



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Distancia homotópica e Planificación de movementos en Robótica

Esther Yusta Arruti

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Distancia homotópica e Planificación de movementos en Robótica

Esther Yusta Arruti

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Distancia homotópica e Planificación de movementos en Robótica
Breve descrición do contido
A "distancia homotópica" é un novo invariante topolóxico, que xeraliza a Categoría de Lusternik-Schnirelmann e a Complexidade Topolóxica de Farber. Unha aplicación é a resolución dun problema xeralizado de planificación de movementos en robótica. No traballo daranse as principais propiedades e métodos de cálculo destes invariantes, así como aplicacións dos mesmos.
Recomendacións
Aconséllase ter cursadas as materias de Topoloxía ("Topoloxía Xeral" e "Topoloxía de Superficies") xa que se usan nocións de homotopía.
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Distancia homotópica. Exemplos	1
1.1. Distancia homotópica	1
1.2. Categoría de Lusternik–Schnirelmann	2
1.3. Complexidade Topolóxica	4
2. Xénero de Svarc	9
2.1. Fibracións	9
2.2. Pullbacks	11
2.3. Xénero de Svarc. Aplicacións	12
3. Propiedades	15
3.1. Composición	15
3.2. Dominio e codominio	17
3.3. Invarianza	18
4. Espazos normais	21
4.1. Unha propiedade dos espazos normais	21
4.2. Desigualdade Triangular	24
4.3. Produto	25
5. Cohomoloxía	27
5.1. Definicións	27
5.2. Produto cup	30
5.3. Cotas cos graos de nilpotencia das clases de cohomoloxía	32

6. Exemplos	35
6.1. Aplicacións na circunferencia	35
6.2. Brazo robótico articulado	38
6.3. Corpos ríxidos	41
Bibliografía	47

Resumo

A distancia homotópica é un novo invariante topolóxico, que xeraliza a Categoría de Lusternik-Schnirelmann e a Complexidade Topolóxica de Farber. Unha aplicación é a resolución dun problema xeralizado de planificación de movementos en robótica. No traballo daranse as principais propiedades e métodos de cálculo destes invariantes, así como aplicacións dos mesmos.

Abstract

The homotopic distance is a new topological invariant, which generalizes the Lusternik-Schnirelmann Category and Farber's Topological Complexity. One application of this notion is to solve a generalized motion planning problem in robotics. The main properties and applications as well as calculation methods of these invariants will be given in the work.

Introdución

A *categoría de Lusternik-Schnirelmann*, $\text{cat}(X)$, é un invariante homotópico que mide con cantos abertos contraíbles podemos revestir un espazo topolóxico X . Foi amplamente estudado dende a súa aparición, no 1934. Xordeu no contexto de cálculo de variacións en variedades diferenciais [10], como un xeito de limitar inferiormente o número de puntos críticos de calquer función diferenciable. Unha referencia moi coñecida é [1]. Para aforrar notación, ao longo do ensaio, denotarémola como categoría LS ou cat LS .

Outro invariante, moi relacionado con este, foi definido por Michael Farber en 2000 [?]. Trátase da *complexidade topolóxica*, $\text{TC}(X)$, que cuantifica o número de algoritmos precisos para resolver problemas de planificación de movementos en robótica; é dicir, mide a complexidade dun problema navegacional nun espazo topolóxico X visto como o espazo de configuracións dun sistema. Unha referencia básica para a robótica topolóxica é [7].

Tanto a complexidade coma a categoría son exemplos dun concepto topolóxico máis xeral, chamado xénero de Svarc dunha fibración (Definición 2.3). As fibracións, así como os pullback (Definición 2.6), que podemos interpretar como un cambio de base dunha fibración, son de gran relevancia na topoloxía. En concreto polas súas propiedades homotópicas, que explotaremos para traballar coa categoría e a complexidade.

Así, calcular o xénero de Svarc da fibración de camiños $\pi : PX \rightarrow X \times X$ (1.3) é equivalente a atopar seccións continuas desta fibración, é dicir, coincide co cálculo da complexidade topolóxica de X . Asimesmo, o cálculo do xénero de Svarc do pullback de dita fibración de camiños (Exemplo 2.8), coincide co cálculo da categoría LS de X .

Con todo, estes invariantes son moi difíciles de calcular; tal motivo serviu de motivación para Enrique Macías e David Mosquera, que moi recentemente observaron que tanto a categoría LS como a complexidade topolóxica poden ser concebidos como casos particulares dun novo invariante [11], que chamaron *distancia homotópica*, $D(f, g)$, entre dúas aplicacións continuas $f, g : X \rightarrow Y$. Mide como de lonxe están dúas aplicacións de seren homótopas, máis o seu principal interese reside en que simplifica moitas demostracións e explica por qué a categoría e a distancia comparten moitas propiedades semellantes.

Resulta que se X é un espazo topolóxico (para simplificar sempre o suporemos conexo

por camiños), e $x_0 \in X$ é un punto calquera, entón a categoría LS é igual á distancia entre a identidade e a aplicación constante, $\text{cat}(X) = D(\text{id}_X, x_0)$. Tamén, se chamamos $i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X$ ás inclusións de X en cada un dos eixos do produto, é dicir, $i_1(x) = (x, x_0)$ e $i_2(x) = (x_0, x)$, tense que $\text{cat}(X) = D(i_1, i_2)$.

Do mesmo xeito, a complexidade topolóxica coincide cá distancia entre as proxeccións $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$, é dicir, $\text{TC}(X) = D(p_1, p_2)$.

Estas igualdades permiten demostrar resultados coñecidos dun xeito sinxelo baseándose en propiedades da distancia. Por exemplo, do seu comportamento cás composicións,

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(f, g) \geq D(h' \circ f, h' \circ g)$$

síguese que

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X).$$

Ademais, se $f, g : X \rightarrow Y$ son aplicacións continuas, a distancia está limitada pola categoría do dominio e pola complexidade topolóxica do codominio,

$$\text{cat}(X) \geq D(f, g) \leq \text{TC}(Y).$$

Unha propiedade moi interesante da distancia, que non era visible nos invariantes clásicos, é que é unha verdadeira *distancia* no espazo de clases de homotopía de aplicacións continuas. É dicir, se denotamos $[f]$ a clase das aplicacións continuas $f : X \rightarrow Y$ para a relación de equivalencia $f \simeq f'$ se e soamente se f, f' son homótopas, resulta que $D([f], [g])$ está ben definida e se cumpren os tres axiomas:

1. $D([f], [g]) = 0$ se e soamente se $[f] = [g]$,
2. $D([f], [g]) = D([g], [f])$,
3. $D([f], [g]) \leq D([f], [h]) + D([h], [g])$.

Para a desigualdade triangular debemos pedir que o dominio X sexa un espazo normal. A demostración baséase nun Lema de Oprea e Strom [15] que demostramos con coidado neste traballo, e que serve para demostrar outras propiedades interesantes da distancia e dos seus casos particulares. Por exemplo,

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y).$$

A demostración que damos é moito máis sinxela que a orixinal de Fox que aparece en [1].

En xeral, o cálculo de $\text{cat}(X)$, $\text{TC}(X)$ e $D(f, g)$ conséguese limitándoos superior e inferiormente. As cotas superiores xorden de resultados xerais, moitos deles relacionados

coa cohomoloxía. En concreto co grao de nilpotencia do grupo de cohomoloxía de certos espazos topolóxicos. Por exemplo, se consideramos $\mathcal{J}(f, g)$ a imaxe do homomorfismo lineal $f^* - g^* : H(Y) \rightarrow H(X)$, entón $\text{l.c.p.} \mathcal{J}(f, g) \leq D(f, g)$ (Teorema 5.20). Onde l.c.p. denota a lonxitude máxima do produto cup (Definición 5.16). Outra cota interesante é: $\text{l.c.p.}(H(X)) \leq \text{cat}(X)$.

Non obstante, tamén se pode optar por tentar atopar os revestimentos abertos explícitos que cumpren a definición. Por exemplo, se queremos calcular a categoría da circunferencia unidade \mathbb{S}^1 , atopamos os abertos $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ e $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ que son contraíbles (Figura 1), polo que xa saberemos que $\text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$. Pois $\text{cat} + 1$ é o tamaño mínimo dun revestimento con esa propiedade e asimesmo a circunferencia non é contraíble (o que limita inferiormente por 1 a categoría).

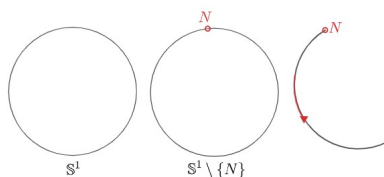


Figura 1: Demostración da categoría de \mathbb{S}^1

Finalmente, convén resaltar que estes invariantes teñen aplicacións en campos como a enxeñería. Como xa dixemos, a definición orixinal de Farber para a complexidade topolóxica $\text{TC}(X)$ está directamente relacionada coa planificación de movementos en robótica. Tal é o caso de plataformas coma *Google Maps*, que aínda a día de hoxe seguen estudando o xeito de construír camiños continuos entre dous destinos con dependencia do punto de partida e chegada.

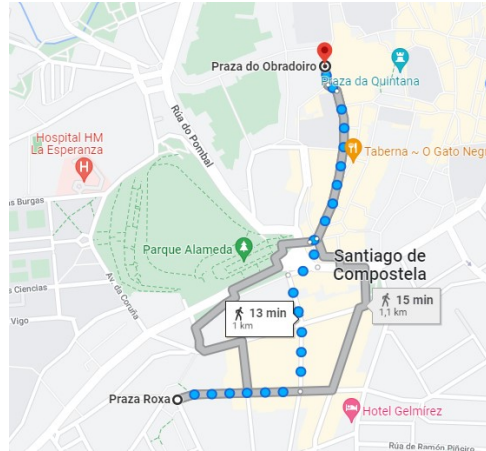


Figura 2: Traxecto en *Google Maps*

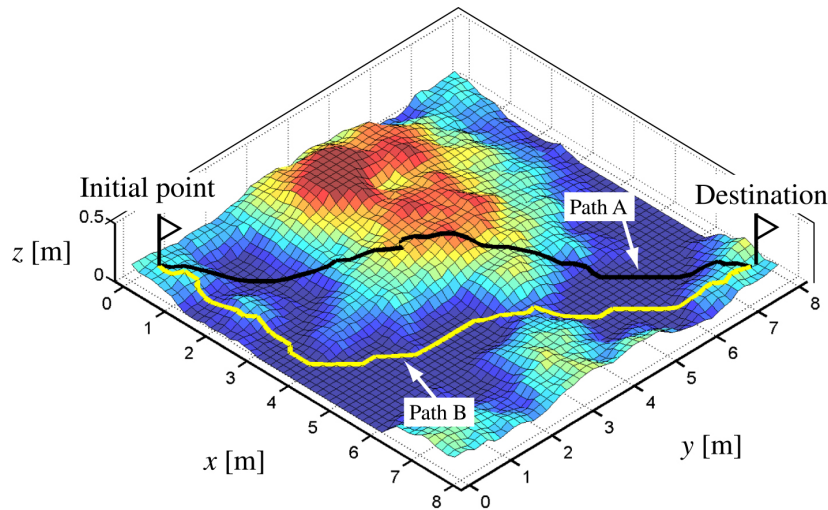
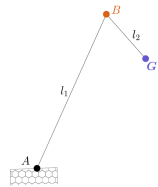


Figura 3: Construción de algoritmos de planificación de movementos

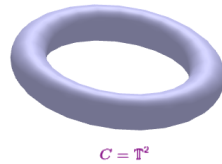
Un exemplo que a simple vista pode parecer moi sinxelo pero que ten consecuencias de gran relevancia é o cálculo da complexidade e mais da categoría dunha circunferencia \mathbb{S}^1 , que sería $TC(\mathbb{S}^1) = \text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$. O que implicaría que todos os algoritmos de planificación de movementos globais en \mathbb{S}^1 , que podemos identificar cunha rotonda ou con múltiples obxectos do noso redor, serían discontinuos. Mais tan só dous algoritmos son suficientes para resolver o problema de planificación de movementos na circunferencia: moverse polo arco máis curto que conecta x e x' , e cando sexan antipodais decidirse pola referencia que apunta no sentido das agullas do reloxo (que é unha referencia global sen singularidades).

Tamén podemos considerar un robot (que pode ser tanto un brazo robótico, coma

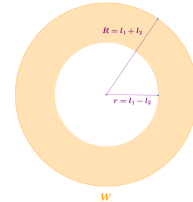
unha aspiradora autónoma ou un dron) xunto co seu espazo de configuracións posibles X . Plantexámonos neste caso o problema de dar algoritmos continuos para desprazarse entre dous puntos arbitrarios $x, x' \in X$.



(a) Brazo robótico de dúas articulacións



(b) Espazo configuración brazo robótico de dúas articulacións



(c) Espazo de traballo do brazo robótico de dúas articulacións

Outro obxecto de estudo interesante podería ser o espazo de configuración dun corpo ríxido, como pode ser un avión, que sería o grupo de rotacións de \mathbb{R}^3 , $SO(3) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / AA^T = Id_3, \det(A) = 1\}$.

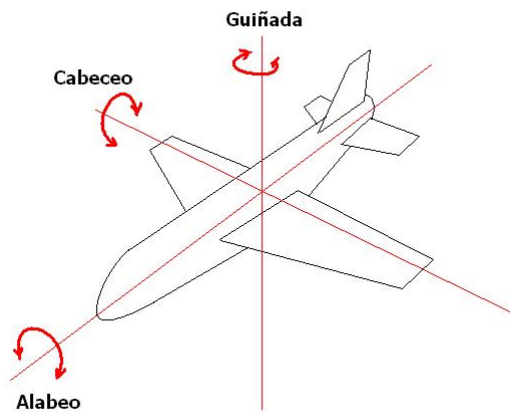


Figura 4: Movements dun avión

En definitiva, este traballo está adicado a analizar novos invariantes homotópicos inspirados nunha ampla variedade de aplicacións na robótica e na enxeñería. A robótica topolóxica é unha rama recente das matemáticas que goza dunha gran popularidade na actualidade. Este documento está focalizado no estudo da distancia homotópica, un novo invariante topolóxico que xeraliza invariantes clásicos como a Categoría de Lusternik-Schnirelmann e a Complexidade Topolóxica de Farber. Daremos as súas propiedades principais e centrare-

monos na resolución dun problema xeralizado de planificación de movementos na robótica; para iso comentaremos algúns métodos de cálculo destes invariantes. Seguiremos principalmente a liña do artigo [11], no que E. Macías e D. Mosquera introduciron o concepto de distancia homotópica. Paralelamente, falaremos tamén da complexidade topolóxica e da categoría de Lusternik-Schnirelmann, tomando as ideas recollidas en [7] e [1] respectivamente. Exploraremos a relación que teñen coa distancia, concluiremos novos resultados e daremos demostracións alternativas dos xa coñecidos. Complementaremos os resultados basándonos en [8], [16] e [13] fundamentalmente.

