



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría Global De Curvas

Tomás Rodríguez Vázquez

2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría Global De Curvas

Tomás Rodríguez Vázquez

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Teoría global de curvas
Breve descripción do contido
O traballo consiste en estudar as curvas do plano e do espazo desde un punto de vista global, obtendo teoremas que relacionen a súa topoloxía coa súa xeometría.
Recomendacións
-
Outras observacións
-

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Variedades diferenciables, curvas y superficies	1
1.1. Variedades diferenciables	1
1.2. Curvas	8
1.3. Superficies	19
1.4. Teorema de clasificación de curvas	26
2. Teorema de Jordan–Brouwer	35
2.1. Motivación del problema	35
2.2. Transversalidad	39
2.3. Convergencia de rectas	42
2.4. Teorema de Jordan–Brouwer	47
Bibliografía	55

Resumen

En el siglo XIX, con la aparición de la geometría diferencial moderna, se dio un gran paso a la hora de generalizar las curvas y superficies clásicas. Esto supuso dejar atrás la belleza de la geometría clásica a un plano secundario, centrándose en un punto de vista más abstracto. El objetivo de este trabajo es presentar las variedades diferenciables y algunos de los resultados más importantes sobre ellas, entre los que destaca el Teorema de clasificación de curvas. A su vez, exponemos las curvas y superficies de \mathbb{R}^3 , explicando su relación con las variedades, así como los conceptos geométricos más importantes que ayudan a su estudio, como la torsión, la curvatura, la noción de geodésica... También, a lo largo de la exposición emana la cuestión del Teorema de la curva de Jordan, así como una posible versión de este generalizada a dimensiones superiores. Se dedicará una parte del trabajo a la demostración de este teorema en \mathbb{R}^3 , el cual se conoce como Teorema de Jordan–Brouwer.

Abstract

In the 19th century, with the emergence of modern differential geometry, a significant step was taken towards the generalization of classical curves and surfaces. This meant shifting the focus from the beauty of classical geometry to a more abstract viewpoint. The objective of this work is to introduce differentiable manifolds and some of the most important results concerning them, including the curve classification theorem. Additionally, we explore curves and surfaces in \mathbb{R}^3 , explaining their relation to manifolds, as well as key geometric concepts that aid in their study, such as torsion, curvature and the notion of geodesic. Throughout this work, the question of the Jordan curve theorem arises, along with its possible generalization to higher dimensions. Consequently, part of this work is dedicated to proving this theorem in \mathbb{R}^3 , which is known as the Jordan–Brouwer theorem.

Introducción

Desde la antigüedad, la geometría fue una disciplina fundamental en las matemáticas. El apasionante mundo de las curvas y superficies clásicas, donde la belleza matemática se entrelaza con la elegancia visual, cautivó a un gran número de expertos en el campo. Uno de los primeros avances significativos lo dieron los matemáticos griegos, como Euclides y Arquímedes, aunque no fue hasta el siglo XVII que se hicieron importantes investigaciones en geometría, de la mano del italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (1667–1733), cuyas ideas influyeron en el desarrollo de la geometría no euclidiana. Merece la pena recalcar que las curvas y superficies clásicas han desempeñado un papel crucial en campos tan diversos como la arquitectura, el diseño industrial y la física.

En el siglo XIX, el ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792–1856) y el húngaro János Bolyai (1802–1860) realizaron trabajos sobre geometrías no euclidianas. Los trabajos de Lobachevsky y Bolyai fueron pioneros en este campo y desafiaron la noción arraigada de que solo existía una geometría válida. Sus contribuciones abrieron las puertas a nuevos enfoques en matemáticas y sentaron las bases para la posterior formulación de la geometría de Riemann. Lobachevsky publicó su investigación sobre la geometría hiperbólica en 1826. Por otro lado, Bolyai, un matemático húngaro, también la desarrolló de forma independiente alrededor del mismo período. Revolucionaron la comprensión de la geometría al desarrollar ejemplos de geometrías no euclidianas en las cuales el famoso axioma de Playfair no se cumple. Este axioma, también conocido como el axioma de las paralelas, establece que, dada una línea recta y un punto exterior a ella, solo hay una línea recta que pasa por ese punto y no se interseca con la línea original. En particular, se enfocaron en la geometría hiperbólica, donde se relajaba el axioma de Playfair y se permitía la existencia de múltiples líneas paralelas que pasaban por un punto exterior a una línea dada.

Posteriormente, hubo un notorio aumento en el interés de la geometría diferencial global. En este trabajo, intentaremos fusionar estos dos puntos de vista, acercándolos lo máximo posible y presentando su relación entre ellos de una forma natural. Al hacer esto, inevitablemente surgen cuestiones topológicas para suplir algunos huecos. Por ello, abordar este trabajo de esta manera es una elegante forma de entender no solo una gran cantidad de conceptos relacionados con la

materia, si no también de entender el progreso en el estudio a lo largo de los años.

El concepto de análisis geométrico más general que venimos de comentar, las llamadas variedades diferenciables, no tuvo sus orígenes hasta el siglo XIX, con los trabajos de Carl Friedrich Gauss (1777–1855) y Bernhard Riemann (1826–1866). Hoy en día, el estudio de las variedades diferenciables sigue siendo una disciplina activa y de gran relevancia en las matemáticas. A grandes rasgos, las variedades diferenciables constituyen un marco matemático fundamental abstracto para el análisis de espacios curvos. Generalizan conceptos geométricos a espacios de mayor dimensión, permitiéndonos estudiarlos y describirlos con detalle. La geometría clásica de curvas y superficies por otro lado, se dedica al estudio exhaustivo de las propiedades geométricas de estas figuras dentro del espacio euclidiano tridimensional, como la curvatura, la torsión y las parametrizaciones, utilizando una notación más ligera y específica, que nos permite estudiar de manera más concreta y aplicada las figuras tridimensionales.

A la vez que crecía el ámbito de la geometría diferencial, también lo hacía la topología. Los trabajos de Riemann en su generalización de las curvas algebraicas a dimensiones superiores, proporcionaron el que se conoce como Teorema de clasificación de curvas algebraicas, en términos de su género, que es una medida de la “cantidad de agujeros” en una curva. Este teorema sentó las bases para el estudio posterior de las curvas algebraicas. El Teorema de clasificación de curvas diferenciales se deriva de los trabajos de varios matemáticos en el siglo XIX y XX. En particular destacan los franceses Henri Poincaré (1854–1912) y Élie Cartan (1869–1951), quienes contribuyeron de manera significativa a esta área. El Teorema de clasificación de curvas diferenciables establece que las variedades unidimensionales conexas son difeomorfas al círculo o a la recta real, en función de su compacidad.

En el corazón de esta narrativa histórica se encuentra el Teorema de la Curva de Jordan, un hito que marcó un antes y un después en la geometría y topología, estableciendo una poderosa conexión que asegura que una curva cerrada simple divide el plano en dos regiones, una interior y una exterior. En realidad, fue planteado originalmente por el checo Bernard Bolzano (1781–1848), quien fue el primero en formular una conjetura precisa, apuntando que no era un resultado trivial y que requería una demostración. El francés Camille Jordan (1838–1922) proporcionó la que se considera la primera demostración en charlas y conferencias, recogida en el libro *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* en el año 1887 [8]. La demostración original es ciertamente complicada e impresionó a muchos matemáticos de la época, especialmente por la destreza que mostró Jordan para evitar demostrar algunas suposiciones ciertamente complicadas de forma elegante. Dada la importancia y fuerza de este teorema en el campo de la topología, fue un foco importante de estudio en el siglo XX, y recibió la atención de muchos ilustres de la época.

Su demostración, sin embargo, estaba incompleta porque dio por sentado la demostración en el caso de los polígonos y también omitió algunos detalles en su argumento. Este teorema

aparentemente obvio resultó ser sorprendentemente difícil de verificar. La primera demostración completa fue realizada por el matemático estadounidense Oswald Veblen (1880–1960) en 1905. Una complicación para demostrarlo involucraba la existencia de curvas continuas pero no diferenciables en ningún punto. El ejemplo más famoso es el conocido como “copo de Koch”, descrito por primera vez en 1906 por el sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). Estas demostraciones usaban argumentos geométricos complicados.

Cabe destacar en este contexto el Teorema de Jordan–Schönflies. Es una versión más fuerte del Teorema de la curva de Jordan, puesto que asegura que toda curva C cerrada y plana separa el plano \mathbb{R}^2 en exactamente dos regiones conexas, y además prueba que la región interior encerrada por la curva es homeomorfa a un disco. Una demostración de este teorema puede consultarse en [3].

El holandés Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) junto con la ayuda del francés Henri Lebesgue (1875–1941), dio una prueba más general e independiente en el año 1911 para dimensiones mayores. La demostración de este teorema, conocido generalmente como Teorema de Jordan–Brouwer, en honor a Camille Jordan, puede ser considerada en tres partes, considerando $S \subset \mathbb{R}^n$ compacta conexa:

1. $\mathbb{R}^n - S$ tiene al menos dos componentes conexas.
2. $\mathbb{R}^n - S$ tiene a lo sumo dos componentes conexas.
3. S es la frontera de las componentes conexas de $\mathbb{R}^n - S$.

Lebesgue dio la prueba a la primera parte del teorema, la cual continuó Brouwer tras dudar mucho sobre la demostración de la primera parte. En esta línea, el estadounidense J. W. Alexander (1888–1971), estableciendo lo que se conoce como la dualidad de Alexander, demostró una generalización todavía más fuerte usando teoría de homología en 1922 [1].

El objetivo de este trabajo es presentar las variedades diferenciables como una generalización de las curvas y superficies en \mathbb{R}^3 , proporcionando resultados importantes sobre estas que nos ayudarán a seguir el hilo del trabajo. A su vez, sin dejar atrás la geometría diferencial clásica, daremos los conceptos y las características más típicas de las curvas y las superficies que nos ayudan a entender su movimiento en el espacio euclidiano. Este trabajo consta de dos capítulos con múltiples secciones:

En el primer capítulo, introducimos las variedades diferenciables, curvas y superficies en \mathbb{R}^3 y demostramos exhaustivamente el Teorema de clasificación de curvas. También se dará una breve discusión sobre el teorema generalizado a dimensiones superiores, focalizándonos especialmente en el caso de las superficies, contexto en el cual introducimos la fórmula de Gauss-Bonnet

demostrando su importancia.

En el segundo capítulo, tratamos de demostrar de la forma más sencilla posible el complejo Teorema de Jordan–Brouwer para superficies en \mathbb{R}^3 . Seguiremos el orden que Jordan y Lebesgue siguieron en su momento, e indicamos el hecho de que este teorema se puede transpasar a \mathbb{R}^2 sin demasiado trabajo, de forma que sirve como demostración del Teorema de la curva de Jordan.

Capítulo 1

Variedades diferenciables, curvas y superficies

En este capítulo, abordaremos los conceptos básicos que nos hacen falta para poder desarrollar el trabajo. En primer lugar, introduciremos el concepto de variedad diferenciable, subvariedad, así como algunos resultados importantes relativos a ellas. También estudiaremos las curvas y superficies parametrizadas, explorando los conceptos geométricos más interesantes asociados a estos objetos. Finalmente, demostraremos el Teorema de clasificación de curvas planas.

1.1. Variedades diferenciables

Las referencias seguidas para esta sección son [6], [9], [13], [15], [21] y [22].

Hablando en términos sencillos, las variedades diferenciables son espacios que se parecen localmente a un espacio euclidiano \mathbb{R}^n , y en las cuales se puede hacer cálculo.

Cada variedad diferenciable está equipada con una familia de sistemas de coordenadas locales que están relacionados entre sí por transformaciones de coordenadas que pertenecen a una clase específica.

Definición 1.1. Una **variedad topológica** M es un espacio topológico Hausdorff, localmente euclidiano y segundo numerable.

Definición 1.2. Una **variedad diferenciable de dimensión** n es un conjunto M junto con una familia de aplicaciones biyectivas llamadas **cartas** (que inducen una topología Hausdorff y segundo numerable), $\phi_i : U_i \rightarrow A_i$, $i \in I$, donde I es un conjunto de índices, U_i es un subconjunto de M y A_i es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , cumpliendo las siguientes propiedades:

1. Los dominios de las cartas recubren M , es decir: $\bigcup_{i \in I} U_i = M$. Si esto se cumple, $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ se llama **atlas** de M .
2. Para cualquier par, $i, j \in I$, el dominio $\phi_j(U_i \cap U_j)$ de la aplicación $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es un abierto de \mathbb{R}^n y la aplicación

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

es de clase \mathcal{C}^∞ .

Se dice entonces que la familia de cartas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ es una **estructura diferenciable** de M . A n se le llama **dimensión** de M .

Dicho de otra forma, una variedad diferenciable es un espacio topológico acompañado de una estructura diferenciable. Es decir, dada una estructura diferenciable sobre una variedad topológica M de dimensión n ,

$$\mathfrak{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I} = \{\phi_i : U_i \rightarrow A_i\}_{i \in I},$$

se entiende por variedad diferenciable de dimensión n al par (M, \mathfrak{U}) .

Ejemplo 1.3. \mathbb{R} admite una infinidad de estructuras que hacen de ella una variedad diferenciable. Por ejemplo, si se considera el homeomorfismo $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Gamma(x) = x^3,$$

entonces el atlas definido por la carta $\mathfrak{U} = [\mathbb{R}, \Gamma]$ (escrito entre corchetes por tener un solo elemento) define una estructura diferenciable en \mathbb{R} , y por tanto, $(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ es una variedad diferenciable.

Esto expone que, una variedad diferenciable M , puede tener más de una estructura diferenciable. Aunque en general no se ponga la variedad acompañada de ella, se sobreentiende que la hay que tener en cuenta.

Es importante advertir que se admiten también variedades de dimensión 0. La definición de variedad en este caso requiere aceptar algunos convenios. En concreto, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ es el espacio vectorial real de dimensión 0, que consta de un solo punto. Por tanto, cualquier carta (no vacía) de la variedad, consistirá en un solo punto, que será así un abierto.

Definición 1.4 (Subvariedad abierta). Si $(M, \{\phi_i : U_i \rightarrow A_i\}_{i \in I})$ es una variedad diferenciable y $N \subset M$ es un abierto de M , entonces $(N, \{\phi_i|_{V_i} : V_i \rightarrow B_i\}_{i \in I})$, donde $V_i = N \cap U_i$ y $B_i = \phi_i(V_i) \subset \mathbb{R}^n$, es una variedad diferenciable. N se dice que es una **subvariedad abierta** de M . En particular, cualquier abierto de \mathbb{R}^n con la carta identidad es una variedad diferenciable.

Hay una clase de subvariedades más general, pero para poder definirla, necesitaremos algunos conceptos previos. Primero, generalizaremos el concepto de semirrecta tangente a una curva y de plano tangente a una superficie en \mathbb{R}^3 a variedades diferenciables. En el caso de curvas y superficies, esos espacios tangentes tienen una representación concreta como subespacios vectoriales del espacio ambiente. En el caso de variedades, al no existir espacio ambiente, el concepto de espacio tangente es un poco más abstracto.

El concepto de función diferenciable entre variedades es muy importante, y requiere de la ayuda de las cartas para su definición:

Definición 1.5. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación de la variedad diferenciable M en la variedad diferenciable N . Se dice que f es **diferenciable** si lo es en cada punto de M y, en particular, es diferenciable en un punto $m \in M$ si existe una carta $\phi : U \rightarrow A$ de M y una carta $\Phi : V \rightarrow B$ de N tales que $m \in U$, $f(U) \subset V$ y que la composición $\Phi \circ f \circ \phi^{-1} : A \rightarrow B$ es una aplicación diferenciable en $\phi(m)$. Si f es diferenciable y biyectiva y f^{-1} es también diferenciable, decimos que f es un **difeomorfismo** y que M y N son variedades **difeomorfas**.

Sea M una variedad diferenciable. Se llama **curva diferenciable** en M a una aplicación diferenciable $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, siendo (a, b) un intervalo abierto de \mathbb{R} . Sea $m \in M$ y $\text{Curvas}(M, m)$ el conjunto de curvas diferenciables α en M , tales que su intervalo de definición contiene al 0 y $\alpha(0) = m$. Sea $\mathfrak{F}(m)$ el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en algún entorno de m . Definimos en $\text{Curvas}(M, m)$ una relación de equivalencia como sigue: si $\alpha, \beta \in \text{Curvas}(M, m)$, ponemos $\alpha \sim \beta$ si para toda $f \in \mathfrak{F}(m)$ se tiene

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

Denotaremos por $T_m M$ el conjunto de clases de equivalencia respecto a esta relación: $T_m M = \frac{\text{Curvas}(M, m)}{\sim}$, y por $p : \text{Curvas}(M, m) \rightarrow T_m M$ a la proyección natural que a cada curva le asigna su clase de equivalencia. El conjunto $T_m M$ recibe el nombre de **espacio tangente a M en m** y a sus elementos se les llama vectores tangentes a M en m . Cabe destacar que $T_m M$ es un espacio vectorial de dimensión m .

Cada clase de equivalencia $v = p(\alpha) \in T_m M$, o sea cada vector tangente, define una aplicación que asigna un número real $v(f)$ a cada función $f \in \mathfrak{F}(m)$ mediante

$$v(f) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Esa aplicación caracteriza al vector tangente.

Consideramos el conjunto

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M,$$

el cual se puede dotar de una estructura de variedad diferenciable, que se llama **fibrado tangente** de M [9, Capítulo 3]. En particular, sobre el fibrado tangente existe una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, de forma tal que la aplicación proyección $\pi : TM \rightarrow M$ es una submersión (ver: Definición 1.9).

Llamamos **espacio cotangente** a M en $m \in M$, y lo denotaremos por T_m^*M , al espacio vectorial dual de T_mM , es decir, $T_m^*M = (T_mM)^* = \text{Hom}(T_mM; \mathbb{R})$. Sabemos entonces que $\dim T_m^*M = n$. A todos los elementos de T_m^*M se les denomina **1-formas en m** .

Sea $f \in \mathfrak{F}(m)$, $m \in M$. Entonces, esa función define un elemento de T_m^*M que se escribe df_m y se llama diferencial de f en m , mediante

$$df_m(v) = v(f), \quad v \in T_mM.$$

Si denotamos por $\partial/\partial x^i|_m$ a la derivación que toma la i -ésima derivada parcial de (la representación en coordenadas de) f en el punto (representación coordenada del punto) m , entonces los vectores $\partial/\partial x^i|_m$ se llaman los **vectores coordenados** en m asociados al sistema de coordenadas dado. En el caso específico de las coordenadas estándar en \mathbb{R}^n , los vectores $\partial/\partial x^i|_m$ son literalmente los operadores derivadas parciales.

