



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Xeometría extrínseca global de superficies

Fabián Otero Vázquez

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Xeometría extrínseca global de superficies

Fabián Otero Vázquez

xullo, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Xeometría extrínseca global de superficies
Breve descrición do contido
O obxectivo deste traballo é afondar na teoría global de superficies dende un punto de vista extrínseco, vendo algúns resultados como o Teorema de Hadamard-Stoker, o Teorema de Alexandrov e a desigualdade isoperimétrica.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Preliminares	1
2. Superficies de curvatura positiva	5
3. Fórmulas de Minkowski e teoremas sobre ovaloides	17
4. O teorema de Alexandrov	25
5. Desigualdade isoperimétrica	29

Resumo

O obxectivo deste traballo é facer un percorrido polos resultados máis importantes da xeometría diferencial dende un punto de vista extrínseco, ata chegar ao célebre Teorema de Alexandrov e ser tamén capaces de responder ao problema isoperimétrico.

Comezamos definindo os conceptos básicos de *ovaloiide* e *dominio interior*, que nos permitirán adentrarnos no Teorema de Hadamard-Stoker, o cal nos brinda propiedades das superficies conexas, pechadas en \mathbb{R}^3 e con curvatura de Gauss positiva en tódolos puntos. A continuación preséntanse as Fórmulas de Minkowski e, consecuentemente, o Teorema de Hilbert-Liebmann e o de Jellet. Estes resultados, xunto coa Desigualdade de Heintze-Karcher, achégannos ao Teorema de Alexandrov, que nos di que se unha superficie compacta e conexas ten curvatura media constante, entón é unha esfera. Remataremos o noso estudo dando unha demostración do problema isoperimétrico no espazo euclidiano de dimensión tres, cuxa resposta xa era coñecida polos gregos aínda que non souberan xustificalo.

Abstract

The aim of this work is to have a glimpse at the most important results of differential geometry from an extrinsic point of view. We will present the famous Alexandrov Theorem and tackle the isoperimetric problem.

We start by defining the basic concepts of *ovaloid* and *inner domain*, which will allow us to delve into the Hadamard-Stoker Theorem, that gives us properties of connected and closed surfaces in \mathbb{R}^3 with positive Gaussian curvature everywhere. Then we introduce the Minkowski Formulas and, as a consequence, the Hilbert-Liebmann and Jellet Theorems. These results, along with Heintze-Karcher Inequality, bring us closer to the Alexandrov

Theorem, which states that a compact and connected surface with constant mean curvature is a sphere. We will finish our study by giving a proof of the isoperimetric problem in the three dimensional Euclidean space, the answer of which was already known to the Greeks even though they did not know how to justify it.

Introdución

A xeometría diferencial de curvas e superficies presenta dous aspectos:

- *Xeometría Diferencial clásica*: remóntase aos comezos do *Calculus*. En liñas xerais, a xeometría diferencial clásica é o estudo das propiedades locais, entendendo estas como aquelas propiedades que dependen exclusivamente do comportamento da curva ou superficie na veciñanza dun punto.
- *Xeometría Diferencial global*: aquí estúdase a influencia das propiedades locais sobre o comportamento total da curva ou superficie.

Neste traballo abordaremos teoremas e demostracións que se atopan no núcleo da Xeometría Diferencial clásica, realizando un estudo profundo da xeometría das superficies do espazo euclidiano \mathbb{R}^3 , é dicir, trataremos de pasar do local ao global. Cando se fala de global, faise referencia á necesidade dunha condición de totalidade que evite que anacos de superficies maiores (superficies que sexan abertos doutra que as conteña estrictamente) sexan solucións, como é a compacidade ou, dende un punto de vista extrínseco, “ser pechada” en \mathbb{R}^3 ; polo tanto, as superficies pechadas e as compactas serán o centro do noso estudo. En grande parte da teoría de superficies os protagonistas principais son unhas formigas planas que viven sobre a superficie dun planeta ríxido que flota no espazo, pero que son seres bidimensionais que non poden levantar a cabeza, e que unicamente son capaces de medir lonxitudes de camiños cos seus pasos. O seu espazo é bidimensional, que é a propia superficie. A xeometría do planeta, que se ve desde fóra con ollos tridimensionais, é a xeometría extrínseca; mentres que a intrínseca é a que perciben as formigas, isto é, os cálculos de conceptos métricos que poden efectuar sen “abandonar” a superficie, soamente facendo uso da primeira forma fundamental. Se seguimos coa analogía, as formigas bidimensionais non só son capaces de adiviñar o ambiente no que viven, senón que tamén o tipo de planeta no que están, obtendo así propiedades de carácter global.

Nun primeiro momento cabe pensar naquelas superficies con curvatura de Gauss constante. O primeiro en estudalas foi F. Minding (1838) no referido á súa xeometría local, e

para o caso compacto foron H. Liebmann (1899) e, posteriormente, D. Hilbert (1901), que demostraron que é a esfera a única con tal propiedade. Podemos agora xeneralizalo ao caso no que a curvatura de Gauss é positiva en todo punto, son os *ovaloides*, que comezaron a ser estudados a comezos do século XX por H. Minkowski e W. Blaschke. Probarase que tales superficies son topoloxicamente esferas mediante o teorema de J. Hadamard (1857), e que as superficies pechadas non compactas con curvatura de Gauss positiva son difeomorfas a \mathbb{R}^2 a través do teorema de Stoker (1936).

Agora podemos preguntarnos cales son as superficies compactas que teñen curvatura media constante, sendo a esfera a resposta. Esta cuestión foi resolta entre 1956 e 1962 por A. D. Alexandrov. O seu célebre teorema é o seguinte: *toda superficie compacta e conexa con curvatura media constante é unha esfera*; tamén se coñece como *all soap bubbles are spheres*, pois tal teorema, xunto coa fórmula de Laplace, obriga ás pompas de xabón a ser esferas. Para demostralo, botou man do seu enxeño e aplicou o principio do máximo de forma xeométrica, comparando a superficie coa súa reflexión respecto dun plano, o que é coñecido como *método das reflexións*. Porén, co paso dos anos, foron aparecendo novas demostracións como a que se verá neste traballo, fundamentada na xeometría integral e influenciada polos traballos de H. Heintze e H. Karcher. Gracias á resolución de dito problema, foi posible contestar a unha das preguntas máis antigas da xeometría: *o problema isoperimétrico*, no cal se pregunta *cales son as superficies compactas de menor área que encerran un volume dado*, para o cal probaremos que $A(S)^3 \geq 36\pi (\text{vol } \Omega)$ e veremos cales son as superficies que verifican a igualdade. Aínda que os gregos xa sabían que a resposta era a esfera, non se demostrou ata que H. A. Schwartz utilizou ideas de Steiner e Minkowski, a pesar de que a demostración que nós veremos está baseada na desigualdade de Brunn-Minkowski.

Este traballo está organizado como segue. No Capítulo 1 introducimos a notación e conceptos necesarios para o resto da memoria, así como un repaso dos resultados máis importantes da teoría de superficies e de integración sobre estas. No Capítulo 2 comezamos definido o concepto de *ovaloide* como unha superficie compacta, conexa e con curvatura de Gauss positiva en todo punto, e o de *dominio interior* como a compoñente conexa $\mathbb{R}^3 - S$ cara á que apuntan todas as semirectas que saen na dirección determinada pola aplicación de Gauss que fai definida positiva á segunda forma fundamental. Estes permitirannos enunciarse o Teorema de Hadamard-Stoker, obtendo así propiedades das superficies conexas, pechadas en \mathbb{R}^3 e con curvatura de Gauss positiva en tódolos puntos. A continuación, no Capítulo 3 chegamos ás Fórmulas de Minkowski e aos Teoremas de Hilbert-Liebmann

e Jellet, que serán unha ferramenta importante para obter, xunto coa Desigualdade de Heintze-Karcher, o Teorema de Alexandrov no Capítulo 4. Finalmente, remataremos a memoria no Capítulo 5 abordando o problema isoperimétrico no espazo euclidiano de dimensión 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo recóllense os conceptos e resultados necesarios para poder levar a cabo o noso estudo, facilitados polos libros de M. P. Do Carmo [1], M. A. Hernández Cifre e J. A. Pastor [2], S. Montiel e A. Ros [3], e M. Spivak [4] .

Comezamos definindo a noción de superficie regular en \mathbb{R}^3 :

Definición 1.1. Un subconxunto non baleiro de $S \subset \mathbb{R}^3$ é unha superficie regular se para todo punto $p \in S$ existen un aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, unha veciñanza V de p en S e unha aplicación diferenciable $\mathbb{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que

1. $\mathbb{X}(U) = V$.
2. $\mathbb{X} : U \rightarrow V$ é un homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbb{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é inxectiva.

Ao longo do traballo falarase continuamente de superficies pechadas en \mathbb{R}^3 , sendo todas elas con bordo.

Definición 1.2. Sexa $S \in \mathbb{R}^3$ unha superficie regular e sexa $p \in S$. Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é un *vector tanxente* a S en p se existe unha curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$. Defínese o *plano tanxente* a S en p como

$$T_p S = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} \text{ é tanxente a } S \text{ en } p \}.$$

Ademais, defínese o *plano afín tanxente* S e p , Π_p , como o plano que pasa por p con plano de dirección $T_p S$.

O produto interior de $\mathbb{R}^3 \supset S$ induce en cada plano tanxente $T_p S$ dunha superficie regular S un produto interior, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Este produto interior correspóndese cunha forma cadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_p = |\vec{v}|^2 \geq 0,$$

que chamaremos *primeira forma fundamental* de S en p .

Definición 1.3. Sexa S unha superficie e N un campo normal unitario sobre S . Como $|N(p)|^2 = 1$ para cada $p \in S$, entón $N(S) \subset \mathbb{S}^2$; polo tanto, cada campo normal unitario N sobre S pode verse como unha aplicación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, que recibe o nome de *aplicación de Gauss* sobre S .

Máis cá aplicación N , o que realmente nos interesa é a súa diferencial

$$(dN)_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \simeq T_p S.$$

A aplicación lineal $-(dN)_p$ ten asociada unha forma bilinear simétrica

$$\sigma_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \sigma_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle -(dN)_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle.$$

Ademais, toda forma bilinear simétrica así definida ten asociada unha forma cadrática

$$\Pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \Pi_p(\vec{v}) = \sigma_p(\vec{v}, \vec{v}),$$

que se denomina *segunda forma fundamental* de S en p .

Esta aplicación lévanos a considerar as dúas funcións seguintes:

Definición 1.4. Sexa S unha superficie regular orientada por N . Denomínase *curvatura de Gauss* de S en $p \in S$ a

$$K(p) = \det(-dN)_p = k_1(p)k_2(p),$$

onde $k_1(p)$ e $k_2(p)$ son os autovalores da aplicación autoadxunta que reciben o nome de *curvaturas principais*. Ademais, chámase *curvatura media* de S en $p \in S$ a

$$H(p) = -\frac{1}{2} \text{traza}(dN)_p = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Observación 1.5. A segunda forma fundamental σ_{p_0} non é máis có hessiano $(\partial^2 h)_{p_0}$ da función altura ao cadrado, $h(p) = \langle p - a, \vec{N}(p_0) \rangle$, $p \in S$, $a \in \mathbb{R}^3$, a calquera plano paralelo ao tanxente nese punto.

