



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias

Alicia Nieto Codesido

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias

Alicia Nieto Codesido

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Área de Análisis Matemático
Título: Unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias
Breve descripción del contenido
El Teorema de Picard-Lipschitz proporciona condiciones suficientes para que el problema de valor inicial relativo a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden admita una solución única. El trabajo estará centrado en el estudio y la aplicación de otros resultados que garantizan la aludida unicidad para la solución, como el Teorema de unicidad de Peano, o el debido a Osgood. Se reflexionará sobre la convergencia de la sucesión de “aproximaciones” sucesivas en alguno de estos contextos.
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice

Resumen	vii
Introducción	ix
1. Preliminares	1
2. La unicidad según Lipschitz	13
3. La unicidad a través del método de las iteradas de Picard	23
3.1. Convergencia de las aproximaciones sucesivas	30
4. Otros teoremas de unicidad	41
4.1. Teorema de Unicidad de Peano	41
4.2. Teorema de Unicidad de Osgood	48
I. Gráficas en Sagemath	55
Bibliografía	59

Resumen

Como bien indica su nombre, en este Trabajo Fin de Grado estudiaremos algunos de los distintos resultados existentes sobre la unicidad de solución para el problema de Cauchy relativo a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Empezaremos recordando algunas definiciones, lemas y teoremas ya conocidos, para, más adelante, introducir nuevos resultados o demostraciones distintas a las ya estudiadas durante el Grado. En primer lugar, trabajaremos con el Teorema de Unicidad de Lipschitz y conceptos relacionados, usándolo como puente hacia los nuevos teoremas que se darán posteriormente. Como novedad, se estudiará el Teorema de Picard-Lindelöf, donde introduciremos el método de las iteradas de Picard y estudiaremos, brevemente, su convergencia. Finalmente, nos centraremos en el estudio y aplicación de otros resultados que garantizan la unicidad para la solución, como el Teorema de Unicidad de Peano, o el debido a Osgood.

Los resultados teóricos recogidos, algunos más conocidos que otros, estarán acompañados de ejemplos y, en ocasiones, representaciones gráficas, para poder ilustrar de mejor manera las principales hipótesis y el comportamiento de las soluciones en cada caso.

Abstract

As its name indicates, in this Final Degree Project we will study some of the different existing results on the uniqueness of solution for the Cauchy problem relative to first order ordinary differential equations.

We will begin by recalling some definitions, lemmas and theorems already known, in order to, later on, introduce new results or different proofs from those already studied during the Degree. First, we will work with the Lipschitz Uniqueness Theorem and related concepts, using it as a bridge to the new theorems that will be given later. As a novelty, we will study the Picard-

Lindelöf Theorem, where we will introduce the method of Picard iterates and we will briefly study their convergence. Finally, we will focus on the study and applications of other results that guarantee the uniqueness of the solution, such as Peano's Uniqueness Theorem, or the one due to Osgood.

The theoretical results included, some of which are more familiar than others, will be accompanied by examples and, sometimes, graphical representations, in order to better illustrate the main hypotheses and the behavior of the solutions in each case.

Resumo

Como ben indica o seu nome, neste Traballo Fin de Grao estudaremos algúns dos distintos resultados existentes sobre a unicidade de solución para o problema de Cauchy relativo a ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde.

Comezaremos lembrando algunhas definicións, lemas e teoremas xa coñecidos, para, máis adiante, introducir novos resultados ou demostracións distintas ás xa estudadas durante o Grao. En primeiro lugar, traballaremos co Teorema de Unicidade de Lipschitz e conceptos relacionados, empregándoo como ponte cara aos novos teoremas que se darán posteriormente. Como novidade, estudarase o Teorema de Picard-Lindelöf, onde introduciremos o método das iteradas de Picard e estudaremos, brevemente, a súa converxencia. Finalmente, centrarémonos no estudo e aplicación doutros resultados que garanten a unicidade para a solución, como o Teorema de Unicidade de Peano, ou o debido a Osgood.

Os resultados teóricos recollidos, algúns máis coñecidos que outros, estarán acompañados de exemplos e, en ocasións, representacións gráficas, para poder ilustrar de mellor xeito as principais hipóteses e o comportamento das solucións en cada caso.

Introducción

La unicidad de solución para el problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una cuestión muy estudiada debido a su importancia a la hora de utilizar modelos diferenciales para predecir la evolución de fenómenos reales. Existen multitud de resultados que versan sobre la unicidad de solución, basados en múltiples tipos de hipótesis, las cuales permiten garantizar la existencia de, a lo sumo, una solución. El hecho de que la función asociada a la ecuación diferencial ordinaria cumpla ciertas propiedades dará lugar a esa aludida unicidad de solución, siempre y cuando exista, obviamente.

Bajo la condición de continuidad en un conjunto abierto, podemos asegurar la existencia de solución pasando por un punto de dicho abierto. Esta viene dada por el Teorema de Cauchy-Peano, cuya demostración abordaremos, en el Capítulo 1, a través del método de las poligonales de Euler, siendo necesario definir previamente los conceptos que exige la aplicación del Teorema de Arzelà-Ascoli, que usaremos para probar la convergencia de una subsucesión de poligonales hacia alguna de las soluciones para el problema de Cauchy correspondiente.

Exploraremos las condiciones relacionadas con el carácter lipschitziano de la función asociada con respecto a la segunda variable, que son realmente interesantes pues nos proporcionan una condición suficiente para la unicidad de solución. Destacaremos, en el Capítulo 2, algunos de los resultados más útiles acerca de la propiedad de Lipschitz.

Es en el Capítulo 3 cuando introduciremos el concepto de *iteradas de Picard*, que jugarán un papel fundamental, pues representan otro camino para aproximar soluciones. Bajo la condición de Lipschitz, permiten aproximar la solución única pero, como se justificará, también pueden ser de utilidad para aproximar soluciones aún cuando no se cumplan las condiciones de Lipschitz respecto de x para la función $f(t, x)$ que determina la ecuación diferencial, aún sin tener unicidad.

Finalmente, en el Capítulo 4, se abordarán teoremas que garantizarán la unicidad de solución exigiéndole a la función otras propiedades diferentes a la de Lipschitz. En concreto, daremos resultados relacionados con el Teorema de Unicidad de Peano y el Teorema de Unicidad de Osgood, donde las propiedades requeridas son, respectivamente, la monotonía y la condición de Osgood, que introduciremos en su momento.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de comenzar con el contenido sustancial de nuestro trabajo, vamos a dar una serie de definiciones y resultados básicos para contextualizarlo, guiándonos por [1] y [4]. Empezamos, como es evidente, definiendo el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición 1.1. Sea

$$\begin{aligned} f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Llamaremos **Ecuación Diferencial Ordinaria** (EDO) de primer orden dada en forma normal relativa a la función f a

$$x' = f(t, x). \tag{1.2}$$

A modo de aclaración, decimos que la EDO viene dada en forma normal, puesto que aparece despejada x' .

Continuamos con la definición de solución de una EDO:

Definición 1.2. Dada

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

con I un intervalo cualquiera, diremos que φ es una **solución** de (1.2) si:

- (i) $(t, \varphi(t)) \in A, \forall t \in I$.
- (ii) φ es derivable en $t, \forall t \in I$.
- (iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I$.

Con (i), garantizamos que la gráfica de $\varphi(t)$ está en A y, con (iii), que dicha función cumple la ecuación diferencial. Además, si el intervalo I fuese cerrado, con (ii), garantizamos la existencia de la derivada lateral respectiva en dicho extremo del intervalo.

Para un punto fijado en A , definimos ahora el problema de Cauchy, también conocido como el problema de valor inicial (PVI).

Definición 1.3. Dada (1.2) con $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $(t_0, x_0) \in A$, el **problema de Cauchy** consiste en buscar una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución de (1.2) tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Habitualmente, escribiremos el problema de Cauchy como sigue,

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

A continuación, enunciamos una proposición que nos relaciona la regularidad de la función con la de la solución.

Proposición 1.4. Si f es continua en A , entonces φ es de clase \mathcal{C}^1 en I . Es más, podemos dar su generalización a que la función sea r veces continuamente derivable, como sigue: si $f \in \mathcal{C}^r(A)$, con $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, entonces $\varphi \in \mathcal{C}^{r+1}(I)$.

A partir de ahora trabajaremos, pues, con la hipótesis de que la función $f(t, x)$ es al menos continua en su dominio de definición A , por lo que el punto (ii) de la definición de solución va a implicar que $\varphi'(t)$ existe y es continua en todo punto $t \in I$.

Apoyándonos en [1] y [4], veremos que la continuidad de $f(t, x)$ es condición suficiente para que exista solución, pero no para la unicidad, y que el comportamiento de las soluciones es ciertamente arbitrario para funciones discontinuas. Antes de entrar de lleno en el estudio de la unicidad, debemos mencionar el siguiente resultado de existencia local, el **Teorema de Cauchy-Peano**.

Teorema 1.5 (Cauchy-Peano, [4]). Dado A un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y dada una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que, si f es continua en A y $(t_0, x_0) \in A$, entonces existe un intervalo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y una función $\varphi(t)$ tales que $\varphi(t_0) = x_0$ y $\varphi(t)$ es derivable con $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ en dicho intervalo, es decir, existe solución de la ecuación pasando por (t_0, x_0) definida en un entorno de t_0 . Si consideramos el rectángulo cerrado contenido en A :

$$\bar{S} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}, \quad a, b > 0, \quad (1.3)$$

y $M := \max_{(t,x) \in \bar{S}} \|f(t, x)\|$, entonces podemos tomar $\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. En el caso $M = 0$, se podría escoger $\delta = a$.

Una demostración clásica de dicho teorema se basa en la construcción de una sucesión de soluciones aproximadas y esto requiere que previamente recordemos conceptos como las poligonales de Euler, la caracterización integral de las soluciones de una EDO $x' = f(t, x)$, el Teorema de Arzelà-Ascoli...

Teorema 1.6 (Forma integral del Problema de Cauchy). *Dada la EDO (1.2), supongamos que $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ es continua y que $\varphi : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, con I un intervalo cualquiera, es tal que $(t, \varphi(t)) \in A$, para todo $t \in I$. Entonces, φ es solución de (1.2) pasando por $(t_0, \varphi(t_0))$, $t_0 \in I$, si y sólo si:*

1. φ es continua.

$$2. \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in I.$$

Es decir, el problema de Cauchy consiste en buscar una función continua $\varphi \in I$ que verifique que

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in I. \quad (1.4)$$

Para seguir, procedemos con la definición de los conceptos de acotación uniforme, equicontinuidad y convergencia uniforme, que podemos encontrar en [4], para así introducir el Teorema de Arzelà-Ascoli.

Definición 1.7. La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, está **uniformemente acotada** si existe una constante K tal que $\|f_n(t)\| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [a, b]$.

Definición 1.8. La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es **uniformemente equicontinua** si se verifica que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ de modo que, para todo $t, t' \in [a, b]$ con $|t - t'| < \delta(\varepsilon)$, se tiene que $\|f_n(t) - f_n(t')\| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.9. La sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente** a un límite f en A si, y sólo si, cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid [n \geq N; n \in \mathbb{N}] \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Teorema 1.10 (Arzelà-Ascoli). *Dada la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$, uniformemente acotada y equicontinua, se tiene que existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a un límite $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$.*

Por último, antes de comenzar con la demostración del Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Peano), explicamos en qué consisten las **poligonales de Euler**.

Definición 1.11. Consideremos el punto (t_0, x_0) en el abierto en el que está definida f y el intervalo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, donde δ está especificado en el enunciado el Teorema 1.5.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $i = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$ y $h_n = \delta/n$ longitud del paso, dividimos el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ en $2n$ subintervalos iguales con extremos en los puntos $t_{i,n} = t_0 + ih_n$. Así, tenemos $t_0 - \delta = t_{-n,n} < t_{-n+1,n} < \dots < t_{-1,n} < t_{0,n} = t_0 < t_{1,n} < \dots < t_{n-1,n} < t_{n,n} = t_0 + \delta$. Definimos, pues, las poligonales, para cada n :

1. Primero, $p_n(t_{0,n}) = p_n(t_0) = x_0$.

2. A continuación, definimos las funciones

$$p_n(t) = p_n(t_{0,n}) + (t - t_{0,n})f(t_{0,n}, p_n(t_{0,n})) \text{ en } [t_{-1,n}, t_{0,n}] = [t_{-1,n}, t_0] \text{ y}$$

$$p_n(t) = p_n(t_{0,n}) + (t - t_{0,n})f(t_{0,n}, p_n(t_{0,n})) \text{ en } [t_{0,n}, t_{1,n}] = [t_0, t_{1,n}].$$

Es decir, la primera expresión de la poligonal define un segmento de recta.

3. Ahora, suponiendo definida la poligonal entre $t_{i,n}$ y $t_{-i,n}$ (para $i = 0, \dots, n-1$), tenemos

$$p_n(t) = p_n(t_{-i,n}) + (t - t_{-i,n})f(t_{-i,n}, p_n(t_{-i,n})) \text{ en } [t_{-i-1,n}, t_{-i,n}] \text{ y}$$

$$p_n(t) = p_n(t_{i,n}) + (t - t_{i,n})f(t_{i,n}, p_n(t_{i,n})) \text{ en } [t_{i,n}, t_{i+1,n}].$$

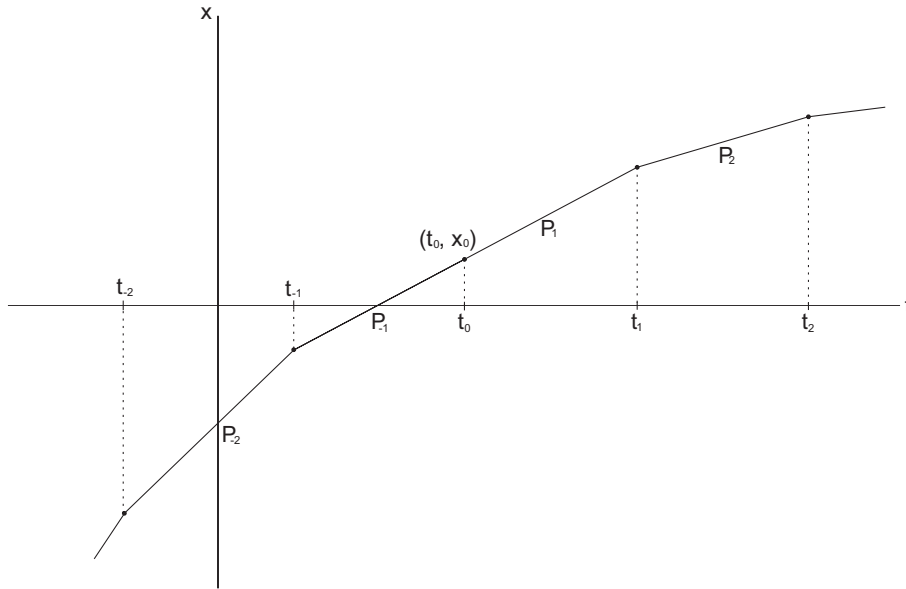


Figura 1.1: Gráfica de una poligonal de Euler.

Ilustramos el método por medio de la Figura 1.1, donde se representa una cierta poligonal, que se corresponde con la expresión analítica:

$$p(t_0) = x_0 \text{ en el punto } t_0,$$

$$\begin{aligned}
P_1 &: p(t) = p(t_0) + (t - t_0)f(t_0, x_0), \quad t \in (t_0, t_1], \\
P_2 &: p(t) = p(t_1) + (t - t_1)f(t_1, p(t_1)), \quad t \in (t_1, t_2], \\
P_{-1} &: p(t) = p(t_0) + (t - t_0)f(t_0, x_0), \quad t \in [t_{-1}, t_0), \quad \text{y} \\
P_{-2} &: p(t) = p(t_{-1}) + (t - t_{-1})f(t_{-1}, p(t_{-1})), \quad t \in [t_{-2}, t_{-1}).
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que P_1 y P_{-1} coinciden, ya que son segmentos contenidos en la misma recta pasando por (t_0, x_0) y con pendiente $f(t_0, x_0)$.

Observando la figura, puede ser sensato pensar que dichas poligonales se aproximan a alguna de las soluciones del problema de valor inicial cuando $n \rightarrow \infty$. Esto resulta ser cierto parcialmente, pues solamente converge una subsucesión, no necesariamente toda la sucesión de poligonales. Ya tenemos, pues, las herramientas precisas para demostrar el teorema, apoyándonos en [4].

Demostración del Teorema de Cauchy-Peano. Esta prueba está basada, además de en la sucesión de poligonales construida, en el mencionado Teorema 1.10 (Arzelà-Ascoli), por lo que se requiere la acotación uniforme y equicontinuidad de dicha sucesión.