Sea $\pi : TM \rightarrow M$ la aplicación sobreyectiva tal que $\pi(X) = m$ si $X \in T_mM$, o sea, que aplica a cada vector tangente a M en un punto, el punto en el cual es tangente. Sea $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ el atlas de M . Construimos un atlas de TM , $\{(\bar{U}_i, \bar{\phi}_i)\}_{i \in I}$, como sigue. En primer lugar, $\bar{U}_i := \pi^{-1}(U_i)$ y así es evidente que $\bigcup_{i \in I} \bar{U}_i = TM$. La aplicación $\bar{\phi}_i : \bar{U}_i \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ viene dada por $\bar{\phi}_i(X) = (\phi_i(m), (d\phi_i^1)_m(X), \dots, (d\phi_i^n)_m(X))$. Es decir, las primeras n coordenadas de $\bar{\phi}_i(X) \in \mathbb{R}^{2n}$ vienen dadas por las coordenadas de $\phi_i(m)$, mientras que las siguientes n coordenadas son las componentes de X en la base $\{\partial/\partial \phi_i^1|_m, \dots, \partial/\partial \phi_i^n|_m\}$ de T_mM .

Es decir, si $\{\partial/\partial \phi_i^1|_m, \dots, \partial/\partial \phi_i^n|_m\}$ es la base natural de $T_{\pi(\omega)}M$, donde $\omega \in \bar{U}_i$ (y por tanto $\pi(\omega) \in U_i$), entonces $\omega = \sum_{j=1}^n (d\phi_i^j)_m \left(\partial/\partial \phi_i^j|_m \right)$.

Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Vamos a ver que f induce una aplicación diferenciable $f_* : TM \rightarrow TN$, que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Para ello, sea $X = p(\gamma) \in TM$, con $\pi(X) = m, \gamma \in \text{Curvas}(M, m)$. La composición $f \circ \gamma$ es claramente un elemento de $\text{Curvas}(N, f(m))$. Pues bien, ponemos $f_*(X) = p(f \circ \gamma) \in T_{f(m)}N$. Para que la definición sea consistente, ha de ser independiente del representante elegido para X .

Pero esto es evidente una vez hacemos actuar $p(f \circ \gamma)$, sobre una función de $\mathfrak{F}(f(m))$. Sea h esa función. Entonces

$$p(f \circ \gamma)(h) = (h \circ (f \circ \gamma))'(0) = p(\gamma)(h \circ f) = X(h \circ f),$$

cálculo que se justifica porque la composición $h \circ f$ es una función diferenciable definida en un entorno de m , es decir, de $\mathfrak{F}(m)$. Por tanto, la expresión de $f_*(X)$ no depende del representante γ elegido para X . Podemos escribir, pues, $f_*(X)(h) = X(h \circ f)$. El diagrama anterior es conmutativo ya que $\pi(f_*(X)) = f(m) = f(\pi(X))$.

A la aplicación f_* se le da el nombre de **diferencial** de f . Hay muchas notaciones en la literatura para denotarla; aparte de la empleada aquí, se suele ver también γf , df , Tf ...

Resumiendo, acabamos de ver que si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable desde una variedad diferenciable de dimensión m , a otra variedad diferenciable, N , de dimensión n , la diferencial de f es una aplicación $f_* : TM \rightarrow TN$. En cada punto de M , esta es una transformación lineal desde un plano tangente a otro:

$$f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N.$$

El rango de f en el punto p es el rango de la transformación lineal.

Uno puede darse cuenta de que para una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se tienen dos definiciones diferentes para la diferencial de f en el punto $p \in M$. Primero, hemos definido la diferencial de f en un punto p , f_{*p} , como una función lineal desde T_pM a $T_{f(p)}\mathbb{R}$, pero después la hemos definido como un covector en p , es decir, una aplicación lineal de T_pM a \mathbb{R} . Realmente, estas son ambas el mismo objeto, sin más que tener en cuenta la identificación canónica entre $T_{f(p)}\mathbb{R}$ y \mathbb{R} ; una forma fácil de decir esto es dándose de cuenta de que ambas son representadas por la matriz fila cuyas componentes son las **derivadas parciales de f** . A continuación damos algunas **propiedades de las diferenciales** importantes:

Proposición 1.6 ([9, Proposición 3.6]). *Consideramos M , N y P variedades diferenciables y $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ funciones diferenciables. Sea $m \in M$. Entonces:*

$$a) (G \circ F)_{*m} = G_{*F(m)} \circ F_{*m} : T_mM \rightarrow T_{(G \circ F)(m)}P.$$

$$b) (Id_M)_{*m} = Id_{T_mM} : T_mM \rightarrow T_mM.$$

$$c) Si F es un difeomorfismo, entonces $F_{*m} : T_mM \rightarrow T_{F(m)}N$ es un isomorfismo y $(F_{*m})^{-1} = (F^{-1})_{*F(m)}$.$$

Definición 1.7. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Un punto $m \in M$ se dice que es un **punto regular de f** si $df_m : T_mM \rightarrow T_{f(m)}N$ es sobreyectiva. En otro caso, m es un

punto crítico de f . Un punto $c \in N$ se dice que es un **valor regular** de f si todo punto del conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es un punto regular. En otro caso, c es un **valor crítico**. En particular, si $f^{-1}(c) = \emptyset$, entonces c es un valor regular.

Un conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ se llama **conjunto de nivel regular** si c es un valor regular de f , es decir, es un conjunto de nivel consistente en puntos regulares de f .

Una vez tenemos definido el concepto de diferencial de f , donde f es una función diferenciable entre dos variedades, estamos en condiciones de dar la definición de los diferentes tipos de subvariedades.

Definición 1.8. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Se dice que f es una **inmersión** de M en N si f_{*m} es inyectiva para todo $m \in M$, o equivalentemente si el rango de f es constante e igual a $\dim M$.

Si f es una inmersión inyectiva que además es homeomorfismo de M sobre su imagen $f(M)$, con la topología como subespacio de M , entonces es un **embebimiento**.

Definición 1.9. Se dice que $f : M \rightarrow N$ es una **submersión**, si f_{*m} es sobreyectiva para todo $m \in M$, o sea si f es de rango constante e igual a $\dim N$.

Definición 1.10. Sea $f : M \rightarrow N$ un embebimiento. Se dice que $f(M)$, dotada de la estructura diferenciable que hace a $f : M \rightarrow f(M)$ un difeomorfismo, es una subvariedad embebida o **subvariedad regular** de N . En particular, diremos que una subvariedad regular de dimensión 1 es una **curva simple**.

Dicho de otra forma, una subvariedad embebida de una variedad diferenciable M es un subconjunto $S \subseteq M$ que es una variedad diferenciable en la topología del subespacio, dotada de una estructura diferenciable con respecto a la cual la inclusión $S \hookrightarrow M$ es un embebimiento.

Si S es una subvariedad embebida de M , entonces la diferencia $\dim M - \dim S$ se llama **codimensión** de S en M y M se llama la **variedad ambiente** de S . Una **hipersuperficie** embebida es una subvariedad embebida de codimensión 1.

El concepto de embebimiento es especialmente importante, pues formaliza la noción de M como subvariedad de N . Aunque existe el concepto de subvariedad inmersa, las subvariedades embebidas son las más naturales y son suficientes para los propósitos de este trabajo. Además, se tiene que toda subvariedad inmersa es localmente una subvariedad embebida. Ver [9, Proposición 5.22].

Proposición 1.11 ([9, Corolario 5.13]). *Si M y N son variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ es una submersión diferenciable, entonces cada conjunto de nivel de f es una subvariedad embebida cuya codimensión es igual a la dimensión de N .*

Teorema 1.12 (Teorema del valor regular). *Todo conjunto de nivel regular de una función diferenciable entre variedades es una subvariedad embebida cuya codimensión es igual a la dimensión del codominio.*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable y $c \in N$ un valor regular. El conjunto U de puntos $m \in M$ donde el rango de f_{*m} es igual a la dimensión de N es abierto en M por ser f_{*m} sobreyectiva, y contiene a $f^{-1}(c)$ por la hipótesis de que c es un valor regular. Con lo cual, $f|_U : U \rightarrow N$ es una submersión diferenciable, y por tanto, se sigue de la Proposición 1.11 que $f^{-1}(c)$ es una subvariedad embebida de U . Como la composición de embebimientos diferenciables $f^{-1}(c) \hookrightarrow U \hookrightarrow M$ es de nuevo un embebimiento diferenciable, se sigue que $f^{-1}(c)$ es una subvariedad embebida de M , y además es cerrada por continuidad. \square

Ya que sabemos ahora algunas características de las funciones entre variedades diferenciables, es de interés conocer qué pasa con sus inversas. El Teorema de la función inversa es uno de los resultados fundamentales en el estudio de las variedades diferenciables. Proporciona una condición suficiente para que una función diferenciable tenga una inversa local, lo cual es crucial para comprender la estructura y propiedades de las variedades. A continuación, damos el teorema para la diferencial usual y después lo adaptamos al marco de las variedades:

Teorema 1.13 ([9, Teorema C.34]). *Supongamos que U y V son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , y $F : U \rightarrow V$ es una función diferenciable. Si $DF(a)$ es inversible en algún punto $a \in U$, entonces existen entornos conexos $U_0 \subset U$ de a y $V_0 \subset V$ de $F(a)$ tales que $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es un difeomorfismo.*

Si M y N son variedades diferenciables, entonces una función $F : M \rightarrow N$ se dice **difeomorfismo local** si cada punto $m \in M$ tiene un entorno U tal que $F(U)$ es abierto en N y $F|_U : U \rightarrow F(U)$ es un difeomorfismo. El siguiente teorema es clave para el desarrollo del trabajo.

Teorema 1.14 (Teorema de la función inversa para variedades). *Supongamos que M y N son variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable. Entonces, si $m \in M$ es un punto tal que f_{*m} es invertible, entonces existen entornos conexos U_0 de m y V_0 de $f(m)$ tales que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Como f_{*m} es biyectiva entonces M y N tiene la misma dimensión n . Consideramos las cartas (U, ϕ) centrada en m y (V, Γ) centrada en $f(m)$, con $f(U) \subseteq V$. Entonces,

$$\bar{f} = \Gamma \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \Gamma(V)$$

es una función diferenciable desde el abierto $\bar{U} = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\bar{V} = \Gamma(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\bar{f}(m) = 0$. Como ϕ y Γ son difeomorfismos, la diferencial $\bar{f}_{*0} = \Gamma_{*f(m)} \circ f_{*m} \circ \phi_{*0}^{-1}$ es no singular, en base

al apartado c) Proposición 1.6. El Teorema 1.13 demuestra que existen subconjuntos abiertos conexos $\bar{U}_0 \subseteq \bar{U}$ y $\bar{V}_0 \subseteq \bar{V}$ conteniendo 0 tales que \bar{f} es un difeomorfismo restringido de \bar{U}_0 a \bar{V}_0 . Así, $U_0 = \phi^{-1}(\bar{U}_0)$ y $V_0 = \Gamma^{-1}(\bar{V}_0)$ son entornos conexos de m y $f(m)$, respectivamente, y de aquí se sigue que $f|_{U_0}$ es un difeomorfismo de U_0 a V_0 tal y como queríamos demostrar. \square

Definición 1.15. Si M es una variedad diferenciable, entonces **un campo de vectores** sobre M es una sección de la aplicación $\pi : TM \rightarrow M$.

Dicho de otra forma, un campo de vectores es una aplicación continua $X : M \rightarrow TM$, que se suele denotar por $m \mapsto X_m$, con la propiedad siguiente:

$$\pi \circ X = Id_M,$$

o, equivalentemente, $X_m \in T_m M$ para cada $m \in M$ (escribimos el valor de X en el punto m como X_m para ser consistentes con la notación de elementos del espacio tangente y evitar conflictos con la notación $v(f)$ para la acción de un vector sobre una función).

Estamos principalmente interesados en los **campos de vectores diferenciables**, que son aquellos que son diferenciables como funciones de M a TM , cuando TM está dotado de la estructura diferenciable que se puede ver en [9, Proposición 3.18].

Si M es una variedad diferenciable, entonces el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ se conoce como el conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M .

La orientación de variedades es una noción notablemente importante, sobre todo de cara a la teoría de integración de variedades diferenciables. Sin embargo, no nos interesa porque se sale de las pretensiones de este trabajo. Por ello, daremos la definición de orientabilidad para superficies parametrizadas en el Capítulo 1.3, pues es de vital importancia y agiliza la presentación.

1.2. Curvas

Como ya hemos mencionado en la anterior sección, podemos tomar las variedades diferenciables como una generalización de las curvas y superficies en el espacio euclidiano. Sin embargo, las curvas y superficies como habitualmente las conocemos son mucho más intuitivas en el sentido de que son objetos geométricos más concretos y mucho menos complejos y abstractos que una variedad diferenciable.

En esta sección vamos a introducir conceptos geométricos importantes en el estudio de curvas en \mathbb{R}^n , que nos ayudarán a entender de una forma más clara cómo se mueven en el espacio. Para el desarrollo de esta sección, se han seguido las referencias [4], [5], [7], [9], [14] y [18].

Supongamos que M es una subvariedad embebida conexa de dimensión 1. Entonces es la imagen de una curva parametrizada, es decir, existe una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que $\alpha(I) = M$, tal y como veremos más adelante, en el Teorema de clasificación de curvas (1.57).

Cabe destacar que no toda curva parametrizada tiene por imagen una subvariedad embebida. En efecto, la figura ocho, cuya parametrización viene dada por

$$f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } f(t) = (\sin 2t, \sin t)$$

es una curva parametrizada, pero no es una subvariedad embebida con la topología estándar heredada de \mathbb{R}^2 , ya que en el punto $(0, 0)$ no hay un entorno homeomorfo a algún espacio euclidiano.

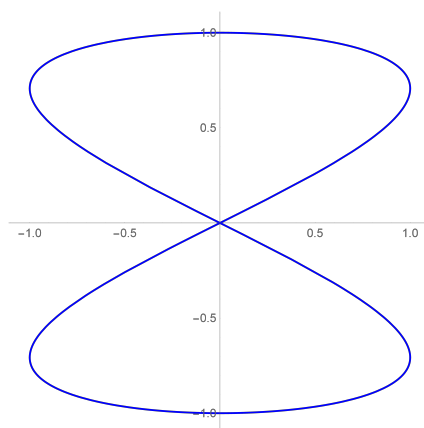


Figura 1.1: Gráfica de la figura ocho.

Sin embargo, la figura de ocho sí es una variedad diferenciable con la topología inducida por la inmersión f , porque en esta topología hay un entorno del punto $(0, 0)$, como se puede ver en la Figura 1.1, que es homeomorfo a un intervalo abierto en la recta real (la topología inducida por f implica que la figura de ocho es homeomorfa a $(-\pi, \pi)$). En cualquier caso, no nos interesa este caso porque no trabajaremos ni con curvas con “autointersecciones” ni con subvariedades inmersas.

Definición 1.16 (Curva regular). Se dice que una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ (α es una inmersión). La imagen $\alpha(I)$ se llama **curva geométrica** y decimos que la aplicación α parametriza la curva.

Definición 1.17. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es una **parametrización afín** si $f(v) = Av + b$, donde A es una matriz real de dimensión $m \times n$ y b es un vector real de \mathbb{R}^m .

Definición 1.18. Una curva **regular a trozos** es una aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, para la cual existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ del intervalo $[a, b]$, tal que, para cada $i = 1, \dots, k$, $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es una curva regular.

En este contexto, podríamos preguntarnos cuál sería la longitud de la curva ante la que estamos. Consideramos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, $[a, b] \subset I$, y $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\} \in \mathbb{P}([a, b])$ (el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$) y se considera la correspondiente familia de puntos $\{\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)\} \subset \alpha(I)$.

Definición 1.19 (Longitud asociada a una partición). La **longitud** de α asociada a la partición P viene dada por

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Es importante señalar que, cuanto más fina es la partición (cuantos más puntos se consideren como vértices), más se ajustará la poligonal a la curva. Es razonable definir entonces la longitud de una curva α entre dos puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$, con $a, b \in I$, como:

$$L_a^b(\alpha) := \lim_{\|P\| \rightarrow 0, P \in \mathbb{P}([a, b])} L(\alpha, P) = \sup\{L(\alpha, P) : P \in \mathbb{P}([a, b])\}.$$

Proposición 1.20 ([7, Proposición 1.1.4]). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada y $[a, b] \subset I$. Entonces,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0, P \in \mathbb{P}([a, b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definición 1.21 (Curva parametrizada por arco). Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada, se denomina **cambio de parámetro** a cualquier difeomorfismo $\Phi : J \rightarrow I$, donde J es un intervalo abierto de \mathbb{R} . La curva $\beta = \alpha \circ \Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama **reparametrización** de la curva α . Se dice que una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Definimos **longitud de arco** desde t_0 como una función $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Como la función $u \in I \mapsto \|\alpha'(u)\|$ es, en general, solo continua, la función S es \mathcal{C}^1 y

$$S'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Si asumimos que la curva α es regular, entonces por el Teorema de la función inversa (1.13), S es una función creciente y diferenciable. Por lo tanto, si definimos $S(I) = J$, la función $S : I \rightarrow J$ es un difeomorfismo entre dos intervalos abiertos. Sea $\phi : J \rightarrow I$ el difeomorfismo inverso y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ la reparametrización de α dada por $\beta = \alpha \circ \phi$. De esta forma, esta nueva parametrización de la curva satisface

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s))\phi'(s) = \frac{\alpha'(\phi(s))}{\|\alpha'(\phi(s))\|},$$

lo que implica que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in J$. Por lo tanto, gracias a esto se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.22. *Toda curva parametrizada regular admite una reparametrización por longitud de arco con un cambio de parámetro que conserva la orientación.*

Obsérvese que cuando $\|\alpha'(t)\| = 1$, el parámetro t de la curva mide (salvo una constante) la longitud de la misma entre un punto fijo (o inicial si suponemos $t_0 = 0$) y $\alpha(t)$ para cada $t \in I$, ya que

$$L_0^t(\alpha) = \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_0^t ds = t.$$

Cuando esto ocurra, usaremos s como el parámetro de la curva, en lugar de t .

La **orientación** de una curva se define intuitivamente como la dirección en la que se recorre la curva. Toda curva parametrizada admite dos orientaciones. La orientación de una curva parametrizada nos da una clase de equivalencia de parametrizaciones, siendo dos parametrizaciones equivalentes si y solo si tienen la misma orientación. Si un cambio de parámetro conserva la orientación, significa que la curva se recorre en el mismo sentido después del cambio de parámetro, es decir, la dirección o sentido de la curva se mantiene constante (formalmente, Φ tiene derivada positiva).

La **teoría local de curvas planas** se dedica al estudio de curvas que se encuentran contenidas en un plano. Desde una perspectiva puramente local, una curva plana parametrizada por arco cuenta con un nivel limitado de libertad para su desplazamiento, ya que o bien puede girar hacia la izquierda o hacia la derecha con respecto de la dirección en la que va la curva en cada instante. Este giro, así como su intensidad, puede ser descrito mediante una función que denominamos curvatura, la cual esencialmente caracteriza a la curva salvo por movimientos rígidos dentro del plano, como detallaremos más adelante.

