



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución á programación multiobxectivo

Rial Fondo, Jorge

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución á programación multiobxectivo

Rial Fondo, Jorge

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Agradecementos

Quero agradecer tanto a meu tutor, Ángel Manuel González Rueda, como a meu cotutor, Brais González Rodríguez, por axudarme a levar a cabo este traballo e ser un punto de guía moi importante para min sobre as miñas decisións futuras. Dou as miñas grazas tamén a toda a xente que coñecín en Santiago, que me fixo ser quen son, que me fixo mellorar e que sen eles, non estaría aquí; en especial, á xente que me acompañou durante catro anos no Colexio Maior Rodríguez Cadarso. Por último, grazas a meus pais e a toda persoa que me queira de verdade.

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Estatística e Investigación Operativa
Título: Introducción á programación multiobxectivo
Breve descrición do contido
<p>En moitas situacións que se poidan modelizar como problemas de optimización matemática, é común atoparse con varios obxectivos a optimizar. Aquí é onde xorde a optimización multiobxectivo, moi relevante na programación matemática. Fronte aos problemas onde só hai unha función a maximizar ou minimizar, o modelo matemático complicase, e débense utilizar técnicas específicas para a súa resolución. Neste traballo propónse que o alumno elabore unha introdución aos principais conceptos da optimización multiobxectivo mediante unha revisión bibliográfica dos libros de referencia neste campo. Posteriormente, explicaranse os diferentes algoritmos para a resolución deste tipo de problemas, xa sexa garantizando optimalidade global ou por técnicas heurísticas. Finalmente, farase unha análise numérica de diferentes algoritmos para evaluar o seu rendemento en problemas concretos.</p>
Recomendacións
Recoméndase cursar a materia “Programación Lineal e Enteira”
Outras observacións


Índice

Resumo	X
Introdución	XIII
1. Conceptos fundamentais na optimización multiobxectivo	1
1.1. Definición dun problema multiobxectivo e puntos eficientes	1
1.2. Condicións para a existencia de puntos eficientes	3
1.3. Solucións eficientes débiles e estritas	7
1.4. Puntos propiamente eficientes de Pareto	19
2. Métodos de optimización multiobxectivo	23
2.1. Método dos pesos ponderados	24
2.2. Método das ε -restricións	32
2.3. Método híbrido	35
2.4. Método das restricións elásticas	37
2.5. Método lexicográfico	39
2.6. Método símplex multiobxectivo	42
3. Aplicación práctica	51
3.1. Método dos pesos ponderados	52
3.2. Método das ε -restricións	53

3.3. Método híbrido	54
3.4. Método das restricións elásticas	55
3.5. Método lexicográfico	56
3.6. Método símplex multiobxectivo	57
A. Código para a implementación dos métodos en R	59
A.1. Código para o método dos pesos ponderados	59
A.2. Código para o método das ε -restricións	60
A.3. Código para o método híbrido	60
A.4. Código para o método das restricións elásticas	61
A.5. Código para o método lexicográfico	62
A.6. Código para o símplex multiobxectivo	63
Bibliografía	67


Resumo

A optimización multiobxectivo emprégase para atopar as mellores solucións factibles aos problemas de programación matemática que dispoñan de máis dunha función obxectivo. Partindo dun problema de minimización, no primeiro capítulo comezamos facendo unha introdución á optimización multiobxectivo, definindo o principal concepto de solucións neste contexto: os puntos óptimos de Pareto ou puntos eficientes. Ademais, presentamos resultados teóricos de caracterización e existencia de solucións neste tipo de problemas. Finalmente, explicamos en detalle unha serie de conceptos relacionados con puntos eficientes: puntos debilmente eficientes, estritamente eficientes e propiamente eficientes.

No seguinte capítulo, describimos diferentes métodos para resolver un problema multiobxectivo xeral. Para cada un deles, aportamos varios resultados teóricos nos que se fundamentan para visualizar a súa utilidade ou a que tipo de problemas están dirixidos. Por último, á parte de ilustralos con algún exemplo, realizamos a implementación de cada un deles na linguaxe de programación .

Abstract

The goal of multiobjective optimization is to find the best feasible solutions to mathematical programming problems which have more than one objective function. In the first chapter, we introduce multiobjective programming from the perspective of a minimization problem. We also define our solutions based on this premise: those are Pareto optimal points or efficient points. Then, we characterize these points and justify when their existence is assured by certain results. In the end, we explain some concepts related to efficient points: weakly efficient points, strictly efficient points and properly efficient points.


As we progress through our project, we describe different solving methods of multiobjective problems. Each approach is supported by a series of results to show its usefulness and the scope of problems it can address. Finally, we implement these methods in the  programming language.

Introdución

Os problemas de optimización con varios factores de decisión levan xa moitos séculos aparecendo en campos moi diversos como a industria, a medicina,... Malia isto, non se producen avances á hora de formalizalos nin de levar a cabo a súa resolución ata finais do século XIX, co traballo de Vilfredo Federico Pareto (1848-1923). Esta persoa foi moi relevante pois sentou as bases do que supoñería chegar a unha resolución dun problema multiobxectivo: os puntos de Pareto. Estableciunos, dentro da economía e a política, como aquelas situacións nas que non habería outro suposto no que se dera mellora dun individuo sen perxudicar aos demais individuos a ter en conta.

Hai dúas disciplinas que contribuíron ao desenvolvemento da optimización multiobxectivo: a programación lineal e a análise convexa. A programación lineal plántexase como tal a partires da Segunda Guerra Mundial, como medio para a repartición de recursos durante a mesma, e, na actualidade, é utilizada en ámbitos tan dispares como a construción ou o reparto de mercancías. Entre as maiores aportacións atópanse o método símplex, a teoría da dualidade, os métodos de punto interior, ... que serven para resolver estes problemas.

A análise convexa foi primeiramente investigada, entre outros, por Steiner, Cauchy,.. e exténdese ata ser establecida como tal a partires de finais do século XIX. Os resultados de convexidade son fundamentais dentro da optimización multiobxectivo, pois permiten simplificar ou obter resultados de existencia de solución para un problema. Isto facilita enormemente a aplicación e fortalece as conclusións aportadas.

Neste traballo procuramos dar unha visión xeral e pausada dos conceptos de optimización multiobxectivo (**Capítulo 1**), centrándonos na noción de puntos eficientes, as súas caracterizacións e demais conceptos relacionados. A continuación, baseándonos no capítulo anterior, explicamos en que consisten os principais métodos de programación multiobxectivo (**Capítulo 2**), engadíndolles un exemplo ilustrativo a cada un deles e vemos en que ámbitos destaca cada metodoloxía. Por último, realizamos unha implementación na linguaxe de programación  (**Capítulo 3**) de cada método con apoios de figuras e táboas para rematar de entender a súas utilidades prácticas.

Capítulo 1

Conceptos fundamentais na optimización multiobxectivo

Neste primeiro capítulo, debemos introducir que é o que entendemos por un problema multiobxectivo e tamén cales son as súas “solucións”. Para isto definimos tamén os conceptos de puntos eficientes, que son os nosos principais candidatos a “resolver” os problemas multiobxectivo, xunto con outros puntos de posible interese cos que están moi relacionados.

Sen maior demora, procedemos entón a definir que é un **problema de optimización multiobxectivo**.

1.1. Definición dun problema multiobxectivo e puntos eficientes

Definición 1.1. Un **problema de optimización multiobxectivo** pódese formular da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^t \\ \text{suxeito a} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

sendo $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ o conxunto de variables no noso problema, delimitadas pola **rexión factible** \mathcal{X} e \mathbb{R}^n é o espazo de decisión de variables. A función $f = (f_1(x), \dots, f_p(x))^t$, onde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é a **función obxectivo** do problema que hai que minimizar. Denotamos á imaxe da rexión factible como $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^p$.

Xa con isto establecido, temos que definir que supón “minimizar” unha función obxectivo. Neste caso, traballamoms cos **puntos óptimos de Pareto**, que son aqueles que cumpren a seguinte definición:

Definición 1.2. Os puntos óptimos de Pareto ou puntos eficientes son os puntos $\hat{x} \in \mathcal{X}$ tales que non hai ningunha outra $x \in \mathcal{X}$ que cumpra que $f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ e á vez que $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ para alomenos un $k \in \{1, \dots, p\}$. Chamamos a $f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$ **punto non dominado**. Se analizamos dous puntos x^1 e x^2 e se cumpre que $f(x^1) \neq f(x^2)$ e que $f_i(x^1) \leq f_i(x^2)$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ dicimos que x^1 **domina** a x^2 e que $f(x^1)$ **domina** a $f(x^2)$.

Dacordo a isto, podemos definir os seguintes dous conxuntos: $\mathcal{X}_E \subset \mathcal{X}$ que é o **conxunto de puntos eficientes** (tamén chamado **fronteira de Pareto**), e $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}$ que é o **conxunto de puntos non dominados**.

Obviamente, buscamos que \mathcal{Y}_N sexa non nulo para obter polo menos un punto eficiente. Isto non sempre sucede, como vemos no exemplo a continuación.

Exemplo 1.3. Consideramos $\mathcal{X} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e a función que, para cada $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ obtemos $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2})$, que representamos na **Figura 1**.

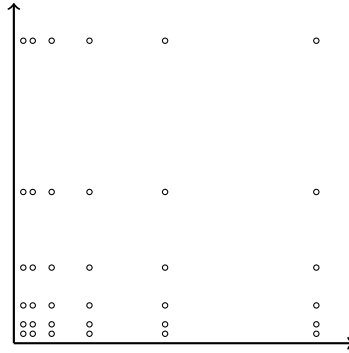


Figura 1: Representación de \mathcal{Y} en \mathbb{R}^2

Neste caso temos que non hai ningún punto que sexa non dominado, pois se existe $\hat{x} = (m, n)$ tal que sexa eficiente, existe $\hat{x} = (m + 1, n)$, por exemplo, de forma que $f_1(\hat{x}) = \frac{1}{m} > f_1(\hat{x}) = \frac{1}{m+1}$ o que fai que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$.

O noso seguinte obxectivo por tanto é definir condicións para que si existan puntos eficientes. Malia isto, primeiro aproveitamos este exemplo para presentar caracterizacións dos puntos eficientes alternativas á nosa definición inicial.

Definición 1.4. Dicimos que $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é un punto eficiente se e só se temos que $f(\mathcal{X}) \cap \{f(\hat{x})\} - \mathbb{R}_+^p = \{f(\hat{x})\}$ sendo $\mathbb{R}_+^p = \{z \in \mathbb{R}^p \mid z_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$.

Observación 1.5. Debemos facer unha distinción en todo o traballo entre dúas notacións para A e B dous conxuntos arbitrarios en \mathbb{R}^m . $A \setminus B$ correspóndese con A intersecado co complementario de B en \mathbb{R}^m ; e o conxunto $A + B$ é o que cumpra que $x \in A + B \Leftrightarrow x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ ou, de maneira análoga, $x \in A - B \Leftrightarrow x = a - b$, $a \in A$, $b \in B$.

Isto que quiere decir que se un punto é **non dominado** non haberá ningún punto no ortante inferior esquerdo, tomando como centro ese mesmo punto. Iso dános unha mostra gráfica dos puntos eficientes e esta idea queda representada na **Figura 2**.

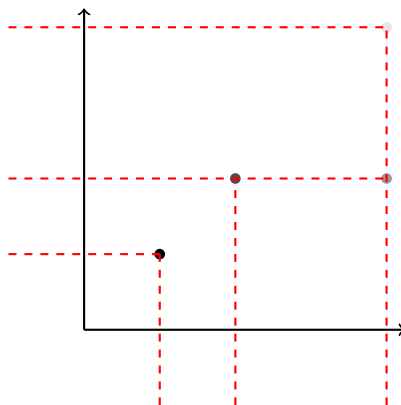


Figura 2: Caracterización visual da non dominancia.

Cada punto vése dominado por outro cada vez máis escuro.

Con esta caracterización, procedemos a expoñer os resultados necesarios para obter condicións necesarias e suficientes de existencia de puntos eficientes.

1.2. Condicións para a existencia de puntos eficientes

Presentamos dous resultados, os cales serven para contextualizar que tipo de conxuntos son os que poden ter puntos eficientes.

Proposición 1.6. *Sendo $\partial(\mathcal{Y})$ a fronteira topolóxica do conxunto \mathcal{Y} , nun problema multiobxectivo formulado como en (1.1.1), $\mathcal{Y}_N \subset \partial(\mathcal{Y})$*

Demostración. A demostración pode verse en Ehrgott (2010), na páxina 28. □

Corolario 1.7. *Se \mathcal{Y} é aberto, $\mathcal{Y}_N = \emptyset$*

A continuación, utilizando unha serie de definicións e resultados xa vistos durante o grao, procedemos a obter un teorema de suficiencia de existencia de puntos non dominados.

Definición 1.8. Sexa \mathcal{S} un conxunto e \preceq unha relación reflexiva e transitiva. Dicimos que (\mathcal{S}, \preceq) está **indutivamente ordeado** se calquera subconxunto \mathcal{C} cunha **orde total** (é dicir, a relación \preceq en \mathcal{C} é reflexiva, transitiva e antisimétrica) ou **cadea** ten un elemento minorante en \mathcal{S} .

Teorema 1.9. (Lema de Zorn). *Sexa (\mathcal{S}, \preceq) indutivamente ordeado. Entón \mathcal{S} contén alomenos un elemento minimal, é dicir, $\exists \hat{s} \in \mathcal{S}$ tal que se $s \preceq \hat{s}$, entón $\hat{s} \preceq s$.*

Observación 1.10. Neste caso, o teorema presenta diferencias con respecto á súa presentación durante o grao por ter unha preorde como hipótese (non traballamos coa propiedade antisimétrica). Sería posible cambiar a nosa versión do Lema de Zorn pola usual cunha relación de orde parcial, xa que o **Teorema 1.12** utiliza unha relación de inclusión, pero preferimos mantela así por axustarse máis á bibliografía vista. As demostracións a sendas versións atópanse na bibliografía en Kneser (1967), Arjun (2012). En ambas refírese ao elemento maximal en vez do elemento minimal.

Definición 1.11. Denominamos un conxunto \mathcal{R}_+^p -semicompacto se calquera cuberta de \mathcal{Y} da forma $\{\{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \mid y^i \in \mathcal{Y}, i \in \mathcal{I}\}$ ten unha cuberta finita, sendo $\{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c$ o complementario de $\{\{y_i\} - \mathbb{R}_+^p\}$, y^i un vector de \mathbb{R}^p contido no conxunto \mathcal{Y} e \mathcal{I} un conxunto arbitrario.

O seguinte teorema, **Teorema 1.12**, atopado en Corley (1980a) dános unha condición suficiente para, finalmente, asegurar a existencia de puntos eficientes.

Teorema 1.12. *Sexa un problema multiobxectivo da forma (1.1.1). Se \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -semicompacto, entón $\mathcal{Y}_N \neq \emptyset$.*

Demostración. Asumamos que \mathcal{Y} non é indutivamente ordeado no sentido de dominancia. Entón temos que existe un subconxunto con orde total en \mathcal{Y} que denominamos $\mathcal{A} = \{y^i \mid y^i \in \mathcal{Y}, i \in \mathcal{I}\}$ que non ten elemento minorante.

Por isto, temos que non existe $y^* \in \mathcal{Y}$ tal que se atope no ortante negativo de todos os puntos de \mathcal{A} , é dicir,

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$$

xa que senón, y^* dominaría a todos os puntos da cadea, que tería elemento minorante en \mathcal{Y} .

Entón, temos que, $\forall y \in \mathcal{Y}$, $\exists y^i \in \mathcal{A}$ tal que $y \notin \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}$. Temos que $\{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c$ é aberto para calquera $i \in \mathcal{I}$ e que $\mathcal{Y} \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c$ porque $\exists y^i$ tal que $y \in \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c$, $\forall y \in \mathcal{Y}$. Como \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -semicompacto, temos que existe un número finito de puntos $\{y^{i_1}, y^{i_2}, \dots, y^{i_n}\}$ tal que

$$\mathcal{Y} \subset \bigcup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\{y^{i_j}\} - \mathbb{R}_+^p\}^c.$$

Á parte, temos que, como \mathcal{A} tiña orde total por dominancia, ao ser finito o número de elementos $\{y^{i_1}, y^{i_2}, \dots, y^{i_n}\}$ existe $y' \in \{y^{i_1}, y^{i_2}, \dots, y^{i_n}\}$ tal que y' **domine** a todos os demais elementos $y^{i_j} \neq y'$ polo principio do bo orde. Visualizámolo cun exemplo con \mathcal{A} e \mathcal{Y} hipotéticos

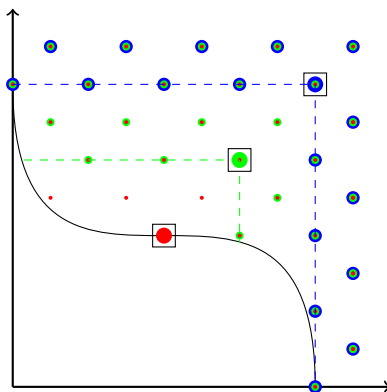


Figura 3: Representamos puntos que forman parte de $\{\{y^{i_1}\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \cap \mathcal{Y}$ (azul), $\{\{y^{i_2}\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \cap \mathcal{Y}$ (verde) e $\{\{y'\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \cap \mathcal{Y}$ (vermello). O conxunto \mathcal{Y} está delimitado pola curva negra.

na **Figura 3**. Nela representamos algúns conxuntos $\{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \cap \mathcal{Y}$ sendo $\mathcal{A} = \{y^{i_1}, y^{i_2}, \dots, y'\}$ cuxos elementos foron previamente ordeados por inclusión (hai orde total en \mathcal{A}).

Equivalentemente, isto significa que

$$\{y' - \mathbb{R}_+^p\} \subset \bigcap_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \{\{y^{i_j}\} - \mathbb{R}_+^p\} \Rightarrow \mathcal{Y} \subset \{\{y'\} - \mathbb{R}_+^p\}^c.$$

Isto é unha contradición co feito de que \mathcal{A} non tiña elemento minorante xa que $y' \in \mathcal{A}$ dominaría a todos os elementos de \mathcal{A} , pero $y' \notin \mathcal{Y}$ por hipótese. Chegando a isto, razoamos que entón \mathcal{Y} está indutivamente ordeado. Con isto, aplicamos o **Lema de Zorn**, e obtemos que temos alomenos un elemento minimal en \mathcal{Y} coa nosa relación de dominancia. Sexa y_{min} un deles. Probamos que $y_{min} \in \mathcal{Y}_N$

Se non fose así, debería existir un elemento $y^* \in \mathcal{Y}$ tal que $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $y_i^* < y_{min_i}$ e $y_j^* \leq y_{min_j}, \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Pero, isto contradí a minimalidade de y_{min} xa que sería equivalente a que $\{\{y^*\} - \mathbb{R}_+^p\} \subset \{\{y_{min}\} - \mathbb{R}_+^p\}$. Polo que $y_{min} \in \mathcal{Y}_N \neq \emptyset$. \square

Co obxectivo de proporcionar unha condición suficiente moito máis fácil e común de atopar na realidade, introducimos a **Proposición 1.14** xunto coa **Definición 1.13**.

Definición 1.13. Un conxunto \mathcal{C} é \mathcal{R}_+^p -compacto se para toda $y \in \mathcal{C}$ o conxunto $\{\{y\} - \mathbb{R}_+^p\} \cap \mathcal{C}$ é compacto.

Proposición 1.14. Se \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -compacto, \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -semicompacto. Se \mathcal{Y} é un conxunto compacto topolóxico usual en \mathbb{R}^p , \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -compacto.

Demostración. Comezamos probando o primeiro resultado. Tomando $\{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \mid y^i \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p, i \in \mathcal{I}\}$ sobrecuberta de abertos arbitraria de \mathcal{Y} . Se tomamos un $y_k \in \mathcal{Y}$ dos que conforma a nosa sobrecubertura, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &\subset \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq k}} \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \cup \{\{y^k\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \Rightarrow \\ \{\{y^k\} - \mathbb{R}_+^p\} \cap \mathcal{Y} &\subset \left(\bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq k}} \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c \right) \cap \{\{y^k\} - \mathbb{R}_+^p\} \subset \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ i \neq k}} \{\{y^i\} - \mathbb{R}_+^p\}^c. \end{aligned}$$

Como \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -compacto (por tanto limitado e pechado), e $\{y^k - \mathbb{R}_+^p\}$ é pechado, existe unha sobrecuberta de $\{y^k - \mathbb{R}_+^p\} \cap \mathcal{Y}$ finita. Se engadimos na unión $\{y^k - \mathbb{R}_+^p\}^c$, temos unha sobrecuberta finita de \mathcal{Y} , dando como conclusión que \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -semicompacto.

O segundo enunciado é consecuencia de que \mathcal{Y} é compacto, entón é limitado e pechado en \mathbb{R}^p , polo que, para calquera $y \in \mathcal{Y}$, a intersección $\{y\} - \mathbb{R}_+^p \cap \mathcal{Y}$ é pechada e limitada, dando como conclusión que \mathcal{Y} é \mathcal{R}_+^p -compacto. \square

Por último, establecemos outra condición suficiente para a existencia de puntos eficientes.

Definición 1.15. Unha función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ dise \mathbb{R}^p -semicontinua inferiormente se $f^{-1}(\{y\} - \mathbb{R}_+^p)$ é pechada $\forall y \in \mathbb{R}^p$.

Observación 1.16. Temos que este concepto é equivalente á semicontinuidade inferior de todas as funcións $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que compoñen a f (é dicir, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f_k(x_0) - \epsilon < f_k(x), \forall x \in B(x_0, \delta) \cap \mathcal{X}$, sendo $B(x_0, \delta)$ unha bóla aberta en x_0 , para todo punto $x_0 \in \mathcal{X}$).

Teorema 1.17. Sexa $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ non vacío e compacto e sexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ \mathbb{R}^p -semicontinua inferiormente. Entón $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ é \mathcal{R}_+^p -semicompacto.

Demostración. A proba en detalle pode verse en Ehrgott (2010), en concreto nas páxinas 32-33. En resumo, collemos unha cuberta aberta $\{\{y^i - \mathbb{R}_+^p\}, y_i \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p, i \in \mathcal{I}\}$ arbitraria. Por ser f \mathbb{R}^p -semicontinua inferiormente, entón as imaxes inversas de cada elemento do conxunto conforman unha cuberta aberta de \mathcal{X} . Complétámolo co feito de que \mathcal{X} é compacto (existe unha sobrecubertura finita de \mathcal{X} coas imaxes inversas con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) e que f é \mathbb{R}^p -semicontinua inferiormente (para que a sobrecuberta de \mathcal{X} pase por f a ser sobrecubertura finita de \mathcal{Y}). \square

Corolario 1.18. Sexa un problema multiobxectivo definido como en (1.1.1). Se $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é non vacío e compacto e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é continua, entón $\mathcal{Y}_N \neq \emptyset$.

