dando lugar a discontinuidades nos valores de intensidade ó pasar dun corte ó seguinte. Cando a distancia entre cortes non é excesiva pódese efectuar unha interpolación que xere imaxes en planos intermedios, o que daría maior continuidade á secuencia.

A pesar deste inconveniente, o método que se aplica para o filtrado 3D das imaxes neste traballo é unha extensión directa do filtrado 2D. Para solucionar o problema que acabamos de citar, considérase que un suavizado previo é suficiente. O motivo polo que, a pesar de todo, se elixe este tipo de detección, é que a extensión de filtros 1D a filtros 3D separables poden ser implementados de forma recursiva. Deste xeito, o tempo de computación vese reducido de forma importante en relación co correspondente á convolución cunha máscara no dominio espacial, e dado o volume de datos manexados en imaxes 3D, esta idea resulta moi atractiva.

A continuación farase unha descrición dos filtros recursivos. Estes filtros son empregados para o suavizado e a estimación das primeiras e segundas derivadas direccionais de cada punto da imaxe. As derivadas primeiras utilízanse para o cálculo da posición dos máximos do gradiente, nos que se localizarán os puntos de fronteira. Unha vez localizados os puntos de fronteira, procederase a agrupalos en parcelas de superficie. Como van a existir múltiples estruturas na imaxe, e como ademais a superficie do obxecto de interese pode aparecer fragmentada, vai ser necesaria unha etapa de selección dos parches que intervirán no axuste do modelo. Aquí é onde intervén o cálculo das derivadas segundas direccionais, que van servir para a estimación das curvaturas extremas locais de cada parche de superficie. A partir destes

cálculos é posible extraer algunha medida que poida servir como descriptor da forma dos parches. Con estas e outras características que se poden obter para cada parche, establécese un criterio de selección. A extracción e selección de parches de superficie detállase na sección 5.4.

5.1 Filtros multiescala recursivos

Nesta sección descríbese en detalle a implementación utilizada para o filtrado encargado de estimar as primeiras e segundas derivadas direccionais das imaxes. Estudiaranse dúas aproximacións diferentes, para as que se levará a cabo unha comparación das prestacións que ofrece cada unha no capítulo de resultados. Ambas aproximacións representan funcións de resposta de impulso dependentes de parámetros asociados á escala do filtro, de modo que poidan ser utilizados con imaxes de distinto tipo e distintas características de ruído. En ambos casos farase unha implementación recursiva da función co obxectivo de reducir o tempo de cálculo das imaxes filtradas.

5.1.1 Filtros multiescala

As características que se lle esixen a un filtro de detección de puntos de fronteira dependen do uso que se lle queira dar. Un filtrado axeitado para a detección de estruturas nunha imaxe será con frecuencia pouco apropiado para a boa localización e detección de puntos de fronteira a nivel local. No primeiro caso precisase un filtro que poida captar información relevante na imaxe, mentres que no segundo farán falta operadores que preserven as pequenas estruturas sen alterar a súa forma. É dicir, que distintos niveis de abstracción requiren filtrados a diferentes escalas. Ademais, un obxecto real soe manifestar características que se manifestan a escalas diferentes, polo que a escala ideal pode variar ó longo do contorno. En calquera caso, nas aplicacións máis usuais, como a que aquí se propón, a descrición mediante unha única escala é suficiente.

Neste traballo aplicáronse, tanto para o suavizado das imaxes como para o cálculo das derivadas primeiras e segundas, dúas familias de filtros moi utilizadas en filtrado multiescala polas boas prestacións que ofrecen para este tipo de tarefas. Por unha parte, están o filtro de gaussiana e as súas derivadas [20]. O filtro de derivada de gaussiana, que para o caso unidimensional con desviación estándar σ vén dado pola expresión seguinte, permite unha alta supresión de ruído ademais da boa localización dos puntos de fronteira. Se n é unha variable discreta

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-n^2/2\sigma^2}$$

Por outra parte, utilizáronse outra familia de filtros que se derivan dun filtro de detección de puntos de fronteira deseñado utilizando o criterio de Canny [11] estendido a filtros infinitos, que ofrece unha expresión analítica para un filtro xenérico unidimensional definido no dominio continuo, $f(x)$, dadas unha serie de especificacións en relación ós seguintes criterios:

- **boa detección**, asegurando unha baixa probabilidade de detección dun falso punto de fronteira e ó mesmo tempo unha baixa probabilidade de fallo na detección dun punto de fronteira verdadeiro. Dado que ambas probabilidade son monotonamente decrecentes coa relación sinal-ruído, SNR (*Signal to Noise Ratio*), o criterio de boa detección satisfarase coa maximización desa magnitude. Se $g(x)$ é un sinal unidimensional calquera cun punto de borde situado en $x = 0$, corrompida por ruído gaussiano branco de amplitude media por unidade de lonxitude n_0 , a SNR virá dada por:

$$SNR = \frac{\left| \int g(-x)f(x)dx \right|}{n_0 \left(\int f^2(x)dx \right)^{1/2}}$$

- **boa localización**, de xeito que a posición na que se sitúe a fronteira detectada do obxecto estea o máis próxima posible ó centro do borde, mediante a maximización dun factor de localización, Λ .

$$\Lambda = \frac{\left| \int g'(-x)f'(x)dx \right|}{n_0 \left(\int f'^2(x)dx \right)^{1/2}}$$

onde o apóstrofe indica que se está tomando a derivada primeira da a función correspondente respecto da variable independente x .

- **resposta única**, de maneira que a resposta do filtro ante un sinal ruidoso non teña demasiados máximos arredor do punto de borde. Para eso o que se fai é limita-la distancia media entre dous picos da resposta do filtro ante un sinal de ruído gaussiano, ou o que é o mesmo, entre dous puntos de cruce por cero da derivada segunda

$$x_0 = \pi \frac{\left(\int f'^2(x)dx \right)^{1/2}}{\left(\int f''^2(x)dx \right)^{1/2}}$$

sendo f'' a derivada segunda de f respecto de x .

Aplicando estes criterios para a optimización dun filtro de derivada primeira $f(x)=h'(x)$ de segunda orde, Deriche [18, 19] deseñou unha familia de filtros dende o filtro de suavizado, $h(x)$ ata o de derivada terceira. As expresións correspondentes ó filtro de suavizado e ás derivadas primeira e segunda, nas súas versións discretizadas, son as que seguen.

$$h(x) = k_0(\alpha|n| + 1)e^{-\alpha|n|} \quad h'(x) = k_1 n e^{-\alpha|n|} \quad h''(x) = k_3(1 - k_2 \alpha|n|)e^{-\alpha|n|}$$

onde os parámetros k_0 , k_1 , k_2 e k_3 son factores de normalización. k_0 vén dado pola condición

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 1$$

As expresións de k_1 , k_2 e k_3 escóllense de modo que h' e h'' teñan resposta nula ante unha entrada constante, esixindo ademais que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h''(n) = 0$$

As expresións resultantes son:

$$k_0 = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}} \quad k_1 = -\frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}} \quad k_2 = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{2\alpha e^{-\alpha}} \quad k_3 = 1$$

Estes filtros veñen dados en función dun parámetro α relacionado coa escala á que opera o filtro, polo que a este filtro se lle chama filtro *alfa*. Se o filtro de suavizado de gaussiana e o alfa se deseñan de modo que teñan a mesma enerxía total, verifícase a relación $\alpha \cdot \sigma = 5/2\sqrt{\pi}$. Valores típicos de α están entre 0.5 e 1.5.

5.1.2 Implementación recursiva dos filtros

Tanto para a familia de filtros gaussianos [20], coma para os filtros alfa [17], realizouse unha implementación recursiva con obxecto de reduci-lo número de operacións por punto da imaxe. A expresión que relaciona o valor dun elemento de saída do filtro cos elementos de entrada, dado pola seguinte convolución,

$$y(i) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(i-k)$$

non é recursivo. N é o número de elementos da secuencia de resposta de impulso. Este tamaño de máscara do filtro pode resultar excesivo se se desexa obter boas prestacións en canto a localización e detección. Para a implementación, por exemplo, do filtro de gaussiana, débese tomar un valor de N que sexa alomenos da orde de 4σ , sendo σ a desviación estándar da gaussiana, para que ofrezca bos resultados. A idea do filtrado recursivo é deseñar un filtro que teña un comportamento equivalente ó filtro de convolución, ou polo menos que se aproxime o suficiente, pero que veña descrito pola seguinte ecuación de diferencias

$$y(i) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \cdot x(i-k) - \sum_{k=1}^n a_k \cdot y(i-k)$$

Con esta expresión redúcese o número de operacións necesarias para obter un valor da secuencia resultante de N a $n+m$, polo que o tempo de computación decrece de forma importante, xa que basta tomar valores moi pequenos de n e m para obter boas aproximacións. Haberá que determinar os valores de a_k e b_k da función de transferencia do sistema recursivo

$$H_R(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_R(n) z^{-n} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k \cdot z^{-(k-1)}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot z^{-k}}$$

de maneira que o seu comportamento sexa igual ó do filtro non recursivo, ou, polo menos, se aproxime o suficiente de acordo con algunha medida de erro. Aquí aplícase un criterio de minimización do erro ó cadrado, onde o erro vén dado por:

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (h(k) - h_R(k))^2$$

sendo $h_R(k)$ a resposta de impulso do sistema recursivo.

Filtros alfa

No caso da aproximación recursiva dos filtros alfa, sucede que a función de transferencia asociada pódese implementar de forma exacta mediante a ecuación de diferencias antes presentada. As ecuacións de diferencias para un elemento de saída $y(n)$ do filtro de suavizado son

$$\begin{aligned} y_1(n) &= k_0 [x(n) + e^{-\alpha}(\alpha - 1)x(n-1)] + 2e^{-\alpha}y_1(n-1) - e^{-2\alpha}y_1(n-2) \\ y_2(n) &= k_1 [e^{-\alpha}(\alpha + 1)x(n+1) - e^{-2\alpha}x(n+2)] + 2e^{-\alpha}y_2(n+1) - e^{-2\alpha}y_2(n+2) \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

Desta forma é posible implementar un filtro de suavizado realizando 8 multiplicacións e 7 sumas, independentemente do valor de α , mentres que cun filtro non recursivo sería preciso un número de operacións proporcional ó tamaño do filtro. A modo de exemplo, un filtro de 16 bits de tamaño de máscara con $\alpha=0.5$ necesitaría 57 operacións, mentres que con 0.25 serían 113.

As ecuacións do filtro de derivada primeira, pola súa parte, precisan tan só de 5 operacións tanto de produto como de suma por elemento de saída.

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n-1) + 2e^{-\alpha}y_1(n-1) - e^{-2\alpha}y_1(n-2) \\ y_2(n) &= x(n+1) + 2e^{-\alpha}y_2(n+1) - e^{-2\alpha}y_2(n+2) \\ y(n) &= k_1 e^{-\alpha} [y_1(n) - y_2(n)] \end{aligned}$$

As ecuacións de diferencias utilizadas para a estimación da derivada seguinte implican 7 operacións de suma e 7 de multiplicación por elemento de saída, e son as que seguen.

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x(n) - e^{-\alpha}(k\alpha + 1)x(n-1) + 2e^{-\alpha}y_1(n-1) - e^{-2\alpha}y_1(n-2) \\ y_2(n) &= e^{-\alpha}(1 - k\alpha)x(n+1) - e^{-2\alpha}x(n+2) + 2e^{-\alpha}y_2(n+1) - e^{-2\alpha}y_2(n+2) \\ y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

Filtros de gaussiana

Cos filtros gaussianos non se pode realizar unha implementación exacta de H_R , hai que facer unha aproximación, aplicando o criterio de mínimos cadrados. En [20] utilízase unha aproximación recursiva da gaussiana e das súas derivadas por unha combinación de exponenciais, dada pola expresión seguinte.

$$h_R(k) = \sum_{i=0}^n \alpha_i e^{-\lambda_i k / \sigma}$$

Se se particulariza esta expresión para unha aproximación de orde catro, e se permite que os coeficientes α_i e λ_i poidan ser complexos, chégase a esta outra expresión

$$h_R(n) = \left(a_0 \cos\left(\frac{w_0}{\sigma} n\right) + a_1 \sin\left(\frac{w_0}{\sigma} n\right) \right) e^{-b_0 n / \sigma} + \left(c_0 \cos\left(\frac{w_1}{\sigma} n\right) + c_1 \sin\left(\frac{w_1}{\sigma} n\right) \right) e^{-b_1 n / \sigma}$$

A elección da orde catro débese a que hai que compensar a perda de precisión no proceso de aproximación. Unha vez calculados os parámetros de $h_R(n)$, obtéñense os coeficientes de

$H_R(z^{-1})$. Dada a orde da aproximación, o número de operacións por elemento de saída é maior aquí, polo que este filtro non será tan rápido coma o alfa.

5.2 Detección de puntos de fronteira

A detección de puntos de fronteira pódese realizar ben mediante o cálculo dos máximos do gradiente ou ben determinando os puntos de cruce por cero da laplaciana de gaussiana. No artigo de Monga e col. [42] afirmase que o cálculo da laplaciana é menos custosa cando se combina co filtro de suavizado, pero que sen embargo é máis sensible ó ruído que a aproximación de máximos de gradiente. Esta última é a aproximación que se utilizou nesta ocasión.

Pódese obter un filtro de suavizado 3D a partir de filtros de suavizado unidireccionais de forma que o filtrado nas distintas compoñentes sexa separable, mediante a aplicación do seguinte filtro.

$$h(n, m, p) = h(n) \cdot h(m) \cdot h(p)$$

Deste xeito a obtención dun punto da imaxe suavizada, $y(n, m, p)$, resulta de aplicar sucesivamente os filtros unidimensionais anteriormente descritos para cada unha das tres direccións. As derivadas direccionais obtéñense mediante

$$\frac{\partial}{\partial n} h(n, m, p) = h(m) \cdot h(p) \cdot \frac{d}{dn} h(n)$$

Como se pode ver, a aplicación de filtrado separable ten unha serie de vantaxes que se poden resumir nestes catros puntos:

- Se realizamos un filtrado nun espacio de dimensión r cunha máscara de tamaño l , o tempo de computación redúcese de r^d a lr respecto ó filtrado non separable.

- Permite ter en conta ruído con diferentes características ó longo de cada dirección. Isto pode suceder en imaxe médica, onde a dirección z pode ter características de ruído distintas.
- Xeneralízase de forma directa a espazos de calquera dimensión.
- Admite a implementación recursiva.

O inconveniente principal é que pode dar lugar a filtros anisotrópicos. Isto é o que sucede cos filtros alfa. Sen embargo existen excepcións, e unha delas é a do filtrado gaussiano separable, que é isotrópico.

