USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Hilbert y la axiomatización de los Elementos de Euclides

Pablo Álvarez González

2020/2021

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Hilbert y la axiomatización de los Elementos de Euclides

Pablo Álvarez González

Julio, 2021

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Álgebra
Título: *Hilbert y la axiomatización de los Elementos de Euclides*
Breve descripción del contenido
La geometría desarrollada por Euclides, en los *Elementos*, fue el modelo de cómo se contaron las matemáticas durante más de dos milenios. A lo largo del siglo XIX destacan tres hechos en el ámbito de las matemáticas: se fijó lo que podemos llamar la versión definitiva del "original", surgieron "nuevas geometrías" en la discusión del 5º postulado y también la lógica aristotélica fue "matematizada". En 1899, Hilbert presentó lo que se considera la primera versión de la geometría de Euclides "verdaderamente axiomática" en el sentido de que en ella no hay apelaciones escondidas a la intuición espacial. Este trabajo de Hilbert contribuyó a un conocimiento más hondo de la relación entre geometría y estructuras algebraicas. Además, tal como el propio Hilbert señala en el prólogo, impulsó una forma nueva y axiomática de hacer matemáticas en el siglo XX. Este trabajo consistirá en un estudio de la axiomatización de Hilbert, el contexto histórico y de las repercusiones en las matemáticas de los siguientes años.
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice general

Resumen VII

Introducción IX

1. Contextualización 1

1.1. Sobre la vida de David Hilbert 1

1.2. La geometría hasta los *Grundlagen* 6

2. El sistema axiomático 25

2.1. Introducción 25

2.2. Características del sistema axiomático 26

2.2.1. Elementos de un sistema axiomático 26

2.2.2. Propiedades de los sistemas axiomáticos 28

2.3. El método axiomático en Euclides y Hilbert 32

3. *Fundamentos de la geometría* 37

3.1. Los cinco grupos de axiomas 37

3.1.1. Introducción 37

3.1.2. Axiomas de enlace 37

3.1.3. Axiomas de orden 39

3.1.4. Axiomas de congruencia 40

3.1.5. Axioma de las paralelas 43

3.1.6. Axiomas de continuidad 44

3.2. Consistencia e independencia de los axiomas 45

4. Repercusiones en la matemática posterior 49

Bibliografía 53

Resumen

Este trabajo aborda el método axiomático formal de David Hilbert, desde una primera manifestación en su obra *Grundlagen der Geometrie*, hasta una evolución más formal y cercana a la lógica. El objetivo que se pretende es transmitir la importancia de esta obra en sí misma, de las circunstancias que condujeron a su elaboración y de las consecuencias en la matemática y la ciencia posterior.

En el trabajo se incluyen, en primer lugar, algunos datos biográficos sobre Hilbert y un repaso histórico de la evolución de la geometría desde su origen hasta su transformación en un corpus axiomatizado, firme y sólido, con Hilbert. Se intenta, además, resaltar la importancia de Euclides como autor del primer sistema axiomático completo: los *Elementos*, punto de partida para la creación de los *Grundlagen.* Así mismo, se examina el concepto general de sistema axiomático moderno, sus elementos y propiedades y se muestran algunas diferencias entre la axiomática de las obras de Euclides y Hilbert.

La última parte está dedicada solo a los *Grundlagen.* En ella se tratan sus cinco grupos de axiomas, la no contradicción e independencia de los mismos y la importancia y repercusión de la obra en una nueva forma de hacer matemáticas.

Palabras clave: Fundamentos, geometría, sistema axiomático, rigor, lógica matemática.

Abstract

This work is about the formal axiomatic method of David Hilbert, from a first manifestation in his treatise *Grundlagen der Geometrie*, to a later evolution, more formal and close to logics. The aim is to convey the importance of his work itself, of the circumstances that led to its creation and of the consequences in later mathematics and science.
The work starts with some biographical information about Hilbert and a historical review of the evolution of geometry from its origin to its transformation into a firm and solid corpus, axiomatized by Hilbert. It also attempts to highlight the importance of Euclid as the author of the first complete axiomatic system: the *Elements*, which will become the starting point for the construction of the *Grundlagen*. Likewise, the general concept of the modern axiomatic system, its elements and properties are examined and some differences between the axiomatics in the works of Euclid and Hilbert are shown.
The last part is only dedicated to the *Grundlagen*. It deals with its five groups of axioms, their properties of non-contradiction and independence, and the importance and repercussion of his work on a new way of doing mathematics.

Keywords: Foundations, geometry, axiomatic system, rigor, mathematical logic.

Introducción

El motivo del presente trabajo es hacer un profundo estudio de la axiomatización de los *Elementos* de Euclides llevada a cabo por el matemático alemán David Hilbert y materializada en su obra *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría*).
Hacia el siglo III a. C., Euclides de Alejandría compilaba y sistematizaba la mayor parte del conocimiento matemático, especialmente del geométrico, anterior a él y presente en su tiempo. Por este motivo, me propongo realizar en el primer capítulo un recorrido por la larga historia de esta disciplina desde sus orígenes en las antiguas civilizaciones hasta el momento en que Hilbert decide escribir su espectacular formalización de la obra euclidiana. Considero que un conocimiento general de las vicisitudes por las que atravesó la matemática, y en particular la geometría, puede ser de gran utilidad a la hora de comprender la motivación del autor de los *Grundlagen* para realizar esta obra. De hecho, esto es así porque la obra euclidiana, más tarde reelaborada por Hilbert, está estrechamente ligada a la historia. Por una parte, su contenido concentra el saber de siglos previos, enraizado a su vez en el de épocas milenarias. Por otra, su protagonismo se extiende en el tiempo durante más de veinte siglos al convertirse en el canon sagrado de la geometría al que nadie se atrevía a contradecir salvo aquellos que ya desde tiempos cercanos a Euclides pusieron bajo sospecha la autenticidad de un problemático postulado. Será precisamente esta sospecha la que provocará uno de los acontecimientos más importantes en la historia de las matemáticas. Después de siglos de preocupación por resolver las dudas sobre la verdadera naturaleza del postulado, finalmente tres personajes de principios del siglo XIX, Gauss, Bolyai y Lobachevski, no solo confirmaban la validez del quinto postulado sino que también abrían las puertas a la existencia de una nueva geometría, tan extraña como consistente, que se permitía prescindir del postulado euclídeo e incluso contradecir verdades tan firmemente establecidas en el canon clásico. Los nuevos descubrimientos dejaban a la geometría clásica mal parada y la sumergían en una gran crisis, igual que a otras ramas de las matemáticas. Tal situación exigía una revisión rigurosa de todas ellas en la búsqueda de unas bases más fuertes y firmes. Es aquí donde encuentra Hilbert un motivo para llevar a cabo una reformulación de la obra euclidiana que le permitía recuperar el prestigio de

Euclides y de su trabajo, dotándolo de unos fundamentos sólidos capaces de mantenerla en el puesto tan elevado que había ocupado siempre. Por otra parte, junto a la revolución que supusieron las geometrías no euclidianas, se producirá un importante desarrollo de dos geometrías ya gestadas en siglos anteriores y enfrentadas por sus técnicas metodológicas. Por un lado, la geometría analítica de Descartes incluía las coordenadas que facilitaban la resolución de problemas complejos. Por otro lado, la geometría proyectiva con Poncelet como principal representante, aspiraba a la utilización de métodos puramente geométricos. Además, este primer capítulo del trabajo lo dedico también a resaltar aspectos que me parecen importantes de la vida de Hilbert, con la intención de dar a conocer tanto el gran valor de su trayectoria profesional como su fuerte personalidad y su gran pasión por el saber matemático. El repaso de las diferentes etapas de su vida resulta de utilidad también para situar su obra geométrica dentro de la evolución experimentada por el pensamiento y las convicciones de su autor.

Además, este trabajo cuenta con un segundo capítulo dedicado a la caracterización general del sistema axiomático formal, atendiendo por una parte a las propiedades, principalmente las de independencia de unos axiomas respecto de otros, completitud, y consistencia y, por otra, a los elementos que lo conforman, esto es, a la lógica presupuesta, el lenguaje formal (términos primitivos, términos definidos, reglas morfológicas y de definición), el conjunto de axiomas, las reglas de deducción y finalmente los teoremas. En cuanto a las primeras, destaco la necesidad e importancia de alguna de ellas para poder considerar un sistema axiomático como "aceptable". Así mismo, destaco las diferencias entre su método y el euclidiano.

El capítulo siguiente está dedicado al método axiomático que Hilbert adopta en su obra, que responde en general a las características de abstracción del formalismo moderno, pero en el que emplea unos axiomas cercanos en espíritu a los de Euclides y un estilo sencillo y moderado. Aunque otros matemáticos se esforzaron en establecer unos fundamentos rigurosos para la geometría euclidiana, el tratamiento que lleva a cabo Hilbert en 1899 destaca por su particular elección de axiomas que conduce a un desarrollo elegante de la geometría, similar a la presentación euclidiana, y por su original estudio de los problemas de consistencia e independencia de dichos axiomas.

Finalmente, el último capítulo lo dedico a comentar las consecuencias que tuvo la obra de Hilbert tanto en su época como en las posteriores.

Capítulo 1

Contextualización

1.1. Sobre la vida de David Hilbert

David Hilbert, una de las figuras que más influencia ejerció en las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del XX, nace el 23 de enero de 1862 en Wehlau, un pequeño pueblo cercano a la ciudad de Königsberg, en la Prusia Oriental, famosa por albergar una importante escuela de matemáticos y físicos, por ser el hogar de Kant y por ser la protagonista del problema de los puentes de Leonhard Euler. Muere el 14 de febrero de 1943 en Göttingen, en un momento en el que la ciencia en general, y la Universidad de esta ciudad en particular, sufrían las consecuencias del dominio nazi.

Hilbert nace en el seno de una familia de la alta burguesía. Hasta los ocho años es su madre quien se encarga de su educación en casa. En 1872, ingresa en el Friedrichskolleg Gymnasium[1] (Collegium fridericianum), un instituto de secundaria bastante rígido y tradicional en el que aún no muestra sus grandes cualidades. Más tarde, en septiembre de 1879, se traslada al Wilhelm Gymnasium y, como se afirma en [6], comienza a destacar y a mostrar un mayor interés por las matemáticas.

En 1880, ingresa en la Universidad de Königsberg, en la que se encuentra Lindemann como profesor, conocido por llevar a cabo la demostración de la trascendencia del número π dos

[1] La estructura del sistema educativo alemán difiere en gran medida del español, tal y como se describe en [21] “después de la escuela primaria (*Grundschule*), desde los 6 a los 10 años de edad, los alumnos alemanes, en base a su rendimiento en esos 4 años, se reparten en tres tipos de instituto de educación secundaria para continuar sus estudios: el *Gymnasium*, de 8 años de duración, cuyo correlato español sería el instituto de bachillerato, donde se prepara a los alumnos para el examen final de acceso a la universidad; la *Hauptschule*, escuela en la que con 5 ó 6 años de duración se alcanza el nivel más básico de estudios, y, en tercer lugar, la “Realschule”, de 6 años de duración y con un nivel algo más elevado que la escuela anterior.”

años más tarde[2]. Durante su estancia en la Universidad, se va un semestre a Heidelberg para asistir a un curso de ecuaciones diferenciales y al regresar conoce a los que serían sus dos grandes amigos: Hermann Minkowski y Adolf Hurwitz. Los tres se hacen inseparables colaborando en una gran cantidad de proyectos y ejerciendo influencias entre sí en sus respectivas carreras. A finales de 1884, una vez finalizados los ocho semestres de universidad, sostiene su tesis doctoral[3] sobre invariantes. Este tema se lo propone su asesor de tesis, Lindemann, y lo expone de forma brillante impresionando a sus contemporáneos. Tras doctorarse, siguiendo el consejo de Hurwitz viaja a Leipzig, donde recibe clases de Felix Klein y más tarde lo hace a París junto con Study, donde conocen a Henri Poincaré. Cuando regresa a la Universidad de Königsberg en 1886, obtiene la tesis de habilitación para comenzar a trabajar como *Privatdozent*[4] (profesor de clases libres), centrándose principalmente en el tema de los invariantes: un tema que llevaba más de cien años sin responder a la pregunta de si existía alguna familia finita de invariantes de forma que todos los demás pudieran deducirse a partir de ellos de un modo razonable. Existía una gran cantidad de trabajos dedicados a este tema, con complicados cálculos de los que apenas podía extraerse alguna idea general. En 1868, Paul Gordan (1837-1912), conocido en esa época como el "rey de la teoría de invariantes", había hecho una demostración muy complicada y de muchas páginas de una familia finita de invariantes para las formas binarias de cualquier grado. Como se cuenta en [3], se dedica a estudiar el problema y, en 1888, impacta al mundo matemático[5] con su trabajo sobre este tema en el que, en unas pocas páginas y sin apenas cálculos, establecía unos teoremas y sentaba las bases de una nueva rama del álgebra: la *teoría de los ideales de polinomios*. Hilbert, al contrario que Gordan, utiliza una demostración no constructiva, establece una estructura general de forma que al aplicarla a un problema particular de los invariantes los resultados son implacables. Gordan, al leer su trabajo, no lo entiende debido al método usado y, aunque en un principio lo critica, al final admite su publicación en *Mathematische Annalen*, que tendrá lugar en 1888. Según [6], Hilbert

[2]F. Lindemann, *Über die Zahl π*, Mathematische Annalen, vol. 20 (1882), pp. 213-225.

[3]*Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* (*Sobre las propiedades invariantes de formas binarias especiales, en particular las funciones circulares.*)

[4]Como se puede ver en [3]: "El título de doctor en Alemania era solo el comienzo de una carrera académica, y ni siquiera facultaba al poseedor a dar clases. Para ello, debía realizar una segunda Tesis o *Habilitation*, que le facultaba para obtener la *venia legendi* de la Universidad y el título de *Privatdozent*, que otorgaba el privilegio de poder dar clases sin sueldo fijo de la Institución, sino el procedente de las matrículas de los alumnos que escogieran sus cursos. Si se progresaba suficientemente en las tareas de investigación, podría alcanzar el título de Profesor *Extraordinarius*, que ya recibía un salario fijo. Y luego estaban las Cátedras (Profesor *Ordinarius*), pero esas eran muy escasas (en la mayoría de las universidades alemanas había sólo dos cátedras de matemáticas; en Königsberg, sólo una) y difíciles de alcanzar."

[5]Como se cita en [17, vol. 10, pág. 6191], Paul Gordan llega a exclamar sobre este trabajo "Ya no se trata de matemáticas, es teología."

amplía sus métodos en un artículo posterior también enviado a *Mathematische Annalen* y a Klein, quien, tras leer el documento, le escribe a Hilbert: "No tengo dudas de que este es el trabajo más importante en álgebra general que el *Annalen* ha publicado nunca." En efecto, su manuscrito le convertía en una referencia mundial y en uno de los pilares del álgebra moderna.

En 1892, Hilbert comienza a trabajar como *Extraordinarius* en sustitución de Hurwitz y, en 1893, de acuerdo con [25], como *Ordinarius* en sustitución de Lindemann, aunque solo lo hace hasta que, dos años más tarde, por intervención de Klein, es solicitado por la Universidad de Göttingen en la que permanecerá el resto de su carrera académica. Es en esta Universidad donde comienza sus investigaciones sobre la *teoría de los cuerpos de números algebraicos* fundada por Friedrich Gauss y estudiada por Dirichlet, Kummer, Kronecker y Dedekind. En dicha teoría, aún quedaban muchos puntos por aclarar y Hilbert es quien ordena todos los resultados anteriores y publica su gran obra *Der Zahlbericht* sobre la teoría algebraica de números que servirá de base para la futura *teoría de cuerpos*.

Hasta 1898, Hilbert continúa estudiando los números algebraicos e impartiendo clases de geometría[6] y, en este año, es cuando sorprende a sus alumnos al introducir un nuevo tema de estudio en sus clases de universidad: la geometría euclidiana. Un año más tarde, estrenará su obra *Grundlagen der Geometrie*, que conocemos como *Fundamentos de la geometría*, una exposición axiomática formal para probar los teoremas de esta geometría clásica, en la que la independencia y no contradicción de los axiomas quedará sólidamente establecida. La nueva obra supone una actualización de los *Elementos* de Euclides y constituye una de las obras más revolucionarias del siglo XX en el campo de las matemáticas. Con ella, Hilbert consigue darle a la geometría el rigor lógico, axiomático y formal que la aritmética y el análisis matemático tenían ya en esa época. Hilbert no define conceptos primitivos como *punto*, *recta*, *plano*... Utiliza axiomas para manejar estos *entes* y determinar sus relaciones sin importar como los llamemos, y a cada cuerpo matemático que satisface tales axiomas lo denomina modelo geométrico. Además, Hilbert introduce una visión novedosa de los axiomas al demostrar su consistencia e independencia.

Con los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se convierte en el máximo representante de la escuela axiomática y, tal y como afirma Ferreirós en [10], "la obra serviría de modelo esencial en la investigación de fundamentos y la práctica axiomática en las décadas siguientes", a pesar del rechazo por parte de la escuela de los intuicionistas.

[6]El contenido de estas clases queda registrado como notas para cursos sobre geometría en las universidades de Königsberg y Göttingen. Según Giovannini en [11], en una primera etapa estas notas eran escritas por el propio Hilbert pero, en una segunda, designaba al comienzo de cada clase a un alumno que se encargaría de su redacción (*Ausarbeitung*). Entre estos alumnos se encontraban Max Born, Ernst Zermelo, Paul Bernays y Hermann Weyl.