Con isto recollemos dúas condicións moi usuais para que se de a existencia de puntos eficientes; **a compacidade do conxunto imaxe e a compacidade do conxunto de partida xunto coa continuidade da función obxectivo.**

1.3. Solucións eficientes débiles e estritas

Como xa vimos, entendemos a eficiencia dun punto como se dun equilibrio se tratase. Consideramos un punto non dominado no conxunto imaxe \mathcal{Y} se non podemos minimizar o seu valor nalgunha das variables obxectivo é á vez, que non aumente o seu valor en ningunha das demais. Isto son os nosos puntos de interese a priori, pero a continuación vamos a aportar dúas definicións de puntos moi útiles para a implementación dos métodos de programación multiobxectivo.

Definición 1.19. Chamamos **puntos debilmente eficientes de Pareto** a aqueles $\hat{x} \in \mathcal{X}$ tales que $\nexists x \in \mathcal{X}$ que cumpra que $f_i(x) < f_i(\hat{x}), \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Denominamos **puntos estritamente eficientes de Pareto** a aqueles $\hat{x} \in \mathcal{X}$ que cumpran que $\nexists x \in \mathcal{X}, x \neq \hat{x}$ tal que $f_i(x) \leq f_i(\hat{x}), \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Denominamos aos puntos debilmente eficientes e as súas contrapartes (debilmente) non dominadas \mathcal{X}_{dE} e \mathcal{Y}_{dN} respectivamente. De maneira análoga, os conxuntos estritamente eficientes e (estritamente) non dominados son \mathcal{X}_{sE} e \mathcal{Y}_{sN} .

Preguntámonos como de distintos son todos estes puntos. Antes de nada, facemos unha representación gráfica para realmente diferenciar todos estes conceptos:

Exemplo 1.20. Consideramos a rexión factible \mathcal{X} :

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1\},$$

que queda representada na **Figura 4**.

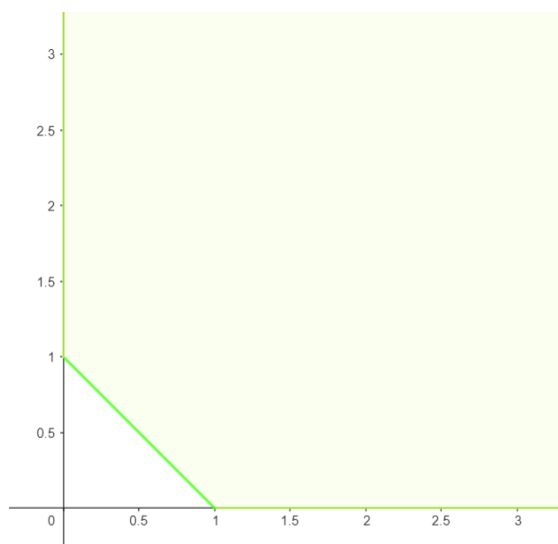


Figura 4: Representación da rexión factible do **Exemplo 1.20**.

Tomamos como función obxectivo a minimizar a seguinte:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{se } x_1 \leq 1 \\ (1, x_2) & \text{noutro caso} \end{cases}, \quad (1.3.1)$$

polo que o conxunto imaxe é o da **Figura 5**.

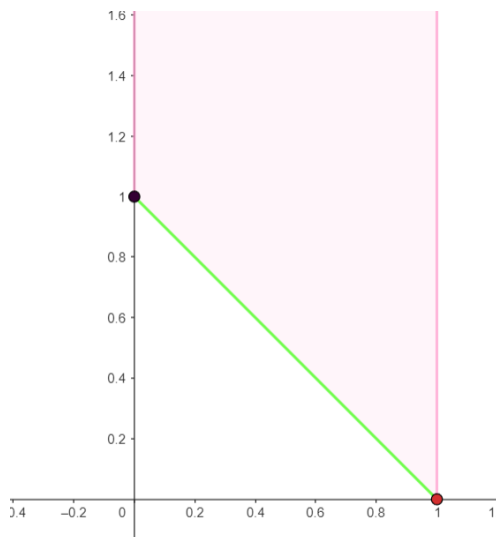


Figura 5: Representación da imaxe da rexión do **Exemplo 1.20**.

Neste caso temos os tres tipos de puntos xa mencionados:

- Puntos só **debilmente eficientes**: os puntos da forma $(0, x_2)$ con $x_2 > 1$, marcada a súa imaxe no eixo de ordenadas en rosa.
- Puntos **eficientes**, pero non estritamente eficientes: os puntos que son da forma $(x_1, 0)$, $x_1 \geq 1$, cuxa imaxe (común a todos, $(1, 0)$) está marcada en vermello.
- Puntos **estritamente eficientes**: (x_1, x_2) con $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \in [0, 1)$, cuxa imaxe está marcada en negro e verde.

Seguindo o exemplo e as definicións que xa establecimos para todos os puntos, temos que:

$$\mathcal{X}_{sE} \subset \mathcal{X}_E \subset \mathcal{X}_{dE},$$

e, á vez que temos una caracterización alternativa dos puntos non dominados, tamén a temos dos puntos non dominados debilmente e non dominados estritamente:

Definición 1.21. Dicimos que $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é un punto debilmente eficiente se e só se $\mathcal{Y} \cap \{f(\hat{x}) - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} = \emptyset$; sendo $\text{int}(\mathbb{R}_+^p) := \{z \in \mathbb{R}^p \mid z_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$ o interior do conxunto \mathbb{R}_+^p .

Tamén podemos definir os puntos eficientes estrictamente baixo a seguinte equivalencia:

$$\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE} \Leftrightarrow \hat{x} \in \mathcal{X}_E \text{ e } |\{x \text{ tales que } f(x) = f(\hat{x})\}| = 1,$$

sendo $|A|$ o cardinal do conxunto arbitrario A .

Deseguido, proporcionamos dous resultados análogos aos que vimos para a existencia de puntos eficientes, pero agora enfocados en puntos debilmente eficientes.

Teorema 1.22. *Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ non vacío e compacto. Entón $\mathcal{Y}_{dN} \neq \emptyset$.*

Demostración. Sexa $\mathcal{Y}_{dN} = \emptyset$. Entón, pola caracterización que xa dixemos, temos que para cada $y \in \mathcal{Y}$ existe unha $y' \in \mathcal{Y}$ tal que $y' \in \{\{y\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$, ou, de maneira equivalente, $y \in \{\{y'\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$. Baixo estas condicións, $y' \neq y$. Tomando a unión para toda $y \in \mathcal{Y}$,

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} y \subset \bigcup_{y' \in \mathcal{I}} \{\{y'\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\},$$

sendo $\mathcal{I} = \{y' \in \mathcal{Y} \mid \exists y \in \mathcal{Y}, y \in \{\{y'\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}\}$. Como o $\text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ é aberto, a súa traslación por y' seguirá sendo un conxunto aberto. En consecuencia, a unión de $\{\{y'\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$ é unha cuberta aberta de \mathcal{Y} , que é compacto, así que existen índices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ con $n \geq 1$ tales que:

$$\mathcal{Y} \subset \bigcup_{j=1}^n \{\{y^{i_j}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\},$$

con $y^{i_j} = y^{i_k} \Leftrightarrow j = k$. Por consecuencia da hipótese, para calquera $y^{i_k} \in \mathcal{Y}$ existe alomenos outra $l = 1, 2, \dots, n$ que teña que cumprir que $y^{i_k} \in \{\{y^{i_l}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$.

Seguindo un argumento construtivo, se collemos y^{i_1} , haberá un y^{i_*} diferente tal que $y^{i_1} \in \{\{y_{i_*}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$. Para este índice i_* , ten que haber outro distinto i_{**} , que non pode ser igual aos anteriores, e así estamos ante a seguinte cadea de inclusións estritas:

$$\{\{y^{i_1}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} \subsetneq \{\{y^{i_*}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} \subsetneq \{\{y^{i_{**}}\} + \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} \subsetneq \dots .$$

Ao haber elementos finitos, e ser transitiva a relación de inclusión estrita, chegamos a que un dos elementos domina a todos os demais; o cal é imposible (contradicimos que $\mathcal{Y}_{dN} = \emptyset$). \square

Corolario 1.23. *Sexa $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ non vacío e compacto. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é continua, entón $\mathcal{X}_{dE} \neq \emptyset$.*

Demostración. Este resultado obtémolo do **Teorema 1.22** xunto co feito de que se \mathcal{X} é compacto e f continua, entón $f(\mathcal{X})$ é compacto. \square

Observación 1.24. Observamos que neste caso en ambos teoremas non temos que utilizar o **Lema de Zorn**. Tamén destacamos que, aínda sendo os teoremas de suficiencia de puntos eficientes e debilmente eficientes similares, pode haber conxuntos onde non existan puntos eficientes, pero si debilmente eficientes. Como é o caso do **Exemplo 1.20** no que se cambiamos a función obxectivo a

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{se } x_2 > 1 \\ (x_1, 2) & \text{noutro caso} \end{cases},$$

entón temos un conxunto imaxe como o da **Figura 6**. Podemos ver que os puntos debilmente

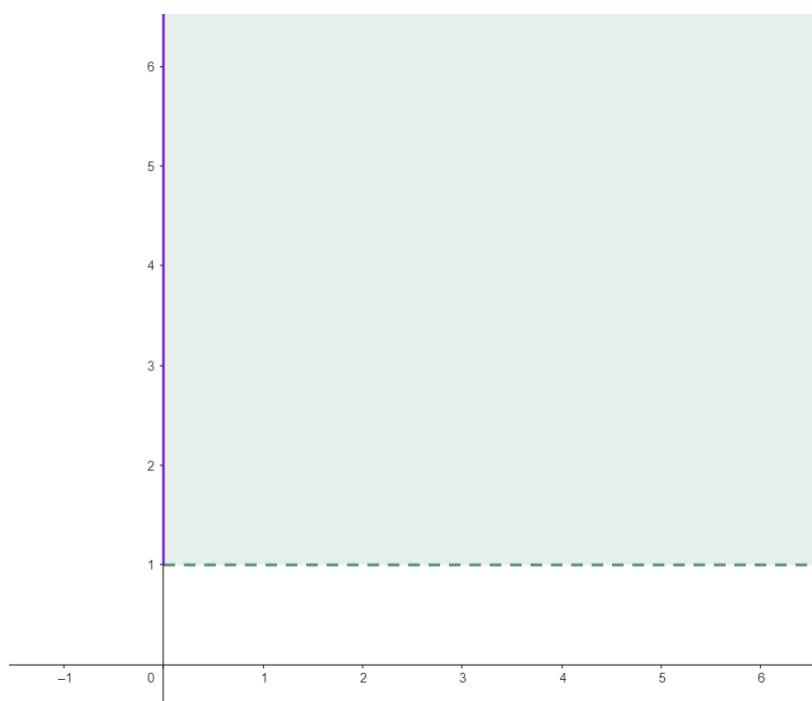


Figura 6: Representación do conxunto imaxe co novo cambio da función obxectivo

eficientes son aqueles cuxa imaxe está marcada en azul na **Figura 6**; é dicir, aqueles que son $(0, x_2) \in \mathcal{X}$, neste caso, $(0, x_2)$ con $x_1 \geq 1$; pero ningún deles é eficiente.

Salientamos, como aparece en Miettinen (2004), que a importancia dos puntos debilmente eficientes de Pareto reside non tanto neles mesmos. Isto é porque soen ser un conxunto moito máis extenso que os puntos eficientes (non se podería obter \mathcal{X}_E esixindo condicións engadidas a \mathcal{X}_{dE}). O seu interese xorde en que soen ser empregados como base teórica para os métodos de optimización multiobxectivo, pois moitos deles, como vemos no **Capítulo 2**, soen atopar estes puntos. Partindo desta premisa, mediante refinacións do método, atopan puntos eficientes.

Agora aportamos unha xustificación xeométrica para atopar todos os tipos de puntos xa falados, mediante as que chamamos **curvas e conxuntos de nivel**.

Definición 1.25. Sexa $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{x} \in \mathcal{X}$. Definimos as **curvas de nivel** como $\mathcal{L}_=(f(\hat{x})) = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) = f(\hat{x})\}$ e, aos **conjuntos de nivel** como $\mathcal{L}_\leq(f(\hat{x})) = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(\hat{x})\}$. Tamén definimos aos **conjunto de nivel estrictos** como $\mathcal{L}_<(f(\hat{x})) = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) < f(\hat{x})\}$. Temos que $\mathcal{L}_<(f(\hat{x})) = \mathcal{L}_\leq(f(\hat{x})) \setminus \mathcal{L}_=(f(\hat{x}))$.

Todo isto nos é útil para o seguinte teorema, recopilado en Ehrgott et al. (1997):

Teorema 1.26. Sexa $\hat{x} \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ dun problema multiobxectivo da forma (1.1.1). Entón temos que:

1. \hat{x} é estrictamente eficiente se e só se

$$\bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) = \{\hat{x}\}.$$

2. \hat{x} é eficiente se e só se

$$\bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) = \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_=(f_k(\hat{x})).$$

3. \hat{x} é debilmente eficiente se e só se

$$\bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_<(f_k(\hat{x})) = \emptyset.$$

Demostración.

1. Sexa \hat{x} estrictamente eficiente. Por definición, isto é equivalente a que $\nexists x \in \mathcal{X}, x \neq \hat{x}$ que cumpra que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Isto é idéntico a:

$$\nexists x \in \mathcal{X}, x \neq \hat{x} \text{ tal que } x \in \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) \iff \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) = \{\hat{x}\},$$

chegando ao resultado procurado.

2. Tomando \hat{x} eficiente, de acordo á súa definición, obtemos que $\nexists x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$ e que á vez $\exists j \in \{1, 2, \dots, p\}, f_j(x) < f_j(\hat{x})$. Isto pódese reescribir da seguinte forma:

$$\nexists x \in \mathcal{X} \text{ tal que } x \in \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) \text{ e que } \exists j \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tal que } x \in \mathcal{L}_<(f_j(\hat{x})) \iff$$

$$\bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x})) = \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_=(f_k(\hat{x})),$$

xa que todo punto de $\bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_\leq(f_k(\hat{x}))$ non pode estar en $\mathcal{L}_<(f_j(\hat{x}))$ para $j \in \{1, \dots, p\}$.

3. Finalmente, \hat{x} é debilmente eficiente por definición se e só se $\nexists x \in \mathcal{X}$ que cumpra que $f_k(x) < f(x)$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Esta condición é equivalente a

$$\nexists x \in \mathcal{X} \text{ tal que } x \in \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{<}(f_k(\hat{x})) \iff \bigcap_{k=1}^p \mathcal{L}_{<}(f_k(\hat{x})) = \emptyset.$$

□

O teorema anterior ten utilidade sobre todo cando podemos facer unha representación gráfica dos conxuntos de nivel, é dicir, sobre todo cando $n \leq 3$. Isto pode verse no **Exemplo 1.27** extraído de Ehrgott (2010).

Exemplo 1.27. Consideramos tres puntos en \mathbb{R}^2 , $x^1 = (1, 1)$; $x^2 = (1, 4)$; $x^3 = (4, 4)$. Establecemos un problema de localización, que consiste en encontrar un punto \hat{x} tal que a distancia aos tres puntos (neste caso, a nosa referencia de distancia é a \mathcal{L}^2 euclidiana) sexa mínima. Vamos a considerar dúas funcións: unha cun vector de pesos idéntico para todos os puntos $w^1 = (1, 1, 1)$ e outra con $w^2 = (2, 1, 4)$. Desta forma,

$$f = (f_1, f_2)^t; f_k(x) = \sum_{i=1}^3 w_i^k ((x_1^i - x_1)^2 + (x_2^i - x_2)^2).$$

Substituíndo os puntos e os vectores na función obxectivo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3((x_1)^2 - 4x_1 + (x_2)^2 - 6x_2) + 51 = 3(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + 12, \\ f_2(x) &= 7\left((x_1)^2 - \frac{38}{7}x_1 + (x_2)^2 - \frac{44}{7}x_2\right) + 149 = 7\left(x_1 - \frac{19}{7}\right)^2 + 7\left(x_2 - \frac{22}{7}\right)^2 + \frac{198}{7}. \end{aligned}$$

Analizamos agora as **curvas de nivel** e obtemos os conxuntos de nivel para un punto arbitrario, por exemplo, (2,2):

1. A imaxe de (2,2) en f_1 é $f_1((2,2)) = 15$. A curva de nivel entón é $\mathcal{L}_=(f_1(2,2)) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x) = 15\}$, o que quere dicir

$$f_1(x) = 15 \iff 3(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + 12 = 15 \iff (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 1,$$

que define unha circunferencia de raio 1, e centro (2, 3).

2. A imaxe de (2,2) en f_2 é $f_2((2,2)) = 41$. A curva de nivel entón é $\mathcal{L}_=(f_2(2,2)) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(x) = 41\}$, o que quere dicir:

$$f_2(x) = 41 \iff 7\left(x_1 - \frac{19}{7}\right)^2 + 7\left(x_2 - \frac{22}{7}\right)^2 + \frac{198}{7} = 41 \iff \left(x_1 - \frac{19}{7}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{22}{7}\right)^2 = \frac{89}{49},$$

que define unha circunferencia de raio $\frac{89}{49}$, e centro $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$.

Agora vemos como se representan de maneira gráfica os conxuntos de nivel $\mathcal{L}_{\leq}(f_1(2,2))$ e $\mathcal{L}_{\leq}(f_2(2,2))$ na **Figura 7**. Isto está xustificado posto que f_1 e f_2 son continuamente diferenciables e a curva de nivel é unha curva pechada.

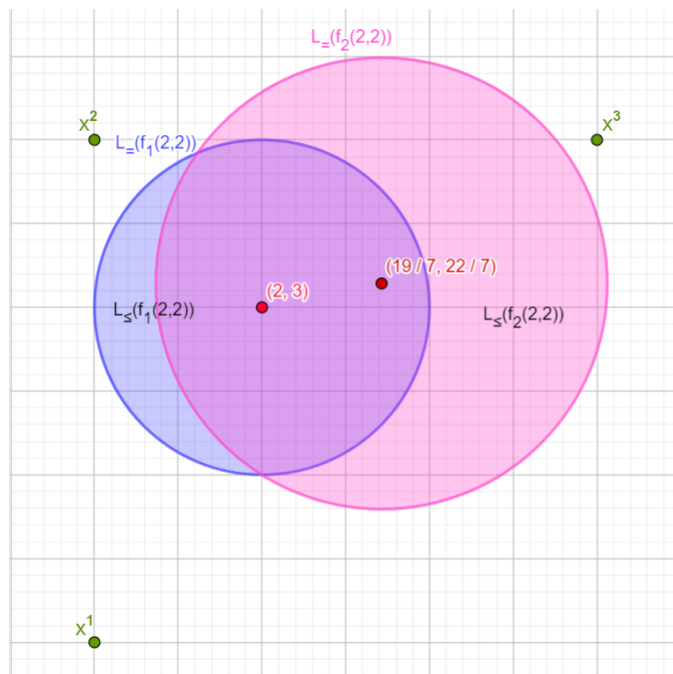


Figura 7: Representación das curvas de nivel e os conxuntos de nivel de $(2,2)$.

En maior detalle, temos que no exterior da circunferencia ambas funcións cumpren que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_2(x),$$

polo que non pertencen os exteriores de ambas circunferencias aos conxuntos de nivel de $(2,2)$.

Para o interior, vamos a ver o valor das funcións f_1 en $(2,3)$ e f_2 en $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$:

$$f_1((2,3)) = 12; f_2\left(\left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}\right)\right) = \frac{198}{7}.$$

Temos que $(2,3)$ está no interior de $\mathcal{L}_{\leq}(f_1(2,2))$ e $f(2,3) < f(2,2)$, polo que $\mathcal{L}_{\leq}(f_1(2,2)) = \{x \in \mathcal{X} \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1\}$. Co mesmo razonamento, pero con $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$, $\mathcal{L}_{\leq}(f_2(2,2)) = \{x \in \mathcal{X} \mid (x_1 - \frac{19}{7})^2 + (x_2 - \frac{22}{7})^2 \leq \frac{89}{49}\}$.

Como podemos ver na **Figura 7**, temos que incluso os propios conxuntos de nivel estritos intersecan ($(2,3)$ está en ambos círculos), polo que $(2,2)$ non é nin debilmente eficiente dacordo ao **Teorema 1.26**.

Centrémonos agora no $(2,3)$. A súa curva de nivel para f_1 é:

$$\mathcal{L}_{\leq}(f_1(2,3)) = \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) = f(2,3) = 12\} \iff 3(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + 12 = 12$$

$$\iff (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 0,$$

que consiste no propio punto. Polo tanto, tamén temos que $\{(2, 3)\} = \mathcal{L}_{\leq}(f_1(2, 3))$, o que implica que $\{(2, 3)\} = \bigcap_{k=1}^2 \mathcal{L}_{\leq}(f_k(2, 3))$, e $(2, 3)$ é (estritamente) eficiente polo **Teorema 1.26**.

Da mesma forma, podemos xustificar a eficiencia estrita de $(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})$. A curva de nivel para f_2 , tendo en conta que $f_2(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}) = \frac{198}{7}$ é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{=} \left(f_2 \left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7} \right) \right) &= \left\{ x \in \mathcal{X}, f(x) = f \left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7} \right) \frac{198}{7} \right\} \iff \\ 7 \left(x_1 - \frac{19}{7} \right)^2 + 7 \left(x_2 - \frac{22}{7} \right)^2 + \frac{198}{7} &= \frac{198}{7} \iff \left(x_1 - \frac{19}{7} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{22}{7} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Polo que temos que, dacordo á regularidade de f que $\{(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})\} = \mathcal{L}_{\leq}(f_2(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}))$ e, polo tanto $\{(\frac{19}{7}, \frac{22}{7})\} = \bigcap_{k=1}^2 \mathcal{L}_{\leq}(f_k(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}))$. Finalmente, co **Teorema 1.26**, aseguramos a eficiencia estrita do punto.

