

INTERACCIONES ENTRE LÓGICA BORROSA Y MATEMÁTICAS: DE LA REFLEXIÓN HISTÓRICA A LA PERSPECTIVA

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya

Resumen

En este artículo se presentan algunas interacciones entre la lógica borrosa y las matemáticas y se vislumbran posibles líneas de investigación en ese ámbito.

Palabras clave: Matemáticas, lógica fuzzy

Abstract

In this paper we deal with some relations that have been developed between Mathematics and the Theory of Fuzzy Sets since its introduction by L.A. Zadeh. We face also the problem of future lines of research in this area.

Keywords: Mathematics, fuzzy logic

El objetivo de este modesto escrito es reflexionar, cuarenta años después del artículo de L.A. Zadeh que dio pie al desarrollo de la teoría de conjuntos borrosos, sobre algunas interacciones que dicha teoría ha mantenido con las matemáticas, deduciendo de ello algunas consecuencias para futuras líneas de investigación.

El primer acierto de L.A. Zadeh fue a mi entender plantear una definición muy general de conjunto borroso como aplicación de un universo de referencia en el intervalo real $[0,1]$ que permitiese asignar grados de pertenencia intermedios entre los valores clásicos 0 y 1. El objetivo de

Recibido: 06/09/06. Aceptado: 26/10/06.

L.A. Zadeh fue abrir puertas a la modelización de situaciones reales, especialmente tecnológicas, deficientemente descritas en términos booleanos, probabilísticos o estadísticos. Su fin no fue crear una nueva teoría con restricciones axiomáticas. Esta virtud generalista con un claro interés por las aplicaciones y porque pudieran coexistir diversos modelos alternativos de borrosidad chocó frontalmente con las visiones tradicionales formales donde las axiomáticas son normales y los teoremas de unicidad venerados. Esta generalidad de planteamiento ha dado lugar en el mundo de las contribuciones matemáticas a algunos fenómenos curiosos que intentaremos describir muy brevemente:

(a) Intentos de situar los borrosos dentro de teorías clásicas.

A través de modelos booleanos, de lógicas polivalentes, de teoría de la probabilidad, de estadística, etc. se ha intentado, en algunas ocasiones, hacer ver como los planteamientos clásicos ya eran más que suficientes para tratar los nuevos problemas borrosos. En general esta posición sólo puede ser argumentada cuando los problemas borrosos tienen su borrosidad basada precisamente en temas que estas otras disciplinas pueden describir bien. Es evidente que si la naturaleza del problema es aleatoria o el suceso analizado admite repeticiones y cálculos frecuenciales, el estudio probabilístico o estadístico puede ser suficiente para obtener respuestas razonables. Pero no es menos cierto que hay temas genuinamente borrosos que difícilmente pueden ser tratados con artillerías clásicas. El reconocimiento automático de imágenes sería, por ejemplo, uno de estos casos. Los modelos del lenguaje natural para Inteligencia Artificial serían otro caso.

(b) Generalizaciones de temas clásicos vía borrosidad.

Un sin fin de trabajos matemáticos se han desarrollado al considerar con métodos tradicionales generalizaciones formales de conceptos o resultados. Simplemente cambiando los valores reales de distancias, funciones, normas, integrales, etc. por “valores” que sean conjuntos borrosos, una nueva teoría queda sujeta al análisis formal de nuevas propiedades. Nuevos teoremas de puntos fijos, topologías peculiares, ecuaciones generalizadas, etc. ofrecen entonces innumerables problemas que resultan abordables con las técnicas usuales de matematización.

(c) Generalizaciones de los propios modelos borrosos iniciales

Cualquier modelo borroso inicial puede ser sometido a un proceso de generalización formal, cada vez más abstracto. Si el modelo era con

valores en el intervalo $[0,1]$ se puede pasar de $[0,1]$ a valores en un retículo, o a valores borrosos, o a valores en un espacio topológico,... Lo más general incluye lo particular. Pero como dijo H. Weyl para que una generalización tenga sentido deben poder darse al menos dos ejemplos diferentes en donde funcione.

