SUMA 42
febrero 2003, pp. 13-22

Geometría para futuros profesores de primaria: experiencias con el tangram chino

María Teresa Fernández Blanco

Este artículo tiene como objetivo presentar una experiencia sobre Didáctica de la Geometría llevada a cabo en la Facultad de Ciencias de la Educación de Santiago de Compostela con alumnos de la especialidad de maestro en Educación Primaria.
En ella se utilizó un juego de disección (el tangram chino) como base para la realización de una serie de actividades que tienen un objetivo múltiple: concienciar a los alumnos sobre las ventajas del uso de un material manipulativo para el estudio de propiedades geométricas; desarrollar diversas formas de razonamiento matemático; analizar la validez de la comprobación frente a la demostración en diversas situaciones; confrontar las concepciones previas de los alumnos con los resultados de las experimentaciones.

ARTÍCULOS

En la obra *Mathematical Recreations and Essays*, W.W. Rouse Ball escribía:

> La formación de diseños mediante siete piezas de madera… conocidas por tans… es uno de los pasatiempos más antiguos del Oriente. Son centenares las figuras que es posible construir, que remedan hombres, mujeres, pájaros, bestias, peces, casas, barcos, objetos domésticos, dibujos, etc. Pero este tipo de tareas, aunque recreativas, no tienen carácter matemático, por lo que a mi pesar, me contentaré con mencionarlas de pasada.

En contradicción con la opinión que Ball manifestaba en la anterior cita, se presentan en este trabajo una serie de actividades de carácter matemático cuyo soporte material es precisamente el conjunto de esas siete piezas de madera conocidas por tans.

Los tangrams forman parte del grupo de juegos de disección, de cuyo estudio se ocupa una de las ramas más antiguas de la matemática recreativa y el que utilizamos en esta experiencia es quizás el más conocido de todos: el tangram chino. Los tans se obtienen dividiendo un cuadrado en siete piezas (figura 1): dos triángulos grandes, dos pequeños, uno mediano, un cuadrado y un romboide.

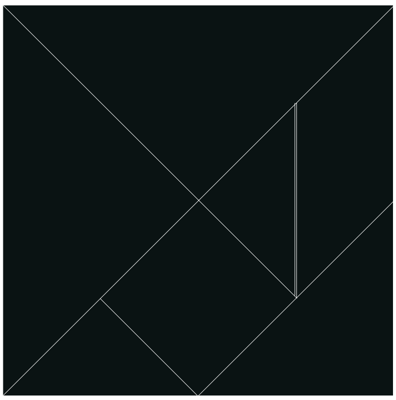

Figura 1

Esta disección no se hace de manera arbitraria: como se aprecia en la figura, las líneas son trazadas de forma que los tans guardan entre sí una serie de relaciones geométricas que describimos a continuación:

- todos los vértices tienen ángulos múltiplos de 45°;
- todas las piezas contienen al triángulo pequeño un número entero de veces;
- si tomamos como unidad de longitud un cateto del triángulo pequeño, los lados de los diversos tans serán 1, 2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

Este juego nació como pasatiempo y su principal objetivo era la formación de diseños, conocidos con el nombre de *tangramas*, la única restricción que tenía era que todos los tangramas se construían utilizando todas las piezas (figura 2). Esta particular disección va a condicionar la construcción de los tangramas, de manera que para algunas figuras tendremos varias posibilidades, mientras que otras tendrán una única solución e inluso nos encontraremos con figuras imposibles de realizar utilizando únicamente los siete tans (pese a que existen libro publicados que contienen más de mil figuras distintas). A pesar de la sencillez del juego, la construcción de tangramas requiere un alto grado de intuición geométrica y de creatividad.

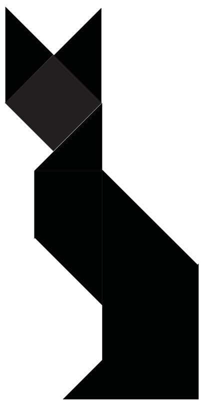

Figura 2

Los juegos con tangrams pueden agruparse en las siguientes categorías (Gardner, 1988):

1. Búsqueda de una o varias maneras de construir un tangrama dado o, en su defecto, de una demostración elegante de la imposibilidad de su construcción.
2. Encontrar la manera de representar, de la forma más artística o humorística, o de ambas, siluetas de animales, figuras humanas u otros objetos reconocibles.
3. Resolución de problemas de geometría combinatoria que son planteados tomando como base los siete tans y sus relaciones.
4. Diseño de juegos competitivos que requieran uno o más conjuntos de tans.