Agora vexamos uns resultados que nos serán de utilidade no porvir do noso estudo:

Lema 1.6. *Dada unha superficie S , para cada $p \in S$ tense que*

$$K(p) \leq H(p)^2.$$

Demostración. Sexan $k_1(p)$ e $k_2(p)$ as curvaturas principais de S en p tal que $k_1(p) \leq k_2(p)$. Como sabemos que $K = k_1k_2$, $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ e $k_i^2 - 2Hk_i + K = 0$, $i = 1, 2$, o discriminante desta ecuación de segundo grao debe ser non negativo por existir dúas raíces reais; polo tanto $K(p) \leq H(p)^2$. \square

Proposición 1.7. *Sexa S unha superficie e p un punto seu:*

1. *Se $K(p) > 0$, existe unha veciñanza de p en S que está a un mesmo lado do plano tanxente afín a S en p . Ademais, p é o único punto de contacto nesa veciñanza entre a superficie e o plano.*
2. *Dado $\vec{v} \in T_pS$ unha dirección tanxente nun punto p da superficie orientada S , con aplicación de Gauss N e tal que $\sigma_p(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, entón a sección normal correspondente $S \cap P_v$ está localmente do lado do plano tanxente afín cara ó que apunta o normal $\vec{N}(p)$, onde P_v denota o plano que pasa por p e ten como plano director o formado por $\vec{N}(p)$ e \vec{v} .*

Proposición 1.8. *Sexa p_0 un punto calquera de S e Π_{p_0} o plano tanxente afín en p_0 , entón existen veciñanzas U e V de p_0 en Π_{p_0} e S respectivamente e unha función diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que V é o grafo de h .*

A continuación, presentamos dous conceptos que serán utilizados posteriormente:

Definición 1.9. *Dada unha superficie S e unha recta R de \mathbb{R}^3 , diremos que un punto $p \in S \cap R$ é un *punto de primeiro contacto* entre S e R se existe $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de rectas que converxe a R e existe V veciñanza de p en S tales que $R_n \cap V = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.10. *Sexa S unha superficie e R unha recta de \mathbb{R}^3 , dirase que $p \in S \cap R$ é un *punto de intersección dobre* de S e R se existen dúas sucesións $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de S que converxen a p , tales que $p_n \neq q_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e que a sucesión formada polas rectas R_n que determinan os pares de puntos p_n e q_n converxe a R .*

Para rematar, cómpre facer unha pequena revisión de integración nas superficies fundamentada en [3] e [5], comezando pola definición de integral en $S \times \mathbb{R}$:

Definición 1.11. Sexa \mathcal{R} unha rexión dunha superficie orientable S . Fixado un difeomorfismo $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ definido nun aberto relativamente compacto O de \mathbb{R}^3 , diremos que unha función h definida en $\mathcal{R} \times (a, b)$ é integrable no seu dominio cando $h \circ \phi$ sexa integrable en O no sentido de Lebesgue; ademais,

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} h = \int_O (h \circ \phi) |\text{Jac } \phi|.$$

A chamada *fórmula da área* permite xeneralizar a fórmula de cambio de variables da integral de Lebesgue cando a transformación que se considera é só unha aplicación diferenciable e non un difeomorfismo. Consideramos un aberto O de \mathbb{R}^3 relativamente compacto,

$$\phi : \bar{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

unha aplicación diferenciable e

$$f : O \rightarrow \mathbb{R}$$

unha función integrable en O . Así, podemos definir unha nova función

$$n(\phi, f) : \mathbb{R}^3 - \phi(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R},$$

con $\mathcal{N} \subset O$ o conxunto de puntos de O que non son regulares para ϕ , é dicir,

$$\mathcal{N} = \{x \in O : (\text{Jac } \phi)(x) = 0\},$$

tal que

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{p \in \phi^{-1}(x)} f(p).$$

Teorema 1.12 (Fórmula da área). *Sexa $\phi : \bar{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ unha aplicación diferenciable, onde O é un aberto de \mathbb{R}^3 relativamente compacto e $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ unha función integrable sobre O . A aplicación $n(\phi, f)$ é integrable en \mathbb{R}^3 e*

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f) = \int_O f(x) |\text{Jac } \phi|(x) dx.$$

Para rematar, vexamos o seguinte lema que nos permite afirmar que a proxección ortogonal sobre un plano diminúe a área:

Lema 1.13. *Sexa S unha superficie e P un plano tal que a proxección ortogonal sobre P restrinxida a S é un difeomorfismo sobre un aberto $U \subset P$. Entón $A(U) \leq A(S)$.*

Demostración. Polo teorema de cambio de variable, $A(U) = \int_U 1 = \int_S |\text{Jac } \phi|$, onde $\{\phi : S \rightarrow U\}$ é a restricción da proxección ortogonal. Pero, como $(\partial\phi)_p(\vec{v}) = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{a}$, entón $|\text{Jac } \phi| = |\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle| \leq 1$, sendo N unha aplicación de Gauss de S , $v \in T_p S$, $p \in S$ e \vec{a} un vector unitario perpendicular ao plano P . Así $A(U) \leq A(S)$. \square

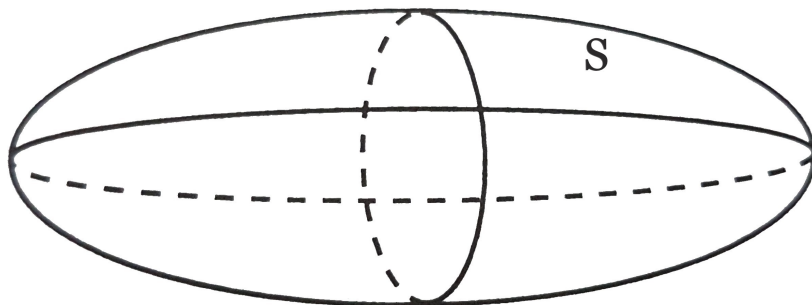
Capítulo 2

Superficies de curvatura positiva

Tanto neste capítulo coma nos restantes, usaremos como referencia fundamental o libro de S. Montiel e A. Ros [3].

Na procura daquelas superficies compactas con curvatura de Gauss ou media constante, imos deternos naquelas nas que a curvatura de Gauss non cambia de signo, e este debe ser sempre positivo xa que toda superficie compacta ten un punto elíptico. En efecto, dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, e xunto coa compacidade, tense un máximo global da función distancia ao cadrado a ese punto, que tamén é un máximo local de tal función; isto equivale (elixindo adecuadamente a orientación) a que existe unha aplicación de Gauss local N tal que a segunda forma fundamental σ_p nese punto é definida positiva, co cal a curvatura de Gauss en p_0 é positiva e o punto é elíptico.

Definición 2.1. Chámase *ovaloide* a toda superficie compacta, conexa e con curvatura de Gauss positiva en todo punto, que como acabamos de ver, equivale a que a σ_p sexa definida positiva para todo $p \in S$.

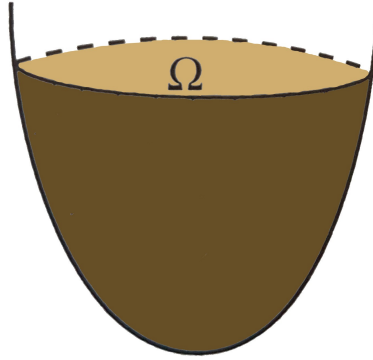


Ovaloide.

Exemplo 2.2. Todos os elipsoides son ovaloides.

De agora en adiante, S representará unha superficie conexa, pechada no espazo euclidiano \mathbb{R}^3 e con curvatura de Gauss positiva en cada punto. A orientación de S vén dada pola aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ para a cal a segunda forma fundamental é definida positiva en cada punto; así, todas as semirrectas que saen dun punto $p \in S$ con dirección $N(p)$ están localmente nun mesmo lado da superficie, posto que todo par de puntos de S está nun aberto relativamente compacto da superficie.

Definición 2.3. A compoñente conexa Ω de $\mathbb{R}^3 - S$ cara á que apuntan inicialmente todas as semirrectas que saen na dirección determinada pola aplicación de Gauss N que fai definida positiva á segunda forma fundamental chamarémola *dominio interior* de S .



Dominio interior.

Exemplo 2.4. Os paraboloides elípticos son superficies pechadas en \mathbb{R}^3 , conexas e con curvatura de Gauss positiva que non son compactas. En efecto, sexa S o paraboloide elíptico dado por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2\},$$

sendo

$$\mathbb{X}(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

a parametrización que o recobre. Temos así que

$$\mathbb{X}_u(u, v) = (1, 0, u) \quad \mathbb{X}_v(u, v) = (0, 1, v),$$

e polo tanto,

$$\mathbb{X}_{uu}(u, v) = (0, 0, 1) \quad \mathbb{X}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0) \quad \mathbb{X}_{vv}(u, v) = (0, 0, 1);$$

facendo uns pequenos cálculos, chegamos a que

$$E(u, v) = 1 + u^2 \quad F(u, v) = uv \quad G(u, v) = 1 + v^2$$

$$e(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \quad f(u, v) = 0 \quad g(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}},$$

de forma que

$$M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

sendo M e Σ as matrices asociadas á primeira e segunda forma fundamental. Agora, a diferencial da aplicación de Gauss vén dada por

$$A = -M^{-1}\Sigma,$$

co cal a curvatura de Gauss é

$$K(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} > 0, \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Relacionado coa curvatura de Gauss positiva, temos o concepto de convexidade de superficies:

Definición 2.5. Dise que unha superficie é *convexa* cando queda no semiespazo pechado determinado polo plano tanxente afín en cada un dos seus puntos. Ademais, se toca a cada plano tanxente nun só punto dirase que é *estritamente convexa*.

Como acabamos de ver, en principio este concepto de convexidade para superficies dista da noción que se ten de conxunto convexo na xeometría afín; porén, hai unha relación entre ambos que foi probada por Hadamard en 1857 para superficies compactas e para superficies pechadas non compactas por Stoker en 1936.

Teorema 2.6 (Primeira parte do teorema de Hadamard-Stoker). *Sexa S unha superficie pechada en \mathbb{R}^3 , conexa e con curvatura de Gauss positiva en todo punto, e denotaremos por Ω o seu dominio interior. Entón:*

- a) *Para cada $x, y \in \bar{\Omega}$ tense que $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega$. En particular, Ω é un subconxunto convexo de \mathbb{R}^3 .*
- b) *A intersección de S co plano tanxente afín a S en cada un dos seus puntos é o propio punto. Ademais, $\bar{\Omega}$ está contido en todos os semiespazos pechados de \mathbb{R}^3 determinados polos planos tanxentes afíns e os normais interiores nos puntos da superficie.*

Demostración. Usaremos a seguinte notación: $]x, y[= \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in (0, 1)\}$.

a) Dado $x \in \bar{\Omega}$, consideramos o subconxunto de \mathbb{R}^3

$$C_x = \{y \in \bar{\Omega} :]x, y[\subset \Omega\}.$$

Posto que $]x, x[= \emptyset$, entón $x \in C_x$ e polo tanto, C_x nunca é baleiro.