Máis detalladamente, no Capítulo 1 presentamos os conceptos de distancia homotópica, de categoría de Lusternik-Schnirelmann e de complexidade topolóxica. Asimesmo, estableceremos a primeira relación destes dous invariantes clásicos coa distancia, véndoos como casos particulares da mesma. No que concerne á categoría, daremos unha xeralización deste concepto aplicado a funcións continuas. Respecto á complexidade, veremos tamén que para un sistema que non teña un espazo de configuracións contraíble, calquer algoritmo de planificación de movementos será discontinuo. O Capítulo 2 trata sobre o xénero de Svarc, introduciremos este concepto e unha serie de definicións previas indispensábeis para a súa comprensión. Falaremos primeiro das fibracións e dos pullbacks, e ilustraremos ambos con algúns exemplos. Máis adiante probaremos, empregando os exemplos anteriores, que o xénero de Svarc engloba tamén aos tres invariantes homotópicos mencionados. Cabe destacar que ata a aparición da distancia, tanto a complexidade coma a categoría se traballaban como casos particulares do xénero de Svarc dunha fibración, o que técnicamente é máis complexo. Veremos na Sección 2.3 que tamén podemos caracterizar así a distancia homotópica. No Capítulo 3 estudaremos certas propiedades da distancia homotópica que teñen que ver cá composición, có dominio e codominio e cá invarianza. Istanos axudarán a estudar a relación entre a distancia, a categoría e a complexidade, así como a concluir novos resultados e cotas entre os tres invariantes. Na Sección 3.3 probaremos que tanto a categoría coma a complexidade son invariantes homotópicos, neste mesmo subcapítulo veremos que distancia tamén será un invariante homotópico, pero nun sentido máis xeralizado. Con todo ningún destes resultados serve para concluir que a distancia homotópica sexa, en efecto, unha auténtica distancia. Para iso debemos atopar certos espazos topolóxicos nos que se verifique a desigualdade triangular. Nace de aí o Capítulo 4, que se centra no estudo dos espazos normais. Pois neles si que se verifica esta última propiedade. Na primeira sección do capítulo describiremos os resultados previos para a proba dun lema moi importante na topoloxía debido á súa gran xeralidade. Precisarémolo para probar que, efectivamente, a desigualdade triangular se verifica nos espazos topolóxicos normais. A continuación, concluiremos tamén novos resultados notables para o espazo produto, que mellora consi-

derablemente as súas propiedades se ambos factores son espazos normais. O Capítulo 5 céntrase en achar cotas da categoría, a complexidade e a distancia empregando nocións básicas de cohomoloxía, en concreto sobre o grao de nilpotencia das clases de cohomoloxía. Abordaremos primeiro unha serie de definicións e propiedades xerais, para posteriormente falar do produto cup, que é o que lle outorgará ao noso grupo de cohomoloxía estrutura de anel graduado, co que nos será máis doado traballar. Logo, comentaremos cales son esas cotas de nilpotencia e poremos algúns exemplos. Finalmente, os resultados e técnicas presentados ao longo do traballo confluen no Capítulo 6. Ilustraremos o exposto ata o presente con algúns exemplos con aplicacións na robótica e na enxeñería. Comezaremos adentrándonos na circunferencia, que se pode identificar con múltiples obxectos da vida real, como pode ser unha rotonda. Veremos que nin a súa categoría nin a súa complexidade son nulas. Do que podemos deducir que non existe un algoritmo de planificación de movementos continuo nela. Na seguinte sección estudaremos a categoría e a complexidade do espazo de configuración e de traballo dun brazo robótico articulado. Xa para rematar, na última sección veremos estes mesmos invariantes para o espazo de configuración dos movementos dun corpo ríxido, como pode ser un avión. Como curiosidade, na derradeira subsección comentaremos un caso particular moi coñecido, o bloqueo de cardán ou *Gimbal-Lock*, pois un caso moi sonado foi a misión fallida do Apolo 13 en 1970.



Figura 5: Apolo 13

Capítulo 1

Distancia homotópica. Exemplos

Queremos analizar novos invariantes homotópicos inspirados nunha ampla variedade de aplicacións na robótica e na enxeñería. Focalizaremos este traballo no estudo da distancia homotópica, un invariante homotópico recente que engloba nocións clásicas como a categoría de Lusternik–Schnirelmann e a complexidade topolóxica. Foi introducido en 2020 por dous matemáticos da Universidade de Santiago de Compostela: Enrique Macías Virgós e David Mosquera Lois, como se pode ver no Artigo [11]. Logo a través do seu estudo probaremos propiedades destas dúas conxuntamente, acharemos cotas para a categoría e a complexidade, concluiremos novos resultados e veremos exemplos das súas aplicacións.

Neste capítulo seguiremos principalmente as referencias do Artigo [11] anteriormente citado. Para afondar máis sobre algunhas nocións sobre a categoría LS seranos de gran axuda [1] e sobre a complexidade topolóxica empregaremos sobre todo [7].

1.1. Distancia homotópica

Asumiremos todo o tempo sen perda de xeralidade que X e Y son espazos topolóxicos conexos por camiños. Pois no caso de non selo poderíamos traballar coa compoñente conexa correspondente. É razoable pedir esta hipótese pois queremos estudar a existencia de algoritmos de planificación de movementos (Definición 1.10).

Antes de comezar coa definición de distancia homotópica, aclararemos brevemente a notación que empregaremos. Dadas dúas aplicacións f e g , o símbolo $f \simeq g$ denota que son homótopas. Ademais para simplificar notación definiremos $\mathbf{U} = U_0 \sqcup \dots \sqcup U_n$ a unión disxunta de tódolos abertos do revestimento. O que induce a aplicación inclusión $\mathbf{u} : \mathbf{U} \hookrightarrow X$. É o mesmo dicir entón: $f|_{U_i} \simeq g|_{U_i}$, para todo $i \in \{0 \dots n\}$ que $f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$.

Definición 1.1. Sexan X e Y espazos topolóxicos conexos por camiños e $f, g : X \rightarrow Y$ dúas aplicacións continuas. A distancia homotópica entre as aplicacións f e g , denotada

$D(f, g)$, é o menor enteiro $n \geq 0$ tal que existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de X de xeito que $f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$, para todo $i \in \{0 \dots n\}$. Se non existe tal revestimento diremos que $D(f, g) = \infty$.

Intuitivamente dános unha idea de como de lonxe están dúas aplicacións de seren homótopas.

Doutra banda, como o seu propio nome indica, queremos traballar con este concepto coma se fose unha distancia. De momento, tal e como o temos definido pode deducirse directamente que :

1. $D(f, g) = D(g, f)$,
2. $D(f, g) = 0 \iff f \simeq g$.

Para a propiedade 1, $f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$, entón existe $H : \mathbf{U} \times [0, 1] \longrightarrow Y$ continua tal que $H(x, 0) = (f \circ \mathbf{u})(x)$ e $H(x, 1) = (g \circ \mathbf{u})(x)$, para todo $x \in \mathbf{U}$. Polo que bastaría traballar con $H(x, 1-t)$ no canto de $H(x, t)$ para ter que $g \circ \mathbf{u} \simeq f \circ \mathbf{u}$ e polo tanto $D(f, g) = D(g, f)$.

Só con istas dúas propiedades non podemos concluír que sexa unha distancia, pois nos falta a desigualdade triangular. Veremos no Capítulo 4 que se dá cando X é un espazo topolóxico normal.

Na seguinte Proposición, como xa adiantamos antes, vemos que unha propiedade inmediata, pola propia definición de homotopía, é que a distancia homotópica só depende da clase de homotopía:

Proposición 1.2. *Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, entón:*

$$D(f, g) = D(f', g').$$

1.2. Categoría de Lusternik–Schnirelmann

O clásico paradigma reduccionista das matemáticas sempre foi descompoñer un obxecto en pezas moito máis simples co obxectivo de estudalo a través de analizar ditas pezas e como encaixan entre elas. Claramente a peza máis simple posible sería un punto. Xorde entón a pregunta de con cantos abertos contraíbles poderíamos revestir un espazo topolóxico dado. Nace de aí o concepto de Categoría de Lusternik-Schnirelmann que abordaremos nesta sección.

Este concepto débelle o nome a dous matemáticos soviéticos L. Lusternik e L.Schnirelmann, que entre os anos 20 e 30 descubriron que proporcionaba unha cota inferior do número de

puntos críticos para calquer función diferenciable en variedades diferenciais. Estudando as súas consecuencias xeométricas se atoparon numerosos resultados de interese, pois aportaba tamén unha cota dos elementos de nilpotencia nas clases de cohomoloxía (estudáremolo máis adiante no Capítulo 5). Foi así como tornou nun concepto moi importante na topoloxía alxébrica.

Definición 1.3. Sexa X un espazo topolóxico, un conxunto U de X é categórico se é contraíble en X . É dicir, se a inclusión $i : U \hookrightarrow X$ é homótopa a unha aplicación constante $c : U \rightarrow X$, $c(u) = p_0 \in X$, para todo $x \in X$.

Definición 1.4. A categoría de Lusternik–Schnirelmann de X , $\text{cat}(X)$, é o menor enteiro $n \geq 0$ tal que existe un revestimento aberto categórico de X con $n + 1$ elementos. Se non existe tal revestimento finito diremos que $\text{cat}(X) = \infty$.

Caracterizando este invariante en termos da distancia homotópica, podemos manexar a seguinte igualdade $\text{cat}(X) = D(\text{id}_X, *)$, sendo $*$ calquer aplicación constante. Daremos agora outras dúas caracterizacións en termos da distancia:

Proposición 1.5. Sexa X un espazo topolóxico, dado un punto base $x_0 \in X$ con X espazo topolóxico, definimos: $i_1, i_2 : X \hookrightarrow X \times X$ aplicacións inclusión, $i_1(x) = (x, x_0)$, $i_2(x) = (x_0, x)$. Temos así:

$$\text{cat}(X) = D(i_1, i_2).$$

Demostración. Probaremos primeiro que $\text{cat}(X) \geq D(i_1, i_2)$.

Se $\text{cat}(X) = n$, podemos tomar un revestimento aberto categórico de X : $\{U_0 \dots U_n\}$. Tendo por definición que $\text{id}_X \circ \mathbf{u} \simeq * \circ \mathbf{u}$, onde \mathbf{u} é a aplicación inclusión de \mathbf{U} en X anteriormente definida. Vexamos que $i_1 \circ \mathbf{u} \simeq i_2 \circ \mathbf{u}$ para probar a desigualdade:

$$i_1 \circ \mathbf{u} = (\text{id}_X, *) \circ \mathbf{u} = (\text{id}_x \circ \mathbf{u}, * \circ \mathbf{u}) \simeq (* \circ \mathbf{u}, \text{id}_x \circ \mathbf{u}) = (*, \text{id}_X) \circ \mathbf{u} = i_2 \circ \mathbf{u}.$$

Falta probar entón que $\text{cat}(X) \leq D(i_1, i_2)$.

Se $D(i_1, i_2) = n$, entón sabemos que existe un revestimento aberto de X : $\{U_0 \dots U_n\}$ tal que $i_1 \circ \mathbf{u} \simeq i_2 \circ \mathbf{u}$. É dicir, existe $H : \mathbf{U} \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ homotopía entre $i_1 \circ \mathbf{u}$ e $i_2 \circ \mathbf{u}$. Así, tal e como definimos i_1 e i_2 , compoñendo coas proxeccións, teríamos que $\text{id}_X \circ \mathbf{u} \simeq * \circ \mathbf{u}$ e quedaría probada a desigualdade.

Concluimos entón que $\text{cat}(X) = D(i_1, i_2)$. \square

Proposición 1.6. Sexa X espazo topolóxico, i_1, i_2 as aplicacións inclusión no primeiro e segundo factor respectivamente e Δ é a aplicación diagonal. Temos así:

$$\text{cat}(X) = D(\Delta, i_1) = D(\Delta, i_2).$$

Demostración. Probaremos a iguadade só para i_1 , pois o caso de i_2 é análogo. Primeiro veremos que $\text{cat}(X) \geq D(\Delta, i_1)$. Se $\text{cat}(X) = n$, existe un revestimento de X de abertos categórico $\{U_0 \dots U_n\}$. Vexamos que $i_1 \circ \mathbf{u} \simeq \Delta \circ \mathbf{u}$:

$$i_1 \circ \mathbf{u} = (\text{id}_X, *) \circ \mathbf{u} = (\text{id}_x \circ \mathbf{u}, * \circ \mathbf{u}) \simeq (\text{id}_X \circ \mathbf{u}, \text{id}_x \circ \mathbf{u}) = (\text{id}_X, \text{id}_X) \circ \mathbf{u} = \Delta \circ \mathbf{u}.$$

Falta probar a outra desigualdade: $\text{cat}(X) \leq D(\Delta, i_1)$.

Se $D(\Delta, i_1) = n$, sabemos que existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de X de xeito que $\Delta \circ \mathbf{u} \simeq i_1 \circ \mathbf{u}$. É dicir, existe $H : \mathbf{U} \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ homotopía entre $i_1 \circ \mathbf{u}$ e $\Delta \circ \mathbf{u}$. Así, tal e como definimos i_1 e Δ , tomando compoñentes teríamos que $\text{id}_X \circ \mathbf{u} \simeq * \circ \mathbf{u}$ e quedaría probada a desigualdade. \square

Como vimos, este concepto é unha propiedade dun espazo topolóxico. Podemos adaptalo e xeralizar este concepto para as aplicacións continuas:

Definición 1.7. A categoría de Lusternik–Schnirelmann dunha aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ defínese como: $\text{cat}(f) = D(f, *)$, cando Y é conexo por camiños.

Proposición 1.8. Se dado un espazo topolóxico X se pode expresar como $X = A \cup B$, sendo A e B subconxuntos abertos de X . Entón:

$$\text{cat}(A \cup B) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B) + 1.$$

Demostración. Se $\text{cat}(A) = n$ e $\text{cat}(B) = m$, consideramos os correspondentes revestimentos categóricos de A e B : $\mathcal{U} = \{U_0 \dots U_n\}$, $\mathcal{V} = \{V_0 \dots V_m\}$. Entón $\mathcal{W} = \{U_0, \dots, U_n, V_0, \dots, V_m\}$ é un revestimento categórico de X de $m + n + 2$ elementos, é dicir: $\text{cat}(A \cup B) \leq m + n + 1$ como queríamos probar. \square

1.3. Complexidade Topolóxica

A complexidade topolóxica é un invariante topolóxico introducido por M. Farber en 2003. Mide a complexidade do problema da navegación nun espazo topolóxico X visto como o espazo de configuracións dun sistema (Definición 1.9). Un dos noso obxectivos será estudar os algoritmos de planificación de movementos con aplicacións reais na robótica. Como veremos no Teorema 1.12 desta sección, un espazo topolóxico X non sempre se poderá dotar dun algoritmo de planificación de movementos continuo. É natural cuestionarse entón con cantos abertos que admitan un algoritmo de planificación de movementos podemos revestir o noso espazo X . De aí nace o concepto de complexidade topolóxica.

Definición 1.9. Un espazo de configuracións é un espazo topolóxico X conexo por camiños.

Antes de definir a complexidade topolóxica, denotaremos: $PX = X^{[0,1]} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \text{ continuas}\}$ ao espazo de camiños de X . $\pi : PX \rightarrow X \times X$ á aplicación continua que a cada camiño lle asigna o seu punto final e inicial: $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$. A esta aplicación se lle chama fibración de camiños. A proba da continuidade desta aplicación pode verse en [12]

Definición 1.10. Un algoritmo de planificación de movementos $s : X \times X \rightarrow PX$ é unha sección non necesariamente continua de π , é dicir, satisfai o seguinte: $\pi \circ s = \text{Id}_{X \times X}$. Ademais $s(x, y)(t) \in PX$ é unha función continua para todo $t \in [0, 1]$, para todo $x, y \in X$.