En 1900, Hilbert, ya consagrado como un gran matemático, es invitado al Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París, en el que da una conferencia. En el congreso anterior, en 1897, la conferencia de Poincaré había tratado de la relación entre la física y el análisis. Hilbert, en cambio, prefiere centrarse en las matemáticas y expone una lista de 23 problemas[7] fundamentales abiertos de naturaleza muy diversa que tocan todos los ámbitos de las matemáticas de la época. Su propósito era que al intentar resolverlos correctamente se promoviera el trabajo y la investigación matemática. Hilbert pensaba que estos 23 problemas marcarían la evolución de las matemáticas a lo largo del siglo XX. En este congreso, Hilbert, junto a la exposición de sus problemas, expresa su firme creencia en que todo problema matemático tiene solución, recogido en [30, p. XVII]:

> Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos siempre resonar en nosotros el siguiente llamamiento: *Este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemáticas no existe Ignorabimus.*

Estos problemas, de hecho, han estimulado la investigación matemática, aunque no todos han sido resueltos.
En 1902, le ofrecen la cátedra vacante en la Universidad de Berlín tras el fallecimiento de Fuchs. Este hecho no agrada a compañeros y estudiantes de la Universidad que le piden que no se vaya. Hilbert ve en esto una ocasión para conseguir una cátedra para su amigo Minkowski a quien deseaba tener cerca, como se cuenta en [3, pp. 18-19].
Entre 1904 y 1912, centra su estudio en los grandes problemas del análisis y establece la solución general al *Problema de Waring.* También estudia el cálculo de variaciones abriendo una vía nueva: el método directo, con el que demuestra el *Principio de Dirichlet.* Hilbert prueba que el principio de Dirichlet es válido en un trabajo de apenas cinco páginas utilizando ciertas hipótesis sobre la curva frontera. Además de esto, Hilbert también se ocupa del estudio de las ecuaciones integrales introduciendo un espacio vectorial de dimensión infinita, conocido como *espacio de Hilbert*, muy útil para generalizar y clarificar el concepto de series de Fourier, así como para ampliar el campo del álgebra y cálculo de vectores.
A partir de 1912, el trabajo de Hilbert da un nuevo giro y comienza a interesarse por los problemas de la física teórica tan en boga en aquellos años, relacionados con la *física cuántica* y la *mecánica relativística.* Lo que Hilbert se propone al estudiar la física es encontrar sus principios básicos y realizar una presentación axiomática de la misma. Como nos recuerda Bombal (2013): "el problema número seis de su famosa lista de París planteaba la cuestión de la axiomatización de las teorías físicas (...) Este interés de Hilbert por la física

[7] De [3], de los 23 problemas, expone solo 10 de manera oral por falta de tiempo e incluye el resto en el texto completo que más tarde publicaría, *Mathematische Probleme.*

es absolutamente coherente con su trayectoria científica".

En 1915, asiste a un seminario de Einstein y, después de haber trabajado en competencia amistosa con él, publica dos artículos[8] en la Sociedad Científica de Göttingen sobre los fundamentos de la física, en los que establece las ecuaciones del campo gravitatorio, con lo que dotaba de formulación matemática a las grandes ideas de aquel científico. Algo que para él era una aportación más en su línea de trabajo, para Einstein era muy esencial.

En la década de 1920, Hilbert se vuelve a centrar en las matemáticas. La crisis de fundamentos surgida a principios del siglo XX hacía pensar que las matemáticas no eran infalibles, ya que habían surgido paradojas e inconsistencias. Hilbert intenta buscar una solución a este problema y para ello lleva a cabo su conocido *programa* con el que fundará el formalismo matemático. Con su programa, Hilbert se propone, apoyándose en las teorías existentes, establecer los fundamentos de la matemática clásica igual que lo había hecho con la geometría. Lo que pretendía era la formalización de toda ella en forma axiomática y demostrar la validez de dicha axiomatización utilizando el llamado razonamiento finitista. Aunque este programa progresará durante la década de los veinte con contribuciones de figuras como John von Neumann, Herbrand o Bernays, en 1931 Gödel con sus teoremas de incompletitud[9] probará que nunca podrá ser realizado en su totalidad. Dichos teoremas demostraban que aunque hay afirmaciones matemáticas que pueden ser verdaderas nunca podrán ser probadas, algo contrario al pensamiento de Hilbert.

En 1930, Hilbert se retira de la investigación y de la enseñanza y la ciudad de Königsberg le concede el título de ciudadano honorario. Su actividad se centra entonces en continuar como coeditor del periódico *Mathematische Annalen*, hasta 1939. En 1939, comparte el premio Mittag-Leffler otorgado por la Real Academia Sueca, con Émile Picard. Hilbert pasa los últimos años de su vida en la Alemania nazi, sufriendo la tragedia que este régimen supuso tanto para muchos de sus compañeros y antiguos alumnos como para la Universidad de Göttingen, en la que había enseñado durante tantos años.

Hilbert fue una persona llena de entusiasmo por la vida y por la ciencia, con una original forma tanto de aprender e investigar, como de enseñar. Según se afirma en [4], tenía en su cabeza prácticamente todo el conocimiento de la época y siempre confió en el poder de las matemáticas. Para Hilbert no existía el no conocer, como expresó con su famosa frase que hoy constituye su epitafio: "Wir müssen wissen, wir werden wissen", esto es, "Debemos saber, sabremos".

---

[8]El primero de ellos bajo el título de *Die Grundlagen der Physik* (Erste Mitteilung) y la segunda parte publicada poco después *Die Grundlagen der Physik* (Zweite Mitteilung).

[9]Gödel exponía sus resultados en el famoso artículo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados*).

1.2. La geometría hasta los *Grundlagen*

Aunque no todos los historiadores coinciden en dónde y cuándo se inicia la geometría, una de las conclusiones más extendidas es que esta disciplina surgió en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India hace más de 4000 años.
En sus comienzos, la geometría tenía un carácter meramente observacional, estaba ligada a la resolución de problemas prácticos y cotidianos de todo tipo, así como para llevar a cabo grandes construcciones como templos o pirámides.
Los conocimientos de estas primeras civilizaciones quedaron plasmados en tablillas de barro en el caso de los babilonios y, en papiros, en el de los egipcios. A través de las tablillas babilónicas se ha podido saber que esta civilización tenía amplios conocimientos sobre el cálculo de áreas, perímetros y volúmenes y también sobre otras áreas de las matemáticas pero que nunca se plantearon ningún tipo de demostración matemática. Por ejemplo, en la tablilla sumeria *Plimpton 322*, datada hacia el 1800 a. C., aparece en escritura cuneiforme y sistema sexagesimal, una lista de las hoy conocidas como ternas pitagóricas y que según los investigadores Daniel Mansfield y Norman Wildberger podría tratarse de la tabla trigonométrica más antigua del mundo. Esto demostraba que los babilonios ya eran conocedores del *teorema de Pitágoras* mucho antes que los griegos[10].
Respecto a los egipcios, su geometría estaba ligada a los problemas de construcción, de contar y de medir. Se sabe que aunque no eran conocedores del caso general del *teorema de Pitágoras*, utilizaron sistemáticamente el llamado "triángulo sagrado" en sus construcciones, especialmente en pirámides y templos[11]. Se trataba de un triángulo cuyos lados estaban en la proporción 3 : 4 : 5, proporción a partir de la cual obtenían ángulos rectos mediante nudos intercalados en una cuerda. Una prueba de los conocimientos matemáticos egipcios la constituyen los papiros conocidos como Papiro Rhind y Papiro de Moscú.
El Papiro Rhind[12] muestra que los egipcios calculaban áreas de rectángulos y triángulos rectángulos. También, como cuenta Murillo en [24], este papiro presenta pruebas de que tenían conocimientos sobre el volumen de prismas y cilindros y de que estudiaron las relaciones entre los polígonos y sus lados y entre el círculo y el cuadrado.

[10]Daniel F. Mansfield, N.J. Wildberger. (2017). *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry.* Historia Mathematica, Vol. 44, 395-419.

[11]Martínez, A. (2001) El diseño de pirámides basadas en el triángulo sagrado egipcio. *Boletín de la Asociación Española de Egiptología*, Nº 11, págs. 7-20.

[12]El Papiro Rhind se encuentra en el Museo Británico de Londres y su autor fue un escriba llamado Ahmes, nombre por el cual también es conocido.

Por su parte, el Papiro de Moscú[13] consta de 25 problemas, entre los que sobresalen dos de ellos por su complejidad: el problema 14, relativo al cálculo del volumen de una pirámide truncada, y el problema 10, sobre el área de una superficie parecida a un cesto.

En Egipto, Babilonia y otros pueblos que existieron antes de la aparición de la civilización griega no aparece nada similar a lo que hoy llamamos teoría, es decir, un conjunto de enunciados coherentes y sistematizados acerca de determinadas entidades. Será a comienzos del siglo VI a. C. cuando se produzca un cambio revolucionario en la concepción de la ciencia en general, coincidiendo con la llegada al mundo griego de prácticamente la totalidad del saber de las culturas primitivas. La civilización griega ya existía siglos antes del año 600 a. C. y hacia este año no solo ocupan la península de Grecia, sino también la costa de Asia menor y varias regiones del sur de Italia. En estos lugares no existía una unidad política y sus habitantes vivían en ciudades-estado independientes. Precisamente será en Jonia, una de estas ciudades, donde surgen gracias al contacto comercial permanente con Egipto y Babilonia, las primeras manifestaciones de la ciencia griega, como afirma Martín Merino en [22]. No cabe duda de que los conocimientos matemáticos desarrollados en el mundo griego tuvieron firmes raíces en sus vecinos del Cercano Oriente. Uno de los eslabones más importantes en la transmisión de este saber primitivo a Grecia fue el mercader, filósofo y matemático Tales de Mileto (ca. 625-546 a. C.), conocido como uno de los Siete Sabios de esta civilización. Aunque no ha dejado ningún testimonio escrito conocido, es muy probable que su trabajo haya quedado registrado en los *Elementos* de Euclides; lo que si está claro es que "su figura, un tanto legendaria, simboliza la aparición de la ciencia y la filosofía modernas en el marco de esta singular cultura" (Klimovsky y Boido, 2005). Con Tales, se pasó del mero conocer práctico e inductivo a las preguntas del porqué del mismo, y de las aplicaciones utilitarias a la indagación sobre las propiedades abstractas de los objetos y a la demostración lógico-deductiva de su verdad. A Tales se le atribuye la demostración de resultados elementales[14] de la geometría que más tarde se reelaborarán de manera sistemática; por citar algunos, demostró que el diámetro dividía al círculo en dos partes iguales y que el ángulo inscrito en una semicircunferencia era recto.

Después de Tales, otros filósofos y matemáticos hicieron sus aportaciones a la geometría. Sin embargo, una de las pocas obras completas conservadas hasta la publicación de los *Elementos* de Euclides fue *La esfera en movimiento*, de Autólico de Pitane (ca. 360-290 a. C.). El conocimiento sobre estos autores y sobre su contribución solo ha sido posible a través de obras posteriores en las que aparecían datos, a veces confusos, sobre los mismos. Pitágoras de Samos (ca. 582-500 a. C.) fue una de las principales figuras de este grupo,

[13] El Papiro de Moscú se encuentra en el Museo Pushkin de Moscú, fue escrito en hierático hacia el año 1890 a. C. por un escriba desconocido.

[14] Una lista más amplia de los problemas que resuelve Tales de Mileto viene detallada en [5, p. 8].

aunque más bien se debería hablar de la Escuela Pitagórica, ya que no se sabe a ciencia cierta si las aportaciones que se le atribuyen fueron todas de su autoría o de sus discípulos. Como viene recogido en [12], Proclo cuenta que lo más destacable de esta escuela era que le había dado a la geometría un carácter esencialmente teórico, abstracto e intelectual, superando el empirismo de las anteriores culturas. La demostración se convierte en una parte fundamental de sus estudios, y se les considera los primeros en utilizar la deducción lógica en la matemática. En particular, este tipo de demostración será la que permita el descubrimiento en esta escuela de los inconmensurables, al estudiar la relación entre un lado y la diagonal de un cuadrado o un pentágono. Los pitagóricos, además de su famoso teorema, introdujeron nociones de álgebra geométrica y muchas fuentes les atribuyen la construcción del tetraedro, el cubo y el dodecaedro.

Después de Pitágoras, y hasta los *Elementos* de Euclides, continúan las contribuciones a la geometría con nombres como el de Parménides de Elea, el primero en considerar la esfericidad de la Tierra; Zenón, con su método de reducción al absurdo; Hipias de Élide, el primero en diseñar las curvas trisectrices y cuadratrices; Hipócrates de Quíos, autor de unos *Elementos* de geometría siglo y medio antes que Euclides; o Demócrito, que consiguió descomponer un prisma recto de base triangular en tres pirámides de volumen equivalente.

El mayor impulso de la geometría, no obstante, tendrá lugar a partir de la creación de la Academia platónica en Atenas, alrededor del año 387 a. C., en la que Platón le concede a esta disciplina un lugar primordial[15]. Platón, a pesar de que su principal ocupación fue la filosofía, mostró siempre un interés especial en el estudio e investigación de la matemática, en particular de la geometría, y su influencia fue enorme en el desarrollo de toda la matemática posterior. Según Proclo, Platón y los matemáticos de su Academia fueron los primeros en sistematizar las reglas de la deducción rigurosa y en llevar a cabo una ordenación lógica de los teoremas, iniciando con ello un proceso de estructuración deductiva que culmina poco después con la obra de Euclides.

De acuerdo con lo que escribe Proclo en su *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides* y como viene recogido en [13], la enorme labor de los platónicos fue incesante y no tuvo precedentes: "Ampliaron de forma considerable el acervo matemático, clarificaron algunas definiciones, reorganizaron las hipótesis de partida, rehicieron muchas demostraciones, generalizaron numerosos teoremas, resolvieron una gran cantidad de problemas pendientes." Así mismo, trabajaron en la resolución con regla y compás de los tres grandes problemas de la antigüedad. Cabe mencionar el nombre de dos figuras fundamentales como son Teeteto (ca. 415-369 a. C.) y Eudoxo (ca. 408-355 a. C.), a quienes se les debe gran

[15] En el frontispicio de su Academia aparecía la frase "$A\Gamma E\Omega METPHTO\Sigma MH\Delta EI\Sigma EI\Sigma IT\Omega$" ("Aquí no entra nadie que no sepa geometría").

parte de la estructura y contenido de la obra de Euclides.
Otro de los alumnos destacados de la academia platónica, fue Aristóteles (ca. 384-322 a. C.), que fundará su academia en Atenas, el Liceo. Sin embargo, Aristóteles no es totalmente fiel a la doctrina de Platón y elabora su propio pensamiento. Una de las principales discrepancias es precisamente su concepción del conocimiento al que vincula estrechamente, al contrario que Platón, con el mundo sensible de los objetos materiales. Sin negar su carácter abstracto, las entidades matemáticas aristotélicas están ligadas a la experiencia.
Una de las mayores aportaciones de Aristóteles en la historia de la matemática fue haber teorizado las reglas deductivas con lo cual estableció "(...) las bases sobre las cuales se ordena y se erige una ciencia deductiva" (Rey Pastor y Babini, 1985).
Los griegos, y en particular Platón y sus discípulos, ya habían descubierto el valor del razonamiento deductivo en el que la verdad de las premisas aseguraba la verdad de las conclusiones, pero será Aristóteles el primero en proponerlo como la mejor forma de organización y justificación de las teorías científicas, no sin antes resolver el problema que presentaba el proceso de circularidad y el de regresión al infinito de tales premisas[16]. Entre otras cosas, Aristóteles introduce en su método el concepto de enunciado *evidente*, hoy denominado axioma, que por su naturaleza no necesitaba demostración y que servía como punto de partida para realizar los razonamientos lógicos, asegurando la veracidad de las conclusiones y el uso correcto de las premisas.
Este modelo de Aristóteles se lleva a la práctica por primera vez en la recopilación que Euclides de Alejandría (ca. 325-265 a. C.) hace del conocimiento geométrico existente hasta su época en su obra *Elementos*. Esta obra se convertirá en el texto sobre geometría aceptado y estudiado como verdad única y universal durante más de 2000 años.
Euclides, conocido como "el padre de la geometría", construye siguiendo las directrices del modelo aristotélico un extenso tratado compuesto por trece libros en los que, con alguna aportación original, los conocimientos de sus predecesores y el uso de las reglas lógicas, lleva a cabo una impresionante obra de organización y sistematización que será el modelo a seguir por una gran cantidad de matemáticos y otros importantes personajes de la ciencia en general.
La obra euclidiana destaca especialmente por su claridad y rigor en la aplicación de su método sintético deductivo, a pesar de algunos fallos descubiertos posteriormente en los enunciados debidos al cambio de paradigma en el rigor que supuso el paso del tiempo. Así mismo, es indudable el valor de la habilidad con la que, a partir de unas pocas definiciones, axiomas, postulados y un razonamiento lógico va demostrando los teoremas, que a su vez

[16]Su obra *Órganon* constituye el primer tratado sistemático de las leyes del razonamiento deductivo en su intento de establecer la lógica como ciencia.

le sirven para demostrar otros teoremas. Albert Einstein alababa así esta habilidad: "Es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento" (P. A. Schilpp. Sketch autobiográfico sobre A. Einstein. Philosopher-Scientist, 1951).