O proceso a seguir para a detección de puntos de fronteira empeza co cálculo do módulo de gradiente a partir das derivadas primeiras direccionais. Seguidamente realízase a detección dos máximos do módulo do gradiente. Para cada punto $\mathbf{x}$ da imaxe compárase o seu valor do módulo de gradiente co dos puntos situados nas posicións anterior e posterior na dirección do gradiente, $\vec{g}(\mathbf{x})$, que representamos por $\mathbf{x}_+$ e $\mathbf{x}_-$ respectivamente e calculamos mediante:

$$\mathbf{x}_{\pm} = \mathbf{x} \pm \frac{\vec{g}(\mathbf{x})}{\|\vec{g}(\mathbf{x})\|}$$

Se se verifica $\|\vec{g}(\mathbf{x})\| > \{\|\vec{g}(\mathbf{x}_+)\|, \|\vec{g}(\mathbf{x}_-)\|\}$, entón considérase que $\mathbf{x}$ é un máximo. Se estes puntos non coinciden con ningunha das posicións discretas definidas na imaxe, o correspondente valor do módulo de gradiente estímase mediante unha interpolación linear nunha veciñanza de $\mathbf{x}_+$ ou $\mathbf{x}_-$. Finalmente aplícase unha umbralización. O valor do umbral debería ser moi baixo, pois o obxectivo é simplemente eliminar máximos orixinados polo ruído.

5.3 Cálculo das curvaturas locais

Na sección dedicada a selección de parches de superficie verase que unha das características que poden axudar a distinguir entre superficies de distintos obxectos é a forma. Para eso é preciso definir un conxunto de descritores que permitan sacar conclusións acerca da morfoloxía dun obxecto a partir das súas propiedades xeométricas. Un deles pode estar relacionado coa curvatura da superficie. Nesta sección expoñerase o método proposto por Monga e Benayoun [41] para o cálculo das curvaturas máxima e mínima locais, que involucra tamén o cálculo das derivadas primeiras e segundas direccionais.

De aquí en diante imos considerar que estamos traballando cunha isosuperficie definida por $I(x,y,z)$. Unha isosuperficie caracterízase porque a dirección do gradiente coincide coa normal. Para un vector unitario calquera $\vec{t}$ contido no plano tanxente a un punto m da isosuperficie, a definición da curvatura $k_{\vec{t}}$ vén dada por

$$k_{\vec{t}} \vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds}$$

onde $\vec{n}$ é o vector unitario normal á superficie por m e s é a lonxitude de arco en 3D, dada por

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vexamos agora como podemos obter unha expresión de k en función das compoñentes do gradiente $\vec{g}$ e das derivadas segundas parciais. Dado que traballamos con isosuperficies, a dirección do vector gradiente coincidirá coa normal á superficie, e será por tanto ortogonal á tanxente, polo que se cumpre que

$$\vec{g} \cdot \vec{t} = 0$$

Se derivamos esta expresión respecto a s obtense

$$\frac{d}{ds}(\vec{g} \cdot \vec{t}) = 0 = \vec{t}^T H \vec{t} + k_t \vec{g} \vec{n}$$

onde H é a matriz hessiana da función de niveis de gris $I(x,y,z)$. Dado que se está a traballar cunha isosuperficie, podemos substituír $\vec{n} = \vec{g} / \|\vec{g}\|$ na expresión anterior, do que se deduce que

$$k_t = -\frac{\vec{t}^T H \vec{t}}{\|\vec{g}\|}$$

Aquí temos unha expresión que da o valor da curvatura en función das derivadas parciais primeiras e segundas. A cuestión agora é determinar en que direccións da tanxente é interesante calcula-la curvatura e como se obteñen esas direccións. As magnitudes que pode ser máis interesante estudar para extraer información acerca da forma da superficie, son os valores extremos de k . Para determina-los valores de $\vec{t}$ que fan extrema a curvatura hai que resolve-lo problema

$$\text{Min}_{\vec{t}} \quad \vec{t}^T H \vec{t}$$

suxeito ás restricións

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 \quad \text{e} \quad \vec{t} \cdot \vec{g} = 0$$

que conduce a acha-la solución de

$$\frac{dk_t}{d\vec{t}} = 0$$

esixindo que $\vec{t}$ estea contido no plano tanxente á superficie en m . Esta condición permite expresar $\vec{t}$ en coordenadas polares, definidas por un par de vectores base ortonormais, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ contidos tamén no plano tanxente, de modo que

$$\vec{t} = \cos \theta \vec{a} + \sin \theta \vec{b}$$

Agora o problema consiste en atopar o valor do ángulo que faga a curvatura extrema.

$$\frac{dk_{\vec{t}}}{d\theta} = \vec{0} = -\frac{1}{\|\vec{g}\|} \left\{ \sin(2\theta) (\vec{b}^T H \vec{b} - \vec{a}^T H \vec{a}) + 2 \cos(2\theta) \vec{a}^T H \vec{b} \right\}$$

A solución desta ecuación implica realiza-lo cálculo dunha función arcotanxente, polo que Monga e Benayoun propoñen en [41] unha solución alternativa que reduce o custe computacional. A idea consiste en cambia-lo sistema de referencia dos puntos da imaxe de xeito que o eixo das x coincida coa dirección do gradiente. A matriz de rotación que representa esta transformación é a seguinte.

$$R = \begin{bmatrix} \frac{I_x}{\delta} & \frac{I_y}{\gamma} & \frac{I_x I_z}{\delta \gamma} \\ \frac{I_y}{\delta} & \frac{-I_x}{\gamma} & \frac{I_x I_z}{\delta \gamma} \\ \frac{I_z}{\delta} & 0 & \frac{-\gamma}{\delta} \end{bmatrix} = (\vec{g}, \vec{h}, \vec{f})$$

onde $\gamma = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$ e $\delta = \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + I_z^2}$. Con este cambio de coordenadas, tense que $\vec{t} = R \vec{t}'$, e o problema de cálculo de extremos pasa a se-lo de acha-los extremos da función

$$(R \vec{t}')^T H (R \vec{t}')$$

suxeito ás restriccións

$$\vec{t}'^T \vec{t}' = 1 \quad \text{e} \quad \vec{t}'_x = 0$$

posto que o vector $\vec{t}'$ está contido no plano tanxente, e non terá compoñente na dirección de $\vec{g}$. Como só nos interesan as compoñentes nas direccións de $\vec{f}$ e $\vec{h}$, pódese considerar o problema equivalente

$$\text{Min}_{\vec{t}'_{eq}} (\vec{t}'_{eq})^T H' \vec{t}'_{eq}$$

suxeito á restricción

$$\vec{t}'_{eq}{}^T \vec{t}'_{eq} = 1$$

onde

$$H' = R^T H R = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & H_{eq} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\vec{t}' = \begin{bmatrix} \cdot \\ \vec{t}_{eq} \end{bmatrix}$$

Utilizando a técnica de multiplicadores de Lagrange, este problema redúcese á diagonalización de H_{eq}' . Os autovalores desta matriz correspóndense coas curvaturas principais. As direccións tanxentes asociadas a estes autovalores determínanse calculando os autovectores de H_{eq}' para o sistema de referencia orixinal, aplicándolle a estes a matriz R . A expresión das curvaturas principais e a correspondentes direccións, dadas en función das derivadas parciais primeiras e segundas son as seguintes:

$$k_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{h}^T H \vec{h} + \vec{f}^T H \vec{f} \pm \sqrt{(\vec{h}^T H \vec{h} - \vec{f}^T H \vec{f})^2 + 4(\vec{h}^T H \vec{f})} \right\}$$

$$\vec{t}_{\pm} = \begin{bmatrix} h_1 + f_1 \frac{k_{\pm} - \vec{h}^T H \vec{h}}{\vec{f}^T H \vec{h}} \\ h_2 + f_2 \frac{k_{\pm} - \vec{h}^T H \vec{h}}{\vec{f}^T H \vec{h}} \\ h_3 + f_3 \frac{k_{\pm} - \vec{h}^T H \vec{h}}{\vec{f}^T H \vec{h}} \end{bmatrix}$$

Hai que notar que no cálculo dos elementos da matriz R poden aparecer indeterminacións. Cando só haxa contribucións ó gradiente na dirección z , a factor γ anúlase. Polo tanto os vectores $\vec{h}$ e $\vec{f}$ quedan indeterminados. Cando se produce esta situación o vector $\vec{g}$ coincide $\vec{e}_z$. Desta forma o plano tanxente será o xy . Para simplifica-los cálculos escolleranse $\vec{h}$ e $\vec{f}$ de modo que coincidan con $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$.

5.4 Extracción de parches de superficie

Unha vez que se dispón da información sobre cales son os puntos superficiais deséxase facer unha discriminación entre os que corresponden ós obxectos de interese e aqueles que pertencen a outras estruturas ou son simplemente ruído. Con esa fin impleméntase un algoritmo que agrupa os puntos en parcelas de superficie. En xeral, a superficie que encerra o volume dun obxecto non vai poder ser detectada na súa totalidade polo filtrado, e aparecerá fragmentada. Haberá por tanto que determinar cales dos parches detectados corresponden a fragmentos da superficie do obxecto baixo estudio e cales non. A selección realízase despois dun etiquetado de cada parche. A etiqueta é o valor dunha función que depende dun conxunto de medidas que caracterizan á superficie en canto a propiedades de tamaño, cor, forma, etc.. Debe reflectir dalgunha forma a calidade dun parche como candidato a pertencer á superficie do obxecto a modelar. A continuación descríbense os procesos de agrupamento e selección de parches para o modelado.

5.4.1 Agrupamento de puntos en parches de superficie

Como resultados da aplicación dos filtros que se acaban de describir, obtense unha imaxe de puntos de fronteira, para cada un dos cales se dispón dunha medida dos seus autovalores de curvatura. O paso seguinte é decidir cales deses puntos van intervir no axuste ou na posta en correspondencia co modelo. Esta selección non se fará punto por punto, senón que se vai facer un agrupamento en parches de superficie. Para extraer estas estruturas da imaxe hai que determinar as rexións conexas mediante o estudio das adxacencias entre os puntos de fronteira.

O método empregado para determina-las adxacencias está baseado nunha función recursiva e unha umbralización con histérese. Tal como se describe máis adiante en pseudocódigo, o algoritmo simplemente percorre a imaxe en busca de puntos de fronteira. No momento en que detecta un, crea unha estrutura e inclúe o punto como pertencente a ela. A continuación estudia os puntos adxacentes segundo un criterio de conectividade 26 para comprobar se tamén son de fronteira. Se o son, rexístraos como pertencentes á mesma superficie e pasa a repeti-lo proceso nas respectivas veciñanzas.

Para considerar que un punto é de fronteira defínese un umbral de gradiente de nivel de gris. Se o umbral é moi baixo, aparecerán moitos parches orixinados polo ruído. Se é moi alto, aumentará a fragmentación da superficie dos obxectos, pois soe haber zonas de baixo contraste onde o nivel de gradiente de gris se atenúa. Por este motivo realízase unha umbralización con histérese. A histérese [40] consiste en definir dous umbrais de nivel de gradiente distintos; un baixo que serve para decidir que puntos son de superficie e cales non, de maneira que non aparezan discontinuidades na superficie do obxectos; o outro maior utilízase para descartar aquelas superficies onde non apareza alomenos un punto con nivel de gris igual ou superior a el, evitando a proliferación de superficies ocasionadas polo ruído.

O seguinte listado describe o algoritmo utilizado para a extracción dos parches de superficie empregando umbralización con histérese.

```

Entrada: imaxe 3D
  Crea lista_de_superficies
  Para cada punto pertencente a imaxe 3D
    Se punto foi percorrido
      Continúa
    Se gris(punto) < gris_umbral_maior
      Se gris(punto) < gris_umbral_menor
        Marca punto como percorrido
        Continúa
      Marca punto como percorrido
      Crea superficie
      Engade superficie a lista_de_superficies
      Engade o punto a superficie
      Aumenta área(superficie) nunha unidade
      último_punto ← punto
      busca_puntos_adxacentes(último_punto, superficie)
  Fin
Fin

```

A función recursiva *busca_puntos_adxacentes* fai o seguinte:

```

Entrada: último_punto, superficie
  Para cada punto adxacente a último_punto facer
    Se punto foi percorrido continúa
    Marca punto como percorrido
    Se gris(punto) < gris_umbral_menor continúa
    Engade punto á lista de puntos de superficie
    Aumenta a área da superficie nunha unidade
    último_punto ← punto
  Busca_puntos_adxacentes(último_punto, superficie)
Fin
Fin

```

Unha vez rematado este proceso dispoñemos xa dunha organización da información de máis alto nivel que a aportada pola imaxe de niveis de gradiente de gris. Pero de momento as propiedades que se describen, tanto o modulo de gradiente de nivel de gris como as curvaturas, seguen sendo de carácter local, pois van asociadas a puntos individuais da imaxe, polo que non é posible facer unha discriminación de parcelas de superficie. Do que se trata agora é de operar sobre a nova descrición en forma de estruturas de superficie para determinar propiedades relativas, non a cada punto por separado, senón ó conxunto de todos eles. Desta forma seguimos subindo no nivel de abstracción, chegando a unha descrición que permitirá discriminar os puntos do obxecto a modelar.

5.4.2 Selección de parches de superficie

As etiquetas que se asignan a cada parche de superficie, veñen dadas como unha función das súas características. Neste traballo estudiamos un número reducido delas pero o método é extensible a calquera tipo de etiquetado. As características que aquí se manexan son as seguintes:

Área. Considérase que empregando filtros que operen a escala adecuada, as parcelas de superficie máis pequenas corresponden a ruído, e poden ser descartadas. É posible que con este criterio se estean eliminando anacos de pequeno tamaño da superficie do obxecto de interese, pero que non teñen peso no resultado final.

Nivel de gradiente de gris promedio. Informa da magnitude da variación do nivel de gris. Esta variación pode ser baixa cando é moi gradual, pero tamén cando se produce un salto moi brusco entre rexións de niveis de gris moi próximos. De maneira que descartar parches con nivel de gris promedio baixo, podemos estar eliminando as superficies de interese. Isto, xunto co feito de que soe haber máis dunha estrutura presente na imaxe, fan que a a medida do gradiente promedio non sexa suficiente para discriminar parches dun determinado obxecto.