Observación 1.11. Interésanos buscar algoritmos de planificación de movementos que dependan de xeito continuo e x e y , pois dita continuidade implicaría a súa estabilidade. Mentres que se s non é continua o algoritmo non é necesariamente estable. Polo que a partir de agora cada vez que falemos de algoritmo de planificación de movementos asumiremos que é continuo.

Teorema 1.12. *Dado un espazo de configuracións X , cúmprese a seguinte equivalencia:*

$\exists s : X \times X \rightarrow PX$ algoritmo de planificación de movementos continuo $\iff X$ é contraíble.

Demostración. Asumiremos primeiro que X é contraíble, é dicir, existe unha aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = \text{id}_X$ e $H(x, 1) = \hat{x}$, para todo $x \in X$. Onde \hat{x} é unha aplicación constante. Construiremos a aplicación $s : X \times X \rightarrow PX$ que buscamos como: $s(x_0, x_1) = \gamma(t)$. Con:

$$\gamma(t) = \begin{cases} H(x_0, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(x_1, 2 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

En efecto s é un algoritmo de planificación de movementos pois $\gamma(t)$ é continua polo lema do pegado de aplicacións continuas e a continuidade de s podemos vela probada en [12], trivialmente tamén cumpre que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$, é dicir, s é sección de π .

Agora, partindo da existencia un algoritmo de planificación de movementos global $G : X \times X \rightarrow PX$, onde a imaxe de $G(x_0, x_1)$ é un camiño $\gamma_{x_0 x_1}$ que conecta o punto inicial x_0 con x_1 ; queremos ver que X é contraíble. É dicir, que existe unha homotopía $H : \text{id}_X \equiv \hat{x}$, onde \hat{x} é unha aplicación constante. Basta definir $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ como: $H(x, t) = \gamma_{x \hat{x}}(t)$. H é continua pola Definición 1.10. Ademais $H(x, 0) = \text{id}_X$ e $H(x, 1) = \hat{x}$. Logo H era a homotopía que buscábamos para concluir que X é contraíble. \square

Por ser unha equivalencia, se deduce que para un sistema que non teña un espazo de configuracións contraíble, calquer algoritmo de planificación de movementos será discontinuo.

Definición 1.13. A complexidade topolóxica de X , $\text{TC}(X)$, é o menor enteiro $n \geq 0$ tal que existe un revestimento formado por $n + 1$ abertos $\{U_0 \dots U_n\}$ de $X \times X$ de xeito que cada aberto admite unha sección continua $s_i : U_i \rightarrow PX$ de π sobre U_i . É dicir, que o seguinte diagrama sexa conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & PX \\ & \nearrow s_i & \downarrow \pi \\ U_i & \xrightarrow{i} & X \times X \end{array}$$

Pode entenderse tamén como o menor enteiro $n \geq 0$ tal que existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que para cada U_i existe un algoritmo de planificación de movementos. Se non existe tal revestimento finito diremos que $\text{TC}(X) = \infty$

Igual que coa categoría L-S, podemos caracterizar tamén este termo en función da distancia homotópica:

Proposición 1.14. Sexan $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$ as dúas proxeccións, entón

$$\text{TC}(X) = D(p_1, p_2).$$

Veremos a demostración como consecuencia directa do Teorema 2.12 de máis adiante (2.13).

Outra posíbel caracterización de $\text{TC}(X)$ en virtude á distancia homotópica sería:

Proposición 1.15. Sexa X un espazo topolóxico e $\text{flip} : X \times X \rightarrow X \times X$ a aplicación cambio de coordenadas dada por $\text{flip}(x, y) = (y, x)$. Temos que:

$$\text{TC}(X) = D(\text{flip}, \text{id}_{X \times X}).$$

Demostración. Probaremos primeiro que $D(\text{flip}, \text{id}_X) \leq \text{TC}(X)$.

Se $\text{TC}(X) = n$, existe un revestimento aberto de X : $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que cada aberto admite unha sección continua s_i sobre π . Para ver que $\text{flip} \circ \mathbf{u} \simeq \text{id}_{X \times X} \circ \mathbf{u}$ definiremos unha homotopía entre elas:

$$H : \mathbf{U} \times [0, 1] \rightarrow X \times X, H(x, y, t) = (s_i(x, y)(t), s_i(x, y)(1 - t)).$$

H é a homotopía que andabamos buscando pois está ben definida e é unha aplicación continua por selo cada compoñente. Ademais:

$$H(x, y, 0) = (s_i(x, y)(0), s_i(x, y)(1)) = (x, y) = \text{id}_{X \times X}(x, y).$$

$$H(x, y, 1) = (s_i(x, y)(1), s_i(x, y)(0)) = (y, x) = \text{flip}(x, y).$$

Probemos agora a outra desigualdade: $D(\text{flip}, \text{id}_{X \times X}) \geq \text{TC}(X)$.

Se $D(\text{flip}, \text{id}_{X \times X}) = n$, existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que exista unha homotopía $H : \text{flip} \circ \mathbf{u} \simeq \text{id}_X \circ \mathbf{u}$. As seccións continuas de π en cada U_i que andamos buscando son: $s_i : U_i \rightarrow PX$, $s_i(x, y) = H_1(x, y, t)$. Onde H_1 é a primeira compoñente da homotopía H . Claramente s_i é unha sección continua de π . Pois está ben definida, é continua por ser a primeira compoñente dunha aplicación continua e $\pi \circ s_i(x, y) = (x, y)$. \square

Capítulo 2

Xénero de Svarc

Neste capítulo falaremos sobre o xénero de Svarc, concepto que foi desenvolvido polo matemático soviético Albert Svarc. Veremos que está relacionado tamén cos tres invariantes introducidos no Capítulo 1. De feito, ata a aparición da distancia homotópica, tanto a complexidade como a categoría LS eran vistos como casos particulares deste. Para aprofundar máis neste concepto pódese consultar [?], onde se aborda a noción de xénero dunha fibración en máis aspectos. Antes de dar a súa definición e de traballar con ela, adicaremos as dúas seguintes seccións a falar de fibracións e pullbacks, que son indispensables para comezar a traballar co xénero de Svarc. Ademais ilustrarémolas con algúns exemplos que nos servirán máis adiante para caracterizar a categoría e a complexidade en termos do xénero. Seguiremos as referencias do libro [?].

2.1. Fibracións

Definición 2.1. Sexan $p : Y \rightarrow Z$ e $f : X \rightarrow Z$ dúas aplicacións continuas. Un levantamento de f respecto de p é unha aplicación continua $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. É dicir, de xeito que o seguinte diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Definición 2.2 ([16], páx. 355). Unha aplicación $\pi : E \rightarrow B$ ten a propiedade de levantamento de homotopías respecto ao espazo topolóxico Y se dado este diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
Y \times \{0\} & \xrightarrow{\widetilde{H}_0} & E \\
\downarrow i & & \downarrow \pi \\
Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B
\end{array}$$

Existe unha homotopía $\widetilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ que satisfai a propiedade de levantamento respecto H . É dicir, o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
Y \times \{0\} & \xrightarrow{\widetilde{H}_0} & E \\
\downarrow i & \nearrow \widetilde{H} & \downarrow \pi \\
Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B
\end{array}$$

Onde $H : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ é calquer homotopía e \widetilde{H}_0 é calquer levantamento de $H|_{Y \times \{0\}}$.

Definición 2.3 ([16], páx. 355). Unha aplicación continua $\pi : E \rightarrow B$ dise unha fibración de Hurewicz se satisfai a propiedade de levantamento de homotopías respecto a calquer espazo topolóxico Y . Neste caso dise que E é o espazo total e B a base da fibración.

Para abreviar chamarémoslle á fibración de Hurewicz fibración a secas.

Exemplo 2.4. A fibración produto é un exemplo trivial de fibración. Pois como p_1 é a proxección do primeiro factor, basta tomar $\widetilde{H} = (H, H)$.

$$\begin{array}{ccc}
X \times \{0\} & \xrightarrow{\widetilde{H}_0} & B \times B \\
\downarrow i & \nearrow \widetilde{H} & \downarrow p_1 \\
X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B
\end{array}$$

Exemplo 2.5. A aplicación $\pi : PX \rightarrow X \times X$, $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ é unha fibración. Pois dado Y un espazo topolóxico arbitrario, $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ unha homotopía e \widehat{H}_0 calquer levantamento de $H(y, 0)$ tal que o seguinte diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc}
Y \times \{0\} & \xrightarrow{\widehat{H}_0} & PX \\
\downarrow i & & \downarrow \pi \\
Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \times X
\end{array}$$

Podemos contruír $\widehat{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow PX$ de xeito que o seguinte diagrama sexa conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
Y \times \{0\} & \xrightarrow{\widehat{H}_0} & PX \\
\downarrow i & \nearrow \widehat{H} & \downarrow \pi \\
Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \times X
\end{array}$$

Se existe \widehat{H} , esta cumpre que: $\pi \circ \widehat{H}(y, t) = \pi(\gamma_{yt})(\gamma(0), (1)) = (H_1(y, t), H_2(y, t))$.
Basta definir γ_{yt} ou \widehat{H} ? como:

$$\gamma_{yt}(s) = \begin{cases} H_1(y, t - 3s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ \widehat{H}_0(y) \left(\frac{3s-t}{3-2t} \right) & \frac{t}{3} \leq s \leq 1 - \frac{t}{3} \\ H_2(y, 3s + t - 3) & 1 - \frac{t}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2.2. Pullbacks

Definición 2.6 ([8], páx. 406). Sexan $f : X \rightarrow Z$ unha aplicación continua, $\pi : Y \rightarrow Z$ unha fibración e o conxunto $P = \{(x, y) \in X \times Y, f(x) = \pi(y)\}$, defínese o pullback de f coma a aplicación $p : P \rightarrow Y$ que fai o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Onde p y q son proxeccións.

Ademais os pullback satisfan a seguinte propiedade [[16], páx. 359]: dado outro triple (Q, q_1, q_2) , existe unha única aplicación $u : Q \rightarrow P$ tal que: $q \circ u = q_1$ e $p \circ u = q_2$. O seguinte diagrama axuda a visualizar esta cualidade:

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow^{q_2} & & & \\ & & P & \xrightarrow{p} & Y \\ & \searrow^{u} & \downarrow q & & \downarrow \pi \\ & & X & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow^{q_1} & & & \end{array}$$

Onde $q_1 : Q \rightarrow X$ e $q_2 : Q \rightarrow Y$ son morfismos que satisfan: $f \circ q_1 = \pi \circ q_2$. Esta propiedade chámase "Propiedade Universal".

Proposición 2.7. *O pullback dunha aplicación continua $f : X \rightarrow Z$ por unha fibración $\pi : Y \rightarrow Z$ tamén é unha fibración.*

Demostración. En efecto, veremos que o pullback de f pola fibración π porque satisfai a propiedade de levantamento de homotopías. Dado un espazo topolóxico arbitrario W e unha homotopía $H : W \times [0, 1] \rightarrow X$. Definimos o levantamento como: $\widehat{H} : W \times [0, 1] \rightarrow P$, $\widehat{H}(w, t) = (H(w, t), \widehat{f \circ H}(w, t))$. Onde $\widehat{f \circ H}$ é o levantamento da homotopía $f \circ H$ que sabemos que existe por ser π fibración. \square

Exemplo 2.8. Dada a fibración de camiños π , o seu pullback pola aplicación inclusión i_1 sería:

$$P \equiv P_0X = \{\gamma : [0, 1] \longrightarrow X : \gamma(0) = x_0\},$$

onde $x_0 \in X$ é un punto fixado. $q \equiv \pi_0$, $\pi_0(\gamma) = \gamma(1)$. Queda probado así tamén que π_0 é unha fibración.

2.3. Xénero de Svarc. Aplicacións

Definición 2.9. Sexa $\pi : E \longrightarrow B$ unha aplicación continua, o xénero de Svarc de π , $\text{secat}(\pi)$, defínese como o menor enteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que existe un revestimento aberto de B : $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que existan seccións continuas $s_i : U_i \longrightarrow E$ para cada un deles. É dicir, que o seguinte diagrama sexa conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \uparrow s_i & \searrow \pi & \\ U_i & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Tanto a complexidade topolóxica coma a categoría L-S trabállanse coma casos particulares do xénero de Svarc, veremos isto cos dous seguintes exemplos:

Exemplo 2.10. Consideramos a fibración por camiños $\pi : PX \longrightarrow X \times X$. Onde $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$. Entón se cumpre que

$$\text{secat}(\pi) = \text{TC}(X).$$

Pois basta considerar os abertos U_i do revestimento de $\text{TC}(X)$ e as seccións continuas serían os algoritmos de planificación de movementos asociados.

Exemplo 2.11. Consideramos a fibración $\pi_0 : P_0X \longrightarrow X$. Onde $\pi_0(\gamma) = \gamma(1)$. Entón se cumpre que

$$\text{secat}(\pi_0) = \text{cat}(X).$$

Cabe destacar que π_0 é en efecto unha fibración, a súa proba está no Exemplo 2.8. Pois se $\text{secat}(\pi_0) = n$, entón existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ onde en cada aberto π_0 admite unha sección continua $s_i : U_i \longrightarrow P_0X$, que leva cada $x \in U_i \subset X$ a un camiño en γ_x de xeito que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma_x(1) = x$. Polo que podemos definir una homotopía $H : \mathbf{U} \times [0, 1] \longrightarrow X$, $H(x, t) = s_i(x)(t)$. Así $\text{cte}_{x_0} \simeq \text{id}_X \circ \mathbf{u}$, logo $\text{cat}(X) \leq n$. Doutra banda, se $\text{cat}(X) = n$, entón existe un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que $H : k_i \simeq U_i$, $k_i \in X$. Pero por ser X conexo por camiños podemos supór sen perda de xeralidade que $k_i \equiv x_0$. Así, podemos definir unha sección continua $s_i : U_i \longrightarrow P_0X$ de π_0 do seguinte modo: $s_i(x) = \gamma_x$, $\gamma_x(t) = H(x, t)$. Logo $\text{secat}(\pi_0) \leq n$.

Ademais da complexidade e da categoría, podemos caracterizar tamén a distancia homotópica en termos do xénero de Svarc, que como vimos tamén englobaba a estes dous invariantes.

Teorema 2.12 ([11], páx. 4). *Sexan $f, g : X \rightarrow Y$ dúas aplicacións continuas, $\pi : Y^{[0,1]}$ unha aplicación tal que $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ e $P = \{(x, \gamma) : \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = g(x)\}$. Considerando o pullback $p : P \rightarrow Y^{[0,1]}$ de π pola aplicación (f, g) (véxase o seguinte diagrama),*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & Y^{[0,1]} \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{(f,g)} & Y \times Y \end{array}$$

Entón:

$$D(f, g) = \text{secat}(q).$$

Demostración. Primeiro probaremos que $D(f, g) \leq \text{secat}(q)$.