Pero no fue Einstein el único en darse cuenta de la magnitud del talento de Euclides, otros muchos lo hicieron, incluyendo a aquellos que descubrieron algunos errores lógicos y lagunas en su contenido. La intención de estos no fue nunca menoscabar el gran mérito de la obra ni del personaje sino adaptarlos a las exigencias que los nuevos tiempos imponían.

La revisión de los *Elementos* y el empeño por hacer de ellos una obra perfecta y completa dio realmente su fruto, pues no solo dio lugar a nuevas geometrías a manos de figuras como Lobachevski, Bolyai o Riemann, sino también a una nueva renovación e interpretación del sistema axiomático, cuyo principal protagonista, el alemán David Hilbert, mostraba al mundo en su brillante obra *Fundamentos de la geometría.*

Después de Euclides, sigue en vigencia su método, aunque algunos matemáticos como Arquímedes y Apolonio introdujeron otros nuevos. Arquímedes de Samos (ca. 287-212 a. C.) en su trabajo le da una gran importancia al cálculo y a la medida[17]. Su método fue fundamentalmente geométrico, y la reducción al absurdo y el método exhaustivo aparecen constantemente en sus obras. Entre sus estas destacan *De la esfera y el cilindro*, en la que realiza un estudio de los mismos; *Sobre la medida del círculo*, donde presenta una cuadratura del círculo mediante su método de exhaución y aproxima el número π dando una cota inferior 223/71 y superior de 22/7; o *De las espirales*, donde analiza curvas y sus elementos más representativos e inventa su famosa espiral en su intento de trisecar el ángulo y cuadrar el círculo[18]. Por su parte, Apolonio de Perga (ca. 262-190 a. C.) realizó importantes trabajos sobre secciones cónicas y curvas planas, así como sobre las cuadraturas de sus áreas y dio forma a términos como elipse, parábola e hipérbola en su obra *Secciones cónicas.*

El peso de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio en la geometría fue tan grande que durante el Imperio romano y el Medievo no se producen avances significativos en esta disciplina hasta que se tiene lugar un hecho que cambiará el rumbo de la matemática: la publicación, en 1637, del *Discurso del método*, en el que René Descartes (1596-1650) formaliza lo que hoy llamamos método científico. En él, Descartes establece una conexión entre esta y el álgebra mediante la utilización de los métodos de una disciplina en la otra. De esta forma, Descartes conseguía, por un lado, la representación de las figuras geométricas mediante expresiones algebraicas y, por otro, la resolución de forma sencilla y general de problemas algebraicos complicados valiéndose de coordenadas que asociaban puntos del

[17] *Arquímedes y la Medida del Círculo.* Recuperado de (https://fundacionorotava.org/).

[18] *Arquímedes.* Recuperado de (http://enebro.pntic.mec.es/).

plano y del espacio con pares y ternas de números, respectivamente.

El nuevo método atribuido a Descartes, pero ya utilizado anteriormente por Fermat (1601-1665) y subyacente en la reproducción de los *Elementos* de Regiomontano (1450), daba lugar a la geometría analítica. Esta nueva geometría comenzó a despertar un gran interés en el mundo matemático y llegó a imponerse durante más de 150 años, consiguiendo numerosos e importantes resultados y una basta producción matemática. Cabe destacar aportaciones como las de Jacob Bernoulli en su estudio de la espiral logarítmica, Maclaurin con sus resultados sobre cúbicas, cónicas y curvas algebraicas y Euler con las ecuaciones generales del cilindro, del cono y de las superficies de revolución. En 1768, Monge presenta el resultado de sus investigaciones sobre las ecuaciones del cono de revolución utilizando fórmulas de la trigonometría esférica, y posteriormente encuentra la ecuación del plano normal a una curva en un punto dado. En el tratamiento de estos dos problemas, Monge tuvo que enfrentarse a dos cuestiones relacionadas con planos y rectas que no habían sido estudiadas hasta el momento y que hoy día forman parte de la geometría analítica. Como expresa Joaquim Berenguer (2016) en [2], Monge se dio cuenta de que, para resolver problemas más complejos, era necesario primero dar solución a dichas cuestiones. En su libro *Feuilles d'analyse appliquée á la géométrie* publicado en 1795 trata de forma sistemática los problemas de planos y rectas. La obra constituye un compendio del trabajo de Monge sobre geometría analítica y diferencial. En 1827, Möbius introduce las coordenadas baricéntricas, precursoras de las coordenadas homogéneas y Plücker, poco después publica un tratado sobre geometría analítica bajo el nombre de *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (*El desarrollo de la geometría analítica*), en el que, como afirman Rey Pastor y Babini (1985) en [27], se consolida el concepto de coordenada homogénea. El matemático inglés Arthur Cayley será otra de las figuras claves en el desarrollo de la geometría analítica con contribuciones como la geometría de n dimensiones, el desarrollo de la *teoría de invariantes* y sus teorías sobre curvas y superficies y sobre funciones elípticas.

Sin embargo, la geometría analítica no fue la única geometría que se gestó en el siglo XVII. El interés que había surgido en el siglo XV por el misticismo griego y la divina proporción había vinculado estrechamente la geometría y el arte al convertirse la proyección, la proporción, la perspectiva y el punto de fuga en los principales protagonistas de este último. Siguiendo esta tendencia, el matemático francés Girard Desargues (1591-1661) centró sus investigaciones en el estudio de las propiedades que se conservan en la proyección de las figuras. Su teorema sobre los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos triángulos en perspectiva, junto con el dado por Blaise Pascal (1623-1662) sobre los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica, constituyeron una gran aportación a la geometría proyectiva. No obstante, sus métodos y descubrimientos no lograron captar la atención de los matemáticos de la época debido a una terminología que resultaba extraña y al éxito que estaba teniendo la geometría analítica. Por este motivo, la geometría de la proyección se mantuvo en la sombra mientras la analítica acumulaba importantes resultados. Solo será a finales del siglo XVIII cuando muchos matemáticos comiencen a cuestionarse las técnicas analíticas, al pensar que sus resultados ocultaban el significado geométrico. Michel Chasles (1793-1880), partidario del método sintético o puro en la geometría que defendía el estudio de las figuras geométricas sin recurrir a las fórmulas, expresaba el problema de esta manera: "¿Es entonces suficiente en un estudio filosófico y básico de una ciencia saber si algo es verdadero si uno no sabe por qué es así y qué lugar debería ocupar en la serie de verdades a las que pertenece?"[19]

Esta desconfianza hacia el método analítico hace resurgir de nuevo el interés por la geometría de Pascal y Desargues, sobre la que ya existían algunos teoremas en los trabajos de Euclides, Apolonio y Pappus, aunque por supuesto no reconocidos como tales en su época. Uno de los principales protagonistas en la recuperación de la geometría proyectiva fue Gaspard Monge (1746-1818), creador de la geometría descriptiva. En su obra *Traité de géometrie descriptive* (1799) establece las propiedades de los objetos tridimensionales a partir del estudio de las de sus proyecciones en el plano utilizando exclusivamente el método geométrico puro. La influencia de esta obra fue decisiva en el desarrollo de esta disciplina. Numerosos matemáticos se implicaron en el estudio de esta, en particular algunos de sus alumnos de la Escuela Politécnica de París. Entre estos, cabe mencionar a Lazare Carnot (1753-1823), a Charles Brianchon (1785-1823) y Victor Poncelet (1788-1867). La obra de este último fue fundamental para el futuro desarrollo de la geometría proyectiva. En ella, al igual que Monge, utiliza técnicas puramente geométricas y expone de forma sistemática el contenido de esta disciplina. En ella menciona conceptos tan importantes como los de homografía, homología, puntos, rectas y planos del infinito, polo y polar o el principio de dualidad.

Otros matemáticos seguirán los pasos de Poncelet. En Francia, Chasles escribía su *Traité de géométrie supérieure* (1851). En Alemania, Karl von Staudt (1798-1867) exponía la geometría proyectiva prescindiendo de toda consideración métrica en su obra *Geometrie der Lage* (1847). Este autor le daba un gran impulso a la geometría proyectiva al convertirla en una disciplina autónoma sin usar la métrica. La forma en que consigue esto es, principalmente, mediante la sustitución de la noción de razón doble por la de cuaterna armónica[20], concepto que podía definirse utilizando solo técnicas proyectivas puras. A su

[19] Citado en (Giovannini 2015, volumen 8, p. 32).

[20] "La definición de von Staudt de la cuaterna armónica se basa en la construcción del cuadrilátero completo, que permite construir, dados tres puntos sobre una línea, el cuatro armónico sólo mediante uniones de puntos e intersecciones de rectas." (Giovannini 2015, volumen 8, p. 39)

vez, von Staudt servirá de modelo a Theodor Reye (1838-1919) en su obra *Die Geometrie der Lage* (*Geometría de posición*) (1876), utilizada a su vez por David Hilbert en la elaboración de su curso sobre geometría proyectiva. Precisamente, uno de los objetivos de este matemático era lograr en el tratamiento axiomático de los fundamentos de la geometría euclidiana el mismo éxito que von Staudt había conseguido en su tratamiento de la geometría de la proyección. También en Alemania, Jakob Steiner (1796-1863), en la misma línea que von Staudt, mostraba en su trabajo *Systematische Entwickelungen* (*Desarrollo sistemático*) (1832) un método de exposición sin recurrir a figuras geométricas o diagramas para exponer los diferentes conceptos y propiedades proyectivas.

Pero no solo son estas dos geometrías el centro del pensamiento matemático a partir del resurgimiento de la geometría en el Renacimiento. Los tres problemas clásicos de la regla y el compás pendientes de resolver[21] y las dudas generadas ya desde antiguo acerca de la autenticidad del quinto postulado de Euclides continuaban vigentes en esta época y compartieron protagonismo con las otras dos geometrías.

Además, comienza a surgir una preocupación por la fundamentación lógica de la ciencia en general, y de las matemáticas en particular. Serán precisamente estos factores los que contribuyan a la aparición de nuevos tipos de geometrías y de una nueva forma de entender las matemáticas, como sucederá a partir del siglo XIX con el surgimiento de las geometrías no euclidianas y el método axiomático formal.

Uno de los problemas que causó mayores quebraderos de cabeza a los geómetras de la época fue el quinto postulado de la obra euclidiana. Su mayor extensión y complejidad respecto a los demás y su aparente carencia de evidencia parecían asemejarle más a un teorema que a un verdadero postulado. El propio Euclides debía de haber sido consciente de la dificultad de su asunción en tanto que solo había recurrido directamente a él en la demostración de la *Proposición 29* de su *Libro I* y no la había utilizado en proposiciones anteriores, cuya demostración habría resultado mucho más sencilla con su uso. Las dudas sobre el verdadero carácter del postulado no tardarían en aparecer entre los mismos griegos y los intentos fallidos por descubrirlo se sucederán hasta que en el siglo XIX se resuelva el denominado por d'Alembert "escándalo de la geometría".

El filósofo griego Posidonio (ca. 135-51 a. C.) había sido uno de los primeros en intentar demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro; su fallo, sin embargo, estaría en que lo había reemplazado por otro equivalente: "Dos rectas paralelas son equidistantes", con lo que lo único que conseguía era demostrar uno a partir del otro.

Una demostración parecida la llevó a cabo el comentarista y filósofo Proclo, añadiendo en

[21] Estos problemas fueron la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, y debían ser resueltos solo mediante una regla sin marcar y un compás.

su caso una nueva suposición a los cuatro postulados euclidianos: "Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra". El resultado tampoco parecía convincente, ya que la nueva suposición, como en el caso de Posidonio, también resultaba equivalente al quinto postulado.

Entre los árabes también hubo alguna tentativa en la misma dirección que los anteriores y que daban como resultado círculos viciosos que no aclaraban nada sobre la verdadera naturaleza del postulado de las paralelas.

Durante el Renacimiento continúan los intentos por demostrar el postulado utilizando nuevas reformulaciones. El gran error que se cometía era no darse cuenta de que se estaba consiguiendo demostrar que el quinto postulado era teorema pero a costa de utilizar, junto a los otros cuatro axiomas, un enunciado equivalente al mismo. Algunas de las versiones equivalentes más conocidas son la de Christopher Clavius: "Si tres puntos están del mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos están alineados", la de John Wallis: "Existen triángulos semejantes no iguales" o la de John Playfair: "Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una paralela a la recta dada". Este último, tiene una especial importancia por su gran uso posterior y de él el quinto postulado tomará el nombre de *postulado de las paralelas*.

Sin embargo, todas las tentativas seguían siendo infructuosas y surgía un gran desaliento en el ámbito de las matemáticas y una sospecha de la indemostrabilidad del postulado.

En 1733, no obstante, la publicación de la obra *Euclides ab omni naevo vindicatus*[22] del italiano G. Saccheri el año de su muerte supondrá un cambio significativo en esta situación. En su publicación, Saccheri introducía una novedad al utilizar el método indirecto de demostración en sus investigaciones sobre el postulado. Pensaba que partiendo de su negación se podía llegar a absurdos o contradicciones que pudieran justificar su veracidad. Realmente, esto era lo que se proponía, ya que quería validar la geometría euclidiana de tanto peso en sus convicciones y en la geometría de la época.

Saccheri comienza su investigación, por tanto, tomando los cuatro primeros postulados y negando el quinto, lo cual suponía afirmar que por un punto exterior a una recta o no pasaba ninguna recta paralela o pasaba más de una. En esta demostración, utiliza el conocido como *cuadrilátero de Saccheri*.[23]

Saccheri inicia su procedimiento examinando y comparando los ángulos del cuadrilátero, los de la base eran rectos por construcción y los superiores demostraba que eran iguales

[22]Este título se suele traducir como *Euclides libre de toda mancha* haciendo referencia al deseo de Saccheri de "liberar" a la obra euclidiana de todo defecto (Klimovsky y Boido, 2005).

[23]Aunque se le atribuye a Saccheri, ya había sido utilizado anteriormente para la demostración del postulado por matemáticos árabes como Omar Jayam en el siglo XI y Nasir al-Din al-Tusi dos siglos más tarde (Klimovsky y Boido, 2005).

con sencillos teoremas de congruencia que no tenían nada que ver con el quinto postulado. Se plantea, entonces, tres hipótesis sobre estos ángulos: o los dos eran rectos, o los dos eran obtusos o los dos eran agudos, y comienza su demostración esperando encontrar contradicciones que refutaran las dos últimas posibilidades. Acerca de la demostración de la hipótesis de los ángulos rectos, piensa que si recurre al postulado de las paralelas es muy fácil demostrarla pero que si no lo utiliza, tal demostración resulta imposible, lo cual dejaba abierta la posibilidad de que pudieran ser agudos u obtusos. Ante la imposibilidad de utilizar el postulado de las paralelas por haber partido de su negación, Saccheri comienza a trabajar con las otras dos hipótesis buscando contradicciones que las refutaran. El caso de los ángulos obtusos lo descarta enseguida, al llegar a una contradicción ya que esta hipótesis negaba el segundo postulado de Euclides: "Todo segmento de recta se puede prolongar indefinidamente en ambas direcciones". Para su sorpresa, en el caso de los ángulos agudos, Saccheri no consiguió encontrar ninguna contradicción. Surgían resultados extraños que parecían y antinaturales, pero no contradictorios desde el punto de vista lógico. Saccheri estaba seguro de que tales contradicciones tenían que existir y que no las encontraba debido a su incapacidad como matemático, llegando incluso a inventar una especie de contradicción falsa para quedarse tranquilo y no contradecir el paradigma clásico.

Su postura respecto a Euclides queda clara al escribir en su obra que la hipótesis del ángulo agudo no podía ser verdadera ya que, de serlo, las consecuencias "repugnarían a la naturaleza de la línea recta". Realmente, su excesiva veneración a Euclides y a su obra le impedían ver que lo antinatural no tenía porqué ser antilógico.

Saccheri no creyó, o mejor dicho, no quiso creer que estaba en el camino correcto y que la ausencia de contradicciones en la hipótesis del ángulo agudo podría estar sugiriendo algo nuevo y desconocido hasta aquel momento. Sin embargo, el mérito de sus investigaciones es innegable, no solo por haberse atrevido a una demostración en un sentido no euclidiano, sino también por la gran cantidad de proposiciones que dejó demostradas en la búsqueda de absurdos. Precisamente, estas proposiciones, en su mayoría muy complicadas de demostrar, forman parte hoy en día de la geometría hiperbólica. Seguramente, la aparición de esta geometría no se habría retrasado un siglo si su actitud hubiera sido diferente.

Después de Saccheri, algunos matemáticos conocedores de su obra intentaron de nuevo esclarecer la naturaleza del problemático postulado utilizando un método de razonamiento lógico muy parecido. Uno de ellos, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) muestra sus investigaciones en la obra *Theorie der Parellellinien* (1766). En ella, Lambert utiliza al igual que Saccheri un cuadrilátero, pero en su caso es trirrectángulo, y aplica las tres hipótesis al cuarto ángulo. El problema surgía de nuevo con la hipótesis del ángulo agudo. Del mismo modo que Saccheri, Lambert obtiene resultados extraños que le desconciertan.

Sin embargo, él no ofrece resistencia a sus conclusiones, simplemente muestra hasta donde pudo llegar y deja un camino abierto a otras posibilidades. Una muestra de esto es la posibilidad que plantea de que la hipótesis del ángulo agudo podría describir una geometría en una esfera de radio imaginario cuyos triángulos cumplieran que la suma de sus ángulos interiores era menor que dos rectos.