Curvaturas media e gaussiana. Aportan información sobre a forma local dunha superficie. Defínense a partir das curvaturas principais que na sección 5.3 foron calculadas. Sendo k_+ e k_- os valores das curvaturas principais nun punto da superficie, a curvatura media H e a curvatura gaussiana K veñen dadas por:

$$H = \frac{k_+ + k_-}{2} \quad K = k_+ \cdot k_-$$

Os valores destes descriptores en cada punto da superficie dan unha idea aproximada da morfoloxía local. A curvatura gaussiana utilízase para saber se as curvaturas principais teñen o mesmo signo. Aproximando a superficie localmente a unha función cuadrática pódese establecer a seguinte clasificación

- $K > 0$, elipsoide
- $K < 0$, hiperboloide
- $K = 0$ e $H \neq 0$, cilindro
- $H = K = 0$, plano

Pola súa parte a curvatura media informa sobre a convexidade da superficie. Asumindo que as rexións de nivel de gris alto corresponden ó interior dos obxectos e os niveis de gris baixos ó exterior, entón a curvatura local nunha dirección determinada será positiva cando a superficie sexa cóncava nesa dirección. Tendo isto en conta, o criterio para determinar a convexidade da superficie é o que segue

- $H > 0$, superficie cóncava
- $H < 0$, superficie convexa
- $H = 0$ e $K \neq 0$, punto de sela
- $H = K = 0$, plano

Tanto a curvatura media como a gaussiana permiten distinguir entre varias clases de superficies, indicando como é a súa curvatura, pero non canto. Para aportar unha clasificación cualitativa das superficies debemos introducir unha nova medida, que a continuación se define

$$K_m = \sqrt{k_+^2 + k_-^2}$$

Con estas cinco magnitudes que se acaba de definir xa podemos dispor dunha idea aproximada das propiedades da superficie en cada punto. Sen embargo, non son as propiedades locais as que interesan, pois quérese etiqueta-los parches de superficies, non os puntos de forma individual. As medidas que realmente se utilizan para clasificar unha superficie segundo a súa forma, estarán un promediadas a tódolos puntos de fronteira dunha parcela. A utilidade das medidas de curvatura promediadas estará limitada a parches de pequeno tamaño ou grandes superficies moi regulares. Cando, como resultado do filtrado da imaxe se obtén toda a superficie dos obxectos, se estes teñen unha forma moi complexa, ó promediar os descriptores de forma perderán o seu significado. Nestes casos basta unha clasificación por área e gradiente para a selección dos obxectos.

En función de todas estas medidas pódese definir unha etiqueta que represente a clase de parche que temos. No traballo de Pardo e Cabello [44] suxírese unha expresión para o cálculo da etiqueta, aplicada o caso 2D, baseada nos valores do gradiente promedio e da lonxitude dos segmentos de borde. A expresión, que asigna valores maiores a

segmentos de curva S con valores do promedio do módulo do gradiente e da lonxitude l maiores, é a seguinte:

$$E(S_i) = \left[\frac{1}{l} \sum_{k \in S_i} \|\nabla I(p_k)\| \right]^2 l^{1/2}$$

sendo p_k os puntos de contorno e I o gradiente. A expresión que se utilizou neste estudio é unha extensión da anterior a 3D, á que se lle engaden factores que teñen conta das medidas de curvatura anteriormente citadas.

Dependendo do tipo de obxecto que haxa que segmentar haberá que incorporar á fórmula factores relacionados coa curvatura gaussiana e media dun ou doutro xeito. En canto a K_m pediráselle usualmente que sexa o menor posible, pois as superficies orixinadas polo ruído soen ser moi rugosas. Se se dispón de coñecemento sobre os valores de K_m esperados pódense introducir na expresión da etiqueta. A expresión xenérica da etiqueta dun parche P vén dada por:

$$E(P) = \begin{cases} E_{\max} & \bar{K}_m = C \\ \bar{g}^2 a^{1/2} \frac{f(\bar{K}, \bar{H})}{|\bar{K}_m - C|} & \text{noutro caso} \end{cases}$$

onde a notación utilizada representa :

$$\begin{aligned} \bar{g}(P) &= \frac{1}{a} \sum_{k \in P} \|\nabla I(p_k)\| \\ \bar{H}(P) &= \frac{1}{a} \sum_{k \in P} H(p_k) \\ \bar{K}(P) &= \frac{1}{a} \sum_{k \in P} K(p_k) \\ \bar{K}_m(P) &= \frac{1}{a} \sum_{k \in P} K_m(p_k) \end{aligned}$$

e sendo a a área do parche e C o valor esperado de K_m . Se no se dispón de coñecemento a cerca de C , haberá que substituír o seu valor por cero. Segundo o tipo de superficie que se desexe segmentar defínese o factor f de distinta maneira. A continuación preséntanse algúns exemplos.

Para superficies con caras planas, introdúcese un factor que aumente cando as curvaturas media como gaussiana tenden a cero en promedio, como pode se-lo seguinte

$$f(\bar{K}, \bar{H}) = 1/(\bar{K} \cdot \bar{H})$$

Se a superficie é cilíndrica haberá que distinguir entre o caso cóncavo e o convexo. Por exemplo, no caso cóncavo, f ten a seguinte expresión

$$f(\bar{K}, \bar{H}) = \text{signo}(\bar{H}) / \bar{K}$$

Para o caso convexo, f cambia de signo. Cando se desexa segmentar superficies do tipo elipsoide ou hiperboloide hai que ter en conta o signo tanto de $\bar{H}$ como de $\bar{K}$ de forma separada. En concreto, a función utilizada para a segmentación da superficie externa da tibia a partir das imaxes de CT, deberá ter en conta que a súa forma é hiperbólica e cóncava, resultando unha expresión coma a seguinte.

$$E(P) = \begin{cases} E_{\max} & \bar{K}_m = C \\ 0 & \bar{H} < 0, \bar{K} > 0 \text{ e } \bar{K}_m \neq 0 \\ \bar{g}^2 a^{1/2} \frac{1}{|\bar{K}_m - C|} & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Para segmentar a superficie interna esixírase que $\bar{H}$ sexa negativa.

O problema con estas magnitudes é que son moi susceptibles de verse afectadas polo ruído. Se as curvaturas se calculan utilizando unha veciñanza de puntos de superficie moi pequena, a influencia do ruído será moi grande, e pode resultar que en lugar de estar medindo a curvatura da superficie esteamos medindo a rugosidade ocasionada polo ruído. Aplicando un filtro de suavizado atenúase este efecto. Tamén é conveniente utilizar filtros de escala grande para o cálculo das derivadas de nivel de gris.

Por outro lado, é moi frecuente que aparezan parches duns poucos puntos en zonas de nivel de gris en principio uniformes debidos ó ruído. Estes parches poden ter curvaturas nulas, polo que o seu valor da etiqueta sería máximo. Para evitar esta situación recórrase a unha fase previa de umbralización por área, cun nivel umbral moi baixo.

Unha vez calculada a etiqueta de cada superficie, a estratexia a seguir para a selección dos parches de superficie, pode ser unha simple umbralización do valor da etiqueta. A elección dun umbral sempre supón un problema. O habitual é determinar un umbral distinto para cada tipo de imaxes, segundo a técnica de obtención da imaxe e tamén por contido, sobre un conxunto de imaxes de proba.

5.5 Observacións

A pesar da mellora que supón utilización de umbralización con histérese, que atenúa en certa medida o efecto de fragmentación das superficies, o proceso de extracción de parches de superficie non ofrece resultados totalmente satisfactorios. Ben é certo que o modelado global vai compensar a perda de información producida no filtrado. Sen embargo, hai que ter en conta que o axuste vai ser mellor canto máis fiables sexan os datos extraídos da segmentación de baixo nivel. Se na umbralización se define o menor dos dous umbrais moi alto, as rexións da superficie de baixo contraste poden ser eliminadas. Dado que a forma do obxecto vén definida a priori, a desaparición dunha parte da superficie no filtrado non vai afectar ós parámetros da ecuación implícita nin das deformacións globais, pero si á localización, de xeito que o modelo tenderá a desprazarse cara a zonas onde a densidade de puntos de fronteira sexa maior. Se pola

contra o umbral menor é baixo de máis, a superficie do obxecto pode fusionarse con artefactos da imaxe, que tamén poden contribuír de forma importante ó erro do axuste.

Pensando sobre todo na segmentación de imaxes de moi baixa calidade, pode ser interesante a utilización doutras técnicas de filtrado, que ofrezan mellores prestacións en canto a supresión de ruído e detección de estruturas. Referímonos concretamente ás técnicas baseadas en filtros de difusión non lineares e anisótropos. Trátase de suavizar os niveis de gris dunha imaxe de forma análoga a un proceso físico de difusión, coma o do calor. Establécese entón un fluxo que determina a evolución da configuración de niveis de gris co tempo. A imaxe filtrada corresponde ó estado en que se atopa o sistema despois difundirse durante un tempo t determinado, relacionado coa escala do filtro. O operador de suavizado obtense como resultado de resolver a ecuación de difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \nabla u(x, y, z, t)) \\ u(x, y, z, 0) = I(x, y, z) \end{cases}$$

onde $I(x, y, z)$ é o sinal de niveis de gris e D é unha matriz simétrica, chamada *tensor de difusión*.

O filtro de suavizado gaussiano é un exemplo de filtrado que simula un proceso de difusión, pero neste caso séguese un modelo linear e isotrópico, é dicir, que a difusión se produce ó mesmo ritmo en tódolos puntos da imaxe e en tódalas direccións. Neste caso o tensor de difusión redúcese a unha constante, e a solución u á ecuación da difusión correspóndese co produto do sinal de niveis de gris I por unha función gaussiana que ten por desviación estándar $\sigma = \sqrt{2t}$.

A non linearidade permite definir fluxos variables segundo a posición na imaxe, de modo que sexan menos intensos en rexións de fronteira. Isto da lugar a filtros que operan a escala alta en zonas uniformes, eliminando máis ruído, mentres que teñen un efecto máis local cerca dos contornos, preservando as estruturas presentes na imaxe. Outra vantaxe que ofrece a non linearidade é que atenúa o efecto de deslocalización dos contornos que ten lugar con filtrados coma o gaussiano. Un exemplo de filtro non linear isotrópico é o deseñado por Perona e Malik [46], onde o tensor de difusión é unha función escalar definida mediante a seguinte expresión

$$D = \left(1 + \frac{\|\nabla u\|^2}{\lambda^2} \right)^{-1}$$

sendo $\lambda > 0$ un factor constante. Introducindo este factor na ecuación da difusión, o fluxo $\partial u / \partial t$ diminúe en puntos onde o gradiente aumenta. A maior desvantaxe deste filtro é que as zonas de fronteira se ven máis afectadas polo ruído.

Pola súa parte a anisotropía dota ó filtrado da posibilidade de definir fluxos diferentes para distintas direccións. A difusividade en cada dirección virá determinada por factores estruturais. Un esquema que combine anisotropía e non linearidade permitirá establecer procesos de difusión lentos nas direccións normais en cada punto das

superficies de fronteira, mentres que nas direccións tanxentes a estas será posible levar a cabo difusión máis rápidas. Por tanto, mantense unha boa localización e detección das zonas de transición entre rexións mentres que se ofrece un suavizado maior nas direccións tanxentes a esas superficies de fronteira, eliminando ruído. Como exemplo desta técnica téñense os filtros de Weickert [57]. Este último presenta unha aproximación na que se define o tensor de difusión en función de descritores de forma relacionados con cálculos da curvatura, análogos ós presentados na sección anterior deste mesmo traballo.

Esta é unha das vías de mellora desta metodoloxía que nestes momentos estamos considerando. O perfeccionamento das técnicas de preprocesado pode supoñer unha mellora importante na calidade dos resultados en imaxes moi ruidosas, co que a aplicación do modelado con superelipsoides pode estenderse a outro tipo de imaxes médicas de máis baixa calidade que as de CT, para as que este procesado demostrou ofrecer bos resultados.

6 RESULTADOS

Acabamos de presentar unha metodoloxía orientada á resolución dalgúns problemas comúns dentro da reconstrución de imaxes en xeral, e especialmente da imaxe médica, onde estes problemas se fan máis patentes. Definiuse un modelo capaz describir a estrutura global dun obxecto, o que permite dotar dunha inicialización robusta ós modelos de deformación pola súa capacidade para evitar ou compensar a perda de información que se produce nos procesos de baixo nivel.

O método deseñado beneficiase tanto do coñecemento dispoñible sobre a forma global, por medio do uso de modelos a priori, como da información a nivel local extraída da propia imaxe, a partir da cal se efectúa a identificación do obxecto na imaxe. As prestacións do sistema desenvolto dependen de tres aspectos: a capacidade dos modelos empregados para representar adecuadamente os obxectos no ámbito de aplicación do sistema, a eficiencia dos métodos de optimización, e a eficacia do preprocesado na extracción dos puntos de fronteira. Neste capítulo mostraremos algúns resultados que pretenden ilustra-las prestacións que nestes tres aspectos proporciona a técnica desenvolto.

6.1 Optimización da función implícita

Comezaremos pola definición dos modelos a priori. Para a elección dunha das medidas de erro propostas na sección 4.1 realizáronse probas con imaxes de tibia. As función de erro que se estudian aquí son as D_2 , D_3 , e D_4 .

$$D_2 = f^{\varepsilon 1}(\vec{x}, \vec{q}) - 1$$

$$D_3 = (a_1 a_2 a_3)^{1/2} \{f^{\varepsilon 1}(\vec{x}, \vec{q}) - 1\}$$

$$D_4 = \delta = \|\vec{r}\| \left\{ 1 - \frac{1}{f^{\varepsilon 1}(\vec{r}, \vec{q})} \right\}$$

A configuración do algoritmo xenético empregado para a optimización fíxose partindo dos valores dos parámetros da simulación aconsellados na obra de Goldberg [25], que posteriormente se someteron a diversas probas para un maior axuste. Na configuración final a función de erro sométese a un mapeado de *ranking* e emprégase selección de torneo probabilístico, que ofrece resultados considerablemente mellores que os de ruleta ou torneo sinxelo. A poboación está composta por un total de 80 individuos. O operador de recombinación é o de cruzamento por dous puntos, tomando a probabilidade de cruzamento como $p_c=0.8$. En canto a mutación tomouse unha probabilidade bastante

elevada, $p_m=0.1$, en vista da prematura estabilización da poboación obtida para valores máis baixos. Os parámetros codificáronse empregando código Gray de 16 bits para cada un. Aínda que sería posible aumentar o número de bits por parámetro, considérase que dado o tipo de aplicación do modelo non se precisa de máis resolución. Baixo estas condicións fíxose evolucionar a poboación ata observar que esta se estabilizaba ou se chegaba ás 2000 iteracións.

Nunha primeira proba aplicouse o algoritmo así configurado a unha distribución de puntos de superficie dunha sección de tibia. As imaxes da figura 6.1 mostran distintas vistas desa superficie, representados mediante un esquema de triangulación para a súa mellor visualización. As imaxes das figuras 6.2 e 6.3 representan os resultados obtidos para as funcións D_4 e D_3 respectivamente. Visualmente pode apreciarse a diferenza de aspecto dos correspondentes modelos.