Se $\text{secat}(q) = n$, tomando o correspondente revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ sabemos que existe para cada aberto unha sección continua $s_i : U_i \rightarrow P$, $s_i(x) = \gamma_x$. Como $(x, \gamma_x) \in P$, cúmprese que $\gamma_x(0) = f(x)$ e $\gamma_x(1) = g(x)$. Polo que $H : U_i \times [0, 1] \rightarrow Y$, $H(x, t) = \gamma_x(t)$ é unha homotopía entre $f \circ \mathbf{u}$ e $g \circ \mathbf{u}$. Logo $D(f, g) \leq n$.

Doutra banda, se $D(f, g) \geq \text{secat}(q)$. Sexa $D(f, g) = n$ co seu correspondente revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$. Sabemos que existe unha homotopía $H : f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$. Polo que tomando $s_i : U_i \rightarrow P$, $s_i(x) = \gamma_x(t) = H(x, t)$, teríamos que existe unha sección continua para cada aberto do revestimento, logo $\text{secat}(q) \leq n$. \square

Observación 2.13. Queda probada así a Proposición 1.14, pois tomando $f = p_1$ e $g = p_2$ no Teorema 2.12, teríamos que $(f, g) = id_{X \times X}$ e $q = \pi$, logo

$$D(p_1, p_2) = \text{secat}(\pi) = \text{TC}(X).$$

Capítulo 3

Propiedades

Estudaremos unha serie de propiedades da distancia homotópica que teñen que ver cá composición, có dominio e codominio e cá invarianza. Servirannos para concluir novos resultados e cotas para a categoría L-S e a complexidade topolóxica, que como xa mencionamos, son invariantes homotópicos igual cá distancia. A gran maioría destes resultados podemos atopalos probados no artigo [11]. Ademais, moitas delas son demostracións alternativas de resultados xa coñecidos sobre a categoría e a complexidade. Podemos comprobar lendo [1] e [7], nos que tamén aparecen demostrados gran parte deles, que coa distancia se simplifican notablemente os procedementos.

3.1. Composición

Proposición 3.1. *Dadas calquer aplicacións $f, g : X \rightarrow Y$ e $h : Y \rightarrow Z$. Entón:*

$$D(h \circ f, h \circ g) \leq D(f, g).$$

Demostración. Se $D(f, g) \leq n$, tomando o correspondente revestimento $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que $f_j = f|_{U_j} \simeq g|_{U_j} = g_j$, para todo $j \in \{0 \dots n\}$, $X = U_0 \cup \dots \cup U_n$, entón: $h \circ f_j \simeq h \circ g_j$ por propiedades de homotopía. É dicir: $(h \circ f)_j \simeq (h \circ g)_j$. Polo que $D(h \circ f, h \circ g) \leq n$. \square

Corolario 3.2. *Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación, con X e Y conexos por camiños, entón:*

$$\text{cat}(f) \leq \text{cat}(X).$$

Demostración. Pola propia definición de categoría L-S e aplicando a Proposición 3.1: $\text{cat}(X) = D(\text{id}_X, x_0) \geq D(f \circ \text{id}_X, f(x_0)) = \text{cat}(f)$.

Onde x_0 é unha aplicación constante. \square

Proposición 3.3. *Dadas calquer aplicacións $f, g : X \rightarrow Y$ e $h : Z \rightarrow X$. Entón:*

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(f, g).$$

Demostración. Se $D(f, g) \leq n$ tomando o correspondente revestimento $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que $f_j = f|_{U_j} \simeq g|_{U_j} = g_j$, para todo $j \in \{0 \dots n\}$, $X = U_0 \cup \dots \cup U_n$. Definimos: $V_j = h^{-1}(U_j) \subset Z$, denotamos á restrición: $h_j : V_j \rightarrow X$. Onde claramente $h_j(V_j) = U_j$, logo pode entenderse como a composición de $\bar{h}_j : V_j \rightarrow U_j$, $\bar{h}_j(x) = h(x)$, coa inclusión $i_j : U_j \hookrightarrow X$. Temos así que:

$$(f \circ h)_j = f_j \circ \bar{h}_j \simeq g_j \circ \bar{h}_j = g \circ h_j = (g \circ h)_j.$$

Polo que $D(f \circ h, g \circ h) \leq n$ □

Corolario 3.4. *Sexa $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación continua, con Y conexo por camiños, entón:*

$$\text{cat}(f) \leq \text{cat}(Y).$$

Demostración. Pola propia definición de categoría L-S e a Proposición 3.3:

$$\text{cat}(Y) = D(\text{id}_Y, y_0) \geq D(\text{id}_y \circ f, y_0 \circ f) \geq D(f, y_0) = \text{cat}(f).$$

Onde y_0 é unha aplicación constante. □

Corolario 3.5. *Sexan $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacións continuas con Y conexos por camiños. Entón:*

$$D(f, g) + 1 \leq (\text{cat}(f) + 1)(\text{cat}(g) + 1).$$

Demostración. Sexa $y_0 : X \rightarrow Y$ unha aplicación constante. Se $\text{cat}(f) = D(f, y_0) \leq m$ e $\text{cat}(g) = D(g, y_0) \leq n$, cos correspondentes revestimentos : $\{U_0 \dots U_m\}$ e $\{V_0 \dots V_n\}$. Entón os abertos $W_{i,j} = U_i \cap V_j$ revisten tamén X de xeito que en cada un se verifica: $f \simeq y_0 \simeq g$, e polo tanto: $D(f, g) \leq n + m$. □

Corolario 3.6. *Dado X un espazo topolóxico, se verifica a seguinte desigualdade:*

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X).$$

Demostración. Empregando a definición de cat L-S e as Proposicións ?? e 3.3, temos:

$$\text{cat}(X) = D(*, \text{id}_X) = D(p_1 \circ i_2, p_2 \circ i_2) \leq D(p_1, p_2) = \text{TC}(X).$$

Onde $i_1, i_2 : X \rightarrow X \times X$ son as aplicacións inclusión e $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$ as proxeccións. □

Proposición 3.7. *Sean $h' : Z \rightarrow X$ e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacións tal que: $f \circ h' \simeq g \circ h'$. Entón, dada calquer aplicación $h : Z \rightarrow YX$, cúmprese que:*

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(h, h').$$

Demostración. Se $D(h, h') \leq n$ e $Z = U_0 \cup \dots \cup U_n$ de xeito que $h \circ \mathbf{u} \simeq h' \circ \mathbf{u}$, entón: $f \circ h \circ \mathbf{u} \simeq f \circ h' \circ \mathbf{u} \simeq g \circ h' \circ \mathbf{u} \simeq g \circ h \circ \mathbf{u}$.

Polo que $D(f \circ h, g \circ h) \leq D(h, h')$. □

As Proposicións 3.2, 3.4 e 3.6 non son novos resultados. Senón que son propiedades xa coñecidas (pode verse a proba das dúas primeiras en [1] e da última en [7]). O que fixemos foi propoñer unha demostración alternativa empregando soamente a composición da distancia homotópica, o que simplifica o procedemento.

3.2. Dominio e codominio

Corolario 3.8. *Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dúas aplicacións continuas con X e Y conexos por camiños. Entón:*

$$D(f, g) \leq \text{cat}(X).$$

Demostración. Se $\text{cat}(X) = n$, consideramos o correspondente revestimento aberto categórico de X $\{U_0 \dots U_n\}$. Entón

$$i_j \circ f = f|_{U_j} \simeq g|_{U_j} = i_j \circ g$$

. Por ser a inclusión $i_j : U_j \hookrightarrow X$ unha aplicación nulhomópoa, pois U_j é categórico para todo $i \in \{0 \dots n\}$. □

Corolario 3.9. *Sea X un espazo topolóxico, cúmprese o seguinte:*

$$\text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X).$$

Demostración. Bastaría tomar $f = p_1$ e $g = p_2$ no Corolario 3.8. □

Este corolario tamén posúe unha demostración alternativa probada en [7]. Pode consultarse para ver que efectivamente, empregando as propiedades da distancia homotópica o procedemento é máis sinxelo.

Proposición 3.10. *Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacións, entón:*

$$D(f, g) \leq \text{TC}(Y).$$

Demostración. Empregando o Teorema 2.12 e o Exemplo 2.10, temos que probar a proposición é equivalente a probar que $\text{secat}(q) \leq \text{secat}(\pi)$. Onde π é a fibración por camiños e q o pullback pola aplicación $f \times g$. Se $\text{secat}(\pi) = n$, $Y \times Y$ admite un revestimento aberto $\{U_0 \dots U_n\}$ de xeito que π admite unha sección continua s_i en cada un deses abertos U_i .

Tomamos $\{f \times g^{-1}(U_i)\}_{i=0}^n$ revestimento aberto de X por ser a imaxes recíprocas de abertos do codominio dunha aplicación continua, vexamos que podemos construír para cada un destes unha sección continua $\hat{s}_i : f \times g^{-1}(U_i) \rightarrow P$. Definímolos como: $\hat{s}_i(x) = (x, s_i(f \times g(x)))$. Está ben definida pois como $x \in f \times g^{-1}(U_i)$, $\exists (y_1, y_2) \in Y \times Y$ tal que $f \times g(x) = (y_1, y_2)$. Logo $f \times g(s_i(f \times g(x))) = x$ e polo tanto $\hat{s}_i(x) \in P$. Falta ver que efectivamente \hat{s}_i é unha sección, é dicir, que $q \circ \hat{s}_i = i_{f \times g^{-1}(U_i)}$. Onde $i_{f \times g^{-1}(U_i)}$ é a inclusión. $q(\hat{s}_i(x)) = q(x, s_i(f \times g(x))) = x$.

Queda probado tamén que os pullback nunca fan que aumente o xénero de Svarc. \square

3.3. Invarianza

Nesta sección probaremos a invarianza homotópica da distancia homotópica e, por conseguinte, a invarianza da categoría de Lusternik-Schnirelmann e da complexidade topolóxica por seren casos particulares desta.

Comezaremos por probar que a desigualdade probada nas Proposicións 3.1 e 3.3 acada a igualdade cando consideramos as inversas homotópicas pola esquerda e pola dereita respectivamente. De aí deduciremos noutro resultado que, en efecto, a distancia homotópica é un invariante homotópico.

Proposición 3.11. *Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacións e $\alpha : Y \rightarrow Y'$ aplicación con inversa homotópica pola esquerda. Entón:*

$$D(\alpha \circ f, \alpha \circ g) = D(f, g).$$

Demostración. Sexa $\beta : Y' \rightarrow Y$ a inversa homotópica de α pola esquerda. É dicir: $\beta \circ \alpha \simeq \text{id}_Y$. Aplicando dúas veces a Proposición 3.1:

$$D(f, g) \geq D(\alpha \circ f, \alpha \circ g) \geq D(\beta \circ \alpha \circ f, \beta \circ \alpha \circ g) = D(f, g).$$

\square

Proposición 3.12. *Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ aplicacións e $\beta : Y' \rightarrow Y$ aplicación con inversa homotópica pola dereita. Entón:*

$$D(f \circ \beta, g \circ \beta) = D(f, g).$$

Demostración. A demostración é análoga á anterior. \square

Como consecuencia D é un invariante homotópico no seguinte sentido:

Proposición 3.13. *Sexan X, X', Y, Y' espazos topolóxicos e $f, g : X \rightarrow Y$, $f', g' : X' \rightarrow Y'$ aplicacións que cumpren as seguintes equivalencias de homotopía: $\beta : X \simeq X', \alpha : Y \simeq Y'$ tales que $\alpha \circ f \circ \beta \simeq f'$ e $\alpha \circ g \circ \beta \simeq g'$, tal e como se mostra no seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ \uparrow \beta & & \downarrow \alpha \\ X' & \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} & Y' \end{array}$$

Entón:

$$D(f, g) = D(f', g').$$

Corolario 3.14. *Sexan X, X' espazos topolóxicos. Se $X \simeq X'$, entón se verifican as seguintes dúas igualdades:*

$$\text{cat}(X) = \text{cat}(X').$$

$$\text{TC}(X) = \text{TC}(X').$$

É dicir, a categoría L-S e a complexidade topolóxica son invariantes homotópicos.

Definición 3.15. *Sexan X e Y dous espazos topolóxicos, X domina a Y se existen aplicacións continuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$*

Dada esta definición, podemos xeralizar máis aínda que tanto a categoría L-S como a complexidade topolóxica sexan invariantes homotópicos coas seguintes proposicións:

Proposición 3.16. *Sexan X e Y dous espazos topolóxicos, e se X domina a Y , entón:*

$$\text{TC}(Y) \leq \text{TC}(X).$$

Demostración. Como X domina a Y sabemos que existen $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicacións continuas tales que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Pola Proposición 1.14 se ten que: $\text{TC}(Y) = D(p_1^Y, p_2^Y)$ e $\text{TC}(X) = D(p_1^X, p_2^X)$. Onde $p_1^X, p_2^X, p_1^Y, p_2^Y$ son as proxeccións sobre X e Y respectivamente. Entón, empregando as Proposicións 3.1 e 3.3 temos:

$$\text{TC}(X) = D(p_1^X, p_2^X) \geq D(f \circ p_1^X \circ (g, g), f \circ p_2^X \circ (g, g)) = D(p_1^Y, p_2^Y).$$

\square

Proposición 3.17. *Sean X e Y dous espazos topolóxicos, se X domina a Y , entón:*

$$\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X).$$

Demostración. Como X domina a Y sabemos que existen $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicacións continuas tales que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Como vimos, podemos expresar a categorías L-S en termos da distancia homotópica, tendo que: $\text{cat}(Y) = D(\text{id}_Y, *Y)$ e $\text{cat}(X) = D(\text{id}_X, *X)$. Onde $*Y, *X$ son dúas aplicacións constantes en Y e X respectivamente. Entón, empregando as Proposicións 3.1 e 3.3 temos:

$$\text{cat}(X) = D(\text{id}_X, *X) \geq D(g \circ \text{id}_X \circ f, g \circ *X \circ f) = \text{cat}(Y).$$

□

Esta Proposición sérvenos para relacionar a categoría dun espazo topolóxico X coa dun retracto ou dun retracto por deformación $A \subset X$. Lembremos a definición destes dous conceptos:

Definición 3.18. Sexa X un espazo topolóxico, un subespazo $A \subset X$ é un retracto se existe unha aplicación continua $r : X \rightarrow X$ cumprindo: $r|_A = \text{id}_A$. Denominamos retracción á aplicación r .

Definición 3.19. Sexa X un espazo topolóxico, un subespazo $A \subset X$ é un retracto por deformación se é un retracto e ademais existe unha retracción cumprindo $i \circ r = \text{id}_X$.

Observación 3.20. Se X é un espazo topolóxico e $A \subset X$ un retracto por deformación, claramente X domina a A e polo tanto podemos concluír que:

$$\text{cat}(A) \leq \text{cat}(X),$$

$$\text{TC}(A) \leq \text{TC}(X).$$

A igualdade en ambos casos acadaríase se A fose un retracto por deformación.