Isto todo lévanos a un corolario do **Teorema 1.26**:

Corolario 1.28. *Sexa un problema de optimización multiobxectivo definido como en (1.1.1). Definimos $\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}$ e $f^{\mathcal{P}} := (f_j : j \in \mathcal{P})^t$ como a función obxectivo restrinxida ás dimensións en \mathcal{P} do codominio da función obxectivo orixinal.*

1. *Se $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é unha solución **debilmente eficiente** con función obxectivo $f^{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}$, coas mesmas condicións con respecto á preferencia de solucións factibles, entón tamén é \hat{x} unha solución **debilmente eficiente** no problema orixinal con función obxectivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.*
2. *Se $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é unha solución **estritamente eficiente** con función obxectivo $f^{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}$, coas mesmas condicións con respecto á preferencia de solucións factibles, entón tamén é \hat{x} unha solución **estritamente eficiente** no problema orixinal con función obxectivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.*

Demostración. A demostración indúcese do **Teorema 1.26** e do feito que $f(\hat{x}) \in \mathcal{L}_{\leq}(f(\hat{x}))$ para calquera función obxectivo f . \square

O seguinte teorema, utilizado no análise convexo e atopado en Mordukhovich & Nguyen (2022), utilizarémolo para proporcionar unha dobre implicación no anterior corolario. Isto é baixo a condición de compacidade do noso espazo \mathcal{X} de partida e só no caso dos puntos debilmente eficientes.

Teorema 1.29. (Teorema de Helly) *Sexa $p \geq n + 1$ e sexan $C_1, C_2, \dots, C_p \subset \mathbb{R}^n$ conxuntos convexos. Entón temos que todas as coleccións de $n + 1$ conxuntos $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_{n+1}}\}$ cumpren*

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} C_{i_j} \neq \emptyset$$

se e só se

$$\bigcap_{i=1}^p C_i \neq \emptyset.$$

Demostración. Partindo de que calquera colección $\{C'_{i_1}, \dots, C'_{i_{n+1}}\}$ de $n+1$ conxuntos cumprirá

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} C'_{i_j} \supset \bigcap_{i=1}^p C_i,$$

temos que se a intersección dos $C_i, i \in \{1, \dots, p\}$ é non nula, tampouco o é a intersección de calquera coleccións de $n + 1$ conxuntos. A implicación inversa é a realmente complexa, está incluída en Mordukhovich & Nguyen (2022) nas páxinas 430-431. \square

Observación 1.30. Podemos cambiar a estrutura do teorema a que haberá unha colección de $n + 1$ elementos $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_{n+1}}\}$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} C_{i_j} = \emptyset$$

se e só se

$$\bigcap_{i=1}^p C_i = \emptyset.$$

Isto nos permite formular a seguinte proposición:

Proposición 1.31. *Sexa un problema de optimización multiobxectivo formulado como en (1.1.1) onde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ son funcións convexas, e $p > n$. Entón $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é **debilmente eficiente** se e só se hai un subconxunto $\mathcal{P} \in \{1, \dots, p\}, 0 < |\mathcal{P}| \leq n + 1$ tal que \hat{x} é unha solución **debilmente eficiente** do problema coa nova función obxectivo $f^{\mathcal{P}} = (f_k : k \in \mathcal{P})^t, f^{\mathcal{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.*

*Isto trasládase entón a que, considerando $\mathcal{X}_{dE}(f^{\mathcal{P}})$ e $\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}})$ os conxuntos **debilmente eficiente** e **eficientes** do problema con función obxectivo $f^{\mathcal{P}}$,*

$$\mathcal{X}_{dE}(f) = \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ 0 < |\mathcal{P}| \leq n+1}} \mathcal{X}_{dE}(f^{\mathcal{P}}).$$

Demostración. Isto é resultado do **Corolario 1.28** e do anterior **Teorema de Helly**. \square

Tendo isto, podemos aínda afondar máis no feito de que poidamos traballar coa unión de problemas con funcións obxectivo restrinxidas para obter os puntos debilmente eficientes. Vamos a incluír un teorema que atopamos en Malivert & Boissard (1994) para o que vamos a necesitar unha proposición previa tamén atopada en Malivert & Boissard (1994) no que substituíremos a unión de puntos debilmente eficientes por puntos eficientes ao uso.

Proposición 1.32. *Se temos un problema de optimización multiobxectivo como en (1.1.1) onde f_k sexan funcións convexas e \mathcal{X} é convexo, entón*

$$\mathcal{X}_{dE}(f) = \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ \mathcal{P} \neq \emptyset}} \mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}).$$

Demostración. Primeiro facemos a inclusión cara a dereita e logo a inclusión cara á esquerda. En ambas situacións, xustificárase por contrarrecíproco.

1. $\mathcal{X}_{dE}(f) \supset \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ \mathcal{P} \neq \emptyset}} \mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}})$. Se temos $x \in \mathcal{X}$ arbitrario tal que $x \notin \mathcal{X}_{dE}(f)$ entón quere dicir que existe $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x') < f_i(x)$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$; isto implica que para todo conxunto $\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}$, temos que $f_k(x') < f_k(x)$, $\forall k \in \mathcal{P}$. En conclusión, $x \notin \{\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}), \mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}\}$
2. $\mathcal{X}_{dE}(f) \subset \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ \mathcal{P} \neq \emptyset}} \mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}})$. Sexa $\hat{x} \notin \{\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}), \mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}\}$. Entón $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E(f)$, e por tanto, para $\{1, \dots, p\}$ temos que $\exists i_1 \in \{1, \dots, p\}$ e unha $x^1 \in \mathcal{X}$ tal que $f_{i_1}(x^1) < f_{i_1}(\hat{x})$ e $f_i(x^1) \leq f_i(\hat{x})$, $i \neq i_1$. Definimos así $\mathcal{P}_1 := \mathcal{P} \setminus \{i_1\}$.

Este conxunto o utilizamos co principio de indución para probar o seguinte: para $l = 1, \dots, p$ hai sempre un conxunto \mathcal{P}_l de $p - l$ elementos e unha solución factible x^l tal que $f_i(x^l) \leq f_i(\hat{x})$ cando $i \in \mathcal{P}_l$ e $f_i(x^l) < f_i(\hat{x})$ se $i \notin \mathcal{P}_l$. Unha vez probado, cando $l = p$, temos unha solución x^p tal que $f_i(x^p) < f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, o que implica que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_{dE}(f)$.

O caso $l = 1$ xa está feito a partir da definición de punto non eficiente, e agora quedanos presupoñer que é certo para un determinado m e probar que a propiedade se cumpre para $m+1$. Sexa $\mathcal{P}_m = \{1, \dots, p\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$. Entón existe $x^m \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x^m) \leq f_i(\hat{x})$ cando $i \in \mathcal{P}_m$ e $f_i(x^m) < f_i(\hat{x})$ se $i \notin \mathcal{P}_m$. Como $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}_m})$, pola nosa hipótese inicial, haberá un índice $i_{m+1} \in \mathcal{P}_m$ tal que exista $\tilde{x}^{m+1} \in \mathcal{X}$ que cumpra que $f_{i_{m+1}}(\tilde{x}^{m+1}) < f_{i_{m+1}}(\hat{x})$ e $f_i(\tilde{x}^{m+1}) \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \mathcal{P}_m$.

Este punto non está requirido a priori que cumpra as desigualdades estritas para f_i , $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$. Co fin de atopar un punto que si o faga, tomamos $x^{m+1} = \lambda x^m + (1 - \lambda)\tilde{x}^{m+1}$ con $\lambda \in (0, 1)$. $x^{m+1} \in \mathcal{X}$ por convexidade de \mathcal{X} e collendo λ suficientemente pequena,

tamén obtemos que por ser \mathcal{X} convexo e f_i convexa (e por tanto continua en calquera entorno aberto), tamén é continua en x^m , co que podemos dicir que

$$f_i(x^{m+1}) < f_i(\hat{x}), \forall i \in \{i_1, \dots, i_m\}.$$

Simultáneamente, temos que

$$f_{i_{m+1}}(x^{m+1}) \leq \lambda f_{i_{m+1}}(x^m) + (1 - \lambda) f_{i_{m+1}}(\tilde{x}^{m+1}),$$

por convexidade de $f_{i_{m+1}}$. Logo, pola elección de \tilde{x}^{m+1} e as propiedades de x^m

$$\lambda f_{i_{m+1}}(x^m) + (1 - \lambda) f_{i_{m+1}}(\tilde{x}^{m+1}) < \lambda f_{i_{m+1}}(\hat{x}) + (1 - \lambda) f_{i_{m+1}}(\hat{x}) = f_{i_{m+1}}(\hat{x}).$$

Por tanto atopamos para $m + 1$ un subconxunto $\mathcal{P}_{m+1} \subset \{1, \dots, p\}$ de cardinalidade $p - (m + 1)$ e unha solución x^{m+1} que cumpre que $f_i(x^{m+1}) \leq f_i(\hat{x})$ cando $i \in \mathcal{P}_{m+1}$ e $f_i(x^{m+1}) < f_i(\hat{x})$ se $i \in \{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}\}$.

Concluimos entón o principio de indución ao poderse facer esta construción para calquera $l \in \{1, \dots, p\}$, e entón, como dixemos antes, concluimos que $\exists x \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x) < f_i(\hat{x}), \forall i \in \{1, \dots, p\}$, e entón $\hat{x} \notin \mathcal{X}_{dE}(f)$.

□

Damos paso ao seguinte teorema, tamén atopado en Malivert & Boissard (1994), que combina a **Proposición 1.32** co **Teorema de Helly**.

Teorema 1.33. *Se estamos ante un problema multiobxectivo da forma (1.1.1) onde f_k sexan funcións convexas e \mathcal{X} é convexo e non nulo, entón*

$$\mathcal{X}_{dE}(f) = \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n+1}} \mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}).$$

Demostración. Tendo en conta a **Proposición 1.32**, a inclusión $\mathcal{X}_{dE}(f) \subset \bigcup \{\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}), \mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}, 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n + 1\}$ no caso onde $p > n + 1$ é o único que habería que probar como certo, pois é onde a proposición anterior non nos afirma nada.

Ao igual que na **Proposición 1.32**, utilizamos o contrarrecíproco para probar o teorema. Sexa $\hat{x} \in \mathcal{X}$ onde $\hat{x} \notin \bigcup \{\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{P}}), \mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\}, 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n + 1\}$. Sexa $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, p\}$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$, $|\mathcal{J}| \leq n + 1$. Baixo a nosa hipótese $\hat{x} \notin \bigcup \{\mathcal{X}_E(f^{\mathcal{I}}), \mathcal{I} \subset \mathcal{J}\}$, e pola **Proposición 1.32**, $\hat{x} \notin \mathcal{X}_{dE}(f^{\mathcal{J}})$ e entón haberá unha $x^{\mathcal{J}}$ tal que $f_j(x^{\mathcal{J}}) < f_j(\hat{x}), \forall j \in \mathcal{J}$.

Definimos agora os seguintes conxuntos:

$$B_i = \{x^{\mathcal{J}} \mid \mathcal{J} \subset \{1, \dots, p\}, \mathcal{J} \neq \emptyset, |\mathcal{J}| \leq n + 1, i \in \mathcal{J}\},$$

e, logo de ordear os finitos elementos de cada B_i :

$$C_i = \left\{ \sum_{x_k^{\mathcal{J}} \in B_i} a_k x_k^{\mathcal{J}} \mid a_k \geq 0, \sum_{k=1}^{|B_i|} a_k = 1 \right\}.$$

Este conxunto é a envoltura convexa de B_i . Como para todo $x^{\mathcal{J}} \in B_i$ cúmprese que $f_i(x^{\mathcal{J}}) < f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, entón, por convexidade os puntos de C_i cumprirán **(1.3.2)**

$$f_i(x') < f_i(\hat{x}), \quad \forall x' \in C_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}. \quad (1.3.2)$$

Se fixamos neste caso unha \mathcal{J} , temos que existe $\{\bar{x}^{\mathcal{J}}\} \in \bigcap \{C_i, i \in \mathcal{J}\}$. Como a interesección é non nula e os conxuntos C_i son convexos, entón podemos aplicar o **Teorema de Helly**, e temos que $\bigcap \{C_i, i \in \{1, \dots, p\}\} \neq \emptyset$, e polo visto en **(1.3.2)**, $\exists x \in \mathcal{X}$ (non hai problema, por ser convexo \mathcal{X}) tal que $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ e, finalmente, $x \notin \mathcal{X}_{dE}(f)$.

□

Podemos pensar de forma secuencial que se a **Proposición 1.31** e o **Teorema 1.33** existen, pode haber un resultado similar nos puntos estritamente eficientes. Desbotamos esta idea cun exemplo accesible en Ehrgott & Nickel (1994) no que vemos que

$$\mathcal{X}_{sE}(f) = \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1, \dots, p\} \\ 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n+1}} \mathcal{X}_{sE}(f^{\mathcal{P}})$$

non se sostén.

Exemplo 1.34. Consideramos o problema de optimización multiobxectivo formulado como en **(1.1.1)** coas seguintes condicións:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (x_1, \dots, x_n, -x_1, \dots, -x_n)^t \\ &\text{suxeito a} && \mathcal{X} \in [-1, 1]^n. \end{aligned}$$

Temos unha solución estritamente eficiente: $\hat{x} = (0, \dots, 0)^t$. Malia isto, se consideramos reducir o número de compoñentes da función obxectivo a unha colección $\mathcal{P} \in \{1, \dots, p\}$ con $|\mathcal{P}| < p = 2n$ temos unha das seguintes casuísticas:

1. Digamos que $f^{\mathcal{P}}$ ten como unha das súas compoñentes x_i pero non $-x_i$. Entón temos que \hat{x} non é eficiente. Sexa o vector $-e_i \in \mathcal{X}$, que ten que como coordenadas -1 na compoñente i e 0 nas restantes. Dáse a igualdade $f_k(-e_i) = f_k(\hat{x})$, $\forall k \in \mathcal{P} \setminus \{i\}$ e, á vez, sendo $i \in \mathcal{P}$ pola condición inicial, $f_i(-e_i) < f_i(\hat{x})$.

De maneira análoga, se $-x_i$ se atopa entre as compoñentes de $f^{\mathcal{P}}$ e x_i non, \hat{x} non é eficiente. Isto é porque o vector e_i con coordenada i igual a 1, e na que as restantes teñen valor 0, cumpre que $f_{i+n}(e_i) < f_{i+n}(\hat{x})$ e, á vez, $f_k(e_i) = f_k(\hat{x}), \forall k \in \mathcal{P} \setminus \{i+n\}$ (o índice $i+n$ está en \mathcal{P} para que $-x_i$ sexa unha compoñente de $f^{\mathcal{P}}$).

2. Se non se da ningunha das casuísticas anteriores; temos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que, para preservar que $|\mathcal{P}| < 2n$, nin x_j nin $-x_j$ son compoñentes de $f^{\mathcal{P}}$. Isto fai que \hat{x} non sexa estritamente eficiente, xa que $f_i(e_j) = f_i(\hat{x}); \forall i \in \{1, \dots, 2n\} \setminus \{j, j+n\}$ e, como $\mathcal{P} \subset \{1, \dots, 2n\} \setminus \{j, j+n\}$, temos que \hat{x} non é estritamente eficiente.

1.4. Puntos propiamente eficientes de Pareto

Xa feita a nosa clasificación previa de puntos **debilmente eficientes**, **eficientes** e **estritamente eficientes**, vemos que o requisito común para todos eles sería non ser “dominada” (como concepto xeral) para ningunha proxección da función obxectivo de maneira estrita ou non estrita, dependendo da súa clasificación. Isto deixa de lado o feito de que certas solucións de Pareto supoñen, fronte ao conxunto imaxe das solucións eficientes, unha redución moi lixeira dunha (ou varias) $f_i(x)$, que xa lle outurga o título de “eficiente” a unha \hat{x} , a cambio de aumentar substancialmente todas as demais $f_j(x)$. Para isto, xurdiron varias definicións para restrinxir as solucións de Pareto co fin de que esta posibilidade non se dese.

Comezamos presentando unha definición dos chamados **puntos propiamente eficientes (de Pareto)** que nos permitiría distinguir a aqueles puntos eficientes que si presentan unha compensación razoable daqueles que non.

Definición 1.35. Sexa un problema de optimización multiobxectivo da forma (1.1.1). Definimos como **puntos propiamente eficientes (de Pareto)** (no sentido de Geoffrion (1968)) como aqueles $\hat{x} \in \mathcal{X}$ que son eficientes e nos cales existe $M \in \mathbb{R}$, sendo $M > 0$ tal que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ e $\forall x \in \mathcal{X}$ cumprindo que $f_i(x) < f_i(\hat{x})$, entón existe alomenos unha $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ e

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

Temos tamén que $f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$ é un **punto propiamente non dominado**.

Esta definición de **puntos propiamente eficientes no sentido de Geoffrion** é a que maiormente está recoñecida como definición xenérica de “puntos propiamente eficientes de Pareto”. Malia isto, hai múltiples definicións as cales varían moito dacordo ao autor da bibliografía. Temos as definicións de Borwein e Benson recollidas en Ehrgott (2010), as cales son idénticas en caso de funcións convexas e \mathcal{X} conxunto convexo; a definición de Henig, que a atopamos en Miettinen (2004) e xeneraliza as dúas anteriores,...

Engadimos agora unha nova definición, a cal se circunscribe só a un problema multiobxectivo onde \mathcal{X} está definido por unha función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable da seguinte forma:

$$x \in \mathcal{X} \iff \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

e cunha función obxectivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tamén continuamente diferenciable. En resumo, tendo en conta (1.4.1), temos un problema de optimización multiobxectivo formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{suxeito a} && g_i(x) \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

con $g = (g_1, \dots, g_m)^t$ e $f = (f_1, \dots, f_p)^t$ funcións continuamente diferenciables. Con este tipo de problemas podemos suxerir a seguinte definición, establecida por Kuhn & Tucker (1951).

Definición 1.36. Sexa un problema multiobxectivo determinado como en (1.4.2) e con f e g continuamente diferenciables. Definimos como **puntos propiamente eficientes (de Pareto) no sentido de Kuhn-Tucker** a un punto $\hat{x} \in \mathcal{X}$ se é eficiente e non existe ningún $d \in \mathbb{R}^n$ tal que cumpra:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_i(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \\ \langle \nabla f_k(\hat{x}), d \rangle &< 0 \quad \text{para algún } k \in \{1, \dots, p\} \\ \langle \nabla g_j(\hat{x}), d \rangle &\leq 0 \quad \forall j \in \{l \in \{1, \dots, m\} \mid g_l(\hat{x}) = 0\}, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

sendo $\langle a, b \rangle$ o produto escalar usual entre dous vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Presentamos agora o **Exemplo 1.37** para ter un exemplo sinxelo no que ver en que contexto se precisa realmente distinguir un punto propiamente eficiente, baixo calquera definición vista:

Exemplo 1.37. Definimos $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, x_1 \leq 1, x_2 \leq 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0, x_1 - 1 \leq 0, x_2 - 1 \leq 0\}$, e a función obxectivo é $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. A restructuración do conxunto de solucións factibles ten como obxectivo poder expresar o problema de optimización nas condicións que aparecen en (1.4.2). Representamos na **Figura 8** o conxunto imaxe das solucións factibles \mathcal{Y} , marcando os puntos eficientes.

Vemos mediante este exemplo que $(0, 1)$ no sentido de Geoffrion non é propiamente eficiente e $(1, 0)$ non é propiamente eficiente no sentido de Kuhn-Tucker.

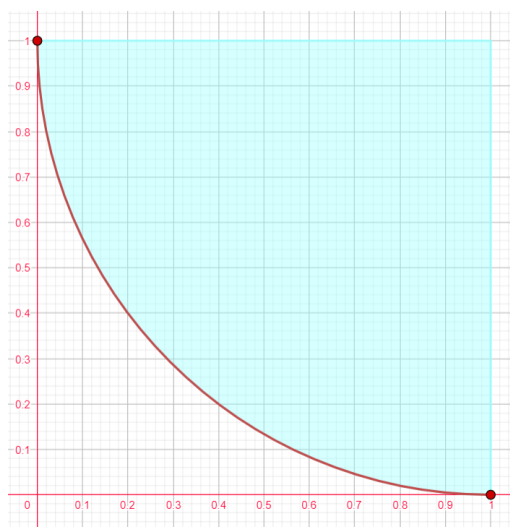


Figura 8: Representación do conxunto imaxe (en vermello) xunto cos puntos eficientes (en azul claro)

- Punto $(0,1)$: para probar que non é un **punto propiamente eficiente no sentido de Geoffrion**, vamos a tomar unha sucesión de puntos eficientes, neste caso

$$\{b_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 - \sqrt{\frac{2n-1}{n^2}} \right) \right\}$$

que cumpren que $f_2(b_n) < f_2((0,1))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{b_n\} = (0,1)$ debido a:

$$\frac{2n-1}{n^2} \in (0,1], \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0.$$

O problema que temos é que, a única compoñente que cumpre que $f_i((0,1)) < f_i(b_n)$ en calquera $n \in \mathbb{N}$ é con $i = 1$ e temos que

$$\frac{f_2((0,1)) - f_2(b_n)}{f_1(b_n) - f_1((0,1))} = n \sqrt{\frac{2n-1}{n^2}} = \sqrt{2n-1},$$

polo que se $n \rightarrow +\infty$, entón a razón é non limitada e impide a existencia dunha $M > 0$ que a acote. Entón $(0,1)$ non pode ser un **punto propiamente eficiente no sentido de Geoffrion**.

- Punto $(1,0)$: probamos que non é **propriamente eficiente no sentido de Kuhn-Tucker** atopando unha $d \in \mathbb{R}^2$ tal que se cumbran as condicións **(1.4.3)**.

Comprobamos neste caso que $d = (-1, 0)$ cumpre todas as condicións xa que

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{I}_2$$

é a matriz identidade de orde 2, polo que $\langle \nabla f_1((1,0)), (-1,0) \rangle = -1$ e $\langle \nabla f_2((1,0)), (-1,0) \rangle = 0$. Polo tanto, temos que cumpre as condicións referentes á función obxectivo. Con respecto ás restricións, temos que:

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y-1) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que $g(1,0) = (0,0,1)$. Só hai que comprobar a última condición respecto de $g_1(x)$ e $g_2(x)$, que neste caso se cumpren xa que $\langle \nabla g_1((1,0)), (-1,0) \rangle = \langle (0,-2), (-1,0) \rangle = 0$ e $\langle \nabla g_2((1,0)), (-1,0) \rangle = \langle (1,0), (-1,0) \rangle = -1 < 0$ polo que, temos que $d = (-1,0)$ fai que o punto $(1,0)$ cumpra todas as condicións **(1.4.3)**. En conclusión, $(1,0)$ non é un **punto propiamente eficiente no sentido de Kuhn-Tucker**.

Os puntos **propriamente eficientes segundo Geoffrion** e os **propriamente eficientes segundo Kuhn-Tucker** son equivalentes en certas circunstancias. Presentamos dous teoremas que relacionan os puntos propiamente eficientes en cada un dos sentidos.