…utilizaremos el tangram como recurso y material didáctico para la introducción y formación de conceptos geométricos, con el fin de que afloren las concepciones previas que tienen los alumnos sobre distintos conceptos matemáticos, para reforzar conocimientos y conductas correctas y a su vez evitar obstáculos que condicionarían y en algún caso impedirían un aprendizaje posterior, para desarrollar habilidades y procesos…

Obviamente, de las cuatro categorías anteriores la más interesante desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas es la tercera, aunque el trabajo con este material no debería excluir las otras, ya que la manipulación de las piezas con fines lúdicos puede servir para que los alumnos se familiaricen con sus formas, sus medidas y otras características propias de cada tan. Problemas del tipo de «¿cuántos polígonos convexos diferentes podemos formar con los siete tans?» pertenecerían a dicha categoría. El uso que daremos en esta ocasión al tangram no está contenido formalmente en ninguna de las categorías anteriores, si bien en algún momento se plantearán problemas con posibilidades combinatorias como el descrito más arriba.

Nosotros utilizaremos el tangram como recurso y material didáctico para la introducción y formación de conceptos geométricos, con el fin de que afloren las concepciones previas que tienen los alumnos sobre distintos conceptos matemáticos, para reforzar conocimientos y conductas correctas y, a su vez, evitar obstáculos que condicionarían y, en algún caso, impedirían un aprendizaje posterior, para desarrollar habilidades y procesos, etc. Los conceptos y habilidades geométricas serán el núcleo del objetivo que se quiere perseguir, pero sin olvidarnos de la Medida e incluso de los Números que aparecerán de una manera natural, ayudando de este modo a relacionar distintos bloques de la matemática que habitualmente se mantienen diferenciados.

Conviene aclarar que el planteamiento, desarrollo y objetivo del trabajo realizado con este material sería distinto si se tratara de alumnos de primaria o infantil. La regla básica del tangram consiste en utilizar siempre los siete elementos, sin embargo, con niños pequeños se puede simplificar su uso utilizando solamente algunas de las piezas. En los primeros ciclos educativos interesa resaltar, sobre todo, el reconocimiento de formas geométricas, realizar giros y desplazamientos de figuras y desarrollar la creatividad (Cascallana, 1988). Por otra parte, los alumnos de esta experiencia educativa son futuros profesores de primaria y, como consecuencia de su paso por los distintos niveles educativos, tienen adquiridas concepciones previas (algunas erróneas) que serán difíciles de modificar, ampliar o incluso abandonar; pero cuyo análisis y, en algún caso, contraste con los resultados obtenidos servirá para enriquecer y ampliar los objetivos previos de las actividades propuestas.

Metodología

La metodología seguida en el desarrollo de esta experiencia está basada en la «estructura de laboratorio», es decir, enfocada como una actividad investigadora sobre la construcción de conceptos, resolución de problemas, técnicas de colaboración, etc. poniendo énfasis en la formación de conceptos y en la forma de adquirirlos. Bajo esta situación, el alumno construye sus propios conocimientos y el profesor se convierte en «promotor» de la investigación, presentando, organizando y guiando el trabajo (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

La metodología seguida en el desarrollo de esta experiencia está basada en la «estructura de laboratorio»…

La clase se organiza en grupos reducidos (cuatro alumnos como máximo en cada uno) con lo que se busca que los alumnos expongan sus ideas dentro del mismo e interaccionen con sus compañeros. El debate y el contraste de resultados con los demás grupos y con el profesor enriquecerá la situación y ayudará a consolidar y establecer conclusiones.

Apelando al dicho «la geometría se hace con las manos», primeramente dejamos que manipulen los siete tans y que intenten formar un cuadrado con todas las piezas como toma de contacto con el material. Posteriormente, se iniciará la experiencia propiamente dicha en la que plantearemos a los alumnos varias actividades, alguna de las cuales se presenta más adelante con detalle, en la que se pretende tratar multitud de contenidos matemáticos entre los que destacamos los siguientes:

- Triángulos. Clasificación.
- Cuadriláteros. Clasificación.
- Triángulos semejantes.
- Triángulos congruentes.
- Altura de un triángulo.
- Teorema de Pitágoras.
- Concepto de polígono.
- Elementos de un polígono.
- Clasificación de polígonos.
- Notación.
- Ángulos.
- Perímetro.
- Superficie. Unidad de área.
- Números irracionales.
- Razonamiento por inducción.
- Ejes de simetría de una figura.