Pero aínda que perceptualmente a función D_4 ofrece mellores resultados, habería que realizar unha comparación cuantitativa para cercionarse de que efectivamente esta é a medida de erro máis axeitada. Para estimar a calidade dos distintos axustes utilizouse unha imaxe sintética dun superelipsoide, que se pode ver na figura 6.4. Esta imaxe presenta tódolos tipos de deformación global que se permite o noso modelo. Os valores concretos dos parámetros do superelipsoide pódense ver na táboa 6.1. A magnitude que nos serve para comparar numericamente os modelos obtidos defínese pola función $d(q, q')$, que representa a distancia entre o vector q dos parámetros coñecidos da superficie sintética e o vector q' dos parámetros calculados utilizando unha determinada función de erro, dada polo módulo do vector diferenza $q - q'$. Para que o axuste dun parámetro en particular non teña máis peso no cálculo da medida de calidade que os demais, cada compoñente está escalada cun factor a_i igual á orde de magnitude de q_i , resultando a expresión de d como segue.

$$d(q, q') = \sqrt{\sum_i a_i^2 (q_i - q'_i)^2}$$

Os valores dos factores a_i aparecen tamén na táboa 6.1 ó lado dos correspondentes parámetros. En lugar de realizar unha soa proba con cada función de erro, leváronse a cabo varios axustes, para obter cadanseu vector $\bar{q}'$ de parámetros calculados promedio. Os valores de d que se obtiveron son as que se contemplan na táboa 6.2. Pódese observar que en xeral, os resultados son peores para a función D_2 que para as outras dúas. Entre D_3 e D_4 é difícil determinar cal das dúas é mellor. Se calculamos por separado a función d para os parámetros de forma e os de transformación ríxida, comprobamos que a entre D_3 e D_4 pequena diferenza observada débese principalmente ó axuste dos parámetros de transformación ríxida.

	q_i	a_i	q_i' con D_2	q_i' con D_3	q_i' con D_4
ε_1	0,2	0,1	2,174e-01	2,132e-01	2,151e-01
ε_2	0,8	0,1	8,329e-01	8,032e-01	8,054e-01
a_1	20	10	2,003e+01	2,002e+01	2,001e+01
a_2	30	10	3,007e+01	3,002e+01	3,008e+01
a_3	50	10	4,979e+01	4,979e+01	4,978e+01
c_x	0	1	2,151e-04	1,040e-03	2,808e-04
c_y	0,2	0,1	2,092e-01	1,990e-01	1,990e-01
θ	0,003	0,001	2,361e-03	3,026e-03	2,999e-03
k	0,001	0,001	7,735e-04	8,053e-04	1,133e-03
φ	0	1	6,729e-04	-3,097e-02	1,040e-02
α	0	1	-1,846e-03	-3,072e-02	4,473e-02
β	0	1	7,661e-05	8,999e-06	-1,979e-05
γ	0	1	-8,281e-03	3,180e-02	-4,480e-02
t_1	0	1	1,085e-01	8,941e-02	2,312e-01
t_2	0	1	-2,959e-03	2,875e-03	-7,610e-03
t_3	0	1	-2,020e-02	-4,960e-02	-1,781e-02

Táboa 6.1 Valores dos parámetros q_i do superelipsoide da figura 6.4 cos correspondentes factores de peso a_i . Á dereita, o promedio dos valores dos parámetros q_i' calculados para as funcións de erro D_2 , D_3 e D_4 nun total de 12 probas.

Función de erro	d	d_{forma}	$d_{t. rixida}$
D_2	0,787	0,779	0,111
D_3	0,266	0,242	0,111
D_4	0,319	0,210	0,240

Táboa 6.2 Estimación da calidade do axuste coas distintas medidas de erro.

6.2 Preprocesado

Cos modelos a priori definidos, só hai que realizar a posta en correspondencia cos puntos dunha imaxe para poder inicializar a superficie do obxecto. Estes puntos de imaxe extraírense por medio do preprocesado da imaxe. Para poñer a proba o proceso de selección de puntos de fronteira da imaxe tamén se creou un imaxe 3D de proba, nas que se representaron tres figuras de distintas características: dúas superficies cóncavas que corresponden a un hiperboloide, de curvatura gaussiana negativa, e un cilindro e unha superficie esférica convexa, que sería un oco dentro do cilindro. Para comprobar a robustez do sistema fronte a situacións non ideais fíxose que o nivel de gris do fondo da imaxe variase e difumináronse os contornos dos obxectos cun suavizado gaussiano de desviación estándar $\sigma = 1$. Algúns cortes da imaxe resultante poden observarse na figura 6.5. Quíxose tamén comproba-la robustez ante ruído gaussiano de distintas características, para o que se construíron as imaxes das figuras 6.6, 6.7 e 6.8 a partir da anterior engadindo ruído de valor medio 0 e desviación estándar $\sigma = 20$, $\sigma = 30$ e $\sigma = 40$ respectivamente.

6.2.1 Detección de puntos de fronteira

A imaxe de proba de $\sigma_{\text{ruído}} = 20$ foi filtrada cos filtros gaussiano e alfa utilizando os correspondentes factores escala $\sigma = 3$ e $\alpha = 0.5$ respectivamente. Con estes valores constrúense filtros de escala relativamente alta, co que se pretende eliminar ruído e evita-la fragmentación excesiva das fronteiras entre rexións. Como se pode ver nas figuras 6.9 e 6.10, os resultados son moi similares, aínda que unha análise mais en detalle revela que o filtro alfa ofrece mellores características en canto á localización dos puntos de fronteira. Por exemplo, se nos fixamos no corte $z = 50$, que se amosa na figura 6.13 ampliado e coa escala de niveis invertida para unha mellor visualización, veremos que as superficies tenden a aplanarse na dirección normal ás direccións de filtrado gaussiano, mentres que co filtro alfa consérvase a forma circular da sección do cilindro. Sen embargo non todo son vantaxes cos filtros alfa. Nas imaxes de puntos de fronteira obtidas para o corte $z = 5$ (figura 6.14), vese que o contorno inferior do hiperboloide desaparece confundido coa cor de fondo. Obsérvase en xeral que o filtrado gaussiano detecta mellor os puntos de fronteira, aínda que tamén é máis sensible ó ruído. Dado que a selección de parches de superficie vai eliminar tódolos artefactos orixinados polo ruído, en parte gracias á umbralización con histérese no agrupamento de puntos en parches, e en parte debido á umbralización da etiqueta de cada parche, é tal vez máis interesante que se conserve a maior información das superficies que sexa posible, polo que no sucesivo se vai optar por empregar o filtrado gaussiano.

Nas figuras 6.11 e 6.12 móstranse os resultados da detección de puntos de fronteira con filtrado gaussiano aplicado á imaxes sintéticas de $\sigma_{\text{ruído}} = 30$ e $\sigma_{\text{ruído}} = 40$. Obsérvase que, a pesar da mala calidade das imaxes, a detección é bastante boa. Para unha imaxe real de CT de perna dereita (figura 6.24) aplicouse o filtrado gaussiano, dando lugar ós resultados que poden verse na imaxe da figura 6.25.

6.2.2 Detección de parches de superficie

Na figura 6.15 demóstrase a conveniencia de empregar unha umbralización con histérese. Sobre a imaxe de proba de $\sigma_{\text{ruído}} = 20$ aplicáronse distintos valores dos umbrais e observouse o seguinte. Na imaxe da esquerda a superficie do cilindro desaparece na parte inferior como consecuencia de tomar un único umbral de valor elevado: $u1 = u2 = 50$. Se se reduce o valor do umbral, $u1 = u2 = 20$, aparecen artefactos, como se observa na imaxe central. Seleccionando un umbral maior suficientemente alto como para que se eliminen os parches orixinados polo ruído, $u2 = 50$, e un umbral menor baixo dabondo para detectar tódolos puntos da superficie do cilindro, $u1 = 20$, obtense a imaxe da dereita. No caso da imaxe de perna dereita, os resultados do agrupamento de parches de superficie que poden verse nas imaxes da figura 6.26, resultan de tomar os umbrais menor e maior $u1 = 40$ e $u2 = 100$.

6.2.3 Etiquetado e selección de parches de superficie

Dende a figura 6.16 ata a 6.20 preséntanse os resultados da aplicación de distintas funcións de cálculo da etiqueta a imaxe de proba de $\sigma_{\text{ruído}} = 20$. Nas figura 6.16 e 6.17 utilizouse a información da curvatura gaussiana para seleccionar superficies con curvaturas principais de distinto signo, coma o hiperboloide, de igual signo, para illar a esfera, e finalmente as que teñen polo menos unha das dúas curvaturas nula, resultando a selección do cilindro. Para eso foi suficiente engadir un termo na función de etiqueta relacionado co signo de K . Se se desexase seleccionar unha superficie plana que puidese estar presente na imaxe, habería, ademais que tomar a curvatura media $H = 0$. Se o interese é facer unha distinción entre superficies convexas e cóncavas haberá que ter en conta o signo da curvatura media H . Nas figura 6.19 e 6.20 amósase o resultado de selecciona-las superficies con $H > 0$ e $H < 0$ respectivamente. Finalmente móstranse os parches de superficie das tres imaxes de proba que se van a usar na posta en correspondencia cun modelo de cilindro nas Figura 6.21, Figura 6.22 e Figura 6.23.

A modo de ilustración da aplicación da técnica de selección, fíxose o mesmo proceso para as imaxes de perna dereita, utilizando por separado a información da curvatura gaussiana e a da curvatura media, aínda que estes resultados, que se poden ver nas figura 6.27 e 6.28, non se utilizarán posteriormente para a posta en correspondencia. Na figura 6.27 pode verse que as superficies correspondentes ós osos, tanto externas como internas, teñen autovalores da curvatura de distinto signo, pois a curvatura na dirección lonxitudinal é cara afora. Na figura 6.28 compróbase como a curvatura media se pode utilizar para diferenciar entre superficies externas e internas. Combinado adecuadamente a información que aportan K e H , poderá seleccionarse as superficies externa da tibia e do peroné e, utilizando ademais o valor da área illar tan só a tibia (figura 6.29). Á hora de utiliza-lo valor de H para a selección na imaxe da tibia hai que ter coidado, pois se se toma un valor do umbral menor de gradiente moi baixo ($u1 = 30$), as superficies interna e externa aparecen unidas, como se apreciar na figura 6.31. Se para ese parche se calculase H , resultaría a media dos valores correspondentes ás superficies externas e internas. Ó aumentar o nivel de gradiente umbral menor, perderanse puntos de fronteira na rexión superior da tibia, onde os niveis de gradiente son máis baixos. Comparando os cortes $z=165$ das figura 6.29 e 6.31 compróbase que na primeira o contorno case se esvaeceu por completo. As figuras 6.30 e 6.32 representan unha reconstrución 3D das superficies

seleccionadas que acabamos de comentar nas que tamén se aprecia a perda de puntos de fronteira na imaxe umbralizada con $u1 = 40$.

A modo de resume presentamos a seguinte lista coas especificacións de todo o proceso realizado para chegar a esta imaxe da figura 6.29.

- Función de erro: distancia radial.
- Filtrado: gaussiano con $\sigma = 3$.
- Umbralización con histérese: $u1 = 40$, $u2 = 100$.
- Selección: $H > 0$, $K < 0$.

6.3 Posta en correspondencia

Finalmente, realizáronse probas do método de posta en correspondencia tanto para un modelo de cilindro coas imaxes sintéticas coma cos modelos de tibia e a imaxe da figura 6.24. Os resultados presentados na figura 6.32 da posta en correspondencia do cilindro coa imaxe de $\sigma_{\text{ruído}} = 20$, obtidos coa función de erro D_4 , amosan unha correspondencia excelente, a pesar de que a superficie de fronteira do cilindro que se utilizou para o axuste estaba incompleta, acadando así obxectivo de obter un modelo estrutural a partir dunha imaxe de baixa calidade. Coas imaxes de $\sigma_{\text{ruído}} = 30$ e $\sigma_{\text{ruído}} = 40$ a correspondencia non é tan boa (Figura 6.34 e Figura 6.35), pero aínda así pode ser adecuada para a inicialización dun modelo deformable.

Neste caso non se pode realizar un cálculo da medida da distancia d con tódolos parámetros de transformación ríxida, pois os valores resultantes para os parámetros de rotación non se corresponden cos orixinais, aínda que son igualmente válidos debido ás simetrías de rotación. O ángulo α representa unha primeira rotación en torno ó eixo z da imaxe, que coincide co do obxecto, polo que α queda indeterminado. O ángulo β representa a rotación en torno ó eixo y e debe ser nulo. O ángulo γ é o de rotación en torno ó eixo z da imaxe despois das transformacións anteriores, que segue coincidindo co eixo z do obxecto, polo que tamén está indeterminado. Nestas circunstancias só ten sentido realizar unha comparación de entre os parámetros de posta en correspondencia que se amosan na táboa 6.3. Na táboa 6.4 amósanse os valores da distancia $d(q, q')$ para cada unha das imaxes de proba.

Para o caso particular do cilindro, esta xa pode ser unha representación final, pois describe ó obxecto correctamente tanto a nivel global como local. No caso da tibia a posta en correspondencia ofrece unha inicialización aceptable para un posible modelo de superficie deformable. Nas figuras 6.36 e 6.37 amósase o resultado da posta en correspondencia empregando as funcións de erro D_3 e D_4 respectivamente, e utilizando en cada caso o modelo de forma correspondente. En ambos casos a superficie do modelo aproxímase a do obxecto o suficiente para que un modelo de contorno activo sexa capaz de reconstruí-lo.

En resume, cumpriuse o obxectivo de conseguir unha ferramenta que permite inicializar un modelo deformable. As superficies resultantes do modelado con superelipsoides non

	q_i	a_i	q_i' para $\sigma_{\text{ruído}} = 20$	q_i' para $\sigma_{\text{ruído}} = 30$	q_i' para $\sigma_{\text{ruído}} = 40$
a_0	1	1	9,933e-01	1,043e+00	1,069e+00
β	0	1	-5,373e-04	-7,163e-02	-1,203e-01
t_x	50	10	5,002e+01	5,015e+01	5,032e+01
t_y	50	10	5,003e+01	5,139e+01	5,203e+01
t_z	50	10	4,955e+01	4,884e+01	5,122e+01

Táboa 6.3 Parámetros de posta en correspondencia do cilindro.