Teorema 1.38. *Sexa $f_i, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que compoñen f e g respectivamente, funcións que definen un problema de optimización multiobxectivo no contexto de **(1.4.3)**. Temos que se f_i, g_j son funcións convexas $\forall i \in \{1 \dots, p\}$, $\forall j \in \{1 \dots, m\}$ e continuamente diferenciables, un punto $\hat{x} \in \mathcal{X}$ **propriamente eficiente no sentido de Kuhn-Tucker** é **propriamente eficiente no sentido de Geoffrion**.*

Demostración. A proba está incluída en Ehrgott (2010) nas páxinas 58 (contextualización) e 83-84. Tamén está incluída en Sawaragi et al. (1985) a relación entre ambos teoremas. \square

Para o seguinte teorema hai que contextualizar unha definición previa:

Definición 1.39. Un problema de optimización multiobxectivo no contexto de **(1.4.3)** dise que satisfai a **condición de Kuhn-Tucker para as restricións** nun punto \hat{x} se para calquera $d \in \mathbb{R}^n$ con $\langle \nabla g_j(\hat{x}), d \rangle \leq 0$, toda $j \in \{l \in \{1, \dots, m\} \mid g_l(\hat{x}) = 0\}$ hai: unha $\tilde{t} > 0$, unha función $\alpha : [0, \tilde{t}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e outro valor $\beta > 0$ tales que: $\alpha(0) = \hat{x}$; $g(\alpha(t)) \leq 0$, $\forall t \in [0, \tilde{t}]$; e $\alpha'(0) = \beta d$.

Teorema 1.40. *Se un problema de optimización multiobxectivo no contexto de **(1.4.3)** cumpre a condición de Kuhn-Tucker para as restricións nun punto \hat{x} que é **propriamente eficiente no sentido de Geoffrion**, entón \hat{x} é **propriamente eficiente no sentido de Kuhn-Tucker**.*

Demostración. A proba está detallada en Ehrgott (2010) nas páxinas 57-58. \square

Capítulo 2

Métodos de optimización multiobxectivo

A medida que se avanzou na investigación operativa, xurdiron diversos métodos para conseguir obter solucións eficientes dun problema multiobxectivo. No caso de funcións obxectivo que vaian de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} , hai múltiples métodos para obter solucións óptimas, dependendo do tipo de función obxectivo ou das solucións que queiramos atopar. Teríamos exemplos no caso lineal, onde recurrimos ao método símplex (Salazar (2001)); exemplos de solucións enteiras, utilizando o método de ramificación e poda (Salazar (2001)); métodos de punto interior (por exemplo, o algoritmo de Karmarkar (Nesterov & Nemirovskii (1994)),... O problema que xa podemos intuír no anterior capítulo é que mentres que no caso unidimensional ordear as solucións preferidas pola función obxectivo consiste nun orde total en \mathbb{R} , isto non se aplica en \mathbb{R}^n , con $n > 2$.

Tendo en conta todo o anterior, describimos varios métodos de optimización multiobxectivo, ilustrarémolos empregando un exemplo común, e introducimos en cada un deles varios resultados de existencia de puntos eficientes para cada metodoloxía, e outros resultados de interese. A división dos métodos que explicamos está baseada en Hwang et al. (1980) e Ehrgott (2010):

■ Segundo a preferencia do responsable de tomar a decisión.

△ Métodos a posteriori. Obtemos as solucións eficientes, e logo, entre as solucións atopadas, podemos ter en conta a preferencia de quen toma a decisión. Aquí incluímos: o **método do pesos ponderados**, o **método das ε -restricións**, o **método híbrido**, o **método das restricións elásticas** e o **método símplex multiobxectivo**.

△ Métodos interactivos. Os factores con maior importancia para o decisor final temos en conta a medida que se vai levando a cabo. Non explicamos ningunha metodoloxía desta categoría, pero incluímos ao método de compensación interactiva de valor sustituto

(ISWT) como exemplo teórico, que se atopa explicado en Chankong & Haimes (1978).

△ Métodos a priori. A preferencia de quen toma a decisión témola en conta dende antes de levar a cabo o proceso. Un método dentro desta categoría é o **método lexicográfico**.

■ Segundo a técnica utilizada.

△ Métodos de escalarización. Aqueles nos que creamos unha función auxiliar avaliada en \mathbb{R} relacionada coa función obxectivo do noso problema. En moitas situacións, a función obxectivo orixinal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ cumpre que $n \gg p$, polo que reducir a dimensión do codominio supón unha gran axuda para obter unha orde total á hora de obter solucións. Nesta categoría están o **método dos pesos ponderados**, o **método das ε -restricións**, o **método híbrido** e o **método das restricións elásticas**.

△ Métodos de non escalarización: son os que non utilizan a técnica anterior e incluímos aos métodos restantes xa mencionados.

Todas as metodoloxías mencionadas son explicadas nas súas respectivas seccións e comezamos co método no que abarcamos máis contido e que é un dos máis utilizados nun caso xenérico: o **método dos pesos ponderados**.

2.1. Método dos pesos ponderados

O método parte dun problema multiobxectivo da forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^t \\ \text{suxeito a} \quad & x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

A partires del, construímos e resolvemos o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \\ \text{suxeito a} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

con $\lambda_k \geq 0$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Reunimos os factores $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ no vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ que denominamos **vector de pesos**. Denotamos aos puntos $y = f(x)$ que minimizan no conxunto imaxe \mathcal{Y} o problema (2.1.2) como

$$\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) := \left\{ y' \in \mathcal{Y} \mid \langle \lambda, y' \rangle = \min_{y \in \mathcal{Y}} \langle \lambda, y \rangle \right\}.$$

O algoritmo na súa totalidade consiste en ir tomando $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ distintos e ver que puntos compoñen a unión de $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$. Engadimos deseguido un problema que utilizamos como exemplo para ilustrar todos os métodos.

Exemplo 2.1. Definimos o problema multiobxectivo (**P**) como segue:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + 2x_2) \\
 &\text{suxeito a} && x_1 \geq 1 \\
 &&& x_2 \geq 1 \\
 &&& x_1 + x_2 \geq 3,
 \end{aligned} \tag{P}$$

que, por ser un problema con función obxectivo e restricións no dominio lineais, correspóndese cun problema de programación multiobxectivo lineal. Na **Figura 9**, representamos o conxunto \mathcal{X} e os seus puntos eficientes.

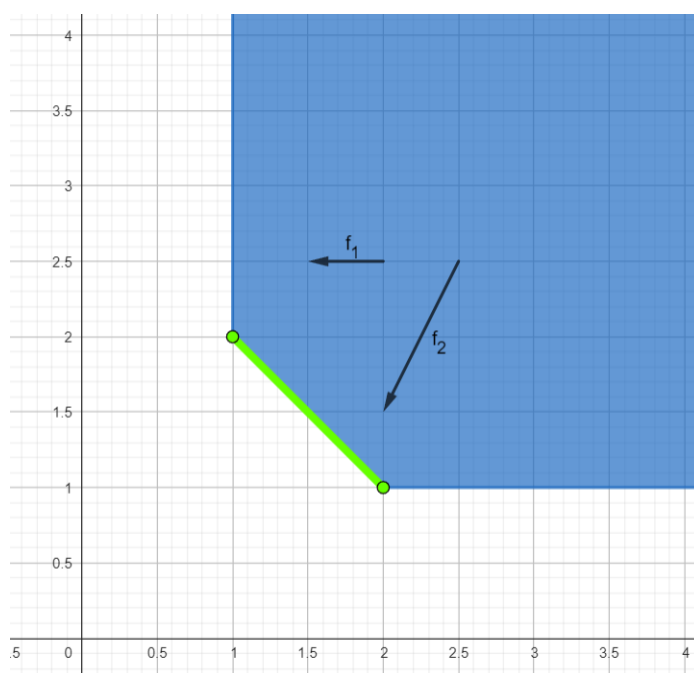


Figura 9: Representación de \mathcal{X} (en azul) no problema P, das direccións de minimización das funcións obxectivo (vectores en negro) e os puntos eficientes (en verde).

Se aplicamos o **método dos pesos ponderados** para unha soa λ a este problema, tomando por exemplo como vector de pesos $\lambda = (1, 1)$, obtemos o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && 2(x_1 + x_2) \\
 &\text{suxeito a} && x_1 \geq 1 \\
 &&& x_2 \geq 1 \\
 &&& x_1 + x_2 \geq 3.
 \end{aligned}$$

Neste caso, o mínimo da función obxectivo dáse cando $2(x_1 + x_2) = 6$, por mor das restricións da rexión factible. Con axuda da **Figura 10**, podemos ver cales son os puntos en $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$.

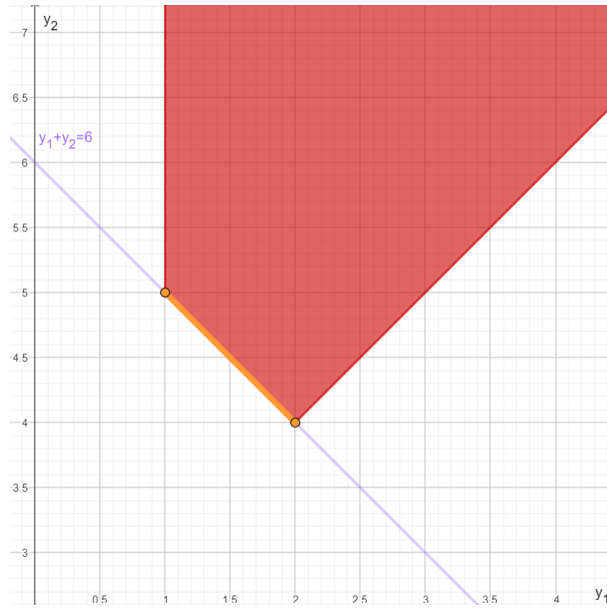


Figura 10: Representación de \mathcal{Y} (en vermello) do problema P, da recta $y_1 + y_2 = 6$ (en rosa) e dos puntos en $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ (en laranxa).

Neste caso, todos os puntos non dominados do noso problema orixinal correspóndese con $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$:

$$\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) = \{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} \mid y_1 + y_2 = 6\} = \{(f(x_1), f(x_2)) \mid f_1(x) + f_2(x) = 6\}.$$

Pese a este exemplo, nun principio non podemos concluír se obtemos sempre puntos non dominados dun problema (2.1.1) resolvendo para unha certa λ o problema (2.1.2); nin tampouco se, ao resolver o problema (2.1.2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^p$, obtemos todos os puntos non dominados do problema (2.1.1). Estas son as aspiracións do método e procuramos buscar condicións para que se den. Antes de nada, necesitamos facer unha serie de definicións previas:

Definición 2.2. Definimos os seguintes conxuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{Y}) &:= \bigcup_{\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k > 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \\ \forall k \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right\}} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) \\ \mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) &:= \bigcup_{\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \\ \forall k \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right\}} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}). \end{aligned}$$

Observación 2.3. Debemos notar que a normalización do **vector de pesos** en $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ e $\mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$ non afecta a $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$; o único que diferencia realmente a ambos conxuntos é que no **vector de pesos** cada λ_k do vector sexa non negativo ou positivo. Evidentemente, temos que $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_0(\lambda, \mathcal{Y})$.

Definición 2.4. Un conxunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ é \mathbb{R}_+^p -convexo se $\{\mathcal{Y} + \mathbb{R}_+^p\} = \{\mathcal{Y} + \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}\}\}$ é convexo. Se \mathcal{Y} é convexo, é \mathbb{R}_+^p -convexo.

Definición 2.5. Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ un conxunto non vacío. Definimos a súa **envoltura afín** como $afin(\mathcal{Y})$ sendo o subespazo afín mínimo que conteña a \mathcal{Y} e se atope dentro de \mathbb{R}^p . Tendo en conta isto, definimos en xeral o **interior relativo** dun conxunto como:

$$intrel(\mathcal{Y}) := \{y' \in \mathcal{Y} \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(y', \varepsilon) \cap afin(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}\},$$

sendo $B(y', \varepsilon)$ a bóla aberta euclidiana usual en \mathbb{R}^p de radio ε e centro y' .

De maneira informal, supón considerar o interior dun conxunto \mathcal{Y} no subespazo afín no que está insertado, non nun espazo vectorial que poida ter maior dimensión e no que, por tanto, \mathcal{Y} non tería interior. Se \mathcal{Y} é tamén convexo, unha caracterización do seu **interior relativo** é:

$$intrel(\mathcal{Y}) = \{y' \in \mathcal{Y} \mid \forall y \in \mathcal{Y}, \exists \theta > 1 \text{ tal que } (\theta y + (1 - \theta)y') \in \mathcal{Y}\}.$$

Definidos xa estes conceptos, podemos introducir o **Lema 2.6** recollido en Rockafellar (1970).

Lema 2.6. Sexan $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subset \mathbb{R}^p$ dous conxuntos non vacíos e convexos. Entón $intrel(\mathcal{Y}_1) \cap intrel(\mathcal{Y}_2) = \emptyset$ se e só se existe $y' \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$\begin{aligned} \inf_{y \in \mathcal{Y}_1} \langle y, y' \rangle &\geq \sup_{y \in \mathcal{Y}_2} \langle y, y' \rangle \\ \text{e } \sup_{y \in \mathcal{Y}_1} \langle y, y' \rangle &> \inf_{y \in \mathcal{Y}_2} \langle y, y' \rangle. \end{aligned}$$

Dise entón que os conxuntos están **propriadamente separados** por un hiperplano con vector normal y' .

O resultado anterior dá lugar ao seguinte corolario:

Corolario 2.7. Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ un conxunto non vacío, pechado, convexo e y_0 un punto tal que $y_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \mathcal{Y}$. Entón existe $y' \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tal que $\langle y', y_0 \rangle < \alpha < \langle y', y \rangle$, $\forall y \in \mathcal{Y}$

Demostración. Comezamos a demostración co **Lema 2.6**, tomando $\mathcal{Y}_1 = y_0$, $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}$ e, na desigualdade estrita (por ser estrita, o vector y' non é nulo), multiplicamos ambos termos por -1 . Temos entón que $\langle -y', y_0 \rangle < \inf_{y \in \mathcal{Y}} \langle -y', y \rangle$, permitindo que exista α como a enunciámos. \square

Por fin estamos en condicións de proceder a obter resultados de equivalencia entre os puntos debilmente non dominados de (2.1.1) e as solucións de (2.1.2).

Teorema 2.8. Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Entón $\mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{dN}$

Demostración. Sexa $\hat{y} \in \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$. Entón existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ con $\lambda_k \geq 0$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k \quad \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Se supoñemos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_{dN}$, entón hai unha $y' \in \mathcal{Y}$ tal que $y'_k < \hat{y}_k, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ e, como alomenos un dos pesos λ_k é positivo, entón

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k y'_k < \sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k,$$

contradiciendo que $\hat{y} \in \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$ □

Teorema 2.9. *Se \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -convexo, entón $\mathcal{Y}_{dN} = \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$.*

Demostración. Só debemos probar que $\mathcal{Y}_{dN} \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$, porque $\mathcal{Y}_{dN} \supset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$ obtémolo a raíz do

Teorema 2.8. Sexa $\hat{y} \in \mathcal{Y}_{dN}$. Entón, pola caracterización dos puntos debilmente non dominados:

$$\mathcal{Y} \cap \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} = \emptyset.$$

Isto implica que $y \notin \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}, \forall y \in \mathcal{Y}$ e, en consecuencia $\{\mathcal{Y} + \mathbb{R}_+^p\} \cap \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} = \emptyset, \forall y \in \mathcal{Y}$; senón teríamos que existen $y \in \mathcal{Y}$ e $\mu \in \mathbb{R}_+^p$ tales que $y + \mu \in \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} \Rightarrow y \in \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$.

Xeneralizando para toda $y \in \mathcal{Y}$ e logo, por traslación de ambos conxuntos do vector de posición de $-\hat{y}$:

$$\{\mathcal{Y} + \mathbb{R}_+^p\} \cap \{\{\hat{y}\} - \text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} = \{\mathcal{Y} + \mathbb{R}_+^p - \{\hat{y}\}\} \cap \{-\text{int}(\mathbb{R}_+^p)\} = \emptyset.$$

Temos que \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -convexo, polo que $\{\mathcal{Y} + \mathbb{R}_+^p - \{\hat{y}\}\}$ é convexo, e, como $\{-\text{int}(\mathbb{R}_+^p)\}$ tamén o é, podemos aplicar o **Lema 2.6**, pois os seus interiores relativos teñen intersección nula. Entón, existe $\lambda \in \mathbb{R}^p \setminus \{\lambda_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}\}$ tal que, pola primeira inecuación do **Lema 2.6**:

$$\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0 \geq \langle \lambda, -d' \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{Y}, d \in \mathbb{R}_+^p, d' \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p).$$

Eliminamos o caso $\{\lambda_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}\}$ porque non podería cumprir a segunda condición do **Lema 2.6** ao ser $\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle = 0 = \langle \lambda, -d' \rangle$ para calquera y, d, d' . Consideramos que as λ_k deben ser todas non negativas, xa que se houbo algunha compoñente negativa, podemos atopar d e d' tales que $\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle < \langle \lambda, -d' \rangle$. Isto xustifica que o 0 se atope entre as desigualdades non estritas anteriores (porque $0 = \sup_{d' \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)} \langle \lambda, -d' \rangle$)

Como temos que a desigualdade $\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0$ dase para todo $d = \varepsilon e$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario e $e = (1, 1, \dots, 1)$, isto fai que:

$$\langle \lambda, y \rangle + \varepsilon \langle \lambda, e \rangle \geq \langle \lambda, \hat{y} \rangle \implies \langle \lambda, y \rangle > \langle \lambda, \hat{y} \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Concluimos finalmente que $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ e $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) \implies \hat{y} \in \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$ □

As principais ideas dos teoremas quedan resumidas no **Corolario 2.10**, consecuencia directa do **Teorema 2.8** e **Teorema 2.9**.

Corolario 2.10. *Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Entón:*

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{dN}$$

e, se \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -convexo:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_{dN}.$$

Xa establecidas as relacións entre as solucións para un $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ do sistema (2.1.2) e os puntos debilmente eficientes de (2.1.2); seguimos agora coas conexións entre o conxunto $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ e o \mathcal{Y}_N .

Teorema 2.11. *Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Entón $\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N$.*

Demostración. Segue o mesmo patrón que a demostración do **Teorema 2.8**. Supoñamos $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})$, entón hai unha λ tal que $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ cumprindo:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k, \quad \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Se supoñemos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_N$, entón temos que $\exists y' \in \mathcal{Y}$ tal que $y'_i \leq \hat{y}_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ e $y'_j < \hat{y}_j$ para alomenos unha $j \in \{1, \dots, p\}$. Como todos os factores λ_k son positivos, entón temos que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k y'_k < \sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k$$

e contradicimos a nosa hipótese de que $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})$. □

Corolario 2.12. *Sexa $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Entón:*

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N; \quad \mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{dN}$$

e se \mathcal{Y} é \mathbb{R}_+^p -convexo:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}_{dN} = \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$$

Demostración. Ambas cadeas de inclusións pódense demostrar como consecuencia do **Teorema 2.11** e do **Corolario 2.10**. □

Como xa traballamos co conxunto imaxe \mathcal{Y} do noso problema multiobxectivo (2.1.1) e as súas relacións coas solucións do problema (2.1.2), agora relacionamos por fin os puntos óptimos no **método dos pesos** co espazo \mathcal{X} .

Proposición 2.13. *Sexa \hat{x} solución do problema dos pesos ponderados (2.1.2), con*

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(\hat{x})$$

sendo $x \in \mathcal{X}, \lambda_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ e $\lambda \neq (0, \dots, 0)$. Próbbase que:

- $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$.
- Se $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, entón $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$.
- Se \hat{x} é a única solución do problema dos pesos ponderados descrito anteriormente, entón $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$.

Demostración. Só hai que probar a última propiedade, xa que as demais son consecuencia do **Teorema 2.8** e o **Teorema 2.11**. A proba é análoga a estes dous teoremas; como \hat{x} é a única solución de $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ con $\lambda_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ e $\lambda \neq (0, \dots, 0)$:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f(\hat{x}) < \sum_{k=1}^p \lambda_k f(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Se $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$, entón ten que existir x' tal que $f_i(x') \leq f_i(\hat{x}), \forall i \in \{1, \dots, p\}$ e $\exists j \in \{1, \dots, p\}$ nos que $f_j(x') < f_j(\hat{x})$. Neste caso, como pode suceder que $\lambda_j = 0$ para todas as compoñentes onde teñamos unha desigualdade estrita, fronte á demostración do **Teorema 2.11**, só chegamos a que $\sum_{k=1}^p \lambda_k f(x') \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k f(\hat{x})$, que nos chega para contradicir a hipótese de que \hat{x} é a única solución de $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$. \square

Para completar a **Proposición 2.13**, presentamos o **Teorema 2.14**, que nos aporta unha condición suficiente para que un punto $x \in \mathcal{X}_{dE}$ sexa solución de **(2.1.2)**.

Teorema 2.14. *Sexa $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ unha función obxectivo tal que $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sexan funcións convexas $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Se consideramos un problema multiobxectivo da forma **(2.1.1)** con $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$, entón \hat{x} é unha solución óptima de **(2.1.2)** para un valor de λ .*

Como vimos no **Teorema 2.9** e no **Teorema 2.14**, precisamos dunha condición suficiente de convexidade para que os puntos debilmente eficientes ou os puntos debilmente non dominados poidan ser solución óptima do **método dos pesos**. Queremos ilustrar a importancia da convexidade no conxunto imaxe \mathcal{Y} no **Exemplo 2.15**.

Exemplo 2.15. Consideramos o seguinte problema multiobxectivo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & h(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \\ \text{suxeito a} \quad & x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

onde a rexión factible vén dada como $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1)^2 + (x_2)^2 \geq 1\}$. Como a nosa función obxectivo, h , é a función identidade de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , temos que a imaxe da rexión factible, \mathcal{Y} , cumpre que $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. Notemos que o noso conxunto \mathcal{X} non é convexo.

O noso problema xorde cando intentamos obter todos os elementos de \mathcal{X}_E mediante o **método dos pesos**. Se vamos collendo vectores $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, observamos que a dirección de

crecemento con respecto ao espazo \mathbb{R}^2 do produto escalar $\langle \lambda, y \rangle$, $y \in \mathbb{R}^2$, sempre estará en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e, por tanto, a de decrecemento en $-\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Isto fai que, por exemplo, para o punto $x' = f(x') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que é un punto eficiente, non exista $\lambda \in \mathbb{R}_+^2$ tal que $\langle \lambda, f(x') \rangle = \min_{y \in \mathcal{Y}} \langle \lambda, y \rangle$. Esta situación queda patente na **Figura 11** tomando como exemplo $\lambda^1 = (2, 1)$ e $\lambda^2 = (1, 2)$.