Capítulo 4

Espazos normais

Citamos anteriormente que a distancia homotópica fai referencia a como de lonxe están dúas aplicacións continuas de seren homótopas. É lóxico entón que queiramos traballar con esta coma unha distancia. Mais coas propiedades que levamos probadas ata aquí non podemos afirmar que o sexa, pois non está demostrado que se verifica a desigualdade triangular. Teñen especial relevancia os espazos topolóxicos normais neste sentido, pois neles si se cumprirá dita desigualdade e por ende poderemos traballar coa distancia homotópica coma unha distancia real. Consecuentemente concluiremos tamén novos resultados notables da distancia, a categoría e a complexidade. Finalmente traballaremos co espazo produto, que mellora considerablemente as súas propiedades se ambos factores son espazos normais. Un espazo X dotado dunha topoloxía τ dirase normal se dados dous pechados disxuntos A e B existen dous abertos disxuntos U_A e U_B tales que $A \subset U_A$ e $B \subset U_B$.

No obstante, antes de comezar a falar das propiedades destes tres invariantes nun espazo topolóxico normal X , probaremos un lema que se verifica nos espazos normais. Este lema é moi importante debido á súa gran xeralidade. Para iso precisamos unha serie de resultados previos, dos que falaremos nesta primeira sección.

4.1. Unha propiedade dos espazos normais

Nesta sección, seguiremos a liña dos artigos [4] e [14] para realizar as demostracións dos resultados aquí presentados.

Definición 4.1. Sexa $\mathcal{W} = \{W_0 \dots W_{m+k}\}$ con $k \geq 0$ un revestimento aberto dun espazo X , \mathcal{W} é un $(m+1)$ -revestimento se dado calquer subconxunto de $m+1$ elementos: $\{W_{j_0} \dots W_{j_m}\}$ reviste X .

Moitas veces, no canto de traballar coa definición de $(m+1)$ -revestimento traballare-

mos coa seguinte caracterización:

Lema 4.2 ([14], Lemma 4.1.). *Sexa $\mathcal{W} = \{W_0 \dots W_{m+k}\}$ un revestimento aberto dun espazo X , \mathcal{W} será un $m+1$ -revestimento se e só todo elemento $x \in X$ está contido en polo menos $k+1$ abertos de \mathcal{W} .*

Demostración. Primeiro probaremos a condición necesaria. Para iso, partindo de que \mathcal{W} é un $m+1$ -revestimento, veremos que dado $x \in X$ está contido en polo menos $k+1$ abertos de \mathcal{W} . Por redución ao absurdo, supoñemos que x só está en k abertos. Pero isto implicaría que hai $m+1$ abertos que non conteñen x . É dicir, eses $m+1$ abertos de \mathcal{W} non revisten X , o que contradí a nosa hipótese de que \mathcal{W} é un $m+1$ -revestimento. Logo, efectivamente x ten que estar en polo menos $k+1$ abertos do revestimento.

Agora probaremos que tamén é condición suficiente. Tomamos unha subcolección calquera \mathcal{V} de \mathcal{W} de $m+1$ elementos e veremos que reviste X . Dado $x \in X$ arbitrario, por hipótese está contido en $k+1$ elementos de \mathcal{W} . Pero só hai k abertos fóra de \mathcal{V} , logo x ten que estar contido en polo menos un aberto de \mathcal{V} , quedando probado así que reviste X . \square

Teorema 4.3 ([4], Theorem 2.5.). *Dado $\mathcal{U} = \{U_0 \dots U_m\}$ revestimento aberto dun espazo topolóxico normal X . Para calquer $m+k \geq m$, existe $\tilde{\mathcal{U}}_{m+k}$, un $m+1$ -revestimento de X estendendo a \mathcal{U} . $\{U_0 \dots U_{m+k}\}$ de xeito que para todo $i \in \{m+1 \dots m+k\}$, U_i é unión disxunta de abertos que son subconxuntos dos abertos U_j , $j \in \{0 \dots m\}$.*

Demostración. Probaremos este teorema por indución en k .

Claramente para $k=0$ tomamos $\tilde{\mathcal{U}}_m = \mathcal{U}$. Supoñamos certo para un revestimento aberto de $m+k$ elementos e vexamos que tamén se cumpre para $m+k+1$ elementos. Tomamos o correspondente revestimento $\tilde{\mathcal{U}}_{m+k-1}$ que sabemos que existe por hipótese. Polo Lema 4.2 cada elemento $x \in X$ está en polo menos $m+k-m = m$ abertos de $\tilde{\mathcal{U}}_{m-1}$. Queremos ver que se pode construír $\tilde{\mathcal{U}}_{m+k}$ de xeito que cada x estea en polo menos $m+1$ elementos.

Para iso tomaremos o conxunto formado polos elementos de X que só están contidos en $m-k$ abertos do revestimento. Se denotamos por Ord_x o número de abertos do revestimento onde está contido $x \in X$, o conxunto sería o seguinte:

$$Y = \{x \in X : \text{Ord}_x = m\}.$$

O que faremos será construír de forma recursiva outro aberto $U_{m+k} \supset Y$ formado por unións disxuntas de subconxuntos abertos dos abertos U_j , $j \in \{0 \dots m\}$.

Vexamos que Y é un conxunto pechado. Probar isto é equivalente a probar que $X \setminus Y$ é aberto. Dado un $x \in X \setminus Y$ arbitrario, vexamos que existe un entorno N_x de tal

punto contido en $X \setminus Y$. Como $x \notin Y$ ten que estar contido un $s \neq m - k$ elementos do revestimento. Mais por hipótese de indución tiñamos que tódolos elementos de X estaban contidos en, canto menos, $m - k$ elementos. Logo se $x \in X \setminus Y$, x estará contido en, como mínimo, $m - k + 1$ abertos do revestimento: $\{U_0^x \dots U_{m-k}^x\}$. Bastaría tomar $N_x = U_0^x \cap \dots \cap U_{m-k}^x$. Claramente $x \in N_x \subset X \setminus Y$. Pois se existise $y \in Y$ tal que $y \in N_x$, implicaría que dito elemento estaría contido en máis de $m - k$ abertos, o cal é unha contradición por tal e como definimos o conxunto Y . Logo Y é un conxunto pechado.

Se $Y = \emptyset$ bastaría con tomar $U_m = U_j$, $j \in \{0 \dots k\}$. Asumiremos entón que $Y \neq \emptyset$. Intersecamos Y con cada aberto do revestimento inicial, obtendo $k + 1$ subconxuntos pechados. Claramente $Y \cap U_i$, $i \in \{0 \dots k\}$ é pechado, pois se existise un elemento cumprindo: $x \in \overline{Y \cap U_i}$ pero $x \notin U_i$. Tomando os $m - k$ únicos abertos aos que pertence: $\{U_x^0 \dots U_x^{m-k-1}\}$, teríamos que: $U_x^0 \cap \dots \cap U_x^{m-k-1} \cap (Y \cap U_i) \neq \emptyset$, o que contradí que os elementos de Y só estean contidos en $m - k$ abertos. Definimos os seguintes subconxuntos de Y : $F_0 = Y \cap U_0$, $F_{i+k} = Y \cap U_{i+k} \setminus \bigcup_{i=0}^n U_i$. $\{F_i\}_{i=0}^k$ é unha familia de $k + 1$ elementos pechados disxuntos cubrindo Y . Como X é normal, podemos tomar $k + 1$ abertos disxuntos V_i , $i \in \{0 \dots k\}$ de xeito que $F_i \subset V_i \subset U_i$. Cada elemento de Y estará contido en polo menos un V_i . Logo $U_m = \bigcup_{i=0}^k V_i$ é o aberto que buscabamos. É dicir: $\tilde{U}_m = \{U_0 \dots U_{m-1}, U_m\}$ é un $k + 1$ -revestimento. \square

Exemplo 4.4. Sexa $X = \mathbb{S}^1$ un espazo topolóxico dotado da topoloxía usual. Sexa $\mathcal{U} = \{U_0 \dots U_m\}$ un revestimento aberto, con

$$U_i = \left\{ (\cos(x), \sin(x)), x \in \left[\frac{i2\pi}{k+1}, \frac{(i+2)2\pi}{k+1} \right] \right\}.$$

Dado un $m \geq k$ arbitrario, estendamos \mathcal{U} a un $k + 1$ -revestimento de $m + 1$ elementos da forma do Teorema 4.3. Engadiremos $m - k$ abertos $\{V_0, \dots, V_{m-k+1}\}$, onde $V_i = \left\{ (\cos(x), \sin(x)), x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{i2\pi}{m-k} \right\} \right\}$.

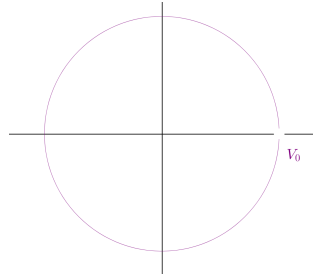


Figura 4.1: Primer aberto do $k + 1$ -revestimento do Exemplo 4.4

Claramente cada un destes abertos é unión disxunta de subconxuntos abertos U_j , $j \in$

$\{0 \dots k\}$. En virtude do Lema 4.2 podemos afirmar que $\tilde{\mathcal{U}}_m = \{U_0 \dots U_k, V_0 \dots V_{m-k+1}\}$ é un $k+1$ -revestimento, pois cada $x \in \mathbb{S}^1$ está contido en polo menos en $m-k = m+1-k-1$ abertos de $\tilde{\mathcal{U}}_m$.

Lema 4.5 (Lema máxico, [14]). *Sexa Z un espazo topolóxico normal cun revestimento aberto $\mathcal{U} = \{U_0 \dots U_m\}$ satisfacendo unha propiedade (A) e $\mathcal{V} = \{V_0 \dots V_n\}$ satisfacendo unha propiedade (B). Sendo (A) e (B) propiedades que se conservan por subconxuntos abertos e unións disxuntas, entón Z ten un revestimento aberto $\mathcal{W} = \{W_0 \dots W_{m+n}\}$ satisfacendo (A) e (B).*

Demostración. Empregando o Teorema 4.3 estendemos os revestimentos \mathcal{U} e \mathcal{V} a un $k+1$ -revestimento e $m+1$ -revestimento respectivamente, ambas de $m+k$ elementos. $\bar{\mathcal{U}} = \{U_0 \dots U_{k+m}\}$, $\bar{\mathcal{V}} = \{V_0 \dots V_{k+m}\}$. Os abertos de $\bar{\mathcal{U}}$ verifican todos (A), por ser unións disxuntas de subconxuntos abertos de U . Os elementos de $\bar{\mathcal{V}}$ verifican todos tamén (B) pola mesma razón. Tomamos $\mathcal{W} = \{U_0 \cap V_0 \dots U_i \cap V_i \dots U_{m+k} \cap V_{m+k}\}$, vexamos que é o revestimento que estabamos buscando.

En efecto ten o número de elementos que queremos, satisfacendo cada un deles as propiedades (A) e (B), por ser subconxuntos abertos de abertos verificando ambas.

Queda ver entón que é un revestimento de X . Dado $x \in X$ arbitrario, por ser V un $m+1$ -revestimento, sabemos polo Lema 4.2 que está en polo menos $k+1$ abertos de V , que podemos supór sen perda de xeralidade que son os $k+1$ primeiros. Doutra banda, como \mathcal{U} é un $k+1$ -revestimento, dada calquer subcolección de $k+1$ elementos, reviste X . Consideramos $\{U_0 \dots U_k\}$. Por ser revestimento, existirá polo menos un $i \in \{0 \dots k\}$ tal que $x \in U_i$. Logo $x \in U_i \cap V_i \in \mathcal{W}$. Queda probado así que \mathcal{W} é un revestimento de X . \square

O Teorema 4.6 proba que nos espazos normais X si se cumpre a desigualdade triangular para a distancia homotópica que, como dixemos ó comezo, era o que nos faltaba para que a distancia homotópica se comportase coma unha distancia.

4.2. Desigualdade Triangular

Teorema 4.6. *Sexan $f, g, h : X \rightarrow Y$ aplicacións definidas no espazo topolóxico normal X . Entón:*

$$D(f, h) \leq D(f, g) + D(g, h).$$

Demostración. Se $D(f, g) = m$ e $D(g, h) = n$ cos correspondentes revestimentos $\{U_0 \dots U_m\}$, $\{V_0 \dots V_n\}$ que cumpren que $f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$ e $g \circ \mathbf{v} \simeq h \circ \mathbf{v}$. Como a homotopía é unha propiedade que se transmite por abertos e unións disxuntas, empregando o Lema 4.5 anterior podemos

afirmar que existe un revestimento aberto $\{W_0 \dots W_{m+n}\}$ de xeito que $f \circ \mathbf{w} \simeq g \circ \mathbf{w} \simeq h \circ \mathbf{w}$.
É dicir: $D(f, h) \leq m + n$ □

Proposición 4.7. *Sexa X espazo topolóxico normal e $f, g : X \longrightarrow Y$, $f', g' : Y \longrightarrow Z$ aplicacións continuas, entón:*

$$D(f' \circ f, g' \circ g) \leq D(f, g) + D(f', g').$$

Demostración. Por ser X un espazo normal podemos empregar a desigualdade triangular, tendo que:

$$D(f' \circ f, g' \circ g) \leq D(f' \circ f, g' \circ f) + D(g' \circ f, g' \circ g).$$

Aplicando agora as Proposicións 3.1 e 3.3:

$$D(f' \circ f, g' \circ f) + D(g' \circ f, g' \circ g) \leq D(f', g') + D(f, g).$$

□

4.3. Produto

Lema 4.8. *Sexan $f, g : X \longrightarrow Y$, $h : X' \longrightarrow Y'$ aplicacións continuas. Entón as aplicacións $f \times h, g \times h : X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$ verifican:*

$$D(f \times h, g \times h) = D(f, g).$$

Demostración. Probemos primeiro que $D(f \times h, g \times h) \leq D(f, g)$.

Se $D(f, g) = n$, co seu correspondente revestimento aberto $U = \{U_0 \dots U_n\}$. Se $H : f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$ é unha homotopía, entón $H \times id_{X'}$ é unha homotopía entre $(f \times h) \circ \mathbf{u} \simeq (g \times h) \circ \mathbf{u}$. Pois é unha aplicación continua por selo cada compoñente cumprindo que $H(x, x', 0) = (f \times h)(x, x')$ e $H(x, x', 1) = (g \times h)(x, x')$. Logo $D(f \times h, g \times h) \leq D(f, g)$.

Vexamos agora a outra desigualdade. Se $D(f \times h, g \times h) = n$ co seu correspondente revestimento $U = \{U_0 \dots U_n\}$, sexa $H : X \times X' \times [0, 1] \longrightarrow Y \times Y'$ homotopía entre $(f \times h) \circ \mathbf{u} \simeq (g \times h) \circ \mathbf{u}$, tomando $p_1 : Y \times Y' \longrightarrow Y$ proxección. Entón $p_1 \circ H$ é unha homotopía entre $f \circ \mathbf{u} \simeq g \circ \mathbf{u}$. Pois é unha aplicación continua por ser composición de continuas, cumprindo: $H_0(x, x') = f(x)$ e $H_1 = g(x)$. Logo $D(f \times h, g \times h) \geq D(f, g)$. □

Teorema 4.9. *Sexan $f, g : X \longrightarrow Y$ e $f', g' : X' \longrightarrow Y'$ aplicacións continuas, se $X \times X'$ un espazo topolóxico normal, entón:*

$$D(f \times f', g \times g') \leq D(f, g) + D(f', g')$$

Demostración. Se empregamos a desigualdade triangular da distancia homotópica en espazos normais e o Lema 4.8:

$$D(f \times f', g \times g') \leq D(f \times f', g \times f') + D(g \times g', g \times f') = D(f, g) + D(f', g').$$

□

Destes dous resultados se conclúen dous resultados importantes:

Exemplo 4.10. Tomando no Teorema 4.9 $f = \text{id}_X$, $f' = \text{id}_{X'}$ e $g = x_0$, $g' = x'_0$ aplicacións constantes, obtense:

$$\text{cat}(X \times X') \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(X').$$

Exemplo 4.11. Tomando no Teorema 4.9 $f = \pi_1 : X \times X \rightarrow X$, $f' = p_1 : X' \times X' \rightarrow X'$ e $g = p_2 : X \times X \rightarrow X$, $g' = p_2 : X' \times X' \rightarrow X'$ aplicacións constantes, obtense:

$$\text{TC}(X \times X') \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(X').$$

Estes dous exemplos teñen tamén unha demostración alternativa en [1] e [7], empregando unicamente propiedades da categoría e da complexidade respectivamente.