Primeramente, comprobemos que la poligonal está contenida en el abierto A . Para hacerlo, usaremos el rectángulo \bar{S} definido en (1.3), pues sabemos que está contenido en A . Puesto que $(t_0, p_n(t_0) = x_0) \in \bar{S}$, definimos

$$r := \sup\{\alpha \in [0, \delta] \mid (t, p_n(t)) \in \bar{S}, \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}.$$

Tomamos la función escalonada, con escalones determinados por los correspondientes subintervalos de la poligonal, definida para $|t - t_0| \leq r$ y para cada n ,

$$q_n(t) = \begin{cases} f(t_0, x_0), & \text{si } t = t_0 = t_{0,n}, \\ f(t_{-i,n}, p_n(t_{-i,n})), & \text{si } t \in [t_{-i-1,n}, t_{-i,n}), \\ f(t_{i,n}, p_n(t_{i,n})), & \text{si } t \in (t_{i,n}, t_{i+1,n}]. \end{cases}$$

Dado que los valores de q_n son valores alcanzados por f en \bar{S} , tenemos que $\|q_n(t)\| \leq M$ para $|t - t_0| \leq r$. Nótese que q_n es la derivada “a trozos” de la poligonal p_n . Dado que esta es continua y su derivada es continua a trozos, tenemos que se cumple que

$$p_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t p_n'(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t q_n(s) ds. \quad (1.5)$$

Entonces, si $|t - t_0| \leq r$, se cumple que

$$\|p_n(t) - x_0\| \leq \max_{|t-t_0| \leq r} \|q_n(t)\| |t - t_0| \leq Mr \leq M\delta \leq b. \quad (1.6)$$

Suponiendo que $r < \delta$, tenemos que la desigualdad anterior es estricta y que $r < \delta \leq a$, contradiciendo así la definición de r , pues se podría tomar una porción mayor de poligonal que estuviese contenida en \bar{S} . De esta forma, hemos visto que $r = \delta$ y, así, toda la poligonal está contenida dentro del rectángulo.

Veamos ahora que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli. Por una parte, la desigualdad (1.6) nos garantiza la acotación uniforme de las poligonales, estando estas acotadas en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ por $\|x_0\| + b$. Por otro lado, tomando $t, t' \in I_\delta$, obtenemos que

$$\|p_n(t) - p_n(t')\| = \left\| \int_t^{t'} q_n(s) ds \right\| \leq M|t - t'|,$$

por lo que, acorde con la Definición 1.8, podemos afirmar que las poligonales representan un conjunto equicontinuo.

Así pues, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, tenemos que existe una subsucesión $\{p_{n_j}\}$ de poligonales uniformemente convergente a una función $\varphi(t)$, que es continua en I_δ . Comprobemos que esta función es solución de la ecuación en I_δ .

En primer lugar, veamos que $\{q_{n_j}(t)\}$ converge uniformemente a $f(t, \varphi(t))$ en dicho intervalo. Fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que, por ser f continua en el conjunto compacto \bar{S} , entonces es uniformemente continua, por lo que existe δ_1 tal que, si $|t - t'| + \|x_1 - x_2\| < \delta_1$, entonces $\|f(t, x_1) - f(t', x_2)\| < \varepsilon/2$.

También sabemos que, por ser $\varphi(t)$ continua en el intervalo compacto I_δ , entonces es uniformemente continua. De este modo, dado $\frac{\delta_1}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ que podemos escoger cumpliendo $\delta_2 < \delta_1/2$ de modo que, si $|t - t'| < \delta_2$, con $t, t' \in I_\delta$, entonces $\|\varphi(t) - \varphi(t')\| < \delta_1/2$.

Asimismo, debido a que $\{p_{n_j}\}$ es uniformemente convergente hacia la función φ , tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $j \geq j_0$, se verifica que $r/n_j < \delta_2$ y, además, $\|p_{n_j}(t) - \varphi(t)\| < \delta_1$, para $t \in I_\delta$.

Por consiguiente, si suponemos que $t \in (t_{i,n_j}, t_{i+1,n_j}]$, $t \in I_\delta$, se tiene, para $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} \|q_{n_j}(t) - f(t, \varphi(t))\| &= \|f(t_{i,n_j}, p_{n_j}(t_{i,n_j})) - f(t, \varphi(t))\| \\ &\leq \|f(t_{i,n_j}, p_{n_j}(t_{i,n_j})) - f(t_{i,n_j}, \varphi(t_{i,n_j}))\| + \|f(t_{i,n_j}, \varphi(t_{i,n_j})) - f(t, \varphi(t))\| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

demostrando, así, que $\{q_{n_j}\}$ converge uniformemente a $f(t, \varphi(t))$ en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

En segundo lugar y finalmente, comprobamos que $\varphi(t)$ cumple la forma integral del problema de Cauchy. Casi al comienzo de la prueba, en (1.5), demostramos la igualdad

$$p_{n_j}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t q_{n_j}(s) ds, \quad t \in I_\delta.$$

Si tomamos límites a ambos lados de la igualdad cuando $j \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_\delta,$$

como queríamos probar. □

La expresión de las soluciones en numerosos ejemplos podrá deducirse del teorema que escribimos subsiguientemente, donde se parte de que podemos separar sin problema las variables de la función.

Teorema 1.12 (Método de separación de variables). *Sea una f función continua en un conjunto abierto A definida de modo que $f(t, x) = g(t)h(x)$ y satisfaciendo que $h(x) \neq 0$. Entonces, se tiene una única solución $\varphi(t) = H^{-1}(G(t))$ para el problema de valor inicial expuesto en la Definición 1.3, cumpliendo que*

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds \quad y \quad H(x) = \int_{x_0}^x \frac{dz}{h(z)},$$

siempre y cuando $(t, G(t)) \in A$.

Como se comentaba anteriormente, la discontinuidad de la función $f(t, x)$ nos proporciona soluciones con un carácter arbitrario. Lo ilustramos con el siguiente ejemplo, análogo a uno recogido en [1].

Ejemplo 1.13. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{2(x+1)}{t}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Tenemos que la función $f(t, x) = \frac{2(x+1)}{t}$ no está definida en los puntos con $t = 0$ y tampoco puede extenderse de forma continua a un entorno del punto $(0, 0)$. Por tanto, en esta ocasión, sea cual sea la definición que se realice en los puntos con $t = 0$, atendiendo al enunciado del Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Peano), no se puede garantizar la existencia de solución.

No obstante, si aplicamos el proceso de separación de variables, visto en el Teorema 1.12, e integramos a ambos lados de la igualdad, obtenemos que la función $\varphi(t) = Ct^2 - 1$, con $C \in \mathbb{R}$, representa una colección infinita de soluciones para la ecuación.

Veamos en el siguiente ejemplo, análogo a uno recogido en [1], que, aunque la existencia de solución está garantizada debido la continuidad de la función, según el enunciado del Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Peano), no ocurre lo mismo para asegurar la unicidad del problema.

Ejemplo 1.14. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^{\frac{4}{5}}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

La función $f(t, x) = x^{\frac{4}{5}}$ es continua en \mathbb{R}^2 , de manera que, por el Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Peano), existe al menos una solución pasando por cada punto de su dominio de definición. Rápidamente, hallamos dos de ellas, la solución trivial $\varphi(t) = 0$ y la que viene dada por la expresión $\tilde{\varphi}(t) = \left(\frac{t+C}{5}\right)^5$, $C \in \mathbb{R}$, obtenida mediante el método de variables separadas, recogido en el Teorema 1.12. Esta última, particularizada para ser solución del problema de Cauchy, debe tener la constante de integración $C = 0$, entonces $\tilde{\varphi}(t) = \left(\frac{t}{5}\right)^5$.

De hecho, el problema de valor inicial tiene infinidad de soluciones, que podemos expresar de la forma

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-C_1}{5}\right)^5, & \text{si } t \leq C_1, \\ 0, & \text{si } C_1 \leq t \leq C_2, \\ \left(\frac{t-C_2}{5}\right)^5, & \text{si } t \geq C_2, \end{cases}$$

donde $C_1 \leq 0 \leq C_2$.

Podemos ver representada una de dichas soluciones en la Figura 1.2.

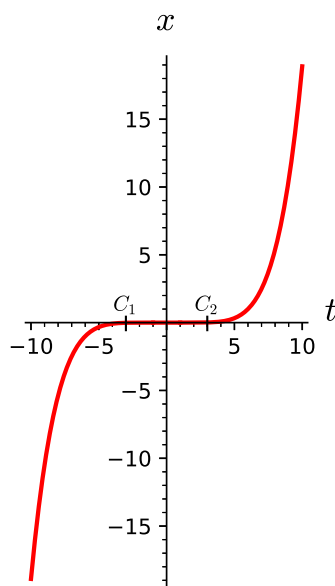


Figura 1.2: Una de las soluciones de $x' = x^{4/5}$.

Por tanto, resulta que, por cualquier punto (t_0, x_0) , pasa un número infinito de soluciones, algo que en otro caso solucionaríamos restringiéndonos a un entorno del punto, pero, en esta ocasión, tenemos que por los puntos de la forma $(t_0, 0)$ pasan como mínimo dos soluciones, $\varphi(t) \equiv 0$ y $\tilde{\varphi}(t) = \left(\frac{t-t_0}{5}\right)^5$, por lo que las poligonales de Euler no van a permitir, necesariamente, obtener todas las soluciones del problema.

Dicho con otras palabras, no es suficiente con tener la continuidad, para garantizar la unicidad necesitamos una condición adicional que acto seguido introducimos.

Definición 1.15. Dada la función $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, diremos que es **Lipschitziana en A con respecto a la variable x** si existe $L \in \mathbb{R}$ (L constante de Lipschitz no negativa) tal que, cualesquiera que sean $(t, x_1), (t, x_2) \in A$, se verifica la propiedad de Lipschitz, es decir, se cumple que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|. \quad (1.7)$$

Denotaremos $f \in L(A, x)$.

Ejemplo 1.16. Dada la función $f(t, x) = Cx$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, con $C \in \mathbb{R}$, se tiene que es Lipschitziana en \mathbb{R}^2 con respecto a la variable x dado que se verifica, para $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^2$, que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |Cx_1 - Cx_2| = |C||x_1 - x_2|.$$

Ejemplo 1.17. Veamos que la función $f(t, x) = 1 + tx^2$ es lipschitziana con respecto a la variable x en el rectángulo $A = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [1, 2], x \in [-1, 1]\}$. Obviamente, f está definida en A y es continua en dicho conjunto. Dados $(t, x_1), (t, x_2) \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |(1 + tx_1^2) - (1 + tx_2^2)| \\ &= |t||x_1^2 - x_2^2| = |t|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\ &= |t||x_1 - x_2||x_1 + x_2|. \end{aligned}$$

Puesto que $|t| \leq 2$ y $|x_1 + x_2| \leq 2$, podemos concluir que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|,$$

obteniendo, así, que la constante de Lipschitz puede ser $L = 4$, u otra L' constante de modo que $L' > L$.

Se puede observar que el concepto de lipschitzianidad respecto de la segunda variable se encuentra relacionado con la continuidad y la derivabilidad de la función con respecto a la variable x . Esta relación presente entre la propiedad de Lipschitz y la derivabilidad no es un hecho fortuito, como podremos ver en la siguiente proposición, recogida en [4], después de definir el concepto de convexidad.

Definición 1.18. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es **convexo** respecto de x si, y solo si, para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in A$ se tiene que $(t, \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \in A$, con $\alpha \in [0, 1]$.

Proposición 1.19. Dado $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ convexo, supongamos que

$$f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$$

admite todas las derivadas parciales con respecto a x y son funciones acotadas y continuas en A , entonces f es una función Lipschitziana en A respecto de x .

De hecho, esta relación con la derivabilidad nos proporciona la siguiente condición necesaria y suficiente para que se cumpla la propiedad de Lipschitz (1.7), si la función f es derivable respecto de x , recogida en [1].

Lema 1.20. Sean A un abierto de \mathbb{R}^{n+1} convexo y una función $f(t, x)$ que sea derivable respecto de x en todo el abierto A . Se tiene, entonces, que una condición necesaria y suficiente para que f satisfaga la condición de Lipschitz (1.7) es que

$$\sup_{(t,x) \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L.$$

Tras el recordatorio de los resultados fundamentales que utilizaremos en este trabajo, estamos ya casi en condiciones de enunciar el teorema mencionado: el de Unicidad de Lipschitz. Únicamente resta por recordar, aunque parezca obvia, la definición de **unicidad**.

Definición 1.21. Dada la EDO (1.2) relativa a la función $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $(t_0, x_0) \in A$, diremos que la solución $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que pasa por (t_0, x_0) es **única** si dos soluciones cualesquiera pasando por (t_0, x_0) coinciden en la intersección de sus dominios.

Enunciamos, pues, el Teorema de Unicidad de Lipschitz:

Teorema 1.22 (Teorema de Unicidad de Lipschitz [1]). Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y $x' = f(t, x)$ la ecuación diferencial ordinaria con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, tal que dicha función es continua en el rectángulo cerrado contenido en A ,

$$\bar{S} = \{(t, x) \in A : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \quad a, b > 0, \quad (1.8)$$

y satisface la condición de Lipschitz dada por la Definición 1.15.

Entonces, el problema de Cauchy siguiente, donde $(t_0, x_0) \in A$,

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

posee, a lo sumo, una solución definida en $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Llevaremos a cabo su demostración en el siguiente capítulo, tras introducir nuevos resultados que no hemos tratado en el grado, de modo que la demostración que se ofrecerá será diferente a la estudiada.

Recordamos, a continuación, varios resultados conocidos que precisaremos más adelante. Todos ellos se pueden consultar en [2].

En primer lugar, enunciamos el Teorema del Valor Medio, que usaremos más de una vez a lo largo del trabajo.

Teorema 1.23 (Teorema del Valor Medio, Teorema 082 [2]). *Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$, continua en él y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ de modo que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Ahora, recogemos el Teorema de Weierstrass, útil para una de las demostraciones que daremos del Teorema de Unicidad de Lipschitz (Teorema 1.22) en el siguiente capítulo.

Teorema 1.24 (Teorema de Weierstrass, Teorema 066 (II) [2]). *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces, por lo menos, existen dos puntos $t_1, t_2 \in [a, b]$ en los que f alcanza valores extremos absolutos, es decir, $f(t_1) \leq f(t) \leq f(t_2)$, para cualquier $t \in [a, b]$.*

En último lugar, escribimos una generalización del Criterio Mayorante de Weierstrass que se puede encontrar en [2], pues necesitaremos para la demostración del Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema 3.3) que este resultado se encuentre formulado para series funcionales con valores en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.25 (Criterio M de Weierstrass, generalización del Teorema 171 [2]). *Sea una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una constante no negativa, que denotaremos por M_n , tal que $\|f_n(t)\| \leq M_n$, para todo $t \in [a, b]$, de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente.*

Entonces, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Capítulo 2

La unicidad según Lipschitz

Como mencionamos anteriormente, probaremos el Teorema 1.22 (Teorema de Unicidad de Lipschitz) empleando resultados repasados en el Capítulo 1 y el lema que se presenta a continuación, que nos será útil para demostrar que dos posibles soluciones son idénticas.

Lema 2.1 ([1]). Sean $\phi(t)$ y $\psi(t)$ dos funciones continuas no negativas en un intervalo que denotamos por $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, cumpliendo que

$$\phi(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds \right|, \quad t \in I_\delta. \quad (2.1)$$

Entonces, se tiene que $\phi(t) = 0$, para todo $t \in I_\delta$.

Demostración. Consideremos $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ arbitrario (siendo análoga la prueba en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0]$), definimos la función $q(t)$ como sigue,

$$q(t) = \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s) ds.$$

Se tiene que la función q cumple que $q(t_0) = 0$ y $q'(t) = \psi(t)\phi(t)$. Usando la desigualdad (2.1), dada por la hipótesis, se tiene que la función $q(t)$ cumple que

$$q'(t) \leq \psi(t)q(t). \quad (2.2)$$

Ahora, si multiplicamos por $\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) ds\right)$ a ambos lados de dicha desigualdad (2.2), obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) ds\right) q(t) \right) \leq 0.$$

De esta manera, se tiene que la función $\exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) ds\right) q(t)$ es monótona decreciente para todo $t \geq t_0$.

Sabiendo que $q(t_0) = 0$, obviamente $q(t) \leq 0$, para $t \geq t_0$. Por lo tanto, se satisfacen las desigualdades $\phi(t) \leq q(t) \leq 0$, para $t \geq t_0$. Puesto que, por hipótesis, la función ϕ es no negativa, podemos concluir que $\phi(t) = 0$ en el intervalo considerado, $[t_0, t_0 + \delta]$, como queríamos demostrar. \square

Entonces, ya tenemos todo lo necesario para demostrar el Teorema 1.22 (Teorema de unicidad de Lipschitz). Este posee distintas pruebas, de las cuales daremos dos.

La primera prueba hace uso de los lemas previamente introducidos.

Primera demostración (Teorema de unicidad de Lipschitz, [1]). Vamos a suponer que tenemos dos soluciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que están definidas en el intervalo $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$. Por hipótesis, sabemos que se cumple la condición de Lipschitz dada por la Definición 1.15 y, además, usando el Teorema 1.6 (Forma integral del Problema de Cauchy) tenemos que

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(t, \varphi(s)) - f(t, \psi(s))| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right|.$$

Empleando el Lema 2.1, previamente demostrado, tomando, en notación del lema, $\psi(s) = L$ para todo s , podemos concluir que, para todo $t \in I_a$, $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, implicando que $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ coinciden en el intervalo I_a . \square

Seguidamente, demostramos el Teorema 1.22 mediante el uso del Teorema del Valor Medio (véase el Teorema 1.23). La prueba se hará de nuevo en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, siendo análoga para el intervalo $[t_0 - a, t_0]$.