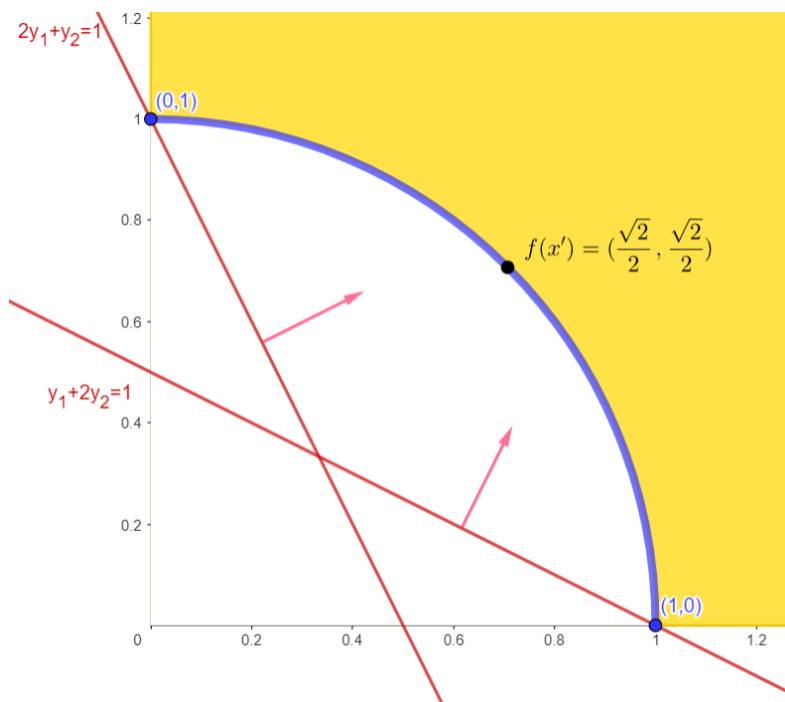


Figura 11: Representación de \mathcal{Y} (en amarelo), dos puntos non dominados (en azul), do punto $f(x')$ (en negro) e das rectas $2y_1 + y_2 = 1$ e $y_1 + 2y_2 = 1$ (en vermello). Tamén indicamos a dirección na que $\langle \lambda^i, y \rangle$ crece con vectores (en rosa) en cada recta correspondente a $\langle \lambda^i, y \rangle = 1$.

Como podemos intuír da **Figura 11**, para calquera $\lambda \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$ válida no problema (2.1.2), temos que $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) \subset \{(1, 0), (0, 1)\}$. Polo que nunca conseguimos probar a non dominancia de $f(x')$ co **método dos pesos** e, a raíz disto, tampouco podemos probar a eficiencia de x' .

Para rematar xa de comentar este método, proporcionamos un resultado de interese en relación cos puntos propiamente eficientes segundo Geoffrion.

Teorema 2.16. *Se \hat{x} é unha solución do problema (2.1.2) cunha λ tal que $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$; entón \hat{x} é un un punto **propriamente eficiente segundo Geoffrion** do problema multiobxectivo (2.1.1).*

Ademais, sexa un problema multiobxectivo (2.1.1) con \mathcal{X} convexo e cunha función obxectivo

f tal que $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sexan funcións convexas $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Desta forma, a anterior condición suficiente para puntos propiamente eficientes tamén é necesaria.

Demostración. O detalle da proba pode verse en Geoffrion (1968) e tamén en Ehrgott (2010) entre as páxinas 72 e 77. \square

2.2. Método das ε -restricións

Como xa vimos na sección anterior, o **método dos pesos ponderados** é un método que funciona particularmente ben en condicións de convexidade do conxunto imaxe da función obxectivo (ou no seu defecto, que a nosa rexión factible xunto coa función obxectivo sexa convexa).

Explicamos neste apartado un dos métodos de escalarización que se pode aplicar sen ter en conta as condicións de convexidade: o **método das ε -restricións**. Supoñendo que estamos ante un problema multiobxectivo da forma (2.1.1), plantexamos un problema restrinxido en función dun $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ e dunha $j \in \{1, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f_j(x) \\ & \text{suxeito a} && f_k(x) \leq \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq j \\ & && x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Para completar o algoritmo en si, debemos ter en conta o rango das variables $k \neq j$, e vamos a definir dous puntos para levalo a cabo.

Definición 2.17. O **punto ideal** $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$ dun problema multiobxectivo da forma (2.1.1) é tal que $\hat{y}_i = \min_{x \in \mathcal{X}} f_i(x)$. O **punto nadir** \check{y} é aquel tal que $\check{y}_i = \max_{x \in \mathcal{X}_E} f_i(x)$.

Nun caso ideal, se dispoñemos de ambos puntos, para obter unha aproximación á **fronteira de Pareto**, só debemos repetir os problemas (2.2.1) para unha partición $\{\varepsilon_n\}_{n \in \{1, \dots, m\}}$ entre os **puntos ideal e nadir** con $m \in \mathbb{N}$. Podemos intuír que é máis ou menos doado obter o punto ideal (supoñería un problema de minimización de cada compoñente da función obxectivo sen máis restricións que $x \in \mathcal{X}$), pero o **punto nadir** non se sabe en xeral de antemán (necesitamos o conxunto de puntos eficientes). Soemos traballar neste caso con sobrestimacións do **punto nadir** ou, estando ante unha restrición do conxunto eficiente, só atopamos puntos eficientes entre os nosos límites da partición.

Explicado xa o algoritmo na súa totalidade, pasemos agora a ilustrar o algoritmo cun exemplo práctico dunha iteración, usando o problema (P):

Exemplo 2.18. Vamos a empregar dúas veces o **método das ε -restricións** no problema (P). Na primeira iteración, tomamos como compoñente da función a analizar $j = 1$ en (2.1.2) e $\varepsilon = (1.5, 6)$; na segunda consideramos $j = 2$ co mesmo vector ε .

Comecemos entón co seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_1(x) = x_1 \\ &\text{suxeito a} && f_2(x) = x_1 + 2x_2 \leq \varepsilon_2 = 6 \\ &&& x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}. \end{aligned}$$

cuxo conxunto imaxe \mathcal{Y} está representado na **Figura 12**.

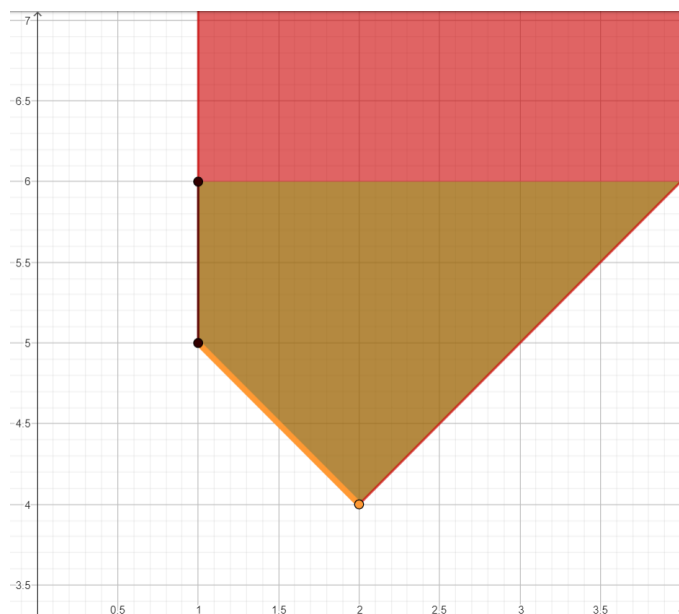


Figura 12: Representación de \mathcal{Y} (en vermello) e dos seus puntos non dominados (en laranxa). O conxunto de puntos onde $f_2 \leq \varepsilon_2$ está representado cunha sombra verde; e os puntos dentro deste conxunto onde temos o $\min f_1(x)$ están marcados en negro.

Como podemos comprobar visualmente, o punto óptimo neste problema é a imaxe inversa de $\{(1, y) \mid y \in [5, 6]\}$, é dicir $f^{-1}(\{(1, y_2) \mid y_2 \in [5, 6]\}) = \{(1, x_2) \mid x_2 \in [2, 2.5]\}$, nos que hai puntos eficientes e debilmente eficientes (neste caso, só $(1, 2)$ é punto eficiente).

Por outra banda, se tomamos a compoñente da función obxectivo $j = 2$, debemos resolver:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_2(x) = x_1 + 2x_2 \\ &\text{suxeito a} && f_1(x) = x_1 \leq \varepsilon_1 = 1.5 \\ &&& x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}, \end{aligned}$$

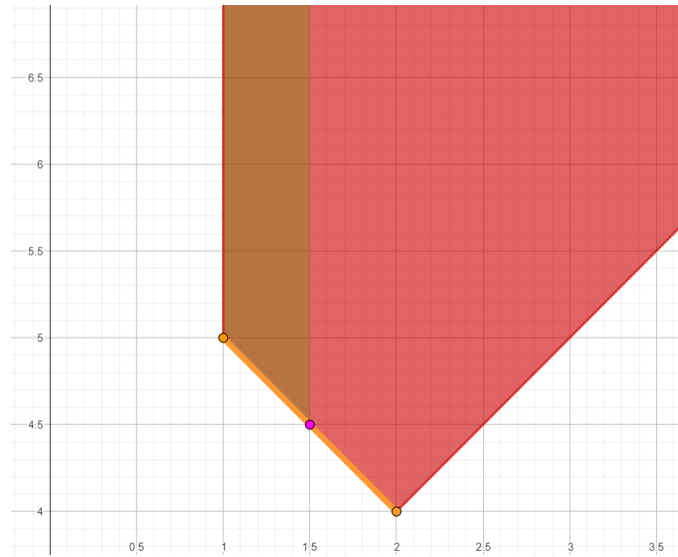


Figura 13: Representación de \mathcal{Y} (en vermello) e dos seus puntos non dominados (en laranxa). O conxunto de puntos onde $f_1 \leq \varepsilon_1$ está representado cunha sombra verde; e o punto dentro deste conxunto no que se atopa o $\min f_2(x)$ está marcado en rosa.

que haberá que analizar no conxunto imaxe representado na **Figura 13**.

Neste caso, o único punto obtido é o punto $f^{-1}(1.5, 4.5) = \{(1.5, 1.5)\}$, que é un punto eficiente, máis non temos ningunha información sobre os demais puntos eficientes.

Todo isto nos xera dúbidas sobre se realmente é un método bo para obter as solucións eficientes dun problema multiobjetivo como o (2.1.1). Para ver as súas utilidades prácticas, recapitulamos varios resultados relacionados coa súa efectividade na busca de puntos eficientes.

Proposición 2.19. *Sexa \hat{x} solución do problema (2.2.1) para unha $j \in \{1, \dots, p\}$ e un $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Entón \hat{x} é un punto debilmente eficiente no problema multiobjetivo (2.1.1).*

Demostración. Se \hat{x} non fose debilmente eficiente; entón existe $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x') < f_k(\hat{x})$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Se escollemos un índice j e un $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ tal que $f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ para $k \neq j$ no problema (2.2.1), temos que x' tamén é unha solución factible e $f_j(x') < f_j(\hat{x})$. Polo que \hat{x} non é solución para ningún ε nin j do problema xa mencionado. \square

Proposición 2.20. *Sexa \hat{x} unha solución única do problema (2.2.1) para unha $j \in \{1, \dots, p\}$ e un $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. Entón \hat{x} é un punto estritamente eficiente no problema multiobjetivo (2.1.1).*

Demostración. Sexa unha $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x') \leq f_k(\hat{x})$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$. Entón no problema da forma (2.2.1) onde \hat{x} é solución única, temos que $f_i(x') \leq f_i(\hat{x}) \leq \varepsilon_i$ para $i \neq j$ e que, por ser \hat{x}

unha solución do problema **(2.2.1)**, $f_j(x') = f_j(\hat{x})$. Como é única, debe cumprirse que $x' = \hat{x}$; e entón $x \in \mathcal{X}_{sE} \supset \mathcal{X}_E$. \square

Teorema 2.21. *A solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ dun problema da forma **(2.1.1)** é eficiente se e só se existe un $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ tal que \hat{x} é solución óptima para toda $j \in \{1, \dots, p\}$ do problema **(2.2.1)**.*

Demostración. Comezamos supoñendo que $\hat{x} \in \mathcal{X}$; ao darse isto, se tomamos $\hat{\varepsilon} = f(\hat{x})$, temos que $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, \hat{x} é solución óptima do problema **(2.2.1)**. En caso de que non fose así, teríamos que habería un $j \in \{1, \dots, p\}$ e unha $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_j(x') < f_j(\hat{x})$ e $f_k(x') \leq \varepsilon_j = f_k(\hat{x})$, $k \neq j$, contradecindo a nosa hipótese inicial.

Para probar a implicación no outro sentido, sexa $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$. Entón hai un punto $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_j(x') < f_j(\hat{x})$ para alomenos un índice $j \in \{1, \dots, p\}$ e $f_i(x') \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$. Isto fai que non exista $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ posible tal que \hat{x} sexa a solución óptima para o índice j no problema **(2.2.1)** (pois sempre estará o punto x' dentro do conxunto factible ao ser necesario que $f_k(x') \leq f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$ para toda $k \neq j$). \square

2.3. Método híbrido

Este método está recollido en Corley (1980b). Definimos a continuación como se realizaría para un problema da forma **(2.1.1)**. Temos que resolver o seguinte problema para un determinado $\lambda \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ ($\lambda_i > 0$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$) e un determinado $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) \\ & \text{suxeito a} && f_j(x) \leq \varepsilon_k, \forall k \in \{1, \dots, p\} \\ & && x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Ao igual que no **método das ε -restricións**, para representar \mathcal{X}_E , debemos coller o **punto ideal** e un punto razoable tal que unha partición entre ambos delimite os puntos eficientes. Téndoos en conta, debemos ir tomando os vectores $\{\varepsilon_n\}$ da partición e resolver o problema **(2.3.1)** múltiples veces considerando un $\varepsilon \in \{\varepsilon_n\}$ e un vector λ (que se pode modificar tamén) en cada iteración.

Os seus beneficios fronte aos métodos anteriores son consecuencia precisamente de ser unha mestura de ambos. En contraste co **método dos pesos ponderados**, non temos que asegurar a convexidade do conxunto imaxe para obter todos os puntos eficientes, como se recollía no **Corolario 2.12**. En contraposición co **método das ε -restricións**, tampouco temos que asegurar a unicidade de solución á hora de aplicalo para obter solucións eficientes, como se establece na **Proposición 2.20**.

Primeiro, mostramos unha iteración do **método híbrido** no problema **(P)**, e, a continuación, establecemos os resultados referentes á procura de puntos eficientes.

Exemplo 2.22. Determinamos neste caso como parámetros $\hat{\varepsilon} = (1.75, 4.75)$ e a $\hat{\lambda} = (2, 1)$. Aplicando o **(2.3.1)**, temos que resolver:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i f_i(x) = 2f_1(x) + f_2(x) = 2x_1 + x_1 + 2x_2 = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{suxeito a} \quad & f_1(x) \leq \hat{\varepsilon}_1 \Leftrightarrow x_1 \leq 1.75 \\ & f_2(x) \leq \hat{\varepsilon}_2 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 \leq 4.75 \\ & x \in \mathcal{X} = \{x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}. \end{aligned}$$

Analizamos coa **Figura 14** o conxunto imaxe do problema **(P)** xunto coa dirección na que se minimiza $\langle \hat{\lambda}, y \rangle$, $y \in \mathcal{Y}$ e o conxunto ao que restrinximos o conxunto imaxe con $f_k(x) \leq \hat{\varepsilon}_k$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$.

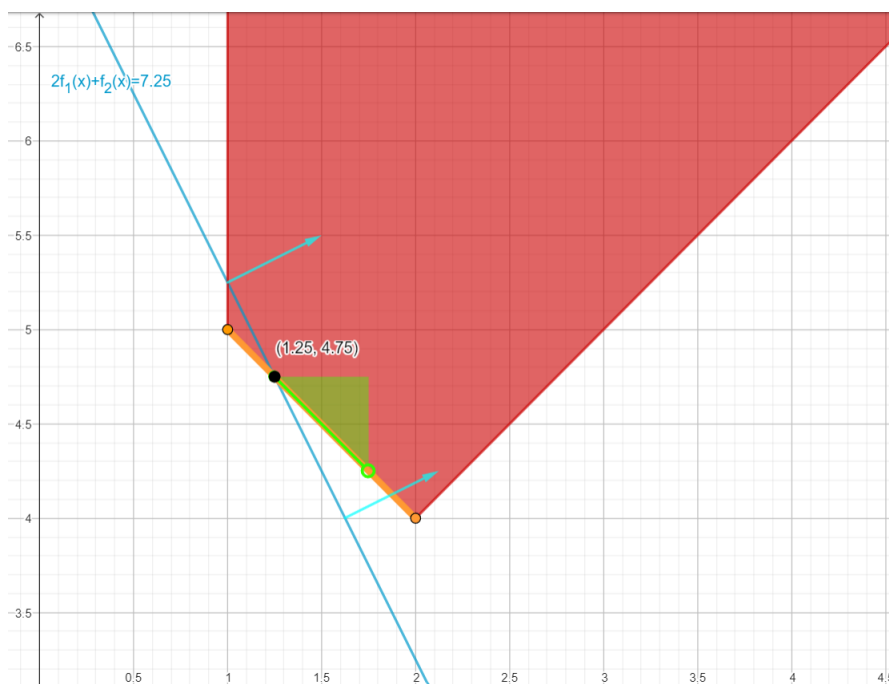


Figura 14: Representación de \mathcal{Y} (en vermello) e dos seus puntos non dominados (en laranxa). A restrición do conxunto imaxe polo parámetro ε está delimitada en verde. A dirección na que o valor $\langle \hat{\lambda}, y \rangle$ aumenta de valor está marcada con dous vectores en azul celeste e o punto óptimo, $(1.25, 4.75)$, en negro.

Como podemos ver na **Figura 14**, o valor mínimo de $2f_1(x) + f_2(x)$ dáse no conxunto imaxe restrinxido por ε no punto $(x_1, x_2) = (1.25, 4.75)$ con $\sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i(x_1, x_2) = 2f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 = 7.25$, que si é un punto eficiente do noso problema orixinal **(P)**.

Visto o exemplo, expoñemos un único resultado que é consecuencia da natureza do **método híbrido** como combinación do **método dos pesos ponderados** e o **método das ε -restricións**.

Proposición 2.23. *A solución do problema (se ten solución) (2.3.1) para calquera $\lambda \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$ e calquera $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ é un punto eficiente do seu respectivo problema multiobxectivo (2.2.1). De maneira equivalente, para cada punto eficiente \hat{x} dun problema multiobxectivo (2.2.1), temos que existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ tal que sexa solución do problema (2.3.1), para todo $\lambda \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$.*

Demostración. A primeira parte correspóndese co **Teorema 2.11**, pois, se ignoramos as ε -restricións, estamos ante un dos problemas construídos no **método dos pesos ponderados**. Como requirimos en (2.3.1) que $\lambda \in \text{int}(\mathbb{R}_+^p)$, para calquera solución óptima \hat{x} podemos aplicar o teorema xa mencionado e temos que $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$. A segunda parte dedúcese tomando $\hat{\varepsilon} = f(\hat{x})$. \square

2.4. Método das restricións elásticas

Esta metodoloxía xorde como resposta ao **método das ε -restricións**, debido a que, en moitos casos prácticos, a idea de establecer unhas restricións que alteren tanto a imaxe do espazo factible \mathcal{Y} non son realistas. Á parte, en termos computacionais, o algoritmo pode provocar que necesitemos resolver moitos problemas de minimización para visualizar a **fronteira de Pareto**.

Con isto en mente, recóllese en Ehrgott & Ryan (2002) unha posible alternativa para obter puntos eficientes do problema (2.1.1) relaxando o **método das ε -restricións**. O **método das restricións elásticas** baséase na resolución de problemas como (2.4.1) para unha $j \in \{1, \dots, p\}$ establecida, tomando uns vectores $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ con $\mu_k \geq 0$, $k \neq j$:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_j(x) + \sum_{k \neq j} \mu_k s_k \\ \text{suxeito a} \quad & f_k(x) - s_k \leq \varepsilon_k, \quad k \neq j \\ & s_k \geq 0, \quad k \neq j \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Para completar o método, debemos repetir (2.4.1) para unha secuencia de $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$, da mesma forma que o **método das ε -restricións**. As solucións obtidas se utilizarán para aproximar o conxunto de puntos eficientes. Unha vez presentado, vexamos entón a resolución dunha das iteracións para un $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ dado mediante o problema modelo (P).

Exemplo 2.24. Para a aplicación, escollemos desta vez $j = 2$, con $\varepsilon = (1.5, 4.5)$ e $\mu = (1, 1)$.

Polo que teríamos que resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_2(x) + \sum_{k \neq 2} \mu_k s_k = x_1 + 2x_2 + s_1 \\ \text{suxeito a} \quad & f_1(x) - s_1 \leq \varepsilon_1 \Leftrightarrow x_1 - s_1 \leq 1.5 \\ & s_1 \geq 0 \\ & x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3\}. \end{aligned}$$

Fixémonos na restrición $x_1 - s_1 \leq 1.5$. Como buscamos minimizar $x_1 + 2x_2 + s_1$, podemos deducir que se $x_1 \leq 1.5$, procuramos que $s_1 = 0$ (porque $s_1 \geq 0$); e se $x_1 \geq 1.5$, $s_1 = (x_1 - 1.5)$, para que teñamos o mínimo valor posible na función obxectivo. Tendo en conta isto, podemos definir a anacos s_1 en función de x_1 :

$$s_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 \leq 1.5 \\ (x_1 - 1.5) & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Por mor disto, temos que a función obxectivo $x_1 + 2x_2 + s_1(x_1)$ só depende de x_1 e x_2 . Para saber entón onde se atopa a solución óptima do problema recurrimos á **Figura 15**, onde vamos axustando x_2 a medida que vamos fixando x_1 , para poder obter $\min_{(x_1, x_2) \in \mathcal{X}} x_1 + 2x_2 + s_1(x_1)$.