Otro matemático decidido a afrontar el problema del postulado fue Adriano Maria Legendre (1752-1833). En su caso, la demostración indirecta partió de tres hipótesis sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo e igual que los anteriores se vio incapaz de rechazar la hipótesis equivalente a la del ángulo agudo, sin poder ofrecer una solución a este problema.

Ninguno de los tres matemáticos consiguió, por tanto, encontrar contradicción alguna a la hipótesis del ángulo agudo. La razón era, como se descubrió más tarde, que estaban enfrentándose a una geometría que era tan verdadera como la euclidiana. Esta geometría podía contradecir ciertos teoremas de Euclides, pero entre sus teoremas estaba descartada cualquier contradicción.

El primer matemático que no dudó de que el quinto postulado era indemostrable fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Manuscritos encontrados tras su muerte y no publicados muestran que ya en 1792 investigaba el problema del postulado y que veinte años más tarde trabajaba con una nueva geometría, diferente de la euclidiana, pero totalmente consistente. Gauss estaba al corriente del desarrollo de las investigaciones de otros matemáticos e incluso animó a algunos a seguir adelante. Sin embargo, nunca quiso publicar sus descubrimientos por el miedo a no ser comprendido y ser considerado un excéntrico, y también por el poco interés que habían mostrado las personas con las que había hablado de sus hallazgos. Un testimonio de esto fue la respuesta a una carta de su amigo Wolfgang Bolyai (1775-1856) sobre el descubrimiento de una nueva geometría por parte de su hijo Janos Bolyai. Gauss le respondía que el ya era conocedor de la nueva geometría y que llevaba mucho tiempo dedicándose a ella. Parte de esta carta (como se cita en Klimovsky y Boido, 2005), es la siguiente:

> En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí, he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto.

En realidad, el descubrimiento que le comunicaba Wolfgang Bolyai no era nada nuevo para Gauss, como muestra otro extracto de dicha carta: “Si empiezo diciendo que no puedo elogiar este trabajo tú quedarás, ciertamente, por un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo" (Klimovsky y Boido, 2005).

El descubrimiento que Janos Bolyai había hecho de una nueva geometría se remonta diez años antes de su publicación entre 1832 y 1833 como apéndice de uno de los libros de su padre bajo el título *La ciencia absoluta del espacio*. Una prueba de esto es una carta que le envía a su padre por aquel entonces en la que le dice, como se cita en (Klimovsky y Boido, 2005): "He descubierto cosas tan hermosas que me he quedado sorprendido con ellas (...) He creado de la nada un nuevo universo".

Bolyai había estudiado las consecuencias de negar el quinto postulado suponiendo los otros cuatro y no había podido llegar en sus demostraciones, al igual que sus predecesores, a contradicción alguna.

Según afirma Montesinos en [23, p. 69], el apéndice de Bolyai constaba de 43 secciones que abarcaban 29 páginas, de las cuales 10 trataban sobre las paralelas y sus propiedades en la nueva geometría. En las restantes páginas desarrollaba conceptos importantes como horociclo y horoesfera, denominadas más tarde por consejo de Gauss como paraciclo y paraesfera, respectivamente. En la última frase de este apéndice, Bolyai planteaba el gran problema de demostrar ante el mundo matemático la consistencia de su geometría, un problema que quedará pendiente de resolver.

Lobachevski, el brillante e incansable matemático, profesor y más tarde decano y rector de la Universidad de Kazán se dedicó desde muy joven al conflicto del quinto postulado, quizás influido por su profesor Martin Bartels (1769-1836). Su propósito desde un principio es investigar el impacto que la no verificación del quinto postulado y aceptación de los otros cuatro pudiera tener en la geometría. Esto es lo que hace en *Geometriya*, completado en 1823, en el que lograba llegar a conclusiones insólitas ante las que su respuesta fue el convencimiento de que se encontraba frente a una nueva y revolucionaria geometría a la que llamó geometría imaginaria. En 1826 presenta un informe sobre esta obra ante la sesión del Departamento de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Kazán. Tal informe fue rechazado por revolucionario y atrevido. Algo parecido le sucede cuando, en 1829, publica su memoria *Sobre los fundamentos de la geometría* en la que incluye todos los resultados anteriores. Esta vez, su trabajo fue tachado de ininteligible y desordenado. Sin embargo, Lobachevski, convencido de que su geometría imaginaria era correcta, vuelve a redactar sus investigaciones una y otra vez y en varios idiomas, para hacerse comprender. En 1837 publica *Géométrie imaginaire* pero no será hasta 1840, con la publicación en francés y alemán de *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien* (*Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas*) que su obra comience a ser aceptada y reconocida, no sin antes ser leída y alabada por el "príncipe de las matemáticas", Gauss. Gracias a él, Lobachevski se convierte en un miembro de la Sociedad Científica de Göttingen y el primer matemático en conseguir que unas ideas tan rompedoras del paradigma euclidiano, tan promovido por Kant, pudieran ser igual de respetadas que los cánones de la antigüedad. A propósito de Kant, esta frase dicha por él define muy bien su apoyo incondicional a Euclides: "Dios hace geometría de acuerdo con los *Elementos* de Euclides."

Los años que siguieron al descubrimiento de las nuevas geometrías vislumbradas por Saccheri, Lambert y Legendre y desarrolladas por Gauss, Lobachevski y Bolyai, fueron muy poco conocidas debido principalmente a las teorías filosóficas dominantes en aquel momento, a la incomodidad de los matemáticos ante las nuevas y extrañas ideas, al protagonismo de la geometría proyectiva y a la poca difusión de la que fueron objeto. No obstante, la situación comenzará a cambiar debido a una conjunción de diversos factores. En primer lugar, salen a la luz los manuscritos no publicados de Gauss que demostraban que ya era conocedor de las geometrías no euclidianas; en segundo lugar, Richard Baltzer reconocía el valor de estas geometrías en su trabajo *Die Elemente der Mathematik*. Aparte de esto, un grupo de matemáticos[24] de diferentes países comienzan a interesarse por el tema y a promover su conocimiento.

Una vez reconocida la importancia de estas nuevas geometrías por la comunidad matemática, estas comienzan a ser objeto de estudio desde dos perspectivas diferentes: la métrico-diferencial y la métrico-proyectiva.

El primer intento en tratar las geometrías no euclidianas desde la geometría métrico-diferencial fue el del alemán Bernhard Riemann (1826-1866), discípulo de Gauss e inspirador de la *teoría de la relatividad* de Einstein.

A Riemann se le debe el desarrollo de una nueva geometría al reemplazar el quinto postulado euclidiano por el de "Por un punto exterior a una recta no puede trazarse ninguna paralela" que se correspondía con la hipótesis del ángulo obtuso de Lambert y Saccheri. En esta nueva geometría, que tenía como caso particular a la geometría esférica, las paralelas no eran posibles porque todas las líneas rectas se cortaban y estas líneas eran además ilimitadas pero de longitud finita. En 1854, en su tesis de habilitación[25] para la obtención del puesto de *Privatdozent* por la Universidad de Göttingen, expone conceptos esenciales de su geometría como el espacio n-dimensional, la noción de curvatura y tensor de curvatura y define lo que hoy conocemos como espacio riemanniano.

[24] En Alemania, Heinrich Richard Baltzer estudia la curvatura de las superficies; en Francia, Guillaume Jules Hoüel traduce el *Apéndice* de Bolyai; en Inglaterra, William Kingdow Clifford es uno de los iniciadores de la geometría algebraica, y en España, Zoel García de Galdeano contribuye a la divulgación de la geometría no euclidiana en la primera revista matemática española que él mismo funda en 1891, *El progreso matemático* (Rey Pastor y Babini, 1985).

[25] *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*)

Aparte de la introducción de una nueva geometría no euclidiana, denominada por Klein *geometría elíptica*, a Riemann se le debe el mérito de establecer una geometría generalizada que abarcaba todas las geometrías ya que estaba caracterizada por una métrica que podía dar origen a la geometría euclidiana, a la hiperbólica o a la creada por él mismo.
Los conceptos tratados por Riemann serán de suma importancia para definir propiedades de las tres geometrías como las diferentes curvaturas que las caracterizaban. Mientras el modelo de Bolyai-Lobachevski era el de una silla de montar en el que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era menor de 180° y la curvatura negativa, el modelo ideal de Riemann era una esfera de curvatura positiva donde la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor de 180°. En el caso de la geometría plana, euclidiana o parabólica, la curvatura era nula y los ángulos internos de un triángulo sumarían exactamente 180°.
La aportación de Riemann a las geometrías no euclidianas fue fundamental, no solo por haber introducido una nueva, sino también por haber conseguido aunar las ya existentes.
Una vez descubiertas las nuevas geometrías, aunque sus protagonistas estaban convencidos de su consistencia, necesitaban demostrarla. Con este objetivo, comenzarán a construirse modelos como el llevado a cabo por Eugenio Beltrami (1835-1900). Su trabajo se centró en el estudio de una superficie de curvatura constante negativa denominada pseudoesfera, que era generada a partir de la rotación de una curva plana llamada tractriz alrededor de su asíntota. La geometría sobre la superficie de la pseudoesfera resultaba ser un ejemplo de geometría hiperbólica, del mismo modo que la geometría plana era un ejemplo de geometría parabólica y la geometría de la esfera lo era de la geometría elíptica (Rey Pastor y Babini, 1985). Beltrami, con este modelo de la geometría hiperbólica (pseudoesfera) dentro de la euclidiana, demostraba que si la euclidiana era consistente, la hiperbólica también debería serlo.
Por otra parte, el estudio de las nuevas geometrías desde la perspectiva métrico-proyectiva fue iniciado por Cayley en 1859. Cayley demostraba que las propiedades métricas podían traducirse en propiedades proyectivas mediante el uso de cónicas y cuádricas absolutas. A partir de estas cónicas y cuádricas se podían obtener diferentes geometrías entre las que se encontraban las no euclidianas.
En 1871, Felix Klein (1849-1925) demostraba que dentro de la geometría proyectiva se podían definir las geometrías euclidiana, hiperbólica y elíptica. El año siguiente, este matemático daba su conferencia inaugural como catedrático de la Universidad de Erlangen, en la que exponía su conocido *Programa de Erlangen*[26]. En su discurso, Klein intentaba aclarar el concepto de lo que era una geometría ante la confusión surgida por la aparición

[26] Publicado bajo el título *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, en castellano: *Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas.*

de nuevos tipos de esta disciplina. Para ello, daba una definición formal de esta y muy diferente del concepto de geometría asociado al de Euclides. En su programa, Klein definía la geometría de este modo[27]: "Dado un conjunto de cualquier número de dimensiones, y un grupo de transformaciones entre sus elementos, se llama geometría al estudio de las propiedades de aquel conjunto que son invariantes respecto de las transformaciones de este grupo". En esta misma conferencia, exponía también su modelo n-dimensional para mostrar la consistencia relativa de la geometría hipérbolica, que generalizaba el de Beltrami y se basaba en la geometría proyectiva. Klein utilizaba para ello un disco abierto unidad, donde las rectas son las cuerdas de circunferencia que intersecan al disco[28]. Además, Klein caracterizaba todas las geometrías utilizando la noción de grupo, demostraba que las técnicas analíticas y sintéticas daban lugar a las mismas geometrías y las clasificaba después de demostrar que todas constituían casos particulares de la proyectiva.

Además de los modelos anteriormente mencionados, el francés Henri Poincaré (1854-1912) aportaba dos modelos de la geometría hiperbólica en dos dimensiones para los que utiliza el interior del disco unidad y el semiplano superior, respectivamente.

Una vez demostrada la consistencia relativa de esta geometría, la de Euclides se convertía en un caso particular de la geometría general y dejaba de tener la primacía que se le adjudicado hasta ese momento. Por su parte, la teoría de la relatividad de Einstein, apoyada en las nuevas geometrías, mostraba que la geometría del cosmos no tenía por qué ser euclídea. La aceptación de las extrañas geometrías rompían el vínculo del mundo real físico y la matemática y hacían surgir la idea de que las nociones y teoremas matemáticos tenían validez en sí mismos y debían estar guiados por criterios decididos por los propios matemáticos de acuerdo con el rigor lógico y conceptual[29]. Esto daba lugar a nuevas vías de investigación y a una acumulación enorme de nuevos conocimientos que presentaban problemas, especialmente en el álgebra, la aritmética y la geometría. La dificultad para resolver estos problemas originaban una crisis de desconfianza en las matemáticas que exigía una revisión de sus fundamentos y del concepto de rigor.

Surgía una nueva concepción del rigor en los métodos axiomáticos que afectaba tanto a los axiomas y a las reglas, como a los procedimientos utilizados. Además, las relaciones se imponían a los contenidos empíricos euclídeos y la verdad pasaba a ser ahora una verdad de tipo lógico, que solo consistía en la coherencia de los enunciados con el sistema en cuestión. La nueva rigurosidad relegaba a un segundo plano al intuicionismo y abría dos vías de

[27] Tal y como cita Sánchez Ron en su introducción [30] de (Hilbert 1991).

[28] Márquez, J. M. (2016). *El plano hiperbólico: historia y fundamentos (Trabajo fin de grado). Universidad de Sevilla, Sevilla, España.*

[29] Anón. s. f. *Capítulo I: Las geometría no euclidianas.* Recuperado de (http://centroedumatematica.com/cifemat/).

investigación en la búsqueda de unas bases sólidas para las matemáticas, ambas con una tendencia a la abstracción y a la generalización pero desde dos puntos de vista diferentes. Por una parte surgía la vía de la lógica matemática que buscaba una relación estrecha entre ambas disciplinas y, por otra, estaba la del formalismo que aspiraba a una matemática libre de contradicciones.

En lo referente a la primera, ya en el siglo XVII la lógica aristotélica había experimentado una gran evolución a partir de Leibniz y ahora se producirá en ella una tendencia cada vez mayor hacia el simbolismo y la formalización. En una primera etapa se intentarán solucionar algunos problemas e imprimir rigurosidad en el análisis y en el álgebra procurando un acercamiento entre lógica y matemática. Más tarde, en una segunda etapa, se buscará reducir la matemática a la lógica. Entre los matemáticos destacados en la primera, figuran, entre otros, A. Louis Cauchy (1789-1857), que fundamenta el análisis en el concepto de límite; K. Weierstrass (1815-1897), con su estudio de los irracionales, y Georg Cantor (1845-1918), quien desarrolla la *teoría de conjuntos*.

Entre los matemáticos de la segunda etapa, de carácter más logicista cabe mencionar a los británicos De Morgan (1806-1871) y George Boole (1815-1864), los cuales crean nuevas notaciones y lenguajes simbólicos. Por un lado, Boole aplica el cálculo matemático a la lógica en su obra *An investigation of the laws of thought* y, por otro, De Morgan formula las leyes que llevan su nombre y fundamenta la teoría de la matemática simbólica moderna. Con Charles Sanders Peirce, la matemática y la lógica se acercan aún más. Sin embargo, el mayor acercamiento se producirá con el filósofo y matemático alemán Gottlob Frege (1848-1925), conocido como el padre de la lógica, de la filosofía analítica y del simbolismo lógico. Frege estaba convencido de que tanto las matemáticas como el lenguaje se podían reducir a la lógica, lo que le llevará a desarrollar un programa para investigar los fundamentos lógicos en ambos ámbitos. En su obra[30] elabora el primer sistema de lógica matemática utilizando un lenguaje simbólico, indicando siempre como utilizar las diferentes variables y cuantificadores. En *Grundlagen der Arithmetik* (*Fundamentos de la aritmética*) (1884) establece los fundamentos filosóficos de las matemáticas y en *Über Sinn und Bedeutung* (*Sobre el sentido y la referencia*) (1892) hace lo mismo con los del lenguaje. Otras aportaciones en el mismo sentido las hacían el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) con su *Formulario Mathematico* y Russell y Whitehead, con su trabajo conjunto *Principia Mathematica*, una obra con la que intentan fundamentar el conocimiento matemático de su época en la lógica.

Por su parte la corriente formalista desarrollada paralelamente en la geometría, buscaba mantener la lógica aristotélica, imponer la abstracción y el rigor en el método axiomático

[30]*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (*Ideografia, un lenguaje formal del pensamiento puro a imitacion de la aritmética*) (1879)

y liberarlo tanto de lo superfluo como de los modelos físicos. Esta tendencia se imponía incluso en la geometría proyectiva, como lo mostraba la obra de von Staudt (1798-1867) *Geometrie der Lage*, en la que no se utilizaba noción métrica alguna.

El primero en elaborar un sistema axiomático formal de la geometría fue Moritz Pasch (1843-1930) en su obra *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882). Aunque la obra presentaba ciertas imperfecciones y ambigüedades, su modelo será seguido por otros importantes matemáticos como Giuseppe Peano, quien utiliza los mismos axiomas que Pasch aunque reelaborados y en un número más reducido, Giuseppe Veronese, (1854-1917) que desarrolla un sistema bastante complicado o Mario Pieri (1860-1913), quien utiliza solo los términos primitivos punto y movimiento.