Segunda demostración (Teorema de unicidad de Lipschitz, [1]). Sean, una vez más, dos soluciones del problema de valor inicial, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, que están definidas en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$. Por la definición de solución (véase la Definición 1.2), se tiene que verifican que, para $t \in [t_0, t_0 + a]$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f(t, \varphi(t)), \\ \psi'(t) &= f(t, \psi(t)), \\ \varphi(t_0) &= \psi(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Definamos, ahora, la función $g(t) := |\varphi(t) - \psi(t)|$, $t \in [t_0, t_0 + a]$. Sabemos que dicha función es derivable en los puntos en los que no se anula y, además, que satisface $g(t_0) = |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| = 0$,

es decir, se anula en $t = t_0$. Vamos a suponer que $g \neq 0$, es decir, que g no es nula en algún punto de $[t_0, t_0 + a]$.

Luego, existe $\varepsilon \in [t_0, t_0 + a]$ de modo que $g(t) = 0$ con $t \in [t_0, \varepsilon]$ y, además, $g(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo $(\varepsilon, \varepsilon + \theta]$, con $0 < \theta \leq a$. Vamos a tomar θ suficientemente pequeño, cumpliendo que $\theta L < 1$, siendo L constante de Lipschitz de $f(t, x)$ con respecto a la variable x .

Con todo, puesto que la función $g(t)$ es no nula cuando $t \in [\varepsilon, \varepsilon + \theta]$ y debido a su continuidad, se tiene que, por el Teorema de Weierstrass (véase el Teorema 1.24), g alcanza un máximo positivo en $\delta \in (\varepsilon, \varepsilon + \theta]$.

Aplicando el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[\varepsilon, \delta]$ (véase el Teorema 1.23), obtenemos que existe $\gamma \in (\varepsilon, \delta)$ cumpliendo

$$\varphi'(\gamma) - \psi'(\gamma) = \frac{[\varphi(\delta) - \psi(\delta)] - [\varphi(\varepsilon) - \psi(\varepsilon)]}{\delta - \varepsilon}.$$

Por lo tanto, puesto que $[\varphi(\varepsilon) - \psi(\varepsilon)] = 0$ debido a la elección de ε , las funciones φ y ψ son soluciones y f es lipschitziana respecto de la segunda variable, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &< |\varphi(\delta) - \psi(\delta)| = |\delta - \varepsilon| |\varphi'(\gamma) - \psi'(\gamma)| \\ &= (\delta - \varepsilon) |f(\gamma, \varphi(\gamma)) - f(\gamma, \psi(\gamma))| \\ &\leq \theta L |\varphi(\gamma) - \psi(\gamma)| < |\varphi(\gamma) - \psi(\gamma)|. \end{aligned}$$

Hemos llegado, pues, a una contradicción, ya que tenemos que $g(\gamma)$ es estrictamente mayor que $g(\delta)$, siendo esta última el máximo de la función $g(t)$ para $t \in [\varepsilon, \varepsilon + \theta]$. \square

Una vez hemos demostrado el Teorema 1.22 (Teorema de Unicidad de Lipschitz), ilustrémoslo con un ejemplo, análogo a uno que podemos encontrar en [1].

Ejemplo 2.2. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 4 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Tenemos que la función $f(t, x) = 4 + x^2$ es continuamente derivable con respecto a x en \mathbb{R}^2 y que, por el Lema 2.1, es lipschitziana con respecto a la segunda variable en cualquier rectángulo cerrado \bar{S} contenido en \mathbb{R}^2 conteniendo $(0, 0)$ (véase la expresión (1.3)) y, por el Lema 1.20 y la definición del rectángulo, admite como constante de Lipschitz

$$L := \sup_{(t,x) \in \bar{S}} |2x| \leq 2b.$$

Puesto que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.22 (Teorema de Unicidad de Lipschitz), resulta que el problema de Cauchy tiene, a lo sumo, una solución definida en $[-a, a]$.

Es inmediato ver que la función $\varphi(t) := 2 \tan(2t)$ es la única solución al problema de valor inicial definida en el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Sin embargo, este hecho no contradice la unicidad en $[-a, a]$, porque el Teorema de unicidad de Lipschitz no exige la existencia de solución en dicho intervalo. Es decir, si tomamos $a = \frac{\pi}{2}$, no existe solución posible en $[-a, a]$, puesto que no está definida en todo el intervalo la función $g(t) := 2 \tan(2t)$, la cual solo tiene sentido para el conjunto $\left\{t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

A la vista del ejemplo, cabe destacar que en el Teorema 1.22 solamente se habla de la unicidad de solución, pero en ningún momento se menciona su existencia (aunque podríamos deducirla, de modo local, de la continuidad de la función, usando el Teorema de Cauchy-Peano).

Es decir, cabe la posibilidad de que no exista solución. Por ello, presentaremos más adelante el Teorema de Picard-Lindelöf, cuyas hipótesis dan lugar a la existencia y unicidad de solución.

Mostramos, a continuación, un ejemplo para señalar el hecho de que puede no existir solución del problema de valor inicial y cumplirse que la función $f(t, x)$ sea lipschitziana con respecto a la variable x .

Ejemplo 2.3. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con

$$f(t, x) := \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ -1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Trivialmente, podemos comprobar que la función $f(t, x)$ satisface la condición de Lipschitz dada en la Definición 1.15. No obstante, un rápido razonamiento nos demuestra que no existe solución al problema.

La posible solución dada por la función $\varphi(t) = -|t|$ es la única que va a satisfacer la EDO $x' = f(t, x)$ para $t \neq 0$, pero, finalmente, no define una solución en un entorno de $t = 0$ pues no es derivable en ese punto. Debido a estas afirmaciones, se concluye que no existe solución para este problema de valor inicial.

Puesto que estamos tratando la relación entre la lipschitzianidad y la unicidad de solución, no está de más señalar que, particularmente, si la función f satisface una condición de Lipschitz lateral con respecto a la segunda variable, entonces está garantizada la unicidad de la solución para el problema de valor inicial en el subintervalo correspondiente de I_a donde tengamos dicha propiedad.

Podemos probarlo mediante el siguiente teorema, donde consideramos que una función es lipschitziana respecto de la segunda variable, x , “por la derecha”. La definición descrita acto seguido viene recogida, con otra notación, en [1].

Teorema 2.4. Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, donde $f(t, x)$ es continua en el conjunto

$$\bar{S}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t \leq t_0 + a, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\}$$

con $a, b > 0$ y supongamos que, para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in \bar{S}_+$ con $x_1 \leq x_2$, se cumple la siguiente **condición de Lipschitz por la derecha**,

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) \leq L(x_2 - x_1). \quad (2.3)$$

Entonces, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene, a lo sumo, una solución en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$.

Demostración. Supongamos, pues, que tenemos dos soluciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ del problema de Cauchy con algún valor distinto en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$. Entonces, podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que existe $t_1 \in [t_0, t_0 + a)$ de modo que $\varphi(t) = \psi(t)$, para todo $t \in [t_0, t_1]$ y $\varphi(t) < \psi(t)$ para $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$ y un cierto $\varepsilon > 0$. De hecho, t_1 sería el ínfimo del conjunto $B := \{t \geq t_0 : \varphi(t) < \psi(t)\}$, que es no vacío y está acotado inferiormente por t_0 .

Entonces, tenemos, para $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$,

$$\begin{aligned} \psi(t) - \varphi(t) &= (\psi(t) - \varphi(t)) - (\psi(t_1) - \varphi(t_1)) = \int_{t_1}^t (\psi'(s) - \varphi'(s)) ds \\ &= \int_{t_1}^t (f(s, \psi(s)) - f(s, \varphi(s))) ds \leq L \int_{t_1}^t (\psi(s) - \varphi(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si aplicamos el Lema 2.1 introducido al principio del capítulo a la desigualdad (2.4), obtenemos que $\psi(t) - \varphi(t) = 0$ para $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$, lo que contradice la elección de t_1 . Con esto, hemos probado que ambas soluciones son idénticas en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, como queríamos demostrar. \square

Damos, ahora, un ejemplo de problema de Cauchy donde el Teorema 2.4 nos garantiza, en caso de existir, la unicidad de solución.

Ejemplo 2.5. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = te^{-3x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Consideremos, por ejemplo, $\bar{S}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2], x \in [-2, 4]\}$, un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 , como dominio de definición de f .

Claramente, la función $f(t, x)$ es continua en \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, en el conjunto \bar{S}_+ . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Veamos si satisface la condición de Lipschitz respecto de x por la derecha que podemos ver en (2.3).

En efecto, dados dos puntos arbitrarios $(t, x_1), (t, x_2) \in \bar{S}_+$, de modo que $x_2 \geq x_1$, se tiene

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) = te^{-3x_2} - te^{-3x_1} = \frac{t}{e^{3x_2}} - \frac{t}{e^{3x_1}} = t \left(\frac{1}{e^{3x_2}} - \frac{1}{e^{3x_1}} \right) \leq 0 \leq L(x_2 - x_1),$$

para cualquier constante de Lipschitz L no negativa, pues se tiene

$$x_2 \geq x_1 \iff 3x_2 \geq 3x_1 \iff e^{3x_2} \geq e^{3x_1} \iff \frac{1}{e^{3x_2}} \leq \frac{1}{e^{3x_1}} \iff \frac{1}{e^{3x_2}} - \frac{1}{e^{3x_1}} \leq 0,$$

donde hemos usado que la función $g(x) = e^{3x}$ es creciente y que $t \in [0, 2]$, luego, $t \geq 0$.

Entonces, el Teorema 2.4 garantiza la unicidad de solución del problema de Cauchy, para la condición inicial señalada, en el intervalo $[0, 2]$. Podemos obtener la expresión de dicha solución mediante el método de separación de variables (véase el Teorema 1.12), resultando

$$\varphi(t) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3t^2}{2} + C \right),$$

con $C = 1$ para cumplir la condición inicial impuesta, es decir, $\varphi(t) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3t^2}{2} + 1 \right)$, que es la única solución del problema de Cauchy considerado.

También vale la pena mencionar que la propiedad de Lipschitz, dada por la Definición 1.15, nos garantiza la unicidad de solución, pero esta condición es suficiente, no necesaria. Vamos a exponer un ejemplo donde, a pesar de no cumplirse las hipótesis del Teorema 1.22 (de Unicidad de Lipschitz), se tiene que la solución es única.

Ejemplo 2.6. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada $f(t, x) := 1 + x^{\frac{2}{5}}$. Obviamente, tenemos que la función $f(t, x)$ es continua en \mathbb{R}^2 . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Si calculamos la derivada respecto de la segunda variable de la función en el conjunto $B = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}},$$

que no está acotada en B , pues su límite cuando $x \rightarrow 0^+$ es $+\infty$. Además, la derivada respecto de x para los puntos en la frontera de B no existe.

Aplicando el Lema 1.20, podemos afirmar que la función f no es lipschitziana con respecto a x en el conjunto B , ni en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, mediante el método de separación de variables, descrito en el Teorema 1.12, podemos demostrar que tiene una única solución,

$$\frac{1}{1+x^{\frac{2}{5}}} dx = dt \iff \frac{1}{1+\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2} dx = dt.$$

Ahora, integramos y tomamos el cambio de variable $z = x^{\frac{1}{5}}$, que implica que $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} dx = dz$, con lo que,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2} dx &= \int 1 dt \iff \int \frac{1}{1+z^2} 5z^4 dz = t + C \iff 5 \int \frac{z^4}{1+z^2} dz = t + C \iff \\ &5 \int \frac{z^4 + z^2 - z^2}{1+z^2} dz = t + C \iff 5 \int \frac{z^4 + z^2}{1+z^2} dz - 5 \int \frac{z^2 + 1 - 1}{1+z^2} dz = t + C \iff \\ &5 \int \frac{z^2(1+z^2)}{1+z^2} dz - 5 \int \frac{z^2 + 1}{1+z^2} dz + 5 \int \frac{1}{1+z^2} dz = t + C \iff \\ &5 \int z^2 dz - 5 \int 1 dz + 5 \int \frac{1}{1+z^2} dz = t + C \iff 5\frac{z^3}{3} - 5z + 5 \arctan(z) = t + C. \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución

$$\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - 5x^{\frac{1}{5}} + 5 \arctan(x^{\frac{1}{5}}) = t + C,$$

siendo C la constante de integración que, teniendo en cuenta la condición inicial impuesta, nos ofrece la única solución de la ecuación que pasa por $(0, 0)$ cuando $C = 0$.

Para introducir el siguiente resultado, recordemos que hemos visto en el capítulo anterior que el problema de Cauchy dado en el Ejemplo 1.14 tiene infinidad de soluciones pasando por $(t_0, 0)$. Por otro lado, es obvio que la función $h(x) = x^{4/5}$ se anula en el cero. Estos dos hechos vienen relacionados en el Teorema 2.7 que exponemos a continuación, recogido en [1].

Teorema 2.7. *Sea $h(x)$ una función definida en el intervalo $[x_0 - b, x_0 + b]$ y que es continua en él. Supongamos que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = h(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

tiene, al menos, un par de soluciones que son diferentes en cualquier entorno de t_0 . Entonces, $h(x_0) = 0$.

Demostración. Sean dos soluciones distintas del problema de Cauchy presentado en (2.5), $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, definidas en un entorno $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Si suponemos que la función h cumple que $h(x_0) \neq 0$,

entonces, por continuidad de h , existe un entorno centrado en x_0 , que denominaremos U , tal que $h(x) > 0$ para todo $x \in U$ (siendo análogo el caso en que $h(x) < 0$).

Sea, además, $V = (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$, con $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, un intervalo de modo que $\varphi(V) \subset U$ y $\psi(V) \subset U$. Podemos definir la función

$$H(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{dx}{h(x)}, \quad \text{para } t \in V,$$

que cumple que, para los $t \in V$ con $\varphi(t) \neq \psi(t)$, se tiene $H(t) \neq 0$. Sin embargo, obtenemos mediante la regla de la cadena y la definición de solución que, para todo $t \in V$,

$$H'(t) = \frac{\psi'(t)}{h(\psi(t))} - \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que la función $H(t)$ es constante en el entorno V . Como $H(t_0) = 0$, se sigue que $\varphi = \psi$ en V . Entonces, hemos llegado a una contradicción, pues φ y ψ son diferentes en cualquier entorno de t_0 . \square

Como hemos comentado, el Ejemplo 1.14 verifica dicho resultado.

No obstante, el resultado recíproco no se cumple necesariamente. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde la función $f(x)$ está definida en el intervalo $I = [0, 1]$ y tiene como expresión

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{2}{x}\right), & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En cuanto a su continuidad, podemos ver rápidamente que lo es en el interior del conjunto dado. De hecho, lo es en $(0, 1]$, por ser producto, composición y cociente de funciones elementales, cuyo denominador no se anula. Debemos estudiar por separado el punto $x = 0$.

Haciendo el límite cuando $x \rightarrow 0^+$ y aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\frac{-1}{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir, por ende, que la función $f(x)$ es continua en I . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema.

Ahora, si calculamos su derivada parcial respecto de la segunda variable en el interior del conjunto I , llegamos a la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 1,$$

que resulta no estar acotada en el intervalo I , pues su límite cuando $x \rightarrow 0^+$ es ∞ .

No obstante, podemos comprobar que, efectivamente, existe una única solución para el problema de valor inicial descrito. Si aplicamos el método de separación de variables (véase el Teorema 1.12),

$$x' = \frac{dx}{dt} = x \ln\left(\frac{2}{x}\right) \implies dt = \frac{1}{x \ln\left(\frac{2}{x}\right)} dx$$

y, seguidamente, integramos a ambos lados, obtenemos

$$\int dt = \int \frac{1}{x \ln\left(\frac{2}{x}\right)} dx \iff t + C = -\ln\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right),$$

siendo C la constante de integración.

Finalmente, despejando x y teniendo en cuenta la condición inicial, hallamos la única solución al problema, tomando la constante K como $K = \ln(4)$,

$$\begin{aligned} t + C &= -\ln\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right) \iff -(t + C) = \ln\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right) \iff \\ \exp(-(t + C)) &= \exp\left(\ln\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)\right) \iff \exp(-(t + C)) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) \iff \\ \exp(\exp(-(t + C))) &= \exp\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right) \iff \exp(\exp(-(t + C))) = \frac{2}{x} \iff \\ x &= \frac{2}{\exp(\exp(-(t + C)))} = \frac{2}{e^{e^{-(t+C)}}} = \frac{2}{e^{e^{-t-C}}} = \frac{2}{e^{e^{-t}e^{-C}}} = \frac{2}{e^{\frac{e^{-C}}{e^t}}} = \frac{2}{e^{\frac{K}{e^t}}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\varphi(t) = \frac{2}{e^{\frac{\ln(4)}{e^t}}}.$$

Capítulo 3

La unicidad a través del método de las iteradas de Picard

En este capítulo, como bien indica su nombre, introduciremos las llamadas *iteradas de Picard*. A continuación, presentamos la conocida como *desigualdad de Gronwall*, muy útil a la hora de emplear la forma integral del problema de Cauchy, dada en el Capítulo 1 por el Teorema 1.6, pues en el momento en que, operando, llegamos a una inecuación integral, este resultado nos permite acotar sus soluciones.