Imaxe	d
$\sigma_{\text{ruído}} = 20$	0,143
$\sigma_{\text{ruído}} = 30$	0,575
$\sigma_{\text{ruído}} = 40$	0,757

Táboa 6.4 Estimación da calidade da posta en correspondencia para as distintas imaxes de proba.

só conseguen unha boa localización do obxecto na imaxe senón que tamén se acaba unha boa aproximación á forma global. Cunha inicialización tan próxima á superficie real, garátese a converxencia dos modelos deformables. A aplicación podería incluso ser utilizada para a reconstrución de obxectos sinxelos, que poidan ser representados de forma exacta mediante superelipsoides xeneralizados con deformacións globais

Parte do éxito da inicialización débese ós bos resultados obtidos na fase de preprocesado. A utilización dunha técnica de umbralización reduce de forma importante a perda de puntos de superficie. Pola súa parte, e o método de etiquetado permite distinguir entre imaxes de moi diversos tipos.

Compróbase ademais que o proceso segue funcionando de forma correcta aínda cando na fase de preprocesado se perden partes da superficie do obxecto. Isto é sucede en parte gracias a utilización de modelos a priori, que aseguran que a superficie se manteña íntegra. Se a isto sumamos unha boa elección da función de erro e a aplicación dun algoritmo de optimización xenético, aseguramos unha correcta estimación dos parámetros de transformación ríxida a pesar de que os parches de superficie describan só parcialmente á superficie real.

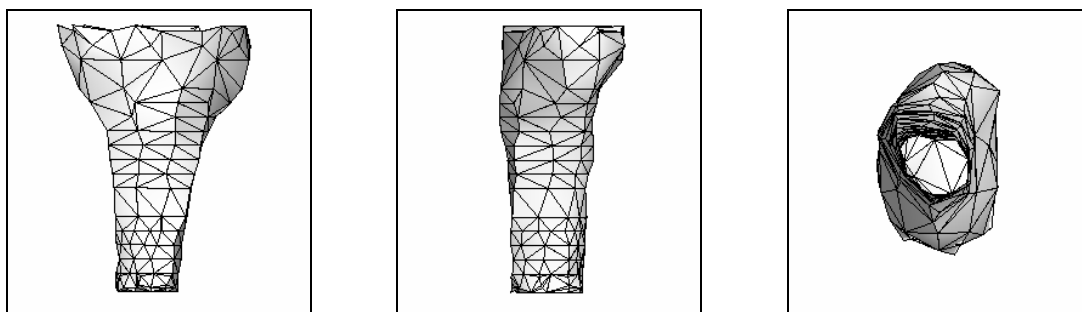


Figura 6.1. Nube de puntos para o cálculo do modelo despois dunha triangulación.

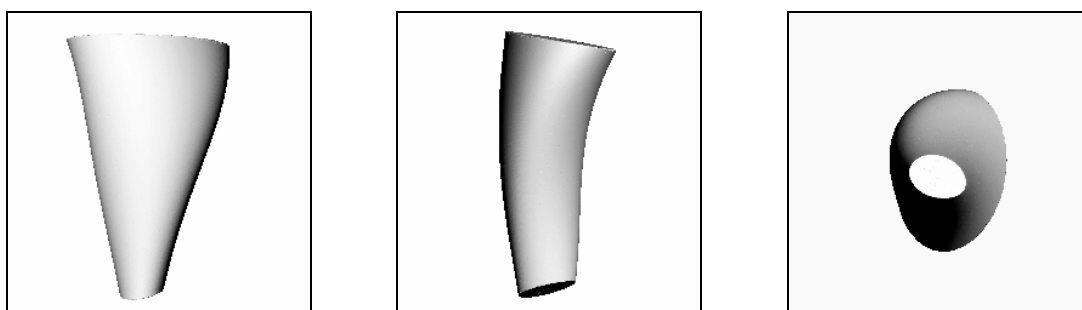


Figura 6.2. Modelo que resulta de utilizar a función erro D_4 (distancia radial) no axuste.

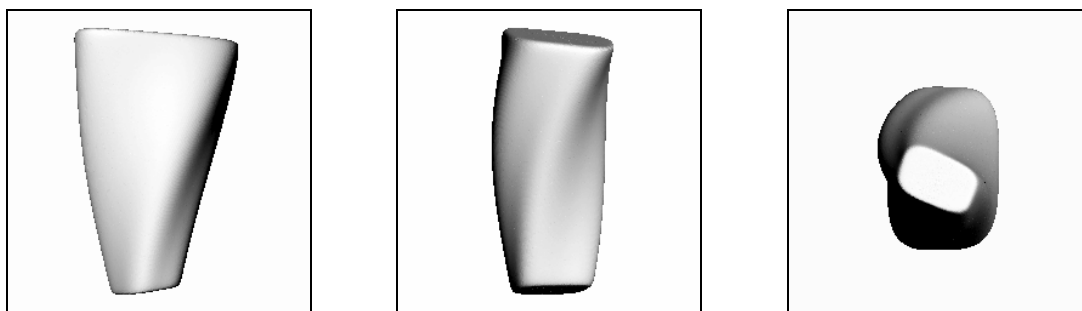


Figura 6.3. Modelo que resulta de utilizar a función erro D_3 no axuste.



Figura 6.4. Superficie sintética para a comparación das distintas funcións de erro.

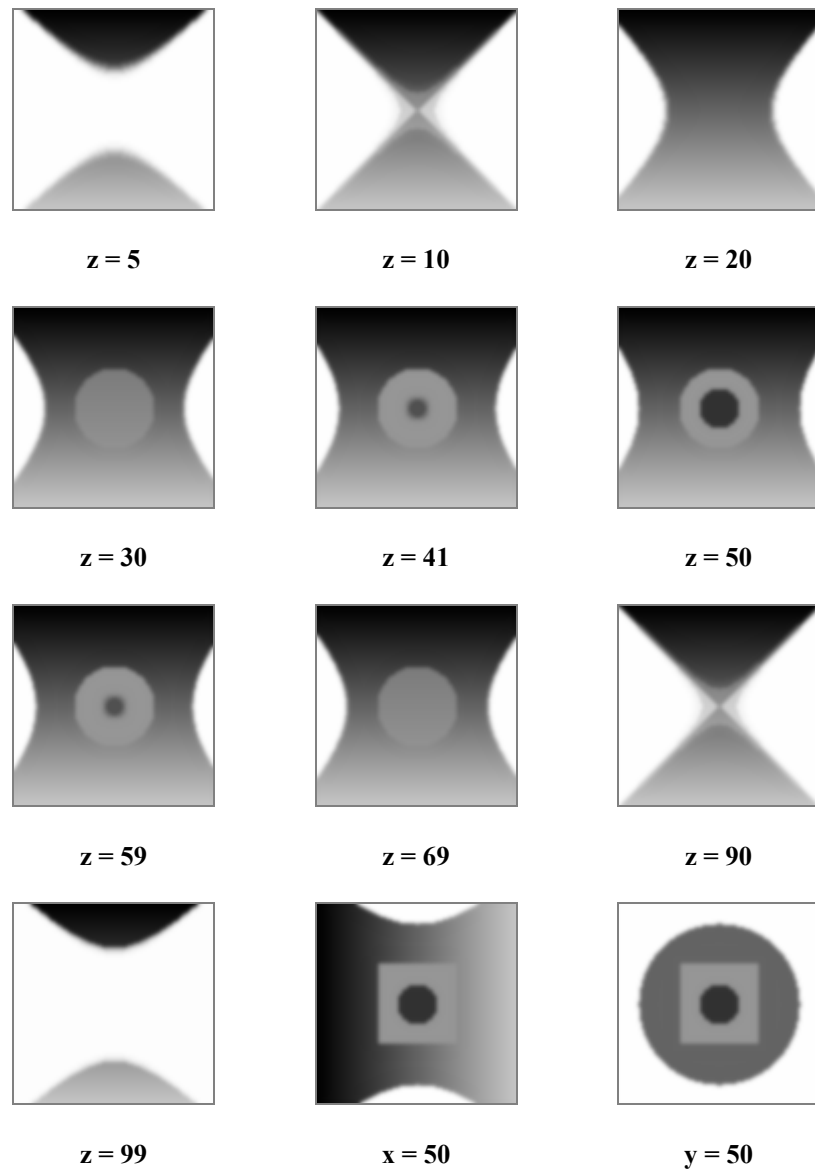


Figura 6.5 Imaxe de proba con distintos tipos de superficie e variación da cor de fondo e suavizado gaussiano de desviación estándar $\sigma = 1$.

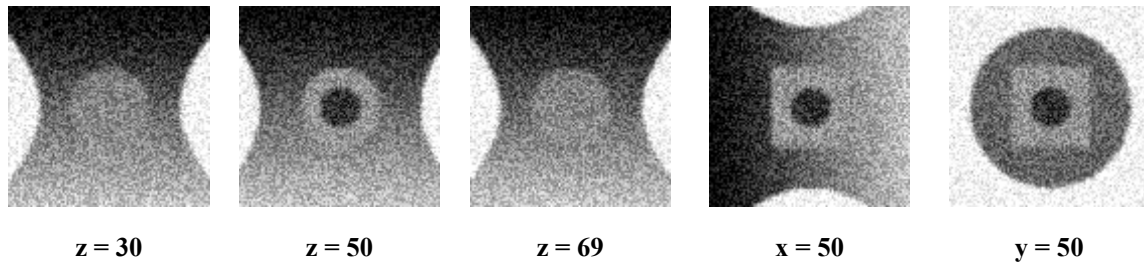


Figura 6.6 Imaxe de proba con ruído gaussiano de desviación estándar $\sigma = 20$.

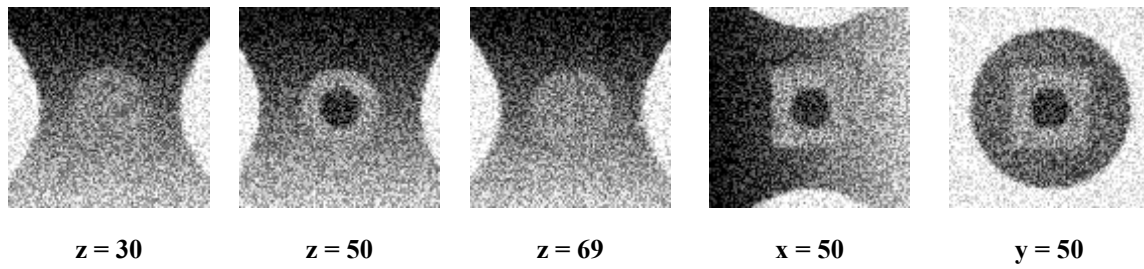


Figura 6.7 Imaxe de proba con ruído gaussiano de desviación estándar $\sigma = 30$.

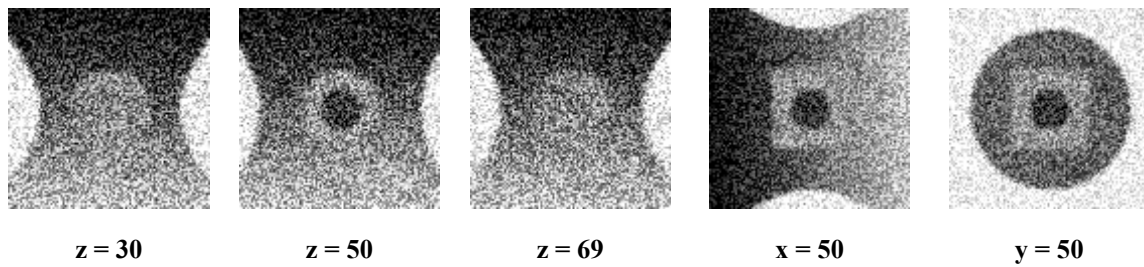


Figura 6.8 Imaxe de proba con ruído gaussiano de desviación estándar $\sigma = 40$.

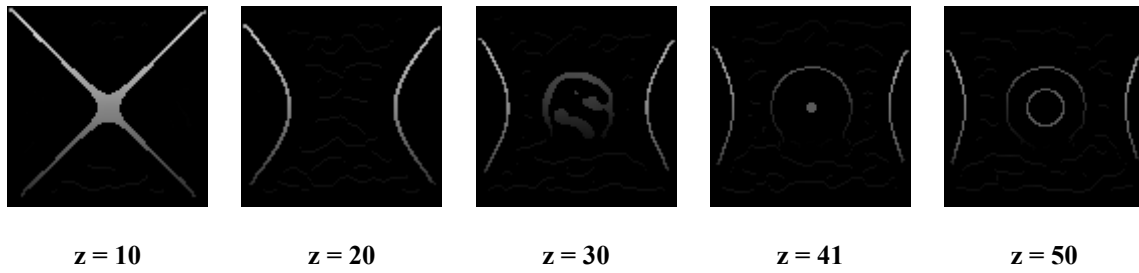


Figura 6.9 Imaxe de proba $\sigma_{\text{ruido}} = 20$ tras un filtrado gaussiano con $\sigma = 3$

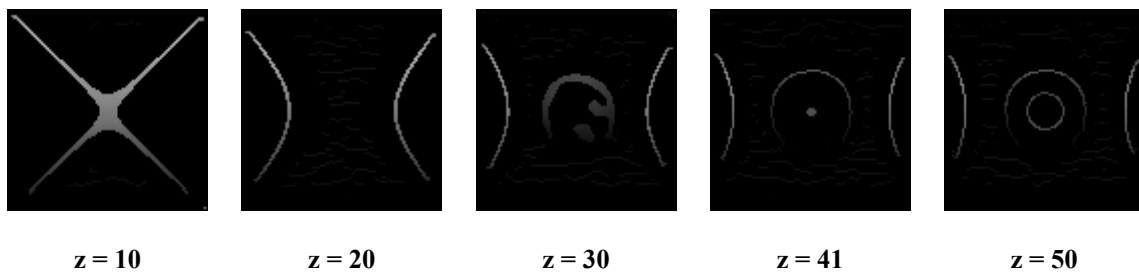


Figura 6.10 Imaxe de proba $\sigma_{\text{ruido}} = 20$ tras un filtrado alfa con $\alpha = 0.5$

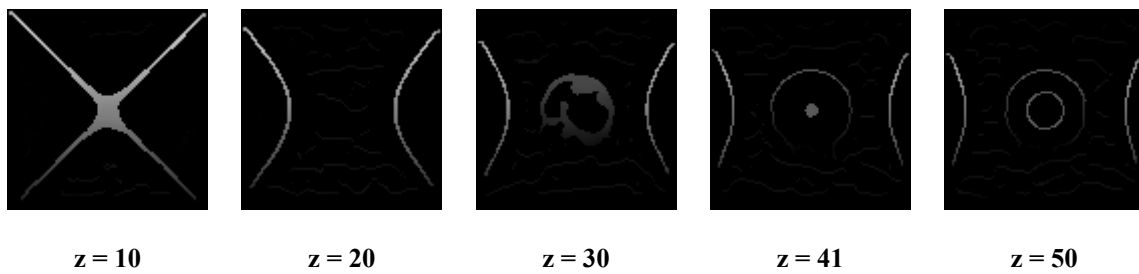


Figura 6.11 Imaxe de proba $\sigma_{\text{ruido}} = 30$ tras un filtrado gaussiano con $\sigma = 3$