El intento más importante de axiomatizar la geometría, sin embargo, será el realizado por David Hilbert en sus *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría*) (1899), una obra con la que se iniciaba una nueva forma de abordar la geometría euclidiana desde una perspectiva formal, que se extenderá posteriormente a otras ramas de la ciencia. El propósito de Hilbert era corregir algunos fallos y carencias del sistema axiomático de Euclides (especialmente, suposiciones implícitas y fallos de rigor) que ya habían sido descubiertos y dotarla de un carácter formal y abstracto haciendo un uso mínimo del simbolismo y de elementos básicos en sus demostraciones. En el sistema que utiliza Hilbert en los *Grundlangen* los axiomas dejan de ser verdades evidentes para convertirse en construcciones del pensamiento, realizadas libre y arbitrariamente y lo único que resulta lícito suponer de los elementos primitivos es lo expresado en esos axiomas, como él mismo expresa: "los elementos tales como el punto, la recta y el plano, se pueden sustituir con mesas, sillas, jarras de cerveza y otros objetos". Así mismo, hay que destacar la importancia que Hilbert le da a las relaciones. En una carta escrita a Frege en 1899, durante la polémica surgida entre ambos tras la publicación de los *Grundlagen* le decía: "Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados libremente." Por otra parte, como consecuencia del nuevo concepto de axioma, la noción de verdad también resultaba alterada. Ahora, esta verdad en lugar de fundamentarse en la evidencia, simplemente lo hacía en la no contradicción lógica de los enunciados entre sí o con el sistema donde habían sido establecidos. La consecuencia de este nuevo concepto de verdad la cual tenía carácter lógico, abría la posibilidad a que los axiomas válidos para una teoría pudieran no serlo para otra.

Aunque Hilbert se limita a presentar su sistema axiomático de la geometría euclidiana sin dar muchas explicaciones de las características del mismo, lo cierto es que tales explicaciones no debieron ser muy necesarias ya que el impacto que la obra causó fue precisamente por la claridad, la sencillez y el rigor con que realiza su exposición. A esto se añadía, lo que

comentaba Freudenthal sobre la obra: "(...) en el ejemplo profundamente elaborado de una teoría axiomática, como lo son los *Grundlagen*, hay una fuerza de convicción infinitamente mayor que en las exposiciones filosóficas y programáticas".
Después de los *Grundlagen*, Hilbert se adentrará sin embargo en el campo de la lógica matemática y su formalismo evolucionará hacia una postura más cercana a esta aunque sin caer en el reduccionismo de Frege. Su intención era llevar su método a los demás campos de la matemática y para ello iniciaba un ambicioso programa que se verá truncado, sin embargo, tras la publicación de los famosos teoremas de incompletitud de K. Gödel.

Capítulo 2

El sistema axiomático

2.1. Introducción

En general, se puede decir que un sistema axiomático es una forma de organizar de manera racional los conocimientos relativos a una teoría. Se comienza enunciando unos conceptos básicos y los axiomas –esto es, ideas no deducibles de otras ideas en dicho sistema– y consiste en derivar de estos, siguiendo el razonamiento lógico deductivo, el resto de proposiciones que componen la teoría en cuestión.
De acuerdo con el prólogo que Mario Bunge escribe en el libro [20], son muchos los beneficios y virtudes de organizar una rama del conocimiento según el método axiomático, entre los que se encuentran: "(...) economía, aceleración de la deducción, facilitación del examen de coherencia lógica, puesta en descubierto de suposiciones, individualización de los conceptos básicos o primitivos (definidores), y búsqueda de fundamentos cada vez más profundos." Es precisamente por estos motivos que el método axiomático tiene un cierto carácter pedagógico y didáctico y cuenta con un amplio rango de aplicación, desde la geometría euclidiana en sus orígenes hasta la física, la economía, la filosofía o incluso otras ramas de la matemática a día de hoy.
Aunque no se profundice en ello, se debe señalar que en la literatura se suele hablar de *sistema sintáctico* para referirse a los sistemas axiomáticos en su mayor grado de abstracción, compuestos tan solo por signos, fórmulas (combinaciones de signos) y reglas de transformación que permiten obtener unas fórmulas a partir de otras, cuyas expresiones son ajenas a cualquier tipo de significación llegando a considerarse una especie de *cálculo*. De hecho, según Klimovsky y Boido (2005), el sistema axiomático es un caso particular de sistema sintáctico, donde ni términos primitivos ni proposiciones tienen significación, "pero en donde las reglas de transformación no son cualesquiera, sino las reglas deductivas de una lógica formal".

En este capítulo se pretende describir las características de un sistema axiomático moderno, es decir, cómo se plantea, cuál es su estructura... así como explicar las propiedades fundamentales que deben cumplir para ser considerados aceptados. Para ello, las fuentes que se han seguido son [1], [7], [19], [28] y [31]. Por último, se realizará una comparación de los dos sistemas axiomáticos por excelencia para la geometría: el de Euclides y el de Hilbert.

2.2. Características del sistema axiomático

2.2.1. Elementos de un sistema axiomático

Un sistema axiomático está compuesto por una serie de términos no definidos o primitivos, definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones. Pero antes de profundizar en la descripción de estos elementos, Klimovsky y Boido (2005) afirman que es necesario hacer referencia a la *lógica subyacente* o *presupuesta*, ya que tanto para deducir los teoremas de los axiomas como para decidir si una expresión ha sido construida correctamente hay que utilizar precisamente la lógica.

En cuanto a la lógica subyacente, lo primero es indicar las *categorías* gramaticales de los términos con los que se trabaja ya que, por ejemplo, “punto” y “recta” no se encuentran al mismo nivel que “corresponderse mutuamente con”, pues aquellos términos son *individuos* y este se trata de una *relación binaria* entre aquellos. Además de las categorías, también se deben señalar los *operadores lógicos* utilizados en las proposiciones, como *y, o, todos, algún, entonces...* que permiten conectar sentencias. Otro aspecto importante es la morfología, necesaria para distinguir una expresión correctamente formada del discurso de otra que no lo es. Así, las *reglas morfológicas* son aquellas que deciden qué tipo de expresiones y combinaciones de símbolos son válidas en una sentencia. Por otro lado, no solo se contará con reglas morfológicas, sino que también será importante contar con *reglas de deducción* o de inferencia lógica, como el *modus ponendo ponens* o el *modus tollendo tollens*[1] que permiten obtener unas proposiciones a partir de otras. Un último elemento a considerar en la lógica que subyace al sistema axiomático son las *reglas de definición*, sin las cuales sería imposible obtener nuevos términos específicos del discurso a partir de los ya dados.

Una vez aclarada la lógica que subyace, se pueden describir el resto de elementos presentes en el sistema axiomático.

Generalmente, la estructura del sistema axiomático sigue el orden de definiciones, axiomas,

[1] El *modus ponendo ponens* (si P implica Q siendo P verdad, entonces Q también es verdad) y el *modus tollendo tollens* (si P implica Q, y Q no es cierto, entonces P no es cierto) son ambas reglas de transformación y forman parte de la llamada *lógica proposicional.*

teoremas y demostraciones, aunque no tiene por qué ser siempre así. Por simplicidad, se considerarán como tales las partes principales y el orden en que se organiza una exposición axiomática. La primera parte consta del vocabulario técnico, compuesto por unos términos *primitivos*, que no se definen y carecen de significado, y por unos términos *definidos* mediante las reglas de definición. Algunos ejemplos de estos términos primitivos pueden ser *punto* y *recta* en geometría, o *conjunto* y *elemento* en otras ramas de la matemática. Lo importante es comenzar con un mínimo número de términos no definidos para, a partir de ellos y de otros definidos previamente, definir otras palabras del vocabulario específico. La segunda parte de un sistema axiomático está compuesta por una lista de *axiomas*, esto es, enunciados elegidos arbitrariamente que se aceptan sin necesidad de demostración y que compondrán la base de la que se deducen las demás proposiciones del discurso. Entonces, a partir de ellos y mediante reglas de operación, se pueden deducir lógicamente el resto de propiedades que nos encontramos en el sistema. Todas las suposiciones relevantes tienen que estar establecidas en los axiomas y las únicas propiedades de los términos indefinidos que se pueden emplear son aquellas que están explícitamente enunciadas en ellos. Es decir, cualquier otra propiedad que podamos conocer por la intuición o cualquier experiencia previa, por muy intuitiva que sea, no puede ser utilizada en el sistema hasta que no haya sido demostrado que se sigue de los axiomas. Finalmente, la última y generalmente más extensa de las partes de un sistema axiomático consiste en los teoremas y sus demostaciones. Etimológicamente, la palabra *theórema*[2] proviene del sufijo griego *-ma* (resultado de la acción que indica la palabra que acompaña) añadido al verbo griego *theoréo* (observar, examinar, inspeccionar, etc.). Así, en un sentido clásico, teorema es "el resultado de observar, reflexionar y analizar con atención y detenimiento", "el resultado de una demostración lógica". Para Klimovsky y Boido (2005) habrá dos concepciones distintas de verdad, la de carácter semántico de Aristótles y la de carácter sintáctico de los sistemas axiomáticos. Lo expresa como sigue:

> El concepto aristotélico de verdad, dada la alusión semántica que involucra y que por tanto se refiere a la verdad o falsedad de proposiciones, no se aplica a las cuasiproposiciones[3] de los sistemas axiomáticos. (...) Si, para los lógicos contemporáneos, "sintaxis" se refiere a las formas de las expresiones, y "semántica" a su significado y contenido, en el caso de los sistemas axiomáticos la dimensión sintáctica está presente, aunque no la semnántica. Podemos, en-

[2] «TEOREMA». Etimologías de Chile - Diccionario que explica el origen de las palabras. Recuperado de (http://etimologias.dechile.net/?teorema).

[3] En [19], se emplea el término "cuasiproposición" para referirse a aquellas expresiones que se construyen de acuerdo con las reglas gramaticales pero que no son auténticas proposiciones, pues carecen de la significación y el contenido semántico que estas poseen.

tonces, introducir una noción de "verdad sintáctica", de acuerdo con la cual *una cuasiproposición es verdadera si y solo si es teorema*, o sea, si se puede demostrar a partir de los axiomas.

Por último, se debe mencionar que es posible referirse a teorema en términos de proposición, pero también de lema y corolario. Proposición acostumbra utilizarse como sinónimo de teorema aunque suele tener menos importancia que este, dado que teorema normalmente se reserva para los resultados más importantes o que tienen demostraciones más extensas o complejas. En cambio, tanto lema como corolario tienen una connotación ligeramente distinta. Un lema es un teorema que se establece como un paso previo a algún resultado más importante y un corolario es un teorema que puede ser fácil y rápidamente deducido de un teorema previo.
En lo referente a la demostración de teoremas, esta se realiza mediante un proceso de encadenamiento lógico a partir de ciertas hipótesis, que conduce a la tesis que se quiere probar. La claridad, precisión y no ambigüedad del lenguaje utilizado en las demostraciones son muy importantes pues guían al lector y facilitan el proceso deductivo.

2.2.2. Propiedades de los sistemas axiomáticos

Para poder determinar la bondad de un sistema axiomático, existen ciertas propiedades que pueden verificar. Entre estas principalmente figuran la consistencia, la completitud, la saturación, la independencia, la decidibilidad sintáctica y la categoricidad. Si bien todas ellas son propiedades convenientes o deseables, alguna de ellas será incluso indispensable.
En lo referente a la primera de estas propiedades, se dice que un sistema axiomático es *consistente* si no es posible que dentro de él pueda existir un teorema de modo que su negación sea también teorema. En otras palabras, un sistema axiomático que goce de consistencia no poseerá dos teoremas que se contradigan.
La siguiente propiedad que puede poseer un sistema de este tipo es la de *completitud*. Los sistemas axiomáticos completos son aquellos en los que, a partir del conjunto de axiomas, es posible demostrar la verdad o falsedad de cualquier proposición del sistema.
En tercer lugar, se encuentra la propiedad de *saturación*[4]. Un sistema axiomático será saturado siempre que no pueda ser añadido, al conjunto de axiomas establecido, un nuevo axioma que no sea teorema ni lo sea su negación. Es decir, si un sistema no es saturado,

[4]En realidad, las propiedades de completitud y saturación se consideran intercambiables. Dada una proposición en un sistema completo, se puede demostrar que ella o su negación es un teorema del mismo, esto es, el sistema es saturado. Recíprocamente, en un sistema saturado no se puede ampliar el conjunto de axiomas y, por tanto, toda proposición –o su negación– será deducible de dicho conjunto.

entonces es susceptible de ampliación, ya que existe un axioma que ni el ni su negación son teorema y que puede añadirse al conjunto de axiomas estipulado.
A continuación, se puede plantear qué pasaría al añadir un nuevo axioma a un sistema axiomático saturado: dicho axioma resultaría dependiente de ellos, por lo que se trataría de un teorema y no un axioma. Por lo tanto, relacionada con la propiedad de saturación, aparece la de *independencia*. Un axioma de un conjunto de axiomas se considera independiente si no se puede deducir de los otros axiomas del conjunto, es decir, si ni él ni su negación son teorema del sistema. Como consecuencia, un sistema axiomático será independiente si y solo si cada uno de sus axiomas es independiente.
En cuanto a la decibilidad sintáctica, un sistema axiomático es *decidible* si existe un método tal que, para cualquier proposición del sistema, puede declarar si se trata de un teorema o no dentro del sistema. Este método puede compararse con un algoritmo que, en un número finito de pasos, es capaz de de decidir si una proposición es realmente un teorema.
Finalmente, está la *categoricidad*. Pero antes hablar de esta propiedad es importante hablar de otro concepto estrechamente ligado a las propiedades de un sistema axiomático: se trata del concepto de *interpretación*. Según lo dicho antes, el vocabulario de los sistemas axiomáticos posee una categoría gramatical pero carece de significado, tratándose de una especie de recipiente vacío a la espera de ser rellenado por un contenido semántico. Entonces, una interpretación de un sistema axiomático es una asignación de significado a los términos primitivos, del cual estaban desprovistos. Una buena forma de enfocar el concepto de interpretación es la que se realiza en [19, p. 125-127], en la que se compara con un diccionario compuesto por dos columnas: la de la izquierda con los términos primitivos del sistema axiomático y la de la derecha con el significado que se les otorga a cada uno de aquellos. Siguiendo su razonamiento, dicho diccionario convertiría el sistema axiomático en algo tangible, que nos permite hablar del mundo por medio de expresiones que pueden ser verdaderas o falsas, pues pueden existir tanto interpretaciones acertadas e interesantes como otras que no lo sean. No obstante, en un caso o en el otro, el sistema axiomático se trataría de un sistema interpretado, ahora con contenido semántico. Si dicha interpretación hace verdadero un axioma, entonces satisface dicho axioma. De este modo, una interpretación de un sistema axiomático que hace todos sus axiomas verdaderos, se denomina *modelo* del sistema y, dado que todos los axiomas se cumplen en la interpretación, al mismo tiempo, todos los teoremas que se habían derivado de los axiomas en el sistema axiomático se transformarán en proposiciones igualmente verdaderas en el modelo, ya que para deducir los teoremas a partir de los axiomas en el sistema axiomático original se habían empleado las reglas de la deducción lógica. Así mismo, se dirá que un sistema axiomático es *satisfactible* si posee al menos un modelo.

Según Kline en [18, p. 1337], un sistema es categórico

> (...) si entre dos colecciones cualesquiera, cada una de las cuales contiene conceptos no definidos y satisface los axiomas, se puede establecer una correspondencia biunívoca para los conceptos no definidos que preserve las relaciones establecidas por los axiomas; esto es, ambos sistemas son isomorfos.

Esto significa que la categoricidad indica que las distintas interpretaciones del sistema axiomático difieren tan solo en el lenguaje utilizado.
La noción de modelo es de gran utilidad en el descubrimiento de nuevos conocimientos científicos acerca de una materia en particular:

> La matemática sería un procedimiento "por anticipado" para proporcionar verdades a todos aquellos que descubren, en el transcurso de una investigación, que se hallan ante un modelo de un sistema axiomático. (...) el científico puede encontrarse con abundantes lotes de verdades en su propio campo de investigación, verdades que quizás él mismo no hubiera podido obtener directamente (Klimovsky y Boido, 2005, p. 127).

Además de para descubrir todo tipo de resultados novedosos en diversas áreas de conocimiento, los modelos también son un "método indirecto" para determinar cuando un sistema axiomático cumple alguna de las propiedades anteriormente mencionadas.
De la definición de consistencia se deduce que para comprobar si un sistema axiomático verifica dicha propiedad, se tendría que probar que nunca un axioma o un teorema contradirá a otro axioma o teorema dentro de la teoría. Sin embargo, esta no es una tarea fácil. Si hubiese algún modo de saber si de un conjunto de axiomas se han deducido todos los teoremas, solo se tendría que ir examinando uno por uno la no contradicción. Pero esto no es posible en la mayoría de las teorías, ya que el conjunto de teoremas no suele estar completamente determinado y tampoco se tiene garantía de que después no surja una contradicción.
El método de la interpretación puede ser usado para establecer la consistencia relativa[5]: si la teoría axiomática t se interpreta en la teoría t', de modo que todos los axiomas A_i de t se interpretan como afirmaciones verdaderas A_i' de t'. Todos los teoremas de t, es decir, cualquier proposición A lógicamente deducible de los axiomas A_i en t, es interpretada en t' por una proposición A', la cual se deduce en t' de las interpretaciones A_i' de los axiomas A_i y es, por tanto, cierta. Ahora, si se supone que la teoría t es inconsistente, es decir, los enunciados A y su negación son deducibles en ella, se sigue que las proposiciones A' y $\neg A'$

[5]Una explicación más detallada puede encontrarse en *Axiomatic method - Encyclopedia of Mathematics*. Recuperado de (https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Axiomatic_method).

son ambas afirmaciones verdaderas en t', esto es, t' es inconsistente.