Para el estudio de este tipo de curvas, en primer lugar, definimos el diedro móvil de Frenet, que nos ayudará con la definición de este concepto. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por arco, en cuyo caso se cumple que su vector tangente, $v_1(s) = \alpha'(s)$, es unitario por definición. El **vector normal a la curva** α , es el vector $v_2(s) = J(v_1(s))$, donde J es la estructura compleja en \mathbb{R}^2 , esto es, la rotación positiva de ángulo $\pi/2$. La estructura compleja en \mathbb{R}^2 se define como sigue:

$$J(p_1, p_2) := (-p_2, p_1) \quad \text{para todo } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Definición 1.23. Los vectores $\{v_1(s), v_2(s)\}$ forman una base ortonormal orientada positivamente del plano euclidiano para cada s , que recibe el nombre de **diedro de Frenet**.

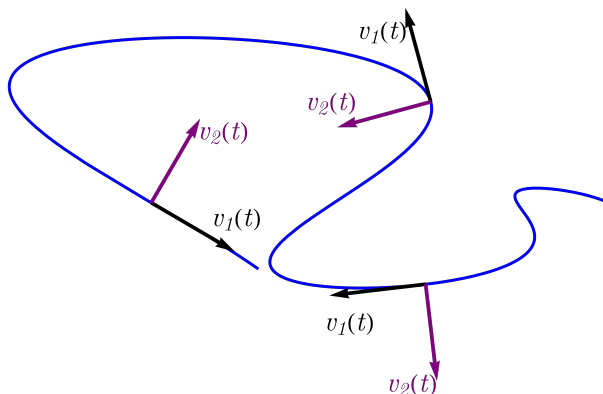


Figura 1.2: Curva plana con su diedro de Frenet asociado, definido en 1.23

Proposición 1.24. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco. Para cada $s \in I$, el vector $v_1'(s)$ está en la dirección de $v_2(s)$, es decir

$$v_1'(s) = \kappa(s)v_2(s), \quad \text{para cada } s \in I.$$

Además:

- a) $\kappa(s) = \langle v_1'(s), v_2(s) \rangle = -\langle v_1(s), v_2'(s) \rangle$.
- b) $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.
- c) $v_2'(s) = -\kappa(s)v_1(s)$.

Demostración. Para cada $s \in I$, se verifica $\|v_1(s)\|^2 = \langle v_1(s), v_1(s) \rangle$; si derivamos,

$$\langle v_1'(s), v_1(s) \rangle = 0,$$

lo que significa que $v_1'(s)$ es ortogonal a $v_1(s)$ y por tanto proporcional a $v_2(s)$. Por tanto, para cada $s \in I$ existe, un número real $\kappa(s)$ de manera que se cumple $v_1'(s) = \kappa(s)v_2(s)$.

Para obtener el apartado (a), tengamos en cuenta que $\|v_2(s)\|^2 = \langle v_2(s), v_2(s) \rangle = 1$; si hacemos el producto escalar de $v_1'(s)$ y $v_2(s)$; entonces

$$\langle v_1'(s), v_2(s) \rangle = \langle \kappa(s)v_2(s), v_2(s) \rangle = \kappa(s).$$

Por otro lado, como $v_1(s)$ y $v_2(s)$ son ortogonales, $\langle v_1(s), v_2(s) \rangle = 0$. Si ahora derivamos esta expresión, obtenemos que

$$\langle v_1'(s), v_2(s) \rangle + \langle v_1(s), v_2'(s) \rangle = 0,$$

lo que significa que

$$\kappa(s) = \langle v_1'(s), v_2(s) \rangle = -\langle v_1(s), v_2'(s) \rangle. \quad (1.1)$$

La afirmación (b) está clara teniendo en cuenta la ecuación (1.1).

Por último, obtengamos la igualdad (c). El vector $v_2(s)$ es unitario, luego $\langle v_2(s), v_2(s) \rangle = 1$ y derivando, obtenemos $\langle v_2'(s), v_2(s) \rangle = 0$, lo que significa que $v_2'(s)$ es perpendicular a $v_2(s)$ y por tanto, proporcional a $v_1(s)$, es decir $v_2'(s) = h(s)v_1(s)$, con $h(s)$ número real para cada $s \in I$. Sustituyendo en la igualdad (1.1):

$$\kappa(s) = -\langle v_1(s), h(s)v_1(s) \rangle = -h(s),$$

lo que implica que $v_2'(s) = -\kappa(s)v_1(s)$. □

Definición 1.25 (Fórmulas del diedro de Frenet). A las igualdades

$$v_1'(s) = \kappa(s)v_2(s) \quad \text{y} \quad v_2'(s) = -\kappa(s)v_1(s)$$

se les llama fórmulas de Frenet o **ecuaciones de Frenet para curvas planas**.

La función κ dada por la anterior proposición es de vital importancia en el estudio de las curvas planas y de ella heredamos la definición de curvatura:

Definición 1.26 (Curvatura de una curva plana regular). Se llama **curvatura** de una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por arco a la función $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\kappa(s) := \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s)) \rangle.$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, se llama radio de curvatura de la curva α a $1/\kappa(s)$.

En una curva plana, la curvatura en un punto dado indica cómo se dobla la curva en ese punto. El signo de la curvatura determina la dirección del giro. Curvatura positiva significa que la curva se dobla en sentido antihorario en ese punto. Si se está parado en la curva y mirando en la dirección del parámetro creciente (como caminar a lo largo de la curva), a medida que se avanza, la curva se doblará hacia su izquierda. Por otro lado, la curvatura negativa significa que la curva se dobla en el sentido de las agujas del reloj en ese punto. Es importante tener en cuenta que esta relación es válida para una curva plana, pero en espacios tridimensionales o de dimensiones superiores, la relación entre la curvatura y la dirección de giro puede volverse más compleja.

Remarcamos que en la definición que hemos dado de curvatura, se requiere que la curva sea parametrizada por arco. De lo contrario, tendríamos que considerar una reparametrización por arco para calcular la forma explícita de la curvatura.

En esencia, sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular y no necesariamente parametrizada por arco. Como ya sabemos, podemos parametrizar α por longitud de arco por el Teorema

1.22. Sea $\beta(s) = (\alpha \circ \Phi)(s)$ tal parametrización. Entonces $\Phi = g^{-1}$, donde $g : I \rightarrow J$ es la aplicación dada por

$$g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Definición 1.27. Definimos la curvatura de una curva α cualquiera como la curvatura de su reparametrización por arco:

$$\kappa_\alpha(t) := \kappa_\beta(g(t)).$$

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular y no necesariamente parametrizada por arco. Entonces, la expresión general para la curvatura es:

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (1.2)$$

La igualdad de la ecuación (1.2) se puede demostrar fácilmente considerando la Definición 1.27 sin más que hacer cuentas, como se puede ver en [7, Proposición 1.2.3].

Podemos preguntarnos si es posible, dada una función diferenciable, obtener todas las curvas planas cuya curvatura sea dicha función. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y viene dada por medio del **Teorema fundamental de curvas planas**:

Teorema 1.28 ([7, Teorema 1.2.4]). *Sea $\kappa_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_0(s)$ para todo $s \in I$. Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva plana regular parametrizada por arco con curvatura $\kappa_\beta(s) = \kappa_0(s)$ para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido que preserva la orientación, es decir, existe una función $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Mx = Ax + b$, con A ortogonal y con determinante igual a 1, tal que $\beta = M \circ \alpha$.*

Una vez definidos algunos conceptos sobre curvas planas, estamos en condiciones para poder empezar a hablar sobre curvas en una dimensión mayor. Es de especial interés el concepto de curva en \mathbb{R}^3 , pues las superficies tridimensionales son muy importantes. Para introducirnos en ellas, empezamos definiendo el triedro de Frenet, que posee una infinidad de información geométrica sobre las curvas en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.29 (Triedro de Frenet). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular y parametrizada por arco. Entonces, los vectores:

$$\begin{aligned} v_1(s) &= \alpha'(s), \\ v_2(s) &= \alpha''(s) / \|\alpha''(s)\|, \\ v_3(s) &= v_1(s) \times v_2(s), \end{aligned}$$

forman una base ortonormal positivamente orientada llamada **triedro móvil de Frenet** de la curva.

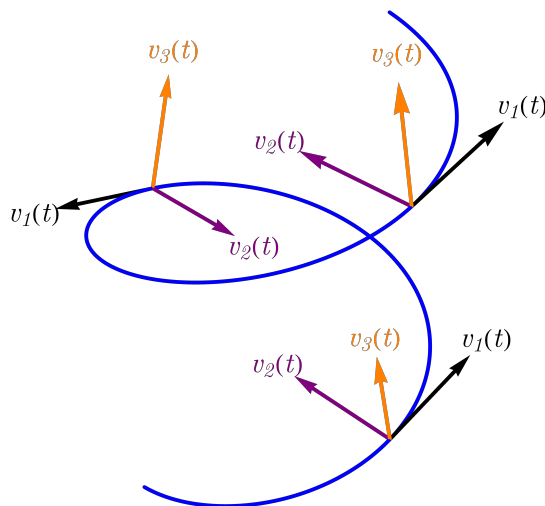


Figura 1.3: Curva en \mathbb{R}^3 con su triedro de Frenet asociado, definido en 1.29

Los tres vectores del triedro de Frenet $v_1(s)$, $v_2(s)$ y $v_3(s)$ son, para cada s , el vector tangente unitario a la curva, el vector normal unitario a la curva y el vector binormal unitario a la curva respectivamente. El plano que generan $v_1(s)$ y $v_2(s)$ se llama **plano osculador** de la curva, el plano generado por $v_2(s)$ y $v_3(s)$ es el **plano normal** a la curva y el plano generado por $v_1(s)$ y $v_3(s)$ recibe el nombre de **plano rectificante** a la curva.

Definición 1.30 (Curvatura de una curva en \mathbb{R}^n). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase infinito y parametrizada por arco. Llamaremos curvatura de α a la función $\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$.

De forma similar a en \mathbb{R}^2 , se demuestra con facilidad que, dada una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $k \geq 2$, no necesariamente parametrizada por arco, su curvatura en todo $t \in (a, b)$ es

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (1.3)$$

Una demostración de la igualdad (1.3) se puede ver en [7, Proposición 1.3.5].

Proposición 1.31. Una curva en \mathbb{R}^3 es un segmento de recta si y solo si su curvatura es cero en todo punto.

Demostración. La recta en general, viene dada por $\alpha(s) = sv + c$ para algún vector unitario v y vector constante c . Entonces $\alpha'(s) = v$ es constante, de forma que $\kappa = 0$. Recíprocamente, si

$\kappa = 0$, entonces $\alpha'(s) = T_0$ es un vector constante. Integrando, podemos obtener que $\alpha(s) = \int_0^s \alpha'(u)du + \alpha(0) = sT_0 + \alpha(0)$. Esto es, de nuevo, la ecuación paramétrica de una recta. \square

La Proposición 1.31 tiene una formulación y demostración análogas para \mathbb{R}^2 .

Ahora bien, en \mathbb{R}^3 aparece un concepto geométrico más, muy interesante y que nos da mucha información acerca de las curvas: la torsión. Como tenemos dos dimensiones en las que podemos desviar una curva, esto implica que la curva debería estar caracterizada por dos funciones, y no una como en el caso del plano. Las dos funciones que la caracterizan son la torsión y la curvatura para curvas en el espacio tridimensional. La torsión complementa a la curvatura en el estudio de curvas en el espacio, pero se enfoca en una propiedad diferente de esta: la curvatura de una curva se refiere a la medida de cuánto se dobla la curva en el plano osculador, mientras que la torsión se refiere a la medida de cuánto la curva se desvía de este mismo plano.

Considérese una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y su triedro de Frenet asociado. Tomando derivadas en la igualdad $v_3(s) = v_1(s) \times v_2(s)$, que define el vector binormal, tenemos que

$$v_3'(s) = v_1'(s) \times v_2(s) + v_1(s) \times v_2'(s) = v_1(s) \times v_2'(s),$$

ya que los vectores $v_1'(s)$ y $v_2(s)$ tienen la misma dirección. Con lo cual,

$$\langle v_3'(s), v_1(s) \rangle = \det(v_1(s), v_2'(s), v_1(s)) = 0,$$

para cada $s \in I$. Además, como $\|v_3(s)\|^2 = 1$ en todo el intervalo I , tomando derivadas de nuevo obtenemos que

$$\langle v_3'(s), v_3(s) \rangle = 0.$$

Con lo cual, el vector $v_3'(s)$ no tiene componentes en la dirección de $v_1(s)$ ni en la de $v_3(s)$. Por lo tanto, $v_3'(s)$ debe tener la misma dirección que $v_2(s)$ y ponemos

$$v_3'(s) = -\tau(s)v_2(s),$$

donde $\tau(s) \in \mathbb{R}$ para cada $s \in I$.

Definición 1.32. Llamaremos **torsión** de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por arco a la aplicación $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tau_\alpha(s) = \langle v_1(s) \times v_2(s), v_2'(s) \rangle,$$

donde v_1 y v_2 son los vectores del triedro de Frenet que definimos anteriormente.

Como la torsión mide el nivel de desviación de la curva con respecto al plano osculador (grado de desviación de una curva con respecto a ser plana), entonces tiene sentido que una curva con

curvatura no nula es plana si y solo si su torsión es nula. Una demostración detallada de esto se puede ver en [7, Proposición 1.3.4].

De la torsión también se puede obtener una expresión general en caso de que la curva no esté parametrizada por arco sin más que hacer los cálculos pertinentes, y resulta ser:

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \quad (1.4)$$

Una demostración de (1.4) se puede en [7, Proposición 1.3.5].

A grandes rasgos, dado $p \in \alpha(I)$, el plano osculador es el plano más cercano a contener la curva α cerca del punto p ; el plano rectificante es el plano más cercano a aplanar la curva cerca de p ; y el plano normal es normal a la curva en el punto p .

El plano osculador es el “más cercano” a contener a la curva, en el sentido de que, si la curva es plana, entonces el plano que la contiene es forzosamente el plano osculador. Para demostrarlo, primero enunciamos la siguiente proposición, que nos da una igualdad muy natural para la curva con respecto a su curvatura y torsión en el origen:

Proposición 1.33 ([18, Proposición 2.6]). *Sea α una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco. Si $\alpha(0) = 0$, entonces para s cerca de 0 se tiene que:*

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{\kappa_0}{6}s^3 + \dots\right)v_1(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6} + \dots\right)v_2(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + \dots\right)v_3(0), \quad (1.5)$$

donde κ_0 , τ_0 y κ_0' denotan, respectivamente, los valores de κ , τ y κ' (curvatura, torsión y derivada de la curvatura) de la curva en 0 respectivamente.

La ecuación (1.5) se conoce como **desarrollo de Taylor-Frenet** de la curva. En base a la Proposición 1.33, veamos que, en efecto, es el plano más cercano a contener la curva localmente. Para ello, consideramos $P = \alpha(0)$, $Q = \alpha(s)$ y $R = \alpha(t)$. Para s y t próximos a 0, los puntos no son colineales, pues de lo contrario la curvatura sería cero en un entorno del 0 y por tanto la curva sería una recta localmente (este caso es claro). Por lo tanto, veamos que si $s, t \rightarrow 0$, entonces el plano generado por los puntos P , Q y R es precisamente el plano osculador. Primero, consideramos el normal unitario $A_{s,t}$ al plano generado por $P = 0$, $Q = \alpha(s)$ y $R = \alpha(t)$, que podemos suponer no colineales sin pérdida de generalidad. Eligiendo las coordenadas de forma que $v_1(0) = (1, 0, 0)$, $v_2(0) = (0, 1, 0)$ y $v_3(0) = (0, 0, 1)$, entonces por la Proposición 1.33 obtenemos que:

$$\alpha(s) \times \alpha(t) = \frac{st(s-t)}{12}(-\kappa_0^2\tau_0st + \dots, 2\kappa_0\tau_0(s+t) + \dots, -6\kappa_0 + 2\kappa_0'(s+t) - \kappa_0^3st + \dots),$$

de forma que $A_{s,t} = \frac{\alpha(s) \times \alpha(t)}{\|\alpha(s) \times \alpha(t)\|} \rightarrow A = (0, 0, -1)$ cuando $s, t \rightarrow 0$. Entonces, el plano que pasa por P y con vector normal A es el plano osculador.

En realidad, estudiar cómo varía el plano osculador es lo mismo que estudiar cómo varía el vector binormal v_3 , ya que se tiene, como ya hemos visto, que $v_3'(s) = -\tau_\alpha(s)v_2(s)$. Así, torsión positiva implica que v_3 gira en el sentido opuesto al que determina v_2 , mientras que torsión negativa implica que v_3 gira en el sentido determinado por v_2 .

El Teorema 1.28 demuestra la existencia de un movimiento rígido que preserva la orientación entre curvas con la misma curvatura, así como la existencia de curvas con curvatura igual a una aplicación diferenciable $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ cualquiera. Ahora bien, en \mathbb{R}^3 tenemos dos funciones que describen la trayectoria de una curva: la curvatura y la torsión. El **Teorema fundamental de la Teoría Local de curvas en el espacio** establece un resultado análogo al Teorema fundamental de curvas planas, pero para \mathbb{R}^3 :

Teorema 1.34 ([7, Teorema 1.3.7]). Sean $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces, existe una curva regular, parametrizada por arco, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuya curvatura es $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ y cuya torsión es $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$ para todo $s \in I$. Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva regular parametrizada por arco, con curvatura y torsión iguales a κ y τ en todo el intervalo I , respectivamente, entonces existe un movimiento rígido que preserva la orientación, $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Mx = Ax + b$, tal que $\beta = M \circ \alpha$.

A continuación se aporta un ejemplo del cálculo numérico de la torsión y la curvatura a partir de la parametrización de una hélice circular:

Ejemplo 1.35. Una hélice circular viene parametrizada por:

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

con $a, b \neq 0$, que es una curva parametrizada por arco. Tomando derivadas, se obtiene que:

$$v_1(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(-a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right),$$

$$v_1'(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Con lo cual, la curvatura de una hélice circular es:

$$\kappa(s) = \|v_1(s)\| = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

Esto es, constante no nula.

Por otro lado,

$$v_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} v_1'(s) = \frac{-a}{|a|} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

y por tanto, su vector binormal será:

$$v_3(s) = v_1(s) \times v_2(s) = \frac{-a}{|a|\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -a \right).$$

Por lo tanto, diferenciando con respecto a s , tenemos:

$$v_3'(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2} v_2(s).$$

A partir de esto:

$$\tau(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

También constante.