Capítulo 5

Cohomoloxía

A cohomoloxía é unha rama que ten gran relevancia no campo da distancia homotópica, a categoría LS e a complexidade topolóxica porque o grao de nilpotencia dos elementos do grupo de cohomoloxía aporta novas cotas a estes tres invariantes. A súa importancia reside en que moitas veces o cálculo explícito destes tres invariantes se acaba a partir de cotas inferiores e superiores. Neste Capítulo seguiremos esencialmente de [8], [13], [16], [3] e [9]. Antes de comezar, lembraremos unha serie de nocións previas:

5.1. Definicións

Definición 5.1. Sexan $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ un conxunto de $n + 1$ puntos afinmente independentes, definimos o n -símplice σ xerado por a_0, \dots, a_n como o conxunto de puntos $x \in \mathbb{R}^m$ que verifican:

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0, \quad \text{para todo } i \in \{0 \dots n\}.$$

Cabe destacar que o conxunto de puntos afinmente independentes que definen un n -símplice é único.

Aos t_i chámanselles coordenadas baricéntricas de x en σ respecto de $\{a_0 \dots a_n\}$. En definitiva, un n -símplice é a envolvente convexa en \mathbb{R}^m dos puntos que o xeran.

Definición 5.2. Sexa X un espazo topolóxico, un n -símplice estándar en X é o conxunto:

$$\Delta^n = \{(t_0 \dots t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0, \quad \text{para todo } i\}.$$

Definición 5.3. Sexa X un espazo topolóxico, un n -símplice singular en X é unha aplicación continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Definición 5.4. Sexa X un espazo topolóxico e R un anel conmutativo unitario arbitrario, defínese $C_n(X; R)$ como o R -módulo con base o conxunto dos n -símplices singulares en X .

A partir de aquí por comodidade denotaremos simplemente $C_n(X)$ no canto de $C_n(X; R)$, sobreentendendo que os coeficientes seguen a estar en R a non ser que se especifique o contrario.

Os elementos de $C_n(X)$ chámanse n -cadeas singulares e son sumas finitas formais:

$$\sum_i n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X.$$

Definición 5.5. Defínese o homomorfismo bordo como o homomorfismo $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ que actúa sobre os elementos da base do seguinte xeito:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]}.$$

Onde $[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n]$ denota o $n - 1$ -símplice estándar xerado polos v_j , $j \in \{0 \dots n\}$ con $j \neq i$.

Construiremos un complexo de cadeas da seguinte forma:

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Para o que se precisa a seguinte proposición:

Proposición 5.6. Sexa ∂ a aplicación bordo definida anteriormente. Entón necesariamente: $\partial^2 = 0$

Demostración. Para probar que $\partial^2 = 0$, por ser ∂ un homomorfismo, basta con probalo sobre os elementos da base de $C_{n+1}(X)$. Así:

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left(\sum_i (-1)^i \sigma_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_{n+1}]} \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma_{[v_0 \dots \hat{v}_j \dots \hat{v}_i \dots v_{n+1}]} + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots \hat{v}_j \dots v_{n+1}]} \cdot \square \end{aligned}$$

Ista condición significa que $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$.

Definición 5.7. Defínense os grupos de homoloxía como:

$$H_n(X; R) = \frac{\text{Ker}(d_n)}{\text{Im}(d_{n+1})}.$$

De novo, denotaremos $H_n(X)$ no canto de $H_n(X; R)$ para aforrar notación.

Onde por comodidade denotamos $C_n^*(X) = C^n(X) = \text{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$ e $\delta = \partial^*$; é dicir, δ é a aplicación dual de ∂ . Esta aplicación defínese como: $\delta(\sigma^*) : C_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\delta(\sigma^*)(\tau) = \sigma^*(d(\tau))$. Onde $\tau : \Delta^{n+1} \rightarrow X$.

Analogamente esta aplicación cobordo tamén terá que verificar a seguinte proposición:

Proposición 5.8. *Sexa δ a aplicación cobordo definida anteriormente, entón:*

$$\delta^2 = 0.$$

Demostración. Sexa σ^* un elemento da base de $C^n(X)$:

$$\delta^2(\sigma^*)(x) = \delta(\delta(\sigma^*))(x) = \delta(\sigma^*(\partial(x))) = \sigma^*(\partial^2(x)) = 0.$$

□

Definición 5.9. Defínense os grupos de cohomoloxía como:

$$H^n(X; R) \equiv H^n(X) = \frac{\text{Ker}(\delta_{n+1})}{\text{Im}(\delta_n)}.$$

Para rematar, daremos dúas definicións alxébricas previas coas que traballaremos na sección 5.3.

Definición 5.10. Sea $\{A_i, \delta_i\}$ un conxunto onde A_i son grupos abelianos e δ_i morfismos que forman un complexo de cocadeas:

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Se se cumpre que $\text{Im}(\delta_{n+1}) = \text{Ker}(\delta_n)$, entón para cada n dise que forman unha sucesión exacta.

Observación 5.11. A homoloxía dunha sucesión exacta é a trivial.

Dado un espazo topolóxico X e un subespazo U_i , pódese asociar unha sucesión exacta longa de cohomoloxía. Intuitivamente sería coma traballar cunha cohomoloxía relativa, pois os ciclos que están en U_i non os contamos.

Definición 5.12. Unha sucesión exacta longa de cohomoloxía asociada ao par (X, U_i) é unha sucesión exacta do seguinte xeito:

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & \dots \\
& & \swarrow^{\delta_{m-1}} & & \\
H^m(X, U_i) & \xrightarrow{j^m} & H^m(X) & \xrightarrow{i^m} & H^m(U_i) \\
& \searrow_{\delta_m} & & & \\
H^{m+1}(X, U_i) & \xrightarrow{j^{m+1}} & H^{m+1}(X) & \xrightarrow{i^{m+1}} & H^{m+1}(U_i) \\
& \swarrow_{\delta_{m+1}} & & & \\
& & & & \dots
\end{array}$$

Onde δ_m son os homomorfismos de conexión.

5.2. Produto cup

O interesante de traballar coa cohomoloxía é que podemos outorgarlle unha estrutura de anel, para o que precisamos definir unha multiplicación. Chamarémoslle produto cup a dita multiplicación, que a definiremos primeiro entre os elementos de $C^n(X)$ e ista inducirá a unha multiplicación entre os grupos de cohomoloxía. Para iso consideraremos o grupo $H^*(X) = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(X)$. Onde H^* non só aporta unha estrutura de R -módulo, senón de álgebra graduada, xa que os elementos teñen noción de grao. Traballaremos logo coa cohomoloxía coma unha álgebra graduada (Definición 5.14). Para probar que este produto baixa ben a cohomoloxía, seguiremos o procedemento empregado en [13]. Vexamos como actúa dito produto.

Definición 5.13. Sexa K un corpo e $(V, +)$ un espazo vectorial sobre K , V é unha K -álgebra se ademais está dotada dunha multiplicación interna sobre K .

Definición 5.14. Sexa R un anel conmutativo unitario, unha R -álgebra graduada é unha álgebra A dotada dunha descomposición en suma directa:

$$A = \bigoplus_{i \in R} A_i.$$

Cada elemento ten un grao asignado, os elementos de A_i serían de grao i . A noción de peso consérvase ao multiplicar elementos do seguinte xeito: $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

Observación 5.15. Na definición anterior bastaría con que R fose un grupo abeliano.

Definición 5.16 ([8], páx. 206). Sexan $c^p \in C^p(X)$, $c^q \in C^q(X)$ cocadeas. O produto cup é unha aplicación $\smile: C^p \times C^q \rightarrow C^{p+q}$ cumprindo a seguinte expresión:

$$(c^p \smile c^q)(\tau) = c^p(\tau_{[v_0 \dots v_p]}) \cdot c^q(\tau_{[v_p \dots v_{p+q}]})$$

Onde $\tau: \Delta^{p+q} \rightarrow X$ é un $p+q$ símplice singular.

Este produto de cocadeas induce un produto entre clases de cohomoloxía [[8], Lemma 3.6].

$$\smile: H^k(X) \times H^l(X) \longrightarrow H^{k+l}(X),$$

que é bilinear, asociativo e antisimétrico cumprindo: $[\varphi] \smile [\psi] = [\varphi \smile \psi]$.

Para probar que baixa ben ás clases de cohomoloxía, hai que ver que o produto de cociclos é un cociclo e que está ben definido. É dicir, precisamos unha fórmula que o relacione co bordo, dita fórmula chámase *coboundary formula* e é a seguinte:

Lema 5.17 ([8], páx. 206). $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$, onde $\varphi \in C^k(X)$, $\psi \in C^l(X)$.

Demostración. Dado $\tau: \Delta^{k+l+1} \longrightarrow X$, tense:

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\tau) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\tau_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\tau_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}]}) \cdot$$

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\tau) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\tau_{[v_0, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\tau_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]}) \cdot$$

O último termo da primeira expresión se cancela co primer termo da segunda expresión. Claramente a suma dos termos restantes sería: $\delta(\varphi \smile \psi)(\tau) = (\varphi \smile \psi)(d\tau)$. Onde δ é o homomorfismo da Definición 5.5. \square

Na proba anterior, observamos como aínda que cambie o representante, a clase de cohomoloxía segue a ser a mesma.

Como consecuencia tamén podemos estender o produto ao anel de cohomoloxía $H^*(X)$:

$$\smile: H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X),$$

en virtude da existencia dunha correspondencia bixectiva entre as aplicacións lineais que saen do produto tensorial de dous espazos $\alpha: U_1 \otimes U_2 \longrightarrow V$ coas aplicacións bilineais que saen do produto cartesiano deses mesmos espazos $\alpha: U_1 \times U_2 \longrightarrow V$, (véxase [[5], Capítulo 10, Corolario 12]).

Ademais $H^*(X) \otimes H^*(X)$ tamén será unha álgebra graduada (véxase [[3], páx. 221]), co seguinte produto:

$$(\varphi_1 \otimes \psi_1) \cdot (\varphi_2 \otimes \psi_2) = (-1)^{|\psi_1||\varphi_2|} \varphi_1 \smile \varphi_2 \otimes \psi_1 \otimes \psi_2.$$

Sendo $|\psi_1|e|\varphi_2|$ os graos de ψ_1 e φ_2 respectivamente.

5.3. Cotas cos graos de nilpotencia das clases de cohomoloxía

Definición 5.18. Sexa $A \subset H^*(X)$, defínese a lonxitude do produto cup (ou grao de nilpotencia), l.c.p. (A), como o menor enteiro k de xeito que calquer produto $u_0 \smile \dots \smile u_k$ de elementos non nulos de A é nulo en $H^*(X)$.

Empregando este concepto podemos outorgarlle novas cotas á categoría LS e da complexidade topolóxica.

Exemplo 5.19. ([1], Proposition 1.5.)

$$\text{l.c.p.}(H^*(X)) \leq \text{cat}(X).$$

Se $\text{cat}(X) = n$, sexa $\mathcal{U} = \{U_0 \dots U_n\}$ o seu correspondente revestimento aberto categórico. Dado o produto de calquer $n + 1$ elementos de $H^*(X)$: $x_0 \smile \dots \smile x_n$, consideramos a sucesión exacta longa de cohomoloxía asociada ao par (X, U_i) :

$$\dots \longrightarrow H^m(X, U_i) \xrightarrow{q^i} H^m(X) \xrightarrow{j^i} H^m(U_i) \longrightarrow H \dots$$

Onde $j_i : U_i \hookrightarrow X$ e $q_i : X \hookrightarrow (X, U_i)$ son as inclusións e $j^i = j_i^*$ e $q^i = q_i^*$. Por ser \mathcal{U} un revestimento categórico, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, U_i é contraíble en X e polo tanto $j^i = 0$. Doutra banda, por ser unha sucesión exacta, q^i será sobrexectiva a polo tanto, dado $x_i \in H^m(X)$, existe $\hat{x}_i \in H^m(X, U_i)$ tal que $q^i(\hat{x}_i) = x_i$. Consideramos o produto das $n + 1$ preimaxes correspondentes:

$$\hat{x}_0 \smile \dots \smile \hat{x}_n \in H^*\left(X, \bigcup_{i=0}^n U_i\right) = H^*(X, X) = 0.$$

Logo $\hat{x}_0 \smile \dots \smile \hat{x}_n = 0$, do que se deduce que

$$0 = x_0 \smile \dots \smile x_n = q^0(\hat{x}_0) \smile \dots \smile q^n(\hat{x}_n) = q^*(\hat{x}_0 \smile \dots \smile \hat{x}_n) = q^*(0).$$

Onde q^* é o homomorfismo inducido pola inclusión $q : X \hookrightarrow (X; U_i)$ e a segunda igualdade pode consultarse como consecuencia directa do resultado 11.11, Stability en ([3], páx. 235).