Lema 3.1 (Desigualdad de Gronwall, [4]). *Sean las funciones $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en dicho intervalo, tales que $g(t) \geq 0$ en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Además, supongamos que se satisface lo siguiente,*

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)f(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Entonces, para todo $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)g(s) \exp\left(\int_s^t g(r) dr\right) ds.$$

Demostración. Podemos reescribir la desigualdad dada por la hipótesis,

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)f(s) ds, \tag{3.1}$$

como

$$f(s) - \int_a^s g(r)f(r) dr \leq h(s).$$

Ahora, si multiplicamos a ambos lados de la desigualdad por $g(s) \exp\left(-\int_a^s g(r) dr\right) \geq 0$, obtenemos

$$\left(f(s) - \int_a^s g(r)f(r) dr\right) g(s) \exp\left(-\int_a^s g(r) dr\right) \leq h(s)g(s) \exp\left(-\int_a^s g(r) dr\right). \tag{3.2}$$

Podemos simplificar esta larga expresión renombrando los miembros de la siguiente manera,

$$u(s) = \int_a^s g(r)f(r) dr \implies u'(s) = g(s)f(s),$$

y nótese que $u(a) = 0$. Así, replanteamos el lado izquierdo de la expresión (3.2) como sigue,

$$\begin{aligned} & \left(f(s) - \int_a^s g(r)f(r) dr \right) g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) \\ &= f(s)g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) - \left(\int_a^s g(r)f(r) dr \right) g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) \\ &= u'(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) - u(s)g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right), \end{aligned}$$

donde, primero, hemos separado el producto del factor común y, posteriormente, hemos sustituido el correspondiente cambio. Si nos fijamos, la expresión obtenida es la derivada de un producto de funciones, por lo que, finalmente, la expresión (3.2) queda escrita como

$$\frac{d}{ds} \left[u(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) \right] \leq h(s)g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right). \quad (3.3)$$

Continuamos integrando la expresión (3.3) entre los límites a y t , por lo que la desigualdad no sufre cambios,

$$u(t) \exp \left(- \int_a^t g(r) dr \right) \leq \int_a^t h(s)g(s) \exp \left(- \int_a^s g(r) dr \right) ds.$$

Utilizando las propiedades de las integrales, podemos juntar las exponenciales de modo que

$$u(t) \leq \int_a^t h(s)g(s) \exp \left(\int_s^t g(r) dr \right) ds. \quad (3.4)$$

Por último, para llegar a la desigualdad que queremos, utilizamos las expresiones (3.1) y (3.4),

$$f(t) \leq h(t) + u(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)g(s) \exp \left(\int_s^t g(r) dr \right) ds,$$

es decir, hemos llegado al resultado que queríamos probar. \square

Análogamente, aplicamos la desigualdad de Gronwall a un intervalo a la izquierda de a , $[b, a]$, $b < a$, tomando un simple intercambio en los límites de integración. Queda escrito de tal manera que, para $t \in [b, a]$, si tenemos que se cumple que $f(t) \leq h(t) + \int_t^a g(s)f(s) ds$, entonces se satisface que

$$f(t) \leq h(t) + \int_t^a h(s)g(s) \exp \left(\int_t^s g(r) dr \right) ds.$$

En el siguiente corolario, recogido en [4], aportamos dos versiones más sencillas de la desigualdad introducida en el Lema 3.1, es decir, casos particulares de la misma.

Corolario 3.2. (a) Sean las funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en dicho intervalo, tales que $g(t) \geq 0$ en $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Además, supongamos que se cumple

$$f(t) \leq k + \int_a^t g(s)f(s) ds, \forall t \in [a, b], \text{ para un cierto } k \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $f(t) \leq k \exp\left(\int_a^t g(s) ds\right), \forall t \in [a, b]$.

(b) Sea la función no negativa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en dicho intervalo. Supongamos que satisface

$$f(t) \leq K \int_a^t f(s) ds, \forall t \in [a, b], \text{ para un cierto } K \geq 0.$$

Entonces, $f(t) \equiv 0$.

Podemos observar, como hemos comentado previamente, que se trata de dos casos particulares de la desigualdad de Gronwall. En el primer caso, (a), se tiene la desigualdad para la función $h(t) \equiv k$, con $k \in \mathbb{R}$. En el siguiente caso, (b), tenemos la desigualdad para las funciones $h(t) \equiv 0$ y $g(s) \equiv K$, con $K \geq 0$.

De nuevo, análogamente, podemos aplicar las desigualdades del Corolario 3.2 a un intervalo a la izquierda de a , de la forma $[b, a]$ con $b < a$, tomando un simple intercambio en los límites de integración.

De este modo, reescribimos el primer caso como que, si se cumple $f(t) \leq k + \int_t^a g(s)f(s) ds$, para todo $t \in [b, a]$ y un cierto $k \in \mathbb{R}$, entonces $f(t) \leq k \exp\left(\int_t^a g(s) ds\right)$. También reescribimos el segundo caso de tal manera que, si se cumple $f(t) \leq K \int_a^t f(s) ds$, para todo $t \in [b, a]$ y un cierto $K \geq 0$, entonces $f(t) \equiv 0$.

Llegados a este punto, introducimos, por fin, el teorema al que debe su nombre este capítulo: el Teorema de Picard-Lindelöf, en cuya demostración presentaremos las iteradas de Picard. En este teorema, además de afirmarse la existencia local de solución para el problema de valor inicial, también se afirma la unicidad de la misma.

Podremos observar en su enunciado una cierta similitud con el Teorema 1.5 (Teorema de Cauchy-Peano), que ya garantizaba la existencia local de solución para el problema de valor inicial.

Teorema 3.3 (Picard-Lindelöf, [4]). Sean A un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, donde $f(t, x)$ es continua y cumple la condición de Lipschitz respecto de x , véase la Definición 1.15, en un entorno de (t_0, x_0) .

Se tiene, entonces, que existe un intervalo $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y una función $\varphi(t)$ solución de la ecuación pasando por (t_0, x_0) , es decir, tal que $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi(t)$ es derivable en dicho intervalo I_δ y $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I_\delta$, y con gráfica contenida en A .

En otras palabras, existe solución de la ecuación pasando por (t_0, x_0) , definida en un entorno de t_0 .

Si consideramos el rectángulo cerrado contenido en A ,

$$\bar{S} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}, \quad a, b > 0 \quad (3.5)$$

y $M := \max_{(t,x) \in \bar{S}} \|f(t, x)\|$, entonces podemos tomar $\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. En el caso $M = 0$, se podría escoger $\delta = a$.

Adicionalmente, si se tiene que existe otra solución del problema de Cauchy, $\psi(t)$, entonces esta coincidirá con $\varphi(t)$ en el intervalo en el que ambas soluciones se encuentren definidas.

Demostración. Vamos a presentar, en primer lugar, el proceso de obtención de las iteradas de Picard. Estos se definen por medio de un proceso de recurrencia.

Sea I_δ el intervalo definido en el enunciado del teorema, escogemos una función cualquiera, $u_0(t)$, que sea continua en I_δ y cuya gráfica esté contenida en el rectángulo \bar{S} . La función más sencilla que podemos tomar es

$$u_0(t) = x_0, \quad t \in I_\delta,$$

pero podría tomarse cualquier otra en esas condiciones. Ahora, a imitación de la forma integral del problema de Cauchy, véase el Teorema 1.6, y puesto que estamos trabajando con funciones continuas, podemos definir por recurrencia

$$u_{j+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Veamos, ahora, que la gráfica de las funciones $u_j(t)$ y $u_{j+1}(t)$ sigue contenida, del mismo modo que la gráfica de $u_0(t)$, en el rectángulo \bar{S} que hemos definido y, por tanto, está contenida en el abierto A , donde se encuentra definida nuestra función f .

Por inducción, dado que, por definición, tenemos que la gráfica de la función $u_0(t)$ permanece en \bar{S} , si se tiene que la gráfica de la función $u_j(t)$ también lo verifica, entonces

$$\|u_{j+1}(t) - x_0\| \leq \max_{|t-t_0| \leq \delta} \|f(t, u_j(t))\| |t - t_0| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b, \quad t \in I_\delta,$$

de manera que tenemos que la gráfica de u_{j+1} también lo cumple.

Estas funciones $u_j(t)$, generadas a partir de la función $u_0(t)$, son las denominadas iteradas de Picard. Probemos, a continuación, que además convergen en el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Es decir, probemos que son uniformemente convergentes hacia una función continua en el intervalo I_δ .

Sea, como es habitual, L la constante de Lipschitz de nuestra función f respecto de la variable x y definamos C de modo que

$$C := \max_{t \in I_\delta} \|u_1(t) - u_0(t)\|.$$

Demostremos, de nuevo por inducción matemática, que se cumple lo siguiente,

$$\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\| \leq C \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Debido a la definición de C , tenemos que la anterior desigualdad se verifica para $j = 0$. Si se tiene que también se verifica para $j - 1$, entonces, para $t_0 \leq t$ (análogo para $t \leq t_0$, haciendo un intercambio en los límites de integración), se sigue que

$$\begin{aligned} \|u_{j+1}(t) - u_j(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u_j(s)) - f(s, u_{j-1}(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|u_j(s) - u_{j-1}(s)\| ds \\ &\leq CL^j \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^{j-1}}{(j-1)!} ds = CL^j \frac{(t - t_0)^j}{j!}, \quad t \in I_\delta. \end{aligned}$$

Puesto que podemos acotar de forma que

$$C \frac{L^j |t - t_0|^j}{j!} \leq C \frac{L^j \delta^j}{j!}, \quad t \in I_\delta$$

y, además, se tiene la convergencia de la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} C \frac{L^j \delta^j}{j!} = Ce^{L\delta},$$

podemos emplear el criterio mayorante de Weierstrass (véase el Teorema 1.25), el cual nos permite afirmar la convergencia uniforme de la serie

$$u_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} (u_{j+1}(t) - u_j(t)),$$

lo que implica, a su vez, la convergencia uniforme de su sucesión de sumas parciales hacia una función continua, $\varphi(t)$, en el intervalo I_δ . Es decir, hemos visto que $u_j \rightarrow \varphi$ uniformemente en I_δ .

De este hecho y de que

$$\|f(s, u_j(s)) - f(s, \varphi(s))\| \leq L \|u_j(s) - \varphi(s)\|, \quad \forall s \in I_\delta, j = 0, 1, 2, \dots$$

podemos deducir también que $f(s, u_j(s))$ converge uniformemente hacia $f(s, \varphi(s))$ en el intervalo indicado.

Por tratarse de funciones continuas, tenemos, pues, que se cumple la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $\int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds$ hacia $\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$, en I_δ .

Finalmente, de la definición dada por recurrencia en (3.6) y de la convergencia uniforme de $\int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds$ hacia $\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ en I_δ , podemos deducir que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_\delta,$$

por lo que la función $\varphi(t)$ satisface la forma integral del problema de Cauchy, definida en el Teorema 1.6, y es continua, así que $\varphi(t)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ pasando por $(t_0, \varphi(t_0)) = (t_0, x_0)$.

Debemos, en último lugar, probar que dicha solución es única. Para ello, vamos a suponer que existe otra solución. Sean, pues, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ soluciones del problema de valor inicial en un intervalo que contenga a t_0 . Entonces, podemos escribir dichas funciones en su forma integral correspondiente,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds, \quad t \in I_\delta.$$

Suponiendo que $t_0 \leq t$ (en el caso análogo, $t \leq t_0$, hacemos un simple intercambio en los límites de integración), tenemos que se cumple que

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \leq L \int_{t_0}^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Gronwall, descrita en el Lema 3.1, o más concretamente haciendo uso del segundo caso particular del corolario que le sucede, Corolario 3.2, aplicado a la función $f(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$ (en notación del enunciado del lema y corolario), podemos deducir que $\varphi(t) - \psi(t) = 0$, como queríamos demostrar. \square

Como se ha mencionado anteriormente, hay una cierta similitud entre los enunciados del Teorema 1.5 (Cauchy-Peano) y el Teorema 3.3 (Picard-Lindelöf), en el sentido de la existencia de solución. Debido a ello, en las hipótesis del Teorema 3.3, sabemos que podemos obtener la solución del problema de valor inicial de dos formas: la que usamos en la demostración del Teorema de Cauchy-Peano, es decir, a través de las poligonales de Euler y la que acabamos de usar previamente, las iteradas de Picard.

En cuanto a la convergencia de las poligonales de Euler hacia la solución, debemos recordar que no necesariamente converge toda la sucesión de poligonales. Hemos visto, en la demostración del Teorema 1.5, que podemos garantizar la convergencia de una subsucesión de poligonales, pero, según [4], se tiene que si a esto le sumamos la unicidad de solución del problema de Cauchy, puede comprobarse que sí resulta convergente toda la sucesión de poligonales, cuyo límite es la solución.

La mayor diferencia que encontramos entre seguir un método u otro es la rapidez de dicha convergencia, pues la de las poligonales de Euler es lenta, y también cabe destacar la dificultad a la hora de construir las iteradas a medida que se avanza, pues aparecen integrales más complicadas.

Veamos, a continuación, un ejemplo de aplicación del teorema previamente demostrado, donde usaremos el método de las iteradas. Este es análogo a uno recogido en [4].

Ejemplo 3.4. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

con función asociada $f(t, x) = -x$. Veamos, por el método de las iteradas, que existe solución y es única. Tenemos la función $f(t, x) = -x$, que es continua y, trivialmente, cumple la condición de Lipschitz con respecto a la variable x . Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.3, que garantiza la unicidad de solución del problema.

Construyamos, pues, la sucesión de iteradas de Picard correspondiente. Partimos de la función más sencilla posible, $u_0(t) = x_0$, que en este caso es $u_0(t) \equiv 1$. Hemos probado con anterioridad que las iteradas siguen la fórmula dada por la siguiente recurrencia

$$u_{j+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_j(s)) ds, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

de modo que, en nuestro caso, son de la forma

$$u_{j+1}(t) = 1 + \int_0^t f(s, u_j(s)) ds, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + \int_0^t -1 ds = 1 - t, \\ u_2(t) &= 1 + \int_0^t -(1 - s) ds = 1 - t + \frac{t^2}{2}, \\ u_3(t) &= 1 + \int_0^t -\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}, \\ &\vdots \\ u_j(t) &= 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^j t^j}{j!}. \end{aligned}$$

Lo suponemos, pues, cierto para j y comprobamos que también lo es para $j + 1$,

$$\begin{aligned} u_{j+1}(t) &= 1 + \int_0^t f(s, u_j(s)) ds = 1 + \int_0^t -\left(1 - s + \frac{s^2}{2!} - \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^j s^j}{j!}\right) ds \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{2 \cdot 1!} - \frac{t^3}{3 \cdot 2!} + \dots + \frac{(-1)^{j+1} t^{j+1}}{(j+1) \cdot j!} \\ &= 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{j+1} t^{j+1}}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

Entonces, hemos llegado a demostrar que las iteradas de Picard se corresponden con la expresión

$$u_j(t) = \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l t^l}{l!}.$$

Ahora bien, para obtener la solución del problema de Cauchy, podemos seguir por el camino de las iteradas o, como siempre, llegar a ella a través del método de separación de variables.

Si tomamos el límite de las iteradas de Picard generadas a partir de $u_0(t)$, ya llegamos a la solución,

$$\varphi(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^l}{l!} = e^{-t}.$$

Puede comprobarse que esa es la solución obtenida también por el método de separación de variables.

Para observar el comportamiento del método de las iteradas, hemos representado gráficamente las 7 primeras iteraciones, junto con la función inicial y la solución hacia la que convergen (véase la Figura 3.1).

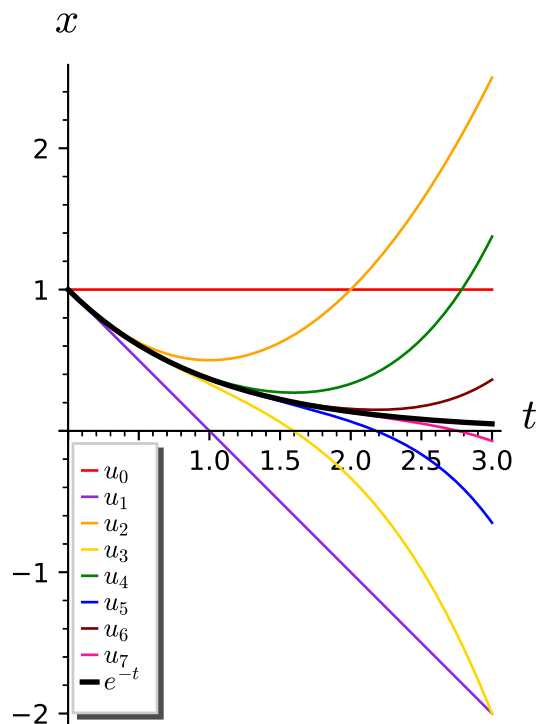


Figura 3.1: Representación gráfica de las primeras siete iteradas y la solución (en negro).

3.1. Convergencia de las aproximaciones sucesivas

Dedicaremos este capítulo al estudio de la convergencia de las iteradas, pues hemos visto que, en condiciones de existencia y unicidad de solución, la sucesión de iteradas de Picard converge a la única solución del problema de Cauchy correspondiente, definida en un cierto intervalo.