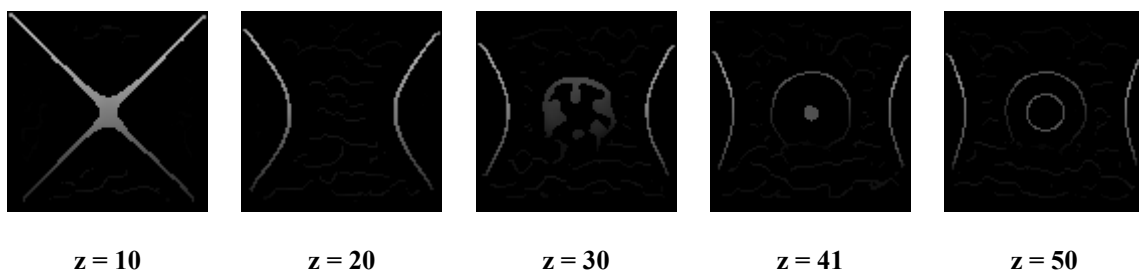


Figura 6.12 Imaxe de proba $\sigma_{\text{ruido}} = 40$ tras un filtrado alfa con $\sigma = 3$

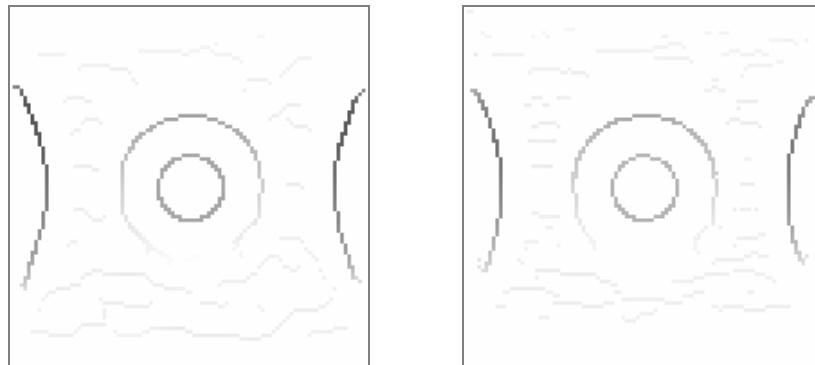


Figura 6.13 Cortes $z=50$ en negativo con filtrados gaussiano $\sigma=3$ (esquerda) e alfa $\alpha=0.5$ (dereita)

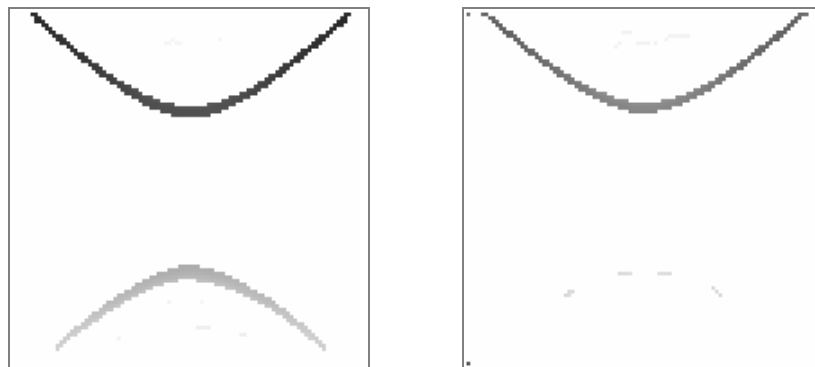


Figura 6.14 Cortes $z=5$ en negativo con filtrados gaussiano $\sigma=3$ (esquerda) e alfa $\alpha=0.5$ (dereita)

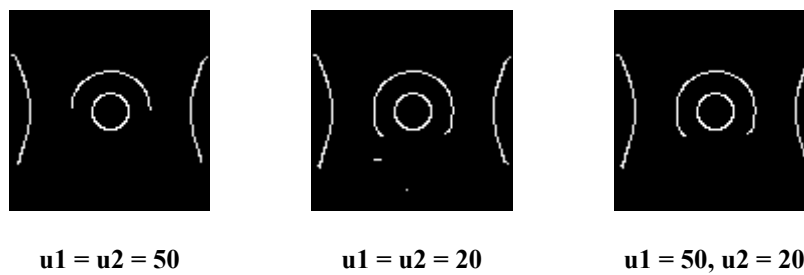
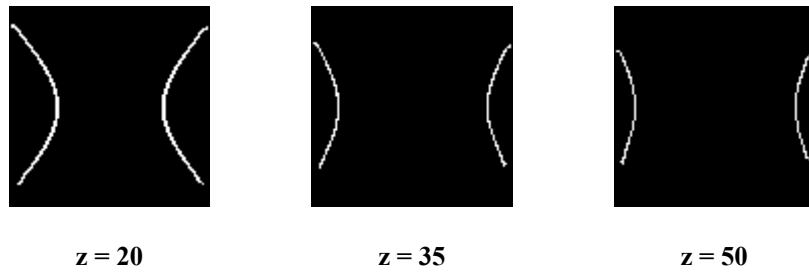
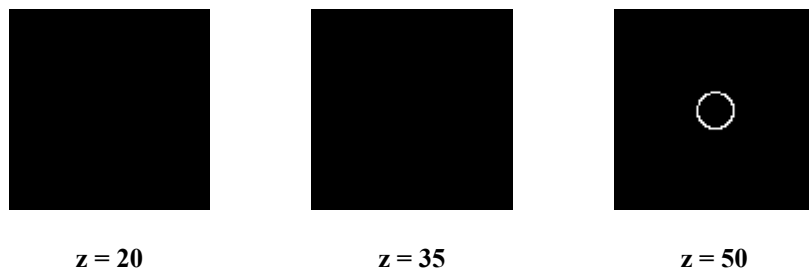
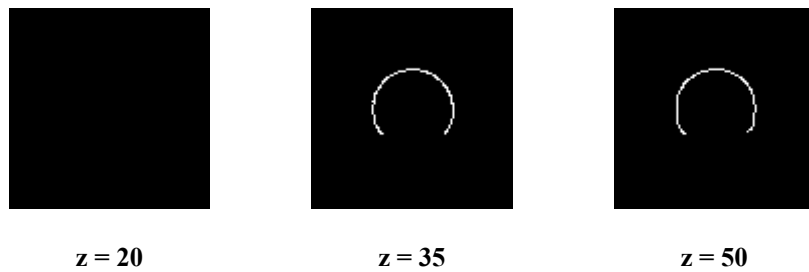
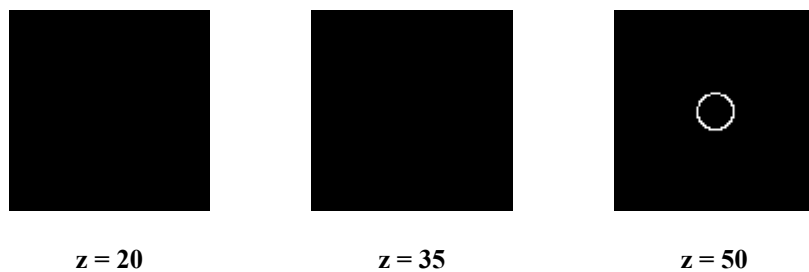
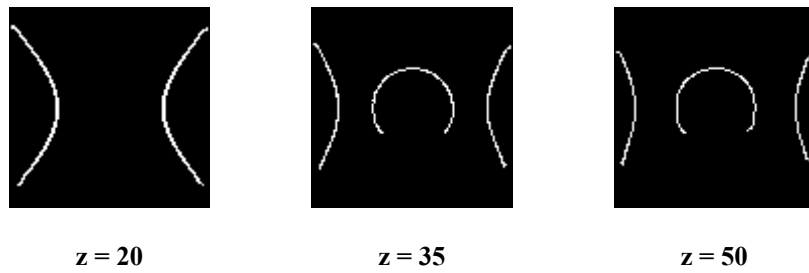
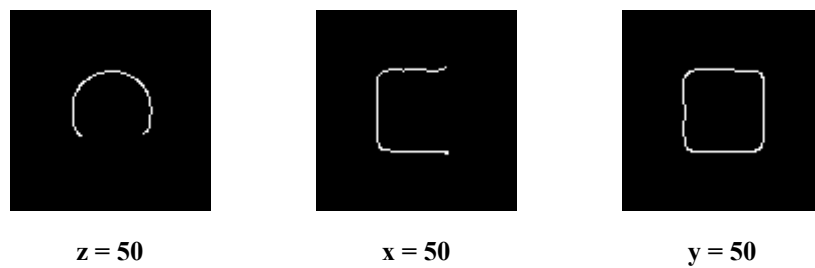
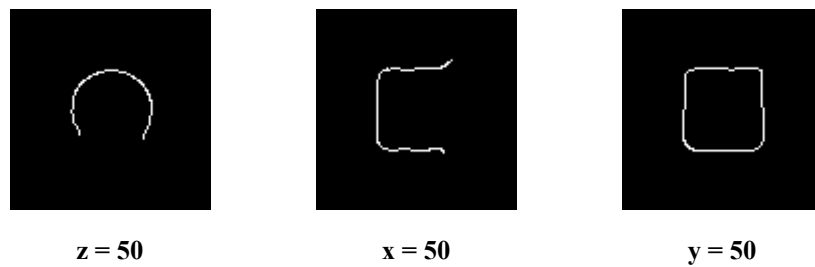
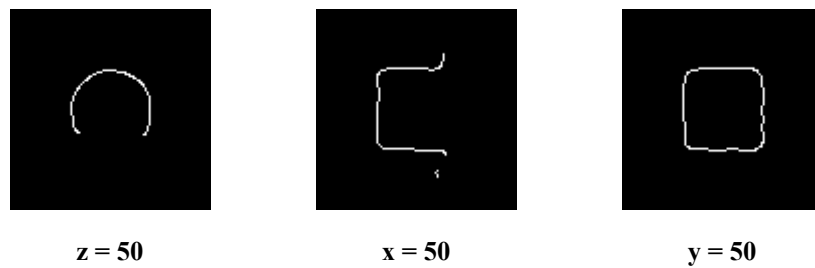


Figura 6.15 Agrupamento de parcelas de superficie con distintos valores dos umbrais maior e menor.

Figura 6.16 Selección de superficies con $K < 0$ Figura 6.17 Selección de superficies con $K > 0$ Figura 6.18 Selección de superficies con $K = 0$ Figura 6.19 Selección de superficies con $H > 0$

Figura 6.20 Selección de superficies con $H < 0$ Figura 6.21 Selección de superficies cilíndricas na imaxe de proba con ruído $\sigma = 20$.Figura 6.22 Selección de superficies cilíndricas na imaxe de proba con ruído $\sigma = 30$.Figura 6.23 Selección de superficies cilíndricas na imaxe de proba con ruído $\sigma = 40$.

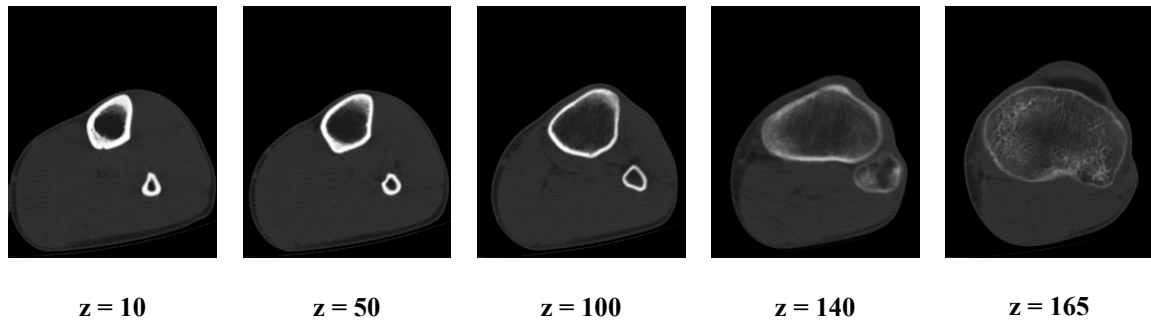


Figura 6.24 Imaxes CT de perna dereita.

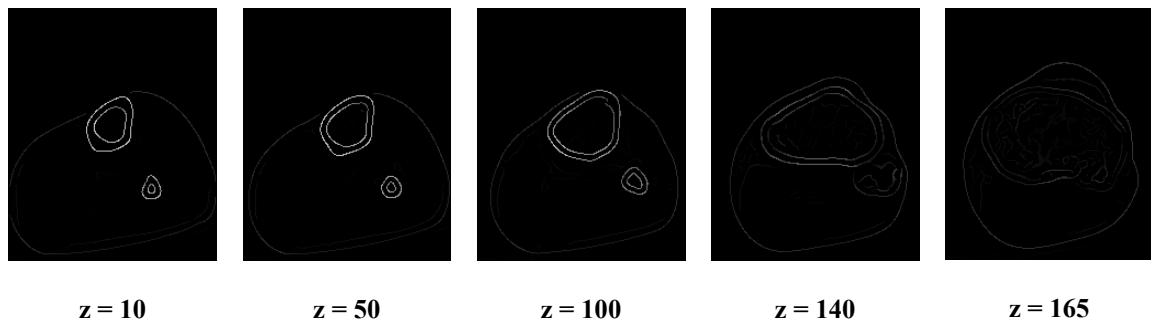


Figura 6.25 Imaxes CT de perna dereita filtradas con filtro gaussiano.