El punto débil de este método es que solo proporciona un carácter *relativo*. No obstante, gracias a él se pudo descubrir que la aritmética tiene un papel especial, pues se trata de una rama de la matemática a cuya consistencia se reduce el problema de consistencia de muchas otras ramas.

La importancia de la consistencia en los sistemas axiomáticos está en dos motivos fundamentales. Por un lado, que un sistema axiomático sea inconsistente quiere decir que en él se puede encontrar un teorema tal que su negación sea también teorema. Esto permitiría tomar como premisas tanto un enunciado como su negación y, haciendo uso de la lógica, deducir de ellos cualquier otra proposición. Por otro lado, un sistema inconsistente no puede admitir un modelo, ya que el sistema interpretado contaría con un teorema falso y por consiguiente carecería de aplicación práctica. Todo esto hace de la consistencia una propiedad imprescindible en los sistemas axiomáticos.

Otro asunto importante a la hora de construir un sistema axiomático si los axiomas elegidos son independientes entre sí, o por el contrario alguno de ellos se podría derivar de los demás. Aunque la condición de consistencia era esencial, la de independencia será conveniente pero no tendrá carácter imprescindible. Será por elegancia o economía el utilizar un grupo mínimo de axiomas. Si en un sistema axiomático un axioma es en realidad una proposición deducible, o teorema, de los demás axiomas (suponiendo que su negación no sea teorema), existiría una especie de dependencia entre los axiomas. Pero, como afirman Klimovsky y Boido (2005), nada impediría su inclusión como axioma desde el punto de vista lógico. Lo peor que podría ocurrir es no saber si una proposición se trata de un axioma o de un teorema; en ese caso, como ocurrió con el quinto postulado, permanecerá en la lista de axiomas hasta que se resuelva la incógnita que le rodea: si se demuestra que es deducible de los demás axiomas, se extrae de la lista y pasa a formar parte del conjunto de teoremas; en caso de demostrar su independencia respecto de los otros axiomas, permanece en la lista de axiomas en calidad de axioma. El método de interpretación también se puede utilizar, al igual que para probar la consistencia, para resolver la cuestión de independencia en un sistema de axiomas: para probar que un axioma A de una teoría axiomática T es independiente de los demás axiomas de dicha teoría, es decir, que no se pueda deducir de ellos, y su inclusión sea entonces esencial para obtener todos los resultados de la teoría, es suficiente establecer la consistencia de la teoría obtenida tras reemplazar A por su negación.

En cuanto a la completitud y la decidibilidad, ambas se tratan de propiedades deseables pero no siempre están presentes en los sistemas axiomáticos.

2.3. El método axiomático en Euclides y Hilbert

El método axiomático fundado en los principios de la lógica aristotélica está asociado a dos personajes fundamentales como son Euclides y Hilbert, conocidos especialmente por la trascendencia y repercusión de sus obras *Elementos* y *Fundamentos de la geometría*, respectivamente.
La importancia de los *Elementos* es indudable al constituir la primera obra estructurada en forma de teoría demostrativa[6] sobre unos principios tan sólidos como los aristotélicos que serán fundamentales en la construcción de numerosas disciplinas desde su época hasta nuestros días. Los *Fundamentos* de Hilbert suponen, por su parte, el intento más importante de realizar una nueva axiomatización de la obra euclidiana, convirtiéndola en una obra más rigurosa, completa y consistente al someterla a un proceso de formalización y abstracción acorde con las nuevas circunstancias en las que se habían visto sumidas las matemáticas de principios del siglo XX. Hilbert fue el que mejor percibió el principal problema de rigor de los *Elementos*, el cual no residía en el proceso deductivo, sino en el carácter de los principios básicos en los que Euclides se apoyaba para hacer sus demostraciones. Aunque estaba de acuerdo en que tales principios tenían que ser indemostrables, su afán era desligarlos de la experiencia sensible. Esto parece contradecir la idea que tenía de la geometría como ciencia empírica en cuanto a su origen; sin embargo, lo que Hilbert pretende no es negar la naturaleza empírica de la geometría, sino someter las intuiciones espaciales a un tratamiento lógico que permitiera fundamentar el concepto de verdad en la lógica y no en la evidencia del mundo material.
Partiendo de la convicción de que era necesario superar la dificultad de los postulados euclidianos presenta, como él mismo afirma en la introducción a su obra [15], "un sistema completo de axiomas, lo más sencillo posible". Estos axiomas no solo le permitirán la demostración de propiedades y deducción de teoremas de la geometría euclidiana ya conocidos, sino también hacer más sólido y elegante el proceso demostrativo.
Al comparar las obras euclidiana y hilbertiana se aprecian claras diferencias tanto de rigor por el nuevo enfoque y tratamiento que le da a los axiomas que evitan los fallos de Euclides, como por la forma en la que se organizan sus respectivos contenidos.
Ya al comienzo de ambos trabajos se percibe una primera diferencia. Hilbert inicia su obra con una introducción mostrando de forma clara y concisa su intención de darle un tratamiento a los *Elementos* desde la lógica que le permita una exposición más abstracta

[6] Según afirma Vega en su introducción al libro [9, p. 20], se escribieron otros *Elementos* anteriores a los de Euclides en un intento de sistematizar la geometría. Entre ellos destacan los de Hipócrates de Quíos, Teudio de Magnesia y León, contemporáneo de Eudoxo y Platón. Para una información más detallada se puede consultar en el primer volumen de [8, p. 116]

y formal, así como el fortalecimiento de la trama deductiva. En los *Elementos* no aparece ningún tipo de prólogo o información sobre su verdadero propósito.

Por otra parte, aunque el contenido básico es prácticamente el mismo en ambas obras, esto es, el de la geometría elemental euclidiana, este se distribuye y organiza de forma diferente, apreciándose además los distintos roles que las construcciones geométricas adquieren en cada una de ellas. En los *Elementos*, vemos que la obra se estructura en 13 libros dedicados a la geometría plana (I-IV), geometría espacial (XI-XII), aritmética (VII-IX), teoría de las proporciones (V-VI), teoría de los inconmensurables (X) y relaciones entre sólidos regulares (XIII). Además, en el primer libro se incluyen sus principios evidentes (cinco postulados y cinco nociones comunes[7]).

Hilbert, por su parte, reparte su contenido en siete capítulos. El primer capítulo lo dedica simplemente a presentar lo que el llama *sistemas de entes*, que no son otros que el de los *puntos*, el de las *rectas* y el de los *planos*, respectivamente. A continuación, sigue con la introducción de sus veinte axiomas distribuidos en cinco grupos –*enlace, orden, congruencia, paralelas y continuidad*–, y elaborados en términos lógicos y no intuitivos.

El segundo capítulo, lo dedica, acorde a su idea de sistema formal, a analizar y demostrar la *independencia* y *no contradicción* de sus axiomas desde la lógica, apoyándose en los números reales, en la geometría analítica y la geometría no euclidiana.

En el capítulo tres, tras una introducción sobre propiedades de los números reales y algunas reglas de cálculo, enuncia el *teorema de Pascal* y construye una aritmética de segmentos basada en este teorema que más tarde utilizará para fundamentar la teoría de las proporciones sobre segmentos. Este capítulo finaliza con los teoremas de semejanza y las ecuaciones cartesianas de la recta y el plano.

En el cuarto capítulo, se centra en las áreas planas valiéndose de la aritmética de segmentos y la teoría de las proporciones del capítulo anterior. Se ocupa también de temas como la equidescomposición y equicomplementariedad de los polígonos o el área de triángulos y polígonos.

El *teorema de Desargues* ocupa el quinto capítulo y en él Hilbert llega a la conclusión de que no se puede demostrar sin los axiomas de congruencia. Así mismo, se ocupa de la aritmética de segmentos demostrando que la que que se basa en el *teorema de Pascal* tiene las características de un cuerpo ordenado al contrario de la basada en el de Desargues.

En el sexto capítulo analiza el *teorema de Pascal* para ver si también puede ser demostrado sin los axiomas de congruencia. Concluía que no eran necesarios, pero que sí lo era el

[7]Euclides llama *postulados* a suposiciones que se deben aceptar sin demostración y que conciernen a la propia geometría, a diferencia de las *nociones comunes* que se utilizan para principios más generales. Con el fin de evitar confusiones, se debe aclarar que en la actualidad los términos *axioma* y *postulado* se consideran sinónimos y se utilizan de manera intercambiable.

axioma de Arquímedes.
El séptimo lo dedica a las construcciones geométricas derivadas de sus axiomas utilizando la regla y el patrón o *streckenübertrager*[8].
En cuanto al desarrollo deductivo, aunque en general ambos siguen la pauta aristotélica, cada uno de los autores establece su propia estrategia. El modelo de Euclides incluye, en general, seis etapas, aunque no siempre se usan las seis. Estas etapas, de acuerdo con [24] que hace referencia a la introducción del libro de Heath (1908), son las siguientes: una primera formulación de la tesis que se intenta demostrar, acompañada de una figura; despúes, los datos dados se muestran con expresiones como "Sea ABC el triángulo (...)"; a continuación, se indica de una forma más concisa y delimitada lo que se va a demostrar, y más tarde se lleva a cabo la construcción de la figura. Respecto a esta etapa, es importante señalar que no siempre se realizan modificaciones sobre tal figura. A veces, simplemente toma un papel pasivo que se limita a reflejar los datos dados permaneciendo siempre en su forma inicial. Otras veces, va siendo sometida a diversas modificaciones según avanza el proceso demostrativo, adquiriendo un rol activo en el desarrollo del mismo en dos aspectos: dar una imagen gráfica de lo que se va demostrando en cada paso y servir de ayuda en la derivación de los resultados. De todas las formas, siempre existe un vínculo entre representación diagramática en el patrón euclídeo y es uno de los fallos en los que Hilbert evita caer, ya que a veces no siempre en este procedimiento hay la rigurosidad requerida. En este punto precisamente reside otra de las diferencias entre los dos matemáticos, pues el papel que Hilbert le otorga a la figura es meramente pasivo y secundario, sirviendo únicamente como punto de partida visual y no siendo utilizada para hacer deducciones lógicas. Otro detalle importante respecto a las representaciones geométricas en estas obras es que, aunque en ambos casos tales representaciones tienen un carácter abstracto, en Euclides cada objeto representa únicamente lo que es él, como objeto con esencia propia y unas propiedades distintas a las de los demás que lo hacen único y, por lo tanto, no es susceptible de más representaciones que la suya propia. En Hilbert, en cambio, los objetos no están sometidos a una sola representación porque esta no está en función de lo que es el objeto en sí mismo, sino de como se le considere en cada uno de los distintos sistemas axiomáticos. García Bacca, en su introducción al libro *Elementos de Geometría*[9] hace referencia a la concepción griega de los objetos geométricos de esta manera:

> La unicidad de las cosas geométricas es tal en la geometría griega y clásica que las cosas geométricas *tienen que manifestar* o estar haciendo patente lo que son,

[8]De [11, p. 279], este instrumento se trata de un "transportador de segmentos".
[9]Ver Euclides. (1992). *Elementos de Geometría.* México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.

y además solo *pueden estar en un estado* geométrico: su verdad es unitaria, su tipo de manifestación es único.

Retomando las etapas del proceso deductivo de los *Elementos*, el siguiente paso es el de la demostración, en la cual, siguiendo el modelo aristotélico, Euclides hace uso de sus *principios evidentes*[10] (nociones comunes y postulados) y definiciones. Cabe señalar también que Euclides no solo utiliza la vía de la demostración directa, sino también la de reducción al absurdo. Finalmente, la conclusión confirmará que la tesis inicial ha sido demostrada y esto quedaba expresado con frases como *quod erat demostrandum* (Q.E.D.) y *quod erat faciendum* (Q.E.F.)[11].

En cuanto al patrón del proceso demostrativo de Hilbert, su técnica consiste fundamentalmente en presentar teoremas y problemas acompañados o no de su demostración, incluyendo a lo largo del desarrollo del discurso un gran número de explicaciones, definiciones y las figuras esquemáticas necesarias, en su afán por hacerse entender y evitar cualquier tipo de ambigüedad.

Otra cuestión que es importante mencionar es la referida a los fallos de estas obras. En los *Elementos* de Euclides estos fallos ya fueron detectados a partir del siglo XVII cuando los matemáticos comenzaron a cuestionarse la supuesta perfección euclídea, aunque ya desde la antigüedad el problemático enunciado del quinto postulado había supuesto el inicio de tal cuestionamiento. Pero, aparte de las dudas suscitadas por este postulado, se detectarán en los *Elementos* algunos defectos y carencias como la vaguedad e imprecisión de muchas de sus definiciones, sobre todo en las primeras, que no logran describir con exactitud los objetos a los que se está refiriendo, o el uso de asunciones como el *principio de superposición*[12], que no estaba establecido en los axiomas. Además, en ciertas demostraciones que implican diagramas, se recurre a más asunciones de las indicadas explícitamente en los postulados (Ver [31, p. 8]).

Si hubiera que mencionar algún error de Hilbert, sería el haber omitido la demostración de algunos teoremas euclídeos que más tarde utiliza para deducir otros teoremas.

Por último, en cuanto al carácter material o formal de estas obras, aunque se suele asociar a los *Elementos* con el primero y a los *Fundamentos* con el segundo, no se puede decir que este carácter sea puro en ninguno de los dos. Por una parte, la influencia platónica que se hace sentir en el primero al evitar cualquier aplicación práctica o alusión numérica y la

---

[10]La noción de *principio evidente* había sido introducida por Aristóteles para evitar el problema del regreso infinito y del círculo vicioso en el proceso del razonamiento lógico.

[11]La expresión Q.E.D. significa "como se quería demostrar", para implicaciones lógicas, mientras que Q.E.F. se utiliza en las construcciones geométricas.

[12]Un ejemplo de esto aparece en la demostración del criterio de congruencia lado-ángulo-lado para triángulos, como se menciona en [14, p. 31]

forma de exposición de sus demostraciones recurriendo a la lógica aristotélica del *Órganon*, contribuyen a darle un cierto tinte formal. Esta idea la expresa B. Levi en [20]:

> Una de las características de los Elementos (...) es la conducta lógica formal de la exposición, que recuerda la teoría aristotélica del silogismo: sistemática división por proposiciones; en cada proposición, enunciación primero de una tesis en términos generales; luego nueva enunciación aplicada a una figura particular. Finalmente, demostración sobre la figura. La demostración dividida en una serie de conclusiones particulares en cadena y terminando regularmente con la afirmación: "lo que se quería demostrar".

Por otra, el formalismo de los *Grundlagen* se aleja de un formalismo más puro y desarrollado que caracterizará a Hilbert en una etapa posterior.

Capítulo 3

Fundamentos de la geometría

3.1. Los cinco grupos de axiomas

3.1.1. Introducción

Hilbert establece cinco grupos diferentes de axiomas para la geometría euclidiana y considera tres sistemas distintos de entes. Cada uno de estos sistemas está compuesto, respectivamente, por entes que llama *puntos* y designa con las letras $A, B, C...$; *rectas*, para las cuales usa las letras $a, b, c, ...$; y *planos*, a los que se refiere mediante las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma....$ Además, afirma que los puntos reciben también el nombre de *elementos de la geometría lineal*, los puntos y rectas el de *elementos de la geometría plana*, y los puntos, rectas y planos, el de *elementos de la geometría espacial.*
Las relaciones que entre los entes se expresan con palabras como "estar situado", "entre", "congruente", "paralelo" o "continuo".
En el desarrollo del discurso, cuando cree conveniente Hilbert define conceptos como segmento, semirrayo, curva poligonal, polígono, vértice, ángulo, figura, circunferencia, etc. Los axiomas que expongo a continuación proceden de la traducción al castellano de la séptima edición de los *Grundlagen der Geometrie* realizada por F. Cebrián en [15]:

3.1.2. Axiomas de enlace

El primer grupo de axiomas es el de los axiomas de *enlace*, que sirven para expresar las relaciones entre puntos, rectas y planos siendo el término que los relaciona *corresponderse mutuamente.* Este grupo está compuesto por ocho axiomas, de los cuales los tres primeros se refieren a elementos de la geometría plana y se denominan *axiomas planos del grupo I*, para diferenciarlos de los *axiomas espaciales* de dicho grupo.

Axioma 1 (I-1). *Dados dos puntos*[1] A, B *existe siempre una recta* a*, que con cada uno de los dos puntos,* A, B*, se corresponde mutuamente. Se escribe* $AB = a$ *ó* $BA = a$.

Axioma 2 (I-2). *Dados dos puntos distintos* A, B *no existe más que una recta, la cual con cada uno de los dos puntos* A, B*, se corresponde mutuamente*[2]*. Es decir, si* $AB = a$ *y* $AC = a$*, con* $B \neq C$*, entonces también* $BC = a$.

Axioma 3 (I-3). *Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos no situados sobre una recta.*

Axioma 4 (I-4). *Dados tres puntos cualesquiera* A, B, C *no situados sobre una misma línea recta, existe siempre un plano* α *que se corresponde mutuamente con cada uno de los tres puntos. En cada plano existe siempre un punto correspondiéndose mutuamente*[3] *con él.*

Axioma 5 (I-5). *Dados tres puntos cualesquiera* A, B, C *no situados en una misma línea recta, no existe más que un plano que se corresponde mutuamente con cada uno de los tres puntos* A, B, C.