Teorema 5.20 ([11], Theorem 5.2.). Sexan $f, g : X \longrightarrow Y$ dúas aplicacións continuas entre os espazos topolóxicos X e Y e $f^*, g^* : H(Y) \longrightarrow H(X)$ os morfismos inducidos, denotamos por $\mathcal{J}(f, g)$ a imaxe do morfismo linear $f^* - g^* : H(Y) \longrightarrow H(X)$, entón:

$$\text{l.c.p.}\mathcal{J}(f, g) \leq D(f, g).$$

5.3. COTAS COS GRAOS DE NILPOTENCIA DAS CLASES DE COHOMOLOXÍA33

Demostración. Se $D(f, g) = n$, sexa $\{U_0 \dots U_n\}$ un revestimento aberto tal que as restricións das proxeccións p_1 e p_2 a cada aberto son homótopas. Consideramos a sucesión exacta longa de cohomoloxía asociada a cada par (X, U_k) , $k \in \{0 \dots n\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & H^m(Y) & & & \\ & & & \downarrow f^* - g^* & \searrow (f|_{U_k})^* - (g|_{U_k})^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^m(X, U_k) & \xrightarrow{j^k} & H^m(X) & \xrightarrow{i^k} & H^m(U) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Tal e como escollimos o revestimento, $(f|_{U_k})^* - (g|_{U_k})^* = 0$, polo que dado un elemento $\omega \in \mathcal{J}(f, g)$, este estará no núcleo de i^k e, por tratarse dunha sucesión exacta, $\omega \in \text{Im}(j^k)$. É dicir, podemos garantir a existencia de $\hat{w} \in H^m(X, U)$ tal que $j^k(\hat{w}) = \omega$, para todo $w \in \mathcal{J}(f, g)$, para todo $k \in \{0 \dots n\}$. Así, vexamos que pasa co produto de $n + 1$ elementos arbitrarios de $\mathcal{J}(f, g)$:

$$\omega_0 \smile \dots \smile \omega_n = j^0(\hat{\omega}_0) \smile \dots \smile j^n(\hat{\omega}_n) = j^*(\hat{\omega}_0 \smile \dots \smile \hat{\omega}_n) = 0.$$

Pois $j^*(\hat{\omega}_0 \smile \dots \smile \hat{\omega}_n) \in H^*(X, X) = 0$. Onde j^* é a aplicación inducida que fai o seguinte diagrama conmutativo (véxase [[3], páx. 235]):

$$\begin{array}{ccc} H(X, U_0) \otimes \dots \otimes H(X, U_n) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X, \bigcup_{k=0}^n U_k) \\ \downarrow j^0 \otimes \dots \otimes j^n & & \downarrow j_{U_0 \cup \dots \cup U_n} \\ H(X) \otimes \dots \otimes H(X) & \xrightarrow{\smile} & H(X) \end{array}$$

□

Exemplo 5.21. Tomamos as aplicación $f, g : X \rightarrow X$ do Teorema 5.20 como $f = id_X$ e $g = x_0$ unha aplicación constante. Estas inducen as aplicacións $f^*, g^* : H(X) \rightarrow H(X)$, $f^* = id_{H(X)}$ e $g^* = 0$. Recuperamos así o Exemplo 5.19, pois

$$\text{l.c.p.}(H(X)) = \text{l.c.p.}\mathcal{J}(f, g) \leq D(f, g) = \text{cat}(X).$$

Capítulo 6

Exemplos

A distancia homotópica, así como a categoría de Lusternik-Schnirelmann e a complexidade topolóxica (por tratárense de casos particulares desta), teñen aplicacións importantes na robótica e na enxeñería. Serven, entre outras cousas, para medir a dificultade de planificar movementos nun espazo de configuracións dun sistema mecánico e para prever inestabilidades no comportamento destes sistemas. Neste capítulo falaremos dalgunhas destas aplicacións, consideraremos a circunferencia \mathbb{S}^1 que podemos identificar na vida real cunha rotonda, os brazos robóticos articulados ou os corpos ríxidos, como pode ser un avión. Ademais, traballaremos nas seccións 6.2 e 6.3 co espazo de configuracións dun sistema mecánico coma un espazo topolóxico X .

6.1. Aplicacións na circunferencia

Nesta sección centrarémonos na circunferencia \mathbb{S}^1 . Podemos identificala con múltiples obxectos da vida real, como pode ser unha rotonda. Veremos máis adiante que nin a súa categoría nin a súa complexidade son nulas, do que podemos deducir que non existe un algoritmo de planificación de movementos continuo nela. Problema que plataformas como *Google Maps* intentan solventar do mellor xeito posíbel aínda a día de hoxe para, por exemplo, construír camiños continuos con dependencia do punto de partida e chegada.

Exemplo 6.1. Sexa $X = \mathbb{S}^1$ unha circunferencia, entón:

$$\text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1.$$

A circunferencia non é un espazo topolóxico contráctil, logo $\text{cat}(\mathbb{S}^1) > 0$. Doutra banda $\text{cat}(\mathbb{S}^1) \leq 1$ porque podemos revestila por dous abertos contráctiles $\{U_0, U_1\}$. Basta tomar $U_0 = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_1\}$ e $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_2\}$, con $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^1$ dous puntos calquera da circunferencia.

Observación 6.2. Como vimos na Proposición 1.12, dado un espazo topolóxico X , a existencia dun algoritmo de planificación de movementos continuo en X non está garantida. É o caso de $X = \mathbb{S}^1$. Pois tendo en conta a Proposición 3.6, que nos afirma que a categoría dun espazo é unha cota inferior da complexidade topolóxica, e o Exemplo 6.1, temos que $1 \leq \text{TC}(\mathbb{S}^1)$.

Proposición 6.3. *Sexa $X = \mathbb{S}^1$, consideramos a aplicación identidade: $\text{id} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ e a aplicación inversa: $\text{inv} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\text{inv}(x, y) = (x, -y)$. Entón:*

$$D(\text{id}, \text{inv}) = 0.$$

Demostración. Antes de comezar, cabe destacar que podemos identificar o noso espazo topolóxico $X = \mathbb{S}^1$ co espazo topolóxico de números complexos de norma 1. Logo a aplicación inv non é máis que a conxugación dos números complexos unitarios, que se escribiría como: $\text{inv}(z) = \bar{z}$, onde $z \in X$ e \bar{z} denota o conxugado de z . Para facernos unha idea máis visual, podemos ver como funciona na Figura 6.1.

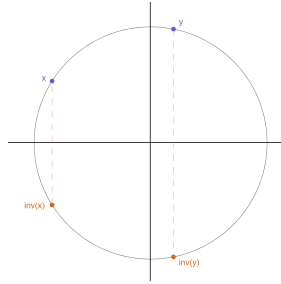


Figura 6.1: Aplicación inversa nos complexos unitarios

Agora ben, se dadas dúas aplicacións a súa distancia homotópica é 0, iso quere dicir que son homótopas. Para probar o resultado construiremos a homotopía pertinente.

Tendo en conta que $\mathbb{S}^1 = \{(\cos(x), \sin(x)), x \in [0, 2\pi)\}$, podemos reescribir inv como: $\text{inv} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\text{inv}(\cos(x), \sin(x)) = (\cos(x), -\sin(x))$.

Consideramos $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $H(x, t) = \frac{x + t(\text{inv}(x))}{\|x + t(\text{inv}(x))\|}$. H é a homotopía que buscamos: está ben definida, é continua por ser composición de aplicacións continuas ben definidas e ademais $H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = x = \text{id}(x)$ e $H(x, 1) = \frac{\text{inv}(x)}{\|\text{inv}(x)\|} = \text{inv}(x)$.

Como acabamos de dicir está ben definida, xa que non se anula o denominador. Pois para iso debería cumprirse o seguinte sistema:

$$\begin{cases} t = \frac{x_1}{x_1 - \text{inv}_1(x)} \\ t = \frac{x_2}{x_2 - \text{inv}_2(x)} \end{cases}$$

Onde $x = (x_1, x_2)$ e $\text{inv}(x) = (\text{inv}_1(x), \text{inv}_2(x))$.

Dito sistema é equivalente á seguinte igualdade: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\text{inv}_1(x)}{\text{inv}_2(x)}$. Que por estar en \mathbb{S}^1 só se dá se $\text{inv}(x) = -x$, que non pasa en ningún punto. Estamos descartando o caso $\text{inv}(x) = x$ porque nese caso $H(x, t) = x$, para todo $t \in [0, 1]$ e tampouco se anularía o denominador. \square

Antes de probar a seguinte Proposición convén lembrar a definición de grupo fundamental.

Definición 6.4. Sexa X un espazo topolóxico, $x_0 \in X$ un elemento arbitrario e $\wedge(X, x_0) \subset \mathcal{C}([0, 1], X)$ o conxunto de lazos en (X, x_0) , defínese o grupo fundamental de X en x_0 como o seguinte conxunto cociente

$$\pi_1(X, x_0) = \wedge(X, x_0) / \simeq,$$

onde \simeq denota a relación de equivalencia entre dous lazos que son homótopos por camiños.

Observación 6.5. O punto base x_0 é indiferente se traballamos nun conxunto conexo. Como estamos considerando espazos topolóxicos X conexos por camiños, para aforrar notación denotaremos o grupo fundamental por $\pi_1(X)$. Pois énos indiferente con que $x_0 \in X$ traballar.

Proposición 6.6. Sexa $X = \mathbb{S}^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, consideramos a aplicación identidade: $\text{id} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ e a aplicación cadrado: $q : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $q(z) = z^2$. Entón:

$$D(\text{id}, q) = 1.$$

Demostración. Como vimos na Proposición 3.8, a distancia homotópica está limitada pola categoría L-S. Neste caso, como vimos no Exemplo 6.1, $\text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$. Logo de non seren homótopas as aplicacións, a súa distancia será 1.

Para probar que o enunciado é certo veremos que id e q non son homótopas. Por redución ao absurdo, se o fosen, tería que cumprirse que $\pi_1(\text{id}) = \pi_1(q)$. Onde $\pi_1(\text{id}) : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ é unha aplicación tal que $\pi_1(\text{id})[\alpha] = [\text{id} \circ \alpha] = [\alpha]$ e $\pi_1(q) : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ é unha aplicación tal que $\pi_1(q)[\alpha] = [q \circ \alpha]$.

Con todo, $\pi_1(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}$. Tendo en conta que $X \simeq \mathbb{S}^1 = \{e^{ix} = (\cos(x), \sin(x)), x \in [0, 2\pi)\}$, podemos reescribir q como: $q(e^{ix}) = q(\cos(x), \sin(x)) = e^{2ix} = (\cos(2x), \sin(2x))$. É dicir, o que fai a aplicación q é duplicar o argumento do elemento como se pode ver na Figura 6.2.

Como cada clase de homotopía consta de tódolos lazos que se envolven arredor de \mathbb{S}^1 unha determinada cantidade de veces e q duplica o argumento, $q \circ \alpha$ dá o dobre número

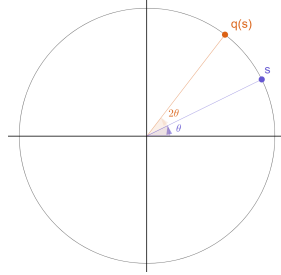


Figura 6.2: Aplicación cadrado na esfera unidade

de voltas ca α . Logo $[\alpha] \neq [q \circ \alpha]$, o que implica que $\pi_1(\text{id}) \neq \pi_1(q)$. Concluimos así que $D(\text{id}, q) = 1$. \square

6.2. Brazo robótico articulado

Nesta sección analizaremos o sistema de configuracións dun brazo robótico articulado. Este é un sistema mecánico plano formado por n brazos de lonxitudes l_1, \dots, l_n fixadas. Os brazos están conectados por xuntas xiratorias que chamaremos vértices e forman unha cadea poligonal como podemos ver na Figura 6.3. Cabe destacar que admitiremos autointerseccións no sistema.

Exemplo 6.7. O espazo de configuracións dun brazo robótico articulado está totalmente determinado polos ángulos que forman cada articulación coa dirección do eixo x . Defínese como:

$$M_l := \mathbb{S}^1 \times \binom{n}{!!} \times \mathbb{S}^1.$$

Onde $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, $l_i > 0$, para todo $i \in \{1 \dots n\}$ fai referencia á lonxitude de cada articulación do brazo robótico. Chámase vector lonxitude do brazo robótico.

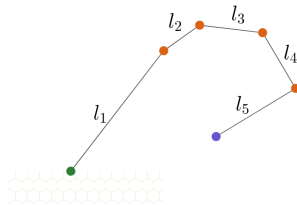


Figura 6.3: Brazo robótico articulado

Observación 6.8. [7] Cambiar a orde dos elementos de l é irrelevante. Xa que $M_{l'}$, con l' unha reordenación do vector l , é difeomorfo a M_l .

Definición 6.9. O espazo de traballo dun brazo robótico articulado W é o conxunto de tódalas posicións do extremo do brazo.

Nesta sección consideraremos só o brazo robótico con dúas articulacións de lonxitudes $l_1 \geq l_2$ como pode verse na Figura 6.4.

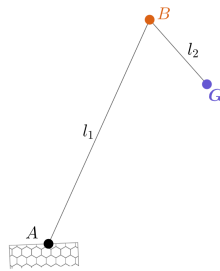
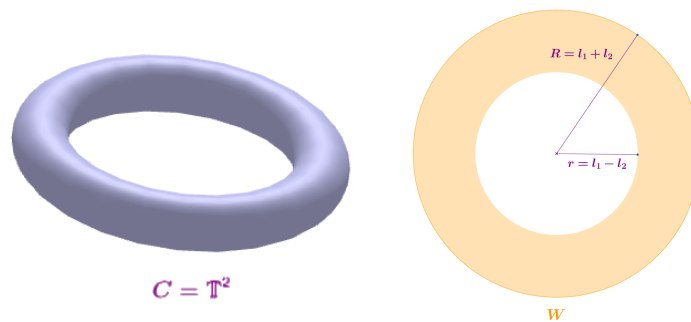


Figura 6.4: Brazo robótico de dúas articulacións

Neste caso teríamos que o espazo de configuracións sería: $C := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$, mentres que o espazo de traballo W , un anel con círculo externo de raio $R = l_1 + l_2$ e círculo interno de raio $r = l_1 - l_2$. Podemos visualizalos na Figura 6.2.



(a) Espazo de configuración

(b) Espazo de traballo

Proposición 6.10. *Sexa $X = \mathbb{T}^2$, entón:*

$$\text{cat}(\mathbb{T}^2) = 2.$$

Pode consultarse a proba en [[1], páx. 4]

Observación 6.11. Un xeito alternativo de concluir que $\text{cat}(\mathbb{T}^2) = 2$ sería limitándoa por enriba e por abaixo.

Dunha banda podemos revestir \mathbb{T}^2 con tres abertos categóricos, polo que $\text{cat}(X) \leq 2$. Podemos visualizar eses abertos $\{V_1, V_2, V_3\}$ na Figura 6.5, onde consideramos a representación plana do toro.

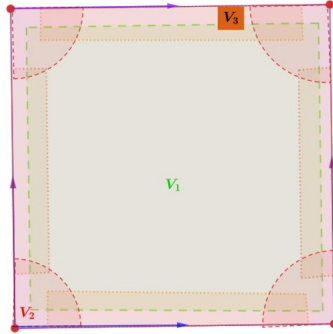


Figura 6.5: Revestimento aberto do toro

Doutra banda, $\text{cat}(X) > 0$, xa que o toro non é construíble e $\text{cat}(\mathbb{T}^2) \geq 2$ xa que,

$$\text{l.c.p.H}(\mathbb{T}^2) = 2$$

(véxase [[13], páx. 295]).

Proposición 6.12. *Sexa $X = \mathbb{T}^2$, entón:*

$$\text{TC}(\mathbb{T}^2) = 2.$$

Pode consultarse a proba en [[7], páx. 99].

No caso do espazo de traballo, pode verse que claramente o anel é homeomorfo a \mathbb{S}^1 , espazo para o que xa é coñecido que $\text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$. Vexamos cal é a súa complexidade:

Proposición 6.13. *Sexa $X = \mathbb{S}^1$, entón:*

$$\text{TC}(\mathbb{S}^1) = 1$$

Demostración. En virtude da Proposición 3.6 sabemos que a categoría LS é unha cota inferior da complexidade topolóxica, logo $\text{TC}(\mathbb{S}^1) \geq 1$. Para probar que é exactamente 1 bastará con atopar un revestimento de abertos de Farber de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ que tan só teña dous elementos. Consideraremos $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, onde

$$U_0 = \{(A, B) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : A \neq -B\},$$

$$U_1 = \{(A, B) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : A \neq B\}.$$

Probaremos no Lema 6.14 que U_1 e U_2 son abertos. Nesta demostración limitarémonos a demostrar que efectivamente admiten unha sección continua da fibración de camiños π que definimos en 1.3. Definiremos as seccións do seguinte xeito: $s_0 : U_0 \rightarrow PX$ leva cada par de puntos (A, B) no camiño α_{AB} que leva A a B polo arco máis curto a velocidade 1. Resaltamos que esta sección non sería continua se $A = -B$, pois os dous arcos posíbeis serían da mesma lonxitude.