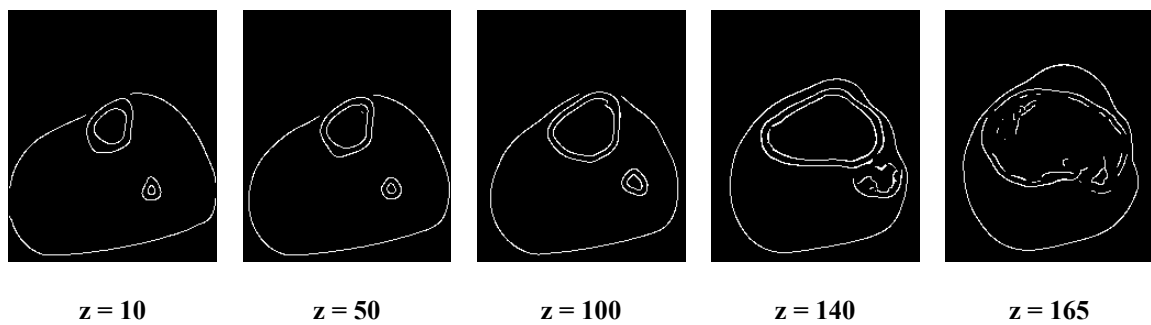


Figura 6.26 Agrupamento en parches de superficie

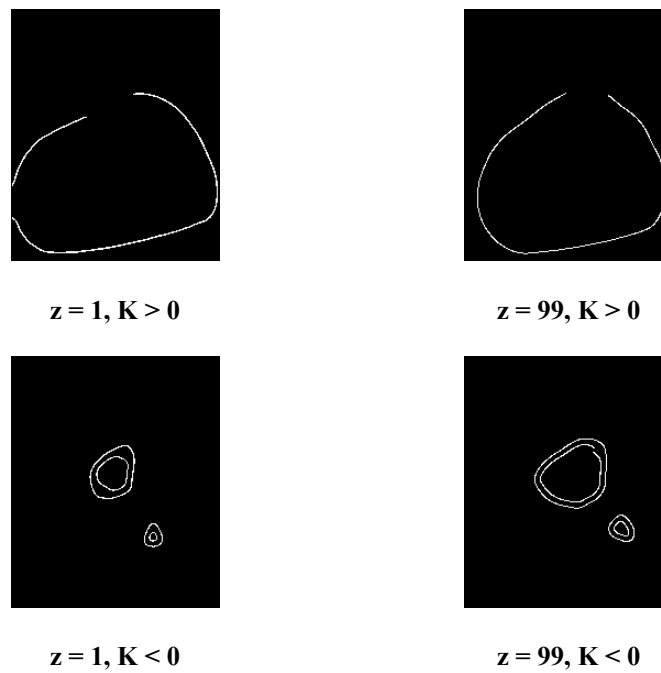


Figura 6.27 Selección de superficies por curvatura gaussiana.

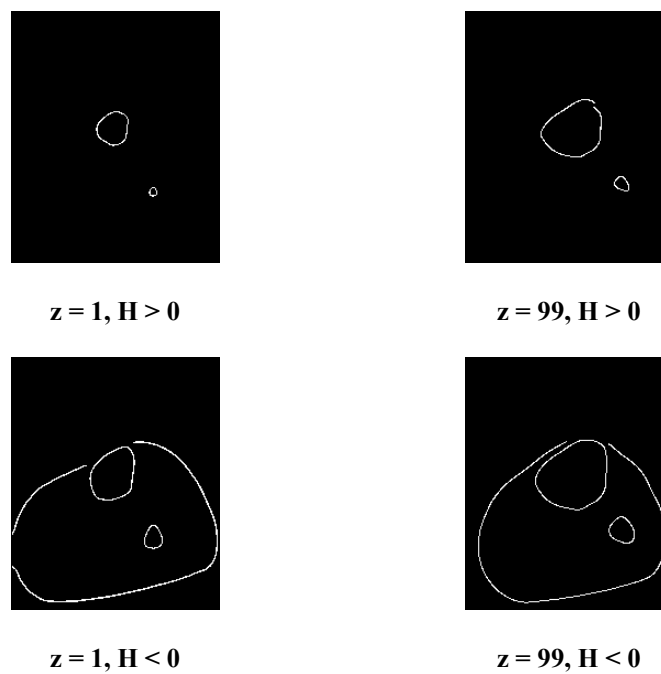


Figura 6.28 Selección de superficies por curvatura media.

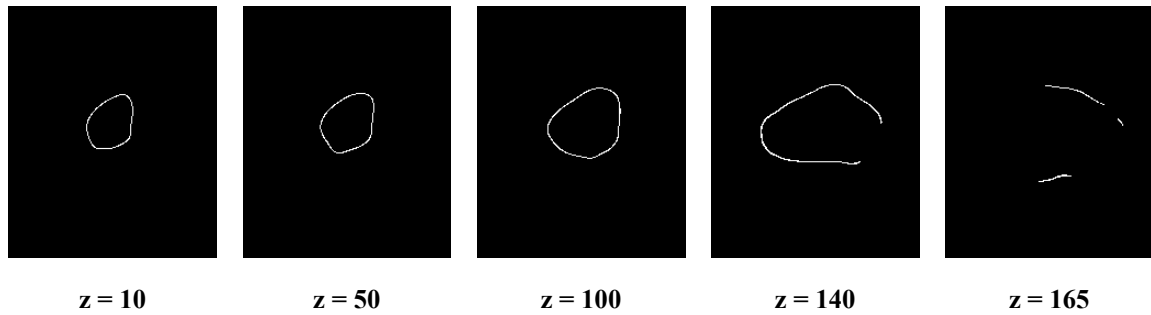


Figura 6.29 Selección con umbral menor $u_2=40$.



Figura 6.30 Reconstrucción triangulada da superficie da Figura 6.29

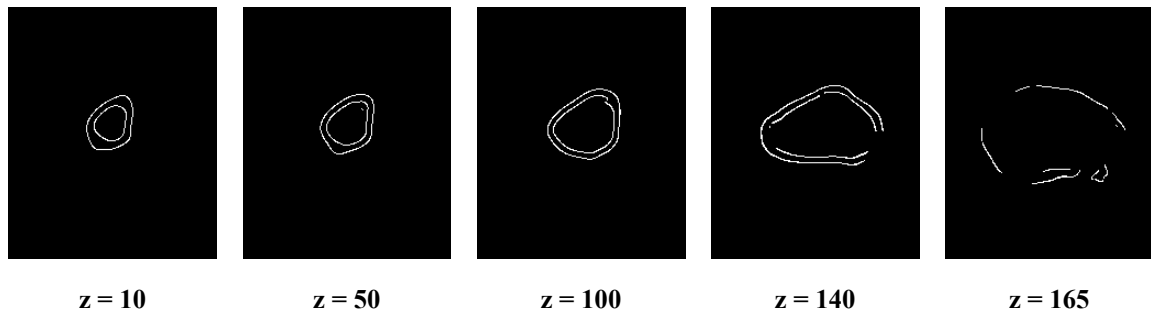


Figura 6.31 Selección con umbral menor $u_2=30$.

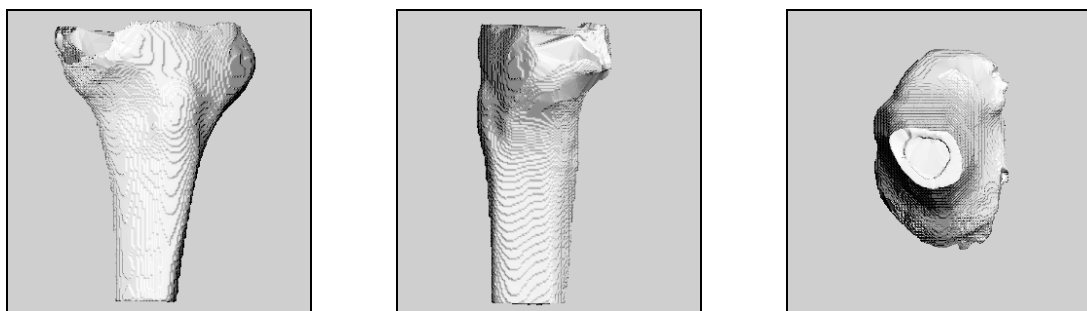


Figura 6.32 Reconstrucción triangulada da superficie da figura 6.30

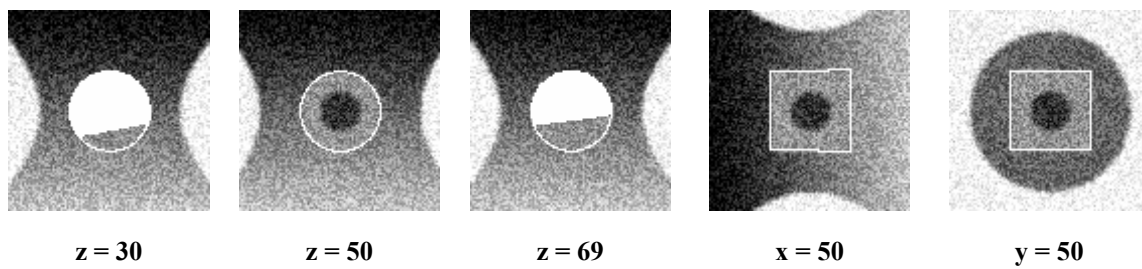


Figura 6.33 Posta en correspondencia da imaxe de proba de ruído $\sigma = 20$ cun modelo de cilindro.

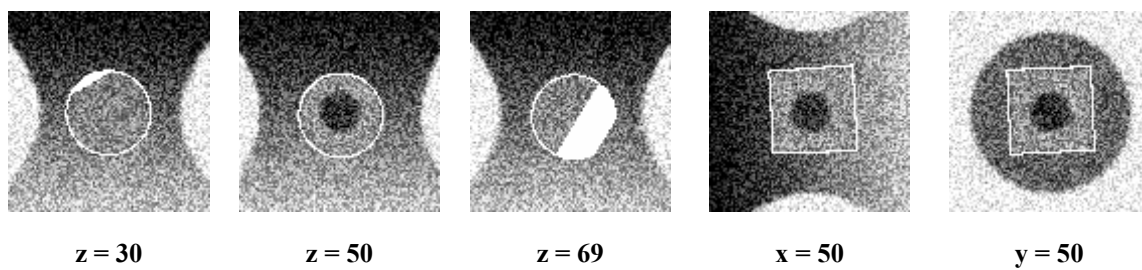


Figura 6.34 Posta en correspondencia da imaxe de proba de ruído $\sigma = 30$ cun modelo de cilindro

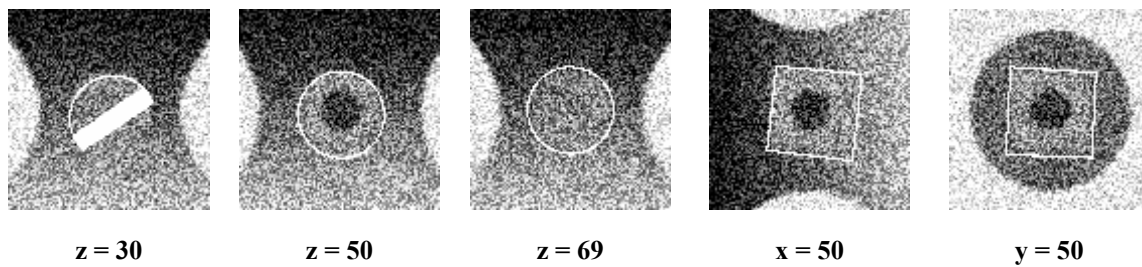


Figura 6.35 Posta en correspondencia da imaxe de proba de ruído $\sigma = 40$ cun modelo de cilindro

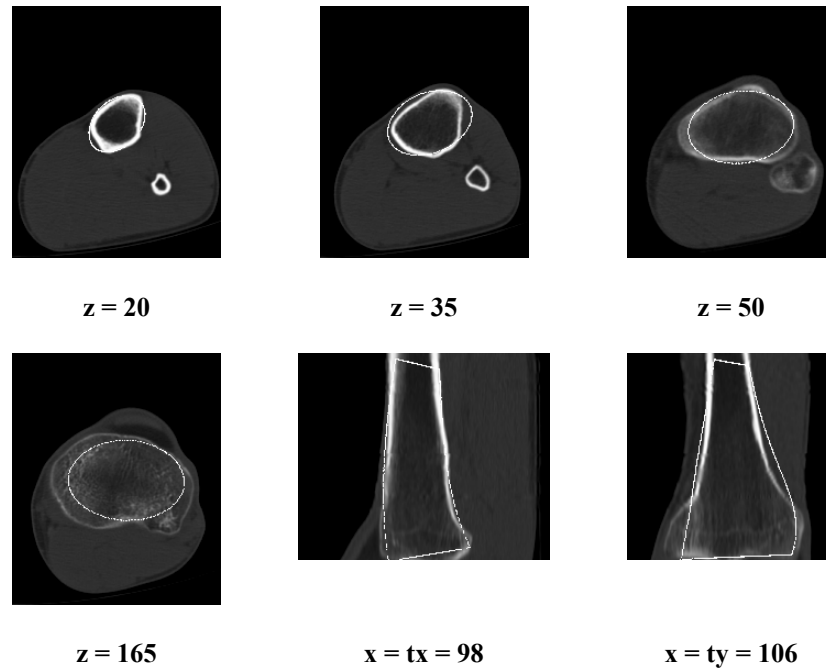


Figura 6.36 Posta en correspondencia entre imaxe e modelo calculado coa función de erro radial

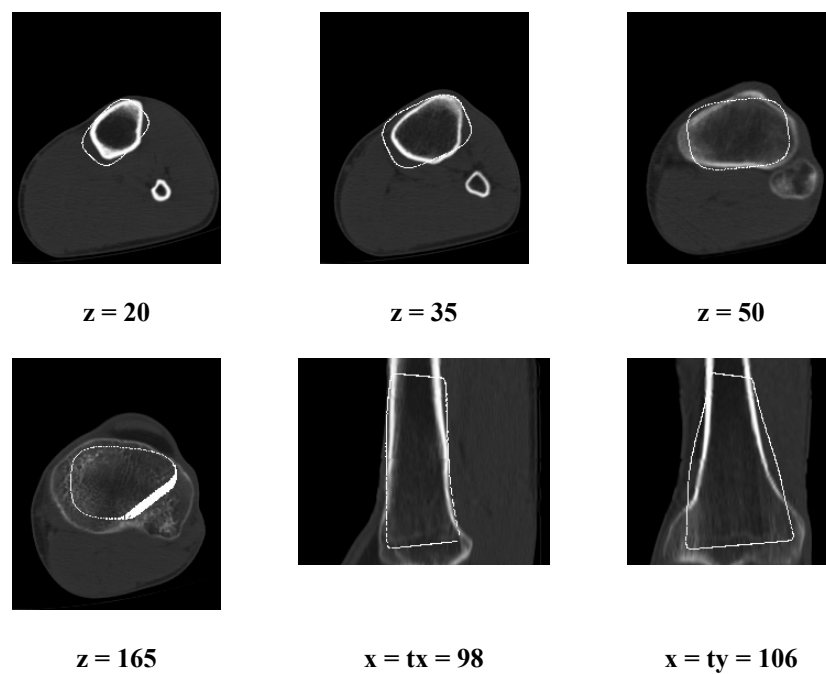


Figura 6.37 Posta en correspondencia entre imaxe e modelo calculado coa función de erro D_3 .

7 CONCLUSIÓNS E PRINCIPAIS APORTACIÓNS

Un dos retos importantes en imaxe médica tridimensional é conseguir un método de reconstrución robusto que ofrezca resultados de alta resolución. Os modelos deformables permiten obter reconstrucións detalladas, pero carecen da robustez necesaria para tratar problemas reais complexos polo que é necesario dispor dunha boa inicialización da superficie deformable para que esta converxa cara á solución correcta. Para eso haberá que desenvolver un sistema capaz de identifica-lo obxecto que se desexa modelar no volume e datos e realizar unha primeira aproximación da súa forma, que posteriormente se poida refinar co modelo deformable.