Descripción de las actividades

Presentaremos de forma más detallada en este documento seis de las actividades que componen esta experiencia, en las cuales se sigue la formulación propuesta por Ángel Álvarez (1996) y que servirán como ejemplos de lo expuesto en la introducción. De esta forma, en algunas de ellas se introducen y amplían conceptos, en otras se desarrollan habilidades y destrezas, y en las restantes se procura combinar ambos elementos. Una característica que se puede observar en algunas de ellas es que no son planteadas como cuerpos cerrados y disjuntos sino que son retomadas y replanteadas con posterioridad (a partir de nuevos conceptos tratados o nuevos resultados obtenidos), lo que obliga a veces a ampliar los resultados o las conclusiones obtenidas con anterioridad, es decir, el desarrollo de la actividad no es lineal, con una actividad tras otra, sino que podría definirse como un recorrido en espiral (se vuelven a tratar actividades anteriores desde otro punto de vista y se analiza la influencia de los nuevos resultados o conceptos sobre conclusiones obtenidas en ellas). Este es el caso de la clasificación de las piezas del tangram que, a pesar de ser la primera de las actividades propuestas, a lo largo del desarrollo de las demás se irá enriqueciendo y ampliando por la aparición de nuevos criterios de clasificación.

En cada una de las actividades se distinguirán los objetivos que se pretenden conseguir, las dudas y problemas concretos que surgen en su desarrollo y que provocan a menudo que la tabla de contenidos planteada *a priori* se amplíe (reafirmando este hecho la influencia del alumno sobre su aprendizaje) y, por último, un breve resumen del desarrollo de la actividad.

Actividad 1

¿Qué forma tienen las piezas del tangram? Clasifícalas según distintos criterios.

En geometría una de las tareas propuestas con más asiduidad a los alumnos es la de clasificar los elementos de un conjunto determinado (basta observar que los libros de geometría de primaria y primeros cursos de secundaria contienen multitud de estas clasificaciones: de ángulos, de líneas, de polígonos, de triángulos...). La importancia de una clasificación radica no sólo en obtener una partición de un conjunto sino en conocer las características y propiedades de los elementos de dicho conjunto, de manera que el realizar estas actividades atendiendo a distintos criterios nos permitirá conocer mejor dichos elementos. Así mismo, es interesante ver cómo algunos de los criterios elegidos por los alumnos en un principio pueden no dar lugar a clasificaciones interesantes por múltiples causas: la relación escogida no es de equivalencia, todas las figuras están en una misma clase de equivalencia o incluso cada elemento compone su propia clase.

También llama la atención a los alumnos el hecho de que criterios aparentemente distintos (como la existencia de diagonales y el número de lados) dan a veces lugar a clasificaciones idénticas (en este caso en triángulos y cuadriláteros), lo que sirve para introducir distintas caracterizaciones de los polígonos (por su número de lados o de diagonales, por ejemplo).

Objetivos

- Obtener distintos criterios para clasificar triángulos.
- Distinguir criterios que permiten clasificar de los que no.
- Comprender la noción de partición de un conjunto.
- Clasificar cuadriláteros. Aquí aparece un elemento nuevo, las diagonales, que nos van a ampliar el número de criterios para hacer esa clasificación y que, como consecuencia, enriquecerán el conocimiento de los polígonos en general.
- Diferenciar entre triángulos semejantes y congruentes.

Principales dudas

- Posibilidad de que un triángulo pueda ser, por ejemplo, rectángulo e isósceles. El hecho de que duden sobre esto va a provocar la necesidad de reconocer la posibilidad de clasificar los triángulos atendiendo a distintos criterios e, inmediatamente, introducir una tabla de doble entrada que contenga las dos clasificaciones: según el tipo de ángulo y según la igualdad de los lados. Con respecto a esta tabla es muy interesante el debate que surge en el aula sobre la existencia o no de algunos pares de características: «equilátero + rectángulo», «obtusángulo + isósceles».

La importancia de una clasificación radica no sólo en obtener una partición de un conjunto sino en conocer las características y propiedades de los elementos de dicho conjunto…

- La segunda duda surge con la pieza que no es ni un triángulo ni un cuadrado (romboide). La primera impresión les hace pensar en un rombo, pero enseguida se dan cuenta de que no lo es y analizan las propiedades que caracterizan un rombo y cuáles de ellas mantiene el tan que tienen delante. Estas reflexiones nos van a permitir entrar de lleno en la clasificación de los cuadriláteros, construir distintos polígonos de este tipo y buscar criterios para clasificarlos: atendiendo a igualdad de diagonales, posición de diagonales, igualdad de lados, paralelismo de lados, ejes de simetría, ángulos rectos, ángulos iguales, etc.

No podemos perder de vista que la actividad era clasificar las piezas del tangram, pero para ello hay que reconocer las características de cada uno de los tans y eso fue lo que se hizo hasta el momento: qué tipo de polígono son atendiendo a sus lados, si tienen simetrías, qué tipo de ángulos tienen, etc. De esta manera, tenemos bien caracterizados todos los tans, lo que nos será de gran ayuda para las próximas actividades. Los criterios usados en esta clasificación por los alumnos están muy condicionados por los que acabamos de ver en las de triángulos y cuadriláteros: número de lados, número de lados iguales, tipos de ángulos, existencia de ángulos rectos, existencia de lados paralelos, existencia de diagonales, etc. Es curioso constatar que algunos criterios como la existencia de ejes de simetría (o su número), la cantidad de diagonales distintas, nunca son tenidos en cuenta a pesar de haber sido trabajado en las clasificaciones de triángulos y cuadriláteros. Esto nos muestra que los alumnos se manejan más cómodamente dentro de las clasificaciones clásicas que ellos estudiaron, a pesar de que a veces no sean las más idóneas para lo que se pretende tratar.

Actividad 2

Mide y anota todas las longitudes (de lados) distintas que encuentres.

La sola manipulación del material no es suficiente para recoger toda la información que éste puede transmitir y tampoco permite plasmarla claramente sobre el papel, por todo ello es muy importante el uso de una notación correcta para cada pieza que nos ayude a ganar agilidad y eficacia. En este sentido, se propone a los alumnos usar símbolos o letras para referirnos a dichas piezas, siempre después de que ellos comprendan la necesidad de hacerlo, tras lo que se plantea la tarea de hallar notaciones adecuadas. Se presentan varias, pero en todas las ocasiones la aceptada por la mayoría tras un breve análisis de las ventajas e inconvenientes de cada una es, coincidiendo con la propuesta por Álvarez (1996), la siguiente:

P: triángulos pequeños,

G: triángulos grandes,

M: triángulo mediano,

R: romboide,

C: cuadrado.

Otra notación cómoda y bastante representativa sería: T_P, T_G, T_M, R y C.

Objetivos

- Ver la necesidad y conveniencia de la utilización de una notación correcta, lo cual va a permitir simplificar y mejorar la comprensión tanto de la escritura como de los gráficos y esquemas usados en el desarrollo de las actividades.
- Comprender el concepto de unidad de medida de longitud.
- Ver la utilidad del trabajo con una variable para no hacer depender el resultado obtenido del tangram de cada grupo. Necesidad del uso del lenguaje algebraico para representar resultados generales frente a datos o medidas particulares.
- Utilizar el teorema de Pitágoras para conseguir todas las longitudes de los lados de los tans.

Principales dudas

- Operaciones con el número irracional $\sqrt{2}$. Buscan la manera de eliminar la raíz intentando aproximar su valor, lo que implicará que en ese intento aparezcan nociones como aproximación por defecto, aproximación por exceso, número de decimales para operar, etc.
- Problemas de diversos tipos relacionados con el significado de variable y el número de variables que necesitan para obtener todas las longitudes.

…es muy importante el uso de una notación correcta para cada pieza que nos ayude a ganar agilidad y eficacia.

El proceder habitual de los alumnos, cuando se les plantea este problema, es medir con una regla la longitud de los lados de cada tan y sólo después de la intervención del profesor en el sentido de proponerles generalizar los resultados obtenidos a cualquier otro tangram independientemente de las dimensiones del cuadrado inicial, usarán una variable de la cual van a depender todas las demás longitudes. El número $\sqrt{2}$ aparece al calcular, a partir de la aplicación del teorema de Pitágoras, la hipotenusa de *P*. Aquí conviene aclarar que tienen absoluta libertad para elegir como variable cualquier lado de cualquiera de los tans, lo que nos permitirá contrastar y comparar los resultados obtenidos por cada uno de los grupos y volver sobre la idea de semejanza. Es cierto que se podría haber tomado como unidad de longitud el cateto de *P* (o cualquier otro lado) con lo cual se eliminaría la dependencia de una variable, pero ese no sería el objetivo que se pretende y tampoco conseguiríamos eliminar el elemento perturbador y la dificultad, que tiene para ellos, operar con él. Además, en ninguna de las ocasiones en que fue planteada la actividad los alumnos sugirieron esta posibilidad, por lo que no se consideró necesaria una indicación en este sentido, si bien en un análisis posterior sí fue comentada esta posibilidad por parte de la profesora.

Es preciso señalar que en la mayoría de las ocasiones los alumnos observan que es suficiente aplicar el teorema de Pitágoras una sola vez, pues las demás longitudes se obtienen directamente manipulando correctamente los tans, es decir, que una correcta y detenida manipulación y análisis de las piezas puede ahorrar cálculos innecesarios.

Actividad 3

Encuentra la superficie del tangrama cuadrado tomando como unidad cada una de las piezas. Calcula la superficie de las demás piezas tomando como unidad:

a) Un triángulo grande.

b) El romboide.

c) Un triángulo pequeño.

d) El triángulo mediano.