En realidad, gracias al Teorema 1.34, toda curva con curvatura y torsión constantes es una hélice circular. Una prueba directa de esta afirmación se puede dar también en base al Teorema de Lancret, la cual se puede consultar en [2].

Una vez definida la torsión y la curvatura de una curva parametrizada por arco, estamos en contexto de dar las conocidas como **fórmulas de Frenet-Serret** (para \mathbb{R}^3), que nos proporcionan mucha información geométrica sobre una curva parametrizada por arco en el espacio:

Teorema 1.36 ([5, Teorema 3.8]). *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces el triedro de Frenet satisface el siguiente sistema:*

$$\begin{bmatrix} v_1'(s) \\ v_2'(s) \\ v_3'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_\alpha(s) & 0 \\ \kappa_\alpha(s) & 0 & -\tau_\alpha(s) \\ 0 & \tau_\alpha(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

donde v_1 , v_2 y v_3 son los vectores del triedro de Frenet que definimos anteriormente.

1.3. Superficies

Para la elaboración de esta sección, se han seguido las mismas referencias bibliográficas que en la anterior. Intuitivamente, esta cita de [14] nos da una visión general sobre qué entendemos por superficie en \mathbb{R}^3 :

“Una superficie es un subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que cada uno de sus puntos tiene un entorno similar a una pieza de un plano que se curva ligeramente sin autointersecciones.”

Es importante tener en cuenta que una superficie regular y una superficie como variedad bidimensional no son conceptos equivalentes. Para empezar, existen superficies como variedades

bidimensionales que no se pueden realizar como superficies en \mathbb{R}^3 , como por ejemplo, el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ de rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^3 .

Como ya se ha mencionado, las subvariedades embebidas pueden modelarse localmente en un embebimiento estándar de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^n , identificando \mathbb{R}^k con el subespacio

$$\{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dicho de una forma más general, si U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y $k \in \{0, \dots, n\}$, entonces una k -rebanada de U es un subconjunto de la forma

$$\{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\}$$

para ciertas constantes c^{k+1}, \dots, c^n . Claramente, cada una de las k -rebanadas es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k .

Definición 1.37. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, γ) es una carta sobre M . Si S es un subconjunto de U tal que $\gamma(S)$ es una k -rebanada de $\gamma(U)$, entonces decimos que S es una **k -rebanada** de U .

Teorema 1.38 ([9, Teorema 5.8]). *Una subvariedad de una variedad diferenciable M es embebida si y solo si satisface la condición de las k -rebanadas.*

Una superficie regular es una subvariedad embebida o subvariedad regular de codimensión 1 en \mathbb{R}^3 . Es decir, es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ que es en sí mismo una variedad diferenciable de dimensión 2, cuya topología es la topología del subespacio y cuya estructura diferenciable asegura que la aplicación inclusión $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es un embebimiento.

Definición 1.39. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice **superficie regular** si, para cada $p \in S$, existe un entorno $V \subset \mathbb{R}^3$ de p y una función $X : U \rightarrow V \cap S$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es un subconjunto abierto y $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que:

1. X es diferenciable. Esto significa que, si escribimos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas para todos los órdenes en U .

2. X es un homeomorfismo.
3. Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Ejemplo 1.40. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Entonces el conjunto formado por

$$G(f) = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$$

es una superficie regular de \mathbb{R}^3 . En otras palabras, cualquier **grafo** de una función diferenciable es una superficie regular.

En esencia, la idea de presentar de esta forma las superficies en el espacio euclidiano es el hecho de que exista una parametrización. De ser así, las cuentas se agilizan y las podemos presentar con facilidad.

Proposición 1.41 ([14, Proposición 2.23]). *Sea S una superficie y $p \in S$ un punto. Entonces, podemos encontrar una parametrización de S cerca de p cuya imagen es el grafo de una función diferenciable definida sobre uno de los tres planos coordenados de \mathbb{R}^3 .*

El conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto p se denomina **plano tangente a la superficie** en el punto p y lo vamos a representar por $T_p S$, siguiendo con la notación de la Sección 1.1. Se verifica que $T_p S$ es un espacio vectorial de dimensión dos y se puede expresar de la siguiente forma:

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = v\}.$$

La Proposición 1.41 es muy interesante de cara a la presentación práctica de superficies. Podemos obtener una mejora de esta proposición, como un corolario directo del Teorema 1.14. El objetivo es demostrar que, cerca de cualquier punto de una superficie S , la superficie puede ser visualizada como el grafo de una función diferenciable sobre el plano tangente a la superficie en ese punto.

Corolario 1.42. *Sea p' un punto cualquiera de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y sea P el plano tangente a la superficie en ese punto. Entonces, existen entornos abiertos U del punto p en P y V del punto p en S y una función diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que V es el grafo de h .*

Demostración. Considérese $a \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario perpendicular al plano tangente $T_p S$. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de S sobre el plano P , dada por

$$f(p) = p - \langle p - p', a \rangle a \quad \text{para todo } p \in S.$$

Por definición, $f(p') = p'$ y $f(p) - p' \perp a$ para $p \in S$. Con lo cual, se tiene la inclusión $f(S) \subset P$ y por ello, $f : S \rightarrow P$ es una función diferenciable entre superficies. Un cálculo trivial a partir de la definición de diferencial que dimos en la Sección 1.1 nos indica que

$$(df)_p(v) = v - \langle v, a \rangle a \quad \text{para todo } p \in T_p S.$$

Siguiendo con este razonamiento, $(df)_{p'} : T_{p'}S \rightarrow T_{p'}P = T_{p'}S$ es la identidad. Por el Teorema 1.14, existen entornos abiertos, V de p' en S y U de $f(p') = p'$ en P tales que $f(V) = U$ y $f|_V : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Para concluir la prueba, bastaría tomar la función $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(q) = \langle f^{-1}(q) - p', a \rangle \quad \text{para todo } q \in U,$$

pues cumple las condiciones requeridas. \square

Proposición 1.43. *Sea S una superficie y p uno de sus puntos. Entonces, existen un conjunto abierto $O \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p \in O$ y una función diferenciable $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ teniendo 0 como valor regular de tal forma que $S \cap O = f^{-1}(\{0\})$.*

Demostración. Por la Proposición 1.41, existen un subconjunto abierto V de S con $p \in V$, un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una función diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que V es, salvo un reordenamiento de las coordenadas x, y, z , el grafo de h , es decir,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = h(x, y)\}.$$

Entonces, pongamos $O = U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, que es un conjunto abierto y $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida como

$$f(x, y, z) = z - h(x, y).$$

Como $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 1$, entonces 0 es un valor regular de f y por construcción se tiene que $S \cap O = f^{-1}(\{0\})$ tal y como queríamos demostrar. \square

Definición 1.44. Un subconjunto A de una superficie S en el espacio euclidiano se dice que tiene **medida cero** si para cada parametrización $X : U \rightarrow S$ de la superficie, el conjunto $X^{-1}(A)$ tiene medida de Lebesgue cero en \mathbb{R}^2 .

A continuación, enunciamos el **Teorema de Sard**:

Teorema 1.45 ([14, Teorema 4.33]). *Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función diferenciable, donde S_1 y S_2 representan superficies o bien subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 . Entonces, el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en S_2 .*

Corolario 1.46. *Sea I un conjunto de índices como mucho numerable y $f_i : S_i \rightarrow S$, $i \in I$, funciones definidas en superficies o en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 , que llamamos S_i para cada $i \in I$, tomando valores en la misma superficie o subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , que llamamos S . Entonces, el conjunto de puntos de S que son simultáneamente valores regulares de las funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ es denso en S .*

Intuitivamente, una superficie S en un espacio euclidiano \mathbb{R}^3 es orientable si una figura bidimensional no se puede mover alrededor de la superficie y regresar a donde comenzó para que se vea como su propia imagen especular.

Ya sabemos por la Definición 1.15 lo que es un campo de vectores sobre una variedad diferenciable. Como era de esperar, la definición de campo de vectores para superficies parametrizadas hereda la definición de variedades: se entiende por **campo de vectores χ sobre la superficie S** como toda función vectorial $\chi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Diremos que χ es un **campo de vectores diferenciable** si lo es como función de S a \mathbb{R} .

Un campo de vectores χ sobre una superficie regular S se dice **normal** si $\chi(p)$ es normal a S en el punto p para todo $p \in S$. Además, S es **orientable** si existe un campo de vectores globalmente definido sobre S que sea diferenciable, normal y unitario. Habitualmente se denota con la letra N . Si S es orientable, cada campo de vectores N en las condiciones de la definición se llama una **orientación** de S . Una superficie orientable se dice que está **orientada** cuando se ha elegido una orientación concreta.

Se puede demostrar que una superficie regular S orientable posee una familia de parametrizaciones cubriendo S , de modo que siempre que dos de ellas se corten, el jacobiano del cambio de coordenadas tiene determinante positivo. Además, estas parametrizaciones determinan una orientación sobre S . Véase [7, Teorema 3.1.5].

Como $\|N(p)\|^2 = 1$ para todo $p \in S$, si \mathbb{S}^2 representa la esfera centrada en el origen en \mathbb{R}^3 de radio 1, entonces se cumple que $N(S) \subset \mathbb{S}^2$, por lo que cada vector normal unitario se puede pensar como una función diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Esta función, que lleva cada punto de la superficie en un vector unitario ortogonal a ella en este punto se llama la **función de Gauss** sobre la superficie S .

Es muy interesante mencionar en este contexto el **triedro de Darboux**, el cual es una referencia móvil construída a lo largo de una superficie. Es el análogo al triedro de Frenet aplicado a la geometría de la superficie. La construcción del triedro de Darboux sobre una superficie S , primero considera una referencia para la superficie S y luego se especializa cuando la curva se mueve en la dirección de las curvaturas principales. Sin embargo, el triedro de Frenet es especial porque se construye a partir de las otras derivadas de la propia curva. Por eso, en el triedro de Darboux no solo está el vector de velocidad de la curva, sino también el vector normal a la superficie. Si α es una curva en una superficie S , orientada por un vector normal N , parametrizada por arco, entonces el triedro de Darboux es:

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s), \\ N(s) &= N(\alpha(s)), \\ t(s) &= N(s) \times T(s), \end{aligned}$$

donde $T(s)$ es el unitario tangente, $N(s)$ el unitario normal y $t(s)$ el tangente normal.

Lema 1.47 ([14, Lema 3.2]). *Sea S una superficie y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Entonces, existe un campo normal unitario definido sobre el conjunto abierto $V = X(U)$.*

A priori, podría parecer que todas las superficies en el espacio euclidiano son orientables, y es que la mayoría de ellas con las que se trabaja lo son, sin embargo hay infinidad de ejemplos de superficies no orientables. El más común es la **banda de Möbius**, la cual se puede parametrizar como una función $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$X(\theta, w) = \left(\left(R + \frac{w}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right) \cos \theta, \left(R + \frac{w}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right) \sin \theta, \frac{w}{2} \sin \frac{n\theta}{2} \right), \quad (1.7)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Con $n = 1$ obtenemos la banda de Möbius clásica, y si aumentamos n , obtenemos una figura más “girada” y con más dobleces. La superficie que se origina es la siguiente:

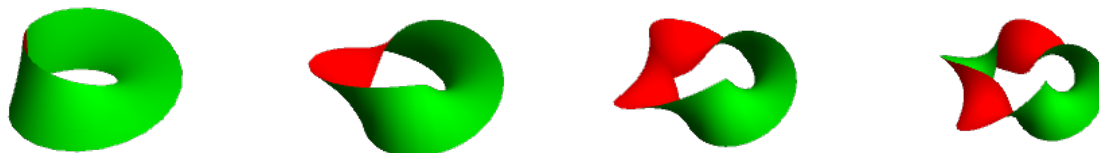


Figura 1.4: Representación de la banda de Möbius, con parametrización dada en (1.7). De izquierda a derecha, aumentamos n una unidad desde $n = 1$.

La banda de Möbius es un ejemplo de superficie no orientable. En la representación se puede ver claramente los puntos donde se origina el problema. Intuitivamente, si se intenta trazar una flecha que indique la dirección normal en un punto de la banda de Möbius, al seguir el contorno, la flecha se invertirá en el proceso. Esto significa que no hay una manera continua de definir la orientación en toda la superficie. Véase la demostración formal en [14, Sección 3.2].

En general, una superficie en el espacio eucídeo es no orientable si y solo si contiene una banda de Möbius embebida. Esta propiedad es invariante por homeomorfismos.

Lema 1.48 ([14, Lema 3.3]). *Si S es una superficie conexa y N_1 y N_2 son dos campos normales unitarios sobre S , entonces o bien $N_1 = N_2$ o bien $N_1 = -N_2$.*

Definición 1.49. Sea S una superficie regular orientable y N una orientación en S . Entonces, para cada $p \in S$, se puede definir un sentido positivo para rotar vectores en $T_p S$: así, definimos la **rotación positiva de ángulo θ** en p como la aplicación $R_\theta : T_p S \rightarrow T_p S$ dada por

$$R_\theta(v) = (\cos \theta)v + (\sin \theta)(N(p) \wedge v).$$

El caso más importante de rotación se da cuando $\theta = \pi/2$, en cuyo caso $R_{\pi/2}(v) := J_p v = N(p) \wedge v$; J_p se llama **estructura compleja** de S en p .

A la familia de los campos de vectores diferenciables y tangentes a lo largo de una curva α la representaremos por $\mathfrak{X}(\alpha)$. Sea $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo de vectores tangente y diferenciable a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$. Se define la **derivada covariante** (o intrínseca) de V como la parte tangente de V' , es decir,

$$\frac{DV}{dt}(t) := V'(t)^\top = V'(t) - \langle V'(t), N(t) \rangle N(t).$$

Definición 1.50. Se dice que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es **paralelo** a lo largo de α si $\frac{DV}{dt} = 0$.

Sea S una superficie regular orientada por la aplicación N y $\alpha : I \rightarrow S$ una curva en dicha superficie. Aunque $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para cada $t \in S$, en general, $\alpha''(t) \notin T_{\alpha(t)}S$, es decir, el vector de aceleración de la curva no tiene por qué ser tangente a la superficie. Para precisar qué tipo de aceleración se experimenta, podemos utilizar el espacio vectorial $\mathbb{R}^3 = T_{\alpha(t)}S \oplus \langle N(\alpha(t)) \rangle$. Entonces, podemos descomponer $\alpha''(t)$ como $\alpha''(t) = \alpha''(t)^\top + \alpha''(t)^\perp$, donde $\alpha''(t)^\top$ se conoce como aceleración tangencial o intrínseca de la curva α , y $\alpha''(t)^\perp$ se conoce como aceleración normal o extrínseca.

El vector $\alpha''(t)^\perp$ puede escribirse como $\alpha''(t)^\perp = \lambda(t)N(\alpha(t))$, donde $\lambda(t) = \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle$. Además, se tiene por la definición de derivada covariante que $\alpha''(t)^\top = \frac{D\alpha'}{dt}(t)$, lo que nos permite escribir:

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) + \langle \alpha''(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t)).$$

Supongamos ahora que α está parametrizada por arco.

Queremos expresar el vector $(D\alpha'/ds)(s) \in T_{\alpha(s)}S$ en términos de la base

$$\{\alpha'(s), J\alpha'(s), N(\alpha(s))\}.$$

Esta es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^3 (pues, como ya sabemos, es el triedro de Darboux). Ahora bien, como $(D\alpha'/ds)(s)$ es un vector tangente,

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = a(s)\alpha'(s) + b(s)J\alpha'(s),$$

donde a y b son dos funciones definidas sobre I . Se tiene que

$$\begin{aligned} a(s) &= \left\langle \frac{D\alpha'}{ds}(s), \alpha'(s) \right\rangle = \langle \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle - \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle \langle N(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle = 0, \end{aligned}$$

puesto que la curva está parametrizada por arco. Por lo tanto, el vector $(D\alpha'/ds)(s)$ es colineal con $J(\alpha'(s))$, y se puede escribir como:

$$\frac{D\alpha'}{ds}(s) = \kappa_g(s)J\alpha'(s).$$

Definición 1.51. $\kappa_g(s)$ se llama curvatura geodésica de α en s . Concretamente,

$$\kappa_g(s) = \left\langle \frac{D\alpha'}{ds}(s), J\alpha'(s) \right\rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha(s) \rangle.$$

Observación 1.52. La curvatura geodésica depende de la orientación de la superficie (orientación de la parametrización, su signo varía según la elección que hagamos de N) y de la parametrización de la curva.

Cuando trabajamos en el plano, sabemos que las geodésicas tienen unas características muy especiales, como por ejemplo, que minimizan localmente la distancia entre dos puntos y que tienen curvatura geodésica nula. Una buena pregunta es si podemos encontrar, en una superficie arbitraria S , curvas con características similares a las rectas.

La respuesta a dicha pregunta es afirmativa, y viene dada por la noción de geodésica

Definición 1.53. Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una curva parametrizada cualquiera sobre una superficie S . Entonces, se dice que es una **geodésica** si su vector velocidad γ' es paralelo, es decir, si $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$.

Equivalentemente, una curva $\gamma : I \rightarrow S$ sobre una superficie S será llamada geodésica cuando

$$\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}S \quad \text{para todo } t \in I.$$

Cabe destacar que una geodésica realiza localmente la distancia entre dos puntos, pero en general, una geodésica no tiene por qué realizar la distancia entre dos puntos cualesquiera.

A partir de la Definición 1.51, se tiene trivialmente que una curva parametrizada por arco α es geodésica si y solo si $\kappa_g(s) = 0$ para todo $s \in I$, lo cual es una caracterización muy interesante de cara a la práctica.

1.4. Teorema de clasificación de curvas

A continuación, presentamos el resultado más importante de este capítulo, el **Teorema de clasificación de curvas planas**. Es un resultado que establece una clasificación completa de las curvas cerradas simples en el plano, salvo difeomorfismos. Seguiremos la exposición de [13] y [14] para su demostración. Para esta sección también se han consultado [11], [12], [16] y [17].

Definición 1.54. Sea I un intervalo y M una subvariedad de dimensión 1 de \mathbb{R}^n . Una función $f : I \rightarrow M$ es una **parametrización por longitud de arco de la variedad M** si f es un difeomorfismo de I en un intervalo abierto de M y el “vector velocidad”, $f'(s) \in T_{f(s)}M$, tiene longitud 1 para cada $s \in I$.

Cualquier parametrización local $f : I \rightarrow M$ se puede transformar en una parametrización por longitud de arco por un cambio de variables, tal y como mencionamos en la Sección 1.2.