Axioma 6 (I-6). *Cuando dos puntos distintos* A, B *de una recta* a *están situados en un plano* α*, todo punto de* a *está situado en el plano* α.

Axioma 7 (I-7). *Si dos planos* α, β *tienen un punto* A *común, tendrán, al menos, otro punto común* B.

Axioma 8 (I-8). *Existen, al menos, cuatro puntos no situados en un plano.*

Estos dos últimos axiomas indican que el espacio no tiene ni más, ni menos, de tres dimensiones, respectivamente. A partir de los axiomas expuestos en este grupo se deducen teoremas como los siguientes:

Teorema 3.1.1. *Dos rectas de un plano tienen uno o ningún punto común; dos planos o no tienen punto común o tienen una recta común, sin tener otros puntos comunes; un plano y una recta no situada en él tienen un punto común o ninguno.*

Teorema 3.1.2. *Por una recta y un punto no situado en ella, así como también por dos rectas distintas con un punto en común, pasa siempre uno y solo un plano.*

[1] Cuando Hilbert escribe dos, tres, ..., puntos, rectas, planos se refiere a puntos, rectas, planos distintos.

[2] Hilbert nos advierte aquí de la posibilidad de sustituir la expresión "corresponderse mutuamente" por otras como: a pasa por A y B, a une A con B, A está situado sobre a, A es un punto de a, etc. En el caso de que A se encuentre simultáneamente sobre las rectas a y b se dirá que: las rectas a y b se cortan en A, tienen el punto A en común, etc.

[3] En este caso, se podría decir también A está situado en α, A es un punto de α, etc.

3.1.3. Axiomas de orden

Con estos axiomas, se introduce la relación "entre", que permite ordenar los puntos sobre una recta, en un plano y en el espacio.

Axioma 9 (II-1). *Cuando un punto B está situado entre un punto A y un punto C; A, B, C son tres puntos distintos de una recta y B está situado también entre C y A.*

Axioma 10 (II-2). *Dados dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto B sobre la recta AC de tal modo que C está situado entre A y B.*

Axioma 11 (II-3). *De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno situado entre los otros dos.*

Axioma 12 (II-4). *Son A, B, C tres puntos dados no situados en línea recta y a una recta del plano ABC que no contiene a ninguno de los puntos A, B, C: cuando la recta a pasa por un punto del segmento AB, seguramente pasa también o por un punto del segmento AC o por uno del segmento BC.*

Tanto en los axiomas de enlace como en los de orden, se observa una notable influencia de Pasch y su obra *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), obra que incluye el que se puede considerar como primer sistema axiomático cerrado de la geometría proyectiva lineal y en la que había recogido alguno de los mencionados axiomas. De hecho, el axioma 12 es también conocido como "axioma de Pasch".
Como consecuencia de los axiomas de enlace y orden, Hilbert deduce y demuestra teoremas como el siguiente:

Teorema 3.1.3. *Situado entre dos puntos A y C, existe siempre al menos un punto D en la recta AC.*

Demostración. Según el axioma 3 existe un punto E fuera de la recta AC, y conforme al axioma 10 existe en AE un punto F, de suerte que E es un punto del segmento AF. Según el último axioma y el 11, existe sobre FC un punto G que no está situado sobre el segmento FC. Según el axioma 12 la recta EG cortará al segmento AC en un punto D. □

Como podemos ver, Hilbert demuestra este teorema explicando en cada paso el axioma que utiliza. Esta es una técnica a la que recurre en sus demostraciones.

Teorema 3.1.4. *Dado un número finito de puntos cualesquiera sobre una recta, pueden estos siempre ser designados con $A, B, C, D, E, ..., K$ de tal manera que el punto B esté situado entre A, de un lado, y $C, D, E, ..., K$ del otro lado, además C quede entre A y B*

por una parte y $D, E, ..., K$*, por la otra,* D *esté entre* A, B, C*, por un lado, y* $E, ..., K$*, por el otro, y así sucesivamente. Existe además, fuera del modo de designación anterior, otra manera inversa* $K, ..., E, D, C, B, A$*, la cual goza de la misma condición.*

Teorema 3.1.5. *Entre dos puntos cualesquiera de una recta siempre existe una cantidad infinita de puntos.*

Teorema 3.1.6. *Toda recta* a*, contenida en un plano* α*, divide el resto de los puntos de este plano en dos regiones con la siguiente condición: todo punto* A *de una de las regiones determina con cada punto* B *de la otra región un segmento* AB *que contiene un punto de* a*. Por el contrario, dos puntos cualesquiera* A, A' *de la misma región determinan un segmento* AA' *que no contiene ningún punto de* a*.*

Es inmediato deducir ahora, a partir del Teorema 3.1.6, el que sigue:

Teorema 3.1.7. *Todo plano* α *separa los demás puntos del espacio en dos regiones con la siguiente propiedad: todo punto* A *de una de las regiones determina con cada punto* B *de la otra región un segmento* AB *que contiene un punto de* α*. Por el contrario, dos puntos cualesquiera* A, A' *de la misma región determinan un segmento* AA' *que no contiene ningún punto de* α*.*

Este útlimo Teorema 3.1.7 es de gran importancia, pues hace referencia a la ordenación de los elementos en el espacio.

3.1.4. Axiomas de congruencia

Este grupo está constituido por cinco axiomas con los que Hilbert hace explícito el significado de *congruencia*, ausente en Euclides, quien simplemente se había limitado a expresarla mediante la superposición y traslación de figuras. Hilbert introduce este concepto de una forma más abstracta y para describirlo utiliza las palabras “congruente” o “igual”. Además, esta noción de congruencia le servirá a Hilbert para definir la de *movimiento*.
Los tres primeros axiomas (*axiomas lineales del grupo III*) se refieren a la congruencia de segmentos, el cuarto a la de ángulos y el último a la de ambos. Estos dos últimos axiomas se denominan *axiomas planos del grupo III.*

Axioma 13 (III-1)**.** *Si* A, B *son dos puntos de una recta* a *y además* A' *es un punto sobre la misma o sobre otra recta* a'*, entonces en uno de los lados que determina* A' *en la recta* a' *siempre es posible encontrar un único punto* B' *de tal forma que los segmentos* AB *y* $A'B'$ *son congruentes o iguales. Esto se indica escribiendo:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Este axioma posibilita el transporte de segmentos.

Axioma 14 (III-2)**.** *Si un segmento AB es congruente con el segmento $A'B'$ y también con el segmento $A''B''$, entonces el segmento $A'B'$ es congruente con el segmento $A''B''$, esto es, si $AB \equiv A'B'$ y $AB \equiv A''B''$, entonces $A'B' \equiv A''B''$.*

De estos dos primeros axiomas se puede deducir que todo segmento es congruente consigo mismo, esto es,

$$AB \equiv AB.$$

Con el siguiente axioma, Hilbert exige la adicionabilidad de segmentos:

Axioma 15 (III-3)**.** *Sean AB y BC dos segmentos de la recta a sin puntos comunes y, por otra parte, $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta a o sobre otra distinta a', pero en todo caso, sin puntos comunes: si entonces*

$$AB \equiv A'B' \text{ y } BC \equiv B'C'$$

siempre se verifica

$$AC \equiv A'C'.$$

Una vez tratado el transporte de segmentos, se trata el de ángulos, para los que explica que las relaciones que se dan entre ellos pueden expresarse mediante las palabras "congruente" o "igual".

Axioma 16 (III-4)**.** *Dados un ángulo $\angle(h,k)$ en un plano α, una recta a' en un plano α' y una de las regiones de α' determinadas por a'; representemos por h' un semirrayo de a' que parte de O'. Existe, entonces, en el plano α' uno y solo un semirrayo k' tal, que el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente o igual al $\angle(h',k')$ y, a la vez, todos los puntos interiores del ángulo $\angle(h',k')$ están situados en la región dada con respecto a a'. Simbólicamente:*

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Además, todo ángulo es congruente consigo mismo; esto es:

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k).$$

A partir de este axioma, Hilbert concluye que todo ángulo puede ser transportado a un plano dado, en una región dada y con un semirrayo dado de manera unívocamente determinada.

Axioma 17 (III-5). *Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ verifican las congruencias:*

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C' \text{ y } \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

también queda satisfecha siempre la congruencia:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

La univocidad del transporte de segmentos se deduce de la univocidad del transporte de ángulos usando el axioma 17.
En cuanto a los triángulos, Hilbert añade que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes entre sí cuando se cumplen las congruencias

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ BC \equiv B'C',$$

$$\angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \angle C \equiv \angle C'.$$

Una vez enunciados los axiomas de congruencia, Hilbert deduce teoremas como los que siguen:

Teorema 3.1.8 (Primer teorema de congruencia para triángulos). *Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$ en el caso de que sean válidas las congruencias:*

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle A \equiv \angle A'$$

A modo ilustrativo del tipo de demostraciones que Hilbert construye para los teoremas, en las que explica claramente los axiomas en los que se apoya para deducir los pasos lógicos que sigue, presento la realizada para el Teorema 3.1.8.

Demostración. Según el axioma 17 las congruencias:

$$\angle B \equiv \angle B' \text{ y } \angle C \equiv \angle C'$$

se verifican, y, por tanto, es necesario únicamente probar que BC y $B'C'$ son congruentes entre sí. Admitamos, por el contrario, que BC y $B'C'$ no fuesen congruentes, y determinemos sobre $B'C'$ un punto D tal que $BC \equiv B'D'$. Entonces, en los dos triángulos ABC y $A'B'D'$ coinciden dos lados y el ángulo comprendido; conforme al axioma 17 aplicable a los triángulos ABC y $A'B'D'$, se tiene $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ y serían así congruentes los ángulos $\angle BAC$, $\angle B'A'D'$ y $\angle B'A'C'$, lo que no es posible, puesto que después del axioma 16 un ángulo cualquiera solo puede ser trasladado de una sola manera en un semirrayo dado, en una región dada de un plano. Con esto queda demostrado que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes. $\square$

Teorema 3.1.9 (Segundo teorema de congruencia para triángulos). *Un triángulo ABC es congruente con un triángulo $A'B'C'$, en el caso de que sean válidas las congruencias:*

$$AB \equiv A'B', \ \angle A \equiv \angle A', \ \angle B \equiv \angle B'.$$

Teorema 3.1.10. *Si dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ son congruentes, sus ángulos suplementarios también son congruentes.*

Teorema 3.1.11 (Tercer teorema de congruencia para triángulos). *Si en dos triángulos ABC y $A'B'C'$ los lados correspondientes son congruentes, los triángulos son congruentes.*

También se deducen rápidamente ciertos resultados referentes a la congruencia de figuras, entendiendo que dos figuras se dicen congruentes si sus puntos se pueden organizar en una correspondencia uno-a-uno, de forma que los segmentos correspondientes y los ángulos correspondientes de ambas figuras sean congruentes los de una con los de la otra.

Teorema 3.1.12. *Si $(A, B, C, ...)$ y $(A', B', C', ...)$ son figuras planas congruentes y P es un punto en el plano de la primera, entonces siempre es posible encontrar un punto P' en el plano de la segunda, de modo que $(A, B, C, ..., P)$ y $(A', B', C', ..., P')$ sean también figuras congruentes. Si las dos figuras tienen al menos tres puntos que no están sobre la misma recta, entonces la elección de P' solo puede hacerse de un único modo.*

A continuación se enuncia un resultado, análogo al anterior, para figuras en el espacio.

Teorema 3.1.13. *Si $(A, B, C, ...)$ y $(A', B', C', ...)$ son figuras congruentes y P es un punto arbitrario, entonces siempre es posible encontrar un punto P' en el plano de la segunda, de modo que $(A, B, C, ..., P)$ y $(A', B', C', ..., P')$ sean también figuras congruentes. Si la figura $(A, B, C, ..., P)$ contiene al menos cuatro puntos que no están en el mismo plano, entonces la elección de P' solo puede hacerse de un único modo.*

3.1.5. Axioma de las paralelas

El cuarto de los grupos de axiomas considerados por Hilbert está compuesto únicamente por uno: el axioma de las paralelas, que se trata de un axioma plano. Lo expresa del siguiente modo:

Axioma 18 (IV). *Sea a una recta cualquiera y A un punto exterior a a: en el plano determinado por a y A existe a lo más una recta que pasa por A y no corta a la recta a.*

A continuación, Hilbert enuncia los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.1.14. *Cuando dos paralelas son cortadas por una tercera recta, los ángulos correspondientes y alternos son iguales. Y recíprocramente, la congruencia de los ángulos correspondientes o alternos tienen como consecuencia que las rectas son paralelas.*

Teorema 3.1.15. *Los ángulos de un triángulo suman dos rectos.*

Finalmente, Hilbert define la circunferencia como el conjunto de todos los puntos A para los cuales, dado un punto –el centro– M, del plano α, son congruentes los segmentos MA. A partir de esta definición se deducen fácilmente, con ayuda de los grupos de axiomas III-IV, las conocidas propiedades de la circunferencia, en particular, la posibilidad de construir una circunferencia que pase por tres puntos dados cualesquiera no pertenecientes a la misma recta, la congruencia de todos los ángulos inscritos sobre la misma cuerda, y el teorema relativo a los ángulos de un cuadrilátero inscrito.

3.1.6. Axiomas de continuidad

Los axiomas de este último grupo son de gran importancia, ya que permiten fundamentar la noción de medida y la incorporación de números en la geometría permitiendo asignar a cada segmento un único número positivo, que indica su longitud.
Este grupo está formado por dos axiomas, ambos lineales, el primero de los cuales es el:

Axioma 19 (V-1. Axioma de Arquímedes). *Siendo AB y CD segmentos cualesquiera, existe siempre sobre la recta AB un número de puntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, de modo que los segmentos*

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ ...,\ A_{n-1}A_n$$

son congruentes con el CD, y el punto B queda entre A y A_n.

A continuación, se enuncia el segundo axioma de continuidad:

Axioma 20 (V-2. Axioma de la plenitud lineal[4]). *Los puntos de una recta forman un sistema el cual no es susceptible de ampliación alguna, bajo la condición de conservar la ordenación lineal, expresada en el Teorema 3.1.4, el primer axioma de congruencia y el axioma de Arquímedes (en resumen, los axiomas I 1-2, II, III-I, V-1). Dicho de otro modo: no es posible a este sistema de puntos añadir otros puntos de a, de modo que en el sistema que se obtiene por composición todo los axiomas construidos queden satisfechos.*

Para finalizar, es necesario añadir un resultado que Hilbert incorpora a partir de la primera edición francesa a su obra en calidad de axioma. Sin embargo, posteriormente Bernays observa que es suficiente el axioma lineal de la plenitud y desde entonces se

[4]Denominado *Axiom der linearen Vollständigkeit* por David Hilbert.

considerará teorema. Es el *Teorema de la plenitud.* Mientras se le consideraba axioma, se le notaba un carácter distinto a los demás: mientras aquellos hablaban sobre los elementos básicos del sistema –puntos, rectas y planos– y constataban las relaciones que se daban entre ellos, este iba más allá en el sentido de que se refería a los axiomas anteriores y a las relaciones que se podían dar entre ellos.
El enunciado de dicho teorema es el que vemos a continuación:

Teorema 3.1.16 (Teorema de la plenitud). *Los elementos de la geometría (esto es, puntos, rectas y planos) forman un sistema el cual no es susceptible de ampliación con puntos, rectas y planos, a base de conservar los axiomas de enlace y ordenación, el primer axioma de congruencia y el de Arquímedes: forman, pues dichos elementos justamente un sistema, que al querer conservar todos los axiomas no es apto para tal ampliación.*

Aunque no se mencione directamente nada acerca de la existencia de puntos límite o la idea de convergencia, la adición del axioma de plenitud permite demostrar el Teorema de Bolzano, en virtud del cual para todo conjunto de puntos situados sobre una recta entre dos puntos dados de la misma recta, existe necesariamente un punto de condensación, es decir, un punto límite.
Así, la importancia de este axioma está en que conduce indirectamente a la introducción de puntos límite y, con ello, se puede establecer una correspondencia uno-a-uno entre los puntos de un segmento y el sistema de los números reales.

3.2. Consistencia e independencia de los axiomas

Tras exponer Hilbert en un primer capítulo sus cinco grupos de axiomas y algunas consecuencias que de ellos se derivan, el sistema ya dispone de todo lo necesario para probar los teoremas de la geometría elemental euclidiana. No obstante, aunque su sistema sea *suficiente*, Hilbert incorpora en el segundo capítulo de [15] un novedoso estudio acerca de la no contradicción e independencia de sus axiomas.
En cuanto a la consistencia, Poincaré había concluido en 1898[5] que dicha propiedad estaba garantizada en una estructura axiomáticamente fundada siempre que se pudiera dar de ella una interpretación aritmética. De ese modo Hilbert demostró que la geometría euclidiana[6] era consistente.

[5]Poincaré, H. (1898). On the foundations of geometry. *The Monist*, 9(1), 38-39. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/27899007.

[6]En realidad, Hilbert prueba el caso de la geometría plana. En lo referente al caso de la geometría espacial, dice que no ofrece dificultad alguna.