Agora, sexa $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unha sucesión de puntos de C_x que é converxente a un punto $y \in \bar{\Omega}$, $y \neq x$. Como cada segmento aberto da forma $]x, y_n[$ está contido en Ω , chégase a que $]x, y[\subset \bar{\Omega}$. Se $y \notin C_x$ sería debido a que $]x, y[\not\subset \Omega$ e, en tal caso, ese segmento aberto cortaría a S nun punto $z \in]x, y[\cap S$, i.e., z é un punto de intersección da superficie S e da recta R que pasa por x e y , sendo z un punto de primeiro contacto entre R e S . En efecto, se z non fose un punto de primeiro contacto entre R e S , como a sucesión de rectas que está determinada por x e os y_n tende a R , tería que existir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $z_n \in S$ aliñado con x e y_n de forma que a sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe ao punto z . Pero tomando límites e tendo en conta que $]x, y_n[\subset \Omega$, chégase a que os z_n están fóra de $]x, y_n[$, contradicindo o feito de que $z \in]x, y[$ e, polo tanto, R sería tanxente a S en z . Mais, a segunda forma fundamental como en z é definida positiva de acordo coa orientación elixida, pola Proposición 1.7 tense que os puntos de R próximos a z están no exterior da superficie $(\mathbb{R}^3 - \bar{\Omega})$, o cal contradí o feito de que $]x, y_n[\subset \Omega$. Por conseguinte, $y \in C_x$ e C_x é pechado.

Por outro lado, vexamos que C_x é aberto en $\bar{\Omega}$, pero primeiramente observemos que C_x contén unha veciñanza de x en $\bar{\Omega}$. Podemos distinguir dous casos: se $x \in \Omega$ é trivial xa que podemos tomar unha bóla aberta B centrada en x e con $B \subset \Omega$; como B é convexa tense que $]x, B[\subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Se agora supoñemos que $x \in \bar{\Omega} - \Omega = S$, pola Observación 1.5 e a Proposición 1.8, unha veciñanza V de x en S é o grafo dunha función estritamente convexa definida nunha veciñanza de x no plano tanxente afín a S en x . Polo tanto, a intersección $B \cap \bar{\Omega}$ dunha bóla aberta de \mathbb{R}^3 centrada en x e tal que $B \cap S \subset V$ é unha veciñanza de x en $\bar{\Omega}$ que é convexa e, por conseguinte, está en C_x . Supoñamos agora que C_x non é aberto en $\bar{\Omega}$, deste xeito, existiría unha sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de $\bar{\Omega} - C_x$ que converxe a un punto $y \in C_x$ distinto de x , tal e como acabamos de ver, pois x é interior a C_x . Se todos os segmentos abertos $]x, y_n[$ estiveran no dominio $\mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$ exterior de S , o segmento límite $]x, y[$ non podería estar en Ω . Se agora nos restrinximos a unha parcial desa sucesión, podemos pensar que cada $]x, y_n[$ corta a $\bar{\Omega}$; como $y_n \notin C_x$, o segmento $]x, y_n[$ tamén ten puntos que non son de Ω e, por conseguinte, teremos polo menos un punto y'_n en $]x, y_n[\cap S$. Polo tanto, a sucesión dos y'_n (limitada por ser $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxente) terá unha parcial que converxe a un punto $y' \in]x, y[\cap S$, de forma que $y' = y$ ou $y' = x$ porque $]x, y[\subset \Omega$. En calquera caso, y' sería un punto de intersección dobre de S coa recta R que pasa por x e y . Entón R sería

tanxente a S en $y' = x$ ou $y' = y$ e, de novo pola Proposición 1.7, teriamos a certeza de que hai puntos de R próximos a y' que estarían no exterior de S , contradicindo que $]x, y[\subset \Omega$ e, polo tanto, C_x é aberto en $\bar{\Omega}$.

Así, chegamos á conclusión de que o subconxunto C_x é non baleiro e simultaneamente aberto e pechado en $\bar{\Omega}$, ademais, como $\bar{\Omega}$ é conexo, entón $C_x = \bar{\Omega}$. Polo tanto, dados $x, y \in \Omega \subset \bar{\Omega}$, temos que $[x, y] =]x, y[\cup \{x, y\} \subset \Omega$, co cal Ω é convexo e, en consecuencia, $\bar{\Omega}$ tamén.

- b) Sexa $p \in S$ un punto da superficie, Π_p o plano tanxente afín a S en p e Π_p^+ o semiespazo pechado de \mathbb{R}^3 determinado por Π_p e o vector normal interior \vec{N}_p , que tamén o podemos definir como

$$\Pi_p^+ = h_p^{-1}[0, +\infty],$$

con

$$h_p(q) = \langle q - p, \vec{N}(p) \rangle, \text{ para todo } q \in \mathbb{R}^3.$$

Supoñamos que $q \in \Pi_p \cap S$ para un certo p , co cal p e q están en $\bar{\Omega}$ e, polo tanto, $]p, q[\subset \Omega \cap \Pi_p$, tal e como vimos no apartado (a) do teorema. Como p é un punto elíptico, outra vez pola Proposición 1.7, temos que todos os puntos dunha veciñanza de p en Π_p (a excepción do propio p) están no exterior de S , sendo isto contradictorio salvo que $p = q$. Desta forma, chegamos a que $\Pi_p \cap S = \{p\}$. Vexamos agora a segunda afirmación deste apartado:

Dado $p \in S$, o conxunto $S - \{p\}$ é un conexo que non corta a Π_p . Ademais, como hai puntos da superficie S próximos a p que están en Π_p^+ , por ser p elíptico, chégase a que $S - \{p\} \subset \Pi_p^+$ e, entón, $S \subset \Pi_p^+$ porque $p \in \Pi_p$; e deste xeito $\mathbb{R}^3 - \Pi_p^+ \subset \mathbb{R}^3 - S$. Podemos así concluír que o aberto conexo $\mathbb{R}^3 - \Pi_p^+$ está nunha das dúas compoñentes conexas do complementario de S e que ten puntos do exterior de S , por ser elíptico; polo tanto, $\mathbb{R}^3 - \Pi_p^+ \subset \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$. Se tomamos complementarios podemos deducir que $\bar{\Omega} \subset \Pi_p^+$, para todo $p \in S$. \square

Observación 2.7. Supoñamos que S é un ovaloide e Ω o seu dominio interior. Sexa R unha recta de \mathbb{R}^3 que corta o interior do ovaloide. A raíz do teorema anterior, $R \cap \Omega$ é un conexo non baleiro, limitado e aberto na recta R . Mais como os únicos convexos dunha recta son os intervalos e R non pode ser tanxente a S en ningún punto, entón, polo Teorema 2.6 (b), $R \cap S$ está formado por dous puntos exactamente, é dicir, unha recta que toque o interior dun ovaloide córtao en exactamente dous puntos.

A modo de conclusión do teorema, podemos afirmar que o dominio interior dunha superficie pechada en \mathbb{R}^3 , conexas e con curvatura de Gauss positiva en cada punto é convexo

e que, ademais, a propia superficie é estrictamente convexa.

Co fin de seguir obtendo resultados sobre este tipo de superficies, necesitaremos o seguinte lema, para o cal introducimos a notación: se $x \in \mathbb{R}^3$ é un punto do espazo e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ un vector non nulo, representaremos por $R(x, \vec{v})$ a recta que pasa por x na dirección de \vec{v} , e

$$R^+(x, \vec{v}) := \{x + t\vec{v} : t \geq 0\},$$

é dicir, a semirecta con orixe en x e con dirección e sentido dados por \vec{v} .

Lema 2.8. *Sexa S unha superficie pechada, conexa e con curvatura de Gauss positiva, e sexa Ω o seu dominio interior. Entón tense que*

- i) Dados $x \in \Omega$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, se $R^+(x, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$, entón, para cada $y \in \bar{\Omega}$, tense que $R^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$ e, ademais, $R^+(y, \vec{v}) - \{y\} \subset \Omega$.*
- ii) Non hai rectas contidas en $\bar{\Omega}$.*

Demostración.

i) Por hipótese, $R^+(x, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$ para un certo $x \in \bar{\Omega}$ e un vector non nulo, co cal $x + t\vec{v} \in \bar{\Omega}$, para todo $t \geq 0$. Como $y \in \bar{\Omega}$, facendo uso do apartado (a) do Teorema 2.6 anterior, $\{\lambda y + (1 - \lambda)(x + t\vec{v}) : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega$, para todo $t \geq 0$. Se agora tomamos límite cando $t \rightarrow \infty$ tense que $R^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$. Por outro lado, se supoñemos que existe un punto $z \in S$ na semirecta distinto da súa orixe y , entón S e a recta $R(y, y - z)$ terían un punto de primeiro contacto en z e tal recta sería tanxente en z á superficie. Como z é un punto de curvatura positiva, pola Proposición 1.7, temos puntos nesa recta próximos e a ambos lados de z que están no exterior de S , contradición xa que $R^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$, concluíndo así que $R^+(y, \vec{v}) - \{y\} \subset \Omega$.

ii) Supoñamos por contra que existe unha recta R dentro de $\bar{\Omega}$ e cheguemos a unha contradición. Sexan $x \in R$ e \vec{v} un vector director de R . As dúas semirectas $R^+(x, \vec{v})$ e $R^+(x, -\vec{v})$ están en $\bar{\Omega}$ e, se $p \in S \subset \bar{\Omega}$, polo apartado anterior temos que estas semirectas están contidas en $\bar{\Omega}$: $p + \vec{v} \in R^+(p, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$, $p - \vec{v} \in R^+(p, -\vec{v}) \subset \bar{\Omega}$. Utilizando o apartado (a) do Teorema 2.6 anterior, teríamos que $p \in \{\lambda(p - \vec{v}) + (1 - \lambda)(p + \vec{v}) : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega$, contradición que vén de supoñer que existe unha recta dentro de $\bar{\Omega}$. \square

Teorema 2.9 (Segunda parte do teorema de Hadamard-Stoker). *Sexa S unha superficie conexa, pechada en \mathbb{R}^3 e con curvatura de Gauss positiva en cada punto. Entón:*

- a) Se S é un ovaloide, é dicir, se S é compacta, a aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é un difeomorfismo. Por tanto, S é difeomorfa a unha esfera.*

b) Se S non é compacta, a aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é inxectiva e S é un grafo sobre un subconxunto aberto e convexo dun plano.

Demostración. Primeiramente vexamos que a aplicación N é inxectiva: como a superficie ten curvatura de Gauss positiva en todo punto, pola propia definición e polo teorema da función inversa, tense que a aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é un difeomorfismo local. Por outro lado, sexan $p, q \in S$ tal que $N(p) = N(q)$ e tal que os planos tanxentes afíns Π_p e Π_q son paralelos. Facendo uso do apartado (b) do Teorema 2.6, chégase a que $S \subset \bar{\Omega} \subset \Pi_p^+ \cap \Pi_q^+$, onde a intersección coincide cun dos dous semiespazos, por ser estes paralelos, por exemplo con Π_p^+ . Así, $q \in \Pi_q^+ \subset \Pi_p^+$ e, polo tanto, $q \in \Pi_p^+ \cap \Pi_p^- = \Pi_p$, chegando a que $\Pi_p = \Pi_q$. De novo, polo apartado (b) do Teorema 2.6, tense que $\{p\} = S \cap \Pi_p = S \cap \Pi_q = \{q\}$, polo que $p = q$ e N é inxectiva, sexa S compacta ou non.

a) Por ser S compacta, $N(S) \subset \mathbb{S}^2$ é compacta e, por conseguinte, pechada en \mathbb{S}^2 ; pero tamén aberta en \mathbb{S}^2 por ser N un difeomorfismo local. Así, pola conexidade, $N(S) = \mathbb{S}^2$, é dicir, N é sobrexectiva. Finalmente chegamos a que a aplicación de Gauss N é un difeomorfismo entre a superficie S e a esfera \mathbb{S}^2 .