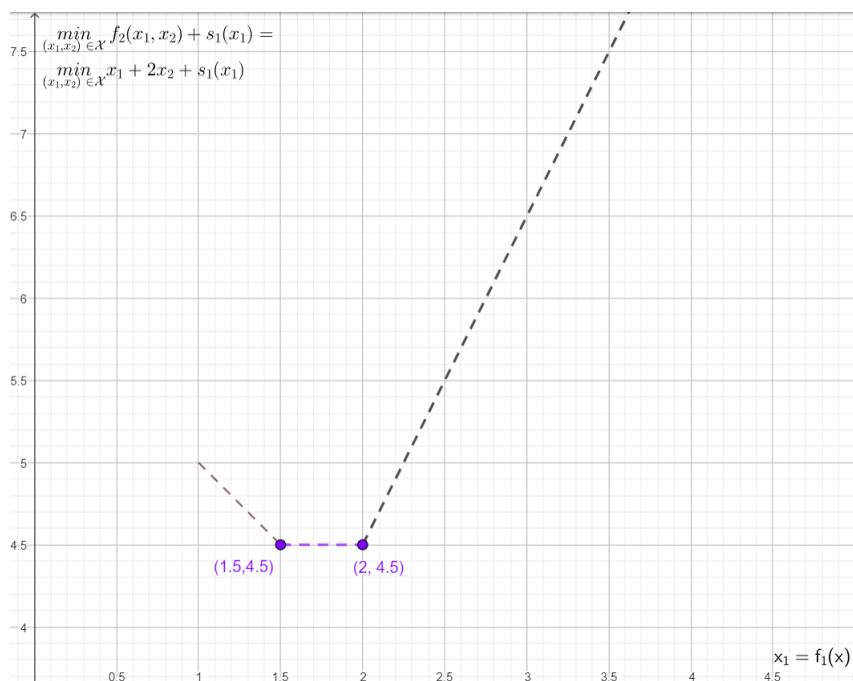


Figura 15: Representación da función $\min_{(x_1, x_2) \in \mathcal{X}} f_2(x_1, x_2) + s_1(x_1) = \min_{(x_1, x_2) \in \mathcal{X}} x_1 + 2x_2 + s_1(x_1)$, con variable independente x_1 . Os puntos onde se da o mínimo respecto de x_1 están marcados en violeta.

Como observamos na **Figura 15**, os puntos obtidos como solución do problema son aqueles nos que $x_1 \in [1.5, 2]$ e a función obxectivo $x_1 + 2x_2 + s_1(x_1) = x_1 + 2x_2 + x_1 - 1.5 = 4.5$, o que, se reordeamos a ecuación, implica que $x_1 + x_2 = 3$. Se temos en conta cada valor de x_1 posible e que (x_1, x_2) deben estar en \mathcal{X} , as nosas solucións estarán no segmento entre $(1.5, 1.5)$ e $(2, 1)$.

Agora presentamos tres pequenos resultados para ver o alcance da utilidade do **método das restricións elásticas**, que tratan como son as solucións atopadas e a súa capacidade para atopar unha solución eficiente dun problema multiobxectivo. A maioría das propiedades son herdadas do **método das ε -restricións**.

Proposición 2.25. *Sexa o vector $(\hat{x}, \hat{s})^t$ unha solución óptima de (2.4.1) para unha mesma compoñente $j \in \{1, \dots, p\}$ con parámetros $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$ arbitrario e $\mu \in \mathbb{R}^p$ tal que $\mu_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$. Entón, $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$.*

Demostración. Se \hat{x} non fose debilmente eficiente, debe existir $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) < f_k(\hat{x}), \forall k \in \{1, \dots, p\}$. Entón temos que (x, \hat{s}) é unha solución factible do problema (2.4.1) para a mesma compoñente j e os mesmos parámetros μ e ε . Agora, como $f_j(x) < f_j(\hat{x})$, (x, \hat{s}) ten un menor valor na función obxectivo de (2.4.1), contradicindo que (\hat{x}, \hat{s}) sexa unha solución óptima. \square

Proposición 2.26. *Sexa o vector $(\hat{x}, \hat{s})^t$ unha solución óptima única de (2.4.1) para unha mesma compoñente $j \in \{1, \dots, p\}$ con parámetros μ e ε arbitrarios e válidos. Entón, $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$.*

Demostración. Sexa $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x}), \forall k \in \{1, \dots, p\}$. Entón tense que (x, \hat{s}) é solución do problema (2.4.1) para a mesma compoñente j e os mesmos parámetros μ e ε . Agora, como como (x, \hat{s}) non ten un valor menor na función obxectivo do problema (2.4.1) ca (\hat{x}, \hat{s}) ($f_j(x) \leq f_j(\hat{x})$) entón, por unicidade de solución óptima, $x = \hat{x}$. \square

Corolario 2.27. *Se \hat{x} é solución eficiente dun problema multiobxectivo da forma (2.1.1), entón existen ε, μ con $\mu_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ e \hat{s} tal que (\hat{x}, \hat{s}) é unha solución óptima do problema (2.4.1) para calquera $j \in \{1, \dots, p\}$.*

Demostración. A proba consiste en escoller $\varepsilon = f(\hat{x})$, \hat{s} o vector nulo en \mathbb{R}^p e $\mu_k = +\infty, \forall k \in \{1, \dots, p\}$. \square

2.5. Método lexicográfico

O método lexicográfico é diferente a todos os demais que xa explicamos por ser un método que, tal e como o definimos posteriormente, require establecer unha orde de preferencia entre as compoñentes da función obxectivo. Os demais métodos xa tratados non o precisan, xa que tratan

de representar todos os posibles puntos eficientes, e, entre os puntos obtidos, poder escoller cal se prefira.

Nun primeiro momento vamos a considerar a orde dada polas compoñentes da función obxectivo (é dicir, damos máis preferencia a $f_1(x)$, logo a $f_2(x), \dots$). Partindo do problema multiobxectivo **(2.1.1)**, ao aplicar o **método lexicográfico** debemos resolver sucesivamente unha serie de problemas. Definamos para $i = 1$:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_1(x) \\ \text{suxeito a} \quad & x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

e sexa a solución obtida $f_1(x)^*$. A continuación, debemos resolver, na orde dada polas compoñentes $(1, \dots, p)$, para cada $i \in \{2, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_i(x) \\ \text{suxeito a} \quad & f_1(x) = f_1(x)^* \\ & \vdots \\ & f_{i-1}(x) = f_{i-1}(x)^* \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

sendo $f_i(x)^*$, $i \in \{2, \dots, p\}$ a solución do problema **(2.5.2)** para $i \in \{2, \dots, p\}$ correspondente.

Observación 2.28. Debemos indicar, que para toda $i \in \{1, \dots, p\}$, cada problema podese substituír polo **método dos pesos ponderados** escollendo unha $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tal que $\lambda_i = 1$, $\lambda_k = 0$, $\forall k \neq i$. e resolvendo na orde das compoñentes. No caso de $i = 1$, mantemos o espazo factible, e, noutro caso, engadimos as restricións $f_j(x) = f_j(x)^*$, $j \in \{1, \dots, i - 1\}$.

Vexamos a súa aplicación ao noso problema **(P)**.

Exemplo 2.29. Para comezar, resolvamos para $i = 1$ o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_1(x_1, x_2) = x_1 \\ \text{suxeito a} \quad & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 3. \end{aligned}$$

Na **Figura 16** representamos a solución deste problema sobre o conxunto imaxe do problema orixinal.

Neste caso son $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1, x_2 \geq 2\}$. E, para rematar o método, basta con resolver:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\ \text{suxeito a} \quad & x_1 = 1 \\ & x_2 \geq 2. \end{aligned}$$

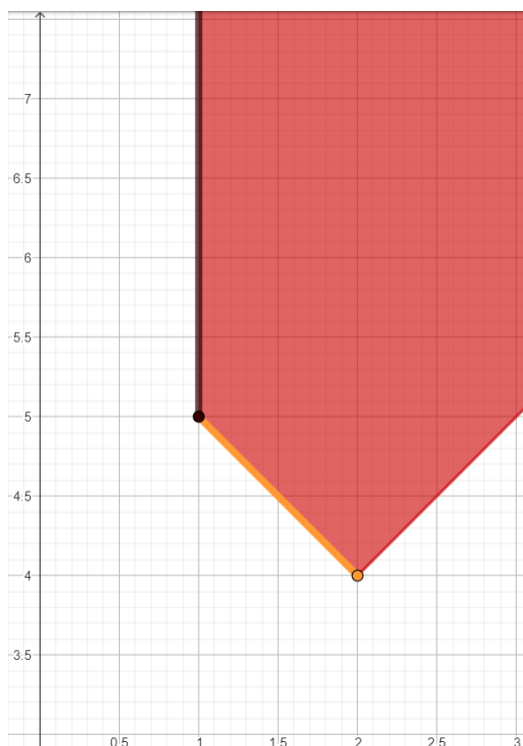


Figura 16: Representación de \mathcal{Y} (en vermello) e dos seus puntos non dominados (en laranxa).

Os puntos tales que $\min_{y \in f(\mathcal{X})} f_1(x)$ están en negro.

Este sistema ten unha solución inmediata, o punto $(1, 2)$, cuxa imaxe correspóndese con $f(1, 2) = (1, 5)$, que aparece na **Figura 16**. Este punto é a solución única do método lexicográfico.

Só salientamos dous resultados de importancia para ver cal é o alcance deste método.

Teorema 2.30. *Se \hat{x} é unha solución do método lexicográfico, entón é eficiente no problema multiobxectivo (2.1.1).*

Demostración. Sexa $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$. Entón hai unha $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, e existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_k(x) < f_k(\hat{x})$. Polo que, se denominamos $q = \min\{k \in \{1, \dots, p\} \mid f_k(x) < f_k(\hat{x})\}$, temos que $f_i(x) = f_i(\hat{x})$ para $i < q$ e $f_q(x) < f_q(\hat{x})$; polo que \hat{x} non pode unha solución óptima para o problema (2.5.1) se $q = 1$ ou dalgún problema sucesivo (2.5.2) se $q > 1$. \square

Proposición 2.31. *Se \hat{x} é unha solución única para o problema (2.5.1) ou nalgunha $i \in \{2, \dots, p\}$ para algún problema (2.5.2), entón $x \in \mathcal{X}_{sE}$.*

Demostración. Supoñamos que $\exists x \in \mathcal{X}$ con $x \neq \hat{x}$ tal que $f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$. Se algunha desigualdade é estrita, denominemos $k = \min\{i \in \{1, \dots, p\} \mid f_i(x) < f_i(\hat{x})\}$. Chegamos a que \hat{x} non é solución única para $j < k$ ao seren $f_j(x) = f_j(\hat{x})$ se $j < k$, e non é solución óptima

para $j \geq k$. En caso de non haber k tal que $f_k(x) < f_k(\hat{x})$, entón $f(x) = f(\hat{x})$, e \hat{x} tampouco é solución única nin para (2.5.1) nin para (2.5.2) para ningunha $k \in \{2, \dots, p\}$. \square

Ata agora consideráramos o **método lexicográfico** coa orde de preferencia dada polas compoñentes da función obxectivo. Malia isto, sempre podemos alterar esta elección mediante unha permutación entre as compoñentes da función obxectivo, e, desta maneira, obtemos novos puntos eficientes.

Definición 2.32. Sexa $\pi : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ unha permutación. O conxunto de permutacións de p elementos é Π_p . Definimos a aplicación $\pi(f) := \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $(\pi(f))_i = f_{\pi(i)}$ como a **permutación da aplicación f** .

Proposición 2.33. *As solucións obtidas polo método lexicográfico para calquera problema multiobxectivo (2.1.1) substituíndo a función obxectivo f por $\pi(f)$, $\forall \pi \in \Pi$, son eficientes no problema multiobxectivo orixinal con función obxectivo f .*

Demostración. A proba queda moi parecida ao **Teorema 2.30**, só traballando coa orde dunha permutación $\pi \in \Pi_p$ arbitraria. \square

2.6. Método simplex multiobxectivo

Rematamos o **Capítulo 2** con esta metodoloxía, que, debido á súa gran amplitude, nos limitamos exclusivamente a explicar cales son os resultados necesarios para xustificar o algoritmo, e explicar as partes das que está composto. Antes de nada, debemos dicir que o método se enfoca nos problemas multiobxectivo lineais, que definimos a continuación.

Definición 2.34. Consideramos un **problema multiobxectivo lineal** a un problema multiobxectivo que se poida formular da seguinte maneira para $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) = Cx \\ \text{suxeito a} \quad & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

sendo C unha matriz de valores reais de dimensión $n \times p$, A unha matriz de valores reais de dimensión $m \times n$ e de rango m con $n \geq m$ (senón sería un sistema sobredimensiado en \mathbb{R}^n), e b un vector de lonxitude m con $b_k \in \mathbb{R}$, $b_k \geq 0$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$. Denominamos a m **número de restricións lineais**, C a matriz que define a **función obxectivo**, A a **matriz de restricións** e b o **vector de lados dereitos das restricións**. Referímonos á presentación do problema como

(2.6.1) como **estándar**. Pola contra, se está formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && Cx \\ &\text{suxeito a} && Ax \geq b \\ &&& x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

é un problema de programación multiobxectivo **en forma canónica**.

Todos os conceptos de non dominancia, eficiencia,... son análogos á súa versión nun problema de programación multiobxectivo xeral. Comezamos, agora si, cunha serie de conceptos previos para explicar os fundamentos do algoritmo, no cal asumimos que estamos resolvendo un problema multiobxectivo en forma estándar (2.6.1). Todos os resultados atópanse recopilados en Ehrgott (2010).

Definición 2.35. Sexa \mathcal{B} un conxunto de índices de m variables. Se a submatriz $A_{\mathcal{B}}$, que está composta dos índices en \mathcal{B} é inversible, \mathcal{B} é unha **base**. Denominamos $\mathcal{N} := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$ o conxunto de índices das variables non básicas. Se x_i é unha variable con $i \in \mathcal{B}$ é unha variable **básica** asociada á base \mathcal{B} e $x_i \in x_{\mathcal{B}}$; en caso contrario, é **non básica** e $x_i \in x_{\mathcal{N}}$.

Desta forma podemos describir as restricións $Ax = b$, como $A_{\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}} + A_{\mathcal{N}}x_{\mathcal{N}} = b$ ($A_{\mathcal{B}}$ compónse das filas das variables básicas, e $A_{\mathcal{N}}$ das non básicas). Por ser \mathcal{B} base, $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1}(b - A_{\mathcal{N}}x_{\mathcal{N}})$. Se establecemos $x_{\mathcal{N}}$ como vector nulo, entón $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1}b$. Nesta casuística, $x_{\mathcal{B}}$ é unha **solución básica** do problema, e, se cumpre que $x_i \geq 0 \forall i \in \mathcal{B}$, entón é unha **solución básica factible** e temos \mathcal{B} como **base factible**. Podemos tamén obter a seguinte descomposición da matriz C , como $C = (C_{\mathcal{B}}, C_{\mathcal{N}})$ e $Cx = C_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}^{-1}b + (C_{\mathcal{N}} - C_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}^{-1}A_{\mathcal{N}})x_{\mathcal{N}}$. Chamamos a $\bar{C} = C - C_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}^{-1}A_{\mathcal{N}}$ **matriz de custos reducidos** e $\mathcal{R} := \bar{C}_{\mathcal{N}}$ á súa parte correspondente ás variables non básicas.

Definidos todos estes conceptos, vexamos que sucede no caso de $p = 1$. O problema en forma estándar ten esta expresión:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^t x \\ &\text{suxeito a} && Ax = b \\ &&& x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

coa única diferenza de c ser un vector de dimensión $n \times 1$. Neste caso temos que $\bar{C}_{\mathcal{N}}$ corresponde a un vector $(\bar{c}_{\mathcal{N}})$, e, se $\bar{c}_s < 0$ para algunha variable non básica, o valor de $c^t x$ decrece se x_s aumenta (recordemos que ao non ser básica, $x_s = 0$ en principio). Se reformulamos as variables básicas (que deben seguir cumprindo a condicións de non negatividade do problema) tendo en conta o aumento de x_s , temos para calquera $j \in \mathcal{B}$, $x_j = (A_{\mathcal{B}}^{-1}b)_j - (A_{\mathcal{B}}^{-1}A)_{js}x_s \geq 0$, indicando $(A_{\mathcal{B}}^{-1}A)_{js}$ a fila j e a columna s .

Se redefinimos $\tilde{b} := A_{\mathcal{B}}^{-1}b$ e $\tilde{A} := A_{\mathcal{B}}^{-1}A$, entón temos que se $\tilde{A}_{js} \leq 0$ para toda $j \in \mathcal{B}$, entón x_s pode crecer indefinidamente sen facer que as variables básicas cheguen a incumplir a non negatividade (problema non limitado). En caso contrario, débese cumprir que $x_s \leq \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{A}_{js}}$, $\forall j \in \mathcal{B}$. Co obxectivo de reducir ao máximo posible $c^t x$, tomamos o mínimo dos valores $\frac{\tilde{b}_j}{\tilde{A}_{js}}$ para $j \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{A}_{js} \geq 0$. Sendo un dos índices onde se dea este mínimo r ; x_r é igual a 0 cando $x_s = \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{A}_{rs}}$.

Definición 2.36. Nas condicións anteriores, denominamos a A_{rs} como **pivote**, a x_r como **variable saínte** e a x_s como **variable entrante**; podemos pasar da base \mathcal{B} á base $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B} \setminus \{r\}\} \cup \{s\}$ cuxa solución básica factible $(x_{\mathcal{B}'}, 0)$ é mellor ca $(x_{\mathcal{B}}, 0)$.

Manténdonos aínda no caso $p = 1$, con todo o xa establecido poderíamos formular o símplex en programación lineal, pero o noso obxectivo non é isto. O que procuramos é obter unha serie de resultados de interese, como os que veñen a continuación. Todo isto vén recollido en múltiples libros de referencia de programación lineal; entre eles citamos ao Salazar (2001).

Teorema 2.37. *Se o problema (2.6.3) é factible, é dicir, a súa rexión factible $\mathcal{X} \neq \emptyset$, entón existe solución básica factible. Ademais, se a función obxectivo está limitada en \mathcal{X} , podemos asegurar unha solución básica factible e óptima.*

Teorema 2.38. *Unha solución básica factible $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ é óptima se $(\tilde{c}_{\mathcal{N}})_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.*

Definición 2.39. Sexa un problema lineal dun só obxectivo da forma (2.6.3); definimos o seu **problema dual** como:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && b^t u \\ &\text{suxeito a} && (A^t u)_i \leq c_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &&& u \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Teorema 2.40. (Teorema de dualidade débil) *Se x e u son solucións factibles de (2.6.3) e (2.6.4) respectivamente, entón $b^t u \leq c^t x$.*

Teorema 2.41. *Se (2.6.3) é non limitado, entón o seu problema dual (2.6.4) é non factible; e viceversa.*

Teorema 2.42. (Teorema de dualidade forte) *Se ambos (2.6.3) e (2.6.4) son factibles, entón temos que $b^t \hat{u} = c^t \hat{x}$ para toda solución óptima \hat{x} de (2.6.3) e toda solución óptima \hat{u} de (2.6.4).*

Proposición 2.43. *O problema (2.6.3) ten $\mathcal{X} \neq \emptyset$ se e só se o problema*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && e^t z \\ &\text{suxeito a} && Ax + z = b \\ &&& x_i, z_j \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

ten solución óptima (\hat{x}, \hat{z}) con \hat{z} vector nulo. Denotamos por e o vector unitario en \mathbb{R}^m .

Rematados os resultados que precisamos en $p = 1$, continuamos cos resultados previos á introdución do algoritmo do **método símplex multiobxectivo**. Volvemos a estar na situación dun problema multiobxectivo en forma estándar (2.6.1).

Definición 2.44. Definimos a partires do problema multiobxectivo en forma estándar (2.6.1) o **problema multiobxectivo lineal de sumas ponderadas LP(λ)**:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \lambda^t Cx \\ \text{suxeito a} \quad & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{LP(\lambda)}$$

con $\lambda_k \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}, \lambda \neq (0, \dots, 0)$.

Teorema 2.45. *Se $\hat{x} \in \mathcal{X}$ é solución óptima do problema multiobxectivo lineal de sumas ponderadas LP(λ), entón $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$ no problema (2.6.1). Ademais, se é solución nun problema LP(λ) con $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, entón $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$ no seu respectivo problema multiobxectivo lineal da forma (2.6.1).*

Demostración. Con λ arbitrario, supoñamos que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_{dE}$. Entón existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $(Cx)_k < (C\hat{x})_k, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, ou equivalentemente, sendo C_k a fila k -ésima de C , $C_k \cdot x < C_k \cdot \hat{x}, \forall k \in \{1, \dots, p\}$. En consecuencia, temos que $\lambda_k C_k \cdot x < \lambda_k C_k \cdot \hat{x}$, sendo estrito para algún $k \in \{1, \dots, p\}$ por ser λ non nulo. Temos que $\lambda^t Cx < \lambda^t C\hat{x}$, contradicindo a optimalidade de \hat{x} . Se $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, entón podemos facer a mesma proba pero supoñendo que $x \notin \mathcal{X}_E$ e, polo tanto, que exista unha x tal que $C_k \cdot x \leq C_k \cdot \hat{x}, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, sendo a desigualdade estrita para un índice k . Como $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda^t Cx < \lambda^t C\hat{x}$. \square

Continuamos agora cunha proposición acompañada dun lema para a obtención de puntos eficientes en problemas de programación lineal.

Lema 2.46. *Unha solución $\bar{x} \in \mathcal{X}$ do problema multiobxectivo en forma estándar (2.6.1) é eficiente se e só se o problema*

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & e^t z \\ \text{suxeito a} \quad & Ax = b \\ & Cx + Iz = C\bar{x} \\ & x_i, z_j \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

ten unha solución óptima $(\hat{x}, \hat{z})^t$ con \hat{z} sendo o vector nulo. Definimos ao vector e como $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ e á matriz I como a matriz identidade de dimensión m .

Demostración. A proba está recollida en Ehrgott (2010). \square

Proposición 2.47. *Sexa $\check{x} \in \mathcal{X}$ solución dun problema (2.6.1). Entón (2.6.6) con $\bar{x} = \check{x}$ é factible. Partindo disto, se o problema (2.6.6) ten solución óptima (\hat{x}, \hat{z}) , entón \hat{x} é unha solución eficiente de (2.6.1); e se o problema é non limitado, (2.6.1) non ten puntos eficientes.*

Os dous resultados seguintes teñen como obxectivo relacionar a existencia de puntos eficientes e as solucións básicas factibles eficientes a través dos problemas $\mathbf{LP}(\lambda)$.

Teorema 2.48. *Unha solución $\bar{x} \in \mathcal{X}$ é eficiente no problema multiobxectivo (2.6.1) se e só se existe unha $\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\lambda^t C \hat{x} \leq \lambda^t C x, \forall x \in \mathcal{X}$.*

Demostración. O teorema está recollido en Isermann (1974), coa súa proba engadida. \square

Lema 2.49. *Se $\mathcal{X}_E \neq \emptyset$ nun problema multiobxectivo lineal da forma (2.6.1), entón ten unha solución básica factible eficiente.*

Demostración. Polo **Teorema 2.48**, temos que hai unha λ con $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{LP}(\lambda)$ ten solución. O **Teorema 2.37** implica que $\mathbf{LP}(\lambda)$ ten unha solución básica factible, que é eficiente polo **Teorema 2.45**. \square

Xa establecido que existe unha solución básica factible eficiente baixo condicións de existencia de puntos eficientes, definamos unha serie de conceptos útiles.