Lema 1.55. *Sea C una curva simple L -periódica, $L > 0$. Entonces, C es homeomorfa a un círculo.*

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de C inyectiva en $[0, L)$. Se tiene que, al ser α periódica, $C = \alpha(\mathbb{R}) = \alpha([0, L])$. Además, la función $\alpha : [0, L] \rightarrow C$ es sobreyectiva, continua y cerrada (por ser una función continua definida en un espacio compacto y tomando valores en un espacio Hausdorff). Entonces, es una función identificación. Llamamos R_α a la relación de equivalencia inducida por α en $[0, L]$ dada por:

$$s_1 R_\alpha s_2 \iff \alpha(s_1) = \alpha(s_2).$$

En tal caso, la función $\bar{\alpha} : [0, L]/R_\alpha \rightarrow \alpha(\mathbb{R})$ definida como $\bar{\alpha}([s]) = \alpha(s)$ es un homeomorfismo. Obsérvese que, como α es inyectiva en $[0, L)$ y además es L -periódica, entonces

$$s_1 R_\alpha s_2 \iff \begin{cases} s_1 = s_2 \\ s_1 = 0, s_2 = L \\ s_1 = L, s_2 = 0 \end{cases}.$$

De esta forma, C es homeomorfa al cociente de $[0, L]$ donde identificamos los puntos extremos del intervalo 0 y L , es decir, a un círculo. \square

Lema 1.56. *Sea M una subvariedad regular de dimensión 1 en \mathbb{R}^n y $f : I \rightarrow M$ y $g : J \rightarrow M$ parametrizaciones por arco inyectivas. Entonces $f(I) \cap g(J)$ tiene a lo sumo dos componentes conexas. Si solo tiene una componente, entonces f puede ser extendida a una parametrización por arco a la unión $f(I) \cup g(J)$. Si tiene dos componentes, entonces M es difeomorfa a \mathbb{S}^1 .*

Demostración. Supongamos que $f(I)$ y $g(J)$ no están contenidas la una en la otra sin pérdida de generalidad. Considérese el conjunto $U = f(I) \cap g(J)$. Obviamente, se tiene que

$$h := g^{-1} \circ f : f^{-1}(U) \subset I \rightarrow g^{-1}(U) \subset J$$

lleva subconjuntos abiertos de I en respectivos subconjuntos abiertos de J . Además, la derivada de $g^{-1} \circ f$ es igual a 1 o -1 en cada componente conexa de $f^{-1}(U)$. En efecto, $f = g \circ h$ y por tanto, tomando derivadas y aplicando la regla de la cadena $f'(t) = g'(h(t))h'(t)$. Usando las

normas y el hecho de que tanto f como g son parametrizaciones por arco inyectivas, llegamos a que $1 = \|f'(t)\| = \|g'(h(t))\| \|h'(t)\| = \|h'(t)\|$.

Definimos el grafo Γ como sigue:

$$\Gamma := \text{grafo}(h) = \{(s, t) \in I \times J : f(s) = g(t)\} \subset I \times J.$$

Como Γ coincide con el grafo de la función h , entonces las componentes conexas de Γ son precisamente las restricciones del grafo de h a cada componente conexa de $f^{-1}(U)$. Claramente, Γ es un subconjunto cerrado de $I \times J$ que está formado por segmentos de recta de pendiente 1 o -1 , puesto que $h'(s) = \pm 1$ implica que, o bien $h(s) = s + b$ o bien $h(s) = -s + b$. Como Γ es cerrado y $g^{-1} \circ f$ es un difeomorfismo local (al ser un difeomorfismo), estos segmentos de recta no pueden terminar en el interior de $I \times J$ porque deben extenderse a la frontera. Veamos esto con más detalle.

Sea σ uno de los segmentos con pendiente 1 o -1 de Γ . Como Γ es cerrado en $I \times J$, si al menos uno de los segmentos σ no terminase en un lado del rectángulo $I \times J$, entonces el punto final del segmento estaría propiamente en σ , y por tanto su proyección sobre I no sería un intervalo abierto. Esta contradicción implica que las puntas de σ terminan en los lados del rectángulo $I \times J$. Finalmente, si dos de los puntos finales del segmento σ estuvieran en lados paralelos de $I \times J$, la proyección de σ en uno de los dos intervalos I o J sería sobreyectiva. Con lo cual, $f(I)$ estaría contenida en $g(J)$ o viceversa, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Dado que $g^{-1} \circ f$ es inyectiva, entonces puede haber a lo sumo uno de estos segmentos de recta que toca cada uno de los lados del rectángulo $I \times J$. Por eso, Γ tiene a lo sumo dos componentes conexas. Además, si hay dos componentes, ambos deben tener la misma pendiente, pues de lo contrario, no se cumpliría que solo una recta toca cada uno de los lados de $I \times J$.

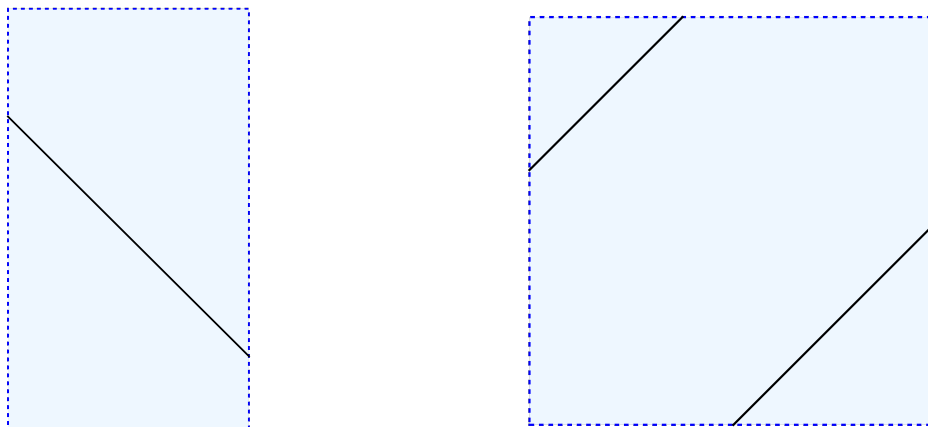


Figura 1.5: Izquierda: El conjunto Γ con una sola componente conexa; derecha: el conjunto Γ con dos componentes conexas.

Distinguimos los casos en los que Γ tenga una o dos componentes conexas para probar el enunciado:

1. Si Γ es conexo, es decir, tan solo hay un segmento de recta en el rectángulo (izquierda en la Figura 1.5), entonces $g^{-1} \circ f$ se extiende a una función lineal $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora bien, f y $g \circ L : L^{-1}(J) \rightarrow g(J)$ encajan para formar la extensión requerida

$$F : I \cup L^{-1}(J) \rightarrow f(I) \cup g(J),$$

dada por

$$F(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in I, \\ (g \circ L)(s) & \text{si } s \in L^{-1}(J), \end{cases}$$

donde $I \cup L^{-1}(J)$ es un intervalo abierto de \mathbb{R} que contiene estrictamente al intervalo I que estábamos buscando.

2. Si Γ tiene dos componentes, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que tienen pendiente 1 (el caso de pendiente -1 es análogo).

Entonces estamos en una situación geoméricamente equivalente a la figura de la derecha en la Figura 1.5. Se tiene que el conjunto $f^{-1}(U)$ tiene dos componentes conexas I_1 e I_2 y $g^{-1}(U)$ también tiene dos componentes conexas J_1 y J_2 , de forma que $h : I_1 \cup I_2 \rightarrow J_1 \cup J_2$ coincide cuando se restringe, por ejemplo, a I_2 con la translación $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $T(I_2) = J_1$. Entonces

$$K = I \cup T^{-1}(J)$$

es un intervalo abierto de \mathbb{R} que contiene estrictamente al intervalo I y que tiene intersección no vacía con $T^{-1}(J)$. Definimos entonces una curva sobreyectiva

$$\gamma : K \rightarrow f(I) \cup g(J)$$

dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in I \\ (g \circ T)(s) & \text{si } s \in T^{-1}(J), \end{cases}$$

la cual está bien definida porque $f = g \circ f = g \circ T$ en $I \cap T^{-1}(J) = I_2$, y por lo tanto, es diferenciable y parametrizada por arco. Además, el intervalo K incluye dos subintervalos abiertos $I_1 \subset I \subset K$ y $T^{-1}(J_2) \subset T^{-1}(J) \subset K$ tales que

$$\gamma|_{I_1} = \gamma \circ S|_{I_1} \text{ y } S(I_1) = T^{-1}(J_2).$$

Esto es, $\gamma : K \rightarrow f(I) \cup g(J) \subset M$ se extiende de forma única a una curva periódica cuya imagen debe ser M por ser compacta y abierta en M . De aquí se sigue el resultado, puesto que toda curva periódica sobre una variedad diferenciable es homeomorfa a un círculo, tal y como hemos probado en el Lema 1.55. \square

Teorema 1.57 (Teorema de clasificación de curvas simples). *Cualquier variedad diferenciable de dimensión 1 conexa es difeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 o a la recta real \mathbb{R} .*

Demostración. Cualquier parametrización por arco inyectiva puede ser extendida a una parametrización

$$f : I \rightarrow M$$

que es maximal, en el sentido de que f no puede ser extendida sobre ningún intervalo mayor como una parametrización por arco: tan solo es necesario extender f tanto como sea posible hacia la izquierda y después tan lejos como sea posible hacia la derecha.

Si M no es difeomorfa a \mathbb{S}^1 probaremos que f es sobreyectiva, y por lo tanto es un difeomorfismo. Si el conjunto abierto $f(I)$ no fuese todo M , entonces existiría un punto adherente x de $f(I)$ en $M - f(I)$. Parametrizando un entorno de x por longitud de arco y aplicando el Lema 1.56, se ve fácilmente que f puede ser extendida a un intervalo más grande. Esto contradice la suposición de que f es maximal, lo que prueba el resultado. \square

La versión de este teorema para variedades compactas y conexas de una dimensión superior es un resultado ciertamente más complicado de demostrar. Sin embargo, es interesante mencionarlo, pues está directamente relacionado con el Teorema de Gauss-Bonnet, el cuál tiene una gran importancia para el estudio de superficies en \mathbb{R}^3 .

Proposición 1.58 ([12, Capítulo 1, §5, Teorema 1]). *Toda superficie conexa y compacta es difeomorfa a la esfera, una suma conexa de toros o una suma conexa de espacios proyectivos.*

Nótese que en la Proposición 1.58 pedimos que la superficie sea compacta, pero también existe una clasificación para superficies no compactas y triangulables tal y como se puede ver en [17].

Teniendo en cuenta todo esto, a continuación definiremos la característica de Euler-Poincaré y explicaremos por qué realmente tiene relación con este teorema. Primero, necesitamos el concepto de triangulación de una superficie.

Triangular una superficie implica dividirla en una serie de triángulos simples y combinarlos de manera que cubran toda la superficie sin superposiciones ni huecos. Esta técnica permite aproximarnos a una descripción discreta de la superficie, lo que facilita su estudio y análisis desde un enfoque más estructurado. Al descomponer una superficie en triángulos, podemos calcular la curvatura integral en cada uno de ellos, y luego sumar estas contribuciones locales para obtener el valor total de la curvatura. La triangulación nos brinda una herramienta concreta para realizar estos cálculos y aplicar el teorema de manera efectiva.

Definición 1.59. Dado un polígono curvado parametrizado por una curva (parametrizada por arco) α , con vértices $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$, llamaremos **aristas** del polígono a cada uno de los trozos del mismo en los que recoge que α es regular, esto es, $\alpha_i := \alpha|_{[s_{i-1}, s_i]}$, para cada $i = 1, \dots, k$.

Definición 1.60. Un **triángulo** en una superficie regular S es una región simple (un conjunto abierto, conexo y no vacío en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n) $R \subset S$ tal que su clausura, \bar{R} , es un polígono curvado con tres vértices.

Sea R una región de S . Una **triangulación** $\Delta = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ de R es una colección finita de triángulos τ_i verificando las siguientes condiciones:

1. $\bar{R} = \bigcup_{i=1}^n \bar{\tau}_i$;
2. si $i \neq j$, entonces, o bien $\bar{\tau}_i \cap \bar{\tau}_j = \emptyset$, o bien $\bar{\tau}_i \cap \bar{\tau}_j$ es una arista común (completa), o bien $\bar{\tau}_i \cap \bar{\tau}_j$ es un vértice común.

Si Δ es una triangulación de una región R , se denominan **caras** de Δ a cada uno de los triángulos τ_i que la componen.

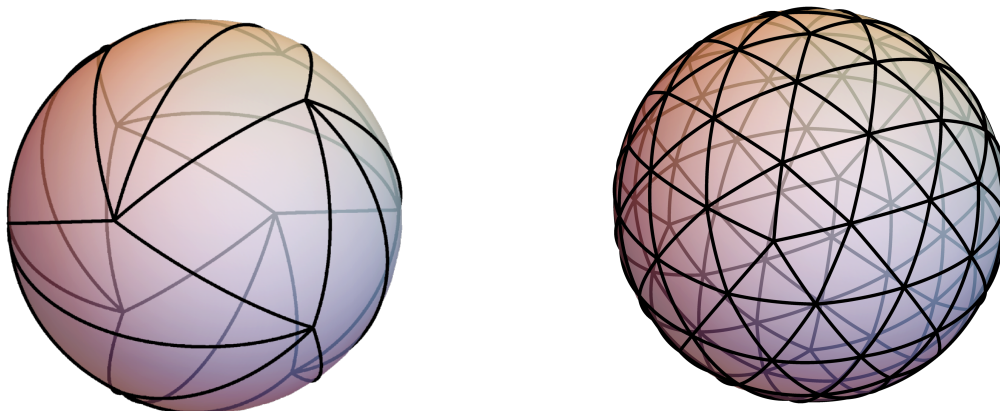


Figura 1.6: Ejemplo gráfico de dos triangulaciones: la de la derecha más fina que la de la izquierda (más triángulos).

Definición 1.61. Dada una triangulación Δ de una región R , se define la **característica de Euler-Poincaré** como

$$\chi(R, \Delta) = C - A + V,$$

donde C , A y V representan, respectivamente, el número de caras, aristas y vértices de la triangulación.

La característica de Euler-Poincaré es una herramienta útil para estudiar la topología de un espacio, ya que es relativamente fácil de calcular y es un invariante topológico.

Puesto que la característica de Euler de la esfera es 2, mientras que la de la suma conexa de n toros sigue la sucesión $0, -2, -4, \dots$, se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.62. *Sea S una superficie regular, conexa, orientable y compacta. Entonces, su característica de Euler-Poincaré, $\chi(S)$, toma uno de los siguientes valores: $2, 0, -2, -4, \dots, -2n, \dots$*

Una vez definida la característica de Euler-Poincaré, estamos en condiciones de dar la versión global del **Teorema de Gauss-Bonnet**:

Teorema 1.63 ([5, Teorema 10.4]). *Sea S una superficie regular, compacta en \mathbb{R}^3 . Si K es la curvatura Gaussiana de S , entonces*

$$\int \int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

Entonces, ¿por qué es este un teorema importante? El lado izquierdo de la ecuación se refiere a la curvatura, un concepto puramente geométrico. El lado derecho se refiere a la característica de Euler, un concepto puramente topológico. El Teorema de Gauss-Bonnet establece que estas dos ideas están fundamentalmente vinculadas. Desde el lado izquierdo de la ecuación, se afirma que si se conoce la curvatura (local) en cada punto de la superficie, se determina la forma global de la superficie (su género). Desde el lado derecho de la ecuación, se afirma que la integral de la curvatura de Gauss permanece invariante por homeomorfismos. En otras palabras, si abollamos la superficie, deben surgir nuevas deformaciones de manera que la cantidad de curvatura positiva y negativa se cancelen perfectamente. Por ejemplo, para la esfera aplastada (Figura 1.7), incluso con la zona hundida, que crea parches de curvatura negativa, la curvatura total de la superficie es exactamente 4π , al igual que cualquier superficie homeomorfa a una esfera.

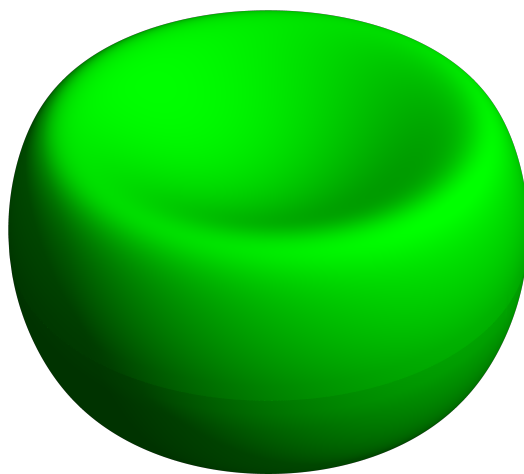


Figura 1.7: Ejemplo de una deformación de la esfera, cuya curvatura Gaussiana total es 4π .

Para variedades de dimension mayor que 2, el problema de clasificación se vuelve realmente formidable y es un objeto de estudio frecuente: ver [16]. Además está probado que, para dimensiones superiores a 4, no existe una clasificación, tal y como probó Markov en [11]. El estudio de variedades diferenciables simplemente conexas de dimensión alta también recibió especial atención y se hicieron notables avances, como se puede ver en los trabajos de Smale [19] y Wall [23].

Capítulo 2

Teorema de Jordan–Brouwer

El Teorema de la curva de Jordan, tal y como inicialmente se presentó, establece que toda curva de Jordan divide el plano exactamente en dos componentes conexas.

Nuestro objetivo principal para este capítulo es demostrar que toda superficie conexa y compacta divide el espacio euclidiano en dos componentes conexas, es decir, queremos dar una versión en \mathbb{R}^3 del Teorema de la curva de Jordan (y diferenciable, puesto que el teorema clásico tan sólo supone que la curva es un subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a S^1). Daremos las definiciones, lemas y proposiciones que hacen falta para poder demostrarlo, la mayoría de ellas tratando sobre el concepto de transversalidad entre curvas y superficies y convergencia de rectas. Es interesante mencionar que también se puede construir una demostración del Teorema de la curva de Jordan, adaptando la mayoría de estos resultados sin mucho esfuerzo a curvas en \mathbb{R}^2 . Seguiremos principalmente la exposición de [14] para la demostración de este teorema, aunque también se han usado otras referencias que especificaremos en cada sección.

2.1. Motivación del problema

Para esta sección se han consultado [1], [3], [8], [10] y [14].

Uno de los resultados fundamentales en el contexto de las curvas planas es el conocido como **Teorema de la curva de Jordan**. Una **curva de Jordan** es una subvariedad compacta de dimensión 1 (es decir, curva cerrada y simple). Gracias al Teorema de clasificación 1.57, la curva admite una parametrización inyectiva tal que los puntos inicial y final coinciden. Tiene sentido entonces que la traza de una curva periódica sin autointersecciones sea una curva de Jordan.

Ya hemos demostrado en el Teorema 1.57 que cualquier curva simple es difeomorfa a un círculo o a \mathbb{R} . Una vez sabemos esto, podemos esperar que, al igual que pasa con el círculo,

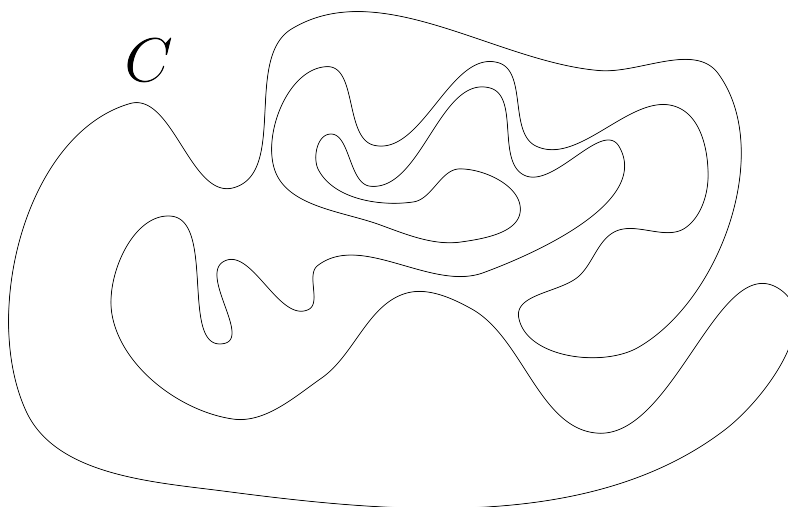


Figura 2.1: ¿Cuáles son los puntos interiores relativos a esta curva?

cualquier curva de Jordan divide el plano exactamente en dos componentes conexas. El Teorema de la curva de Jordan, que enunciamos a continuación, nos da la respuesta.

Teorema 2.1 ([15, Sección 8.13]). *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y simple. Entonces, $\mathbb{R}^2 - C$ tiene, exactamente, dos componentes conexas, cuya frontera común es C .*

Esto significa que, en presencia de una curva C cerrada simple del plano, los puntos restantes se separan en dos clases: puntos interiores y exteriores a la curva, de forma que podemos describir una curva uniendo dos puntos de la misma clase de forma que no corta a C . *A priori*, puede parecer un resultado ciertamente obvio para curvas como círculos o elipses, pero no lo es tanto si la curva es más compleja y retorcida, como en la Figura 2.1.

Una vez enunciado el Teorema 2.1, estamos en las condiciones de hablar de una “región interna” y una “región externa” a la curva. Intuitivamente, cuando una recta interseca transversalmente a C , esta alterna entre las regiones interior y exterior en cada punto de corte de la recta y C . Al acabar este capítulo, seremos capaces de razonar si un punto es interior o exterior en función de la paridad del número de puntos de intersección entre una semirrecta transversal que comienza en un punto y la propia curva C .

Se puede consultar también en [10] una demostración del Teorema de la curva de Jordan 2.1 usando el Teorema de punto fijo de Brouwer y el Teorema de extensión de Tietze. La demostración de [10], no obstante, es ligeramente más fuerte que la que nos da [15], puesto que demuestra que todo subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a \mathbb{S}^1 separa el plano, mientras que [15] prueba que toda subvariedad difeomorfa a \mathbb{S}^1 separa el plano.

Uno puede preguntarse si ocurre algo similar para superficies. Es decir, dada una superficie

compacta y conexa S en \mathbb{R}^3 , ¿separa esta el espacio euclideo en dos componentes conexas? Dado un punto cualquiera de \mathbb{R}^3 , ¿podemos determinar si es interior o exterior a la superficie? En este capítulo, daremos respuesta a todas estas preguntas mediante el conocido como **Teorema de Jordan–Brouwer**, la versión del Teorema de la curva de Jordan para \mathbb{R}^n , que demostraremos en \mathbb{R}^3 . Para probarlo necesitaremos conceptos previos sobre la transversalidad entre curvas y superficies y sobre la convergencia de rectas, de forma que podremos determinar si un punto es interior o exterior a una superficie en función del número de puntos de corte entre la superficie y una recta transversal a la misma comenzando en dicho punto.

Es importante destacar en este contexto que el Teorema de Jordan-Schoenflies [3] no tiene un análogo para superficies, al contrario que el Teorema de la curva de Jordan. Por ejemplo, la región interior de un toro es difeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times B(0, 1)$, donde $B(0, 1)$ es la bola unidad en \mathbb{R}^2 . En particular, no es homeomorfa a una bola porque su grupo fundamental es no trivial.

Localmente, podemos dar, sin usar conceptos nuevos, una demostración relativamente sencilla a la primera pregunta, que motiva el resultado más general.

Lema 2.2. *Sea $p \in S$ un punto en una superficie. Existe un entorno abierto y conexo W de p en \mathbb{R}^3 tal que $W \cap S$ es conexo y $W - S$ tiene exactamente dos componentes conexas, cada una teniendo a $W \cap S$ como frontera en W .*

Demostración. Sabemos que la superficie S puede escribirse localmente como la imagen inversa del valor regular de una función cerca de cualquier punto $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$ gracias a la Proposición 1.43. Esto es, existe un entorno abierto O de p en \mathbb{R}^3 y una función diferenciable $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ con 0 como valor regular tal que $O \cap S = f^{-1}(\{0\})$. Nótese que p es un punto regular de f .

Por lo tanto, $(df)_p \neq 0$ y podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Definimos ahora una aplicación diferenciable $G : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$G(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)), \quad (x, y, z) \in O.$$

Como $f(O \cap S) = \{0\}$, entonces se tiene que $G(p) = (p_1, p_2, 0)$ y que $(dG)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo lineal.

Por el Teorema 1.14, existe un entorno abierto $W \subset O$ de p en \mathbb{R}^3 y una bola abierta B centrada en $(p_1, p_2, 0)$ de forma que $G(W) = B$ y $G : W \rightarrow B$ es un difeomorfismo. Así, $W \cap S$ es un entorno abierto de p en S difeomorfo a $B \cap P = G(W \cap S)$, donde P es el plano de \mathbb{R}^3 con ecuación $z = 0$. Se sigue de inmediato lo que queríamos demostrar, ya que S “divide” a W en dos trozos, difeomorfos a los trozos en los que el plano P divide a la bola B , y la frontera común de dichos trozos es la intersección de B con el plano $z = 0$. \square

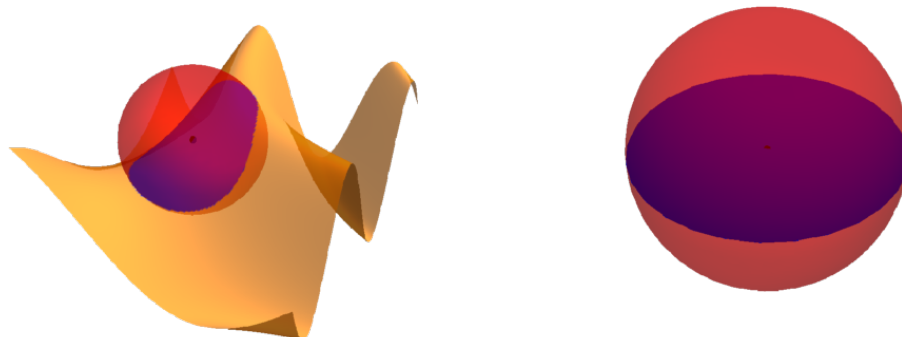


Figura 2.2: El Lema 2.2 nos indica que cualquier punto de una superficie posee un entorno que puede imaginarse como el disco ecuatorial de una esfera euclidiana. Con lo cual, una superficie separa el espacio euclidiano localmente en dos componentes conexas.

Proposición 2.3. *Sea $S \neq \emptyset$ una superficie cerrada y conexa. Entonces, $\mathbb{R}^3 - S$ tiene a lo sumo dos componentes conexas. Además, cada componente conexa de $\mathbb{R}^3 - S$ tiene a S como frontera.*

Demostración. Sea C una componente conexa de $\mathbb{R}^3 - S$. Como S es cerrada y conexa, $\mathbb{R}^3 - S$ es localmente conexo por ser abierto en \mathbb{R}^3 , y por lo tanto C es abierto en \mathbb{R}^3 , puesto que las componentes conexas de un espacio topológico localmente conexo son abiertas.

Por otro lado, $\partial C \neq \emptyset$, ya que si no fuese así, tendríamos que

$$\overline{C} = \overset{\circ}{C} \cup \partial C = \overset{\circ}{C} = C$$

y de esta forma, C sería un conjunto abierto y cerrado de \mathbb{R}^3 , lo que implicaría que $C = \mathbb{R}^3$. Esto es imposible porque $C \subset \mathbb{R}^3 - S$ y S es no vacía por hipótesis. Ponemos ahora

$$\mathbb{R}^3 - S = C \cup C',$$

donde C' es la unión de todas las componentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$ diferentes de C , que será un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 por ser unión de abiertos. Entonces, $C \cup S = \mathbb{R}^3 - C'$ es cerrado, de forma que $\overline{C} \subset C \cup S$. Con esto, tenemos que

$$\partial C = \overline{C} - C \subset S.$$

Por ello, como $\overline{C} - C$ es cerrado por ser la resta de un conjunto cerrado de \mathbb{R}^3 y un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 , ∂C es un subconjunto cerrado y no vacío de S .

Vamos a ver que es un subconjunto abierto de S también. En efecto, si $p \in \partial C \subset S$, sabemos por el Lema 2.2 que existe un entorno abierto W de p en \mathbb{R}^3 tal que $W - S$ tiene exactamente dos componentes conexas, que llamaremos C_1 y C_2 , cuya frontera común relativa a W es $S \cap W$. Como $W - S \subset \mathbb{R}^3 - S$, entonces C_1 y C_2 están contenidas en componentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$. En particular, cada C_i , $i = 1, 2$, está contenida en C o, alternativamente, no corta a C .

Si $C_i \cap C = \emptyset$ para $i = 1$ e $i = 2$, entonces tendríamos que $C \cap W = \emptyset$, y consecuentemente, $p \notin \overline{C}$. Esto contradice el hecho de que $p \in \partial C$. Por lo tanto, al menos uno de los conjuntos C_i está contenido en C .

Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_1 \subset C$. Entonces

$$W \cap S = \partial C_1 \cap W \subset \overline{C_1} \subset \overline{C},$$

y así, como $W \cap S$ está contenido en \mathbb{R}^3 :

$$W \cap S \subset \partial C.$$

Esto prueba que el punto p es interior a ∂C y por tanto ∂C es abierto en S . Como estamos asumiendo que la superficie S es conexa, tenemos que $\partial C = S$ como queríamos probar. Además, esto también prueba que si C es una componente conexa de $\mathbb{R}^3 - S$ y W es el entorno dado por el Lema 2.2 para un punto arbitrario $p \in S$, entonces C contiene al menos una de las dos componentes conexas C_1 o C_2 de $W - S$. Como las componentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$ son disjuntas entre sí, se deduce que no puede haber más de dos componentes conexas. \square

Como ya hemos mencionado, es interesante destacar que se pueden adaptar estas demostraciones y la que daremos del Teorema de Jordan–Brouwer al Teorema 2.1, cambiando superficie compacta de \mathbb{R}^3 por curva cerrada simple de \mathbb{R}^2 y haciendo sencillos cambios. El motivo de presentar este resultado de esta manera es el hecho de que transferir resultados sobre superficies en \mathbb{R}^3 a resultados sobre curvas en \mathbb{R}^2 es mucho más sencillo que hacer lo opuesto.

2.2. Transversalidad

Para la elaboración de esta sección, se han seguido las referencias [9], [14], [15], [22] y [21].

Definición 2.4. Sea M una variedad diferenciable. Se dice que dos subvariedades embebidas $S, S' \subseteq M$ se **cortan transversalmente** si para cada punto $p \in S \cap S'$, los espacios tangentes $T_p S$ y $T_p S'$ unidos generan $T_p M$. Es decir, si $T_p S + T_p S' = T_p M$, sin tener por qué ser la suma necesariamente directa.

Dos subvariedades se dice que son **transversas** cuando lo son en todo punto de la intersección de ambas respectivamente. Por otro lado, se dice que son **tangentes en un punto** p de la intersección cuando el espacio tangente a la primera en ese punto está contenido en el espacio tangente a la segunda en ese punto (o al revés). En consecuencia, se dice que son **tangentes** cuando lo son en todo punto de la intersección.

Proposición 2.5. *Si las superficies S_1 y S_2 se cortan transversalmente en un punto p , entonces hay un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 , un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es un homeomorfismo en su imagen, de forma que $\alpha(I) = V \cap S_1 \cap S_2$.*

Demostración. Por la Proposición 1.43, sabemos que existe un entorno abierto O de p en \mathbb{R}^3 y una función diferenciable $g : O \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular de g y $S_2 \cap O = g^{-1}(\{0\})$.

Definimos $f : S_1 \cap O \rightarrow \mathbb{R}$ como $f = g|_{S_1 \cap O}$, que es diferenciable sobre la superficie $S_1 \cap O \ni p$ por ser la restricción de una función diferenciable. Además, $f(p) = g(p) = 0$ y $(df)_p = (dg)_p|_{T_p S_1}$.

Como $S_1 \cap O \subset \mathbb{R}^3$ es abierto, $f : S_1 \cap O \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable y $f^{-1}(\{0\}) = S_1 \cap S_2 \cap O$. Si p fuese un punto crítico de f , se tiene que $T_p S_1 \subset \ker(df)_p = T_p S_2$. Pero esto es imposible porque S_1 y S_2 se intersecan de forma transversal. Bastaría entonces aplicar el Teorema 1.12 a la función f , que nos garantiza la existencia de un abierto $V \subset O$ y una curva regular definida en un intervalo de la recta real I , $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I) = f^{-1}(\{0\}) \cap V$, de donde se sigue el resultado. \square

En base a la Proposición 2.5, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.6 ([14, Teorema 2.67]). *La intersección de dos superficies que se cortan de forma transversal es o bien vacía o bien una curva simple con posiblemente más de una componente conexa.*

Sea S una superficie arbitraria. Por el Lema 1.47, podemos cubrir la superficie con un conjunto numerable de subconjuntos conexos, orientables y abiertos. Consideramos en cada uno de ellos las dos posibles aplicaciones de Gauss (dos posibles orientaciones, Lema 1.48). De esta forma, conseguimos una familia numerable de aplicaciones diferenciables, todas ellas tomando valores en la esfera \mathbb{S}^2 .

Sea ahora P un plano de \mathbb{R}^3 perpendicular a un vector unitario $a \in \mathbb{S}^2$. Cada uno de los abiertos en los que están definidas las aplicaciones de Gauss es una superficie (por ser un abierto de una superficie). Por el Corolario 1.46, hay un vector unitario $b \in \mathbb{S}^2$, arbitrariamente cercano a a , que es un valor regular para todas las aplicaciones de Gauss. Esto es, todos los puntos de la superficie S cuyos planos tangentes son perpendiculares al vector b son puntos regulares de estas aplicaciones de Gauss locales. En particular, si q es un punto de S cuyo espacio tangente es

normal a b , podemos tomar una aplicación de Gauss N definida en un entorno de q que pertenece a la colección numerable anteriormente mencionada y tal que $N(q) = b$. Como $N(q) = b$ y b es un valor regular, tenemos que N es un difeomorfismo local y por consiguiente, es inyectiva en un entorno de q . Así, existe un entorno de q en S en el cual el único punto de dicho entorno donde el espacio tangente a S es ortogonal a b es precisamente q . Esto implica que el conjunto de puntos de S cuyos planos tangentes son ortogonales a b es discreto, y por lo tanto numerable. En consecuencia, podemos desplazar P en la dirección de b una cantidad arbitrariamente pequeña para obtener un plano P' que también tiene a b como vector normal y que además no corta a ningún punto de la familia numerable previamente citada. Por lo tanto, en los puntos de $S \cap P'$, S y P' se intersecan transversalmente. Resumimos esto en la siguiente proposición:

Proposición 2.7. *Dada una superficie S y un plano P en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , siempre podemos encontrar un plano P' arbitrariamente cercano a P que corta a S transversalmente.*

Como tal, existen diferentes enfoques para medir la proximidad entre dos planos en \mathbb{R}^3 . Aquí, por un plano P' arbitrariamente cercano a otro plano P , nos referimos a que el ángulo que forma el vector normal a P' con el vector normal a P , es tan próximo a 0 como deseemos y además, la distancia entre ambos planos es tan pequeña como se quiera.

Proposición 2.8. *Sea S una superficie. Entonces, desde cada punto de $\mathbb{R}^3 - S$ se puede trazar una semirrecta que corta a S transversalmente con dirección arbitrariamente cercana a una dirección dada. Además, la intersección de estas semirrectas y S son conjuntos discretos, y por tanto finitos si S es compacta.*

Demostración. Sea S una superficie cualquiera y $p_0 \notin S$. Consideramos la función $f : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida por

$$f(p) = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} \text{ para todo } p \in S.$$

Para $p \in S$ y $v \in T_p S$, podemos escoger una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\alpha(t) - p_0}{\|\alpha(t) - p_0\|} = \frac{1}{\|p - p_0\|} v - \frac{\langle p - p_0, v \rangle}{\|p - p_0\|^3} (p - p_0). \quad (2.1)$$

Claramente, $p - p_0$ no puede ser perpendicular a v , ya que por (2.1), se tendría que $v/\|p - p_0\| = (df)_p(v) = 0$, en cuyo caso p es un punto crítico de f . Si $p - p_0 \in T_p S$, se tiene

$$(df)_p(p - p_0) = \frac{1}{\|p - p_0\|} (p - p_0) - \frac{\|p - p_0\|^2}{\|p - p_0\|^3} (p - p_0) = 0,$$

esto es, $p - p_0 \in \ker(df)_p$. Además, si $v \in T_p S - \{0\}$ satisface $(df)_p(v) = 0$, por (2.1),

$$p - p_0 = \frac{\|p - p_0\|^2}{\langle p - p_0, v \rangle} v,$$

y por lo tanto, $p - p_0 \in T_p S$.

Acabamos de ver que, dado p en S , la diferencial $(df)_p$ es un isomorfismo si y solamente si $p - p_0$ no es tangente a S . Ahora, sea v un vector en \mathbb{S}^2 . Tenemos que v es un valor crítico si existe un x tal que $f(x) = v$ y $(df)_x = 0$. Esto significa que la semirrecta $p_0 + tv$ pasa por x y esta intersección es tangente (porque $x - p_0$ es proporcional a v y tangente a S en x). Entonces, el vector v es un valor crítico si y solo si la semirrecta $p_0 + tv$ no es transversa a S .

De esta forma, un vector unitario $a \in \mathbb{S}^2$ es un valor regular de esta función f cuando la semirrecta que comienza en p_0 en la dirección de a corta a S transversalmente. Por esto y por el Teorema 1.45, hemos terminado la primera parte de la proposición.