b) Como S non é compacta, S non é limitada. Consideramos a sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos $q_n \in S$ de xeito que $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = +\infty$. Se fixamos un punto $q \in S$, polo apartado (a) do Teorema 2.6, temos que $\{\lambda q + (1 - \lambda)q_n, \lambda \in [0, 1]\} \subset \bar{\Omega}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se fose necesario poderíase atopar un $\vec{a} \in \mathbb{S}^2$ tal que $R^+(q, \vec{a}) \subset \bar{\Omega}$. Polo apartado i) do Lema 2.8,

$$R^+(p, \vec{a}) - \{p\} \subset \Omega, \text{ para todo } p \in S.$$

Se existise outro punto $p' \in S$ en $R^+(p, \vec{a})$, ou p ou p' estaría na semirecta aberta que sae do outro na dirección de \vec{a} , e así estaría en Ω . Por conseguinte

$$R(p, \vec{a}) \cap S = \{p\}, \text{ para todo } p \in S.$$

Ademais ningunha das rectas pode ser tanxente a S , xa que de selo, habería unha veciñanza de p na recta que estaría no exterior de S (salvo o propio p), tal e como argumentamos noutros casos anteriores, mais iso é contradictorio co feito de que $R^+(p, \vec{a}) - \{p\} \subset \Omega$. Entón a proxección ortogonal P de \mathbb{R}^3 sobre o plano

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \vec{a} \rangle = 0\}$$

que pasa pola orixe e é perpendicular a \vec{a} é inxectiva restrinxida a S . Se $p \in S$ e $\vec{v} \in T_p S$ está no núcleo de $(dP)_p$, entón

$$\vec{0} = (dP)_p(\vec{v}) = P(\vec{v}) = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$

Pero como $\vec{a} \notin T_p S$, tense que $\vec{v} = \vec{0}$, é dicir, a proxección P tamén é difeomorfismo local polo teorema da función inversa. Facendo un resumo, P é un difeomorfismo entre S e a súa imaxe en Π , que é un aberto convexo do plano; isto é, S é un grafo sobre tal aberto dunha función convexa por selo Ω . \square

Observación 2.10. Aínda que podemos obter o mesmo resultado polo Teorema de Gauss-Bonnet, se aplicamos o apartado (a) do Teorema 2.9 a un ovaloide S , por ser N un difeomorfismo, podemos usar a fórmula de cambio de variable á función constante un definida sobre a esfera unidade e, así,

$$4\pi = A(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} 1 = \int_S |\text{Jac } N|.$$

Agora, tendo en conta que para $p \in S$ se ten que

$$|(\text{Jac } N)(p)| = |(\partial N_p)(\vec{e}_1) \wedge (\partial N_p)(\vec{e}_2)|,$$

con $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base ortonormal de $T_p S$; se tomamos as direccións principais de S en p como base,

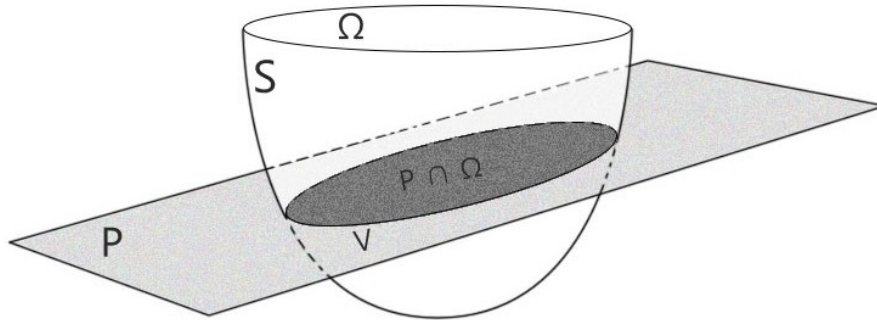
$$|(\text{Jac } N)(p)| = |k_1(p)k_2(p)| |\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2| = K(p),$$

xa que a curvatura de Gauss é positiva. Así, podemos concluír que

$$\int_S K(p) dp = 4\pi.$$

O teorema de Hadamard-Stoker é o máximo resultado ao que podemos chegar para superficies pechadas en \mathbb{R}^3 , conexas e con curvatura de Gauss positiva. Porén, podemos ir máis aló se restrinximos tales superficies a aquelas con curvatura media ou de Gauss non próxima a cero. Vexamos primeiramente o seguinte lema que nos permite expresar certas rexións da superficie como grafos.

Lema 2.11. *Sexa P un plano que corta ao dominio interior Ω dunha superficie S pechada en \mathbb{R}^3 , conexas e con curvatura de Gauss positiva. Entón existe un aberto V de S que é un grafo sobre $P \cap \Omega$.*



Lema 2.11.

Demostración. Sexa U o aberto non baleiro $P \cap \Omega$ do plano e, dado $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$ normal a P , supoñamos que existe un punto $y \in U$ de forma que a semirecta $R^+(y, \vec{v})$ non corta á superficie. Así, $R^+(y, \vec{v})$ estaría nunha das dúas compoñentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$, xa que $R^+(y, \vec{v})$ é conexo; e ademais, como $y \in R^+(y, \vec{v}) \cap \Omega$, tense que $R^+(y, \vec{v}) \subset \Omega$. Agora ben, polo apartado i) do Lema 2.8, teriamos que $R^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$, para todo $x \in U$; polo apartado ii) do mesmo, sabemos que Ω non contén rectas. Así podemos deducir que Ω non contén completamente ningunha semirecta $R^+(x, -\vec{v})$, para todo $x \in U$. Como consecuencia, cada unha delas ten un punto $x \in R^+(x, -\vec{v})$ en Ω , é dicir, $R^+(x, -\vec{v}) \cap S \neq \emptyset$, para todo $x \in U$. Entón podemos supoñer a existencia dun vector $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$ normal a P e tal que todas as semirectas $R^+(x, \vec{v})$ cortan á superficie S . Deste xeito, polo Teorema 2.6, cada intersección $R^+(x, \vec{v}) \cap \Omega$ é un convexo non baleiro, limitado e aberto de $R^+(x, \vec{v})$, para todo $x \in U$. Cada intersección $R^+(x, \vec{v}) \cap S$ ten un único punto para todo x de U e, polo apartado (b) do citado teorema, a recta $R(x, \vec{v})$ non é tanxente a S en devandito punto, pois en tal caso $R(x, \vec{v})$ non podería ter puntos do dominio interior.

Sexa agora $f : S \rightarrow P$ a restrición a S da proxección ortogonal sobre o plano P . Polo que acabamos de ver, f é un difeomorfismo do aberto $V = f^{-1}(U)$ de S en U , é dicir, V é un grafo sobre U . \square

Agora veremos un resultado que nos asegura que nunha superficie pechada en \mathbb{R}^3 , conexas, con curvatura de Gauss positiva e non compacta, a curvatura de Gauss aproxímase a cero no infinito e proporciona unha cota da curvatura media.

Teorema 2.12. *Dada unha superficie S conexas que é pechada en \mathbb{R}^3 , verificase que:*

1. *Se o $\inf_{p \in S} K(p) > 0$, entón S é compacta (é un ovaloide).*

2. Se S non é compacta, ten curvatura de Gauss positiva e supoñamos tamén que o $\inf_{p \in S} H(p) = h > 0$, entón S é un grafo sobre un aberto convexo dun plano con diámetro menor ou igual que $2/h$.

Demostración.

1. Supoñamos que S non fose compacta e sexa $k > 0$ o ínfimo da curvatura de Gauss en S . Polo apartado (b) do Teorema 2.9 sabemos que S é un grafo sobre un aberto convexo dun plano P e que a aplicación de Gauss é un difeomorfismo de S sobre un aberto de \mathbb{S}^2 . Así, para calquera rexión \mathcal{R} da superficie S , tense que

$$kA(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} k \leq \int_{\mathcal{R}} K(p) dp = \int_{\mathcal{R}} |(\text{Jac } N)(p)| dp.$$

Polo teorema de cambio de variable,

$$kA(\mathcal{R}) \leq \int_{N(\mathcal{R})} 1 = A(N(\mathcal{R})) \leq 4\pi,$$

para toda rexión \mathcal{R} da superficie S .

Por outro lado, se $]a, b[$ é un segmento aberto do dominio interior Ω de S , e $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$ é un vector normal ao plano P , entón $R^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$, para todo $x \in]a, b[$. Consideramos agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conxunto

$$U_n = \{x + t\vec{v} : x \in]a, b[, 0 < t < n\},$$

que é un aberto do plano Q determinado por $]a, b[$ e \vec{v} ; facendo uso do Lema 2.11, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un aberto \mathcal{R}_n da superficie que é un grafo sobre o aberto U_n do plano Q . Polo tanto, como vimos no Lema 1.13 que a proxección ortogonal sobre un plano diminúe a área, concluímos que

$$\frac{4\pi}{k} \geq A(\mathcal{R}_n) \geq A(U_n) = n|a - b|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

o cal é absurdo e chegamos así a que S debe ser compacta.

2. De forma análoga, sabemos que S é un grafo sobre un aberto convexo U dun plano P . Sexan q_1 e q_2 dous puntos calquera de U e sexan p_1 e p_2 os puntos de S que se proxectan sobre eles. Sexa \vec{v} un dos vectores unitarios normais ao plano P , entón $R^+(p_1, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$ e, polo Lema 2.8, $R^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$, para todo $x \in]p_1, p_2[$. Deste xeito, o conxunto

$$V = \{x + t\vec{v} : x \in]p_1, p_2[\}$$

é un aberto do plano Q determinado polo segmento $]p_1, p_2[$ e o vector \vec{v} ; aplicando o Lema 2.11 sabemos que existe un aberto S' da superficie S que é un grafo sobre este

aberto V de Q . Vexamos unha cota para o seu raio r : sexa $0 < R < r$ e sexa \mathbb{S}_R^2 unha esfera de raio R , con curvatura media constante $1/R$ con respecto ao normal interior. Supoñamos que S é un grafo sobre un disco aberto de raio r centrado na orixe do plano $z = 0$. Se deixamos caer a esfera \mathbb{S}_R^2 sobre S en ambos sentidos obtemos dous puntos de tanxencia entre S e \mathbb{S}_R^2 , onde nun deles, ao que chamaremos p , o normal de S coincide co normal interior de \mathbb{S}_R^2 . Ademais, como $H_S(p) \leq H_{\mathbb{S}_R^2}$, temos que

$$h \leq H_S(p) \leq H_{\mathbb{S}_R^2} = \frac{1}{R},$$

co cal $R \leq 1/h$, para todo $R < r$, e así, $r \leq 1/h$. □

Observación 2.13. O teorema anterior asegúranos que para superficies pechadas en \mathbb{R}^3 , conexas e con curvatura de Gauss positiva, existen dúas ou tres direccións do espazo respecto das cales a superficie está limitada, dependendo de que se lle permita ou non á curvatura media ou de Gauss aproximarse a cero.

Capítulo 3

Fórmulas de Minkowski e teoremas sobre ovaloides

Neste capítulo abordaremos conceptos e resultados de cálculo vectorial [5] e integración nas superficies [3], ata obter unha das ferramentas esenciais para o Teorema de Alexandrov, que son as Fórmulas de Minkowski; ademais de dous teoremas globais para superficies compactas.

Vexamos as seguintes definicións e resultados que nos serán de utilidade ao longo do capítulo.

Definición 3.1. Sexa A un subconxunto de \mathbb{R}^3 . Un campo diferenciable en A é, por definición, unha aplicación diferenciable $X : A \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Defínese a diverxencia do campo X como a función $\operatorname{div} X : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{traza}(\partial X)_p, \quad p \in A$$

Teorema 3.2 (Teorema da diverxencia). *Sexa S unha superficie compacta e conexa, e Ω o seu dominio interior. Se $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un campo de vectores, entón*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_S \langle X, N \rangle,$$

onde $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é o campo normal interior.

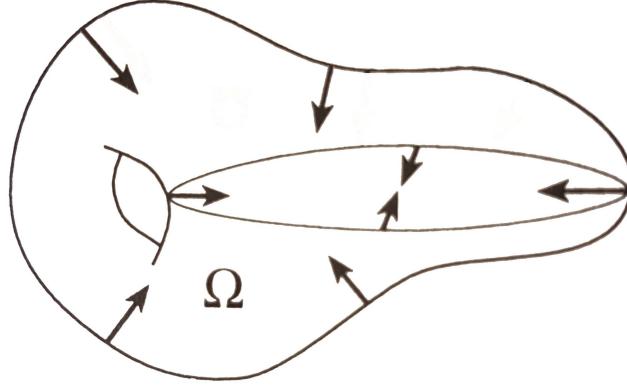
A partir de agora, S será unha superficie compacta e $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable sobre tal superficie.

Definición 3.3. A unión $N_{\epsilon}(S)$ de todos os segmentos normais de raio $\epsilon > 0$ centrados nos puntos dunha superficie orientable S recibe o nome de *veciñanza tubular* de raio ϵ se é un aberto de \mathbb{R}^3 e a aplicación

$$F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_{\epsilon}(S)$$

definida por $F(p, t) = p + tN(p)$, para todo $(p, t) \in S \times \mathbb{R}$ é un difeomorfismo.

Definición 3.4. Chamaremos *dominio regular* en \mathbb{R}^3 a calquera aberto Ω conexo e limitado tal que $\partial\Omega$ é unha superficie compacta (non necesariamente conexas).



Dominio regular.

Un exemplo interesante é o seguinte: se S é unha superficie compacta e S_t é unha superficie paralela con $t > 0$ suficientemente pequeno, o aberto $V_t(S)$ definido tal que

$$V_t(S) = F(S \times (0, \epsilon)) \subset N_\epsilon,$$

é un dominio regular con $\partial V_t(S) = S \cup S_t$ e tal que $\Omega - \bar{\Omega}_t = V_t(S)$.

Corolario 3.5 (Teorema da diverxencia en dominios regulares). *Para este tipo de dominios Ω ten sentido falar de normal interior e veciñanzas tubulares de $\partial\Omega$, e continúaase verificando o Teorema 3.2*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_{\partial\Omega} \langle X, N \rangle,$$

onde a integral sobre $\partial\Omega$ significa a suma das integrais en cada unha das superficies que son as súas compoñentes conexas.

Vexamos agora o teorema que nos permitirá obter as Fórmulas de Minkowski:

Teorema 3.6 (Teorema da diverxencia sobre superficies). *Sexa S unha superficie compacta e $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable de vectores definido na superficie.*

1. $\int_S \operatorname{div} V = -2 \int_S \langle V, N \rangle H$
2. $\int_S [k_2(p) \langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + k_1(p) \langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle] dp = -2 \int_S \langle V, N \rangle K$, onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ é unha base ortonormal de direccións principais no punto $p \in S$.

Demostración. Se $N_\epsilon(S) \subset \mathbb{R}^3$, para algún $\epsilon > 0$, é unha veciñanza tubular da superficie, definimos nela un campo X sen máis ca estender de forma constante o campo V ao longo dos segmentos normais:

$$(X \circ F)(p, t) = X(p + tN(p)) = V(p), \text{ para todo } (p, t) \in S \times (-\epsilon, \epsilon), \quad (3.1)$$

onde F é a aplicación descrita na Definición 3.3. Como consecuencia, X tamén é diferenciable. Se agora lle aplicamos a X o Corolario 3.5 no dominio regular $V_a(S)$, $a \in (0, \epsilon)$, obtemos que

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = - \int_S \langle X, N \rangle - \int_{S_a} \langle X, N_a \rangle,$$

onde N e N_a son os campos normais interior e exterior de S e de S_a . Se á segunda integral á dereita da igualdade lle aplicamos a fórmula de cambio de variable para o difeomorfismo $F_a : S \rightarrow S_a$ definido por

$$F_a(p) = F(p, a) = p + aN(p),$$

e tendo presente que $N_a \circ F_a = -N$ e que $X \circ F_a = V$, tense que

$$\int_{S_a} \langle X, N_a \rangle = - \int_S \langle V, N \rangle (1 - 2aH + a^2K),$$

pois

$$\begin{aligned} |(\operatorname{Jac} F_t)(p)| &= |(\partial F_f)_p(\vec{e}_1) \wedge (\partial F_t)_p(\vec{e}_2)| = (1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p)) \\ &= 1 - 2tH(p) + t^2K(p). \end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = -2a \int_S \langle V, N \rangle H + a^2 \int_S \langle V, N \rangle K, \quad (3.2)$$

para todo a tal que $0 < a < \epsilon$.

A continuación imos calcular a diverxencia do campo X na veciñanza tubular $N_\epsilon(S)$ a partir do campo V sobre a superficie S . Por (3.1), para todo $p \in S$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} (\partial X)_{p+tN(p)}(N(p)) &= 0, \\ (\partial X)_{p+tN(p)}(\vec{e}_i) &= \frac{(\partial V)_p(\vec{e}_i)}{1 - tk_i}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, N(p)\}$ é base de \mathbb{R}^3 formada polo normal a S en p e as direccións principais nese punto da superficie. Desta forma,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} X)(p + tN(p)) &= \operatorname{traza}(\partial X)_{p+tN(p)} \\ &= \frac{\langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle}{1 - tk_1(p)} + \frac{\langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle}{1 - tk_2(p)}, \end{aligned}$$

para todo $p \in S$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Polo Teorema de Fubini e a Definición 1.11 de integral en $S \times \mathbb{R}$, o lado esquerdo de (3.2) podémolo escribir como

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = \int_0^a \int_S [(\operatorname{div} X) \circ F](p, t) |\operatorname{Jac} F|(p, t) dp dt.$$

Mais como vimos anteriormente que $|\operatorname{Jac} F|(p, t) = (1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))$, se substituímos no valor da diverxencia de X antes calculado temos que

$$\begin{aligned} [(\operatorname{div} X) \circ F](p, t) |\operatorname{Jac} F|(p, t) &= \langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + \langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle \\ &\quad - t[k_2(p)\langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + k_1(p)\langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle], \end{aligned}$$

onde a función

$$p \in S \mapsto \langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + \langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle$$

é a diverxencia do campo V , que denotaremos por $\operatorname{div} V$.

Se substituímos todo en (3.2), chegamos a que

$$\begin{aligned} a \int_S \operatorname{div} V - \frac{1}{2} a^2 \int_S [k_2(p)\langle (\partial V)_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + k_1(p)\langle (\partial V)_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle] dp \\ = -2a \int_S \langle V, N \rangle H + a^2 \int_S \langle V, N \rangle K, \end{aligned}$$

para todo $a \in (0, \epsilon)$.

Se igualamos coeficientes, xa temos demostrado o teorema. \square

Desta forma chegamos a obter as fórmulas integrais de Minkowski aplicando o Teorema 3.6 ao campo $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $V(p) = p$, para todo $p \in S$:

Teorema 3.7 (Fórmulas de Minkowski). *Sexa S unha superficie compacta, N a súa aplicación de Gauss, e H e K as curvaturas media e de Gauss respectivamente. Cúmrese que*

1. $\int_S (1 - \langle p, N(p) \rangle) H(p) dp = 0.$
2. $\int_S (H(p) + \langle p, N(p) \rangle) K(p) dp = 0.$

A partir destas fórmulas podemos enunciarnos os dous teoremas globais de Hilbert-Liebmann e de Jellet.

Corolario 3.8 (Teorema de Hilbert-Liebmann). *Unha superficie compacta, conexas e con curvatura de Gauss constante ten que ser unha esfera.*

Demostración. Sexa S unha superficie compacta, conexas e con curvatura de Gauss constante, entón, tal e como vimos ao comezo do Capítulo 2, tal curvatura de Gauss K é unha constante positiva. Deste xeito, estamos nas hipótese do Teorema 2.9 (a), podendo así asegurar que a función soporte $\langle p, N(p) \rangle$ é negativa para calquera punto interior que se tome como base; ademais, podemos supoñer que a orixe de \mathbb{R}^3 está en Ω , pois de non ser así, bastaría realizar unha traslación.

As fórmulas de Minkowski, dividindo Teorema 3.7 (2) por \sqrt{K} , lévannos a que

$$\int_S (1 + \langle p, N(p) \rangle H(p)) dp = 0,$$

$$\int_S \left(\frac{H(p)}{\sqrt{K}} + \langle p, N(p) \rangle \sqrt{K} \right) dp = 0.$$

Se agora as restamos,

$$\int_S \left(\left(1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K}} \right) + \langle p, N(p) \rangle (H(p) - \sqrt{K}) \right) dp = 0.$$

Como $H^2 \geq K$ polo Lema 1.6 e como sabemos que dada unha superficie compacta existen puntos delas cuxa segunda forma fundamental respecto do normal interior é definida positiva, entón $H(p) \geq \sqrt{K}$; polo tanto,

$$1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K}} \leq 0,$$

$$H(p) - \sqrt{K} \leq 0,$$

para todo punto $p \in S$. Consecuentemente, o integrando anterior é non positivo e ten integral nula, co cal o integrando ten que ser nulo. Así deducimos que $H^2 = K$ e entón S é totalmente umbílica, mais como as únicas superficies conexas e pechadas en \mathbb{R}^3 totalmente umbílicas son as esferas e os planos, concluimos que S é unha esfera. \square

Definición 3.9. Unha superficie de \mathbb{R}^3 compacta dise *estrelada respecto da orixe* se a súa rexión interior é estrelada no sentido usual respecto dun punto.