Definición 2.50. Unha base factible \mathcal{B} dun **problema multiobxectivo lineal** é chamada **base eficiente**, se $x_{\mathcal{B}}$ é unha solución básica óptima para un problema $\mathbf{LP}(\lambda)$ para λ tal que $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$.

Definición 2.51. Dúas bases \mathcal{B} e $\hat{\mathcal{B}}$ chámanse **adxacentes** se se pode pasar dunha a outra a través dun só pivote; aínda sendo negativo o pivote \tilde{A}_{rs} ou \tilde{A}_{sr} (buscamos que as solucións básicas de ambas bases existan).

Definición 2.52. Sexa \mathcal{B} unha **base eficiente** para un problema multiobxectivo lineal (2.6.1). A variable x_j con $j \in \mathcal{N}$ denomínase **variable non básica eficiente** se existe unha $\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $\lambda_k > 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ tal que $(\lambda^t \mathcal{R})_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}$ e $\lambda^t r^j = 0$, onde r^j representa a columna j de \mathcal{R} , (que se pode tamén denotar como $\mathcal{R}_{.j}$).

Definición 2.53. Sexa \mathcal{B} unha **base eficiente** para un problema multiobxectivo lineal (2.6.1) e x_j unha **variable non básica eficiente** asociada a \mathcal{B} . Entón un pivote factible de \mathcal{B} con x_j entrando na base é un **pivote eficiente** para \mathcal{B} .

Definición 2.54. Dicimos que dúas **bases eficientes** \mathcal{B} e $\hat{\mathcal{B}}$ están **conectadas** se unha pode ser obtida da outra mediante só pivotes eficientes.

Con estas definicións e os resultados que veñen deseguido, rematamos xa os resultados necesarios para comezar a explicar o **algoritmo do símplex multiobxectivo**.

Proposición 2.55. *Sexa \mathcal{B} unha base eficiente para un problema multiobxectivo lineal (2.6.1). Existe unha variable non básica eficiente asociada a \mathcal{B} .*

Demostración. A proba está contida en Ehrgott (2010). □

Lema 2.56. *Sexa \mathcal{B} unha base eficiente para un problema multiobxectivo lineal (2.6.1) e x_j unha variable non básica eficiente. Entón calquera pivote eficiente dende \mathcal{B} da lugar a unha base adxacente eficiente a $\hat{\mathcal{B}}$.*

Demostración. Como x_j é unha variable non básica eficiente, entón existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $\lambda_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ con $(\lambda^t \mathcal{R})_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{N}$ e $\lambda^t r^j = 0$. Entón x_j é unha variable non básica con custo reducido 0 en todas as filas de $\lambda^t C$, función obxectivo en $\mathbf{LP}(\lambda)$. Por tanto, os custos en $\mathbf{LP}(\lambda)$ non se vén modificados por introducir a variable x_j na base \mathcal{B} .

Sexa $\hat{\mathcal{B}}$ resultado de calquera pivote eficiente que teña como variable entrante x_j . Como $(\lambda^t \mathcal{R})_i \geq 0, \forall i \in \hat{\mathcal{N}}$ e $\lambda^t r^j = 0$, $\hat{\mathcal{B}}$ é unha base optima de $\mathbf{LP}(\lambda)$ e, polo tanto, é adxacente a \mathcal{B} e eficiente no problema multiobxectivo lineal (2.6.1). □

Por último, só nos quedan dous resultados que nos serven para comprobar por medio dun problema de programación lineal se unha variable x_j é non básica e, o outro, dá unha relación entre as bases eficientes. Son uns teoremas que nos serven para atopar as bases eficientes.

Teorema 2.57. *Sexa \mathcal{B} unha base eficiente para un problema multiobxectivo lineal (2.6.1) e x_j unha variable non básica. A variable x_j é unha variable non básica eficiente se e só se o problema*

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & e^t v \\ \text{suxeito a} \quad & (Rz - r^j \delta + Iv)_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, p\} \\ & z_i, \delta, v_k \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n - m\}, \forall k \in \{1, \dots, p\}, \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

ten un valor óptimo igual a 0.

Demostración. O teorema está recollido en Evans & Steuer (1973), e con proba engadida en Ehrgott (2010). □

Teorema 2.58. *Todas as bases eficientes están conectadas.*

Demostración. O teorema pódese consultar tanto en Steuer (1986) como en Ehrgott (2010). Nesta última referencia temos en detalle a demostración. □

Finalmente, podemos xa recopilar as fases necesarias nas que se divide o **método símplex multiobxectivo** e explicalas detidamente para un problema multiobxectivo en forma estándar (2.6.1):

1. Na primeira fase, debemos atopar unha solución eficiente $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ ou probar que $\mathcal{X} = \emptyset$. Usamos a **Proposición 2.43**, pois non é necesario traballar coa matriz C de dimensións $p \times n$ para probalo.
2. Na segunda fase hai que atopar unha **base eficiente** ou chegar á conclusión de que $\mathcal{X}_E = \emptyset$. Primeiro, debemos utilizar a solución atopada \tilde{x} para resolver o problema (2.6.6), para que a **Proposición 2.47** nos afirme que $X_E = \emptyset$ en caso de que (2.6.6) non sexa limitado. Se atopamos unha solución óptima (\hat{x}, \hat{z}) ao problema temos pola dita proposición un punto \hat{x} eficiente en (2.6.1); non necesariamente unha solución básica factible eficiente. Para chegar a isto, formulamos o **problema dual** de (2.6.6), obtendo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & u^t b + w^t C \tilde{x} \\ \text{suxeito a} \quad & (u^t A + w^t C)_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & w_j \geq 1, \forall j \in \{1, \dots, p\}. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Aplicando agora o **Teorema de dualidade forte** ao problema (2.6.8), sabemos que existe unha solución óptima (\hat{u}, \hat{w}) tal que $\hat{u}^t b + \hat{w}^t C \tilde{x} = e^t \hat{z}$. Fixando $w = \hat{w}$ e volvendo ao problema dual (2.6.8), temos que \hat{u} é unha solución óptima do problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & u^t b \\ \text{suxeito a} \quad & (u^t A)_i \geq (-\hat{w}^t C)_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

A continuación, establecemos o **dual** do problema (2.6.9) e pasamos a un problema de minimización multiplicando por -1 a función obxectivo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \hat{w}^t C x \\ \text{suxeito a} \quad & A x = b \\ & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Polo **Teorema de dualidade forte**, o problema (2.6.10) ten solución e correspóndese cun problema **LP**(\hat{w}). Se todos os problemas teñen solución, temos un $\lambda = \hat{w}$ tal que **LP**(λ) ten unha solución básica factible óptima, que é unha solución básica factible eficiente para unha base \mathcal{B} do problema multiobxectivo lineal (2.6.1) polo **Teorema 2.48**.

3. Na última fase partimos da nosa **base eficiente** \mathcal{B} obtida na etapa anterior. Antes de nada, debemos atopar as variables non básicas eficientes da nosa base \mathcal{B} . Isto o podemos lograr resolvendo o problema (2.6.7) para cada unha das variables non básicas x_j , $j \in \mathcal{N}$.

Dispoñendo das variables non básicas eficientes, podemos empregar o **Lema 2.56** para ver que bases eficientes están conectadas a \mathcal{B} .

Este proceso podemos repetilo para cada unha das bases eficientes que vaiamos atopando, e, polo **Teorema 2.58**, ao estar todas as bases eficientes conectadas, atopamos a totalidade de bases eficientes.

Como conclusión, o **método do simplex multiobxectivo** require de múltiples resultados e etapas para levarse a cabo. Para facilitar a súa comprensión, vamos a presentar un pseudocódigo do algoritmo para resumir a súa implementación:

Datos de entrada: As matrices C , A , e o vector b propios dun **problema multiobxectivo lineal**.

Fase 0: Procedemos a substituír o problema inicial pola súa forma estándar como en (2.6.1).

Fase 1: Resolvemos o problema (2.6.5). Se temos que o seu valor obxectivo é distinto de 0, devolvemos un aviso que indique que o problema non tería puntos eficientes. En caso contrario, obtemos \bar{x} solución eficiente do **problema multiobxectivo lineal**, que almacenamos.

Fase 2: Resolvemos o problema (2.6.8). De non ser factible, devolvemos unha mensaxe para comunicar que non hai solucións eficientes. En caso contrario, obtemos unha solución eficiente (\hat{u}, \hat{w}) .

Buscamos unha **base eficiente** do problema (2.6.10). Probamos con todas as posibles combinacións de m variables ata atopar unha base \mathcal{B} cuxa solución básica sexa unha solución óptima de (2.6.10). Todas as combinacións de m variables as almacenamos como columnas dunha matriz que denominamos Q .

Inicializamos $opt = +\infty$.

For $\mathcal{B} \in Q$ (neste caso \mathcal{B} sería unha columna de Q):

Se \mathcal{B} é non invertible, continuar; en caso contrario, pasar á seguinte base.

Se a solución básica $x_{\mathcal{B}}$ é factible, continuamos; en caso contrario, pasar á seguinte base .

Se o vector de custos $z_{\mathcal{B}}$ é menor ca opt , gardamos o vector de custos, a base \mathcal{B} , e a solución básica factible: $opt = z_{\mathcal{B}}$, $basesol = \mathcal{B}$ e $sol_{\mathcal{B}} = c(x_{\mathcal{B}}, x_{\mathcal{N}})$.

Rematamos bucle for.

Inicializamos 3 listas: $\mathcal{L}_1 = basesol$, $\mathcal{L}_2 = \emptyset$, $\mathcal{L}_3 = sol'_{\mathcal{B}}$, que é $sol_{\mathcal{B}}$ sen as variables de folgura.

Fase 3:

While $\mathcal{L}_1 \neq \emptyset$:

Escolle \mathcal{B} en \mathcal{L}_1

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \setminus \{\mathcal{B}\}$; $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \cup \{\mathcal{B}\}$

Calcular $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{C}$ e \mathcal{R} respecto de \mathcal{B}

Establecemos $\mathcal{EN} := \mathcal{N}$

For $j \in \mathcal{EN}$:

Resolvemos o problema (2.6.7)

Se o problema non está limitado: $\mathcal{EN} = \mathcal{EN} \setminus \{j\}$

Remata bucle *for*

For $j \in \mathcal{EN}$:

For $i \in \mathcal{B}$:

Se $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ é unha base factible e $\mathcal{B}' \notin \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, entón:

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{B}'$, $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3 \cup \text{sol}'_{\mathcal{B}'}$, a solución básica de \mathcal{B}' sen variables de folgura

Remata bucle *for*

Remata bucle *for*

Remata bucle *while*

Definimos \mathcal{L}_4 , substituíndo cada $x \in \mathcal{L}_3$ por Cx .

Saída: lista con $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ e \mathcal{L}_4 .

Con isto concluímos a explicación do **método símplex multiobjetivo**.

Capítulo 3

Aplicación práctica

Neste capítulo, volvemos a retomar os métodos xa analizados no **Capítulo 2** e os implementamos en **R** (R Core Team (2013)). O código implementado está enfocado á resolución de **problemas multiobxectivo lineais**. En cada sección traballamos co problema **(L)** para mostrar cada metodoloxía:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & Cx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} x = (x_1 + x_3, 2x_2)^t \\ \text{suxeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \tag{L}$$

Representamos na **Figura 17** os puntos eficientes do problema **(L)** e introducimos como plantexamos o noso problema en **R** e que paquetes precisamos como o `lpSolve` recollido en Berkelaar et al. (2023). Esta codificación é común para todos os métodos tratados:

```
#install.packages("lpSolve")
library("lpSolve")
func=matrix(c(1,0,0,2,1,0),ncol=3)
a=matrix(c(1,1,1,1,0,0,0,1,0,0,0,1),
nrow=4,byrow=TRUE)
cons=c(">=", ">=", ">=", ">=")
b=c(1,0,0,0)
exemplo=list(func,a,cons,b)
```

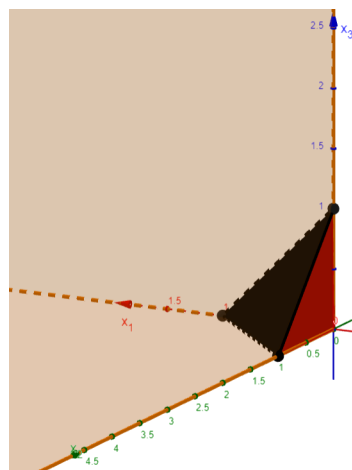


Figura 17: Representación de \mathcal{X} (espazo en laranxa menos a pirámide vermella) e dos puntos eficientes (a cara da pirámide pintada en negro).

3.1. Método dos pesos ponderados

Para aplicar unha iteración do **método dos pesos ponderados**, empregamos a función `weight`, cuxo código atópase no *Anejo A*. Para ilustrala cun exemplo, inicializámola empregando como argumentos de entrada o problema (`L`) e o argumento propio do método, $\lambda = (1, 1)$ na seguinte orde:

```
lam=c(1,1)
weight(exemplo,lam)
```

O problema está codificado na lista `exemplo` introducida anteriormente. Obtemos como solución unha lista composta de `$obj_func_val`, que nos da o valor da función obxectivo do problema para a solución obtida co método empregado, e `$solution`, que contén a solución óptima obtida polo método. Neste caso temos como solución óptima $\bar{x} = (1, 0, 0)$ con $f(\bar{x}) = (1, 0)$. Comprobamos a continuación na **Figura 18** como se visualizarían gráficamente as múltiples solucións óptimas polo método dos pesos (sería o segmento entre $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$):

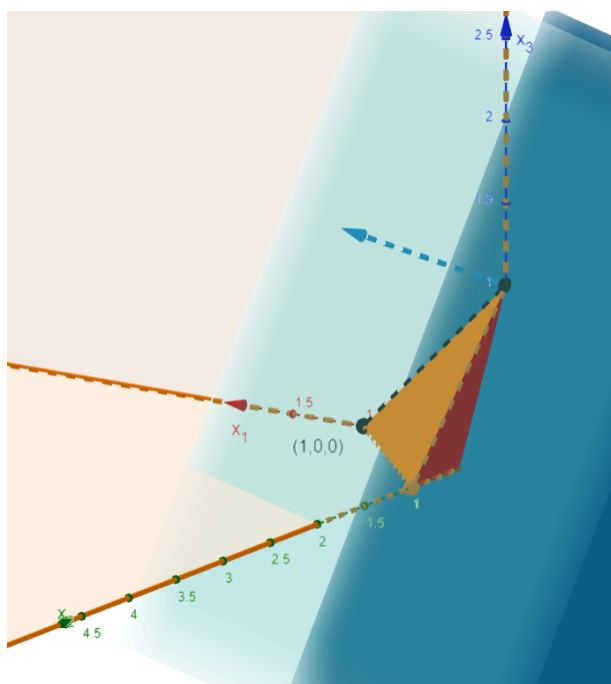


Figura 18: Representación de \mathcal{X} , do plano $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ (en azul escuro) e a súa intersección coa rexión factible (en negro). Indicamos co vector a dirección de desprazamento do plano se aumenta k para $x_1 + 2x_2 + x_3 = k$ e o plano $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ (en azul claro).

3.2. Método das ε -restricións

Construímos a función `epsilon`, con código no *Anexo A*, para levar a cabo unha das iteracións do **método das ε -restricións**. Para ilustrala cun exemplo, inicializámola empregando como argumentos de entrada o problema (**L**) e os argumentos propios do método, $j = 1$ (compoñente que minimizamos da función obxectivo) e $\varepsilon = (1, 1.5)$ na orde:

```
j=1;epsilon=c(1,1.5)
epsilon(exemplo,j,epsilon)
```

O problema está codificado na lista `exemplo` introducida anteriormente. Obtemos como resultado unha lista con dous elementos, `$obj_func_val` e `$solution`. A segunda correspóndese coa solución óptima do método, neste caso $\hat{x} = (0.25, 0.75, 0)$ e a primeira, co valor da función obxectivo na solución, neste caso $f(\hat{x}) = (0.25, 1.5)$. Comprobamos na **Figura 19** que o punto \hat{x} sexa realmente eficiente e se axuste á resolución do modelo (neste caso a iteración obtén como solucións óptimas o segmento entre $(0.25, 0.75, 0)$ e $(0, 0.75, 0.25)$).

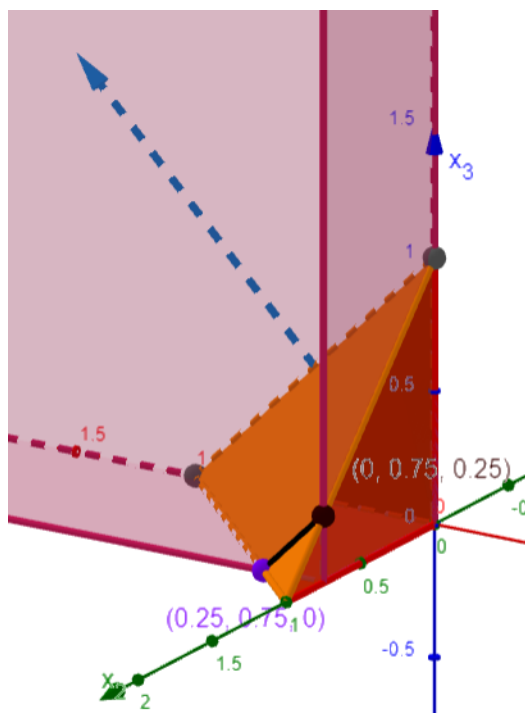


Figura 19: Representación de \mathcal{X} restrinxido por $f_2(x) \leq \varepsilon_2 = 1.5$ en vermello, exceptuando a pirámide. Marcamos en negro os puntos onde se dea o mínimo de f_1 , incluído en violeta a nosa \hat{x} . O vector indica a dirección de crecemento de f_1 en función de x .

3.3. Método híbrido

Para implementar unha iteración do **método híbrido**, empregamos a función `hybrid`. O seu código está no *Anexo A*. Para ilustrala cun exemplo, inicializámola empregando como argumentos de entrada o problema (**L**) e os argumentos propios do método, $\varepsilon = (1, 1.5)$ e $\lambda = (2, 1)$:

```

epsil=c(1,1.5);lam=c(2,1)
hybrid(exemplo,epsil,lam)

```

O problema está codificado na lista `exemplo` introducida anteriormente. A función `hybrid` devolve unha lista con dous elementos, `$obj_func_val` e `$solution`, que aporta unha solución óptima para este método, neste caso $\hat{x} = (1, 0, 0)$. O obxecto `$obj_func_val` é $f(\hat{x}) = (1, 0)$. Comprobamos na **Figura 20** que o punto \hat{x} sexa realmente eficiente e se axuste á resolución do problema (neste caso o método ten como solucións óptimas todas as solucións eficientes, menos nas que $x_2 > 0.75$). Indicamos tamén a dirección de crecemento de $2f_1(x) + f_2(x)$ a través dun vector.

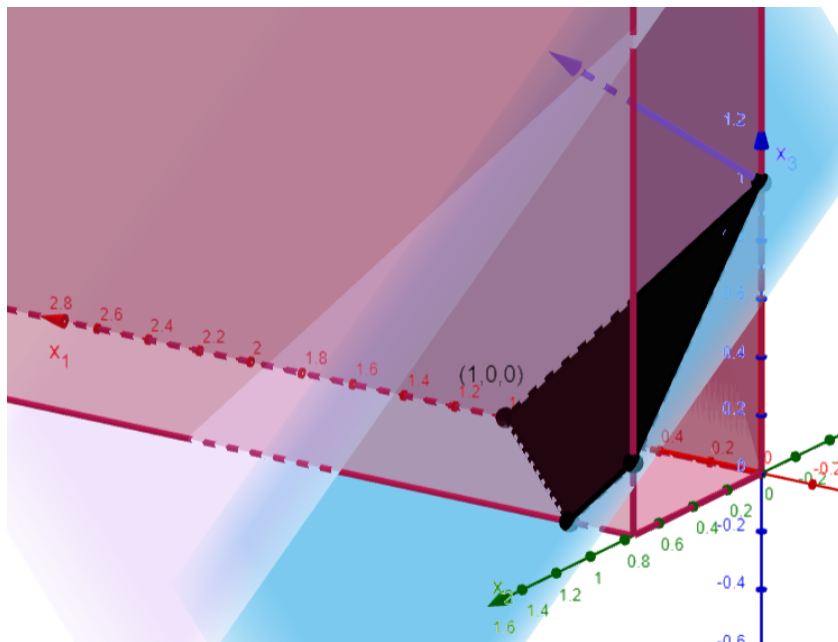



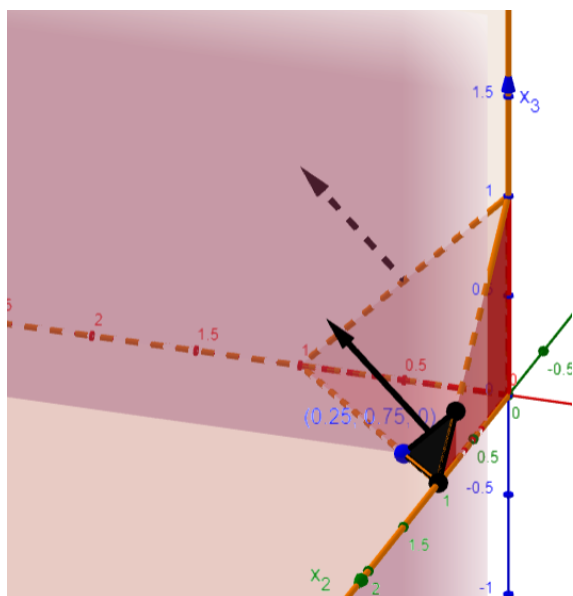
Figura 20: Representación de \mathcal{X} restrinxido por $f_2(x) \leq \varepsilon_2 = 1.5$ en vermello, exceptuando a pirámide. Os planos $2f_1(x) + f_2(x) = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2$ e $2f_1(x) + f_2(x) = 5$ están marcados en azul escuro e claro. Os puntos atopados polo método están en negro.