Al manipular las siete piezas es fácil observar que el triángulo pequeño está contenido en las demás piezas un número entero de veces, lo cual nos lleva a considerar esta actividad como una de las más sencillas, siempre que se tenga claro el concepto de unidad de medida, en este caso de superficie.

Sin embargo, el concepto de unidad de medida no está tan claro como debiera y esto se constata cuando en esta actividad lo primero que hacen es calcular el área de cada pieza y después multiplicarla o dividirla por el número correspondiente para obtener el de las demás con respecto a la pieza elegida. Es sólo en este momento cuando utilizan la idea de unidad de medida de superficie, lo que revela la identificación que hacen los alumnos entre un concepto general (unidad de medida) y un caso particular del mismo (las unidades del sistema métrico decimal).

Objetivos

- Concepto de unidad de medida. Medida de superficie.
- Habituar a los alumnos a trabajar con cualquier unidad de medida.
- Pasar de una unidad a otra de forma sencilla.
- Obtener un nuevo criterio para la clasificación de las piezas atendiendo al área.

Principales dudas

- Número de alturas de un triángulo. Esta duda surge cuando pretenden calcular el área del triángulo pequeño para obtener la del tangrama en forma de cuadrado La convicción generalizada de que sólo tienen una altura deriva de la idea previa de *base* de un triángulo como el lado de mayor longitud que, además, se coloca horizontalmente, lo que implica que la altura es el segmento que baja perpendicularmente desde el vértice opuesto a la base. El triángulo es rectángulo-isósceles y lo colocan con la hipotenusa como base (ver figura) para poder calcular la altura siguiendo la enseñanza que han recibido anteriormente.

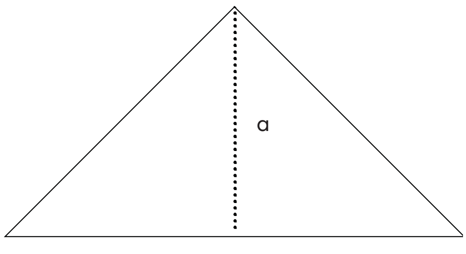

Figura 3

- Rechazo a la aparición de partes de la unidad, como sería el caso en el que si tomamos como unidad de medida la superficie de M, tendrían como superficie de P la mitad de M. Esto obedece a la poca confianza de los alumnos cuando se trata de trabajar con fracciones o decimales y a su identificación de las soluciones correctas de un problema numérico con números enteros.

…lo que revela la identificación que hacen los alumnos entre un concepto general (unidad de medida) y un caso particular del mismo (las unidades del sistema métrico decimal).

Actividad 4

Tomando los dos triángulos pequeños, únelos para obtener todos los polígonos que puedas. Describe cada uno de los polígonos obtenidos y sus características principales.

Dentro de esta misma actividad podemos distinguir dos planteamientos: el primero en el que sólo se admiten uniones de lados de la misma longitud y el segundo en el que se permite cualquier tipo de unión. En el primer caso sólo podrán construir cuadriláteros y triángulos, concretamente los tan C, R y el M (figura 4). El segundo caso permitirá la aparición de polígonos cóncavos (figura 5), obtendrán polígonos de más lados y deslizando un lado sobre otro obtendrán una infinidad de polígonos distintos (figura 6) los cuales, sin embargo, tendrán una serie de características comunes. Este último panteamiento los llevará hasta una situación de conflicto entre el resultado y sus concepciones, la cual obligará a reenunciar el concepto de polígono de modo lo más claro y detallado posible (figura 6).

Objetivos

- Revisar y ampliar el concepto de polígono.
- Clasificación de polígonos en cóncavos y convexos.
- Comprobar que figuras de igual área pueden tener distinto perímetro.
- Posibilidad de usar el perímetro como criterio para clasificar los tans.

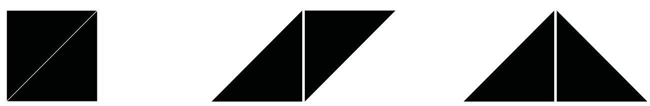

Figura 4

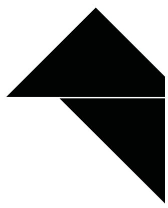

Figura 5

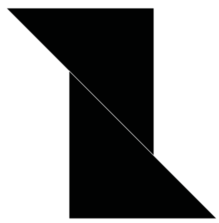

Figura 6

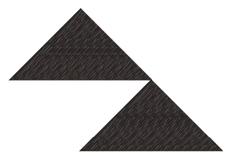

Figura 7

Principales dudas

- Construcción de figuras que no saben si son o no polígonos, pues no encajan dentro de la idea que ellos tienen de este concepto, aunque en la mayoría de los casos no son capaces de exponer razones (más o menos convincentes) en que basar sus hipótesis. Entre las figuras que provocan esta cuestión se encuentran principalmente los polígonos cóncavos, puesto que hasta ahora no habían aparecido en actividades anteriores, y construcciones como la de la figura 7.
- La idea, muy arraigada en los alumnos a pesar de su supuesta formación matemática anterior (algunos alumnos tienen superada la asignatura de Matemáticas de COU), de «a igual área corresponde igual perímetro» supone uno de los principales obstáculos en el desarrollo de esta actividad, llegando en algún caso los alumnos a reafirmarse en esta hipótesis errónea pese a obtener resultados que la desmienten (piensan que el fallo es del resultado y no de la hipótesis).