Corolario 3.10 (Teorema de Jellet). *As únicas superficies compactas, conexas, estreladas respecto dun punto e con curvatura media constante son as esferas.*

Demostración. Sexa S unha superficie compacta, conexa e estrelada respecto, por exemplo, da orixe de \mathbb{R}^3 , co cal $0 \in \Omega$. Vexamos agora que $\langle p, N(p) \rangle \leq 0$. Para iso, supoñamos que non é así e chegaremos a unha contradición: escribimos S en p coma unha gráfica de F sobre $T_p S$. Sen perda de xeneralidade, pois bastaría con realizar unha rotación se fose preciso, podemos supoñer que $T_p S = \{z = 0\}$ e $p = (0, 0, 0)$. Deste xeito, a orixe móvese a un punto θ con $\theta_3 < 0$, xa que $N(p) = (0, 0, 1)$ e $\langle p - \theta, N(p) \rangle > 0$. Podemos supoñer tras unha rotación que $\theta_2 = 0$, e así poder parametrizar o segmento $[\theta, p]$ como $t(\theta_1, \theta_3)$. Agora ben, polo Teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} F(x, z) &= F(0, 0) + dF(0, 0)(x, z) + \frac{1}{2}(x, z)d^2F(0, 0)(x, z) + G(x, z) \\ &= a_1x^2 + b_1xz + c_1z^2 + G_1(x, z), \end{aligned}$$

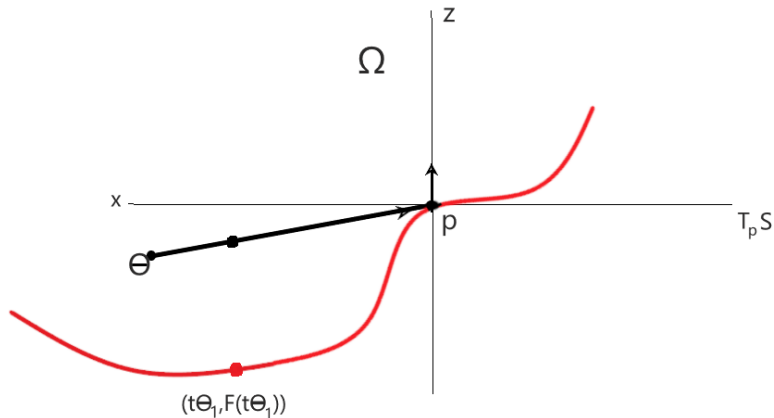
onde $G(x, z)$ é unha función de orde maior ou igual que tres. Se nos restrinximos ao plano $z = 0$, que é onde está o segmento, temos que

$$F(x) = a_2x^2 + G_2(x)x^3, \text{ con } \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0.$$

Por ser $\bar{\Omega}$ estrelado,

$$t\theta_3 \geq F(t\theta_1) = a_2(t\theta_1)^2 + G_1(t\theta_1)(t\theta_1) = a_2t^2 + G_2(t)t^3, \text{ con } \lim_{t \rightarrow 0} G_2(t) = 0.$$

Se dividimos por $\theta_3 < 0$, $t \leq a_2t^2 + G_2(t)t^3$ para cada t suficientemente pequeno, isto é, $h(t) := t - a_2t^2 - G_2(t)t^3 \leq 0$. Pero como $h(0) = 0$, $h'(t) = 1 - 2a_2t - G_2'(t)t^3 - G_2(t)3t^2$, entón $h'(0) = 1$. Así, para $\delta > 0$ arbitrario, existe $|t_0| < \delta$ tal que $h(t_0) > 0$, o cal implica que S non é estrelada, contradición que vén de supoñer que $\langle p, N(p) \rangle > 0$.



Demostración Teorema de Jellet.

Como a curvatura media H de S é constante, as fórmulas de Minkowski dannos

$$\int_S (H + H^2 \langle p, N(p) \rangle) dp = 0,$$

$$\int_S (H + K(p) \langle p, N(p) \rangle) dp = 0.$$

Se agora restamos ambas igualdades,

$$\int_S (H^2 - K(p)) \langle p, N(p) \rangle dp = 0.$$

Novamente, como $H(p)^2 \geq K(p)$, o integrando é non positivo e ten integral nula, co cal o integrando ten que ser nulo; e así, $H^2 = K$ e S é totalmente umbílica. Deste xeito, como as únicas superficies conexas e pechadas en \mathbb{R}^3 totalmente umbílicas son as esferas e os planos, concluimos que S é unha esfera. \square

Vexamos agora un caso particular: sexa S un ovoide onde as curvaturas media e de Gauss son iguais en cada punto; entón S é unha esfera de raio un. En efecto, restando as fórmulas de Minkowski e tendo en conta que $H = K$, chegamos a que

$$\int_S 1 = \int_S H.$$

Por outro lado, posto que $H = K \leq H^2$, temos que $H \geq 1$ (pois $H = K > 0$). Así, polas propiedades da integral, concluimos que $H(p) = K(p) = 1$, para todo $p \in S$.

Capítulo 4

O teorema de Alexandrov

En 1956 Alexandrov aplicou de forma xeométrica o principio do máximo para dar unha das caracterizacións máis famosas da esfera, que foi *método das reflexións* [6]. A súa idea era comparar a superficie inicial coa súa reflexión respecto dun plano. Hoxe en día, coñécense demostracións distintas da orixinal que non usan o principio do máximo, senón que se basean en xeometría integral como veremos neste capítulo, fundamentada na desigualdade de Heintze-Karcher.

O teorema de Alexandrov permítenos o estudo e a caracterización das superficies compactas con curvatura media constante, aínda que nun primeiro momento veremos que é o que pasa con aquelas superficies compactas cuxa curvatura media non cambia de signo (que este sexa positivo ou negativo é indiferente, pois depende da orientación escollida na superficie; aínda que ben é certo que cando se traballa co normal interior nunha superficie compacta, se o signo da curvatura media se mantén invariante, este ten que ser positivo tal e como vimos anteriormente).

Antes de continuar co noso estudo, cómpre introducir previamente o seguinte resultado:

Lema 4.1. *Sexa S unha superficie compacta e conexas con curvatura media positiva en cada punto e Ω o dominio interior que determina. Sexa $q \in \Omega$ un punto interior á superficie. Se $p \in S$ é o punto da superficie máis próximo a q , entón $q = p + tN(p)$, con $0 \leq t \leq 1/k_2(p)$ e $N(p)$ o normal interior.*

Demostración. Consideramos a función distancia ao cadrado

$$f(p) = |p - q|^2, p \in S,$$

onde

$$(df)_p(\vec{v}) = 2\langle \vec{v}, p - q \rangle.$$

É doado ver que p é un punto crítico para f se, e só se, q está na recta normal a S en p , isto é, que

$$q = p + tN(p)$$

para un certo $t \in \mathbb{R}$. Sexan $\vec{v} \in T_p S$ e α unha curva en S que representa ao vector \vec{v} . Así,

$$\begin{aligned} (d^2 f)_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} |\alpha(t) - q|^2 = 2|\vec{v}|^2 + 2\langle \alpha''(0), p - q \rangle \\ &= 2|\vec{v}|^2 - 2t \langle \alpha''(0), N(p) \rangle = 2(|v|^2 - t\sigma_p(\vec{v}, \vec{v})). \end{aligned}$$

Por ser mínimo, $(d^2 f)_p$ é semidefinida positiva. Tomando $\vec{v} = \vec{e}_2$ o vector principal asociado a $k_2(p)$, obtemos que $1 - tk_2(p) \geq 0$. Resta ver que $t \geq 0$. Como p é o punto de S máis próximo a $q \in \Omega$, o segmento que une p con q sen conter a p non corta a S . Mais, como é conexo e corta a Ω , dedúcese que tal segmento está contido en Ω . Se $t \leq 0$, entón $p + \lambda N(p) \in \Omega$, para $\lambda \in [t, 0)$, o cal é imposible; logo $t \geq 0$. \square

Ademais, se temos en conta o Teorema 1.12 do Capítulo 1, xa estamos en condicións de continuar co noso estudo.

Teorema 4.2 (Desigualdade de Heintze-Karcher). *Sexa S unha superficie compacta con curvatura media H positiva. Entón*

$$\text{vol } \Omega \leq \frac{1}{3} \int_S \frac{1}{H(p)} dp,$$

onde Ω é o dominio interior e S . Ademais, a igualdade obtense se, e só se, S é unha esfera.

Demostración. Consideremos o seguinte subconxunto de $S \times \mathbb{R}$:

$$A = \left\{ (p, t) \in S \times \mathbb{R} / 0 \leq t \leq \frac{1}{k_2(p)} \right\},$$

onde $k_2(p)$ é a curvatura principal maior de S correspondente ao normal interior, que é positiva xa que $k_1 \leq H \leq k_2$. O conxunto A é un compacto contido en $S \times (0, a)$, sendo $a > 0$ un número maior có máximo da función $1/k_2(p)$ en S . Polo Lema 4.1, sabemos que

$$\Omega \subset F(A),$$

onde $F : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por

$$F(p, t) = p + tN(p), \text{ para todo } p \in S \text{ e para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Se agora lle aplicamos a F e á función característica de A , χ_A , a fórmula da área do Teorema 1.12 en $S \times (0, a)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(F, \chi_A) = \int_{S \times (0, a)} \chi_A |\text{Jac } F|.$$

É obvio que $n(F, \chi_A) \geq 1$ sobre $F(A) \supset \Omega$ e, por conseguinte, polo Teorema de Fubini,

$$\text{vol } \Omega \leq \int_S \left(\int_0^a \chi_A(p, t) |\text{Jac } F|(p, t) dt \right) dp.$$

Como xa vimos en ocasións anteriores o valor do Jacobiano de F , podemos substituílo na desigualdade anterior, e tendo en conta a definición do conxunto A , chegamos a que

$$\text{vol } \Omega \leq \int_S \left(\int_0^{1/k_2(p)} |(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))| dt \right) dp.$$

Agora, como o integrando anterior é non negativo cando $0 \leq t \leq 1/k_2(p)$, e facendo uso da xa coñecida desigualdade do Lema 1.6, $K(p) \leq H(p)^2$, para todo $p \in S$, entón

$$|(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))| = 1 - 2tH(p) + t^2K(p) \leq (1 - tH(p))^2.$$

Se temos en conta que $1/k_2(p) \leq 1/k_1(p)$, para todo $p \in S$ e que $(1 - tH(p))^2$ é unha función non negativa, concluímos que

$$\text{vol } \Omega \leq \int_S \left(\int_0^{1/H(p)} (1 - tH(p))^2 dt \right) dp = \frac{1}{3} \int_S \frac{1}{H(p)} dp;$$

ademais a igualdade obtense só se S é totalmente umbílica, é dicir, se S é unha esfera. \square

Agora ben, combinando este teorema coa primeira fórmula de Minkowski, chegamos finalmente a un dos máis importantes teoremas da Xeometría Diferencial Clásica.

Teorema 4.3 (Teorema de Alexandrov). *Toda superficie compacta, conexa e con curvatura media constante é unha esfera.*

Demostración. Dada unha superficie S verificando as condicións do enunciado, sabemos que polo Teorema 4.2 anterior,

$$\text{vol } \Omega \leq \frac{A(S)}{3H},$$

sendo Ω o dominio interior determinado pola superficie S e $H > 0$ a curvatura media respecto do normal interior. Por outro lado, e facendo uso da primeira fórmula de Minkowski do Teorema 3.7, temos que

$$A(S) + H \int_S \langle p, N(p) \rangle dp = 0. \quad (4.2)$$

Agora, se consideramos o campo identidade $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x) = x$, para todo $x \in \bar{\Omega}$, o valor da súa diverxencia é a función constante igual a 3; e polo Teorema 3.2 da diverxencia,

$$\text{vol } \Omega = -\frac{1}{3} \int_S \langle p, N(p) \rangle dp. \quad (4.3)$$

Substituíndo en (4.2) obtemos que

$$\text{vol } \Omega = \frac{A(S)}{3H}.$$

Así concluímos que S é unha esfera, pois no Teorema 4.2 unicamente se acadaba a igualdade cando S era tal superficie. \square

Observación 4.4. ([2]) O teorema de Alexandrov tamén se pode enunciar así: *as pompas de xabón sempre son redondas*. Unha pompa de xabón non é máis ca unha superficie cuxa consistencia é debida ás forzas de tensión superficial presentes en calquera substancia líquida. Cada pompa ten dentro aire a unha presión p_1 , mentres que no exterior o aire se atopa a presión atmosférica p_0 ; dado que para formar a pompa sopramos, tense que $p_1 > p_0$. Ademais, pola fórmula de Laplace $\Delta P = \sigma H$, onde σ é tensión superficial, en cada punto da superficie,

$$p_1 - p_0 \propto H.$$

Como ámbalas presións, interior e exterior, son constantes, a curvatura media da pompa é tamén constante. Polo tanto, toda pompa de xabón ten curvatura media constante e a topoloxía dunha esfera e, por conseguinte, o teorema de Alexandrov obriga a cada pompa a ser esférica.

Capítulo 5

Desigualdade isoperimétrica

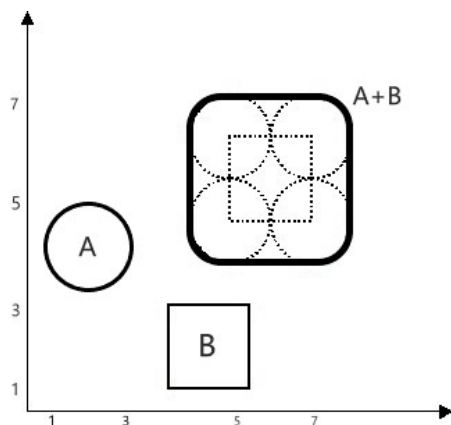
Tal e como se di en [7], as raíces do problema isoperimétrico parecen estar relacionadas coa mitoloxía, concretamente coa lenda da raíña Dido e a fundación da cidade de Cartago. Como recolle Virxilio no *libro IV* de *A Eneida*, Dido fuxiu de seu irmán Pigmalión xunto cuns cantos fieis pola costa norte de África ata chegar a un lugar ocupado polos xétulos (actual Tunisia). Dido pediu asilo ao seu rei e unha porción de terreo, ao que este accedeu dándolle o espazo que puidese abarcar coa pel dun boi. Dido cortou a pel en finas tiras e atounas a modo de corda, para así propoñerse cal sería a figura que debería formar para ocupar a maior área posible. Mais non só na mitoloxía, pois o problema isoperimétrico está tamén presente na propia natureza, por exemplo, en palabras de Pappus de Alexandria [8]: *As abellas saben o feito, útil para elas, de que o hexágono é maior có cadrado e có triángulo e conterá máis mel para o mesmo gasto de material na construción de cada un.*

No noso contexto ten sentido preguntarse tamén o problema isoperimétrico, é dicir, de todas as superficies compactas que encerran un volume dado, cal delas é a de menor área? Para poder respondela, cómpre demostrar primeiramente a desigualdade de Brunn-Minkowski.

Comezamos definindo a suma de Minkowski:

Definición 5.1. Sexan A e B dous subconxuntos arbitrarios non baleiros dun espazo euclidiano \mathbb{R}^n , de dimensión arbitraria. Defínese a súa *suma conxuntista* ou *suma de Minkowski* como

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{a \in A} (a + B)$$



Suma de Minkowski. [9]

Exemplo 5.2. Sexa o conxunto A un triángulo cuxas coordenadas dos seus vértices son $(0, -1)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$, e B outro triángulo de coordenadas $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$, entón a suma de Minkowski é

$$A + B = \{(0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, -2), (1, 0), (2, -1), (1, 0), (1, 2), (2, 1)\},$$

obtendo así un hexágono.

Observación 5.3. Presentamos a continuación unhas propiedades que se deducen facilmente da propia definición e que nos serán de utilidade ao longo do capítulo:

1. Sexan $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se un deles é aberto, a suma $A + B$ tamén o é. Certamente, supoñamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, como

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (b + A)$$

séguese que $A + b$, con $b \in B$, é aberto porque as traslacións de \mathbb{R}^n son homeomorfismos e a unión de abertos é aberta.

2. Sexan $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dous subconxuntos limitados do espazo euclidiano, entón $A + B$ tamén é limitado.
3. Sexan I_1, I_2, I_3 e J_1, J_2, J_3 seis intervalos abertos e limitados da recta real. Os seguintes subconxuntos de \mathbb{R}^3 dados por

$$A = I_1 \times I_2 \times I_3$$

$$B = J_1 \times J_2 \times J_3$$

reciben o nome de *paralelepípedos* con arestas paralelas aos eixos. Deste xeito, temos que

$$A + B = (I_1 \times J_1) + (I_2 \times J_2) + (I_3 \times J_3),$$

e ademais, se A e B son disxuntos, existe un plano paralelo a un dos planos coordenados que separa A de B . En efecto, supoñamos que $A \cap B = \emptyset$, entón polo menos unha das interseccións $I_1 \cap J_1$, $I_2 \cap J_2$ ou $I_3 \cap J_3$ debe ser baleira; se supoñemos que o é a primeira, existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que os intervalos I_1 e J_1 están a distintos lados de a , polo que o plano $x = a$ separa A e B .

4. Se A e B son dous conxuntos conexos por camiños de \mathbb{R}^3 , entón a suma $A + B$ tamén é un conxunto conexo por camiños.

Vexamos agora a xa citada desigualdade de Brunn-Minkowski:

Teorema 5.4 (Desigualdade de Brunn-Minkowski). *Sexan A e B dous abertos limitados do espazo euclidiano \mathbb{R}^3 . Entón verifícase que*

$$(\text{vol } A)^{1/3} + (\text{vol } B)^{1/3} \leq (\text{vol } (A + B))^{1/3},$$

onde $(\text{vol } S)$ denota o volume encerrado por S .

Demostración. Vamos supoñer en primeiro lugar que A e B son dous paralelepípedos tales que $A = I_1 \times I_2 \times I_3$ e $B = J_1 \times J_2 \times J_3$, onde os I_i e os J_i , $i = 1, 2, 3$ son intervalos abertos e limitados de \mathbb{R} con lonxitudes a_i e b_i . Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{(\text{vol } A)^{1/3} + (\text{vol } B)^{1/3}}{(\text{vol } (A + B))^{1/3}} &= \frac{\left(\prod_{i=1}^3 a_i\right)^{1/3} + \left(\prod_{i=1}^3 b_i\right)^{1/3}}{\left(\prod_{i=1}^3 (a_i + b_i)\right)^{1/3}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{1/3} + \left(\prod_{i=1}^3 \frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Mais como a media xeométrica de tres números sempre é menor ou igual cá súa media aritmética, concluimos que

$$\frac{(\text{vol } A)^{1/3} + (\text{vol } B)^{1/3}}{(\text{vol } (A + B))^{1/3}} \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{a_i + b_i} = 1,$$

cumprindo así a desigualdade do teorema.

Supoñamos agora que A e B son unións finitas e disxuntas de paralelepípedos abertos e limitados con arestas paralelas aos eixos, tal que

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad e \quad B = \bigcup_{j=1}^m B_j,$$

con A_i e B_j da forma dos paralelepípedos que tomamos no caso anterior; e vexamos que se verifica o teorema mediante indución no número total de paralelepípedos $n + m$. Para $n + m = 2$ xa vimos no caso anterior que é certo. Pois ben, supoñamos que $n + m \geq 3$ e que o resultado é certo para todo número de paralelepípedos menor que $n + m$. Dado que $n + m > 2$, entón $n > 1$ ou $m > 1$. Consideremos que $n > 1$, pola propiedade 3 da Observación 5.3, sabemos que existe un plano P paralelo aos eixos que separa a A_1 de A_2 ; e chamaremos P^+ e P^- aos dous semiespazos abertos nos que P divide \mathbb{R}^3 , $A^+ = A \cap P^+$ e $A^- = A \cap P^-$. Deste xeito, A^+ e A^- tamén son unións finitas de paralelepípedos con caras paralelas aos planos coordenados, é dicir,

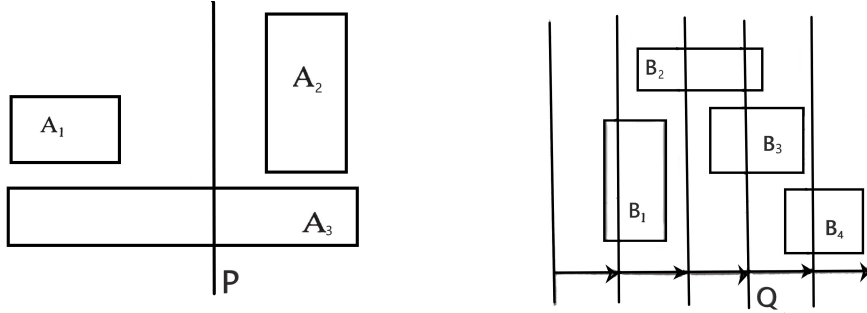
$$A^+ = \bigcup_{i=1}^{n^+} A_i^+ \quad e \quad A^- = \bigcup_{i=1}^{n^-} A_i^-,$$

con $n^+, n^- < n$ por P separar polo menos a A_1 e A_2 .

Por outro lado, podemos atopar outro plano Q paralelo a P de forma que

$$\frac{\text{vol } A^+}{\text{vol } A} = \frac{\text{vol } B^+}{\text{vol } B}. \quad (5.1)$$

En efecto, unha vez escollido P , a fracción da esquerda é un número entre cero e un e, tomando Q adecuadamente á esquerda de tódolos bloques de B e movéndoo cara a dereita ata pasalos a todos, tense que a fracción da dereita é unha función continua da posición de Q que toma valores entre cero e un.



Demostración da desigualdade Brunn-Minkowski.

Ademais, como $\text{vol } A^+ + \text{vol } A^- = \text{vol } A$ e $\text{vol } B^+ + \text{vol } B^- = \text{vol } B$, entón

$$\frac{\text{vol } A^-}{\text{vol } A} = \frac{\text{vol } B^-}{\text{vol } B}; \quad (5.2)$$

e de forma análoga B^+ e B^- son tamén unións finitas e disxuntas de paralelepípedos abertos con caras paralelas aos planos coordenados de xeito que

$$B^+ = \bigcup_{j=1}^{m^+} B_j^+ \quad e \quad B^- = \bigcup_{j=1}^{m^-} B_j^-,$$

con $m^+ \leq m$ e $m^- \leq m$, pois non podemos asegurar que Q separe a dous bloques de B . Os pares A^+, B^+ e A^-, B^- teñen un número total de bloques $n^+ + m^+ < n + m$ e $n^- + m^- < n + m$ respectivamente, polo que se lles pode aplicar a hipótese de indución:

$$\begin{aligned} \text{vol}(A^+ + B^+) &\geq \left[(\text{vol } A^+)^{1/3} + (\text{vol } B^+)^{1/3} \right]^3, \\ \text{vol}(A^- + B^-) &\geq \left[(\text{vol } A^-)^{1/3} + (\text{vol } B^-)^{1/3} \right]^3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Agora, como $A^+ \subset P^+$ e $B^+ \subset Q^+$, entón $A^+ + B^+ \subset P^+ + Q^+ = (P + Q)^+$ e, de forma análoga, $A^- + B^- \subset (P + Q)^-$. Así concluimos que $A^+ + B^+$ e $A^- + B^-$ son disxuntos porque $P + Q$ é outro plano de \mathbb{R}^3 .

Por (5.2) e (5.3) temos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(A + B) &\geq \text{vol}(A^+ + B^+) + \text{vol}(A^- + B^-) \\ &\geq \left[(\text{vol } A^+)^{1/3} + (\text{vol } B^+)^{1/3} \right]^3 + \left[(\text{vol } A^-)^{1/3} + (\text{vol } B^-)^{1/3} \right]^3. \end{aligned}$$

Mais tendo en conta (5.1) e (5.2),

$$\begin{aligned} \text{vol}(A + B) &\geq \text{vol } A^+ \left[1 + \left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } A} \right)^{1/3} \right]^3 + \text{vol } A^- \left[1 + \left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } A} \right)^{1/3} \right]^3 \\ &\geq \text{vol } A \left[1 + \left(\frac{\text{vol } B}{\text{vol } A} \right)^{1/3} \right]^3 = \left[(\text{vol } A)^{1/3} + (\text{vol } B)^{1/3} \right]^3, \end{aligned}$$

finalizando así o proceso de indución e demostrando o teorema para este segundo caso.

Para o caso xeral, sexan A e B dous abertos limitados calquera de \mathbb{R}^3 ; sabemos que existen sucesións A_n e B_n , para cada $n \in \mathbb{N}$, de abertos de \mathbb{R}^3 como os considerados no segundo caso, de forma que $A_n \subset A$, $B_n \subset B$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol } A_n = \text{vol } A \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol } B_n = \text{vol } B.$$

Deste modo, $A_n + B_n \subset A + B$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\text{vol}(A + B)^{1/3} \geq \text{vol}(A_n + B_n)^{1/3} \geq (\text{vol } A_n)^{1/3} + (\text{vol } B_n)^{1/3}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se agora tomamos límites cando n tende a infinito, obtemos a desigualdade de Brunn-Minkowski. \square

Para toda función diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, podemos atopar un $\delta > 0$ tal que, se $|t| < \delta$, entón $tf(S) \subset (-\epsilon, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$, de modo que $N_\epsilon(S)$ sexa unha veciñanza tubular.

Definición 5.5. Chamaremos *variación de S correspondente á función f* ao conxunto

$$S_t(f) = \{x \in N_\epsilon(S) : x = p + tf(p)N(p), p \in S, |t| < \delta\},$$

tal que $S_0(f) = S$ para calquera f .

Cada unha das superficies de $S_t(f)$ é difeomorfa á superficie S mediante a aplicación $\phi_t : S \rightarrow S_t(f)$ definida por

$$\phi_t(p) = p + tf(p)N(p) = F(p, tf(p)), p \in S,$$

sendo F a función dada en (4.1).

A continuación, vexamos que as funcións

1. $t \in (-\delta, \delta) \rightarrow A(t) = A(S_t(f))$
2. $t \in (-\delta, \delta) \rightarrow V(t) = \text{vol } \Omega_t(f)$

son derivables, con $\Omega_t(f)$ o dominio interior determinado por $S_t(f)$:

1. Se tomamos as direccións principais de S no punto $p \in S$, \vec{e}_1, \vec{e}_2 , temos que

$$(\partial\phi_t)_p(\vec{e}_i) = (1 - tf(p)k_i(p))\vec{e}_i + (\partial f)_p(\vec{e}_i)N(p), i = 1, 2;$$

e, polo tanto,

$$(\partial\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (\partial\phi_t)_p(\vec{e}_2) = [1 - 2tf(p)H(p)]N(p) - t(\nabla f)_p + t^2G(p, t), \quad (5.4)$$

con $p \in S$, $|t| < \delta$, $G : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ unha función diferenciable e ∇f é o campo gradiente de f , tal que $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ está dado por

$$\begin{cases} \langle (\nabla f)(p), \vec{v} \rangle = (df)_p(v), \vec{v} \in T_p S \\ \langle (\nabla f)(p), N(p) \rangle = 0. \end{cases}$$

Polo teorema de cambio de variables,

$$A(t) = A(S_t(f)) = \int_{S_t(f)} 1 = \int_S |\text{Jac } \phi_t|,$$

e xunto con 5.4, obtemos que $A(t)$ é derivable en $t = 0$. Ademais,

$$A'(0) = \int_S \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\text{Jac } \phi_t| = \int_S \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |(d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2)| dp,$$

sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ unha base ortonormal de $T_p S$, e así,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |(d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2)| = -2f(p)H(p),$$

que é a *fórmula da primeira variación da área*.

2. Tal e como vimos en (4.3),

$$V(t) = \text{vol } \Omega_t = -\frac{1}{3} \int_{S_t} \langle N_t(p), p \rangle dp,$$

sendo $N_t(f)$ o normal interior de $S_t(f)$.

Se utilizamos a fórmula de cambio de variables para o difeomorfismo ϕ_t , chegamos a que

$$V(t) = -\frac{1}{3} \int_S \langle N_t \circ \phi_t, \phi_t \rangle |\text{Jac } \phi_t|.$$

Mais como para $t = 0$ o difeomorfismo ϕ_t é a identidade entre S e S_t , tense que

$$(N_t \circ \phi_t)(p) = \frac{(d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2)}{|(d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2)|} = \frac{(d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2)}{|\text{Jac } \phi_t|(p)};$$

usando (5.4), obtense que

$$\begin{aligned} V(t) &= -\frac{1}{3} \int_S \langle (d\phi_t)_p(\vec{e}_1) \wedge (d\phi_t)_p(\vec{e}_2), \phi_t(p) \rangle dp \\ &= -\frac{1}{3} \int_S [(1 - 2tf(p)H(p))\langle N(p), p \rangle - t \langle (\nabla f)_p, p \rangle + t^2 D(p, t)] dp, \end{aligned}$$

con D unha función diferenciable definida en $S \times (-\delta, \delta)$. Deste xeito, V é derivable en $t = 0$ e, ademais, a *fórmula de primeira variación do volume* é

$$V'(0) = \frac{1}{3} \int_S [-f(p) + 2f(p)H(p)\langle N(p), p \rangle + \langle (\nabla f)_p, p \rangle] dp = -\frac{1}{3} \int_S f(p) dp,$$

tendo en conta que

$$2 \int_S f(p)\langle p, N(p) \rangle H(p) dp = - \int_S [2f(p) + \langle (\nabla f)_p, p \rangle] dp.$$

Agora xa estamos en condicións de enunciar a desigualdade isoperimétrica no espazo:

Teorema 5.6 (Desigualdade isoperimétrica no espazo). *Sexa S unha superficie compacta e conexas. Entón*

$$A(S)^3 \geq 36\pi(\text{vol } \Omega)^2;$$

cumpríndose a desigualdade se, e só se, S é unha esfera.

Demostración. Sexa $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $N_\epsilon(S)$ sexa unha veciñanza tubular. Para cada $t \in (0, \epsilon)$, a superficie paralela S_t está contida no dominio interior de S , por conseguinte, $\Omega_t \subset \Omega$. A continuación, denotamos por B_t^3 a bóla aberta de centro a orixe de \mathbb{R}^3 e raio t . Se $p \in (\Omega_t + B_t^3) \cap S$, entón existirían $q \in \Omega_t$ e $\vec{v} \in B_t^3$ tales que $p = q + \vec{v}$; deste modo, $|p - q| = |\vec{v}| < t$ e, así, a distancia de q a S é menor que t . Pero isto

é contradictorio, pois como o mínimo da función distancia ao cadrado dos puntos de S a q é un punto $p_0 \in S$ tal que q está na recta normal a S en p_0 , e $q \in \Omega_t$, entón $|p_0 - q| \geq t$. Polo tanto, pola propiedade 4 da Observación 5.3, $\Omega_t + B_t^3$ é conexo e está contido nunha das dúas compoñentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$; pero, como $\Omega_t \subset \Omega$, temos que $\Omega_t + B_t^3 \subset \Omega$ para todo $t \in (0, \epsilon)$.

Pola desigualdade de Brunn-Minkowski sabemos que

$$\text{vol } \Omega \geq \text{vol } (\Omega_t + B_t^3) \geq \left[(\text{vol } \Omega_t)^{1/3} + (\text{vol } B_t^3)^{1/3} \right]^3, \text{ para todo } t \in (0, \epsilon),$$

que se desprezamos aqueles termos onde o volume de B_t^3 ten expoñente maior que $1/3$, temos que

$$\text{vol } \Omega \geq \text{vol } \Omega_t + 3(\text{vol } B_t^3)^{1/3}(\text{vol } \Omega_t)^{2/3}, \text{ para todo } t \in (0, \epsilon).$$

Así, como $\text{vol } B_t^3 = \left(\frac{4\pi}{3}\right) t^3$, entón

$$\frac{\text{vol } \Omega - \text{vol } \Omega_t}{t} \geq 3 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} (\text{vol } \Omega_t)^{2/3}, \quad t \in (0, \epsilon).$$

Por outro lado, aplicando a Definición 1.11 de integral sobre $S \times \mathbb{R}$ para o difeomorfismo $F : S \times (0, \epsilon) \rightarrow V_\epsilon(S)$ definido en (4.1), tense que

$$\begin{aligned} \text{vol } \Omega - \text{vol } \Omega_t &= \int_{S \times (0, t)} |\text{Jac } F| = \int_0^t \left(\int_S (1 - 2tH(p) + t^2K(p)) dp \right) dt = \\ &= tA(S) - t^2 \int_S H + \frac{t^3}{3} \int_S K, \end{aligned}$$

tomando unha base ortonormal de direccións principais a S no punto p .

Deste xeito, e tomando límites cando t tende a cero, concluímos que

$$A(S) \geq 3 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} (\text{vol } \Omega)^{2/3},$$

é dicir,

$$A(S) \geq 36\pi(\text{vol } \Omega)^2.$$

Vexamos agora o caso da igualdade: sexa S unha superficie que cumpre tal igualdade, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación diferenciable calquera, e consideramos a variación $S_t(f)$ definida para $|t| < \delta$, $\delta > 0$. Entón, a función $h : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = A(S_t(f))^3 - 36\pi(\text{vol } \Omega_t(f))^2,$$

é diferenciable por selo as dúas funcións que vimos na páxina 34, e ademais ten un mínimo en $t = 0$ por hipótese. Así,

$$0 = h'(0) = 3A(S) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(S_t(f)) \right) - 72\pi \text{vol } \Omega \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol } \Omega_t(f) \right).$$

Agora, polas fórmulas de primeira variación da área e do volume da páxina 34, e tendo en conta que S verifica a igualdade do teorema,

$$\int_S f(p)[12\pi \text{ vol } \Omega - A(S)H(p)]dp = 0,$$

para toda función diferenciable f definida en S ; polo que tomando

$$f(p) = 12\pi \text{ vol } \Omega - A(S)H(p), \quad p \in S,$$

concluimos que debe ser identicamente nula e, por tanto, S ten curvatura media constante. Polo Teorema 4.3 de Alexandrov, S é unha esfera. \square

Bibliografía

- [1] M. P. Do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990.
- [2] J. A. Pastor González e M. A. Hernández Cifre. *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Editorial CSIC-CSIC Press, 2010.
- [3] S. Montiel e A. Ros. *Curvas y superficies*. Armilla: Proyecto Sur, 1997.
- [4] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. 3*. 3rd ed. Houston, TX: Publish or Perish, 1999.
- [5] J. E. Marsden, A. J. Tromba e M. López Mateos. *Cálculo vectorial*. Vol. 69. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [6] A. D. Alexandrov. “Uniqueness theorem for surfaces in the large”. En: *V. Vestnik, Leningrad Univ.* 2^a ser. 21 (1958). Ed. por Amer. Math. Soc. Trans., pp. 412–416.
- [7] P. J. Herrero Piñeyro. “La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental”. En: *La Gaceta de la RSME* 15.2 (2012). Accedido por última vez o 02-07-2019, pp. 335–336. URL: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1083>.
- [8] J. Pérez. *La desigualdad isoperimétrica (I)*. Accedido por última vez o 02-07-2019. URL: <http://wpd.ugr.es/~jperez/la-desigualdad-isoperimetrica-i/>.
- [9] G. Kavka e M. T. Taranilla. “Implementación de una herramienta para el cálculo y la visualización de Sumas de Minkowski”. Accedido por última vez o 02-07-2019. Universidad Nacional de San Luis. URL: http://www.dma.fi.upm.es/personal/gregorio/geometria_computacional/web/suma_minkowski/aspectos1.htm.