El hecho de que la intersección de estas semirrectas y S son conjuntos discretos, y por tanto finitos, si S es compacto, se sigue de forma más o menos inmediata de la Proposición 2.2. Esto es porque, localmente, el problema de determinar la intersección de una curva con una superficie puede ser reducida, salvo difeomorfismos, a estudiar el caso en el que la superficie es el plano $z = 0$. De hecho, como los difeomorfismos conservan la transversalidad de forma trivial, entonces es suficiente considerar el caso donde $S = P$ es el plano con ecuación $z = 0$. Así, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular con $\alpha(0) = p \in P$, transversal a P en p , definida como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

entonces $z(0) = 0$ y $z'(0) \neq 0$. Esto implica que existe un intervalo centrado en $t = 0$ en el cual $z(t)$ es 0 solo en $t = 0$ y en el que hay puntos t con $z(t) < 0$ y $z(t) > 0$, es decir, puntos por encima y por debajo de P . De esta forma, dadas una curva simple C y una superficie S tales que C y S son transversas, su intersección, $C \cap S$ es un conjunto discreto de \mathbb{R}^3 . \square

2.3. Convergencia de rectas

Definición 2.9. Sea P un plano de \mathbb{R}^3 que pasa por el punto p_0 y que tiene como vector normal $a \in \mathbb{R}^3$. Si S es una superficie cualquiera, entonces la función $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(p) = \langle p - p_0, a \rangle \quad \text{para todo } p \in S,$$

se llama **función altura** de S sobre el plano P (realmente es una altura con “signo”, que depende de la elección del vector normal unitario).

La función altura es claramente una función diferenciable por ser la restricción a S de una función diferenciable definida en todo el espacio \mathbb{R}^3 . Cuando $\|a\| = 1$, h mide la altura desde los puntos de S sobre el plano P .

Definición 2.10. Dados un punto $p \in \mathbb{R}^n$, definimos **semirecta** que comienza en p y con vector director $v \in \mathbb{R}^n$ como la curva parametrizada $R : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $R(t) = p + tv, t \geq 0$.

Si restringimos la parametrización de la recta a un intervalo $[0, M]$ tal que $R|_{[0, M]}(M) = R(M) = p'$, entonces decimos que $R|_{[0, M]}$ es un **segmento** de recta y lo denotaremos por $[p, p']$.

Definición 2.11. Decimos que una sucesión de rectas $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^3 es **convergente** a una recta R , si hay parametrizaciones afines $\alpha_n, \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ para cada $R_n, n \in \mathbb{N}$, y para R tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t) = \alpha(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Cabe destacar que esta definición y las consecuentes propiedades de convergencia de sucesiones de rectas se extienden de forma análoga a las sucesiones de semirectas que empiezan en un punto.

Proposición 2.12. Sea $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectas de \mathbb{R}^3 convergente a una recta R . Si $p_n \in R_n, v_n \in \mathbb{R}^3$ es un vector director de R_n para todo $n \in \mathbb{N}$ y los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \neq 0$$

existen, entonces $p \in R$ y v es un vector director de R .

Demostración. Existen parametrizaciones afines $\alpha_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas como $\alpha_n(t) = q_n + tw_n$, de cada recta $R_n, n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t) = \alpha(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha(t) = q + tw$ parametriza la recta R . Por lo tanto, $q \in R$ es el límite de $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $w \neq 0$ es el límite de $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que es un vector director de R . Como $p_n \in R_n$ y v_n es un vector director de R_n para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$p_n = q_n + t_n w_n \quad \text{y} \quad v_n = \lambda_n w_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

para algunos $t_n \in \mathbb{R}, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Se sigue de estas expresiones que:

$$t_n = \frac{\langle p_n - q_n, w_n \rangle}{\|w_n\|^2} \quad \text{y} \quad \lambda_n = \frac{\langle v_n, w_n \rangle}{\|w_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y por lo tanto, las sucesiones $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son convergentes a números reales

$$t = \frac{\langle p - q, w \rangle}{\|w\|^2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}$$

respectivamente, ya que, por hipótesis, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \neq 0$. Así, tomando límites en (2.2), se obtiene

$$p = q + tw \quad \text{y} \quad v = \lambda w,$$

y con esto, $p \in R$ y v es un vector director de R . □

Proposición 2.13. *Sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de una superficie S que converge a un punto $p \in S$ y sea $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectas convergente a una recta R tales que p_n está en R_n . Si cada R_n es tangente a S en el punto p_n , entonces R es tangente a S en el punto p .*

Demostración. Por definición, se sabe que podemos encontrar una sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores directores de las rectas R_n que converge a un vector director $v \in \mathbb{R}^3$ de la recta R . Además, obviando un número finito de puntos, podemos suponer que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$, donde U es un entorno abierto del punto p en el que tenemos a nuestra disposición una aplicación de Gauss N , al ser toda superficie localmente orientable (Lema 1.47). Entonces, es suficiente tomar límites en la igualdad $\langle v_n, N(p_n) \rangle = 0$, que es válida para cada $n \in \mathbb{N}$, de forma que $v \perp N(p)$ y por lo tanto la recta es tangente a S en el punto p . \square

Definición 2.14. Sea S una superficie, R una recta de \mathbb{R}^3 y p un punto de $S \cap R$. Se dice que p es un **punto de primer contacto** entre S y R si existe una sucesión de rectas $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a R y un entorno V de p en S tal que $R_n \cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El punto p es un **punto de doble intersección** entre S y R si existen dos sucesiones $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de S , con $p_n \neq q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que convergen al punto p y tales que la sucesión de rectas $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, cada una de ellas determinada por los pares de puntos (p_n, q_n) , converge a R .

Lema 2.15. *Si p es un punto de primer contacto o un punto de doble intersección entre la superficie S y la recta R , entonces R es tangente a S en el punto p .*

Demostración. Primero, lo probaremos para el caso en el que p es un punto de primer contacto. Gracias al Lema 2.2, podemos encontrar un entorno abierto y conexo W de p en \mathbb{R}^3 tal que $W \cap S \subset V$, donde V es el entorno heredado de la Definición 2.14, tal que $W - S$ tiene exactamente dos componentes conexas C_1 y C_2 .

Considérese $B \subset W$ una bola abierta de \mathbb{R}^3 centrada en el punto p . Para la sucesión de rectas que se indica en la Definición 2.14, obviamente la intersección $B \cap R_n$ es conexa y está contenida en $W - S$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que R_n no puede tener intersección no vacía con ambos conjuntos abiertos $C_1 \cap B$ y $C_2 \cap B$ al mismo tiempo, por ser C_1 y C_2 componentes conexas. Por lo tanto, podemos encontrar una subsucesión de la sucesión de rectas $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ formada por rectas que tan solo cortan a uno de ellos, como por ejemplo $C_1 \cap B$. Por continuidad, el límite R de esta subsucesión, que es en particular el límite de la sucesión de partida $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, no puede intersecar a $C_2 \cap B$. Así, acabamos de probar que la recta R toca a S tan solo en el punto de primer contacto p y está localmente de un lado de S . Gracias al último razonamiento de la demostración de la Proposición 2.8, deducimos que, si R es una recta transversa a la superficie S , entonces debe tener puntos tanto en C_1 como en C_2 . Por lo tanto, R es tangente a S en p .

Veamos ahora qué ocurre si p es un punto de doble intersección. Sin pérdida de generalidad, usando movimientos rígidos podemos suponer que p es el origen y que R es el eje z de \mathbb{R}^3 . Supongamos que R no es tangente a S en el punto p , es decir, que R es transversa a S en el punto p . Gracias al Corolario 1.42, podemos describir un entorno adecuado del punto p en la superficie S como el grafo de una función $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un disco D centrado en el origen, que está contenido en el plano $z = 0$ (que podemos visualizar como \mathbb{R}^2). La función h es, por construcción, tal que $h(0,0) = 0$ y 0 es un valor regular.

Sean p'_n y q'_n los puntos del disco D que son proyecciones sobre el plano $z = 0$ de los puntos p_n y q_n de dos sucesiones, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que convergen al punto p . Entonces, por construcción, las sucesiones $\{p'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen al origen. Si se diese que $p'_n \neq q'_n$ para tan solo un número finito de términos, existiría un $N \in \mathbb{N}$ a partir del cual todas las rectas son verticales (la última componente de p_n y q_n es la misma). En tal caso, tendríamos que el límite al que convergen las rectas que pasan por los puntos p_n y q_n es el eje z y ya tendríamos probado el lema. En otro caso, consideremos R_n la recta que une los puntos p_n y q_n con vector director

$$v_n = \frac{q_n - p_n}{\|q'_n - p'_n\|} = \left(\frac{q'_n - p'_n}{\|q'_n - p'_n\|}, \frac{h(q'_n) - h(p'_n)}{\|q'_n - p'_n\|} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Tomando subsucesiones, podemos asumir que la sucesión de proyecciones $\{v'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un vector $v' \in \mathbb{R}^3$ con longitud unitaria. Entonces, la subsucesión de componentes sobre el plano $z = 0$ converge a $(dh)_{(0,0)}(v')$. Veamos esto con más detalle: dado $n \in \mathbb{N}$, entonces en base al Teorema de valor medio existe un $\lambda_n \in (0,1)$ tal que $h(q'_n) - h(p'_n) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\lambda_n} h(p'_n + t(q'_n - p'_n)) = dh_{\xi_n}(q'_n - p'_n)$ con $\xi_n = p'_n + \lambda_n(q'_n - p'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Luego

$$\frac{h(q'_n) - h(p'_n)}{\|q'_n - p'_n\|} = \frac{dh_{\xi_n}(q'_n - p'_n)}{\|q'_n - p'_n\|} = dh_{\xi_n} \left(\frac{q'_n - p'_n}{\|q'_n - p'_n\|} \right) = dh_{\xi_n}(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} dh_{(0,0)}(v),$$

donde el último límite se obtiene debido a que la función h es infinitamente diferenciable. Por la Proposición 2.12, se tiene entonces que $(v', (dh)_{(0,0)}(v')) \in \mathbb{R}^3$ es un vector director de la recta R y por tanto, del eje z . Esto nos lleva a una contradicción porque el vector v' es no nulo. Por lo tanto, R es tangente a S en el punto p . \square

Proposición 2.16. *Sea R una semirrecta cuyo origen está en $\mathbb{R}^3 - S$ y que corta a una superficie compacta S transversalmente. Si $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de semirrectas que empiezan en puntos de $\mathbb{R}^3 - S$ que converge a R , entonces existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, R_n corta a S transversalmente y el número de puntos de los conjuntos $R_n \cap S$ y $R \cap S$ es el mismo.*

Demostración. La transversalidad de la intersección y la compacidad de S garantizan que $S \cap R$ es un conjunto finito, gracias a la Proposición 2.8. Sea

$$S \cap R = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Supongamos que la afirmación sobre la sucesión $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es falsa. Entonces, se puede asumir, usando una subsucesión de la sucesión original, que la sucesión $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de semirrectas comenzando en los puntos de $\mathbb{R}^3 - S$, que converge a R , está formada por semirrectas que en particular satisfacen al menos una de las siguientes condiciones:

1. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que R_n es tangente a S en algún punto para todo $n \geq N$.
2. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que el número de puntos de $R_n \cap S$ es mayor que el número de puntos de $S \cap R$ para todo $n \geq N$.
3. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que el número de puntos de $R_n \cap S$ es menor que el número de puntos de $R \cap S$ para todo $n \geq N$.

Probaremos que cualquiera de las anteriores alternativas nos lleva a una contradicción, lo cual nos lleva al resultado que queremos probar:

Si 1 fuese lo que ocurre, entonces existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que p_n está en R_n para cada $n \in \mathbb{N}$, y tal que R_n es tangente a S en cada punto p_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Como S es compacta, entonces se puede asumir que esta sucesión converge a un punto $p \in S$, que también pertenece a R tal y como se ha probado en la Proposición 2.12. Entonces, por la Proposición 2.13, la semirrecta R será tangente a S en p . Esto es una contradicción, puesto que por hipótesis R corta a S transversalmente. Entonces 1 no puede ocurrir.

Si 2 ocurriese, entonces cualquier sucesión convergente de puntos de la forma $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \cap R_n$ tiene que converger, por la Proposición 2.12, a alguno de los puntos $p_1, \dots, p_k \in S \cap R$. Veamos que se pueden encontrar dos sucesiones diferentes cuyos términos convergen al mismo límite en $S \cap R$. Para probarlo, consideremos, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, una bola abierta B_i centrada en el punto $p_i \in R \cap S$, lo suficientemente pequeña como para que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$. Existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$, entonces los puntos de $R_n \cap S$ están contenidos en la unión de las bolas B_i . Si no fuese así, eso significaría que podemos construir una sucesión y_n de puntos en $R_n \cap S$ tales que y_n no está en ninguna de las bolas mencionadas anteriormente. Como S es compacta, en particular podemos suponer que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, y el límite de esta tiene que estar en $R \cap S$. Para n suficientemente grande, y_n tiene que estar en la bola B_i a la que pertenece el punto límite, pero esto es una contradicción. Por otro lado, $R_n \cap S$ tiene más puntos que $R \cap S$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ y un $l \in \{1, \dots, k\}$ de forma que $R_n \cap S$ tiene al menos dos puntos en B_l para todo $n \geq N$. Basta entonces considerar las dos sucesiones de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que ambas están en $B_l \cap R_n$. Por la compacidad de S , podemos asumir que ambas sucesiones convergen, y deben hacerlo a p_l . Tal punto es entonces un punto de doble intersección de S y R , lo que implica que S y R son tangentes en este punto gracias al Lema 2.15, de forma que, de nuevo, llegamos a una contradicción.

Finalmente, supongamos que 3 sucede. Considerando las bolas B_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ como en el anterior apartado, como el número de puntos de $R_n \cap S$ es menor que el de $R \cap S$, entonces existe una bola B_t , con $t \in \{1, \dots, k\}$, tal que para todo $n \geq N$ a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$, $R_n \cap S$ no tiene puntos en la bola. Entonces, $B_t \cap S$ es un entorno de p_t en S que no corta a ninguna de las semirrectas R_n , de modo que p_t es un punto de primer contacto entre S y R . De nuevo, gracias al Lema 2.15, R es tangente a S en este punto, lo cual es una contradicción una vez más. \square

2.4. Teorema de Jordan–Brouwer

En esta sección nos centraremos en su totalidad en la demostración del Teorema de Jordan–Brouwer. Se ha seguido [14] para la demostración del teorema. Empezamos probando un lema que nos dice que la paridad de la intersección de las semirrectas es siempre la misma, independientemente de la semirrecta transversa que comienza en p que se tome.

Lema 2.17. Sean $\Gamma = L_1 \cup L_2$, la unión de dos semirrectas en \mathbb{R}^3 que empiezan en un mismo punto p , y C una curva simple y compacta en el plano P determinado por Γ , que no contiene a p y que corta a L_1 y L_2 transversalmente. Entonces, $C \cap \Gamma$ tiene un número par de puntos.

Demostración. Como L_1 y L_2 son semirrectas, claramente la unión Γ divide el plano P en dos componentes, que llamaremos O_1 y O_2 . Gracias al Teorema 1.57, sabemos que cada componente conexa C' de la curva C es difeomorfa a un círculo (puesto que estamos suponiendo que C es compacta).

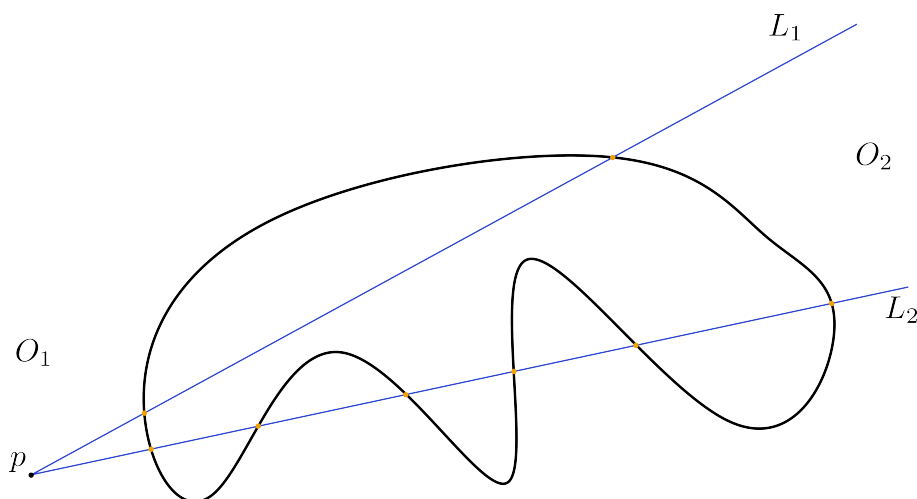


Figura 2.3: El conjunto Γ , formado por las semirrectas L_1 y L_2 , dividiendo el plano en las componentes conexas O_1 y O_2 .

Nos movemos a lo largo de C' con la orientación determinada por una parametrización por arco y periódica de C' . Por transversalidad, el conjunto $C' \cap \Gamma$ tiene un número finito de puntos en base a la Proposición 2.8, siendo la demostración análoga cambiando S por una curva simple C . Cada vez que C' corta a Γ , pasa de una componente O_i , $i = 1, 2$ a la otra.

Para demostrar esto último, consideremos la parametrización periódica de la curva compacta como $f(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$, donde t varía de 0 a 1, asumiendo que la curva es periódica con periodo 1. Supongamos también, sin pérdida de generalidad, que el origen de las rectas es el $(0, 0)$ y que las rectas están definidas en coordenadas polares como $\theta = 0$ y $\theta = a$. Sabemos que $f(t)$ está en la región entre las dos semirrectas si, módulo 2π , $0 < \theta(t) < a$, y está en la región “exterior” a las semirrectas si, módulo 2π , $a < \theta(t) < 2\pi$. Supongamos que C' interseca a Γ en un punto t_0 . Si en t_0 , $\theta(t_0)$ es tal que $0 < \theta(t_0) < a$, entonces, para que $f(t)$ sea transversa a las semirrectas, necesitamos que $\theta'(t_0) \neq 0$, lo que implica que $\theta(t)$ cambia de ser menor que 0 (o a) a ser mayor que 0 (o a), o viceversa, en un intervalo alrededor de t_0 . Esto implica que al atravesar Γ en t_0 , la curva C' pasa de la región entre las semirrectas a la región “exterior”. De manera similar, si en t_0 , $\theta(t_0)$ es tal que $a < \theta(t_0) < 2\pi$. Esto implica que, si comenzamos a recorrer la curva C' desde un punto de O_1 , cada vez que volvemos de nuevo a la componente O_1 , cruzamos Γ un número par de veces.

En particular, esto puede ser aplicado a una vuelta completa a C' . Por lo tanto, $C' \cap \Gamma$ tiene un número par de puntos. Como C tiene una cantidad finita de componentes conexas, deducimos que lo mismo es verdad para $C \cap \Gamma$. \square

Teorema 2.18 (Jordan-Brouwer). *Sea S una superficie conexa que es cerrada como subconjunto de \mathbb{R}^3 . Entonces, $\mathbb{R}^3 - S$ tiene exactamente dos componentes conexas que tienen a S como frontera común.*

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 2.3, es suficiente probar que $\mathbb{R}^3 - S$ no es conexo.