$s_1 : U_1 \rightarrow PX$ leva cada par de puntos (A, B) no camiño α_{AB} que leva A a B a velocidade 1 en sentido antihorario.

□

Lema 6.14. *Os conxuntos U_0 e U_1 definidos na proba da Proposición 6.13 son abertos.*

Demostración. [12] Probar que U_0 e U_1 son abertos é equivalente a probar que os seus complementarios U_0^c e U_1^c son pechados. Para ver isto veremos que son a imaxe recíproca dun conxunto pechado por unha aplicación continua. Para ver que U_0 é aberto definimos a aplicación $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A, B) = A + B$ que é claramente continua se dotamos \mathbb{C} ca topoloxía usual. Temos así que $U_0^c = f^{-1}(\{0\})$, logo U_0^c é pechado e U_0 aberto como queríamos probar. Doutra banda definimos $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A, B) = A - B$ que é claramente continua pois consideramos \mathbb{C} ca topoloxía usual. Temos así que $U_1^c = f^{-1}(\{0\})$, logo U_1^c é pechado e U_1 aberto como queríamos probar. □

6.3. Corpos ríxidos

Nesta sección estudaremos os movementos ríxidos que deixan un punto fixo, que identificaremos como a orixe, nos corpos de \mathbb{R}^3 . Podemos imaxinarnos por exemplo un avión, que constrúe tódolos seus movementos a partir de tres movementos esenciais como se ve na Figura 6.6.

De calquer xeito, o espazo de configuracións dun corpo ríxido en \mathbb{R}^3 cun punto fixo é $SO(3)$, o grupo de rotacións. Defínese como: $SO(3) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / AA^T = Id_3, \det(A) = 1\}$.

Traballar directamente con $SO(3)$ ten bastantes dificultades. Con todo, na seguinte Proposición veremos que este espazo é homeomorfo a \mathbb{RP}^3 . Esta identificación énos moi útil, pois como vimos na Proposición 3.14, tanto a categoría como a complexidade son invariantes homotópicos. Limitarémonos entón a traballar no espazo proxectivo 3-dimensional, que é máis doado técnicamente.

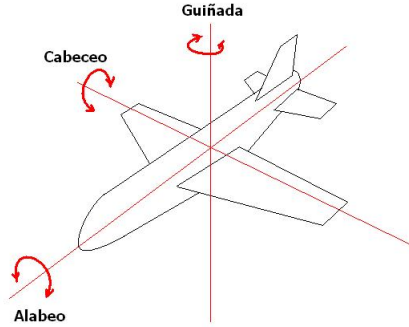


Figura 6.6: Movementos dun avión

Proposición 6.15 ([2], páx. 84). *O grupo de rotacións $SO(3) \subset \mathbb{M}_{3 \times 3}$ anteriormente definido e \mathbb{RP}^3 o espazo proectivo 3-dimensional son homeomorfos.*

Demostración. Para probar este resultado seguiremos as indicacións de [2]. En [8] podemos atopar unha demostración alternativa deste resultado.

O espazo \mathbb{RP}^3 pode pensarse como o grupo cociente da esfera 3-dimensional \mathbb{S}^3 coa relación de equivalencia $x \sim x'$ se $x = -x'$. Para probar que $\mathbb{RP}^3 \simeq SO(3)$ construiremos o homeomorfismo correspondente. Comezaremos definindo unha aplicación continua dende \mathbb{S}^3 para posteriormente identificar os puntos antipodais. Consideramos a aplicación $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ definida como:

$$\phi(w, x, y, z) = \begin{bmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2(xy - wz) & 2(wy + xz) \\ 2(xy + wz) & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

O codominio da aplicación efectivamente é $SO(3)$, xa que $\phi(w, x, y, z) \phi(w, x, y, z)^T = \text{Id}_3$ e $\det(\phi(w, x, y, z)) = 1$. Vexamos isto:

$$\phi(w, x, y, z) \phi(w, x, y, z)^T = \begin{bmatrix} \otimes & 0 & 0 \\ 0 & \otimes & 0 \\ 0 & 0 & \otimes \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $\otimes = w^4 + 2w^2x^2 + 2w^2y^2 + 2w^2z^2 + x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + y^4 + 2y^2z^2 + z^4$

A segunda igualdade séguese de que $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^1$, pois:

$$w^4 + 2w^2x^2 + 2w^2y^2 + 2w^2z^2 + x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + y^4 + 2y^2z^2 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 = \|(x, y, z, w)\|^2 = 1.$$

Doutra banda temos que tamén se cumpre:

$$\det(\phi(w, x, y, z)) = w^6 + x^6 + 3w^2x^4 + 3w^4x^2 + y^6 + 3w^2y^4 + 3x^2y^4 + 3w^4y^2 + 3x^4y^2 + 6w^2x^2y^2 + z^6 + 3w^2z^4 + 3x^2z^4 + 3y^2z^4 + 3w^4z^2 + 3x^4z^2 + 6w^2x^2z^2 + 3y^4z^2 + 6w^2y^2z^2 + 6x^2y^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^3 = \|(x, y, z, w)\|^3 = 1.$$

Por outra parte, claramente os puntos antipodais teñen a mesma imaxe por ϕ , logo podemos considerar a aplicación inducida $\phi : \mathbb{RP}^3 \rightarrow SO(3)$. Vexamos que esta aplicación é un homeomorfismo. Para iso terá que ser bixectiva, probemos primeiro a inxectividade:

Dados $[x, y, z, w], [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] \in \mathbb{RP}^3$, se $\phi([x, y, z, w]) = \phi([\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}])$, en particular as súas imaxes terán que tera mesma traza e terán que cumprir o sistema de ecuacións ???. Se tivesen a mesma traza, isto implicaría que $3w^2 - z^2 - x^2 - y^2 = 3\bar{w}^2 - \bar{z}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2$. Tendo en conta que $-w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -\bar{w}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = -1$ podemos reescribir a traza e teríamos que debería cumprirse: $4w^2 - 1 = 4\bar{w}^2 - 1$, é dicir: $w = \pm\bar{w}$.

$$w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = \bar{w}^2 + \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 \quad (6.1)$$

$$w^2 - x^2 + y^2 - z^2 = \bar{w}^2 - \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 \quad (6.2)$$

$$w^2 - x^2 - y^2 + z^2 = \bar{w}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \quad (6.3)$$

Agora, sumando 6.1 e 6.2 e aplicando que $w^2 = \bar{w}^2$ necesariamente, chegamos a que $z = \pm\bar{z}$. Empregando o mesmo procedemento ao sumar 6.1 con 6.3 e 6.2 con 6.3 chegaríamos a que $x = \pm\bar{x}$ e $y = \pm\bar{y}$. Polo que ϕ é inxectiva en \mathbb{RP}^3 pois necesariamente se as iaxes son iguais cúmprese que $[x, y, z, w] = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}]$. Xa que se algunha coordenada de (x, y, z, w) tivese o signo cambiado respecto das de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ pero non todas, algúns dos elementos da matriz imaxe cambiarían de signo e polo tanto non terían a mesma imaxe, o cal é unha contradición pois estamos supoñendo que si a teñen. Concluimos entón que ϕ é inxectiva en \mathbb{RP}^3 .

Para probar a sobrexectividade, consideraremos unha matriz $A \in SO(3)$ arbitraria e veremos que podemos escribirla como imaxe dun elemento de \mathbb{RP}^3 pola aplicación ϕ . Para iso debemos ter en conta que toda rotación en \mathbb{R}^3 queda determinada polo seu eixo e o ángulo de rotación. Ademais, a matriz correspondente a unha rotación de eixo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ e ángulo θ é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) + \tilde{x}^2(1 - \cos(\theta)) & \tilde{x}\tilde{y}(1 - \cos(\theta)) - \tilde{z}\sin(\theta) & \tilde{x}\tilde{z}(1 - \cos(\theta)) + \tilde{y}\sin(\theta) \\ \tilde{x}\tilde{y}(1 - \cos(\theta)) + \tilde{z}\sin(\theta) & \cos(\theta) + \tilde{y}^2(1 - \cos(\theta)) & \tilde{z}\tilde{y}(1 - \cos(\theta)) - \tilde{x}\sin(\theta) \\ \tilde{x}\tilde{z}(1 - \cos(\theta)) - \tilde{y}\sin(\theta) & \tilde{z}\tilde{y}(1 - \cos(\theta)) + \tilde{x}\sin(\theta) & \cos(\theta) + \tilde{z}^2(1 - \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

Como todo $s \in \mathbb{S}^3$ se pode escribir como $s = (\sin(\alpha)x, \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)z, \cos(\alpha))$ con $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$. É fácil probar polas propiedades de senos e cosenos e polos resultados

ata aquí expostos na demostración que podemos escribir calquer $A \in SO(3)$, matriz de rotación respecto ao eixo $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ e de ángulo θ como:

$$A = \phi \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \tilde{x}, \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \tilde{y}, \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \tilde{z}, \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right).$$

Por ser \mathbb{RP}^3 o espazo cociente de \mathbb{S}^3 coa topoloxía usual, temos que é un espazo topolóxico compacto. Asimesmo, por ser $SO(3)$ subespazo de \mathbb{R}^9 temos que é Hausdorff. Recapitulando temos que ϕ é unha aplicación continua e bixectiva dun compacto a un Hausdorff, do que se conclue que é un homeomorfismo como queríamos demostrar. \square

Proposición 6.16. *Sexa $X = \mathbb{RP}^3$, entón:*

$$TC(\mathbb{RP}^3) = \text{cat}(\mathbb{RP}^3) = 4.$$

Pode consultarse a proba en [[7], páx.98].

6.3.1. Bloqueo de cardán

Un caso particular moi coñecido da non existencia dun algoritmo de planificación de movementos en $SO(3)$, como vimos na Proposición 6.16, é o Gimbal-Lock; tamén coñecido como bloqueo de cardán.

Unha suspensión de cardán é un mecanismo destinado a controlar a rotación dun obxecto sobre un eixo, centrarémonos nas suspensións que constan de tres eixos. Pódese empregar un conxunto de tres cardanes ortogonais entre si, para permitir manter a orientación dun eixo de rotación aínda que o seu soporte se mova. Véxase a Figura 6.7

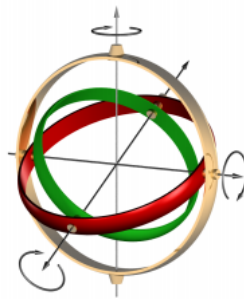


Figura 6.7: Suspensión de cardán

É empregado moi a miúdo en xiroscopios, brúxulas, sistemas propulsores de cohetes, avións, etc. Chamamos entón bloqueo de cardán á perda dun grao de liberdade nunha suspensión de cardán de tres eixos. Sucede cando dous dos eixos se colocan en paralelo,

bloqueando o sistema de rotación nun espazo bidimensional dexenerado, é dicir, pasamos de ter tres eixos a ter dous. Este fenómeno é posíbel debido á non existencia dun algoritmo de planificación de movementos continuo no espazo de rotacións en \mathbb{R}^3 .

Podemos visualizar este suceso na Figura 6.8.

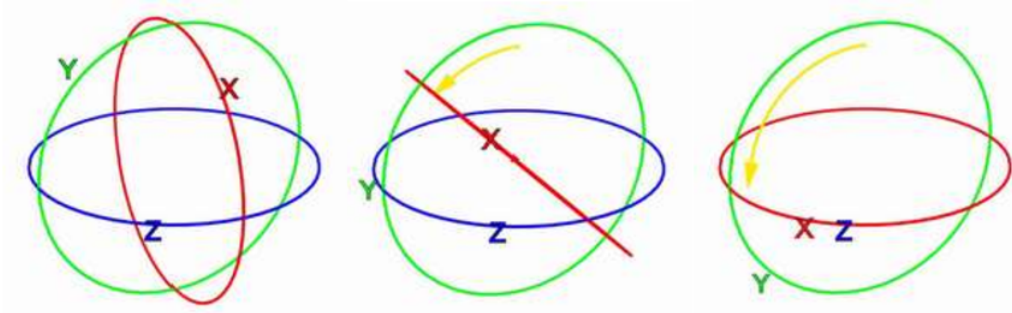


Figura 6.8: Gimbal-Lock

Como curiosidade, un caso moi famoso de Gimbal-lock foi a misión fallida do Apolo 13 en 1970. A computadora de guía do Apollo tiña un xiroscopio que estaba montado dentro de tres cardanes aniñados como se ve na Figura 6.7. Foi o "bloqueo de cardán" que explicamos nesta subsección o que causou a súa desestabilización.



Figura 6.9: Apolo 13

Bibliografía

- [1] Cornea, O., Gregory, L., Oprea, J. and Tantré, D. *Lusternik-Schnirelmann Category*, American Mathematical Society, 2003.
- [2] Crossley, M.D. *Essential Topology*. London: Springer, 2005.
- [3] Dold, A. *Lectures on algebraic topology*, Berlin: Springer-Verlag, 1972.
- [4] Dranishnikov, A. *On the Lusternik-Schnirelmann category of spaces with 2-dimensional fundamental group*, American Mathematical Society. **137**, No. 4, 1489-1497. (2009).
- [5] Dummit, D. S. Foote, R. M. *Abstract Algebra*, Chichester: Wiley, 2004.
- [6] Farber, M. Topological Complexity of Motion Planning. *Discrete and Computational Geometry*. **29**, 211-221. (2003).
- [7] Farber, M. *Invitation to Topological Robotics*, European Mathematical Society, 2008.
- [8] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] Hausmann, J.-C. *Mod Two Homology and Cohomology*, Springer, 2014.
- [10] Lusternik, L. ; Schnirelmann, L. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. I: Espaces à un nombre fini de dimensions. Actualités Scientifiques et Industrielles. 188. (Exposés sur l'analyse mathématique et ses applications. III). Publiés par J. Hadamard. Paris: Hermann et Cie (1934).
- [11] Macías-Virgós, E. and Mosquera-Lois, D. Homotopic distance between maps, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **172**, No.1, 73-93. (2020).
- [12] Mosquera-Lois, D. *Complejidad topológica en la robótica*, Universidade de Santiago de Compostela, 2016.
- [13] Munkres, J. *Elements of Algebraic Topology*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2018.

- [14] Oprea, J. and Strom, J. *Mixing Categories*, American Mathematical Society. **139**, No.9, 3383-3392. (2011).
- [15] Oprea, J. and Strom, J. *Proc. Am. Math. Soc* **139**, 3383-3392. (2011).
- [16] Rotman, J.J. *An Introduction to Algebraic Topology*, New York (FRG): Springer-Verlag, 1988.
- [17] Svarc, A. S. *The genus of a fiber space*, Amer. Math. Soc. Transl. **55**, No. 2, 49-140. (1966).