A ferramenta presentada neste traballo pretende obter esa primeira aproximación da xeometría 3D. Con esta fin combínase a extracción de información de alto nivel das imaxes e a incorporación de coñecemento a priori para levar a cabo a identificación de obxectos. Empregando unha metodoloxía baseada en datos (*bottom-up*) deseñouse unha técnica que permite illar parches de superficie en función das súas características xeométricas e das súas propiedades de gradiente de nivel de gris. Deste xeito conséguense recoñecer partes dos obxectos de interese. A posta en correspondencia de modelos definidos a priori fai o resto do traballo, permitindo un modelado da superficie completa moi robusto a partir dos parches previamente identificados, pois a información de forma apórtaa o coñecemento que incorporan os modelos. A principal vantaxe que proporciona a utilización de prototipos dos obxectos, a parte da redución do tempo de computación d axuste, está en que a perda de información que se produce habitualmente na detección de puntos de fronteira ten menor repercusión no resultado final. En ocasións, os parámetros da transformación ríxida que pon en correspondencia modelo e imaxe a penas se ven afectados.

O resultado de todo este proceso é unha superficie suficientemente próxima ó obxecto que se quere reconstruír como para guía-la deformación con garantía de éxito. As principais vantaxes desta técnica de inicialización con respecto a outras de igual propósito son a eliminación da necesidade de interacción co usuario e a posibilidade de aplicación a imaxes que conteñan múltiples obxectos. Existen outras metodoloxías que tamén empregan a posta en correspondencia con modelos a priori, pero estes soen vir representados por distribucións espaciais de puntos, o que complica o cálculo de distancias. A utilización neste traballo dun modelo de ecuación implícita reduce estes cálculos.

En canto a implementación deste sistema hai que destacar certos aspectos que a continuación se comentan.

- A utilización de elipsoides xeneralizados resulta ser moi axeitada. A descrición da superficie realízase en función dun conxunto de poucos parámetros relacionados con propiedades xeométricas globais, polo que resulta unha

representación sinxela pero que aporta información estrutural de interese. Ademais, a potencia de representación permite que os modelos se adapten a unha ampla variedade de formas anatómicas. Tamén o feito de dispor dunha expresión analítica da superficie facilita a tarefa do cálculo de distancias para a posta en correspondencia.

- A aplicación de algoritmos xenéticos para a construción dos modelos a priori e a posta en correspondencia coa imaxe, aseguran a obtención dos parámetros óptimos da representación.
- O cálculo da curvatura local dos parches de superficie faise a partir de cálculos das primeiras e segundas derivadas direccionais, obtidas mediante o filtrado das imaxes. Isto evita ter que aplicar o método de aproximación de segunda orde da superficie en cada punto, como é habitual nestes casos. O método de aproximación de segunda orde tería ademais o inconveniente de que habería que defini-la conectividade de cada punto da superficie para determina-la veciñanza sobre a que se fixese o axuste.
- Defíníronse unha serie de descriptors xeométricos que, xunto con outros relacionados co nivel de gradiente e a área, permiten realizar unha clasificación das estruturas presentes nunha imaxe. En función desta clasificación é posible seleccionar obxectos simples con propiedades moi uniformes en toda a superficie, como é o caso de moitas estruturas anatómicas, ou ben partes simples de obxectos máis complexos.

A pesar de todo, existen pasos da metodoloxía desenvolta que se poden mellorar. Veuse que o sistema é o suficientemente robusto como para salvar a falta de información parcial de superficie dos obxectos, o que compensa os problemas que xorden a causa do preprocesado a baixo nivel. Sen embargo, o perfeccionamento das técnicas de filtrado, como se apuntou xa na sección 5.5, podería mellorar substancialmente os resultados ofrecidos. Unha das vías de continuidade deste traballo vai ser precisamente o deseño de filtros que melloren os resultados da detección de puntos de fronteira. A forma de acadar este obxectivo pode ser a implementación de filtros non lineais anisotrópicos, que actúen de distinto modo ante a presenza ou ausencia de fronteiras de obxectos, tendo en conta tamén a orientación destas.

Outra vía de continuidade deste traballo preséntase na posibilidade de aplicar esta ferramenta a imaxes que representan obxectos con ramificacións, ou que simplemente constan de varias partes que se poidan aproximar mediante elipsoides xeneralizados con deformacións globais. Un exemplo deste tipo de estruturas en imaxe médica son as de estruturas vasculares, como a de fondo de retina, moi estudada pola súa relación con diversas patoloxías causantes de perda de visión. A reconstrución deste tipo de imaxes podería abordarse mediante o axuste simultáneo de varios superelipsoides, utilizando algún método de crecemento de modelos. Outra posibilidade sería recoñecer as distintas partes que compoñen o obxecto na etapa de preprocesado, illalas e modelalas por separado. Unha vez axustados os distintos modelos globais os propios modelos deformables poderían levar a cabo a tarefa de fusión das diferentes superficies no proceso de deformación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. D.H. Ballard, C.M. Brown. "Computer Vision". Prentice-Hall Inc., Englewoods Clifs, New Jersey, 1982.
- [2]. E. Bardinet, L.D. Cohen, N. Ayache. "A parametric deformable model to fit unstructured 3D data". INRIA, nº 2617, Xullo 1995.
- [3]. E. Bardinet, L.D. Cohen, N. Ayache. "Tracking medical 3D data with a parametric deformable model". Proc. of the IEEE Computer Society International Symposium on Computer Vision, Florida, Nov. 1995, pp 19-21
- [4]. E. Bardinet, L.D. Cohen, N. Ayache. "Analyzing the deformation of the left ventricle of the heart with a parametric deformable model". INRIA, nº 2797, Febreiro 1996.
- [5]. D. Beasley, D.R. Bull, R.R. Martin. "An overview of genetic algorithms: part I, fundamentals". University Computing, 1993, 15(2), pp 58-69.
- [6]. P.J. Besl, N.D. McKey. "A method for registration of 3-D shapes". IEEE. Trans on PAMI, vol. 14, nº 2, Febreiro 1992.
- [7]. J.D. Boissonnat, B. Geiger. "Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay tree". INRIA, nº 1697, Abril 1992.
- [8]. J.D. Boissonnat, M. Teillaud. "On the randomized construction of the Delaunay tree". INRIA, nº 1140, Decembro 1989.
- [9]. R.M. Bolle, B.C. Vemuri. "On three-dimensional surface reconstruction methods". IEEE Trans. on PAMI, vol. 13, nº 1, Xaneiro 1991, pp 1-13.
- [10]. J.F. Brinkley. "A flexible, generic model for anatomic shape: application to interactive two-dimensional medical image segmentation and matching". Computers and Biomedical Research, vol. 26, nº 2, Abril, 1993.
- [11]. J.F. Canny. "A computational approach to edge detection". IEEE. Trans on PAMI., vol. 8, nº 5, pp 769-798, Novembro 1986.
- [12]. V. Caselles, F. Catte, T. Coll, F. Dibos. "A geometric model for active contours". Numerische Mathematik, vol. 6, nº 11, 1993, pp 1-31.
- [13]. L.D. Cohen, I. Cohen. "Finite-element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images". IEEE. Trans. on PAMI, vol. 15, nº 11, 1993, pp 1131-1147.
- [14]. R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha. "Concepts and applications of finite element analysis". John Wiley & sons, Inc., 1989.

- [15]. C.W. Chen, T.S. Huang, M. Arrott. "Modeling, analysis, and visualization of the left ventricle shape and motion by hierarchical decomposition". IEEE Trans. on PAMI, vol. 16, nº 4, Abril 1994.
- [16]. K.A. De Jong. "An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems". Dissertation Abstracts International, 36(10), 5140B.
- [17]. R. Deriche. "Fast Algorithms for low-level vision". IEEE Trans. on PAMI, vol. 12, nº 1, Xaneiro, 1990.
- [18]. R. Deriche. "Using Canny's criteria to derive a recursive implemented optimal edge detector". International Journal of Computer Vision, 1(2), Maio, 1987.
- [19]. R. Deriche. "Optimal edge detection using recursive filtering". Proc. First Int. Conf. Computer Vision, Xuño 1987.
- [20]. R. Deriche. "Recursively implementing the gaussian and its derivatives". INRIA, nº 1893, Abril, 1993.
- [21]. G. Farin. "Curves and surfaces for CAGD. A practical guide". Academic Press, Inc. 1988.
- [22]. J. Feldmar, N. Ayache. "Rigid, affine and locally affine registration of free-form surfaces". INRIA, nº 2220, Marzal 1994.
- [23]. M. Fleute, S. Lavallée, R. Julliard. "Incorporating a statistically based shape model into a system for computer assisted cruciate ligament Surgery". Medical image Analysis, 1998, pp 1-14.
- [24]. P. Flynn, A.K. Jain. "CAD-based computer vision: from CAD models to relational graphs". IEEE Trans. on PAMI, vol. 13, nº 2, Febreiro 1991, pp 114-132.
- [25]. D.E. Goldberg. "Genetic algorithms in search, optimization and machine learning". Addison-Wesley, Abril 1999.
- [26]. J.H. Holland. "Adaptation in natural and artificial systems". MIT Press, 1992.
- [27]. D. Kalyanmoy. "Genetic algorithms for function optimization". {Genetic algorithms and Soft Computing}. (Eds. F. Herrera and J. L. Verdegay) Physica-Verlag , 1996, pp 3-29.
- [28]. M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos. "Snakes: active contour models". IJCV, 1988, pp 321-331.
- [29]. N. Krahnstöver. "Generation of point-based 3D statistical shape models for anatomical objects". Computer Vision and Image Understanding, 2000, pp 175-191.
- [30]. A. Leonardis, A. Jaklic, F. Solina. "Superquadrics for segmenting and modeling range data". IEEE Trans. on PAMI, vol. 19, no 11, Novembro 1997, pp 1289-1295.
- [31]. P. Linares, L. Rodríguez, G. Montilla. "Genetic algorithms fitting of deformable superquadrics applied to left ventricle visualization". Computers in Cardiology, vol. 25, 1998, pp 657-660.

- [32]. R. Malladi, J.A. Sethian, B.C. Vemuri. "Shape modeling with front propagation: a level set approach". IEEE Trans. on PAMI, vol. 17, nº 2, 1995, pp 158-174.
- [33]. T. McInerney, D. Terzopoulos. "Topologically adaptable snakes". Proceedings ICCV'95, pp 840-845.
- [34]. T. McInerney, D. Terzopoulos. "A dynamic finite element surface tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis". Computerized Medical Imaging and Graphics, vol. 19, nº 1, 1995, pp 69-83.
- [35]. T. McInerney, D. Terzopoulos. "A finite-element model for 3D shape reconstruction and nonrigid motion tracking". Proceedings ICCV'93, pp 518-523.
- [36]. T. McInerney, D. Terzopoulos. "Medical image segmentation using topologically adaptable surfaces". Proc. CVRMed, Grenoble, Francia, Marzal 1997.
- [37]. T. McInerney, D. Terzopoulos. "Deformable models in medical image analysis: a survey". Medical Image Analysis, 1(2), 1996.
- [38]. D. Metaxas, D. Terzopoulos. "Shape and nonrigid motion estimation through physics-based synthesis" IEEE Trans. on PAMI, vol. 15, nº 6, 1993, pp 580-591.
- [39]. D. Metaxas, D. Terzopoulos. "Constrained deformable superquadrics and nonrigid motion tracking". Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Lahaina, Maui, Hawaii, Xuño 3-6, 1991, pp 337-343.
- [40]. O. Monga, N. Ayache, P.T. Sander. "From voxel to curvature". INRIA, nº 1356, Decembro, 1990.
- [41]. O. Monga, S. Benayoun. "Using partial derivatives of 3D images to extract typical surface features". INRIA, nº1599, Febreiro, 1992.
- [42]. O. Monga, R. Deriche, G. Malandain, J-P. Cocquerez. "Recursive filtering and edge closing: two primary tools for 3D edge detection". INRIA, nº 1103, Outubro de 1989.
- [43]. W. Neuenschwander, P. Fua, G. Szekeli, O. Kubler. "Velcro surfaces: fast initialization of deformable models". Computer Vision and image Understanding, vol. 65, nº 2, 1997, pp 237-245.
- [44]. X.M. Pardo, D. Cabello. "Biomedical active segmentation guided by edge saliency". Pattern Recognition Letters, (aceptado).
- [45]. J. Park, D. Metaxas, L. Axel. "Volumetric deformable models with parameter functions: a new approach to the 3D motion analysis of the LV from MRI-SPAMM". Proc. of ICCV, MIT Cambridge, Massachusetts, 1995, pp 700-905.
- [46]. P. Perona, T. Shiotan, J. Malik. "Anisotropic difusion". GDDCV94, pp 73-92.
- [47]. P. Radeva, A.A. Amini, J. Huang. "Deformable B-solids and implicit snakes for 3D localization and tracking of SPAMM MRI data". vol. 66, nº 2, 1997, pp 163-178.
- [48]. H. Samet. "Aplications of spatial data structures". Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.

- [49]. H. Samet. "The design and analysis of spatial data structures". Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.
- [50]. S. Sandor, R. Leahy. "Surface-based labeling of cortical anatomy using a deformable atlas". *Medical Image*, vol. 16, nº 1, 1997, pp 41-54.
- [51]. F. Solina, R. Bajcsy. "Recovery of parametric models from range images: the case for superquadrics with global and local deformations". *Trans. on PAMI*, vol. 12, nº 2, Fevereiro 1990, pp 131-146.
- [52]. L. Staib, A. Chakraborty, J.S. Duncan. "An integrated approach for locating neuroanatomical structure from MRI". *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 11, nº 8, 1997, pp 1247-1269.
- [53]. L. Staib, J.S. Duncan. "Boundary finding with parametrically deformable models" *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 14, nº 11, 1992, pp 1061-1075.
- [54]. G. Storvik. "A bayesian approach to dynamic contours through stochastic sampling and simulated annealing". *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 16, nº 10, Outubro 1994.
- [55]. D. Terzopoulos, D. Metaxas. "Dynamic 3D models with local and global deformations: deformable superquadrics". *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 13, nº 7, Xullo 1991, pp 703-714.
- [56]. D. Terzopoulos, A. Witkin, M. Kass. "Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion" *Artificial Intelligence*, vol. 36, 1988, pp 91-123.
- [57]. J. Weickert. "Multiscale texture enhancement". *CAIP95*, pp 230-237.
- [58]. P. Whaite, F.P. Ferrie. "From uncertainty to visual exploration". *IEEE. Trans on PAMI.*, vol. 13, nº 10, Outubro 1991.