3.4. Método das restricións elásticas

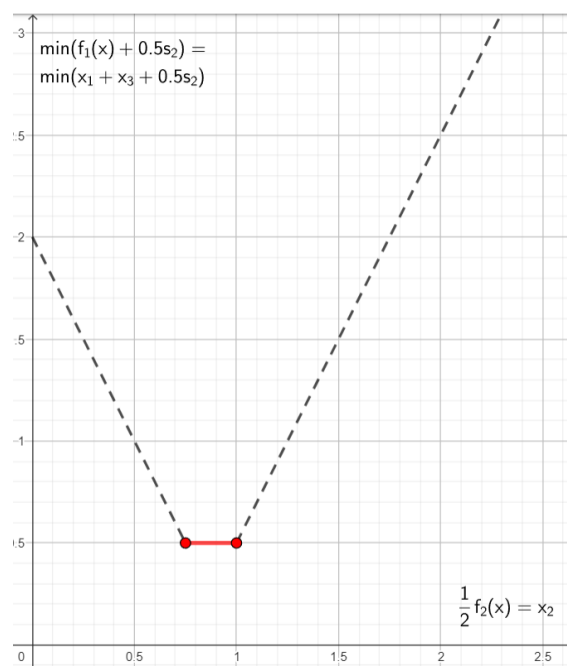
Co fin de implementar unha iteración do **método das restricións elásticas** en  creamos a función `elastic` (código no *Anexo A*). Para exemplificala, introducimos como argumentos de entrada o problema (**L**) e os argumentos propios do método, $\varepsilon = (1, 1.5)$ e $\mu = (1, 0.5)$:

```
j=1;epsil=c(1,1.5);m=c(1,0.5);
elastic(exemplo,j,epsil,m)
```

O problema está codificado na lista `exemplo` xa mostrada anteriormente. Aporta como resultado una lista que contén `$obj_func_val` e `$solution`. Neste caso, a `$solution` é $\hat{x} = (0.25, 0.75, 0)$ e `$obj_func_val` é $f(\hat{x}) = (0.25, 1.5)$. Na **Figura 21a** temos a representación na rexión factible dos puntos que son solucións óptimas da metodoloxía (neste caso, o triángulo con vértices $(0.25, 0.75, 0)$, $(0, 0.75, 0.25)$, $(0, 1, 0)$). Na **Figura 21b**, indicamos a relación entre x_2 e a función obxectivo do problema a resolver no **método das restricións elásticas**.



(a) Representación de \mathcal{X} en laranxa, e a restrición $f_2(x) \leq 1.5$ en rosa. Os puntos óptimos do problema atópanse no polígono negro, os vectores indican o crecemento de $f_1(x)$ e marcamos en azul o punto óptimo atopado.



(b) Proxección da función obxectivo do método aplicado respecto de x_2 . Os puntos onde se dá o seu mínimo están marcados en laranxa.

Figura 21: Representación gráfica do **método das restricións elásticas** no problema (**L**).

3.5. Método lexicográfico

Para aplicar o **método lexicográfico**, empregamos a función `lexico`, cuxo código está no *Anexo A*. O argumento de entrada, rompendo ca expresión das funcións anteriores, contén como argumento necesario o problema e logo un argumento opcional `permutation`, que é unha permutación das compoñentes da función obxectivo de dito problema. Se non está explicitado, asúmese que `permutation = (1, ..., p)`. Tomamos como exemplo o problema (**L**):

```
lexico(exemplo)
```

O problema está codificado na lista `exemplo` xa mostrada anteriormente. Seguindo o formato das funcións anteriores, temos de resultado unha lista que contén a dous argumentos: `$obj_func_val` e `$solution`. Obtemos a solución óptima $\hat{x} = (0, 1, 0)$ cuxo valor na función obxectivo é $f(\hat{x}) = (0, 2)$. Para visualizar o proceso a realizar e se \hat{x} se atopa entre as solucións óptimas do método (nesta ocasión, é a única solución), dispoñemos da **Figura 22**. Indicamos cun vector a dirección de crecemento de $f_1(x)$, e en verde o punto que, dentro dos que minimiza $f_1(x)$, o que ten menor valor en $f_2(x)$.

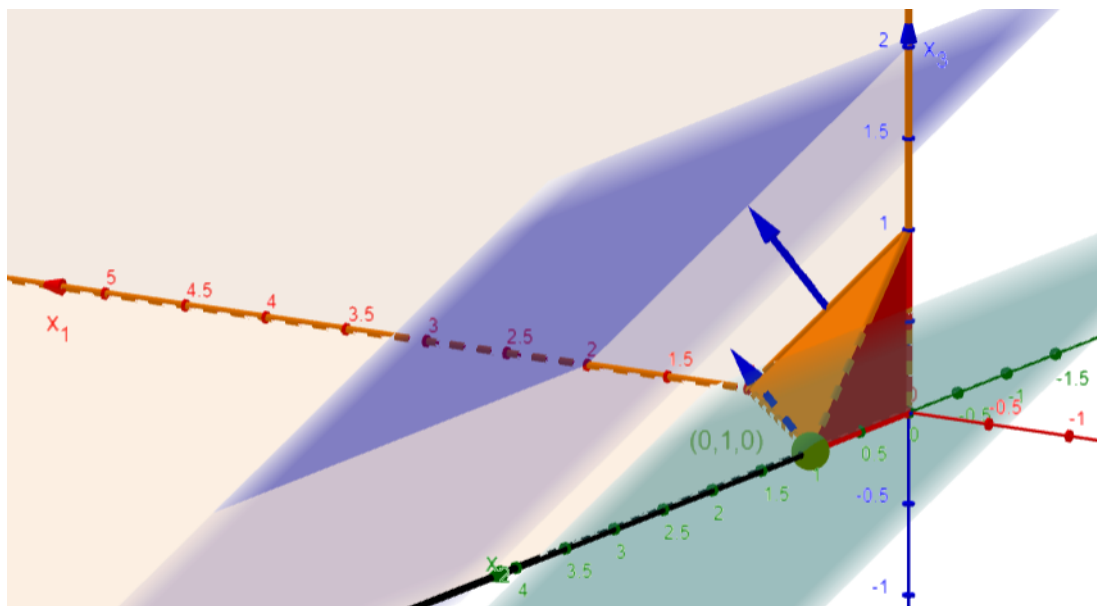


Figura 22: Representación de \mathcal{X} en laranxa, e a semirrecta negra indica os puntos onde se minimiza $f_1(x) = x_1 + x_3$. O plano azul celeste marca os puntos onde $f_1(x) = x_1 + x_3 = 0$, o plano azul escuro onde $f_1(x) = 2$. O punto $\hat{x} = (0, 1, 0)$ está marcado en verde.

3.6. Método símplex multiobxectivo

O **método símplex multiobxectivo** é un dos mellor deseñados para resolver **problemas multiobxectivo lineais**. Para levalo a cabo, utilizamos a función `multisimplex` cuxo código atópase no *Anexo A*.

Antes de nada, debemos indicar que o único argumento que hai que proporcionar sería o noso problema, codificado de idéntica maneira á lista `exemplo` na introdución deste capítulo. Como requisito adicional temos que a nosa matriz de restricións A , o segundo argumento da lista, debe conter ao final da mesma as restricións de non negatividade das variables. Como isto dáse na lista `exemplo`, o empregamos como argumento de entrada para ilustrar como vai a función `multisimplex`:

```
multisimplex(exemplo)
```

A continuación, explicamos en detalle o proceso levado a cabo pola nosa función no noso problema **(L)**. No paso previo ao método en si, debemos pasar o problema á súa forma **estándar**. Introducimos a variable de folgura s_1 :

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & Cx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = (x_1 + x_3, 2x_2)^t \\ \text{suxeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 - s_1 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0, \end{aligned}$$

A continuación, seguindo o código do *Anexo A* baseado no **pseudocódigo** do capítulo anterior, atopamos unha solución factible (neste caso, é $(1, 0, 0, 0)$). Na fase 2, intentamos atopar unha solución básica eficiente (neste caso, conseguimos a base $\mathcal{B}_0 = \{1\}$).

Na fase 3, expliquemos en detalle como chegamos ás demais bases eficientes. Inicializamos as listas $\mathcal{L}_1 = \mathcal{B}_0$, $\mathcal{L}_2 = \{\}$ e $\mathcal{L}_3 = \{(1, 0, 0)\}$. Ao só haber unha base en \mathcal{L}_1 , temos que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{B}_0$ e $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{B}_0$. Partimos da nosa base \mathcal{B}_0 e calculamos na parte esquerda \bar{C} e \tilde{A} (desbotamos as restricións de non negatividade que metemos de inicio), e, na marxe dereita, $-C_{\mathcal{B}_0}x_{\mathcal{B}_0}$ e \tilde{b} :

	x_1	x_2	x_3	s_1	$-C_{\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}}$
\bar{c}_1	0	-1	0	1	-1
\bar{c}_2	0	2	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	s_1	\tilde{b}
\tilde{A}	1	1	1	-1	1

Consideramos agora cada unha das variables non básicas $\mathcal{EN} = \{2, 3, 4\}$ e vexamos se son eficientes. Comezamos con $j = 2$. Para saber se é eficiente, debemos analizar o problema **(2.6.7)**,

o cal queda representado da seguinte forma (a solución é un vector $(\hat{z}, \hat{\delta}, \hat{v})$):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && e^t v = v_1 + v_2 \\ &\text{suxeito a} && (\mathcal{R}z - r^j \delta + Iv) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &&& z_i, \delta, v_k \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Como se pode comprobar, o seu valor óptimo é igual a 0; polo que $j = 2$ é unha variable non básica eficiente. Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && e^t v = v_1 + v_2 \\ &\text{suxeito a} && (\mathcal{R}z - r^j \delta + Iv) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &&& z_i, \delta, v_k \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

tamén temos un problema de programación lineal con valor óptimo igual a 0. Por último, con $j = 4$:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && e^t v = v_1 + v_2 \\ &\text{suxeito a} && (\mathcal{R}z - r^j \delta + Iv) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \delta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &&& z_i, \delta, v_k \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

temos un problema non limitado.

Vistas cales son as variables non básicas eficientes, temos que comprobar se hai algún pivote eficiente. Neste caso, como $\frac{\tilde{b}_2}{A_{12}} = 1$, podemos pasar da base \mathcal{B}_0 , á base $\mathcal{B}_1 = \{2\}$, e como non existen nas listas \mathcal{L}_1 nin \mathcal{L}_2 , entón actualizamos $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{B}_1$, $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3 \cup \{(0, 1, 0)\}$. Procédese de maneira similar para a base $\mathcal{B}_2 = \{3\}$ e obtemos $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3 \cup \{(0, 0, 1)\}$.

O algoritmo segue actuando ata esgotar todas as bases en \mathcal{L}_1 ; pero non incluíra ningunha base máis en \mathcal{L}_2 , xa que ou xa se atopan en \mathcal{L}_2 ou non son variables non básicas eficientes (a variable de folgura, s_1). Finalmente calculamos \mathcal{L}_4 a partires de \mathcal{L}_3 e a función nos devolve \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 e \mathcal{L}_4 .

Nesta implementación do **método simplex multiobxectivo** obtemos como bases eficientes unha para cada variable, xa que $\mathcal{L}_2 = \{1, 2, 3\}$. As solucións básicas están recollidas en $\mathcal{L}_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, para cadansúa base. As súas imaxes respecto da función obxectivo están en $\mathcal{L}_4 = \{(1, 0), (0, 2), (1, 0)\}$, que correspóndense con $\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}$.

Anexo A

Código para a implementación dos métodos en R

A.1. Código para o método dos pesos ponderados

```
weight <- function(problem,lambda){
  if(length(lambda)!=dim(problem[[1]])[1]) {
    return(print("Incorrect length of weight vector"))
  }
  optimum <- lp("min",colSums(diag(lambda)%*%problem[[1]]),
  problem[[2]],problem[[3]],problem[[4]])
  solution<-optimum["solution"]
  return(c(list(obj_func_val=problem[[1]]%*%solution[[1]]),solution))
  stop("This is an error message")
}
```

A.2. Código para o método das ε -restricións

```

epsilon<- function(problem,comp,eps){
  n=dim(problem[[1]])[1]
  if(comp<1 | comp>n | length(eps)>n){
    return(print("Check objective space's dimensions"))}
  A=rbind(problem[[2]],problem[[1]][-comp,])
  B=c(problem[[4]],eps[-comp])
  constraints=c(problem[[3]],rep("<=",length(eps)-1))
  optimum <- lp("min",problem[[1]][comp,],A,constraints,B)
  solution<-optimum["solution"]
  return(c(list(obj_func_val=problem[[1]]%*%solution[[1]]),solution))
  stop("This is an error message")
}

```

A.3. Código para o método híbrido

```

hybrid<- function(problem,epsilon,lambda){
  n=dim(problem[[1]])[1]
  if(length(epsilon)!=n | length(lambda)!=n){
    return(print("The objective space doesn't have those dimensions"))}
  if(length(lambda)!=dim(problem[[1]])[1]) {
    return(print("Incorrect length of weight vector"))}
  A=rbind(problem[[2]],problem[[1]])
  constraints=c(problem[[3]],rep("<=",length(epsilon)))
  B=c(problem[[4]],epsilon)
  optimum <- lp("min",colSums(lambda%*%problem[[1]]),A,constraints,B)
  solution<-optimum["solution"]
  return(c(list(obj_func_val=problem[[1]]%*%solution[[1]]),solution))
  stop("This is an error message")
}

```

A.4. Código para o método das restricións elásticas

```

elastic<- function(problem,comp,epsilon,mu){
  n=dim(problem[[1]])[1]
  l=dim(problem[[1]])[2]
  if(comp<1 | comp>n | length(epsilon)>n | length(mu)>n){
    return(print("The objective space doesn't have those dimensions"))}
  FUNC=c(problem[[1]][comp,],colSums(diag(mu[-comp],nrow=n-1)))
  m=dim(problem[[2]])[1]
  A=rbind(cbind(problem[[2]],matrix(0,nrow=m,ncol=n-1)),
          cbind(matrix(problem[[1]][-comp,],ncol=1),-1*diag(rep(1,n-1))),
          cbind(matrix(0,nrow=n-1,ncol=1),diag(n-1)))
  co=rep(">=",n-1);constraints=c(problem[[3]],rep("<=",n-1),co)
  B=c(problem[[4]],epsilon[-comp],rep(0,n-1))
  optimum <- lp("min",FUNC,A,constraints,B)
  lilsolution<-optimum["solution"]
  return(list(obj_func_val=problem[[1]]%*%lilsolution[[1]][1:1],
             solution=lilsolution[[1]][1:1]))
  stop("This is an error message")
}

```

A.5. Código para o método lexicográfico

```
lexico<- function(problem,permutation=c(-1)){
  n=dim(problem[[1]])[1]
  l=dim(problem[[1]])[2]
  if(all(permutation<1)){permutation=c(1:n)}
  if(length(permutation)!=n){return(print("Establish all of your preferences"))}
  A=problem[[2]]
  constraints=problem[[3]]
  B=problem[[4]]
  optimum <- lp("min",problem[[1]][permutation[1],],A,constraints,B)
  for (k in 2:n) {
    A=rbind(A,problem[[1]][permutation[k-1],])
    constraints=c(constraints,"==")
    B=c(B,optimum["objval"])
    optimum <- lp("min",problem[[1]][permutation[k],],A,constraints,B)
  }
  solution<-optimum["solution"]
  return(c(list(obj_func_val=problem[[1]]*%*%solution[[1]]),solution))
  stop("This is an error message")
}
```

A.6. Código para o simplex multiobjetivo

```

multisimplex<- function(problem){
  #Multiobjective linear problem in standard formulation
  C=problem[[1]];A=problem[[2]];constraints=problem[[3]];B=problem[[4]];
  realvar=dim(A)[2];cte=dim(A)[1]-realvar
  for(k in 1:cte){
    if (constraints[k] == "<="){
      aextra=rep(0,dim(A)[1]);aextra[k]=+1
      C=cbind(C,matrix(0,nrow=dim(C)[1],ncol=1));
      A=rbind(cbind(A,matrix(aextra,ncol=1)),
              matrix(c(rep(0,dim(A)[2]),1),nrow=1))
      constraints[k]="=";constraints=c(constraints,">=");B=c(B,0)
    }
    if (constraints[k] == ">="){
      aextra=rep(0,dim(A)[1]);aextra[k]=-1
      C=cbind(C,matrix(0,nrow=dim(C)[1],ncol=1));
      A=rbind(cbind(A,matrix(aextra,ncol=1)),
              matrix(c(rep(0,dim(A)[2]),1),nrow=1))
      constraints[k]="=";constraints=c(constraints,">=");B=c(B,0)
    }
  }
  #Phase 1
  newC=c(rep(0,dim(C)[2]),rep(1,cte))
  newA=rbind(cbind(A,rbind(diag(cte),matrix(0,ncol=cte,nrow=dim(A)[1]-cte))),
             cbind(matrix(0,nrow=cte,ncol=dim(A)[2]),diag(cte)))
  newcons=c(constraints,rep(">=",cte));newB=c(B,rep(0,cte))
  isfeasible<-lp("min",newC,newA,newcons,newB)
  if(isfeasible["objval"]!=0){ return("The problem has not a feasible set")}
  x_0=isfeasible["solution"][[1]][1:dim(A)[2]]
  #Phase 2
  newC=c(B,C%*%x_0);newA=t(cbind(rbind(A,C),
                                rbind(matrix(0,nrow=dim(A)[1],ncol=dim(C)[1]),diag(dim(C)[1]))))
  newcons=rep(">=",dim(newA)[1]);newB=c(rep(0,dim(A)[2]),rep(1,dim(C)[1]))
  isefficient<-lp("min",newC,newA,newcons,newB)
  if(isefficient["status"][[1]]!=0){
    return("The problem does not have a efficient set")}
  #Obtaining efficient base

```

```

optimalw=isefficient["solution"][[1]][-1:-length(B)]
Cbase=optimalw%*%C;nvar=dim(A)[2];ncon=cte
q<-combn(1:nvar,ncon);opt=+Inf
for (i in 1:choose(nvar,ncon)){
  B_i<-matrix(A[1:cte,q[,i]],nrow=ncon)
  if(det(B_i)!=0){
    xb=solve(B_i)%*%B[1:cte]
    xn=rep(0,nvar-ncon)
    xmod=c(xb,xn)
    if(all(xb>=0)){
      cb=Cbase[q[,i]]
      cn=Cbase[-q[,i]]
      cmod=c(cb,cn)
      zb=cmod%*%xmod
      if(zb<opt){
        opt=zb
        basesol=q[,i]
        sol=rep(0,nvar);sol[basesol]=xb
      }
    }
  }
}
L_1=list(basesol);L_2=list();L_3=list(sol[1:realvar])
while (length(L_1) != 0) {
  base=L_1[[1]];L_1=L_1[-1];L_2=c(L_2,list(base))
  Atilde=solve(A[1:cte,base])%*%A[1:cte,]
  btilde=solve(A[1:cte,base])%*%b[1:cte]
  Ctilde=C-C[,base]%*%Atilde
  R=Ctilde[,-base]
  EN=c(1:nvar);EN=EN[!EN %in% base]
  for (j in EN){
    C_EN=c(rep(0,dim(R)[2]+1),rep(1,dim(R)[1]))
    A_EN=rbind(cbind(R,diag(rep(-1,dim(R)[1]))%*%Ctilde[,j],diag(dim(R)[1])),
              diag(dim(R)[2]+1+dim(R)[1]))
    cons_EN=c(rep("==",dim(R)[1]),rep(">=",dim(R)[2]+1+dim(R)[1]))
    B_EN=rep(0,dim(A_EN)[1])
    optEN<-lp("max",C_EN,A_EN,cons_EN,B_EN)
    if(optEN["status"]!=0){EN=EN[!EN == j]}
  }
}

```

```
}
for (j in EN){
  for (i in base){
    base2=base[!base == i];base2=c(base2,j)
    xbase2=solve(A[1:cte,base2])%*%b[1:cte]
    sol=rep(0,nvar);sol[base2]=xbase2
    if(all(xbase2>=0) & !(list(base2) %in% L_1) & !(list(base2) %in% L_2)){
      L_2=c(L_2,list(base2));L_3=c(L_3,
        list(sol[1:realvar]))}
    }
  }
}
L_4=lapply(L_3,FUN = function(x) C[,1:realvar] %*% x)
return(list(L_2,L_3,L_4))
}
```


Bibliografía

- Arjun, J. (2012). Zorn's lemma- an elementary proof under the axiom of choice. <https://arxiv.org/abs/1207.6698>.
- Berkelaar, M. et al. (2023). *Interface to Lp_solve v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs*. version 5.6.20.
- Chankong, V. & Haimes, Y. Y. (1978). The Interactive Surrogate Worth Trade-Off (ISWT) Method for Multiobjective Decision-Making. In S. Zionts (Ed.), *Multiple Criteria Problem Solving* (pp. 42–67). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Corley, H. W. (1980a). An existence result for maximizations with respect to cones. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 31, 277–281.
- Corley, H. W. (1980b). A new scalar equivalence for pareto optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(4), 829–830.
- Ehrgott, M. (2010). *Multicriteria Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2nd edition.
- Ehrgott, M., Hamacher, H., Klamroth, K., Nickel, S., Schbel, A., & Wiecek, M. (1997). A note on the equivalence of Balance Points and Pareto Solutions in Multiple-Objective Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92(1), 209–212.
- Ehrgott, M. & Nickel, S. (1994). On the number of criteria needed to decide Pareto optimality. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55(3), 329–345.
- Ehrgott, M. & Ryan, D. (2002). Constructing robust crew schedules with bicriteria optimization. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11, 139–150.
- Evans, J. P. & Steuer, R. E. (1973). A revised simplex method for linear multiple objective programs. *Mathematical Programming*, 5, 54–72.
- Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(3), 618–630.

- Hwang, C. L., Paidy, S. R., Yoon, K., & Masud, A. S. M. (1980). Mathematical programming with multiple objectives: A tutorial. *Computers and Operations Research*, 7(1), 5–31.
- Isermann, H. (1974). Proper Efficiency and the Linear Vector Maximum Problem. *Operations Research*, 22(1), 189–191.
- Kneser, H. (1967). *Das Auswahlaxiom und das Lemma von Zorn*. Springer.
- Kuhn, H. W. & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear programming. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950* (pp. 481–492): Univ. California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif.
- Malivert, C. & Boissard, N. (1994). Structure of Efficient Sets for Strictly Quasi Convex Objectives. *Journal of Convex Analysis*, 1(2), 143–150.
- Miettinen, K. (2004). *Nonlinear multiobjective optimization*. International series in operations research and management science. Boston: Kluwer Academic Publishers, 4th printing edition.
- Mordukhovich, B. S. & Nguyen, M. (2022). *Convex analysis and beyond. Volume I : basic theory*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Nesterov, Y. & Nemirovskii, A. (1994). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. 3600 University City Science Center, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- R Core Team (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton, New Jersey: University Press.
- Salazar, J. J. (2001). *Programación matemática*. Madrid: Díaz de Santos.
- Sawaragi, Y., Nakayama, H., & Tanino, T. (1985). *Theory of multiobjective optimization*. Mathematics in science and engineering (Academic Press) ; 176. Orlando: Academic Press.
- Steuer, R. (1986). *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Wiley series in probability and mathematical statistics: Applied probability and statistics. Wiley.