Debemos preguntarnos qué sucede si no estamos en las condiciones de unicidad vistas, específicamente si falla la hipótesis de lipschitzianidad de la función respecto de la segunda variable. Veremos que asumir simplemente la continuidad de la función (que nos garantiza, por el Teorema de Cauchy-Peano, la existencia de solución) no es suficiente para que la sucesión de iteradas sea convergente hacia una solución.

Vamos a ilustrar que, aún sin tener unicidad de solución para el problema de valor inicial, podremos emplear el método de las iteradas para aproximarnos a soluciones si tomamos como iterante inicial una función adecuada que se denominará aproximación cero. Esto nos resultará útil cuando no podamos calcular la solución de un problema mediante los métodos tradicionales (variables separadas, Bernouilli, ...) debido a la complejidad de la función dada, por lo que calcularíamos (quizás con la ayuda de un ordenador), las aproximaciones sucesivas.

Antes de entrar de lleno en el tema, vamos a enunciar y demostrar un teorema que nos será de utilidad más adelante cuando tengamos que construir la sucesión de iteradas. Podemos deducirlo a partir de los resultados de [3].

Teorema 3.5. Sean α y β dos funciones reales tales que $\alpha \leq \beta$, definidas en el intervalo $I = [0, a]$, $a > 0$, y cumpliendo que

$$(a) \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(I),$$

$$(b) \quad \alpha(0) = \beta(0) = 0.$$

Consideremos la región cerrada en \mathbb{R}^2 definida mediante

$$B = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in I = [0, a], \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}.$$

Sea $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en la región B y tal que

$$(c) \quad \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), t \in I.$$

Se tiene, entonces, que existe al menos una solución de la ecuación diferencial $x' = f(t, x)$, que denotaremos por $\varphi(t)$, tal que $\alpha(t) \leq \varphi(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in I$.

Demostración. Para empezar, vamos a extender el dominio de definición de la función $f(t, x)$ al conjunto $\tilde{B} = \{(t, x) : t \in I, x \in \mathbb{R}\}$, que será el dominio de definición de la función $\tilde{f}(t, x)$, definida como sigue,

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, x), & \text{si } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ f(t, \alpha(t)), & \text{si } x < \alpha(t), \\ f(t, \beta(t)), & \text{si } x > \beta(t). \end{cases}$$

Puesto que tenemos, por hipótesis, que la función f es continua, también \tilde{f} lo es y el Teorema de Cauchy-Peano (véase el Teorema 1.5) nos garantiza la existencia de solución para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \tilde{f}(t, x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Denotando dicha solución por $\varphi(t)$, la cual estaría definida en un intervalo $\tilde{I} = [0, \gamma)$, con $0 < \gamma \leq a$, nos basta con demostrar que se satisface la desigualdad $\alpha(t) \leq \varphi(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in \tilde{I}$, para probar el teorema (el propio razonamiento nos llevará a que \tilde{I} puede tomarse como I). Vamos a ver que $\alpha(t) \leq \varphi(t)$, para todo $t \in \tilde{I}$, siendo análoga la demostración de $\varphi \leq \beta$, por lo que ya no se realiza.

Para ello, definimos la función $g(t) = \alpha(t) - \varphi(t)$ que, obviamente, cumple $g(0) = \alpha(0) - \varphi(0) = 0$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $g(\delta) > 0$ para algún $\delta \in \tilde{I}$. Pero, entonces, se tiene que existe, al menos, un punto $\varepsilon \in \tilde{I} = [0, \gamma)$ satisfaciendo que $g(\varepsilon) = 0$ y $g(t) > 0$ para $\varepsilon < t \leq \delta \leq \gamma$.

Por nuestra suposición, tenemos que $\varphi(t) \leq \alpha(t)$ para $t \in [\varepsilon, \delta]$, por lo que coinciden los valores de $\tilde{f}(t, \varphi(t))$ y $\tilde{f}(t, \alpha(t))$. Gracias a esto, podemos hacer uso de la hipótesis (c) y obtenemos que $\varphi'(t) = \tilde{f}(t, \varphi(t)) = \tilde{f}(t, \alpha(t)) = f(t, \alpha(t)) \geq \alpha'(t)$, para $t \in [\varepsilon, \delta]$.

Por lo tanto, podemos deducir que $g'(t) \leq 0$ para $t \in [\varepsilon, \delta]$, implicando esto que la función que hemos definido, $g(t)$, es decreciente en $t \in [\varepsilon, \delta]$.

Esto supone una contradicción con el hecho de que la función cumple $g(\delta) > 0$, de modo que hemos llegado a un absurdo y, así, $\alpha(t) \leq \varphi(t)$ para todo $t \in \tilde{I}$. Nótese que, por la continuidad de \tilde{f} en $I \times \mathbb{R}$ y el hecho de que la solución se mantiene en la región B mientras esté definida, podremos considerar que su definición puede extenderse a todo I . \square

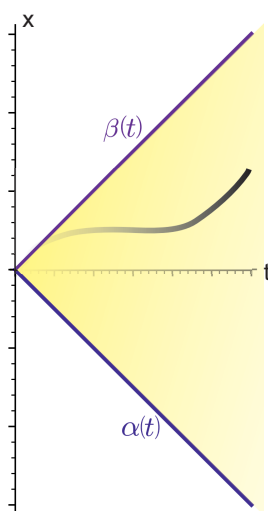


Figura 3.2: Posible representación gráfica de la región donde hallaremos soluciones.

Observamos con este teorema que las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, con $t \in I$, delimitarán una región donde podremos encontrar soluciones al problema. Podemos verlo ilustrado en la Figura 3.2, donde damos una posible representación gráfica de la región que podrían delimitar dichas funciones.

Vamos a suponer, a partir de ahora, que las funciones $f(t, x)$, $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5.

Definimos, a continuación, una aplicación entre funciones continuas de $I = [0, a]$, donde hemos extendido la definición de la función f a $I \times \mathbb{R}$, como se realizó en la demostración del Teorema 3.5. En lo que sigue, para simplificar la notación, se empleará f para denotar \tilde{f} , refiriéndonos a la extensión. Sea, pues,

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}(I) &\rightarrow \mathcal{C}(I) \\ x &\mapsto [T(x)](t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in I. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con la condición inicial $x(0) = 0$ serán los puntos fijos de la aplicación dada por (3.7).

Damos, ahora, la definición de una **aproximación cero**, que podemos encontrar en [3].

Definición 3.6. Diremos que la función $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una aproximación cero para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

si se cumple que $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia una solución del problema cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo general, una función $x \in \mathcal{C}(I)$ arbitraria no será una aproximación cero del problema, ni siquiera las funciones α y β descritas, a no ser que se exija alguna condición adicional a la función f . Por ejemplo, relacionando estos conceptos con la monotonía, si exigimos que la función $f(t, x)$ sea creciente, tendremos que las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, con $t \in I$, sí que son aproximaciones cero. Análogamente, podríamos exigir que la función f fuese decreciente para un intervalo del tipo $[-a, 0]$.

Seguidamente, damos un teorema donde se requiere la monotonía de la función y podremos comprobar que las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, con $t \in I$, sí son aproximaciones cero adecuadas.

De nuevo, podemos deducirlo a partir de los resultados de [3].

Teorema 3.7. *Supongamos que se cumplen todas las condiciones del Teorema 3.5 y que, además, f es monótona creciente en la variable x para $t \in [0, a]$ fijado.*

Entonces, podemos afirmar que α y β son aproximaciones cero adecuadas en I y sus iteradas convergerán, respectivamente, hacia una solución de $x' = f(t, x)$ pasando por $(0, 0)$.

Asimismo, para $i, j \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$T^j(\alpha) \leq T^{j+1}(\alpha) \leq T^{i+1}(\beta) \leq T^i(\beta) \text{ en } I.$$

Demostración. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} N : \mathcal{C}^1(I) &\rightarrow \mathcal{C}(I) \\ x &\mapsto [N(x)](t) = x'(t) - f(t, x(t)), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Veamos que, si $x \in \mathcal{C}^1(I)$ es tal que $x(0) = 0$ y $N(x) \geq 0$, entonces $x \geq T(x)$. En efecto, sea la función x con $x(0) = 0$ y $N(x) \geq 0$, entonces $x'(t) \geq f(t, x(t))$, $t \in I$. Integrando entre 0 y t , con $t \in I$, tenemos, por la monotonía de la integral y por la regla de Barrow, que

$$x(t) = x(t) - x(0) = \int_0^t x'(s) ds \geq \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Por lo tanto, $x(t) \geq [T(x)](t)$, $t \in I$, luego, $x \geq T(x)$. Análogamente, si $x \in \mathcal{C}^1(I)$ es tal que $x(0) = 0$ y $N(x) \leq 0$, entonces $x \leq T(x)$.

Por las hipótesis de α y β , tenemos que

$$\begin{aligned} [N(\beta)](t) &= \beta'(t) - f(t, \beta(t)) \geq 0, \\ [N(\alpha)](t) &= \alpha'(t) - f(t, \alpha(t)) \leq 0, \end{aligned}$$

para $t \in I$ y, además, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Por lo tanto, $\beta \geq T(\beta)$ y $\alpha \leq T(\alpha)$.

Por otro lado, T es una aplicación creciente por serlo f en la segunda variable. En efecto, si $x, y \in \mathcal{C}(I)$ son tales que $x \leq y$, entonces

$$[T(x)](t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds \leq \int_0^t f(s, y(s)) ds = [T(y)](t), \quad t \in I.$$

Entonces, por ser $\alpha \leq \beta$, $T(\alpha) \leq T(\beta)$, con lo que se tiene

$$\alpha \leq T(\alpha) \leq T(\beta) \leq \beta.$$

Aplicando T a la cadena de desigualdades anterior, obtenemos

$$T(\alpha) \leq T(T(\alpha)) \leq T(T(\beta)) \leq T(\beta).$$

Por recurrencia, tenemos que, para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} T^i(\alpha) &\leq T^{i+1}(\alpha), \\ T^{i+1}(\beta) &\leq T^i(\beta), \\ T^i(\alpha) &\leq T^i(\beta). \end{aligned}$$

Esto prueba que $\{T^n(\alpha)\}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{C}(I)$ y $\{T^n(\beta)\}$ una sucesión decreciente en $\mathcal{C}(I)$ y que ambas están uniformemente acotadas, de acuerdo con la Definición 1.7. Nos queda por ver que representa un conjunto equicontinuo de funciones, para que estemos en condiciones de aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli (véase Teorema 1.10).

Veámoslo para $\{T^n(\alpha)\}$. Si denominamos $u_0 = \alpha$, $u_1 = T(u_0) = T(\alpha)$, $u_2 = T(u_1)$, etc., es claro que $u_n = T(u_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $u_n(t) = \int_0^t f(s, u_{n-1}(s)) ds$, cumpliendo las desigualdades $\alpha(t) \leq u_n(t) \leq \beta(t)$, $t \in I$. Ahora bien, tenemos que la región delimitada por las funciones α y β y el intervalo $I = [0, a]$ forma un conjunto compacto B , donde la función f es continua. Entonces, existe $M > 0$ tal que $absf(t, x) \leq M$, para todo $(t, x) \in B$.

De este modo, $|u'_n(t)| = |f(t, u_{n-1}(t))| \leq M$, para todo $t \in I$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, probando así que $\{T^n(\alpha)\}$ es un conjunto equicontinuo de funciones.

Luego, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, $\{T^n(\alpha)\}$ converge uniformemente en I a una función $\varphi \in \mathcal{C}(I)$. Además, φ es un punto fijo de T , porque $\{T^n(\alpha)\} \rightarrow \varphi$ implica, por continuidad de T , que

$$\{T(T^n(x))\} = \{T^{n+1}(x)\} \rightarrow T\varphi.$$

Entonces, $T\varphi = \varphi$. Por tanto, φ es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Análogamente, obtendríamos el resultado para $\{T^n(\beta)\}$. □

Para visualizar mejor el resultado previo, vamos a dar un ejemplo donde se puede apreciar sencillamente que las iteradas correspondientes a las funciones α y β convergen hacia una solución pasando por la condición inicial indicada. Se trata de un ejemplo análogo a uno de los recogidos en el artículo [3].

Ejemplo 3.8. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada $f(t, x) = 2\sqrt{tx}$, siendo $t, x \geq 0$. Esta función es continua en el conjunto $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Tomamos

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & \text{si } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sabemos que la ecuación $x' = f(t, x)$ tiene al menos una solución pasando por $(0, 0)$. Por otra parte, es obvio que $x = 0$ es una solución, tanto para $x' = \tilde{f}(t, x)$ como para $x' = f(t, x)$.

Sin embargo, podrían existir más soluciones pasando por $(0, 0)$ con grafo perteneciente al primer cuadrante. Comprobemos que no se cumple la propiedad de Lipschitz (véase la Definición 1.7), pues no existe $L \geq 0$ que satisfaga la condición para ningún entorno conteniendo a $(0, 0)$. Supongamos que sí se cumple tal propiedad. Entonces, tomando $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ con $x_1 > 0$ y $x_2 = 0$, se sigue

$$L \geq \left| \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} \right| = \left| \frac{f(t, x_1) - f(t, 0)}{x_1 - 0} \right| = \left| \frac{2\sqrt{tx_1} - 0}{x_1} \right| = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{x_1}},$$

que no está acotada en ningún entorno de $(0, 0)$, pues, fijado $t > 0$, su límite a medida que x_1 se aproxima a 0 es ∞ , lo cual es una contradicción con la propiedad de Lipschitz.

Por lo tanto, no estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Picard-Lindelöf (véase el Teorema 3.3), de modo que no podemos garantizar la unicidad de solución.

Por el método de separación de variables (véase el Teorema 1.12), obtenemos que existen al menos dos soluciones posibles para el problema de Cauchy pasando por $(0, 0)$ definidas en \mathbb{R}^+ : la que nos ofrece dicho método, con expresión $\varphi(t) = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$ tomando $C = 0$ debido a la condición inicial, es decir, $\varphi(t) = \frac{4t^3}{9}$, $t \geq 0$, y la solución trivial. Podemos comprobarlo viendo que $\varphi'(t) = \frac{4t^2}{3}$, lo cual coincide con $f(t, \varphi(t)) = 2\sqrt{t\varphi(t)} = 2\sqrt{t\frac{4t^3}{9}} = \frac{4t^2}{3}$ para $t \geq 0$.

Vamos a ilustrar, ahora, que, tomando dos funciones pasando por el $(0, 0)$ de modo que cumplan las hipótesis del Teorema 3.7, sus iteradas convergerán hacia una solución. Nótese que existe una infinidad de soluciones para el problema pasando por $(0, 0)$.

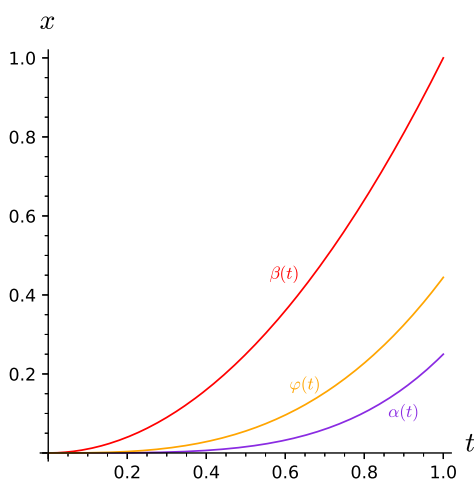


Figura 3.3: Representación gráfica de las funciones $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y $\varphi(t)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Sean $\alpha(t) = \frac{t^4}{4}$ y $\beta(t) = t^2$, $t \in [0, 1]$, que, como podemos ver en la Figura 3.3, delimitan la región donde se hallará una solución.

Empecemos viendo que la sucesión $\{T^n(\beta)\}$ converge a $\varphi(t) = \frac{4t^3}{9}$, $t \geq 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} u_0 &= \beta(t) = t^2, \\ u_1 &= T(u_0) = T(\beta) = \int_0^t 2\sqrt{s \cdot s^2} ds = 2 \int_0^t s^{\frac{3}{2}} ds = 2 \cdot \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}, \\ u_2 &= T(u_1) = T^2(\beta) = \int_0^t 2\sqrt{\frac{4}{5}s^{\frac{5}{2}} \cdot s} ds = \frac{4}{\sqrt{5}} \int_0^t s^{\frac{7}{4}} ds = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{t^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} = \frac{16}{11 \cdot \sqrt{5}}t^{\frac{11}{4}}, \\ u_3 &= T(u_2) = T^3(\beta) = \int_0^t 2\sqrt{\frac{16}{11 \cdot \sqrt{5}}s^{\frac{11}{4}} \cdot s} ds = \frac{2\sqrt{16}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{5}} \int_0^t s^{\frac{15}{8}} ds \\ &= \frac{8}{\sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{5}} \cdot \frac{t^{\frac{23}{8}}}{\frac{23}{8}} = \frac{64}{23 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{5}}t^{\frac{23}{8}}. \end{aligned}$$

Si denotamos $u_n = c_n \cdot t^{\beta_n}$, entonces,

$$u_{n+1} = \int_0^t 2\sqrt{s \cdot c_n \cdot s^{\beta_n}} ds = 2\sqrt{c_n} \int_0^t s^{\frac{\beta_n+1}{2}} ds = 2\sqrt{c_n} \cdot \frac{t^{\frac{\beta_n+1}{2}+1}}{\frac{\beta_n+1}{2}+1} = \frac{2\sqrt{c_n}}{\frac{\beta_n+3}{2}} \cdot t^{\frac{\beta_n+3}{2}} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n+3} \cdot t^{\frac{\beta_n+3}{2}},$$

con lo cual, el siguiente término sería $u_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n+3} \cdot t^{\frac{\beta_n+3}{2}} = c_{n+1} \cdot t^{\beta_{n+1}}$.