Actividad 5

Ordena las piezas del tangram.

Ordenar también es una actividad propia de numerosos campos de la matemática y, aunque su dominio habitual de actuación sea el de los Números, vamos a ver la importancia que llega a adquirir en geometría. El enunciado de la actividad está planteado de forma poco clara y es demasiado general, pero este efecto está buscado con el fin de provocar un análisis y debate que nos va a permitir retomar la idea de clasificación como relación de equivalencia pero sin entrar de manera muy profunda ni formalista en la Teoría de Conjuntos.

Objetivos

- Propiedades que determinan una relación de orden.
- Diferenciar ordenar de clasificar.

Ordenar también es una actividad propia de numerosos campos de la matemática y, aunque su dominio habitual de actuación sea el de los Números, vamos a ver la importancia que llega a adquirir en geometría.

Principales dudas

- Al aplicar la relación «menor que» (o «mayor que»), que es la que aparece en un primer momento, se encuentran con el problema de definir ese «menor que» con respecto a algo concreto, es decir, si uno plantea «¿qué pieza del tangram es menor que las demás», automáticamente los alumnos piensan en los triángulos pequeños, al igual que consideran los triángulos grandes como las piezas mayores del tangram (nótese que en ningún caso ha sido necesario definir el significado de «mayor que», las respuestas se basan únicamente en la propia intuición). Sin embargo, el problema surge a la hora de «ordenar» las otras tres piezas puesto que ello requiere una definición concreta de la relación que estamos aplicando. Aquí surgen como posibles alternativas el área y el perímetro: en el primer caso ninguna de las piezas sería mayor que las demás, pero sí en el segundo.

  Llegado a este punto el profesor analiza con los alumnos el proceso seguido y los invita a recordar el concepto de relación de orden. Tras un breve repaso del mismo, es asumido rápidamente el conflicto existente entre la «ordenación» realizada y el cumplimiento de la propiedad antisimétrica (existen piezas distintas que coinciden en área y perímetro). Tras la sorpresa de los alumnos se les hace ver que lo que ellos hicieron en realidad no es otra cosa que clasificar de nuevo las piezas atendiendo a nuevos criterios, con lo que se retoman actividades anteriores y se muestra a los alumnos la importancia de tener claros los conceptos matemáticos que hay que aplicar (en este caso el de relación de orden) con el fin de evitar posteriores sorpresas.
- Conflicto sobre el significado de ordenar. En el diccionario se presenta como sinónimo de colocar, distribuir… y este significado se acerca más al concepto previo de los alumnos que el matemático de establecer una relación de orden.

Actividad 6

Toma tres triángulos de entre los cinco existentes. Ensaya cómo deben situarse para obtener el polígono del máximo (mínimo) número de lados. Extiende el resultado a n triángulos.

En esta actividad se aplican y relacionan conceptos adquiridos en las anteriores (polígono cóncavo, convexo, concepto de vértice, etc.), por lo que no es planteada en ningún caso como una actividad propicia para que afloren nuevos contenidos. En este sentido, podemos considerarla una actividad integradora o globalizadora.

Objetivos

- Indagar sobre las distintas posibilidades de elección de los triángulos y la influencia de esta elección sobre el resultado final.

- Habituar al alumno a plantear estrategias de análisis en las que se traten de un modo exhaustivo todas las situaciones posibles.
- Usar el método de inducción.

El razonamiento inductivo se puede considerar como un procedimiento educativo muy útil para la adquisición y descubrimiento de conceptos y propiedades de ámbito geométrico o matemático en general. El uso de la inducción para contar (en este caso, el número de lados) consiste en analizar la evolución de una determinada cantidad al aumentar la complejidad del problema.

Principales dudas

- ¿El número máximo (mínimo) de lados del polígono que se va a formar depende de los triángulos escogidos?

Antes de comenzar con la enumeración de posibles resultados nos planteamos las distintas posibilidades de elección de los triángulos:

- utilizar dos pequeños y el mediano (PPM);
- tomar dos pequeños y el grande (PPG);
- dos grandes y uno pequeño (GGP);
- dos grandes y el mediano (GGM);
- y, por último, uno grande, uno pequeño y el mediano (PMG).

En principio no resulta muy claro para los alumnos que la solución depende o no de la combinación elegida y comienzan a enfrentarse con el problema por el método de ensayo-error. Si pretendemos obtener el polígono con el menor número de lados y tenemos en cuenta que cada grupo hace su elección de triángulos, nos encontramos con polígonos como los de la figura 8.

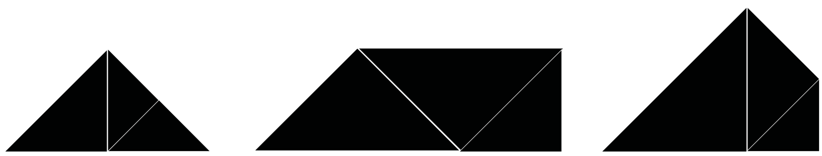

Figura 8

Tras sucesivas manipulaciones y análisis, y con alguna indicación por parte del profesor en casos concretos, observan que para obtener el número mínimo necesitan que lados de distintos triángulos unidos formen un lado del polígono nuevo (supondría «convertir dos lados en uno») y que, además, el polígono sea convexo para no ganar lados, es decir, unir los polígonos entre sí por lados de igual longitud.

En el caso de construir el polígono con el mayor número de lados la situación cambia (no depende de la elección) y llegar a la solución para n triángulos resulta muy sencillo (figura 9).

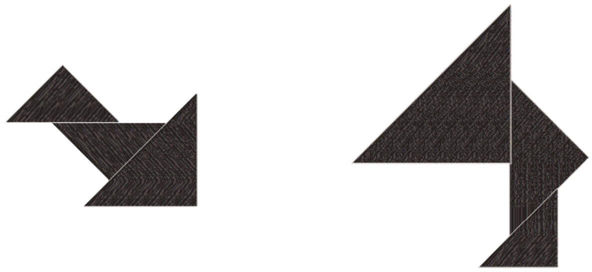

Figura 9

Evaluación

La evaluación es una parte importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, como tal, debe ser planteada en la descripción y programación de toda actividad (y es importante que nuestros alumnos de Magisterio así lo entiendan) pues casi siempre actividades diferentes requieren métodos o criterios de evaluación diferentes. Esto es importante a la hora de programar cualquier actividad con nuestros alumnos, pues creemos que uno de los errores de la enseñanza tradicioinal consiste en la mecanización de los medios de evaluación (exámenes escritos en su mayoría) desvirtuando o ignorando totalmente otras posibilidades muchas veces más educativas para los alumnos (lectura de libros, realización y exposición de trabajos, exámenes o pruebas en grupo, trabajo de aula…). La metodología seguida condicionará el sistema de evaluación, por lo que, al haber planteado la clase con una estructura de laboratorio el profesor deberá recoger información sobre cada alumno y sobre la dinámica del grupo durante todas las sesiones de trabajo.

Se propuso a los alumnos tras finalizar las actividades la realización de un tangram original, en el cual se dieran las dos principales características del tangram chino manejado en clase, es decir, deberían construir un tangram de forma que tuviera una pieza «generadora» en cuanto al área (el papel que hacía el tan P en el tangram chino) y que todos los diseños de figuras estuvieran formados con todas las piezas que resultaran de la disección de ese tangram. Este trabajo debería estar acompañado de una serie de actividades de tipos diversos que ellos mismos propondrían (en algunos casos originales y en otras adaptaciones de las ya realizadas) en las que se trabajasen contenidos matemáticos.

Se les enseñaron otros modelos de tangrams que cumplían esos requisitos (tangram cuadrado, tangram rectangular, tangram triangular, etc.), en los que se podían observar diferentes figuras generadoras dependiendo de la figura de la que se partía, y otros que no los cumplían pero que servían igualmente para trabajar contenidos matemáticos, incluso en algún caso aumentaba la complejidad de la disección, de las formas y de los contenidos a estudiar (tangram en forma de huevo).

Los resultados fueron muy interesantes, desde la figura inicial elegida para realizar la disección hasta la forma de plantear las actividades. La mayoría optó por elegir un polígono regular como figura inicial para obtener los tans, mientras que otros tomaron como referencia un barco, un muñeco, etc. En cuanto a la forma de plantear las actividades, tenemos por un lado los que siguen un esquema idéntico al planteado en clase y, por otro lado, los que eligen otro tipo de opciones como, por ejemplo, un cuento en el que el protagonista es la figura a partir de la cual se obtienen los diversos tans y en cuyo desarrollo se van obteniendo otros protagonistas de la historia a partir de las mismas piezas. Mientras se lee y sigue la historia se van planteando al niño diferentes actividades de contenido matemático.

La presentación también fue interesante puesto que contrastaban los que planteaban su trabajo de un modo académico: presentación de las piezas, actividades, soluciones; y quienes optaban por un estuche que contenía las piezas en diferentes materiales y se separaba por un lado el material para el alumno y por otro las indicaciones para el profesor.

…la idea consiste en no presentar las matemáticas como un edificio terminado lleno de contenidos en principio innecesarios (desde el punto de vista del alumno), sino en ir construyendo dicho edificio siguiendo más o menos lo que es el desarrollo de la historia de cualquier ciencia.

Conclusiones

Es cierto que los contenidos aparecen un poco desordenados si los comparamos con el esquema lógico-deductivo marcado por la enseñanza de la geometría tradicional; sin embargo esto hace, desde mi punto de vista, que se generen conceptos, habilidades y procedimientos en el momento que realmente los necesita el alumno y no antes. De esta forma, perdemos la secuencia lineal que se sigue habitualmente, pero, por el contrario, se dotan de significado los conceptos estudiados, viendo el nacimiento de algunos de ellos como respuesta a problemas o situaciones concretos, es decir, la idea consiste en no presentar las matemáticas como un edificio terminado lleno de contenidos en principio innecesarios (desde el punto de vista del alumno), sino en ir construyendo dicho edificio siguiendo más o menos lo que es el desarrollo de la historia de cualquier ciencia.

La mayoría de las actividades son sencillas y se necesita poco tiempo para su desarrollo; sin embargo, cuando menos lo esperamos se complican debido a los siguientes motivos:

1. Las concepciones previas de los alumnos como consecuencia de una geometría pobre y restringida al cálculo de áreas y volúmenes como único objetivo.
2. Poca destreza en la manipulación del material, en particular el tangram, lo que hace que no vean la componente geométrica que se deriva de las relaciones que existen entre las piezas, así como la escasa «visión geométrica» que dificulta la consecución de algunas figuras con rapidez.
3. Tendencia a dar un valor numérico en cualquier tipo de situación de medida aunque no se requiera explícitamente. Esta tendencia provoca que no vean la utilidad de usar una variable o bien que no lleguen a comprender el significado de *unidad de medida*.

Una conclusión de tipo general se basa en la importancia que adquiere la metodología empleada otorgándole el mismo peso que a los contenidos. Desde esta perspectiva, el clima en el que aprenden los futuros profesores va a configurar su actitud a la hora de encontrarse con las situaciones de enseñanza como señalan Gimeno y Fernández, citados por Azcárate (1998):

> El método con el que aprenden los futuros profesores genera un clima en el que aprenden muchas destrezas profesionales soterradamente, de forma implícita, que son las que configuran decididamente las actitudes del futuro profesor a la hora de enfrentarse con las situaciones de enseñanza.

Para finalizar, se puede considerar esta experiencia como una actividad abierta que coincide en el planteamiento base con los llamados «proyectos de aula» (De la Torre, 1996), es decir, las situaciones con las que se encontraron los alumnos requirieron más conocimiento geométrico del que poseen y los llevaron a aplicar lo que ya conocen, de manera que en este sentido se motiva al alumno (futuro profesor de primaria) a plantearse preguntas y es él quien crea su propio conocimiento.

> El conocimiento profesional no puede ser transferido, es construido individualmente por cada profesor desde sus propias experiencias, en interacción con el entorno y en un camino que relacione el nuevo conocimiento con el pensamiento previamente elaborado, en un intento de dar sentido al nuevo conocimiento. (*Professional Development and Teacher Autonomy*, Castle, K. y Aichele, D. B. 1994)

Bibliografía

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J.M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., J.M. FORTUNY y R. PÉREZ (1987): *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Síntesis, Madrid.

ÁLVAREZ, A. (1996): *Actividades matemáticas con materiales didácticos*, Narcea/MEC, Madrid.

AZCÁRATE, P. (1998): «El diseño curricular en la formación didáctico matemática de los maestros», en *Actas del II simposio sobre el currículum en la formación inicial de profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas*, ICE de la Universidad de León, León.

CASCALLANA, M.T. (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

CASTLE, K. y D.B. AICHELE (1994): «Professional Development and Teacher Autonomy», en AICHELE y COXFORD: *Professional Development for teachers of Mathematics,* NCTM, Reston.

DE LA TORRE FERNÁNDEZ, E (1996): *La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria*, Manuales UEX, N.° 22, 23-37.

ELFFERS, J. (1982): *El tangram. Juego de formas chino*, Labor, Barcelona.

FETCHER, D. y J. IBBOTSON (1965): *Geometry whit a Tangram*, W & R Holmes Ltd., Glasgow.

GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1987): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.

JOOST, E. (1982): *El tangram. Juego de formas chino*, Labor. Barcelona.

María Teresa Fernández
Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Santiago de Compostela.
ENCIGA