En los tres casos descritos pueden encontrarse un tanto por ciento considerable de los desarrollos matemáticos que se han dado en estos cuarenta años. Pero posiblemente lo que ha resultado más interesante *han sido el desarrollo de modelos matemáticos ajustados a problemas reales genuinamente borrosos*. Temas de inteligencia artificial y sistemas expertos, temas de reconocimiento de patrones, temas de control en tecnologías emergentes, temas de reconocimiento de voz, temas de robótica, etc., han ido requiriendo y siguen orientando, aplicaciones de las matemáticas para crear modelos razonables. Estos modelos pueden no ser a veces de gran calado matemático pero tienen la enorme virtud de ser ajustados a sus necesidades concretas y no a más problemáticas especulativas. Algo parecido a lo que ha ocurrido con la matemática discreta, tan útil en muchos problemas actuales y mucho más adecuada que otros complejos modelos continuos.

Mirando hacia el futuro sería razonable pensar que se irán desarrollando tres tipos de aproximaciones matemáticas.

I. Modelos discretos adecuados a modelizaciones borrosas

Estos modelos deberían ajustarse más a la discusión de su bondad sobre el proceso de modelización borrosa que no a sus posibles extensiones o generalizaciones. En esta línea sería deseable un mayor desarrollo interdisciplinario de los modelos matemáticos explorando nuevas relaciones con la lingüística, la teoría de la percepción, la creación de imágenes, etc.

La teoría de ecuaciones funcionales ya ha aportado modelos muy interesantes para modelizaciones borrosas y es previsible que siga siendo un valioso instrumento en futuros desarrollos.

II. Análisis borrosos de conceptos o modelos matemáticos

Curiosamente, poca atención se ha prestado al hecho de que muchos conceptos, "precisos matemáticamente", pueden dar lugar a interesantes análisis de sus posibles "imprecisiones reales". Un ejemplo elemental: la noción de ortogonalidad es diáfana en un espacio con producto escalar: dos vectores x,y son ortogonales si $\langle x,y \rangle = 0$. Sin embargo, la casi-orto-

gonalidad, de tanta trascendencia práctica, admite tratamientos borrosos diversos e interesantes.

Hay aquí grandes posibilidades de analizar diferentes conceptos de “estabilidad” de modelos, de cómo se comportan los modelos frente a perturbaciones o cambios. No se trata de acotar errores sino de observar fluctuaciones.

III. Nuevos modelos matemáticos orientados tecnológicamente

El desarrollo tecnológico previsible de transporte, de nanotecnología, de robótica industrial, de comunicación telemática, etc. hace aflorar ya hoy interesantes problemas nuevos de seguridad, de reconocimiento, de búsqueda de datos, etc., que sugieren la necesidad de nuevas modelizaciones matemáticas, con especial atención a su posible automatización.



Pero también sería deseable, desde un punto de vista prospectivo, plantear el tema de la incidencia que la teoría de los conjuntos borrosos debería tener en la formación de las personas. Hay ideas, resultados y aplicaciones que deberían ser conocidos dentro de la formación obligatoria y apartados ya más avanzados que deberían tener un desarrollo universitario normal.

Han sido cuarenta años de un desarrollo matemático espectacular en torno a la teoría de Zadeh. El paso del tiempo discriminará positivamente lo que han sido aportaciones interesantes y lo que han sido virtuosismos formales. Quedan ahora muchos años por delante para abrir nuevos horizontes matemáticos a través de nuevos problemas. Lo mejor, seguramente, está por venir. Los próximos cuarenta años guardan el secreto. A nosotros nos queda el privilegio de empezar a penetrar en él.

Bibliografía

- Alsina, C., Frank, M.J., Schweizer, B. (2006), *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*, W.S. P. New Jersey-Singapore.
- Trillas, E., Alsina, C., Terricabras, J.M. (1995), *Introducción a la Lógica Borrosa*. Ariel, Barcelona.
- Zadeh, L.A. (1965), Fuzzy Sets. *Inform. and Cont.* 8, pp. 338-353.