Por lo tanto, se deduce que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u_n = c_n \cdot t^{\beta_n}$, donde los exponentes β_n y los coeficientes c_n se calculan a través de las siguientes fórmulas de recurrencia

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + 3}{2} \quad \text{y} \quad c_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3},$$

respectivamente.

Comencemos con la recurrencia en los exponentes. Sabemos que $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + 3}{2}$ y que $\beta_0 = 2$ (pues $u_0 = t^2$), entonces,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 2, \\ \beta_1 &= \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}, \\ \beta_2 &= \frac{\frac{5}{2}+3}{2} = \frac{11}{4}, \\ \beta_3 &= \frac{\frac{11}{4}+3}{2} = \frac{23}{8}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Veamos que la sucesión $\{\beta_n\}$ correspondiente converge.

En primer lugar, probemos que es monótona creciente. En efecto, $\beta_0 = 2 \leq \frac{5}{2} = \beta_1$. Si $\beta_n \leq \beta_{n+1}$, es decir, $\beta_n \leq \frac{\beta_n + 3}{2}$, entonces, obviamente $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + 3}{2} \leq \frac{\beta_{n+1} + 3}{2} = \beta_{n+2}$.

Ahora, veamos que la sucesión $\{\beta_n\}$ está acotada superiormente. Probemos que $\beta_n \leq 3$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, $\beta_0 = 2 \leq 3$. Si $\beta_n \leq 3$, entonces $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + 3}{2} \leq \frac{3 + 3}{2} = 3$. Luego, $\beta_n \leq 3$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{\beta_n\}$ es convergente hacia $\beta \in [2, 3]$.

Pasando al límite en la expresión $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n + 3}{2}$, se obtiene $\beta = \frac{\beta + 3}{2}$, lo que implica que $\beta = 3$.

Por tanto, $\{\beta_n\} \rightarrow 3$.

Por otra parte, estudiemos la convergencia de la sucesión de coeficientes c_n . Sabemos que se cumple $c_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3}$ y que $c_0 = 1$, entonces,

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{4\sqrt{c_0}}{\beta_0 + 3} = \frac{4\sqrt{1}}{2 + 3} = \frac{4}{5}, \\ c_2 &= \frac{4\sqrt{c_1}}{\beta_1 + 3} = \frac{4\sqrt{\frac{4}{5}}}{\frac{5}{2} + 3} = \frac{4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{11}{2}} = \frac{16}{11 \cdot \sqrt{5}}, \\ c_3 &= \frac{4\sqrt{c_2}}{\beta_2 + 3} = \frac{4\sqrt{\frac{16}{11 \cdot \sqrt{5}}}}{\frac{11}{4} + 3} = \frac{64}{23 \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{5}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Veamos que se tiene que la sucesión correspondiente converge.

En primer lugar, probemos que es monótona decreciente. En efecto, $c_0 = 1 \geq \frac{4}{5} = c_1$. Si $c_n \geq c_{n+1}$, es decir, $c_n \geq \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3}$, entonces, de modo obvio, $c_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3} \geq \frac{4\sqrt{c_{n+1}}}{\beta_{n+1} + 3} = c_{n+2}$ (pues la sucesión $\{\beta_n\}$ ya vimos que era positiva y creciente).

Ahora, veamos que la sucesión $\{c_n\}$ está acotada inferiormente. Probemos que $c_n \geq \frac{4}{9}$, para todo

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, $c_0 = 1 \geq \frac{4}{9}$. Si $c_n \geq \frac{4}{9}$, entonces $c_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3} \geq \frac{4\sqrt{\frac{4}{9}}}{3 + 3} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{6} = \frac{4}{9}$.

Luego, $c_n \geq \frac{4}{9}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{c_n\}$ es convergente hacia $c \in \left[\frac{4}{9}, 1\right]$. Pasando al límite en la expresión

$c_{n+1} = \frac{4\sqrt{c_n}}{\beta_n + 3}$, se obtiene que $c = \frac{4\sqrt{c}}{\beta + 3} = \frac{4\sqrt{c}}{3 + 3}$, lo que implica que $c = \frac{4}{9}$. Por tanto, $\{c_n\} \rightarrow \frac{4}{9}$.

De esta manera, hemos probado que la sucesión $\{T^n(\beta)\}$ converge hacia $\varphi(t) = \frac{4t^3}{9}$, $t \geq 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Análogamente, podemos ver que la sucesión $\{T^m(\alpha)\}$ converge hacia $\varphi(t) = \frac{4t^3}{9}$, $t \geq 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned} v_0 &= \alpha(t) = \frac{t^4}{4}, \\ v_1 &= T(v_0) = T(\alpha) = \int_0^t 2\sqrt{s \cdot \frac{s^4}{4}} ds = 2 \int_0^t \frac{1}{2} \sqrt{s^5} ds = \int_0^t s^{\frac{5}{2}} ds = \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= T(v_1) = T^2(\alpha) = \int_0^t 2\sqrt{\frac{2}{7}s^{\frac{7}{2}} \cdot s} ds = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{7}} \int_0^t s^{\frac{9}{4}} ds = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot \sqrt{7}} t^{\frac{13}{4}}, \\
v_3 &= T(v_2) = T^3(\alpha) = \int_0^t 2\sqrt{\frac{8 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot \sqrt{7}} \cdot s^{\frac{13}{4}} \cdot s} ds = \frac{2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt[4]{7}} \int_0^t s^{\frac{17}{8}} ds \\
&= \frac{16 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}}{25\sqrt{13} \cdot \sqrt[4]{7}} t^{\frac{25}{8}}.
\end{aligned}$$

Si $v_n = a_n \cdot t^{\alpha_n}$, entonces, análogamente al caso anterior,

$$v_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3} \cdot t^{\frac{\alpha_n + 3}{2}},$$

por lo que se obtienen las mismas fórmulas de recurrencia para los exponentes y los coeficientes, es decir,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 3}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3},$$

respectivamente.

Comencemos con la recurrencia en los exponentes. Sabemos que $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 3}{2}$ y que $\alpha_0 = 4$ (pues $v_0 = \frac{t^4}{4}$), entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 4, \\
\alpha_1 &= \frac{4 + 3}{2} = \frac{7}{2}, \\
\alpha_2 &= \frac{\frac{7}{2} + 3}{2} = \frac{13}{4}, \\
\alpha_3 &= \frac{\frac{13}{4} + 3}{2} = \frac{25}{8}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Veamos que se tiene que la sucesión correspondiente converge.

En primer lugar, probemos que es monótona decreciente. En efecto, $\alpha_0 = 4 \geq \frac{7}{2} = \alpha_1$. Si

$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, es decir, $\alpha_n \geq \frac{\alpha_n + 3}{2}$, entonces, $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 3}{2} \geq \frac{\alpha_{n+1} + 3}{2} = \alpha_{n+2}$.

Ahora, veamos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ está acotada inferiormente. Probemos que $\alpha_n \geq 3$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, $\alpha_0 = 4 \geq 3$. Si $\alpha_n \geq 3$, entonces $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 3}{2} \geq \frac{3 + 3}{2} = 3$. Luego, $\alpha_n \geq 3$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{\alpha_n\}$ es convergente hacia un cierto $\alpha \in [3, 4]$. Como ya hemos visto para la sucesión $\{\beta_n\}$, también se cumple que $\{\alpha_n\} \rightarrow 3$.

Por otra parte, estudiemos la convergencia de la sucesión de coeficientes $\{a_n\}$. Sabemos que $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3}$ y que $a_0 = \frac{1}{4}$, entonces,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}, \\
a_1 &= \frac{4\sqrt{a_0}}{\alpha_0 + 3} = \frac{4\sqrt{\frac{1}{4}}}{4 + 3} = \frac{2}{7},
\end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{4\sqrt{a_1}}{\alpha_1 + 3} = \frac{4\sqrt{\frac{2}{7}}}{\frac{7}{2} + 3} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{\frac{13}{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot \sqrt{7}},$$

$$a_3 = \frac{4\sqrt{a_2}}{\alpha_2 + 3} = \frac{4\sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{13\sqrt{7}}}}{\frac{13}{4} + 3} = \frac{16 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{2}}{25 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt[4]{7}}, \text{ etc.}$$

Veamos que se tiene que la sucesión correspondiente converge.

En primer lugar, probemos que es monótona creciente. En efecto, $a_0 = \frac{1}{4} \leq \frac{2}{7} = a_1$. Si $a_n \leq a_{n+1}$, es decir, $a_n \leq \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3}$, entonces, $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3} \leq \frac{4\sqrt{a_{n+1}}}{\alpha_{n+1} + 3} = a_{n+2}$, de modo trivial.

Ahora, veamos que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente. Probemos que $a_n \leq \frac{4}{9}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, $a_0 = \frac{1}{4} \leq \frac{4}{9}$. Si $a_n \leq \frac{4}{9}$, entonces $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{\alpha_n + 3} \leq \frac{4\sqrt{\frac{4}{9}}}{3 + 3} = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{6} = \frac{4}{9}$. Luego, $a_n \leq \frac{4}{9}$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente con límite $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{9}\right]$. Procediendo análogamente, $\{a_n\} \rightarrow \frac{4}{9}$.

De esta manera, hemos probado que la sucesión $\{T^n(\alpha)\}$ converge hacia $\varphi(t) = \frac{4t^3}{9}$, $t \geq 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Para ilustrar el ejemplo, podemos ver en la Figura 3.4 algunas de las iteraciones obtenidas a partir de α y β y cómo se van aproximando hacia la solución dibujada en color rojo.

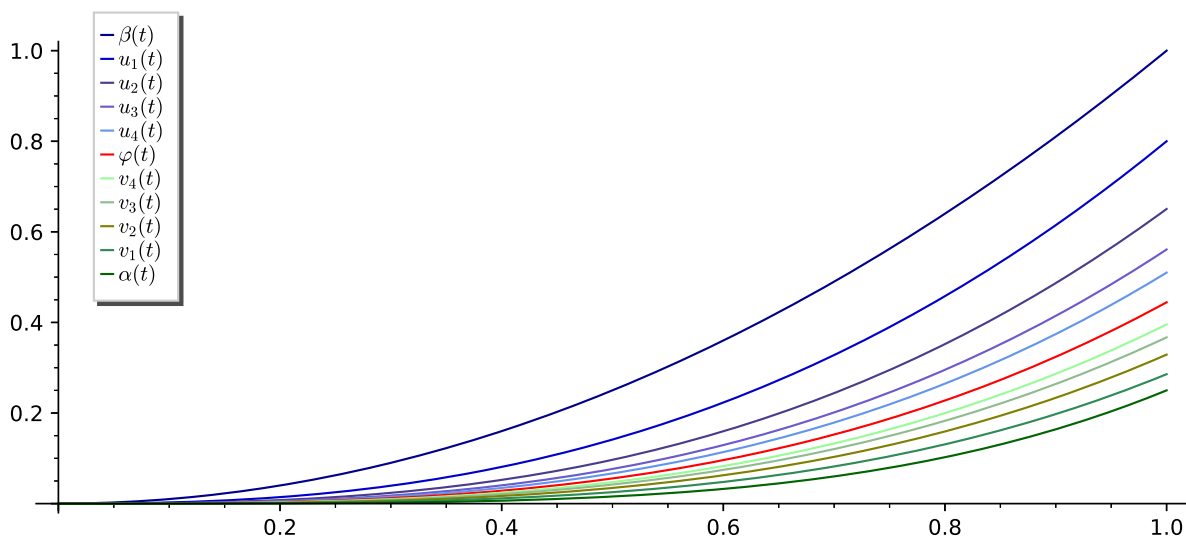


Figura 3.4: Representación gráfica de la solución $\varphi(t)$ y de cuatro iteraciones a partir de las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, en el intervalo $[0, 1]$.

Capítulo 4

Otros teoremas de unicidad

En este capítulo, trataremos la unicidad desde los puntos de vista de Peano y Osgood, en ese orden. En el Capítulo 2, se proporcionó un ejemplo (Ejemplo 2.6) para el cual no se verificaban las hipótesis del Teorema 1.22 (Teorema de Unicidad de Lipschitz), pero aún así se tenía la unicidad de la solución. Esto es debido a que la condición de lipschitzianidad con respecto a la segunda variable constituye una condición suficiente para la unicidad de solución para el problema de Cauchy, pero no necesaria.

4.1. Teorema de Unicidad de Peano

Empezaremos, pues, presentando el Teorema de Unicidad de Peano, en cuyo enunciado no se exige la lipschitzianidad de la función respecto de la segunda variable, pero sí se requieren otras hipótesis diferentes relacionadas con la monotonía.

Teorema 4.1 (Teorema de Unicidad de Peano [1]). *Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, donde $f(t, x)$ es continua en el conjunto*

$$\bar{S}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t \leq t_0 + a, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\},$$

con $a, b > 0$ y de modo que la función $f(t, x)$ es monótona decreciente en x . Entonces, se tiene que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene, a lo sumo, una solución en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$.

Demostración. Supongamos, pues, que tenemos dos soluciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ del problema de Cauchy con algún valor distinto en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, de modo que, pongamos $\varphi < \psi$ en algún punto de dicho intervalo.

Esto, unido a que $\varphi(t_0) = x_0 = \psi(t_0)$, implica la existencia de $t_1 \in [t_0, t_0 + a)$ tal que $\varphi(t) = \psi(t)$, para $t \in [t_0, t_1]$, y $\varphi(t) < \psi(t)$, para $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$, para un cierto $\varepsilon > 0$. El valor t_1 es el ínfimo del conjunto $B := \{t \geq t_0 : \varphi(t) < \psi(t)\}$, que es no vacío y está acotado inferiormente por t_0 .

Puesto que, por hipótesis, la función $f(t, x)$ es decreciente en x , se cumple que

$$f(t, \varphi(t)) \geq f(t, \psi(t)),$$

para todo $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$. Entonces, sabemos que, para $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$, $\varphi'(t) \geq \psi'(t)$.

De este modo, si tomamos la función $g(t) = \psi(t) - \varphi(t)$, se deduce que es continua y decreciente en $(t_1, t_1 + \varepsilon]$ y, además, como $g(t_1) = 0$, se tiene que $g(t) \leq 0$ en $[t_1, t_1 + \varepsilon]$. Por lo tanto, hemos llegado a demostrar que $\psi(t) \leq \varphi(t)$ para todo $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$, lo cual supone una contradicción debida a la suposición de que tenemos dos soluciones distintas para el problema descrito. \square

Una vez demostrado el Teorema 4.1 (Teorema de Unicidad de Peano), nos damos cuenta de su similitud con la demostración del Teorema 2.4 (Teorema con condición de Lipschitz respecto de la segunda variable por la derecha). De hecho, el Teorema de Unicidad de Peano no es más que un caso particular de dicho teorema tomando como constante de Lipschitz $L = 0$, lo cual reduce el enunciado del Teorema 2.4 a las condiciones proporcionadas por el Teorema de Unicidad de Peano.

Veamos un ejemplo donde tenemos una función que cumple las hipótesis del Teorema 4.1 (Teorema de Unicidad de Peano) y, por tanto, podemos asegurar la unicidad de solución del problema de Cauchy correspondiente.

Ejemplo 4.2. Puesto que hemos mencionado que el Teorema de Unicidad de Peano es un caso particular del Teorema 2.4, comprobaremos que, efectivamente, el mismo ejemplo (Ejemplo 2.5) que usamos para demostrar que dicho teorema garantizaba la unicidad de solución, nos sirve para aplicar el Teorema de Unicidad de Peano.

Sea, pues, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = te^{-3x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Consideremos, por ejemplo, $\bar{S}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2], x \in [-2, 4]\}$, un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 , como dominio de definición de f .

Claramente, la función $f(t, x)$ es continua en \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, en el conjunto \bar{S}_+ . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para

este problema. Si calculamos la derivada parcial de la función respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -3te^{-3x}.$$

Si fijamos $t \in [0, 2]$, observando la expresión de la derivada parcial de la función, podemos ver que $f(t, x)$ es una función decreciente en x . Estamos, así, en condiciones de aplicar el Teorema 4.1 (Teorema de Unicidad de Peano).

Este nos garantiza que, de existir solución pasando por el $(0, 0)$ para el problema de Cauchy presentado en el intervalo $[0, 2]$, esta será única. Sabemos cuál será la solución obtenida por el Ejemplo 2.5 del Capítulo 2.

Tras esta reflexión sobre el Teorema 4.1, puesto que tenemos como hipótesis que la función asociada a la ecuación diferencial ordinaria es decreciente en x , podríamos esperar un resultado análogo en el caso de que fuese una función creciente. No obstante, probamos a continuación con un contraejemplo, inspirado en uno de los propuestos en [1], que esto no se cumple.