Por ser S compacta, como ya se ha demostrado en la Proposición 2.8, desde cada punto de $\mathbb{R}^3 - S$ podemos trazar una semirrecta que corta a S de forma transversal y por tanto, en un número finito de puntos. Sean Ω' y Ω los subconjuntos de $\mathbb{R}^3 - S$ a partir de los cuales podemos trazar una semirrecta cortando a S transversalmente en un conjunto par o impar de puntos, respectivamente. Estos conjuntos están bien definidos gracias al Lema 2.17 y son tales que $\mathbb{R}^3 - S = \Omega' \cup \Omega$. Veamos que son abiertos (lo hacemos para Ω' , pues el caso de Ω es análogo): sea p un punto de Ω' . Si p no fuese un punto interior de Ω' , entonces existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3 - S$ que converge a p y tal que cualquier semirrecta que se trace desde cada x_n y que corte a S transversalmente interseca a S en un número impar de puntos. Pero en tal caso, existe una semirrecta (límite de una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) que sale de p y que

corta a S transversalmente en un número impar de puntos. Esto es una contradicción, luego tanto Ω' como Ω son abiertos.

Como S es compacta, se pueden encontrar fácilmente semirrectas que no la intersecan, pues en particular S es acotada. Entonces, $\Omega \neq \emptyset$. Por otro lado, $\Omega' \neq \emptyset$. En efecto, dado $p_0 \in S$ un punto de la superficie tal que su coordenada z es mínima (existe por ser compacta), podemos considerar la recta dada por $p_0 + t(0, 0, 1)$. Entonces, para $t' > 0$ suficientemente pequeño, $p_0 + t'(0, 0, 1)$ está en la región interior a la superficie. Esto es porque en tal punto, el plano tangente a la superficie, $T_p S$, es exactamente el plano $z = 0$ porque p_0 es un punto crítico de la función z , lo que significa que para t suficientemente pequeño, el punto $q_0 = p_0 + t(0, 0, 1)$ no pertenece a S y la semirrecta $s \mapsto q_0 + s(0, 0, -1)$ tiene un único punto de intersección con S (el propio p_0). De esta manera, hemos expresado el complementario de $\mathbb{R}^3 - S$ como unión de dos conjuntos abiertos no vacíos de \mathbb{R}^3 .

Ahora, demostraremos que estos conjuntos son además disjuntos. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un punto $x \notin S$ y dos semirrectas L_1 y L_2 que comienzan en x y cortan a S transversalmente tales que $L_1 \cap S$ es un conjunto con un número impar de puntos y $L_2 \cap S$ es un conjunto con un número par de puntos. Sea P el plano determinado por estas dos semirrectas. Por la Proposición 2.7, tenemos un plano P' , arbitrariamente cercano a P , que corta transversalmente a S . Para pasar del plano original P al plano perturbado P' , es suficiente hacer una rotación con respecto al punto x y una translación en la dirección del vector normal a este plano intermedio. Por eso y por el Teorema 2.6, su intersección es una curva simple C , que es cerrada por ser intersección de dos cerrados.

En consecuencia, esta curva es compacta como subconjunto de S . De nuevo, por la Proposición 2.16, podemos encontrar en P' dos semirrectas, L'_1 y L'_2 , que comienzan en un punto x' y que todavía cortan a S transversalmente en un número impar y par de puntos respectivamente. Estas semirrectas aparecen al aplicar a L_i , $i \in \{1, 2\}$, el movimiento rígido que lleva P a P' . Además, gracias a la Proposición 2.16, podemos suponer que la rotación y translación generadas por tal movimiento rígido son lo suficientemente pequeñas como para que el número de puntos de corte de $L'_i \cap S$, $i \in \{1, 2\}$, sea el mismo que el número de puntos de corte que $L_i \cap S$. Entonces, $(L'_1 \cup L'_2) \cap S$ tiene un número impar de puntos. Pero tenemos que $(L'_1 \cup L'_2) \cap S = C \cap (L'_1 \cup L'_2)$, llegando entonces a una contradicción por el Lema 2.17. Con esto, se tiene que $\mathbb{R}^3 - S$ no es conexo y concluimos la demostración del teorema gracias a la Proposición 2.3. \square

El Teorema 2.18 nos proporciona un argumento geométrico que nos indica, dado un punto de $\mathbb{R}^3 - S$, en qué sitio se encuentra este con respecto a la superficie S . Esto se hace en función del número de veces que interseca a la superficie cualquier semirrecta que comienza en dicho punto y que la corta transversalmente.

De forma similar a cómo el Teorema de la curva de Jordan (2.1) nos indica si un punto es exterior o interior a la curva, el Teorema de Jordan-Brouwer nos proporciona algo similar para superficies en \mathbb{R}^3 . Si consideramos una bola B que contiene a la superficie S , se tiene entonces que $\mathbb{R}^3 - B$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^3 - S$. Entonces, B está en una de las dos componentes conexas C_1 o C_2 de $\mathbb{R}^3 - S$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que está en C_2 . Claramente C_2 no es acotada y $C_1 \cup S = \mathbb{R}^3 - C_2 \subset B$, lo que implica que C_1 sí es acotada. Por esto y por el Teorema 2.18, solo una de las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^3 - S$ es acotada, y la otra no lo es. La parte acotada se conoce como **región interna** determinada por la superficie S y es habitual denotarla por Ω . La parte no acotada es la **región externa** a S . El conjunto $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega \cup S$ es un conjunto compacto por lo explicado más arriba. Está claro que todas las semirrectas que comienzan en un punto exterior a B y trazadas fuera de B no cortan a la superficie. Teniendo todo esto en cuenta, entonces los puntos de la región externa se caracterizan porque las semirrectas que comienzan en ellos y cortan a la superficie S transversalmente, la intersecan un número par de veces. Consecuentemente, la región interna se caracteriza por estar formada por los puntos en los que comienzan las semirrectas transversas a la superficie que la cortan un número impar de veces. El análogo se traduce a las curvas planas como ya mencionamos, y representamos a continuación el caso bidimensional en el que se responde a la pregunta de la Figura 2.1.

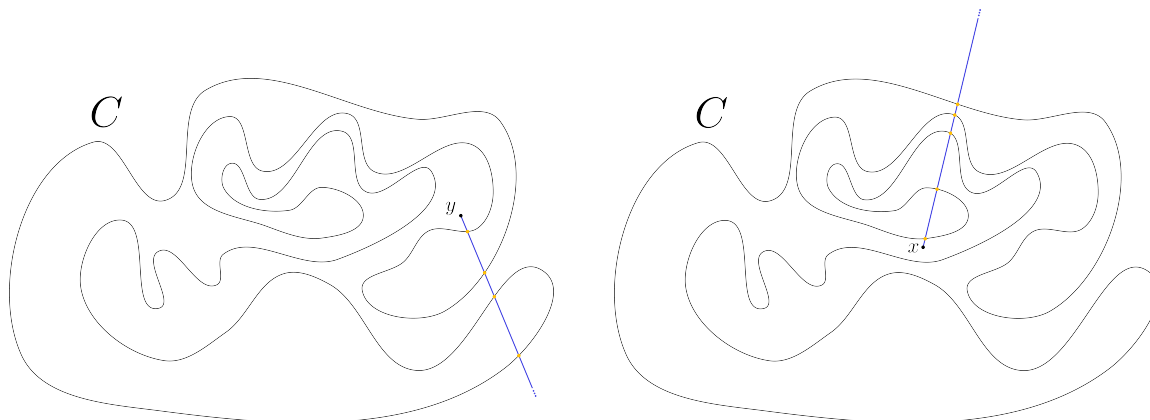


Figura 2.4: Ahora, ya tenemos la respuesta sobre los puntos interiores de la Figura 2.1. Izquierda: punto exterior a la curva, con una semirrecta transversal a ella que la corta un número par de veces; derecha: punto interior a la curva, con una semirrecta transversal a ella que la corta un número impar de veces

A continuación damos una demostración al Teorema de Jordan-Brouwer para el caso en el que la superficie S es cerrada y no necesariamente compacta.

Proposición 2.19. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie conexa y cerrada como subconjunto de \mathbb{R}^3 y $B = B_{\mathbb{R}^3-S}(p_0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^3 - S$ una bola abierta de radio $\epsilon > 0$. Entonces:*

1. *Para cada $p_1 \in \mathbb{R}^3 - S$, se puede encontrar un punto $p_2 \in B$ tal que el segmento $[p_1, p_2]$ corta a S transversalmente.*
2. *Si p_3 es otro punto de B tal que $[p_1, p_3]$ corta a S transversalmente también, entonces existe un número par de puntos en*

$$([p_1, p_2] \cup [p_1, p_3]) \cap S.$$

3. *$\mathbb{R}^3 - S$ no es conexo. Como consecuencia de esto, el Teorema de Jordan-Brouwer se puede extender a superficies cerradas.*

Demostración. Para demostrar 1, construimos la aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$f(x) = \frac{x - p_1}{\|x - p_1\|}.$$

Gracias al Teorema 1.45, el conjunto definido por

$$A = \{v \in \mathbb{S}^2 : \text{la semirrecta } p_1 + vt, \ t > 0 \text{ corta transversalmente a } S\}$$

es un subconjunto denso de \mathbb{S}^2 , como ya vimos en la Proposición 2.8. Por otro lado, el conjunto

$$\Omega = \{v \in \mathbb{S}^2 : \text{la semirrecta } p_1 + vt, \ t > 0 \text{ corta a } B\}$$

es un abierto no vacío de \mathbb{S}^2 . Que es no vacío es trivial a partir de que la bola B es no vacía. Para ver que es abierto, consideramos $v \in \Omega$. Entonces existe un punto $t' > 0$ tal que $p_1 + t'v \in B$ y la aplicación $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(w) = p_1 + t'w$ es continua, de forma que $h^{-1}(B)$ es un entorno abierto de v contenido en Ω . Ahora bien, como A es denso y Ω es un abierto no vacío, $A \cap \Omega \neq \emptyset$. Tomando $v \in A \cap \Omega$, la semirrecta R generada por v empezando en p_1 corta a S transversalmente y pasa por B . Basta tomar p_2 como cualquier punto de corte entre B y la semirrecta R .

Veamos ahora la segunda afirmación. Argumentando igual que en el caso compacto, podemos tomar un plano, que llamaremos P , suficientemente próximo al plano generado por p_1, p_2 y p_3 que corta a S transversalmente, y en este puntos p'_1, p'_2 y p'_3 para los que:

1. $B \cap P$ es una bola euclídea.
2. Los puntos $p'_2, p'_3 \in B \cap P$, $[p'_1, p'_2], [p'_1, p'_3]$ cortan transversalmente a S , y el número de puntos en $S \cap ([p'_1, p'_2] \cup [p'_1, p'_3])$ es el mismo que en $S \cap ([p_1, p_2] \cup [p_1, p_3])$.

En resumen, se trata de probar lo siguiente: si $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es una variedad de dimensión 1 cerrada en \mathbb{R}^2 y $[p_1, p_2]$, $[p_1, p_3]$, con $p_1 \in \mathbb{R}^2 - C$ y $p_2, p_3 \in C$, son transversas a C , entonces el número de puntos en $([p_1, p_2] \cup [p_1, p_3]) \cap C$ es par.

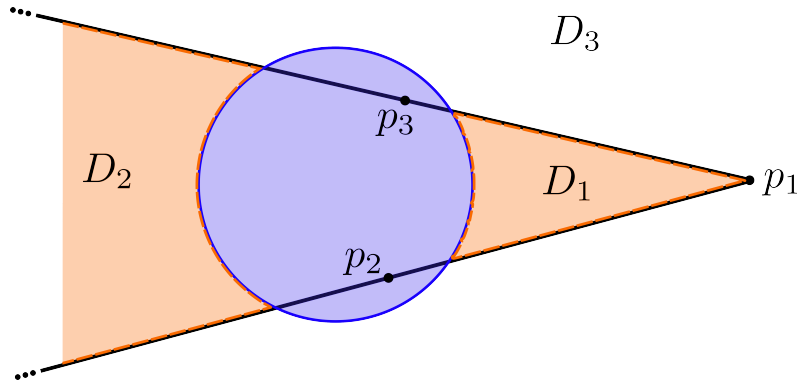


Figura 2.5: Situación al quitar al plano P la bola B y los segmentos $[p_1, p_2]$ y $[p_1, p_3]$. Queda separada la región en 3 componentes conexas, que llamamos D_1 , D_2 y D_3 .

Cada punto de intersección de C con $[p_1, p_2] \cup [p_1, p_3]$ se corresponde con C moviéndose de D_3 a D_1 o de D_1 a D_3 . Sea $C_0 \subseteq C$ una componente conexa de C , que es una curva en \mathbb{R}^2 . Entonces distinguimos dos casos:

1. Si C_0 es compacta, entonces $C_0 \cong \mathbb{S}^1$ por el Teorema 1.57, y podemos dar una parametrización 2π -periódica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow C_0$ de C_0 . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ está en $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Como no es posible ir de D_1 a D_2 sin pasar por D_3 , el número de veces que entramos a D_1 desde D_3 debe coincidir con el número de veces que salimos de D_1 a D_3 cada vez que damos una vuelta completa en C_0 , lo que implica que hay un número par de cortes entre $[p_1, p_2] \cup [p_1, p_3]$ y C_0 .
2. Si C_0 no es compacta, entonces $C_0 \cong \mathbb{R}$ por el Teorema 1.57, y por tanto podemos dar una parametrización por arco $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow C_0$ que sea un difeomorfismo. Como $\|\alpha'\| = 1$, α es Lipschitziana y por tanto uniformemente continua. Probemos que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\alpha(t)\| = \infty$. Si $\|\alpha\|$ no diverge, entonces existe una sucesión $\{t_n\} \rightarrow \infty$ tal que $\alpha(t_n) \rightarrow q \in \mathbb{R}^2$. Ahora bien, como C_0 es cerrada en \mathbb{R}^2 , tendríamos que $q = \alpha(s)$ para un $s \in \mathbb{R}$. Esto contradice que C_0 sea embebida, ya que existe un entorno Ω de q en \mathbb{R}^2 para el que $\alpha^{-1}(\Omega) = (s - \epsilon, s + \epsilon)$, y esto impide que $\alpha(t_n) \rightarrow q$. Ahora, como α diverge a ∞ y D_1 es acotado, hay un $M > 0$ tal que $\alpha|_{\mathbb{R} - [-M, M]}$ no corta a $\overline{D_1}$, con lo que los puntos de entrada y salida se dan en el intervalo $(-M, M)$. Concluimos que hay un número par de puntos de corte. Como C es la unión de sus componentes conexas, deducimos que en total hay un número par de puntos en $C \cap ([p_1, p_2] \cup [p_1, p_3])$.

Por último, para demostrar 3, construimos dos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^3 - S$ como sigue: sea $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$ un punto. Dado $p \in \mathbb{R}^3 - S$, existe una bola B centrada en p que está contenida en $\mathbb{R}^3 - S$. Decimos entonces que p pertenece a Ω_1 si para cualquier q en B tal que $[p_0, q]$ interseca a S transversalmente, el número de puntos de intersección entre $[p_0, q]$ y S es par. Por otro lado, decimos que pertenece a Ω_2 si para cualquier q en B tal que $[p_0, q]$ interseca a S transversalmente, el número de puntos de intersección entre $[p_0, q]$ y S es impar. El apartado 2 indica que la paridad de la intersección es la misma para todo q en las condiciones anteriores, así que estos conjuntos están bien definidos y son disjuntos. Además son abiertos, ya que si p está en Ω_i , la bola B también está contenida en Ω_i . En consecuencia, los Ω_i son abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^3 - S$, con lo que $\mathbb{R}^3 - S$ no es conexo. Luego, la Proposición 2.3 concluye la demostración del apartado 3. \square

Bibliografía

- [1] Alexander, J. W. (1915). *A Proof of the Invariance of Certain Constants of Analysis Situs*. Trans. Amer. Math. Soc., 16(2), 148–154. <https://doi.org/10.2307/1988715>.
- [2] Barros, M. (1997). *General Helices and a Theorem of Lancret*. Proc. Amer. Math. Soc. 125, no. 5: 1503–9. <http://www.jstor.org/stable/2162098>.
- [3] Cairns, S. S. (1951). *An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 2, no. 6, 1951, pp. 860–67. <https://doi.org/10.2307/2031698>.
- [4] do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*, translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [5] Gudmundsson, S. (2011). *An Introduction to Gaussian Geometry*, Lund University.
- [6] Guillemin, V. y Pollack, A. (1974). *Differential topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [7] Hernández Cifre, M. A. y Pastor González, J. A. (2010). *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Vol. 47, Editorial CSIC-CSIC Press.
- [8] Jordan, C. (1887). *Cours d'analyse de l'École polytechnique: t. Équations différentielles ordinaires. Équations linéaires. Équations aux dérivées partielles. Calcul des variations*. Vol. 3. Gauthier-Villars et fils.
- [9] Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds*, 2 ed., Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York.
- [10] Maehara, R. (1984). *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly 91, no. 10, 641–643, .
- [11] Markov, A. A. (1960). *Insolubility of the problem of homeomorphy*, Proceedings Intern. Congress of Math. 1958, Cambridge Univ. Press.

- [12] Massey, W. S., (1967). *Algebraic topology: an introduction*, Springer-Verlag, New York, 1977, Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics.
- [13] Milnor, J. W. (1965). *Topology from the differentiable viewpoint*, based on notes by David W. Weaver University Press of Virginia, Charlottesville, Va.
- [14] Montiel, S. y Ros, A. (2009). *Curves and surfaces*, 2 ed., Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt, Graduate Studies in Mathematics, 69, American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid.
- [15] Munkres, R. (1975). *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- [16] Papakyriakopoulos, C. D. (1963). *A Reduction of the Poincare Conjecture to Group Theoretic Conjectures*. Ann. of Math. Vol. 77, no. 2, 1963, pp. 250–305. JSTOR. <https://doi.org/10.2307/1970216>.
- [17] Richards, I. (1963). *On the Classification of Noncompact Surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 106. <https://doi.org/10.2307/1993768>.
- [18] Shifrin, T. (Consultado por última vez: junio 2023) *Differential geometry: a first course in curves and surfaces*, University of Georgia, 24. <http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf> (notas).
- [19] Smale, S. (1961). *Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. 74 , 391-406.
- [20] Smale, S. (1962). *On the structure of manifolds*. Am. J. Math. 84, 387-399.
- [21] Spivak, M. (1979). *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, 2 ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del.
- [22] Spivak, M. (1979). *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*, 2 ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del.
- [23] Wall, C. T. C. (1962). *Classification of $(n - 1)$ -connected $2n$ -manifolds*, Ann. of Math. 75, 163-189.