Para ello, construye el dominio Ω formado por los números algebraicos resultantes de aplicarle al número 1 las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y una última definida como $\sqrt{1+\omega^2}$, siendo ω un número resultante de las cinco operaciones consideradas. Así definido el dominio Ω, se puede apreciar que sus números son todos reales.
Una vez construido el dominio, identifica punto con un par de números (x, y) y recta con la razón de tres números $(u : v : w)$ donde u, v no son simultáneamente nulos, perteneciendo todos estos números a Ω. Así, un punto (x, y) pertenece a una recta $(u : v : w)$ siempre que se satisface la ecuación

$$ux + vy + w = 0.$$

Con esto, se puede observar que los axiomas I(1-3) y IV quedan satisfechos. Para ver que también se cumplen los axiomas II, dado que los números de Ω son reales, se basa en la propiedad que tienen esta clase de números de ser ordenados según su magnitud. Efectivamente, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...$ son puntos cualesquiera sobre una recta, la sucesión de ellos sobre esta puede ser tal que los números $x_1, x_2, x_3, ...$ o $y_1, y_2, y_3, ...$ en dicha sucesión sea constantemente creciente o decreciente. El axioma II(4) se satisface estableciendo que para todo punto (x, y) que hace la expresión $ux+vy+w$ mayor o menor que cero debe estar a un lado u otro de la recta $(u : v : w)$.
En cuanto a los axiomas de congruencia, que permiten el transporte de segmentos y ángulos, se interpretan algebraicamente mediante los métodos de la geometría analítica para traslaciones y rotaciones. La transformación

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

donde $a, b \in \Omega$ y, por tanto también $x', y', \in \Omega$, permite la traslación paralela de segmentos y ángulos, mientras que la transformación

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

establece una simetría respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Para definir la rotación, designa al punto $(0, 0)$ con O, al punto $(1, 0)$ con E y a otro cualquiera (a, b) con C. Así, la rotación de ángulo $\angle COE$ de un punto (x, y) en torno al punto O resulta en un punto (x', y'), donde

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y, \quad y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$

El nuevo par de puntos (x', y') también pertenece al dominio Ω, ya que son el resultado de las cinco operaciones consideradas. En efecto, el número

$$\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$

pertenece al dominio Ω. Con esto se verifican los axiomas de congruencia III y el de Arquímedes V(1). Pero el axioma de la plenitud lineal V(2) no se satisface en el dominio así establecido.

En la edición correspondiente a [16] de los *Fundamentos de la geometría* explica que para los propósitos de la demostración es suficiente tomar el dominio Ω. No obstante, en futuras ediciones como la séptima, a partir de la cual se elabora la traducción al castellano [15], Hilbert comenta que si en lugar de tomar como dominio Ω tal y como fue definido se toma el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$, resulta la geometría cartesiana plana usual y se cumplen además de los axiomas I(1-3), II, III, IV y V(1), el axioma de la plenitud lineal V(2). Para verificar que este axioma también se satisface, supone que a una recta r se le puede agregar un punto P y haciendo uso de la *cortadura de Dedekind* producida por dicho punto en su razonamiento termina llegando a una contradicción.

Una vez Hilbert ha interpretado de manera aritmética cada elemento y verificado que se satisfacen los axiomas I-V, deduce que los teoremas también deben cumplirse en la interpretación pues son consecuencia lógica de los axiomas. Así, toda contradicción en las consecuencias de los axiomas I-V necesitará verse en la aritmética del sistema de números reales.

Con esto Hilbert prueba la consistencia de su sistema axiomático para la geometría euclidiana en relación a la aritmética, en un momento en que la cuestión de consistencia de la aritmética aún estaba abierta.

A continuación, tras mostrar la no contradicción de los axiomas Hilbert se propone estudiar su independencia. Probará que no es posible derivar por medio de silogismos ninguna parte esencial de un determinado grupo de axiomas de los demás grupos de axiomas[7]. En lo referente a los grupos I y II, sostiene que sirven de fundamento a los demás y, por tanto, será suficiente limitarse a demostrar la independencia de los axiomas de los grupos III, IV y V. Para ello, considerará interpretaciones consistentes en las que se verifican todos los axiomas a excepción del que quiere mostrar que es independiente de los demás[8].

[7]No obstante, existía realmente un tipo de dependencia entre los grupos de axiomas, Poincaré señala que los axiomas de orden dependen de los de enlace, en tanto que estos definen de algún modo la noción de tres puntos en línea recta. (*Les fondements de la géometrie*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 26 (2ª serie), 249-272. (1902)). Recuperado de http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1902bs.pdf

[8]En realidad, Hilbert prueba la independencia entre los grupos de axiomas y no la independencia de los axiomas dentro de cada grupo, salvo en el caso del axioma III(5).

Respecto al axioma de las paralelas, prueba su independencia a la manera tradicional, es decir, mostrando una geometría no euclidiana en la que se cumplen todos los axiomas, salvo el de las paralelas.

En cuanto a los axiomas de congruencia, consideró importante demostrar la independencia del axioma III(5) respecto de los demás axiomas I, II, III(1-4), IV y V. Para lograrlo, recurre a la construcción de una geometría similar a la utilizada para probar la consistencia, que difiere de ella en el modo en que define el transporte de segmentos. En esta geometría muestra que no se satisface siempre el axioma III(5).

Por último, la independencia de los axiomas de continuidad se prueba introduciendo, para el caso del axioma de Arquímedes, una geometría no arquimediana, al igual que había hecho Giuseppe Veronese en sus *Fondamenti di geometria* (1891), como Kline cuenta en [18, p. 1339]. En el caso del axioma de plenitud lineal, V(2), su independencia se prueba con la geometría definida al comienzo de esta sección para ver la consistencia del sistema de axiomas de Hilbert, ya que en ella se satisfacen los axiomas I, II, III, IV, V(1), y no el V(2).

Capítulo 4

Repercusiones en la matemática posterior

La importancia y la influencia de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert es indudable. Por una parte, corregía debilidades de la obra euclidiana perfeccionándola y manteniendo vivas en el tiempo tanto su valía como la de la lógica aristotélica. Por otra, suponía un paso fundamental en la búsqueda de unas bases sólidas para la geometría en particular y la matemática en general.

Con su obra, Hilbert le daba a la geometría un tratamiento abstracto y formal, con una perfección que no habían conseguido otros matemáticos anteriores. Entre estos se encontraban, Moritz Pasch (1843-1930), que en su obra *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), establecía un conjunto de axiomas que no era suficiente y además seguían ligados a la experiencia; tampoco le daba demasiada importancia a su independencia. Por su parte, Giuseppe Peano (1858-1932) en *I principii di geometria logicamente esposti* (1889), y Giuseppe Veronese (1854-1917) en *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* (1891), mejoraban ciertos aspectos del trabajo de Pasch y más tarde Mario Pieri (1860-1913) construía su sistema tomando como únicos conceptos no definidos *punto* y *movimiento* en su obra *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* (1899).

La obra de Hilbert suponía una gran novedad y era alabada por la mayoría de los matemáticos, sin embargo, las reacciones poco favorables procedentes de otras tendencias matemáticas no se hicieron esperar. Hilbert le daba un nuevo sentido al concepto de axioma que no gustaba a estas corrientes: los axiomas ahora ya no eran verdades evidentes sobre el espacio físico ni determinaban a los objetos geométricos de forma única, sino que se elegían de forma arbitraria y la verdad del sistema dependía solo de la no contradicción entre ellos y de sus consecuencias. Además, que no tuviesen contenido y pudieran recibir diversas interpretaciones en distintos ámbitos tampoco agradaba a estos matemáticos. Poincaré y los intuicionistas echaban en falta la inclusión en la obra del desplazamiento de figuras invariantes[1]. Más tarde, en 1906[2] lanzaba el matemático francés una nueva crítica a esta obra:

> Lo que Hilbert había hecho para la geometría, otros lo han querido hacer para la aritmética y para el análisis. Si hubieran tenido éxito, ¿estarían los kantianos definitivamente condenados al silencio? Puede ser que no porque reduciendo el pensamiento matemático a una forma hueca, se le mutila.

Por otra parte, la obra de Hilbert también produjo una respuesta por parte de los logicistas. La primera procedía, al poco tiempo de ser publicados los Grundlagen, de Gottlob Frege (1848-1925), y estaba relacionada especialmente con la naturaleza de los axiomas. Entre ambos se producía una crítica mutua a través de varias cartas en las que conceptos como axioma, demostración o consistencia eran entendidos de formas diferentes. Frege concebía los axiomas geométricos a la manera tradicional que los consideraba verdaderos por naturaleza, por expresar nociones o leyes adquiridas por la experiencia. Esto significaba que si se respetaban las leyes de deducción lógica nunca podría surgir una contradicción. Para Hilbert, por el contrario, se escogían arbitrariamente y si no se contradecían entonces eran verdaderos.

Estas discrepancias, sin embargo, no impidieron restar mérito a la labor de Hilbert, como lo muestran las múltiples ediciones y traducciones de los *Grundlagen* a numerosos idiomas. Hay que destacar también que con cada nueva edición, Hilbert hace correcciones en el texto y va añadiendo nuevos apéndices que incluyen especialmente el contenido de sus numerosas conferencias.

Otro efecto importante de la obra de Hilbert fue el que tuvo lugar en él mismo. Hilbert, animado por el éxito de lo conseguido con los *Grundlagen*, se propone llevar su método axiomático a las demás ramas de la matemática, comenzando por las que eran más adecuadas y fáciles de axiomatizar, esta vez desde una aproximación a la lógica. Su nueva empresa, no obstante, se topará de nuevo con críticas y dificultades, como el problema de la consistencia de la aritmética o las paradojas de Bertrand Russell y Ernst Zermelo referentes a la teoría de conjuntos. En su conferencia sobre los Fundamentos de la Matemática y de la Lógica en Heidelberg (1904)[3] afirmaba que los problemas se solucionarían “reduciendo

[1] *Les fondements de la géometrie.* Bulletin des Sciences Mathématiques. (1902)

[2] *Les mathématiques et la logique, Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 294-317 (1906). Extraído de [30, p. XXXVIII]

[3] *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*

parcialmente la aritmética a la lógica". Como se puede ver en el apéndice VII de la séptima edición de los *Grundlagen* que recoge dicha conferencia, Hilbert recurre por primera vez al lenguaje formal y demuestra la consistencia para los números enteros positivos, no sin enfrentarse nuevamente a comentarios de desaprobación sobre su procedimiento por parte de Poincaré. Las críticas y la dificultad de demostrar la consistencia de los números reales le hicieron abandonar sus pretensiones hasta que, indignado por la expansión de las ideas intuicionistas que se oponían al tercio excluso y fundamentaban las matemáticas en la intuición, retoma el tema. En esta ocasión lo hará desarrollando su *teoría de la demostración* (*Beweistheorie*), con la que se proponía demostrar la consistencia de su sistema formal a través de una lógica básica especial libre de toda objeción y utilizando métodos finitarios. En estos métodos "no debe haber ninguna referencia a una cantidad infinita de propiedades estructurales de las fórmulas ni a un número infinito de manipulaciones con ellas" (Kline, p. 1594, 1992). Sin embargo, sus esperanzas se verán frenadas por la publicación de los *teoremas de incompletitud*[4] de Gödel en 1931. Los teoremas de Gödel borraban de la mente de Hilbert la idea de que los objetivos de su programa pudieran hacerse realidad, pero para entonces este matemático ya había impuesto en la geometría y la matemática un sello muy personal y difícil de borrar. Los *Grundlagen* habían establecido las raíces de un gran proyecto que marcará a partir de entonces una nueva forma de hacer matemáticas, en la que el sistema axiomático y el concepto de estructura se convertirán en herramientas imprescindibles y la conexión entre geometría y álgebra se hará más evidente. El alcance de las matemáticas experimentó una enorme expansión llevándose a cabo numerosos estudios e investigaciones, tanto en ellas como en otros ámbitos de la ciencia. Se elaboraron obras sobre la base del método hilbertiano tan populares e influyentes como *Moderne Algebra* (1930) del holandés Bartel Leendert van der Waerden o *Théorie des Opérations Linéaires* (1932) del polaco Stefan Banach. Además, según Bombal en [4] el grupo matemático Bourbaki nacía de un proyecto común que pretendía escribir una obra sobre análisis basada en la axiomática de Hilbert. Tanto su *Tratado de análisis* como sus trabajos posteriores ejercerán una gran influencia en las matemáticas a lo largo del siglo XX.

[4]Teorema 1. "Si elegimos como axioma cualquier conjunto de enunciados aritméticos verdaderos y exigimos que las demostraciones que hagamos a partir de ellos sean verificables algorítmicamente, entonces habrá al menos un enunciado verdadero que no puede ser demostrado a partir de esos axiomas." (Extraído de [26, p. 125]).
Teorema 2. "Si un sistema de axiomas aritméticos es consistente y puede demostrar todos los enunciados finitistas verdaderos, entonces el enunciado aritmético que afirma la consistencia del conjunto de axiomas no es demostrable a partir de esos mismos axiomas." (Extraído de [26, p. 150]).

Bibliografía

[1] Torres, C. (1999). *Los sistemas formales.* Ciudad de México, México: Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de (http://computo.ceiich.unam.mx/webceiich/docs/libro/Los_sistemas_formales.pdf)

[2] Berenguer, J. (2016). *Monge: el padre de la geometría descriptiva.* RBA. Recuperado de (http://www.librosmaravillosos.com/Monge/pdf/Monge_-_Joaquim_Berenguer_Claria.pdf)

[3] Bombal, F. (2013). *David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre.* Rev. Real Acad. Ci. Exactas Físicas y Naturales. Recuperado de (https://rac.es/ficheros/doc/01105.pdf)

[4] Bombal, F. (2015). *Una mirada a las matemáticas del siglo XX.* Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Recuperado de (https://rac.es/ficheros/doc/01155.pdf)

[5] Carrión, J. (1988). *La geometría en la génesis y desarrollo de las Matemáticas* (trabajo de grado). Universidad de Sonora, México. Recuperado de (https://lic.mat.uson.mx/tesis/51TesisJosefinaC.PDF)

[6] O'Connor, J. J. y Robertson E. F. (2014). *David Hilbert.* MacTutor. Recuperado de (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/).

[7] Contreras Oré, F. A. (2017). La axiomática. *Horizonte De La Ciencia.* Vol. 7 (12), 111-121. Recuperado de (https://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/341/357)

[8] Euclid. and Heath, T. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Cambridge: Cambridge University Press.

[9] Euclides. (1991). *Elementos.* Libros I-IV. (M. L. Puertas, y L. Vega, Trads.) Madrid: Editorial Gredos. Recuperado de (https://www.pieresko.net.ar/libros/Gredos/euclides%20-%20elementos-i-iv.pdf)

[10] Ferreirós, J. *Biografía matemáticos: David Hilbert.* Recuperado de (https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Hilbert2.asp.htm)

[11] Giovannini, E. N. (2015). *Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje: Vol. 8. David Hilbert y los fundamentos de la geometría.* College publications.

[12] González, P. M. (s. f.) *Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: los Elementos de Euclides, el método de Arquímedes, la geometría de Descartes.* La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática. Recuperado de (https://docplayer.es/22859062-Los-elementos-de-euclides-el-metodo-de-arquimedes-la-geometria-de-descartes.html)

[13] González, P. M. (s. f.) *Biografía matemáticos: Platón.* Recuperado de (https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Platon3.asp.htm).

[14] Greenberg, M. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history.* New York: W.H. Freeman.

[15] Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la geometría.* (F. Cebrián, Trad.) Madrid, España: Editorial CSIC. (Obra original publicada en 1930)

[16] Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* (E. J. Townsend, Trad.) La salle, Illinois: Open Court Publishing. (Obra original publicada en 1902)

[17] Itard, J. (1993). Hilbert (David). *Gran Larousse Universal* [versión impresa]. Barcelona, España. Plaza y Janés Editores, S. A.

[18] Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid, España: Alianza Editorial.

[19] Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático.* Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: AZ.

[20] Levi, B. (2001). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Argentina: Zorzal.

[21] Mato, N. (2010). *Orígenes y desarrollo de la enseñanza de lenguas extranjeras en Alemania.* Pragmalingüística. 10.25267/Pragmalinguistica.2010.i18.01.

[22] Martin Merino, M. (2017). *Los orígenes del pensamiento científico.*

[23] Montesinos, J. M. (1992) *Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai*, Historia de la Matemática en el siglo XIX. Real Academia de Ciencias. España, Madrid. Recuperado de (https://eprints.ucm.es/id/eprint/22146/1/montesinos50.pdf)

[24] Murillo, D. M. (2017). *La evolución de los cánones de rigurosidad en torno a la demostración en geometría: geometría intuitiva, geometría axiomática y geometría formal* (trabajo de grado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de (https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/11324/CB-0525604.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

[25] Palero, B. (2000). *Hilbert.* Números: Revista de didáctica de las matemáticas (43): 21-24. Recuperado de (http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo02.pdf)

[26] Piñeiro, G. (2012). *Gödel. Dos teoremas que revolucionaron las matemáticas.* RBA. Recuperado de (http://www.librosmaravillosos.com/Godel/pdf/Godel_-_Gustavo_Pineiro.pdf)

[27] Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática.* Gedisa.

[28] Rojas, R. (2016) *Los sistemas axiomáticos.* Recuperado de (https://www.unam.mx/).

[29] Ruiz, A. (1999). *Geometrías no euclidianas.* Montes de Oca, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica. Recuperado de (https://issuu.com/moskar/docs/geometrias_no_euclidianas)

[30] Sánchez, J. M. (1991). Introducción. En David Hilbert, *Fundamentos de la geometría.* Madrid, España. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

[31] Venema, G. A. (2011). *Foundations of geometry.* (2nd ed). Pearson Education.