Ejemplo 4.3. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada

$$f(t, x) := \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -2\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos que la función $f(t, x)$ es continua en el conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Si calculamos su derivada respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es evidente que $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ para todo (t, x) con $x \neq 0$. Esto implica monotonía de tipo creciente en la variable x para el conjunto $B = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}^+, x \neq 0\}$. Además, $f(t, x) > 0 = f(t, 0)$ para (t, x) con $x > 0$ y $f(t, x) < 0 = f(t, 0)$ para (t, x) con $x < 0$, con lo cual se deduce que f es monótona creciente en la variable x para cada $t \in \mathbb{R}^+$ fijo. De hecho, lo es de modo estricto. Por tanto, no estaríamos en hipótesis del Teorema de Unicidad de Peano, pero queremos verificar si con la función creciente en x también se cumpliría la unicidad de solución.

Buscamos la expresión de las soluciones mediante el método de separación de variables (véase el Teorema 1.12) y obtenemos que existen como mínimo dos soluciones posibles para el problema de Cauchy pasando por $(0, 0)$ en el intervalo $[0, \infty)$: la que nos ofrece dicho método, con expresión $\varphi(t) = (t+C)^2$ y con $C = 0$ debido a la condición inicial, es decir, $\varphi(t) = t^2$, y la solución trivial. De hecho, existe una infinidad de soluciones pasando por $(0, 0)$, pues las funciones del tipo $\varphi_{t_0}(t) = (t - t_0)^2$ se aproximan al punto $(t_0, 0)$ de modo que la pendiente tiende a 0, por lo que es posible empatar su expresión con la correspondiente a la solución trivial. Podemos deducirlo viendo que $\varphi'_{t_0}(t) = 2(t - t_0)$, lo cual coincide con

$$f(t, \varphi_{t_0}(t)) = 2\sqrt{\varphi_{t_0}(t)} = 2\sqrt{(t - t_0)^2} = 2|t - t_0|,$$

para $t \geq t_0$. Análogamente, podríamos trabajar en el semiplano inferior.

Como hemos comentado que el Teorema de Unicidad de Peano es un caso particular del Teorema 2.4, cuyas hipótesis exigen la condición de Lipschitz por la derecha con respecto a la variable x , debemos destacar que no es necesario que se cumpla el carácter lipschitziano para que dicho teorema se pueda aplicar.

Vamos, pues, a proporcionar un ejemplo, análogo a uno recogido en [1], donde la función asociada no es lipschitziana respecto de la segunda variable pero, aún así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.1.

Ejemplo 4.4. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada

$$f(t, x) := \begin{cases} -2\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ 2\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Tenemos que la función $f(t, x)$ es continua en el conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Comprobemos que no se cumple la propiedad de Lipschitz (véase la Definición 1.7), pues no existe $L \geq 0$ que satisfaga la condición para ningún entorno conteniendo $(0, 0)$. Supongamos que sí se cumple tal propiedad. Entonces, tomando $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ con $x_1 \geq 0$ y $x_2 = 0$, se sigue

$$L \geq \left| \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} \right| = \left| \frac{f(t, x_1) - f(t, 0)}{x_1 - 0} \right| = \left| \frac{-2\sqrt{x_1} - 0}{x_1} \right| = \frac{2}{\sqrt{x_1}},$$

que no está acotada en ningún entorno de $(0, 0)$, pues su límite a medida que x_1 se aproxima a 0 es ∞ , lo cual es una contradicción con la propiedad de Lipschitz.

Sin embargo, si calculamos su derivada parcial respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \frac{-1}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por tanto, en cuanto a la monotonía de f en la segunda variable, si observamos la derivada parcial anterior, podemos ver que, fijado $t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ para (t, x) con $t \in \mathbb{R}^+$ y $x \neq 0$, lo que justifica que f es monótona decreciente en la variable x en $B = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}^+, x \neq 0\}$.

Además, $f(t, x) < f(t, 0) = 0$ para (t, x) con $t \in \mathbb{R}^+$, $x > 0$ y $f(t, x) > f(t, 0) = 0$ para (t, x) con $t \in \mathbb{R}^+$, $x < 0$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en x para $t \in \mathbb{R}^+$ fijado.

Estamos en condiciones, pues, de aplicar el Teorema de Unicidad de Peano (Teorema 4.1) y tenemos garantizada la unicidad de solución pasando por $(0, 0)$, que será la solución trivial.

En este caso, si utilizásemos el método de separación de variables para obtener otra solución posible para el problema de Cauchy descrito en el intervalo $[0, \infty)$, resultaría la expresión siguiente $x(t) = (-t + C)^2$, con $C = 0$ debido a la condición inicial, es decir, $x(t) = (-t)^2 = t^2$.

Pero, como $x'(t) = 2t$ no coincide con $f(t, x(t)) = -2\sqrt{t^2} = -2|t|$ en el intervalo $[0, \infty)$, entonces únicamente tenemos la solución trivial como solución del problema de Cauchy pasando por $(0, 0)$.

Por tanto, hemos deducido la unicidad de solución mediante el Teorema de Unicidad de Peano, para un problema de Cauchy en el cual la función asociada no verifica la propiedad de Lipschitz.

Podemos reformular el Teorema 4.1 (Teorema de Unicidad de Peano) considerando el rectángulo hacia la izquierda del intervalo, es decir, estudiando la unicidad en el intervalo $[t_0 - a, t_0]$ y estableciendo como hipótesis que la función asociada a la ecuación diferencial ordinaria sea creciente.

Teorema 4.5. Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, donde $f(t, x)$ es continua en el conjunto

$$\bar{S}_- = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\},$$

con $a, b > 0$ y de modo que la función $f(t, x)$ es monótona creciente en x . Entonces, se tiene que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene, a lo sumo, una solución definida en el intervalo $[t_0 - a, t_0]$.

La prueba de este teorema sería análoga a la demostración para el Teorema de Unicidad de Peano, por lo que no se incluye.

Pongamos en práctica el Teorema 4.5, mostrando un ejemplo donde podemos aplicarlo.

Ejemplo 4.6. Sea, de nuevo, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = te^{-3x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Ahora, consideremos, por ejemplo, $\bar{S}_- = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-2, 0], x \in [-2, 4]\}$, un rectángulo cerrado en \mathbb{R}^2 , como dominio de definición de f .

Claramente, la función $f(t, x)$ es continua en \mathbb{R}^2 y, por lo tanto, en el conjunto \bar{S}_- . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Si calculamos la derivada parcial de la función respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -3te^{-3x}.$$

Si fijamos $t \in [-2, 0]$, observando la derivada parcial de la función, podemos ver que $f(t, x)$ es una función creciente en x . Estamos, pues, en condiciones de aplicar el Teorema 4.5 (Teorema de Unicidad de Peano “por la izquierda”). Este nos garantiza que existe, a lo sumo, una solución para el problema de Cauchy presentado, para la condición inicial señalada, en el intervalo $[-2, 0]$. Como hemos visto anteriormente en el Ejemplo 2.5, esta solución viene dada por la expresión $\varphi(t) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3t^2}{2} + 1\right)$.

Llegados a este punto, podría resultar útil un teorema cuyas hipótesis sean las pedidas en los teoremas anteriores. Es decir, un teorema que recoja ambos resultados previos, el Teorema de Unicidad de Peano (Teorema 4.1) y su análogo por la izquierda (Teorema 4.5). Podemos encontrar, también, dicho teorema en [1].

Teorema 4.7. Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y una ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, donde $f(t, x)$ es continua en el rectángulo cerrado

$$\bar{S} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \quad a, b > 0,$$

y de modo que cumple lo siguiente,

- (1) La función $f(t, x)$ es creciente en x , para cada $t \in [t_0 - a, t_0]$ fijado y tomando como dominio de definición \bar{S}_- .
- (2) La función $f(t, x)$ es decreciente en x , para cada $t \in [t_0, t_0 + a]$ fijado y tomando como dominio de definición \bar{S}_+ .

Entonces, se tiene que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene, a lo sumo, una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Ejemplo 4.8. En los Ejemplos 4.2 y 4.6, se ha considerado el mismo problema de valor inicial pues, dados los dos rectángulos que elegimos en cada uno, \bar{S}_- y \bar{S}_+ , podemos tomar el rectángulo cerrado formado por su unión, es decir, $\bar{S} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq t \leq 2, -2 \leq x \leq 4\}$. De esta manera, como ya hemos visto, se cumplen las hipótesis del Teorema 4.7 y, por tanto, tenemos como única solución pasando por el $(0, 0)$ la allí indicada.

Recordemos que, en el Teorema de Unicidad de Lipschitz (Teorema 1.22), teníamos que la propiedad de Lipschitz, dada por la Definición 1.15, nos garantizaba la unicidad de solución siendo, por tanto, condición suficiente pero no necesaria.

Del mismo modo, las hipótesis del Teorema de Unicidad de Peano (Teorema 4.1) nos ofrecen una condición suficiente, pero que tampoco va a ser necesaria. Veamos un ejemplo donde, a pesar de no cumplirse las hipótesis del Teorema 4.1, existe solución única para el problema de Cauchy correspondiente.

Ejemplo 4.9. Consideramos el problema dado en el Ejemplo 2.6 del Capítulo 2, pues también nos sirve para nuestro propósito actual, es decir, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada $f(t, x) := 1 + x^{\frac{2}{5}}$ y también consideramos, por ejemplo, el rectángulo cerrado $\bar{S}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2], x \in [-2, 4]\}$ como dominio de definición de f .

Recordemos que la función $f(t, x)$ es continua en el conjunto \mathbb{R}^2 y, en particular, lo es en \bar{S}_+ . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Si calculamos la derivada parcial de la función f respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, \quad x \neq 0.$$

Nótese que $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) > 0$ para $x > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) < 0$ para $x < 0$. Además, $f(t, x) > 1 = f(t, 0)$ para (t, x) con $x \neq 0$. Fijado $t \in [0, 2]$ y utilizando esta información, podemos deducir que $f(t, x)$ es una función no monótona en la variable x en \bar{S}_+ . Por lo tanto, no estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.1.

Sin embargo, como ya se justificó en el Ejemplo 2.6, mediante el método de separación de variables (véase el Teorema 1.12), obtenemos las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria, con expresión

$$\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - 5x^{\frac{1}{5}} + 5 \arctan(x^{\frac{1}{5}}) = t + C,$$

siendo C la constante de integración. Teniendo en cuenta la condición inicial impuesta, deducimos que la única solución del problema de Cauchy pasando por $(0, 0)$ se obtiene tomando $C = 0$.

4.2. Teorema de Unicidad de Osgood

En esta sección, trataremos la unicidad de solución para el problema de Cauchy según Osgood. Podremos observar que el teorema debido a Osgood no es más que una generalización del Teorema de Unicidad de Lipschitz (Teorema 1.22).

Enunciamos y demostramos, a continuación, un lema que nos presenta una función que será fundamental para el Teorema de Unicidad de Osgood.

Lema 4.10. *Sea $u(z)$ una función continua y monótona creciente en el intervalo $[0, \infty)$ satisfaciendo que $u(0) = 0$, $u(z)$ es positiva para todo $z > 0$ y, además,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{u(z)} = \infty. \quad (4.1)$$

Sea, también, $g(x)$ una función continua y no negativa en el intervalo $[0, \delta]$, siendo $\delta > 0$.

Entonces, si se satisface que

$$g(x) \leq \int_0^x u(g(t)) dt, \quad \text{para } 0 < x \leq \delta, \quad (4.2)$$

se tiene que $g(x) = 0$ para todo $x \in [0, \delta]$.

Demostración. En primer lugar, vamos a definir en $[0, \delta]$ una función auxiliar $G(x)$ dada por $G(x) := \max_{t \in [0, x]} g(t)$ y supongamos que G es positiva en $(0, \delta]$. Debido a esta definición, tenemos que, para cualquier $x \in [0, \delta]$, se cumple que $g(x) \leq G(x)$. Ahora bien, por continuidad de g en $[0, \delta]$, para cada $x \in (0, \delta]$ fijado arbitrariamente, se tiene que existe $x_0 \in [0, x]$ tal que se cumple $g(x_0) = G(x)$.

Veamos, ahora, si esta nueva función satisface la desigualdad (4.2). En efecto, para cada $x \in (0, \delta]$,

$$G(x) = g(x_0) \leq \int_0^{x_0} u(g(t)) dt \leq \int_0^x u(G(t)) dt.$$

Hemos obtenido, pues, que la función que definimos, $G(x)$, satisface la desigualdad (4.2) al igual que la función $g(x)$.

A continuación, definimos la función $\bar{G}(x) := \int_0^x u(G(t)) dt$, que cumple lo siguiente: $\bar{G}(0) = 0$, $G(x) \leq \bar{G}(x)$ y $\bar{G}'(x) = u(G(x)) \leq u(\bar{G}(x))$. Por lo tanto, para todo $\alpha \in (0, \delta)$, se cumple que

$$\int_{\alpha}^{\delta} \frac{\bar{G}'(x)}{u(\bar{G}(x))} dx \leq \delta - \alpha < \delta.$$

Haciendo el cambio $s = \bar{G}(x)$, tenemos que

$$\int_{\alpha}^{\delta} \frac{\bar{G}'(x)}{u(\bar{G}(x))} dx = \int_{\varepsilon}^{\beta} \frac{ds}{u(s)}, \quad \text{con } \bar{G}(\alpha) = \varepsilon, \bar{G}(\delta) = \beta > 0.$$

No obstante, si tenemos en cuenta la hipótesis dada por la condición (4.1), el límite de la integral anterior cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ es igual a infinito.

Hemos llegado a esta contradicción por haber supuesto que G es una función positiva. Es decir, se debe cumplir $G(x) = 0$ para todo $x \in (0, \delta]$ siendo también, consecuentemente, $g(x) = 0$, para todo $x \in (0, \delta]$ y, por continuidad, en $[0, \delta]$. \square

Procedemos, pues, a enunciar el Teorema de Unicidad de Osgood, donde se nos presentará una nueva condición, denominada **condición de Osgood**.

Teorema 4.11 (Teorema de Unicidad de Osgood [1]). *Sean A un abierto de \mathbb{R}^2 y $x' = f(t, x)$ una ecuación diferencial ordinaria con función asociada $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, donde $f(t, x)$ es continua en el rectángulo cerrado*

$$\bar{S} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

con $a, b > 0$ y supongamos que, para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in \bar{S}$, se satisface la **condición de Osgood**, siendo esta

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq u(|x_1 - x_2|), \quad (4.3)$$

donde u es una función que cumple las hipótesis del Lema 4.10, es decir, $u(0) = 0$, $u(z)$ es positiva para todo $z > 0$ y, además,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{u(z)} = \infty. \quad (4.4)$$

Entonces, se tiene que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tiene, a lo sumo, una solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Demostración. Probaremos el teorema para el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, siendo análoga su demostración en $[t_0 - a, t_0]$.

Supongamos, pues, que tenemos dos soluciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ del problema de Cauchy descrito con algún valor distinto en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$. Entonces,

$$\varphi(t_0 + t) - \psi(t_0 + t) = \int_{t_0}^{t_0+t} [\varphi'(s) - \psi'(s)] ds = \int_{t_0}^{t_0+t} [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds,$$

para $t \in [0, a]$. Si aplicamos la condición de Osgood, dada por la desigualdad (4.3), tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(t_0 + t) - \psi(t_0 + t)| &\leq \int_{t_0}^{t_0+t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+t} u(|\varphi(s) - \psi(s)|) ds \\ &= \int_0^t u(|\varphi(z + t_0) - \psi(z + t_0)|) dz. \end{aligned}$$

A continuación, tomamos la función $g(t) = |\varphi(t_0 + t) - \psi(t_0 + t)|$, para $t \in [0, a]$. Esta función resulta ser continua y no negativa y, además, satisface la desigualdad (4.2). Por lo tanto, el Lema 4.10 nos garantiza que esta función será $g(t) = 0$, $t \in [0, a]$, por lo que hemos llegado a que $\varphi(t) = \psi(t)$ en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, como queríamos ver. \square

Pongamos ahora un ejemplo de problema de Cauchy para el cual es posible garantizar la unicidad de solución mediante el Teorema de Unicidad de Osgood.

Ejemplo 4.12. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada $f(t, x) := 3x$. Obviamente, la función $f(t, x)$ es continua en todo \mathbb{R}^2 . Por el Teorema de Cauchy-Peano (Teorema 1.5), tenemos garantizada la existencia de solución para este problema. Sea, pues, la función $u(z) = 3z$, que es continua en el intervalo $[0, \infty)$ y satisface que $u(0) = 0$, es positiva para todo $z > 0$ y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{u(z)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{3z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Entonces, esta función está en las hipótesis del Lema 4.10. Veamos si, para todo par de puntos $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se cumple la condición de Osgood,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |3x_1 - 3x_2| = u(|x_1 - x_2|).$$

Por tanto, la condición dada por la desigualdad (4.3) se verifica.

Finalmente, estamos en las hipótesis del Teorema de Unicidad de Osgood (Teorema 4.11), por lo que tenemos garantizada la unicidad de solución para la ecuación pasando por el $(0, 0)$, que será la solución trivial.

Cabe destacar, que este teorema incluye una condición que generaliza la propiedad de Lipschitz, dada por la Definición 1.7. De hecho, en este Ejemplo 4.12, podemos observar cómo la condición de Osgood utilizada se reduce a una condición de Lipschitz para $L = 3$.

Exponemos, ahora, un ejemplo para el cual la función asociada a la ecuación diferencial ordinaria en el problema de Cauchy no cumple las hipótesis requeridas para aplicar los Teoremas de Unicidad de Lipschitz ni de Peano, pero sí que podremos garantizar la unicidad de solución mediante el resultado debido a Osgood.

Ejemplo 4.13. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

con función asociada

$$f(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ -x \ln(3x) & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{3e}. \end{cases}$$

Veamos, primero, si podemos aplicar el Teorema de Unicidad de Lipschitz (véase el Teorema 1.22). Sea el rectángulo cerrado $\bar{S} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1, 1], x \in \left[0, \frac{1}{3e}\right] \right\}$.

Claramente, la función es continua si nos restringimos al conjunto $[-1, 1] \times \left(0, \frac{1}{3e}\right]$. Si estudiamos los puntos de la forma $(t_0, 0)$ por separado, tenemos que

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (t_0,0)} f(t, x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln(3x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x)}{\frac{-1}{x}} = 0,$$

donde hemos usado la regla de L'Hôpital, obteniendo así que $f(t, x)$ es continua en todo el rectángulo \bar{S} .

Si calculamos la derivada parcial de f respecto de la segunda variable, resulta la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\ln(3x) - 1, \quad \text{para } x > 0,$$

que no está acotada, pues su límite cuando $x \rightarrow 0^+$ es $+\infty$. Aplicando el Lema 1.20, podemos afirmar que la función f no es lipschitziana con respecto a x en el conjunto \bar{S} .

Si fijamos $t \in [-1, 1]$, observando la derivada parcial de la función, podemos comprobar que $f(t, x)$ es una función estrictamente creciente en la variable $x \in \left(0, \frac{1}{3e}\right]$, pues,

$$\begin{aligned} x \in \left(0, \frac{1}{3e}\right] &\implies 3x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \implies \ln(3x) \in (-\infty, -1) \\ &\implies -\ln(3x) \in (1, +\infty) \implies -\ln(3x) - 1 \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

No estamos, entonces, en condiciones de aplicar el Teorema de Unicidad de Peano. Intentemos, pues, probar la unicidad de solución mediante el Teorema de Unicidad de Osgood.

Vamos, en primer lugar, a definir la función u que necesitamos cumpliendo las hipótesis del Lema 4.10,

$$u(z) := \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0, \\ -z \ln(3z) & \text{si } 0 < z \leq \frac{1}{3e}, \\ \frac{1}{3e} & \text{si } z > \frac{1}{3e}. \end{cases}$$

Tal y como la hemos definido, la función $u(z)$ es continua y monótona creciente en el intervalo $[0, \infty)$, y satisface que $u(0) = 0$, $u(z) > 0$ para todo $z > 0$ y, como veremos a continuación,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{u(z)} = \infty.$$

En efecto, se tiene que,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{u(z)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3e}} \frac{dz}{u(z)} + \int_{\frac{1}{3e}}^1 \frac{dz}{u(z)} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3e}} \frac{1}{-z \ln(3z)} dz + \int_{\frac{1}{3e}}^1 3e dz \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3e}} \frac{1}{-z \ln(3z)} dz + 3e \left(1 - \frac{1}{3e} \right) \right). \end{aligned}$$

Se probará que la primera de las expresiones tiene límite infinito cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Estudiamos, pues, la última integral en la expresión anterior. Tomamos el cambio de variable $y = \ln(3z)$, que implica que $dy = \frac{3}{z} dz$, con lo que,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3e}} \frac{1}{-z \ln(3z)} dz &= \int_{\ln(3\varepsilon)}^{-1} \frac{z}{-zy} dy = \int_{\ln(3\varepsilon)}^{-1} -\frac{1}{y} dy = -\ln(|y|) \Big|_{\ln(3\varepsilon)}^{-1} \\ &= -(\ln(|-1|) - \ln(|\ln(3\varepsilon)|)) = \ln(|\ln(3\varepsilon)|). \end{aligned}$$

Ahora bien, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que $3\varepsilon < 1$, implicando a su vez que $\ln(3\varepsilon) < 0$. Procedemos, pues, de la siguiente manera,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{3e}} \frac{1}{-z \ln(3z)} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(|\ln(3\varepsilon)|) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(-\ln(3\varepsilon)) = \infty.$$

De este modo, esta función cumple las hipótesis exigidas por el Lema 4.10 y nos sirve para aplicar el Teorema de Unicidad de Osgood (Teorema 4.11).

Nos queda por comprobar si la función $f(t, x)$ cumple la condición de Osgood, dada por la desigualdad (4.3), es decir, si para todo $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq u(|x_1 - x_2|).$$

Para llegar a esa desigualdad, vamos a estudiar el signo de la derivada. Para ello, calculamos la derivada parcial segunda de f con respecto a x dos veces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

pudiendo observar que es negativa para $x > 0$. Es decir, para cada $t \in [-1, 1]$ fijo, f es cóncava y, por tanto, podemos escribir lo siguiente,

$$\frac{f(t, x_1 - x_2) - f(t, 0)}{x_1 - x_2} \geq \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2}, \quad 0 < x_1 - x_2 < x_2 < x_1 \leq \frac{1}{3e}, \quad (4.5)$$

donde, sin pérdida de generalidad, se ha supuesto que $x_1 > x_2$ son suficientemente próximos el uno al otro. Otro modo de justificarlo es que, para cada $t \in [-1, 1]$ fijo, como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ para $x > 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot)$ es estrictamente decreciente, de modo que, aplicando el Teorema del Valor Medio (véase el Teorema 1.23), la desigualdad (4.5) se reduciría a $\frac{\partial f}{\partial x}(t, c_{2,t}) \geq \frac{\partial f}{\partial x}(t, c_{1,t})$ para un cierto $c_{1,t} \in (x_2, x_1)$ y un cierto $c_{2,t} \in (0, x_1 - x_2)$, pero esto se cumple pues $c_{2,t} < c_{1,t}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot)$ es estrictamente decreciente.

Si sustituimos la función en la desigualdad (4.5), obtenemos que

$$-(x_1 - x_2) \ln(3(x_1 - x_2)) \geq (-x_1 \ln(3x_1) + x_2 \ln(3x_2)).$$

Gracias a estos razonamientos, podemos llegar a la desigualdad (4.3), pues

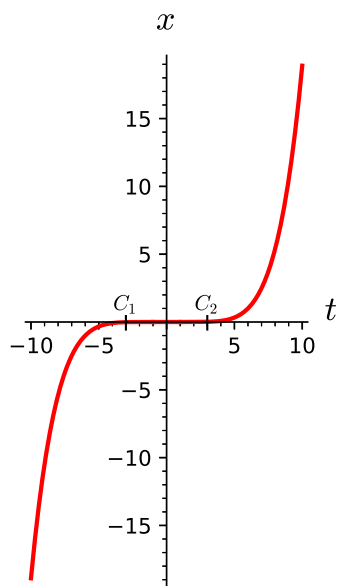
$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |-x_1 \ln(3x_1) + x_2 \ln(3x_2)| \\ &= -x_1 \ln(3x_1) + x_2 \ln(3x_2) \\ &\leq -(x_1 - x_2) \ln(3(x_1 - x_2)) \\ &= -|x_1 - x_2| \ln(3|x_1 - x_2|) \\ &= u(|x_1 - x_2|). \end{aligned}$$

Hemos probado, finalmente, que se satisfacen las hipótesis del Teorema 4.11 (Teorema de Unicidad de Osgood), por lo que tenemos garantizada la existencia de, a lo sumo, una solución para el problema de Cauchy descrito en el intervalo $\left[0, \frac{1}{3e}\right]$.

Anexo I

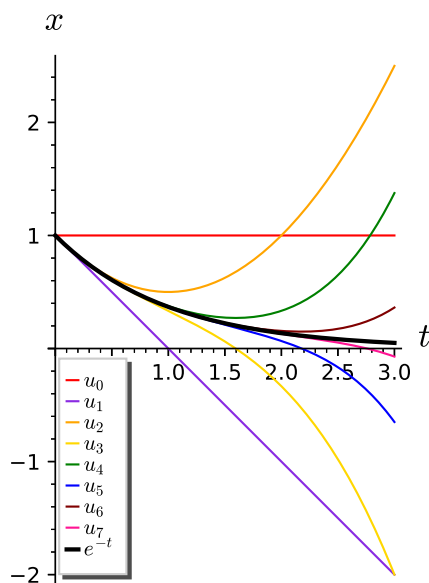
Gráficas en Sagemath

A lo largo del trabajo, para visualizar mejor ciertos ejemplos, hemos adjuntado representaciones gráficas. Estas han sido generadas a partir del programa **Sagemath** a través de la herramienta *online*, **Cocalc**. A continuación, veremos las gráficas y, seguidamente, el código que las genera, de cada una de las representaciones gráficas incluidas en el trabajo.



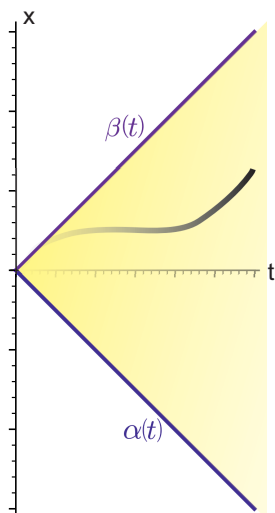
```
p1=plot(((x-1)^5)/(5^5),1,10,color='red',thickness='2',axes_labels=['$t$', '$x$'], aspect_ratio=1)
p2=plot(((x+1)^5)/(5^5),-10,-1,color='red',thickness='2',axes_labels=['$t$', '$x$'], aspect_ratio=1)
p3=plot(0,-1,1,color='red',thickness='2',axes_labels=['$t$', '$x$'], aspect_ratio=1)
```

```
p=p1+p2+p3+text('$C_2$',(3, 1.2),color='black',fontsize=10)+ text('I',(3,
-0.2), color='black',fontsize=10)+ text('$C_1$',(-3, 1.2),color='black',
fontsize=10)+ text('I',(-3,-0.2),color='black',fontsize=10)
```

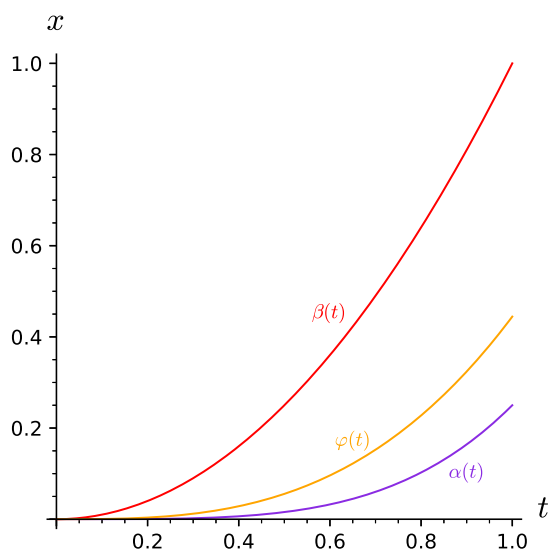


```
p1=plot(1, 0, 3,color='red',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_
ratio=1,legend_label='$u_0(t)$')
p2=plot(1-x, 0, 3,color='blueviolet',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],
aspect_ratio=1,legend_label='$u_1(t)$')
p3=plot(1-x+(x^2)/2, 0, 3,color='orange',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'
],aspect_ratio=1,legend_label='$u_2(t)$')
p4=plot(1-x+(x^2)/2-(x^3)/6, 0, 3,color='gold',thickness='1', axes_labels=['$t$',
'$x$'],aspect_ratio=1,legend_label='$u_3(t)$')
p5=plot(1-x+(x^2)/2-(x^3)/6+(x^4)/24, 0, 3,color='green',thickness='1',
axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1,legend_label='$u_4(t)$')
p6=plot(1-x+(x^2)/2-(x^3)/6+(x^4)/24-(x^5)/120, 0, 3,color='blue',thickness='1',
axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1,legend_label='$u_5(t)$')
p7=plot(1-x+(x^2)/2-(x^3)/6+(x^4)/24-(x^5)/120+(x^6)/720, 0, 3,color='maroon',
thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1,legend_label='$u_6(t
)$')
p8=plot(1-x+(x^2)/2-(x^3)/6+(x^4)/24-(x^5)/120+(x^6)/720-(x^7)/5040, 0, 3,color=
'deeppink',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1,legend_
label='$u_7$')
p9=plot(exp(-x), 0, 3,color='black',thickness='2', axes_labels=['$t$', '$x$'],
aspect_ratio=1,legend_label='$e^{-t}$')
p=(p1+p2+p3+p4+p5+p6+p7+p8+p9).show(ticks=1)
```

En la siguiente gráfica, hemos añadido manualmente el sombreado que indica la “región” y una solución.

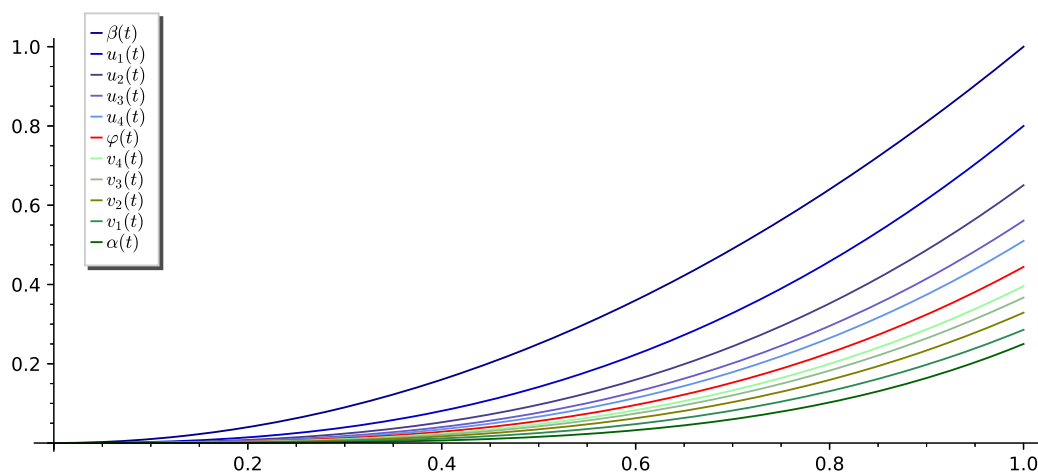


```
p1=plot(-x, 0, 3,color='blue',thickness='2', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1)
p2=plot(x, 0, 3,color='blueviolet',thickness='2', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1)
p=(p1+p2+text('$\beta(t)$',(1.7, 2.1), fontsize=10,color='blueviolet')+ text('$\alpha(t)$',(1.7, -2.1), fontsize=10,color='blue')).show(ticks=1)
```



```
p1=plot(x^2, 0, 1,color='red',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1)
p2=plot(x^4/4, 0, 1,color='blueviolet',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],aspect_ratio=1)
```

```
p3=plot(4*x^3/9, 0, 1,color='orange',thickness='1', axes_labels=['$t$', '$x$'],
aspect_ratio=1)
p=p1+p2+p3+text('$\beta(t)$',(0.6, 0.45), fontsize=10,color='red')+ text('$\alpha(t)$',
(0.9, 0.1), fontsize=10,color='blueviolet')+ text('$\varphi(t)$',
(0.65, 0.17), fontsize=10,color='orange')
```



```
var('t');
p=Graphics()
u0=t^2;
p+=plot(u0,(t,0,1),color='darkblue',legend_label='$\beta(t)$')
u1=integrate(2*sqrt(t*u0),t)
p+=plot(u1,(t,0,1),color='mediumblue',legend_label='$u_1(t)$')
u2=integrate(2*sqrt(t*u1),t)
p+=plot(u2,(t,0,1),color='darkslateblue',legend_label='$u_2(t)$')
u3=integrate(2*sqrt(t*u2),t)
p+=plot(u3,(t,0,1),color='slateblue',legend_label='$u_3(t)$')
u4=integrate(2*sqrt(t*u3),t)
p+=plot(u4,(t,0,1),color='cornflowerblue',legend_label='$u_4(t)$')
v0=(t^4)/4;
v1=integrate(2*sqrt(t*v0),t)
p+=plot(4*t^3/9,(t,0,1),color='red',legend_label='$\varphi(t)$')
v2=integrate(2*sqrt(t*v1),t)
v3=integrate(2*sqrt(t*v2),t)
v4=integrate(2*sqrt(t*v3),t)
p+=plot(v4,(t,0,1),color='palegreen',legend_label='$v_4(t)$')
p+=plot(v3,(t,0,1),color='darkseagreen',legend_label='$v_3(t)$')
p+=plot(v2,(t,0,1),color='olive',legend_label='$v_2(t)$')
p+=plot(v1,(t,0,1),color='seagreen',legend_label='$v_1(t)$')
p+=plot(v0,(t,0,1),color='darkgreen',legend_label='$\alpha(t)$')
p.show(legend_loc=(0.05,0.45))
```

Bibliografía

- [1] Agarwal, R.P. y Lakshmikantham, V. (1993). *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*, World Scientific, Singapore.
- [2] Burgos, J. de (1994). *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill, Madrid.
- [3] LaSalle, J. (1949). *Uniqueness theorems and successive approximations*, Annals of Mathematics, Second Series, **50**(3), 722–773.
- [4] Novo, S., Obaya, R. y Rojo, J. (1995). *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid.