



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Análise e resolución numérica de modelos de fluxo de persoas

Alfonso Salgado Pais

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **Análise e resolución numérica de modelos de fluxo de persoas**

Alfonso Salgado Pais

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Matemática Aplicada</b>
<b>Título: Análise e resolución de modelos de fluxo de persoas</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
A análise do fluxo peonil vense estudando desde os anos 60 e nos últimos anos o movemento de multitudes presenta moitas aplicacións desde o deseño de espazos ata as evacuacións, e na actualidade a definición da distancia social. Un dos obxectivos do TFG é a análise de algúns modelos continuos de fluxo de persoas nos que se realizan hipóteses nas que os peóns son axentes activos e intelixentes e teñen un comportamento anisótropo, é dicir, non están igualmente afectados por estímulos procedentes de todas as direccións do espazo. Entre os modelos continuos analizados están os que se corresponden a leis de conservación nos que a variable conservada é o fluxo de persoas, proporase a resolución numérica de un modelo coa metodoloxía de volumes finitos desenvolvendo un código específico a partir dun inicial facilitado polas titoras en MATLAB.



# Agradecementos

Gustaríame agradecer aquí a grande axuda recibida por parte de Elena Vázquez Cendón, a titora deste proxecto, por todo o tempo adicado a resolver as miñas dúbidas, pola súa proximidade e tranquilidade e pola paixón que sente polas matemáticas.

Igualmente, debo darlle as grazas tamén a Saray Busto Ulloa, pola imprescindible axuda cos códigos en Matlab, por axudarme a entender ben o método de volumes finitos e por permitirme volver a Italia.



# Índice xeral

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Un modelo do fluxo de persoas</b>	<b>1</b>
1.1. O modelo e as súas variables . . . . .	3
1.2. Conservación do número de peóns . . . . .	3
1.3. A velocidade coma función da densidade . . . . .	4
1.4. A ecuación imaxe . . . . .	5
1.5. O modelo de segunda orde . . . . .	7
<b>2. Nocións básicas e leis de conservación</b>	<b>9</b>
2.1. Definición e exemplos de leis de conservación . . . . .	9
2.2. O problema de Cauchy e o concepto de solución clásica . . . . .	15
2.3. Solucións febles . . . . .	21
<b>3. O método de volumes finitos</b>	<b>25</b>
3.1. Descrición do método . . . . .	25
3.2. Converxencia . . . . .	29
3.3. Esquemas numéricos . . . . .	32
3.4. Programación en Matlab . . . . .	36
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>39</b>
<b>A. Código en Matlab</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>



## **Resumo**

Este traballo introduce un modelo para estudar o fluxo de persoas en 2D nun dominio rectangular, supoñendo diferentes saídas segundo o caso. Dito modelo basease nas leis de conservación hiperbólicas. Descríbese ademais o método de volumes finito que se aplica ás ecuacións dos fluxo de persoas.

## **Abstract**

This work introduces a model for studying the flux of pedestrians in a 2D rectangular or square domain, assuming different exits in each case. This model is based on the hyperbolic conservation laws. It is also described the finite volumes method, which is applied to the pedestrian flow equations.



# Introdución

O crecemento demográfico que tivo lugar na segunda metade do século XX, e que continúa a darse a día de hoxe, así coma o éxodo rural cara as cidades fan que cada vez sexan máis frecuentes as grandes aglomeracións nos espazos públicos arredor de todo o mundo. Faise fundamental polo tanto a análise do comportamento das persoas neste eido, que posibilitará por exemplo un deseño das cidades máis adaptado ás necesidades dos peóns, así coma unhas predicións que poidan previr certas catástrofes que poden xurdir cando teñen lugar estes acontecementos multitudinarios.

É neste contexto no que xorden diversos modelos para o estudo dos fluxos de persoas, baseados en ferramentas matemáticas de diversa índole, que son analizados no seguinte capítulo. Un dos motivos polos que eu escollín este Traballo de Fin de Grao foi poder achegarme aos modelos que permiten aportar solucións matemáticas a este tipo de problemas, ademais do evidente carácter práctico que este ten, xa que as simulacións feitas na memoria reproducen situacións que se poden identificar claramente na nosa vida cotiá.

Hoxe en día, coa pandemia mundial provocada polo COVID-19 na que estamos inmersos, vese a importancia dos fluxos de persoas dun xeito diferentes, posto que o termo “distancia social” converteuse nunha medida máis de prevención. É un exemplo actual que pon de manifesto a importancia do tema que estamos a tratar.

Se fixamos a nosa atención en Santiago de Compostela, o Xacobeo pode ser un evento predilecto para poñer en práctica o estudo do modelo de fluxo de persoas, facendo especial fincapé nas grandes prazas da cidade, a do Obradoiro e a da Quintana, onde se reúnen tantos peregrinos ao longo de todo o ano.

Así, decantámonos por desenvolver un modelo macroscópico e abordar o problema dende un punto de vista determinista, centrando a nosa atención nos centros da vida pública, coma as prazas que comentabamos no parágrafo anterior.

No primeiro capítulo introdúcese o modelo e as hipóteses nas que se fundamenta. O segundo capítulo está adicado ao estudo matemático das ecuacións en derivadas parciais hiperbólicas e máis concretamente dos sistemas de leis de conservación hiperbólicas, por ser o marco hiperbólico de dito modelo. No terceiro capítulo, desenvólvese a teoría sobre

o método de volumes finitos, e preséntanse diversos esquemas numéricos. Finalmente, no derradeiro capítulo compártense algúns dos resultados dalgunhas simulacións sinxelas en 2D, resolvendo o problema cando a dirección de movemento dos peóns é un dato máis do problema, para axustar o tempo de desenvolvemento do traballo ao número de créditos asignado. O apéndice contén o código MATLAB desenvolto para o TFG.

# Capítulo 1

## Un modelo do fluxo de persoas

Os fluxos de persoas están moi presentes na nosa vida diaria, dende as grandes aglomeracións en eventos públicos ou a súa importancia capital en certos contextos coma as evacuacións en situacións de emerxencia, pasando pola distancia física nestes momentos de pandemia mundial. Porén, o seu estudo pode ser de gran interese de cara a moitas aplicacións diferentes que permitan previr especialmente os acontecementos multitudinarios ou os protocolos de emerxencia.

Con todo, o comportamento dos seres humanos pode semellar a priori algo moi difícil de estudar matematicamente, debido sobre todo á cantidade de factores diferentes que nos levan a tomar unha decisión nun momento axeitado.

O noso obxectivo neste traballo será estudar os movementos de persoas en lugares abarrotados como pode ser unha praza nun acontecemento importante ou as entradas e saídas dalgún lugar público moi transitado, como por exemplo unha boca de metro; así como baixo a chamada hipótese do continuo, supoñendo o fluxo de persoas coma un medio continuo.

Principalmente, os modelos de fluxo de persoas adoitan dividirse en dúas correntes: a macroscópica, máis centrada en características dun conxunto de peóns como a velocidade ou a densidade promedio nunha área concreta, e a microscópica, enfocada nas características individuais como o sexo, a idade ou o peso. Algúns exemplos de modelos macroscópicos, nos cales basearemos parte do noso traballo son o de Hughes [5], o de Colombo e Rosini [1] ou o de Piccoli e Tosin [9]; mentres que algúns exemplos salientables de modelos microscópicos son o de Helbing e Molnár [4] e o de Löhner [8].

Ambos enfoques, tanto o macroscópico coma o microscópico, adoitan dar por supostas certas hipóteses sobre a forma de actuar dos peóns:

- **Comportamento intelixente:** Os peóns son axentes activos capaces de tomar de-

cisións acorde co seu obxectivo, chegar a un punto determinado, e son capaces de avaliar o seu entorno para decidir o camiño óptimo ata dito obxectivo.

- **Comportamento anisotrópico:** Os peóns non están afectados por igual polos estímulos externos procedentes de direccións distintas, e vense maiormente condicionados por aqueles que se producen dentro do seu campo visual ou que ocorren na dirección e sentido no que se moven.
- **Comportamento non local:** Os peóns reaccionan dun xeito non local ás condicións externas tanto en espazo, posto que reciben estímulos da rexión sensorial, coma en tempo, xa que precisan dun tempo de percepción para captar o estímulo e dun tempo de reacción para decidir como afrontar o mesmo.

Estas tres hipóteses, que semellan dunha clara intuición lóxica, refírense a situacións normais nas que os peóns adoitan realizar as súas actividades cunha certa planificación e dun xeito natural. Por outra banda, en situacións de pánico coma unha evacuación, un sismo ou un incendio aparece un comportamento competitivo guiado polo pánico:

- É habitual que aparezan os nervios e as persoas traten de moverse o máis rápido posible.
- A interacción entre os peóns é de natureza física, facendo desaparecer a distancia mínima habitual que normalmente manteñen os individuos entre eles ou coas paredes e os obstáculos.
- As presións elevadas que se rexistran nos atascos de persoas (superiores nalgúns casos aos  $4500N/m^2$ ) poden ser suficientes para derribar unha parede.
- Diminúe o fluxo nas saídas do espazo debido ás aglomeracións ou en ocasións ás persoas feridas ou que se atopan no chan.
- Xurde o efecto rabaño, que fai que as persoas deixen de pensar por si mesmas e se limiten a seguir o comportamento da maioría e das que teñen máis próximas. Normalmente isto provoca que se centre a atención nas saídas principais, deixando de lado as saídas de emerxencia.

Aínda non se conta con modelos que reproduzan con exactitude os comportamentos das persoas, ben porque os individuos poden actuar de xeito compulsivo, poden descoñecer a estratexia óptima debido por exemplo a que se distraen co entorno que os rodea, e finalmente porque calquera modelo que busque reproducir o comportamento humano terá

un pequeno grado de imperfección. Estas desviacións do comportamento óptimo trátanse coma fluctuacións da conduta. Porén, de cara a unha maior simplicidade, o noso estudo basearase case na súa totalidade en situacións normais.

## 1.1. O modelo e as súas variables

De cara a estudar o modelo do fluxo de persoas debemos ter en conta, ademais do tempo,  $t$  (en segundos), tres variables: a velocidade,  $v$  (en metros por segundo); o fluxo,  $q$  (en peóns por segundo), que representa a cantidade de peóns por unidade de tempo; e a densidade,  $\rho$  (en peóns por metro cadrado), que indica a cantidade de peóns por unidade de espazo. Ademais, como veremos posteriormente, ditas variables están intimamente relacionadas entre si.

Medir individualmente as magnitudes de cada un dos individuos pode resultar complicado e ademais carece de interese práctico, polo que imos adoptar un enfoque macroscópico e ter en conta a xa comentada hipótese do continuo, que clarificaremos cun exemplo:

**Exemplo 1.1.** Un transeúnte situado nun punto  $x$  decide contar o número de peóns que pasan polo seu carón. Supoñamos que pasan 4 peóns nos instantes  $t$ ,  $t + 2$ ,  $t + 4.5$  e  $t + 7$ , de feito que a cantidade de peóns por segundo que pasaron polo seu carón no intervalo  $[t, t + 7]$  é  $\frac{4}{7}$ . Así, se lle preguntasen polo fluxo no instante  $t + 3$ , o transeúnte contestaría  $\frac{4}{7}$ , a pesar de que nese instante non pasou ningún peón polo seu carón. A velocidade e a densidade calcularíanse de xeito similar, tendo en conta o acontecido en intervalos de tempo pequenos, mais dun tamaño suficiente para non ter conta de cada peón individualmente.

Asumindo isto, podemos definir as nosas variables como campos escalares, que adoptarán un valor único en cada punto  $x$  e en cada instante  $t$ :  $v(x, t)$ ,  $q(x, t)$  e  $\rho(x, t)$ .

## 1.2. Conservación do número de peóns

A idea básica do noso modelo, así como dos métodos numéricos que imos empregar, é a conservación do número de peóns, é dicir, que se partimos dun dominio pechado, as persoas no interior do mesmo serán unha constante. Polo tanto, podemos asumir que o cambio no número de persoas por unidade de espazo dependerá unicamente do fluxo entrante e saínte na fronteira do noso dominio.

Para explicar esta idea dun xeito máis matemático, basearémonos no traballo sobre o fluxo de tráfico [7], posto que as ideas neste punto son practicamente as mesmas se falamos de coches coma se o facemos de peóns.

Así, desenvolveremos o razoamento matemático nunha dimensión espacial e sen ter en conta inicialmente a regularidade das funcións escalares  $q$  e  $\rho$ , impondo logo certas restricións sobre elas para chegar a leis de conservación máis precisas.

Matematicamente, o feito de que o número de peóns se conserva pode expresarse mediante a chamada lei de conservación en forma integral:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = q(a, t) - q(b, t), \quad (1.1)$$

isto é, a variación da cantidade total de peóns coincide coa variación do fluxo entre a entrada,  $q(a, t)$ , e a saída,  $q(b, t)$ .

Posto que non puxemos restrición sobre a función fluxo  $q$ , supoñamos agora que esta é derivable respecto da variable espacial  $x$ . Tense así

$$q(a, t) - q(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx. \quad (1.2)$$

Se ademais a función densidade  $\rho$  é derivable respecto do tempo  $t$ , pódese introducir o operador diferencial na integral, obtendo

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx. \quad (1.3)$$

Substituíndo (1.2) e (1.3) en (1.1) chegamos a

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \right] dx = 0. \quad (1.4)$$

Agora ben, posto que  $[a, b]$  é un intervalo arbitrario, verifícase

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

Esta última expresión é o que se coñece coma lei de conservación en forma diferencial, válida para todo  $x \in [a, b]$ , e como o seu nome nos indica, para chegar a ela é preciso supoñer que as funcións  $q$  e  $\rho$  son diferenciables. No capítulo 2 veremos que estas condicións non sempre se cumpren en xeral, pero para a dinámica de peóns si que podemos supoñer que  $q$  e  $\rho$  son funcións de clase un a pedazos, e polo tanto poderemos establecer o modelo de comportamento xeral do fluxo de peóns grazas á ecuación (1.5) unida á unha lei que nos especifique o que acontece no conxunto de puntos onde se perde a diferenciabilidade.

### 1.3. A velocidade coma función da densidade

Resulta bastante intuitivo entender a relación entre a velocidade dos peóns e a densidade do lugar onde se moven. Supoñamos que nos estamos movendo por unha praza baleira,

de xeito que podemos adaptar a nosa velocidade atendendo exclusivamente a preferencias individuais, e a medida que aumenta a densidade de peóns na praza teremos que ir reducindo a nosa velocidade por mor de evitar choques, ata chegar a unha situación de densidade máxima na cal non nos poderemos apenas mover, algo así coma a densidade de saturación da praza, e que na vida real se alcanza en eventos moi multitudinarios coma por exemplo o 25 de xullo ás 00:00 na praza do Obradoiro en Santiago de Compostela.

Así, a intuición física dinos que o módulo da velocidade é función da densidade,  $V(\rho)$ , que neste traballo definiremos baseándonos en [13]:

$$\begin{aligned} V : [0, \rho_{max}] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho &\longmapsto V(\rho) = v_{max} e^{-\alpha(\rho/\rho_{max})^2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde  $\rho_{max}$  é a densidade de saturación comentada anteriormente,  $v_{max}$  é a velocidade libre que un peón pode acadar, supoñendo a situación inicial de ausencia doutros peóns que imposibiliten o seu percorrido, e  $\alpha$  é unha constante positiva.

Deste xeito, tense que o módulo da velocidade é decrecente con respecto á densidade, e tomará valores entre o seu mínimo  $v_{max}e^{-\alpha}$ , cando se alcance a densidade de saturación, e o seu máximo  $v_{max}$  na situación ideal na que a densidade sexa nula.

## 1.4. A ecuación imaxe

Con vistas a seguir expoñendo a forma que vai adoptar o noso modelo, cómpre explicar a idea da ecuación imaxe, a cal, baseándonos no feito en [13], vamos permitir definir o campo de vectores que representa a dirección desexada.

Partimos dun dominio conexo bidimensional  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que representa a área obxecto do noso estudo, a cal conta ademais cunha ou varias saídas polas que poden entrar e saír peóns, aumentando ou diminuíndo o fluxo  $q$ . A fronteira do dominio,  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_p$ , consiste na unión de ditas saídas polas que entran e saen os peóns,  $\Gamma_0$ , así como do conxunto dos demais límites do espazo en cuestión,  $\Gamma_p$ , é dicir, os lugares onde remata  $\Omega$  polos que non se produce intercambio de fluxo entre  $\Omega$  e o exterior.

Nese dominio bidimensional, o modelo macroscópico derivase da ecuación de conservación de masa

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(q) = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.7)$$

onde  $\rho = \rho(x, y, t)$  representa a densidade e  $q = q(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$  o fluxo. Se a esta ecuación de conservación de masa lle engadimos unha relación pechada entre velocidade, fluxo e densidade, xa teríamos o noso modelo de primeira orde, o cal soamente habería que complementar cunha ecuación de momento adicional (que supón ter en conta a aceleración)

para chegar ao modelo de segunda orde. Ademais, a partir de agora escribiremos  $\mathbf{x}$  para referirnos a  $(x, y)$ .

No que ás relacións se refire, o campo de velocidades ven dado por  $v = V(\rho)\mu$ , sendo  $V(\rho)$  o definido en (1.6) e  $\mu$  o campo de vectores da dirección desexada polo peón, froito do proceso de avaliación do entorno en busca da ruta óptima para alcanzar o seu obxectivo,  $\Gamma_0$ , e que caracteriza o comportamento intelixente que comentamos na primeira sección. Para definir  $\mu$  dun xeito adecuado, seguimos a caracterización adoptada por Hughes en [5] definíndoo coma a dirección unitaria oposta ao gradiente dun potencial escalar  $\phi$

$$\mu = -\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \quad (1.8)$$

Pola súa parte, a función  $\phi$  é a solución da chamada *eikonal equation* ou ecuación imaxe, e que ven dada por

$$\begin{cases} \|\nabla\phi\| = c(t, \mathbf{x}) & \text{para } t > 0, \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi = 0 & \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

A función  $c \equiv c(t, \mathbf{x}) \in [1, +\infty)$  é o coeficiente de custo, posto que fai referencia ao traballo que debe facer o peón nun determinado instante de tempo  $t$  para pasar por un punto concreto  $\mathbf{x} \in \Omega$ . A súa escolla caracteriza a solución da ecuación imaxe  $\phi$ , por exemplo se tomamos  $c = 1$  a solución de (1.9) será a distancia entre o punto  $\mathbf{x}$  e o obxectivo  $\Gamma_0$ , é dicir,  $\phi(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma_0)$ . Esta elección precisa facer unha pequena restrición sobre  $\Omega$ , o cal debe ser un dominio convexo, xa que do contrario, o camiño máis curto unindo  $\mathbf{x}$  e  $\Gamma_0$  pode non estar completamente contido en  $\Omega$ , de feito que a aplicación distancia non estaría ben definida.

Outras posibilidades á hora de escoller a función custo  $c$  buscan expresar dun xeito máis claro a intención dos peóns de evitar as zonas máis transitadas, tomando a función custo  $c \equiv c(\rho(t, \mathbf{x}))$  coma unha función crecente con respecto da densidade. Este é o caso do modelo de Hughes, no cal se ten que  $c \equiv c(t, \mathbf{x}) = 1/V(\rho(t, \mathbf{x}))$ . A maior crítica que se lle pode facer á esa elección para  $c$  é que esta supón que os peóns son capaces de analizar de antemán a rexión por onde camiñan, obtendo un coñecemento absoluto de todo o dominio  $\Omega$  en calquera instante de tempo, o cal resulta imposible, especialmente se consideramos un dominio o suficientemente extenso.

Coa intención de superar este suposto, en [15] introdúcese o concepto de efecto de memoria, segundo o cal os peóns seguen o camiño máis curto ata o seu destino grazas á información que a súa memoria recopilou de anteriores ocasións no mesmo lugar ou en zonas e situacións con densidades similares. Isto leva á elección dun campo de direccións

$\mu$  algo máis complexo:

$$\mu = \frac{-\nabla\phi - \omega\nabla[V(\rho)^{-1} + g(\rho)]}{\|-\nabla\phi - \omega\nabla[V(\rho)^{-1} + g(\rho)]\|}, \quad (1.10)$$

onde  $\phi$  resolve a ecuación (1.9),  $\omega > 0$  é o coeficiente de repulsión e  $g(\rho)$  unha función que busca modelar do xeito máis adecuado posible a incomodidade do peón en situacións de densidade elevada. Normalmente na expresión de  $g$  adoita aparecer un coeficiente  $\beta$  positivo que dependerá da persoa en cuestión e representa a sensibilidade individual fronte a estes aspectos.

Sen embargo, nos problemas test que resolveremos numericamente imos supoñer que a dirección unitaria  $\mu$  é un dato do problema.

## 1.5. O modelo de segunda orde

Unha vez definido o campo de velocidades, é preciso establecer tamén a relación entre o fluxo, a velocidade e densidade. A elección que faremos neste traballo será o produto de ambas variables, de xeito que  $q(\rho, x) = \rho v$ , e tendo en conta (1.6) e (1.8), así coma a elección de  $c(t, x)$ , chegamos ao seguinte:

$$q(\rho, x) = \rho v = \rho V(\rho)\mu = -\rho V(\rho) \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = -\rho V^2(\rho)\nabla\phi = -\rho v_{max}^2 e^{-2\alpha(\frac{\rho}{\rho_{max}})^2} \nabla\phi. \quad (1.11)$$

Ademais, tendo en conta esta relación, podemos reescribir a ecuación de conservación de masa (1.7) como

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.12)$$

e a resolución da mesma é completamente factible se ven acompañada de condicións iniciais e condicións de contorno.

Os modelos de segunda orde, empregados por moitos autores para problemas similares a este, ou para a resolución de problemas con características comúns, como no problema do fluxo de tráfico ou o das augas someras, foron readaptados a modelos de fluxo de persoas por Jiang et al [6]. Así, a ecuación de conservación de masa (1.12) complementábase cunha ecuación de momento, na cal aparece un produto tensorial, ademais dun termo difusivo no segundo membro que representa unha forza externa actuando sobre os peóns, e que supón incluír os efectos do campo vectorial da aceleración. No noso caso, dita ecuación de momento será a seguinte:

$$\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla P(\rho) = \frac{1}{\tau} \rho(V(\rho)\mu - v), \quad (1.13)$$

con  $\tau$  un parámetro de relaxación que permite modelar a forma en que os peóns adaptan a súa velocidade  $v$  á velocidade desexada  $V(\rho)\mu$ . O termo do segundo membro representa

unha forza repulsiva de xeito similar a como acontece coa lei de enerxía na dinámica de gases, e denotarémolo por  $A$  debido ás relacións obvias deste termo coa aceleración dos peóns. Pola súa parte,  $P(\rho) = p_0\rho^\gamma$  é unha función dependente da densidade onde  $p_0$  e  $\gamma$  son coeficientes de repulsión maiores que 0 e 1, respectivamente. Cómpre ademais observar que se trata dunha ecuación vectorial, con dúas compoñentes, posto que o produto tensorial supón unha matriz  $2 \times 2$  e o último sumando do segundo membro representa o gradiente da composición da función  $P$  coa función  $\rho$ , e esta última depende de  $x$  e de  $y$ .

## Capítulo 2

# Nocións básicas e leis de conservación

Nesta sección introduciremos as nocións principais acerca dos sistemas de ecuacións hiperbólicos no cal se enmarca o modelo de fluxo de persoas. Conceptos importantes serán o de solución clásica, solución feble e problema de Cauchy, que servirán de base teórica para os métodos numéricos que imos empregar.

Igualmente, desenvolveremos o concepto de lei de conservación introducido no primeiro capítulo, o cal resulta de vital importancia nos métodos numéricos, e as súas distintas versións dependendo das restricións baixo as que teñamos as funcións.

Case todos os conceptos aquí explicados foron extraídos do libro de Vázquez Cendón, [14].

### 2.1. Definición e exemplos de leis de conservación

Temos xa adquirida a intuición física de que nunha dimensión unha magnitude se conserva cando non se crea nin se destrúe, é dicir, cando os cambios se deben unicamente ás entradas e saídas de dita magnitude nos extremos do intervalo a considerar. Se queremos xeralizar isto a  $n$  variables, a intuición será parecida, posto que os cambios dependerán do fluxo entrante e saínte na fronteira do dominio. Mostramos así a definición formal de sistema de leis de conservación en varias variables dada por E. Godlewski y P. A. Raviart en [2].

**Definición 2.1.** Sexa  $\Omega$  un subconxunto de  $\mathbb{R}^p$  e sexan  $f_j$ , con  $1 \leq j \leq d$ ,  $d$  funcións regulares de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^p$ :

$$f_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p, 1 \leq j \leq d.$$

A forma xeral xeral dun sistema de leis de conservación é

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(w)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

onde  $w = (w_1, \dots, w_p)$ , chamado vector das variables conservativas, é a función vectorial

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^d \times [0, \infty] &\longrightarrow \Omega \\ (x_1, \dots, x_d, t) &\longmapsto (w_1, \dots, w_p). \end{aligned} \quad (2.2)$$

O conxunto  $\Omega$  denomínase conxunto dos estados, mentres que as funcións  $f_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})$  reciben o nome de funcións fluxo.

Deste xeito, temos que a ecuación de conservación de masa (1.12) entra claramente na definición de lei de conservación, simplemente identificando o operador lineal diverxencia, é dicir,  $\operatorname{div}(f(w)) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(w)$ .

O sistema (2.1) representa formalmente a idea de conservación das cantidades  $w_1, \dots, w_p$ . Para velo dun xeito máis claro e similar á forma integral introducida en (1.1), consideremos un dominio arbitrario  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  e integremos a ecuación (2.1) sobre  $\Omega$ . Teremos así:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w(x, t) \, dx + \sum_{j=1}^d \int_{\partial\Omega} f_j(w) \cdot \vec{\eta}_j \, ds = 0,$$

onde  $\partial\Omega$  representa a fronteira de  $\Omega$  e  $\vec{\eta}_j = (\eta_1, \dots, \eta_d)$  é o vector normal unitario a  $\partial\Omega$  que apunta cara ó exterior do dominio. Así, a variación de  $\int_{\Omega} w(x, t) \, dx$  co tempo coincide co fluxo que entra a través da súa fronteira,  $-\sum_{j=1}^d \int_{\partial\Omega} f_j(w) \cdot \vec{\eta}_j \, ds$ , onde o signo negativo ven de considerar coma positivo o sentido que apunta cara o exterior de  $\Omega$ , en concordancia coa elección de  $\vec{\eta}$ .

Facendo as restricións necesarias sobre o vector das variables conservativas  $w$  e sobre as funcións fluxo  $f_j$ , así como tendo en conta que se poden eliminar as integrais posto que o dominio  $\Omega$  foi escollido de forma arbitraria, chegamos á lei de conservación en forma diferencial, ou simplemente lei de conservación, (2.1).

Introducimos agora algúns exemplos de leis de conservación:

**Exemplo 2.2.** A ecuación do transporte é un dos exemplos máis sinxelos que podemos atopar (por exemplo, en Toro [12]), posto que  $\Omega$  se considera un conxunto de  $\mathbb{R}$  e só temos unha ecuación de fluxo,  $f(w) = \lambda w$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$  unha constante que pode ser interpretada como a velocidade de propagación. Así,  $p = d = 1$  e a ecuación ven dada por

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \lambda \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (2.3)$$

**Exemplo 2.3.** O modelo do fluxo de tráfico, tamén con  $d = p = 1$ , considera  $w = \rho$  a densidade e o fluxo coma unha función non linear da variable conservativa,  $f(\rho) = \rho v_m (1 - \frac{\rho}{\rho_m})$ , sendo  $v_m$  e  $\rho_m$  a velocidade e densidade máximas.

**Exemplo 2.4.** As ecuacións das augas someras, ou *shallow water equations*, na literatura inglesa, modelan o comportamento da auga en ríos, canles e zonas pouco profundas en xeral, e constitúen un dos exemplos máis importantes de leis de conservación. Se traballamos nunha dimensión e supoñemos a profundidade constante (este modelo introdúcese en Stoker [11]) podemos caracterizalo como segue:

$$d = 1, \quad p = 2, \quad w = (h, q)^T, \quad f(w) = \left( q, \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)^T,$$

onde  $h$  representa a altura da auga para cada punto  $x$  e cada instante  $t$ ,  $g$  a gravidade, a variable conservativa  $q = hu$  é o caudal por unidade de lonxitude e  $u$  a velocidade promediada en vertical. A ecuación das primeiras compoñentes dos vectores correspóndese coa lei de conservación de masa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

mentres que a das segundas compoñentes, coa ecuación de conservación do momento:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = 0.$$

Obsérvense as similitudes entre estas ecuacións e as ecuacións de conservación de masa e de conservación de momento do noso modelo, (1.12) e (1.13), a pesar de que aquí non aparecen termos fonte.

Estendendo este problema a dúas dimensións chegamos ás ecuacións das augas someras bidimensionais:

$$d = 2, \quad p = 3, \quad w = (h, q_1, q_2)^T, \\ f_1(w) = \left( q_1, \frac{q_1^2}{h} + \frac{gh^2}{2}, \frac{q_1 q_2}{h} \right)^T, \quad f_2(w) = \left( q_2, \frac{q_1 q_2}{h}, \frac{q_2^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)^T,$$

mantendo a notación empregada para o caso unidimensional.

**Exemplo 2.5.** A ecuación de Burgers,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

foi introducida por Burgers coma o modelo diferencial máis simple para un fluído, e presenta certas peculiaridades dun sistema non linear nunha variable que nos servirán posteriormente para introducir algunhas ideas relacionadas co concepto de solución e solución feble.

**Exemplo 2.6.** O modelo de fluxo de persoas constitúe tamén un sistema de leis de conservación, como imos mostrar recordando as ecuacións (1.12) e (1.13).

No caso unidimensional, temos o seguinte:

$$d = 1, \quad p = 2, \quad w = (\rho, q)^T, \quad f(w) = (q, qv + P(\rho))^T,$$

xa que o produto tensorial que aparece no primeiro membro en (1.13) neste caso pode resolverse simplemente coma un produto escalar. Polo tanto, recordando a relación pechada entre o fluxo, a velocidade e a densidade,  $q = \rho v$ , reescribimos o vector de fluxos como segue:

$$f(w) = (q, qv) = \left( q, \frac{q^2}{\rho} + P(\rho) \right)^T.$$

Nótese que poderíamos ter problemas para definir a velocidade se a densidade é nula, polo que a partir de aquí supoñeremos que se  $\rho = 0$ , entón o valor do módulo da velocidade será  $v = 0$ , e traballaremos só con valores positivos da densidade, é dicir, con  $\rho > 0$ .

Algo que non sucedía nos outros exemplos e que si sucede neste é a aparición dun termo fonte no segundo membro. Nunha dimensión, ese termo fonte é  $S(w) = \left( 0, \frac{1}{\tau} \rho (V(\rho) \mu - v) \right)^T$ .

No caso de dúas dimensións, a densidade é unha variable escalar, mentres que a velocidade pasa a ter dúas compoñentes, de xeito que  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  e así  $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (\rho v_1, \rho v_2)$ . Tendo isto en conta, o produto tensorial resólvese do seguinte modo:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 v_1 & q_1 v_2 \\ q_2 v_1 & q_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_1^2}{\rho} & \frac{q_1 q_2}{\rho} \\ \frac{q_1 q_2}{\rho} & \frac{q_2^2}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Imos ter polo tanto dúas funcións de fluxo,  $f_1$  e  $f_2$ , unha para cada fila do produto tensorial, e substituíndo a expresión da función  $P(\rho) = p_0 \rho^\gamma$ , con  $\gamma$  e  $p_0$  constantes reais positivas, o modelo resulta:

$$d = 2, \quad p = 3, \quad w = (\rho, q_1, q_2)^T,$$

$$f_1(w) = \left( q_1, \frac{q_1^2}{\rho} + p_0 \rho^\gamma, \frac{q_1 q_2}{\rho} + p_0 \rho^\gamma \right)^T \quad f_2(w) = \left( q_2, \frac{q_1 q_2}{\rho} + p_0 \rho^\gamma, \frac{q_2^2}{\rho} + p_0 \rho^\gamma \right)^T.$$

Ademais, agora tanto  $\mu$  coma  $v$  teñen dúas compoñentes, e o termo fonte pasa a ser  $S(w) = \left( 0, \frac{1}{\tau} \rho (V(\rho) \mu_1 - v_1), \frac{1}{\tau} \rho (V(\rho) \mu_2 - v_2) \right)^T$ .

Para rematar esta sección, introduciremos os sistemas de leis de conservación hiperbólicos, que constitúen un caso particular de sistemas de leis de conservación, e trataremos de mostrar que o modelo de fluxo de persoas é un sistema hiperbólico. Todos os demais exemplos introducidos na sección anterior son sistemas hiperbólicos.

**Definición 2.7.** Sexa un sistema da forma (2.1), para toda función fluxo  $f_j$  con  $j = 1, \dots, d$ , definimos a súa matriz xacobiana  $A_j$  como:

$$A_j(w) = \left( \frac{\partial f_{ij}}{\partial w_k}(w) \right)_{1 \leq i, k \leq p}.$$

Así, o sistema (2.1) dise hiperbólico se  $\forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$  a matriz:

$$A(w, \eta) = \sum_{j=1}^d \eta_j A_j(w) \quad (2.4)$$

ten  $p$  autovalores reais  $\lambda_1(w, \eta) \leq \lambda_2(w, \eta) \leq \dots \leq \lambda_p(w, \eta)$  e os  $p$  autovectores correspondentes son linealmente independentes. Ademais, se todos os autovalores son distintos dise que o sistema é estritamente hiperbólico.

**Exemplo 2.8.** O modelo de fluxo de persoas é un sistema hiperbólico. Para mostralo, calcularemos os autovalores e os autovectores das matrices xacobianas.

Nunha soa dimensión temos o vector das variables conservativas  $w = (\rho, q)$  e o vector de fluxos  $f(w) = \left( q, \frac{q^2}{\rho} + p_0 \rho^\gamma \right)$ , polo que:

$$A(w) = \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{\rho^2} + \gamma p_0 \rho^{\gamma-1} & \frac{2q}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + c^2 & 2v \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Na última igualdade introducimos a variable física  $v = \frac{q}{\rho}$  e denotamos como  $c = \sqrt{\gamma p_0 \rho^{\gamma-1}}$  á celeridade para calcular os autovalores dun xeito máis cómodo e sinxelo, así como para simplificar a notación. Nótese que como os coeficientes  $\gamma$  e  $p_0$  son ambos maiores que 0, non imos ter problemas coa raíz cadrada e  $c$  será un número real positivo.

Así, resolvendo a ecuación característica  $|A - \lambda I| = 0$ , sendo  $I$  a matriz identidade, chegamos a que os autovalores de  $A$  e os seus autovectores asociados son

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v + c,$$

$$i_1 = (1, v - c)^T, \quad i_2 = (1, v + c)^T,$$

e como  $c > 0$ , os autovalores son reais e distintos. Ademais, os autovectores son linealmente independentes, polo que se trata dun sistema estritamente hiperbólico. En efecto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v - c & v + c \end{vmatrix} = 2c > 0.$$

Pasando agora ó estudo do modelo en dúas dimensións, se derivamos cada unha das compoñentes de  $f_1(w) = \left( q_1, \frac{q_1^2}{\rho} + p_0\rho^\gamma, \frac{q_1q_2}{\rho} + p_0\rho^\gamma \right)^T$  e  $f_2(w) = \left( q_2, \frac{q_1q_2}{\rho} + p_0\rho^\gamma, \frac{q_2^2}{\rho} + p_0\rho^\gamma \right)^T$  con respecto ás variables conservativas  $w_1 = \rho$ ,  $w_2 = q_1$  e  $w_3 = q_2$ , obtemos as matrices xacobianas  $A_1$  e  $A_2$  :

$$A_1(w) = \frac{\partial f_1}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_1^2}{\rho^2} + \gamma p_0\rho^{\gamma-1} & \frac{2q_1}{\rho} & 0 \\ -\frac{q_1q_2}{\rho^2} + \gamma p_0\rho^{\gamma-1} & \frac{q_2}{\rho} & \frac{q_1}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$A_2(w) = \frac{\partial f_2}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{q_1q_2}{\rho^2} + \gamma p_0\rho^{\gamma-1} & \frac{q_2}{\rho} & \frac{q_1}{\rho} \\ -\frac{q_2^2}{\rho^2} + \gamma p_0\rho^{\gamma-1} & 0 & \frac{2q_2}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Novamente, volvemos a introducir a velocidade,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \left( \frac{q_1}{\rho}, \frac{q_2}{\rho} \right)$  e a celeridade,  $c$ . Deste xeito, os autovalores da primeira matriz,  $A_1$ , e os seus autovectores asociados son

$$\lambda_1 = v_1 - c, \quad \lambda_2 = v_1, \quad \lambda_3 = v_1 + c,$$

$$i_1 = (1, v_1 - c, v_2 - c)^T, \quad i_2 = (0, 0, 1)^T, \quad i_3 = (1, v_1 + c, v_2 + c)^T.$$

Pola súa parte, para a matriz  $A_2$ , tense

$$\lambda_1^* = v_2 - c, \quad \lambda_2^* = v_2, \quad \lambda_3^* = v_2 + c,$$

$$i_1^* = i_1 = (1, v_1 - c, v_2 - c)^T, \quad i_2^* = (0, 1, 0)^T, \quad i_3^* = i_3 = (1, v_1 + c, v_2 + c)^T.$$

Tanto no caso de  $A_1$  coma de  $A_2$ , os tres valores propios son reais e distintos, e os autovectores asociados son linealmente independentes, posto que en ambos casos, o determinante da matriz  $3 \times 3$  que conforman os mesmos ten determinante distinto de 0. Os autovalores de  $A_1$  e  $A_2$  serán empregados no código co cal simularemos posteriormente os fluxos de persoas.

Recordando agora o introducido en (2.4), temos que comprobar se calquera combinación lineal de  $A_1$  e  $A_2$  ten tamén valores propios reais e distintos e vectores propios linealmente independentes. Sexa así  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos a matriz  $A = A_1\eta_1 + A_2\eta_2$ . Coñecendo

os autovalores e autovectores de  $A_1$  e  $A_2$ , un sinxelo cálculo permite ver que os autovalores de  $A$  son

$$\lambda_1 = v \cdot \eta - c, \quad \lambda_2 = v \cdot \eta, \quad \lambda_3 = v \cdot \eta + c,$$

todos reais e distintos, xa que o produto escalar de dúas cantidades reais seguirá a ser real e  $c > 0$ , e que os autovectores asociados son linealmente independentes igual que o eran para cada unha das matrices anteriores. Polo tanto, o modelo de fluxo de persoas bidimensional que tentamos resolver constitúe un sistema de leis de conservación estritamente hiperbólico.

## 2.2. O problema de Cauchy e o concepto de solución clásica

**Definición 2.9.** Chamamos problema de Cauchy a aquel que consiste en atopar unha función  $w : (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow w(\mathbf{x}, t) \in \Omega$  satisfacendo a ecuación (2.1) e a condición inicial

$$w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.8)$$

sendo  $w_0$  unha función coñecida de  $\mathbb{R}^d$  en  $\Omega$ . Temos así o seguinte:

$$P_{Cauchy} \begin{cases} \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(w(\mathbf{x}, t))}{\partial x} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \\ w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.9)$$

Unha función  $w$  de clase  $\mathcal{C}^1$  verificando tales condicións en todo punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  dise que é unha solución clásica ou solución do forte do problema de Cauchy (2.9).

A idea de hiperbolicidade está relacionada co feito de que o problema de Cauchy asociado a dita lei de conservación sexa un problema ben plantexado. Como veremos máis adiante, unha característica fundamental do problema de Cauchy (2.9) é que non existen en xeral solucións no sentido clásico, incluso cando as condicións iniciais son funcións regulares.

**Exemplo 2.10.** Para mostrar isto, e comenazar a motivar o concepto de solución feble do problema de Cauchy, imos considerar de novo o exemplo da ecuación de transporte, coa súa lei de conservación correspondente, (2.3) e cunha condición inicial dada por

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

de xeito que a solución ven dada por

$$w(x, t) = w_0(x - \lambda t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in [0, +\infty).$$

O cálculo de dita solución atópase mediante o coñecido coma método das características, que ilustraremos a continuación. Así, basta coñecer o valor da solución nun punto  $x$  e un instante  $t$ , calcular a curva característica que pasa por dito punto no plano  $xt$  e obter o seu punto do corte co eixo  $t = 0$ . A solución en  $(x, t)$  será constante ao longo da mesma, e corresponderase co valor da condición inicial en dito punto de corte.

O procedemento para obter a solución, é o seguinte:

I Consideramos as curvas características:

$$t \longrightarrow X(t), \quad \frac{dX}{dt}(t) = \lambda,$$

as cales non son máis que curvas no plano  $xt$  con unha pendente dada por  $\lambda$ .

II Vemos que a solución é constante ao longo das mesmas:

$$\frac{dw}{dt}(X(t), t) = \frac{\partial w}{\partial x}(X(t), t) \frac{dX}{dt}(t) + \frac{\partial w}{\partial t}(X(t), t) = \frac{\partial w}{\partial x}(X(t), t) \lambda + \frac{\partial w}{\partial t}(X(t), t) = 0,$$

onde as igualdades débense á ecuación que verifican as características e a que  $w$  é solución da ecuación do transporte.

III Calculamos a solución nun punto arbitrario do plano  $xt$ , que denotaremos por  $(x^*, t^*)$ , de modo que a característica correspondente,  $X^*(t)$ , satisfai o problema de valor inicial:

$$\frac{dX^*}{dt}(t) = \lambda, \quad X^*(t) = x^*.$$

Resolvendo dito problema de valor inicial chegamos a que a expresión da característica  $X^*(t)$  virá dada por:

$$X^*(t) = X^*(t^*) + \lambda(t - t^*),$$

sendo  $t$  un punto xenérico. Polo tanto, o punto de corte de  $X^*(t)$  co plano  $t = 0$ , será  $X^*(0) = x^* - \lambda t^*$ .

IV Como a solución é constante ao longo das características, debe ser a mesma en  $(x^*, t^*)$  que en  $(X^*(0), 0)$ . Así, tendo en conta o valor da condición inicial a solución final é a seguinte:

$$w(x^*, t^*) = w(X^*(0), 0) = w_0(X^*(0)) = w_0(x^* - \lambda t^*).$$

Deste xeito, a función  $w_0$  trasládase ao longo do tempo sen deformarse e cunha velocidade igual a  $\lambda$ .

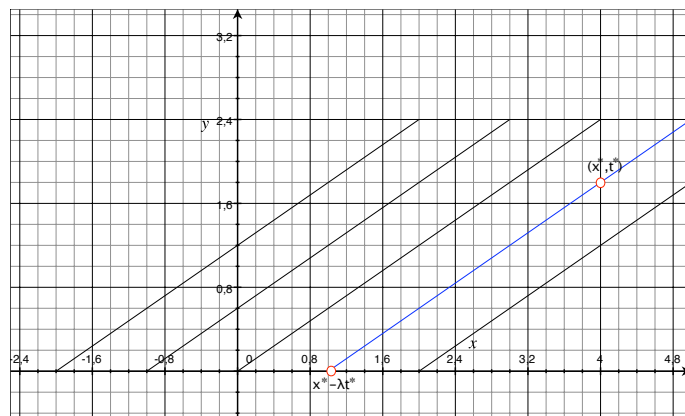


Figura 2.1: Diagrama das características

Referirémonos a este tipo de rectas coma características, aínda que dentro do eido xeral das ecuacións en derivadas parciais hiperbólicas non sempre se verifica que a variable indeterminada permaneza constante ó longo dunha característica. Sen embargo, isto sí que ocorre no caso de 2.1.

Chamemos agora  $\xi$  ó punto de corte co eixo OX da característica que pasa por  $(x, t)$ , de forma que se coñecemos a distribución de  $w$  no instante inicial,

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o valor da solución  $w$  nun punto  $(x, t)$  virá dada por  $w(\xi, 0) = w_0(\xi)$ . Denotemos como  $F(\xi) = \lambda(w_0(\xi))$  ás pendentes das rectas características, de xeito que a ecuación das mesmas é

$$x = \xi + F(\xi)t, \quad (2.10)$$

mentres que o valor de  $w$  sobre elas será  $w = w_0(\xi)$ .

Temos así unha forma alternativa de dar a solución da lei de conservación hiperbólica

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

posto que podemos calcular as derivadas parciais de  $w$  empregando só estas expresións. En efecto, tense que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = w'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

e derivando a ecuación (2.10) con respecto a  $t$  e con respecto a  $x$  obtemos:

$$0 = (1 + F'(\xi)t) \frac{\partial \xi}{\partial t} + F(\xi),$$

$$1 = (1 + F'(\xi)t) \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Despexando e substituíndo adecuadamente, chegamos a

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{-F(\xi)w'_0(\xi)}{1 + F'(\xi)t}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w'_0(\xi)}{1 + F'(\xi)t}. \quad (2.12)$$

É inmediato ver que estas expresións verifican a lei de conservación hiperbólica:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + F(\xi)\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

A importancia da ecuación do transporte, así coma do método das características neste exemplo, radica principalmente no feito de que moitos problemas asociados a sistemas de leis de conservación hiperbólicos poden reducirse a este caso, ou a un número finito dos mesmos. Os sistemas de leis de conservación lineais son un exemplo disto.

**Definición 2.11.** Un sistema de leis de conservación hiperbólico dise que é lineal se é da forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

sendo  $A$  unha matriz con coeficientes constantes de orde  $p \times p$  e diagonalizable, de tal xeito que o vector de fluxos é  $f(w) = Aw$ .

Coñecendo a solución da ecuación do transporte, pódese calcular a solución deste sistema lineal sen máis que considerar a matriz diagonal  $B$  formada polos autovalores  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , da matriz  $A$  e introducindo as variables características  $u = (u_1, \dots, u_p)^T$  obtidas a partir da matriz de cambio de base  $P$  formada polos autovectores de  $A$ ,  $w = Pu$ .

Tendo en conta esta relación entre  $w$  e  $u$ , e que  $B = P^{-1}AP$  chegamos a que o sistema (2.13) é equivalente a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Como ademais  $B$  é unha matriz diagonal, obtemos  $n$  ecuacións do transporte da forma

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

das cales coñecemos a solución exacta:

$$u_k(x, t) = u_k^0(x - \lambda_k t), \quad k = 1, \dots, p.$$

Desfacendo finalmente o cambio de variable chegamos á solución do sistema lineal en cada instante  $t$  e cada punto  $x$ ,  $w(x, t) = Pu(x, t)$ .

Co exposto anteriormente na aplicación do método das características sabemos que a solución é constante ao longo das mesmas, pero aínda non sabemos se esa solución está definida en calquera punto do plano  $xt$ . Veremos a continuación un exemplo, sacado de [7] que mostrará que a resposta a esa cuestión é negativa.

**Exemplo 2.12.** Consideremos a ecuación de Burgers introducida anteriormente,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

coa condición inicial dada por

$$w_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ 1 - x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

O diagrama das características para este problema pódese observar na figura 2.2.

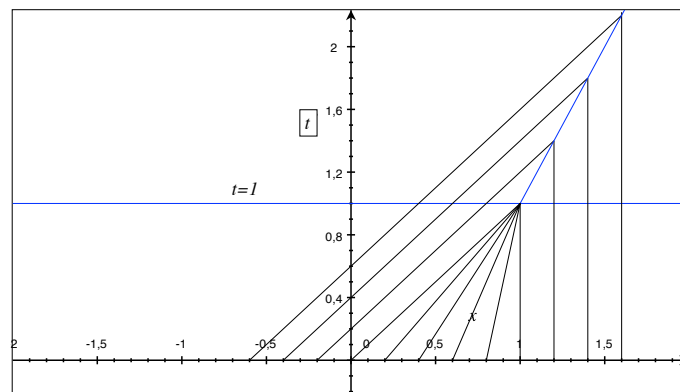


Figura 2.2: Diagrama das características para a ecuación de Burgers coa condición inicial (2.14).

Á vista da figura xa observamos que as características se cortan entre si. Isto significa que  $w$  toma tantos valores diferentes no mesmo punto  $(x, t)$  coma características se cortan nel, e obviamente isto non ten significado físico, polo que vai supoñer un problema. De feito, obsérvase coma unhas características son máis rápidas que as outras, é dicir, a pendente da solución aumenta a medida que pasa o tempo.

Este exemplo mostra o que non sempre é posible definir a solución para calquera tempo  $t$ , e pon de manifesto un problema de vital importancia: a “rotura” da solución pasado un certo período de tempo. Este fenómeno é o que se coñece coma formación de ondas de

choque, e o que realmente sucede non é que a solución tome distintos valores nun mesmo punto, pois isto carecería de sentido físico, senón que os valores elevados do gradiente motivan a aparición dunha discontinuidade que se mantén no tempo e que se pode desprazar ao longo do espazo.

Fisicamente, o que impide que a solución “se rompa” é a influencia de certos factores que poden desprezarse para valores pequenos do gradiente, polo que adoitan omitirse á hora de modelizar o problema coma un sistema de leis de conservación.

No caso da dinámica de gases, estes factores poden ser a viscosidade ou a condución de calor, mentres que se buscamos situacións máis ligadas ao noso modelo de fluxo de persoas, como á formación de atascos ou de situacións de grandes densidades de peóns en lugares públicos, estes factores poderían ser, entre outros, a capacidade dos peóns de adiantarse aos acontecementos ou o tempo de reacción.

O momento no que a solución deixa de estar definida coñécese co nome de tempo de rotura, e o seu cálculo pode resultar de interese analítico. Unha condición necesaria para que  $w$  tome varios valores á vez nun mesmo punto é que a súa derivada respecto de  $x$ , (2.12), deixe de estar definida, o cal vai ocorrer cando o denominador de dita expresión se anule:

$$1 + F'(\xi)t = 0.$$

Deste xeito, se unha característica pasa por  $(\xi, 0)$ , a derivada parcial da solución respecto de  $x$  deixa de estar definida en

$$t = \frac{-1}{F'(\xi)}.$$

Así, o tempo crítico ou de rotura alcanzarase na característica que minimize dita expresión,

$$t_B = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{-1}{F'(\xi)}.$$

**Exemplo 2.13.** Para deixar isto algo máis claro, imos amosar o tempo de rotura na ecuación de Burgers, substituindo a condición inicial (2.14) por unha máis regular,  $w_0(x) = \frac{2}{1 + e^x}$ . Temos que

$$F'(\xi) = \frac{-2e^\xi}{(1 + e^\xi)^2}.$$

O máximo desta función atópase en  $\xi = 0$ , porén

$$t_B = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{-1}{F'(\xi)} = \frac{-1}{F'(0)} = 2,$$

de xeito que será no instante  $t = 2$  no que as rectas características comenzarán a cortarse.

Este problema suxire que vai ser necesario atopar outro tipo de solucións para o problema de Cauchy de modo que o tempo de rotura non supoña un impedimento. Vai ser o caso das solucións febles, que pasamos a definir na sección seguinte.

## 2.3. Solucións febles

Acabamos de ver na sección anterior que as solucións clásicas de leis de conservación poden deixar de estar definidas a partir dun certo tempo. Co obxectivo de enmarcar estas situacións, entre as que se atopan as do modelo de fluxo de persoas, na nosa teoría, é preciso introducir unha nova formulación para o que entendemos por solución do problema de Cauchy que poidamos idealizar cunha discontinuidade.

Nesta formulación equivalente para a solución non poden aparecer as derivadas parciais da solución, posto que se esta non vai ser continua, tampouco poderá ser derivable.

**Definición 2.14.** Sexa  $f$  unha función fluxo dada por unha lei de conservación integral, e consideremos o espazo das funcións test, que é o seguinte conxunto:

$$V = C_0^1(\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) / \varphi \in C^1 \text{ e ten soporte compacto} \right\}$$

Dise que unha función  $w : \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$  medible e localmente limitada é unha solución feble do problema de Cauchy asociado á lei de conservación integral se satisfai a ecuación

$$\int_{\mathbb{R}^d} w(\mathbf{x}, 0) \cdot \varphi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( w \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^d f_j(w) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (2.15)$$

así coma a condición inicial (2.8), é dicir,

$$w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

onde  $w_0$  é unha función coñecida.

É importante remarcar o feito de que toda solución feble vai asociada a unha lei de conservación integral. Ademais, para a ecuación (2.15), non temos unicidade de solución.

Introducimos agora esta proposición que formaliza a relación entre solución clásica e solución feble, algo que semella bastante intuitivo a priori, coa súa demostración con  $d = 1$ , posto que resulta máis comprensible nunha dimensión e estendela logo a varias dimensións resulta trivial.

**Proposición 2.15.** *Toda solución clásica do problema de Cauchy (2.9) é tamén unha solución feble.*

*Demostración.* Supoñamos que  $w$  é unha solución clásica do problema de Cauchy, ou o que é o mesmo, unha función  $C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  verificando as condicións (2.1) e (2.8).

Se multiplicamos a lei de conservación diferencial (2.1) por unha función test  $\varphi \in V$  e integramos respecto de  $x$  e de  $t$  en  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ , chegamos ó seguinte:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} \right) \varphi dx dt = 0.$$

Como  $\varphi$  é unha función con soporte compacto, existe un  $\delta > 0$  de forma que  $\text{supp}(\varphi) \subset U = (-\delta, \delta) \times [0, \delta)$ . Deste xeito, a función  $\varphi$  anúlase fóra de dito conxunto  $U$ , polo que podemos reescribir a integral anterior coma

$$\int_U \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} \right) \varphi dx dt = 0.$$

Podemos empregar a regra da cadea sobre as funcións  $w$ ,  $f$  e  $\varphi$ , posto que as tres son funcións de clase  $\mathcal{C}^1$ , polo que escribimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi &= \frac{\partial}{\partial t}(w\varphi) - w \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial f(w)}{\partial x} \varphi &= \frac{\partial}{\partial x}(f(w)\varphi) - f(w) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

obtendo deste xeito

$$\int_U \left( \frac{\partial}{\partial t}(w\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(f(w)\varphi) \right) dx dt - \int_U \left( w \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(w) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0. \quad (2.16)$$

Aplicamos agora o teorema de Green ó primeiro sumando, converténdose este en

$$\int_{\partial U} (f(w)\varphi, w\varphi) \cdot \vec{n} d\gamma,$$

onde  $\vec{n}$  denota ó vector unitario normal a  $\partial U$ , que é a fronteira de  $U$ . Nótese agora que  $U \cap \partial U = (-\delta, \delta) \times \{0\}$ , e coma  $\text{supp}(\varphi) \subset U$ , concluímos que  $\varphi$  vale cero sobre  $\partial U - (-\delta, \delta) \times 0$ , polo que podemos simplificar aínda máis a expresión anterior:

$$\int_{(-\delta, \delta) \times 0} (f(w)\varphi, w\varphi) \cdot \vec{n} d\gamma.$$

O valor do vector normal unitario nese anaco de fronteira é  $\vec{n} = (0, -1)$ , e tendo iso en conta chegamos finalmente a

$$\int_U \left( \frac{\partial}{\partial t}(w\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(f(w)\varphi) \right) dx dt = - \int_{-\delta}^{\delta} w(x, 0)\varphi(x, 0) dx.$$

Substituíndo finalmente esa expresión en (2.16) chegamos a

$$- \int_{-\delta}^{\delta} w(x, 0)\varphi(x, 0) dx - \int_U \left( w \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(w) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0,$$

e ampliamos agora estas integrais a todo espazo, razoando de xeito inverso a coma fixemos antes, xa que  $\varphi$  vale cero fóra de  $U$ :

$$-\int_{-\infty}^{\infty} w(x, 0)\varphi(x, 0)dx - \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty)} \left( w \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(w) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dxdt = 0.$$

Esta última expresión proba que  $w$  é unha solución feble do problema de Cauchy.

□

**Definición 2.16.** Un caso particular do problema de Cauchy é o problema de Riemann, aquel no que a condición inicial ven dada por unha función  $w_0$ , continua en todo  $\mathbb{R}$  agás nun punto arbitrario,  $x_0$ :

$$w_0(x) = \begin{cases} w_l, & \text{se } x \leq x_0 \\ w_r, & \text{se } x > x_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde  $w_l$ , e  $w_r$  son constantes arbitrarias que reciben o nome de estados a esquerda e a dereita de  $x_0$ , respectivamente.

Esta condición inicial discontinua vai ser de gran importancia para o modelo de fluxo de persoas, posto que será así coma supoñamos a densidade inicial, e no noso código estaremos resolvendo problemas de Riemann. En particular, supoñeremos a densidade inicial do seguinte modo:

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_l, & \text{se } x \leq x_0 \\ \rho_r, & \text{se } x > x_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

sendo  $x_0$  o valor intermedio do intervalo do dominio no eixo das X. Se temos que  $\rho_l > \rho_r$  o estado da esquerda propágase a unha velocidade menor que o estado da dereita e estaremos ante o que se coñece coma unha onda de rarefacción. No caso contrario, é dicir se  $\rho_l < \rho_r$ , será o estado da esquerda o que se propague a unha maior velocidade, e diremos que se forma unha onda de choque. Mostramos isto graficamente nas figuras 2.3 e 2.4.

Ademais, no noso caso as demais compoñentes do vector de variables conservativas serán inicialmente 0, supoñendo que os peóns inician o seu movemento dende o repouso. Polo tanto teremos que  $w_l = (\rho_l, 0, 0)^T$  e  $w_r = (\rho_r, 0, 0)^T$ , de xeito que o valor inicial de  $w$  será un ou outro dependendo de se  $x$  é maior ou menor que  $x_0$ .

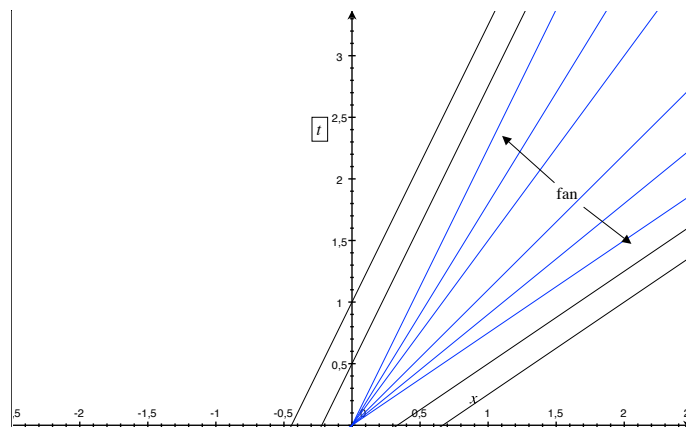


Figura 2.3: Diagrama das características para unha onda de enrarecemento.

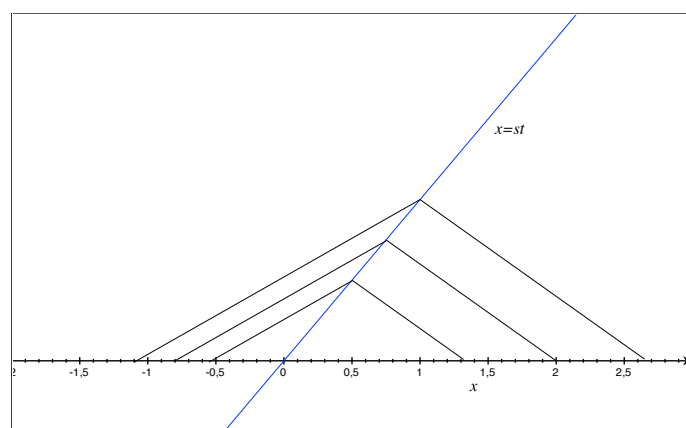


Figura 2.4: Diagrama das características para unha onda de choque.

## Capítulo 3

# O método de volumes finitos

Nesta sección imos explicar o funcionamento dos métodos numéricos que nos permitan aproximar a solución das ecuación do modelo hiperbólico de fluxo de persoas, así coma verificar a súa converxencia baixo certas condicións e repasar brevemente a súa implementación en Matlab.

### 3.1. Descrición do método

A idea principal do método de volumes finitos consiste en discretizar o dominio computacional  $\Omega$  en pequenas celas,  $C_i$  e aproximar a integral da variable conservativa sobre cada unha delas no instante  $t = t_n$ ,  $w(\cdot, t_n)$  mediante a constante  $w_i^n$ :

$$w_i^n \simeq \frac{1}{A(C_i)} \int_{C_i} w(x, t_n) dA, \quad (3.1)$$

para despois empregar ese valor aproximado no seguinte paso de tempo e calcular con eles o fluxo na fronteira das celas, que nos permitirá finalmente actualizar o valor da integral de  $\omega$ .

Explicaremos primeiro o método nunha dimensión espacial por simplicidade, estendendo a continuación a explicación a dúas dimensións empregando un mallado estruturado. Asemade teremos en conta que debemos definir dous fluxos numéricos en lugar de un.

No caso unidimensional, o dominio  $\Omega$  consiste simplemente nun intervalo  $[a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , e as celas quedan determinadas por unha malla de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^M$ . Cada cela  $C_i$  defínese como

$$C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}),$$

con  $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$  e  $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ .

Neste traballo, a pesar de que o métodos tamén é aplicable para mallas arbitrarias, limitarémonos a mallas uniformes, é dicir, particións do intervalo  $[a, b]$  nas que os puntos

$\{x_i\}_{i=1}^M$  son equidistantes e a distancia que separa dous puntos consecutivos denotámola por  $\Delta x$ . Porén, a expresión das celas pode simplificarse como segue:

$$C_i = \left( x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Partimos da lei de conservación (2.1) con  $d = 1$ ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0,$$

e comezamos integrando esta expresión sobre cada cela  $C_i$ :

$$\int_{C_i} \frac{\partial w}{\partial t} dt = - \int_{C_i} \frac{\partial f(w)}{\partial x} dx,$$

o cal é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t) dx = f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (3.2)$$

Introducimos agora o tempo, e consideramos dous instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  distintos e tales que  $t_n < t_{n+1}$ , integrando a ecuación anterior entre eles. Deixamos no primeiro membro só o primeiro sumando, xa que estamos en busca dun método explícito:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t_{n+1}) dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t_n) dx \\ &- \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se recordamos a expresión (3.1) aparece no denominador o termo  $A(C_i)$  que neste caso será  $\Delta x$ , polo que imos dividir por  $\Delta x$  a expresión (3.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} w(x, t_n) dx \\ &- \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Agora necesitamos unha aproximación dos valores medios do fluxo nos puntos  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  durante o intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(w(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (3.5)$$

Se temos en conta esta expresión, así coma a aproximación de  $w(\cdot, t_n)$  dada por (3.1), a ecuación (3.3) transfórmase en

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right).$$

Nos problemas hiperbólicos que imos resolver, dispoñemos sempre dunha condición inicial, polo que podemos asegurar que no momento de calcular  $w_i^{n+1}$  coñeceremos o valor de  $w_i^n$ , xa que basta con retroceder no algoritmo ata chegar a  $w_i^0$ .

Por outra banda, pode non parecer claro a priori a forma de obter as aproximacións  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ . É aquí onde entra a idea principal sobre a que se sustenta o método de volumes finitos: a información propágase a unha velocidade finita se traballamos con problemas hiperbólicos (por ser os autovalores reais), polo que podemos obter a aproximación do fluxo na fronteira entre dúas celas baseándonos en aproximacións dos valores promedio de  $w$  en cada unha delas.

Se temos isto en conta, as aproximacións  $f_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  faranse mediante a chamada función fluxo numérico:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \Phi(w_i^n, w_{i+1}^n),$$

$$f_{i-\frac{1}{2}} = \Phi(w_{i-1}^n, w_i^n).$$

A elección desta función fluxo numérico será o que caracterice cada un dos diferentes esquemas do método de volumes finitos.

En resumo, mediante esta notación chegamos á que se coñece como forma conservativa do método:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n) - \Phi(w_{i-1}^n, w_i^n)], \quad i = 2, \dots, M-1. \quad (3.6)$$

Teremos ademais  $M-2$  condicións iniciais, posto que os valores de  $w_i^0$  son coñecidos para  $i = 2, \dots, M-1$ . Sen embargo, imos ter que implementar algún tipo de condición de contorno para os extremos da malla,  $C_1$  e  $C_M$  e describimos a continuación as alternativas máis habituais para facer isto:

- Supoñendo que a condición inicial é constante no tempo nas proximidades dos extremos, pódese tomar  $w_1^{n+1} = w_1^n$  e  $w_M^{n+1} = w_M^n$ . Isto pode non ser adecuado nalgúns casos xa que o método deixará de ser consistente se chega algunha perturbación ós extremos.
- Outra posibilidade habitual consiste en dar condicións de contorno periódicas. Para isto, suponse que o problema é cíclico, de tal xeito que as fronteiras  $x_{1-\frac{1}{2}}$  e  $x_{M+\frac{1}{2}}$  pasan a ser a mesma e se calcula o fluxo nesa fronteira mediante os valores de  $w_M^n$  e  $w_1^n$ .

- Pódese optar tamén por condicións tipo Dirichlet, impondo por medio de dúas funcións dependentes do tempo os valores que queremos que tomen  $w_1^n$  e  $w_M^n$  en calquera instante de tempo.
- Finalmente, temos o caso das condicións tipo Neumann, que serán as que empregaremos nos test resoltos numericamente, definindo uns “nodos pantasma” antes e despois das fronteiras do dominio nos que a función acada o mesmo valor que nos nodos fronteira. Así, temos que a derivada desas variables na fronteira sería nula.

Como imos resolver o modelo de fluxo de persoas en dúas dimensións, debemos estender estes conceptos ao caso bidimensional. Para facer isto, discretizaremos  $\Omega = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  separadamente no eixo horizontal e no eixo vertical, cada un deles de xeito idéntico a como o fixemos nunha dimensión.

Deste xeito, teremos unha partición do intervalo  $[a, b]$  dada por unha malla de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^M$  e unha partición do intervalo  $[c, d]$  dada por unha malla de puntos  $\{y_j\}_{j=1}^N$ , e supoñeremos ambas regulares. Polo tanto,  $\Delta x$  será a separación entre dous puntos consecutivos de malla no eixo horizontal e  $\Delta y$  a separación entre dous puntos consecutivos no eixo vertical. Tendo isto en conta, as celas serán rectángulos da forma

$$C_{i,j} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) = \left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_j - \frac{\Delta y}{2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}\right)$$

e a área de cada cela será simplemente  $\Delta x \Delta y$ . Nótese que neste caso cada cela terá catro celas veciñas, dúas no eixo horizontal e dúas no eixo vertical, coa excepción das celas situadas nos bordos (tres celas veciñas) ou nas esquinas do dominio (dúas celas veciñas).

Non existen grandes diferenzas no que as aproximacións das integrais se refire á hora de estender o método a dúas variables. Tal vez o máis salientable sexa que debemos empregar o teorema de Green e deste xeito na aproximación do fluxo en cada cela aparecerá o vector normal unitario apuntando cara ó exterior de cada cela. No noso caso, como a malla é regular, dito vector normal será sempre  $(\pm 1, 0)$  na dirección horizontal ou  $(0, \pm 1)$  na dirección vertical.

Sen entrar en máis detalles polas súas similitudes co caso unidimensional, facendo as simplificacións pertinentes chegamos ao seguinte :

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{1,i+\frac{1}{2},j}^n - f_{1,i-\frac{1}{2},j}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(f_{2,i,j+\frac{1}{2}}^n - f_{2,i,j-\frac{1}{2}}^n\right) \quad (3.7)$$

sendo  $f_1$  o fluxo numérico horizontal e  $f_2$  o vertical, e teremos que aproximar cada un de forma independente co método de volumes finitos. Ademais, cómpre ter en conta que tanto o vector de variables conservativas coma os vectores fluxo terán unha compoñente máis que no caso anterior.

Finalmente, se recordamos o modelo de fluxo de persoas aparece tamén un termo fonte no segundo membro, polo que imos explicar como afecta iso ó método. Se recordamos o termo fonte, tiñamos que  $S(w) = \left(0, \frac{1}{\tau}\rho(V(\rho)\mu_1 - v_1), \frac{1}{\tau}\rho(V(\rho)\mu_2 - v_2)\right)^T$ .

Para poder discretizar isto en tempo e espazo coma fixemos cos vectores  $w$ ,  $f$ , e  $g$ , basta ter en conta que  $\rho$  é a primeira compoñente de  $w$ , e as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  son cocientes das compoñentes de  $w$ . Deste xeito, teremos a aproximación da densidade e das velocidades en cada cela e para cada instante de tempo de xeito puntual.

Polo tanto, discretizamos o vector do termo fonte como segue:

$$S_{i,j}^n = \left(0, \frac{1}{\tau}\rho_{i,j}^n(V(\rho_{i,j}^n)\mu_1 - v_{1,i,j}^n), \frac{1}{\tau}\rho_{i,j}^n(V(\rho_{i,j}^n)\mu_2 - v_{2,i,j}^n)\right)^T,$$

de modo que a ecuación (3.7) debemos engadirlle este termo, resultando

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{1,i+\frac{1}{2},j}^n - f_{1,i-\frac{1}{2},j}^n\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(f_{2,i,j+\frac{1}{2}}^n - f_{2,i,j-\frac{1}{2}}^n\right) + \Delta t S_{i,j}^n, \quad (3.8)$$

onde se ten

$$f_{1,i+\frac{1}{2},j}^n = \Phi_1(w_{i,j}^n, w_{i+1,j}^n), \quad f_{2,i,j+\frac{1}{2}}^n = \Phi_2(w_{i,j}^n, w_{i,j+1}^n), \quad (3.9)$$

sendo  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  os fluxos numéricos asociados a  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente.

Chegamos finalmente así a unha forma de aproximar o vector das variables conservativas en cada instante de tempo dentro do noso dominio  $\Omega$ .

## 3.2. Converxencia

Un requerimento de vital importancia á hora de valorar un método numérico e as aproximacións da lei de conservación dadas polo mesmo é que a solución numérica obtida co mesmo sexa converxente á solución exacta da ecuación diferencial cando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Isto é o que se coñece co nome de converxencia do método. Para que o método numérico sexa converxente precisamos que sexa consistente coa ecuación en derivadas parciais que aproxima e que sexa estable.

### Consistencia

A consistencia implica que os erros de truncamento locais son pequenos, é dicir, que tenden a 0 se refinamos a malla. No caso do método de volumes finitos, isto tradúcese en comprobar se o fluxo numérico aproxima ben a integral (3.5). En particular, se  $w(x, t) \equiv w^*$

é constante en  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  entón a integral (3.5) redúcese ó valor de  $f(w^*)$  en  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ . Así, debe cumprirse que

$$\Phi(w^*, w^*) = f(w^*) \quad (3.10)$$

para calquera valor de  $w^*$ .

Ademais desta condición necesaria para a consistencia, debe pedirse tamén a continuidade en función da variación de  $w_{i-1}^n$  e  $w_i^n$ , de xeito que  $\Phi(w_{i-1}^n, w_i^n) \rightarrow f(w^*)$  cando  $w_{i-1}^n, w_i^n \rightarrow w^*$ , ou en ocasións incluso a Lipschitz continuidade, é dicir, que exista unha constante  $L$  tal que

$$|\Phi(w_{i-1}^n, w_i^n) - f(w^*)| \leq L \max[|w_i^n - w^*|, |w_{i-1}^n - w^*|].$$

No caso do fluxo de modelo de persoas obxecto do presente traballo, estamos en dúas dimensións, polo que temos que pedir que cumpran a propiedade (3.10) tanto os fluxos numéricos do vector de fluxo  $f_1$  coma do vector de fluxo  $f_2$ , é dicir, debe verificarse o seguinte:

$$\Phi_1(w^*, w^*) = f_1(w^*), \quad \Phi_2(w^*, w^*) = f_2(w^*) \quad \forall w^*,$$

sendo  $\Phi_1$  o fluxo numérico no eixo horizontal e  $\Phi_2$  o fluxo numérico no eixo vertical.

## Estabilidade

A estabilidade supón que a suma de todos os erros de truncamento locais non creza de xeito descontrolado. Xeralmente, o seu estudo analítico simplifícase mediante a análise da estabilidade lineal, empregando a teoría de Fourier, e á análise da estabilidade de von Neumann (para maior información véxase [10]).

A través desta análise chégase á condición CFL (Courant, Friedrichs e Levy) ou condición de Courant, a cal establece que unha condición necesaria que se debe verificar para garantir a estabilidade do método de volumes finitos é

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (3.11)$$

onde  $\lambda$  é a velocidade de propagación, ou o que é o mesmo, a derivada do fluxo. Para un fluxo arbitrario,  $\lambda$  defínese empregando os autovalores do fluxo da súa matriz xacobiana. Adoitamos chamar a ese cociente *número de Courant* e denotalo por  $\mu$ :

$$\mu := \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}.$$

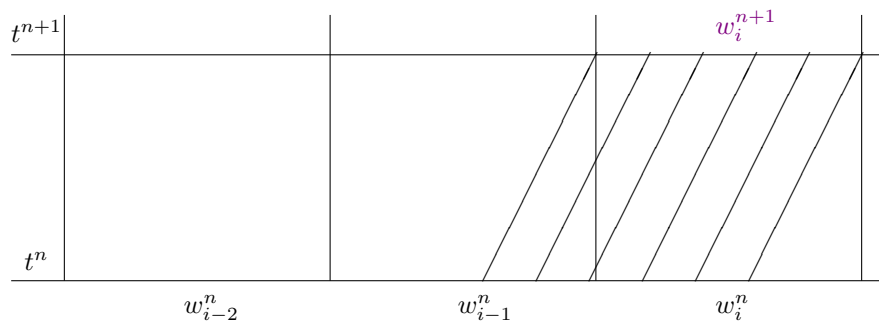
O que nos di esta condición é basicamente que o método numérico debe ser aplicado de xeito que a información se propague a unha velocidade correcta, determinada polos autovalores da matriz xacobiana do fluxo e a velocidade de propagación da malla.

En dúas dimensións espaciais o número de Courant exprésase coma

$$\mu = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x + \Delta y}, \quad (3.12)$$

e a condición que se debe cumprir é a mesma:  $\mu \leq 1$ .

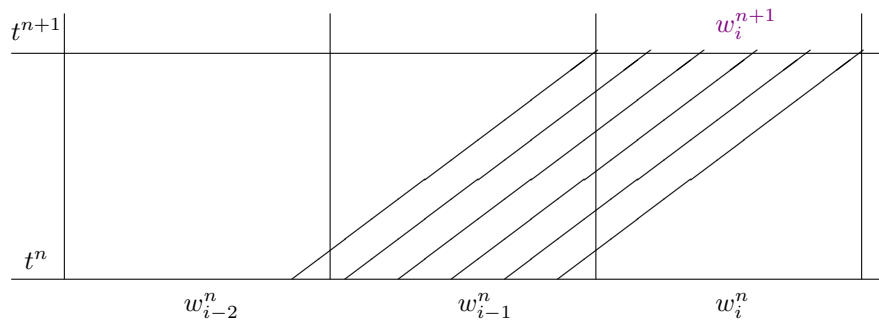
Móstranse a continuación dous exemplos gráficos para ilustrar a condición de Courant. No primeiro verifícase a condición (3.11) e no segundo non.



(a) Valores dos parámetros na figura:

$$\Delta x = 4, \quad \Delta t = 2.4, \quad \lambda = 1.2 \implies \lambda \Delta t = 2.88 < 4 = \Delta x \implies \lambda \Delta t \Delta x \leq 1.$$

Satisfaise a condición de Courant.



(b) Valores dos parámetros na figura:

$$\Delta x = 4, \quad \Delta t = 2.4, \quad \lambda = 2 \implies \lambda \Delta t = 4.8 > 4 = \Delta x \implies \lambda \Delta t \Delta x > 1.$$

Non se satisfai a condición de Courant.

Para finalizar enunciámos o seguinte teorema, coñecido co nome de teorema de Lax-Wendroff, que afirma que os métodos conservativos aproximan ben as leis de conservación:

**Teorema 3.1.** *Consideremos unha sucesión de mallas, con parámetros de discretización  $\Delta t_k$  e  $\Delta x_k$  que tenden a cero cando  $k$  tende a infinito, e sexa  $w_k$  a aproximación obtida empregando un método consistente e conservativo sobre a malla  $k$ -ésima. supoñamos que existe unha función  $w$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w.$$

*Entón  $w$  é unha solución feble da lei de conservación.*

### 3.3. Esquemas numéricos

Nesta sección explicaremos algúns dos fluxos numéricos e comentaremos brevemente algunhas das súas cualidades de converxencia, tendo en conta que o que diferencia os distintos métodos é a elección da función fluxo numérico. Tomaremos coma referencia o exposto en [14], e por simplicidade faremos a presentación para problemas unidimensionais.

#### Método de Godunov

A idea principal do método de Godunov consiste en considerar a solución aproximada no instante  $t_n$ ,  $w^n$  coma unha función constante en cada cela, de modo que a solución é discontinua na fronteira das celas  $C_i$ , con  $i = 1, \dots, M$ .

Deste xeito, tomando como instante inicial  $t_n$  existirá un problema de Riemann para cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  coa condición inicial seguinte:

$$w_0(x) = \begin{cases} w_i^n, & \text{se } x \leq x_{i+\frac{1}{2}} \\ w_{i+1}^n, & \text{se } x > x_{i+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

do cal sabemos que ten solución exacta coñecida.

O que propón Godunov é aproximar o valor da solución  $w(x, t)$  en  $C_i$  no instante  $t_{n+1}$  como o valor promedio da solución dos problemas de Riemann asociados a cada fronteira da cela.

Unha propiedade dos problemas de Riemann é que a solución non depende do tempo no punto onde se atopa a descontinuidade inicial (neste caso é o punto  $x_{i+\frac{1}{2}}$ ), polo que imos denotar o valor de  $w$  en  $x_{i+\frac{1}{2}}$  por  $w_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ,  $\forall t > t_n$ . Facemos isto porque se considera un sistema de coordenadas local situado no  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , identificando así este punto como  $x = 0$ .

Baseándonos nisto podemos definir o fluxo numérico do método de Godunov como a avaliación fluxo físico nese valor de  $w$ :

$$\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n) = f(w_{i+\frac{1}{2}}(0)),$$

$$\Phi(w_{i-1}^n, w_i^n) = f(w_{i-\frac{1}{2}}(0)).$$

Estes valores representan o fluxo exacto que habería se a solución fose constante en cada cela.

### Esquema de Lax-Friedrichs

Dada unha función  $g$  o suficientemente regular, pódese obter o valor de  $g(x)$  no punto  $x_0 + \Delta x$  e no punto  $x_0 - \Delta x$  mediante a fórmula de Taylor:

$$g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \frac{g''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3$$

$$g(x_0 - \Delta x) = g(x_0) - g'(x_0)\Delta x + \frac{g''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3.$$

Partindo destas expresións, pódense dar as seguintes aproximacións:

- Diferenza descentrada á dereita

$$D^+g(x_0) = \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},$$

$$g'(x_0) = D^+g(x_0) + O(\Delta x).$$

- Diferenza descentrada á esquerda

$$D^-g(x_0) = \frac{g(x_0) - g(x_0 - \Delta x)}{\Delta x},$$

$$g'(x_0) = D^-g(x_0) + O(\Delta x).$$

- Diferenza centrada

$$D^0g(x_0) = \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x},$$

$$g'(x_0) = D^0g(x_0) + O(\Delta x)^2.$$

Esta idea é a base do coñecido como método de diferenzas finitas, punto de partida do método de Lax-Friedrichs, dado por:

$$w_i^{n+1} = \frac{w_{i-1}^n + w_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(w_{i+1}^n) - f(w_{i-1}^n)).$$

Nótase que a aproximación que se fai da derivada temporal de  $w$  é descentrada cara á dereita:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \simeq \frac{w_i^{n+1} - \frac{w_{i-1}^n + w_{i+1}^n}{2}}{\Delta t},$$

mentres que a derivada espacial de  $f$  aproxímase de forma centrada:

$$\frac{\partial f(w)}{\partial x} \simeq \frac{f(w_{i+1}^n) - f(w_{i-1}^n)}{2\Delta x}.$$

Aínda que a primeira vista pode non apreciarse que se trata dun método conservativo, facendo algunhas manipulacións alxébricas chegamos á seguinte función fluxo numérico:

$$\Phi(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(v - u).$$

Trátase dun método consistente, pois verifica a condición (3.10), e condicionalmente estable para o problema lineal.

### Q-esquemas

Para poder caracterizar de xeito preciso estes esquemas, cómpre primeiro definir algúns conceptos, introducidos por Harten, Lax e van Leer en [3].

**Definición 3.2.** Sexa  $x \in \mathbb{R}$ , chamamos parte positiva e parte negativa de  $x$  ás seguintes cantidades:

$$x^+ = \frac{x + |x|}{2}, \quad x^- = \frac{x - |x|}{2}.$$

**Definición 3.3.** Un esquema conservativo dise descentrado se  $\forall u, v$  estados próximos, a función fluxo numérico  $\Phi$  verifica as seguintes propiedades:

- a) Existe outro estado,  $u^*$ , próximo tamén a  $u$  e a  $v$  de xeito que:

$$\Phi(u, v) = f(u^*) + f'_+(u^*)(u - u^*) + f'_-(u^*)(v - u^*) + o(|u - u^*| + |v - u^*|),$$

onde  $f'_+$  e  $f'_-$  son as partes positiva e negativa da derivada da función fluxo.

- b) Se  $f'(u)$  e  $f'(v)$  son ambas positivas, entón  $\Phi(u, v) = f(u)$ .

- c) Se  $f'(u)$  e  $f'(v)$  son ambas negativas, entón  $\Phi(u, v) = f(v)$ .

Unha vez explicados estes conceptos, podemos englobar os Q-esquemas coma un sub-conxunto dos esquemas descentrados nos que o fluxo numérico ven determinado por unha matriz  $Q$ :

$$\Phi(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2}|Q(u, v)|(v - u). \quad (3.13)$$

Dita matriz  $Q$ , que depende continuamente de  $u$  e  $v$ , será o que diferencie os distintos Q-esquemas. A matriz  $|Q|$  obtense a partir de  $Q$  tendo os mesmos autovectores e os seus

autovalores son os valores absolutos dos autovalores de  $Q$ . Algúns exemplos de Q-esquemas son o de van Leer, que considera  $Q$  coma a matriz xacobiana do fluxo avaliada no punto medio de ambos estados,

$$Q(u, v) = \frac{\partial f}{\partial w} \left( \frac{u + v}{2} \right),$$

ou o Q-esquema de Roe, no cal  $Q$  ven definida como segue:

$$f(v) - f(u) = Q(u, v)(v - u).$$

Se analizamos a función fluxo (3.13) vemos que ten dous sumandos. O primeiro sumando,  $\frac{f(u) + f(v)}{2}$  é a parte centrada do fluxo, mentres que o termo  $-\frac{1}{2}|Q(u, v)|(v - u)$  representa a parte descentrada e recibe o nome de viscosidade numérica.

Un problema que pode suceder cos Q-esquemas é que se algún dos autovalores da matriz  $Q$  é nulo, entón o termo da viscosidade numérica anúlase e pérdese a converxencia do método. Así, para asegurar a existencia de viscosidade numérica, redefínese o valor absoluto dos autovalores na parte correspondente do fluxo numérico.

Explicamos a continuación algún exemplo desta situación.

### Fluxo de Rusanov

O modelo de Rusanov coincide con aplicar a regularización local de Lax-Friedrichs aos Q-esquemas no caso escalar, de xeito que a corrección do valor absoluto dos autovalores da matriz xacobiana do fluxo en cada fronteira das celas se leve a cabo tomando o máximo dos valores dos mesmos a cada lado da cela. No caso de sistemas de leis de conservación, o fluxo de Rusanov emprega dito máximo no termo correspondente á viscosidade numérica en lugar da matriz  $|Q|$ .

Deste xeito, a función fluxo numérico para o método ven dada por:

$$\Phi(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - \frac{1}{2}|\lambda(u, v)|(v - u), \quad (3.14)$$

sendo

$$|\lambda(u, v)| = \max_{k=1, \dots, n} \{|\lambda_k(u)|, |\lambda_k(v)|\},$$

para unha matriz  $Q$  cadrada de orde  $n$ .

### Regularización parabólica de Harten

A regularización parabólica de Harten tamén ten como obxectivo garantir a existencia dunha determinada viscosidade numérica. Para iso, redefine o valor absoluto da matriz  $Q$  do modo seguinte:

$$|\lambda|_\varepsilon = |\lambda| + \frac{1}{2}(1 + \text{sig}(\varepsilon - |\lambda|)) \left( \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} - |\lambda| \right), \quad (3.15)$$

A idea é introducir un parámetro moi pequeno,  $\varepsilon$  de xeito que se  $|\lambda| < \varepsilon$ , entón  $|\lambda|$  substitúese por  $\left( \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \right)$  e o valor de  $|\lambda|_\varepsilon$  é  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Un inconveniente desta regularización é que o termo  $\varepsilon$  ten que ser axustado para cada problema.

Existen outros fluxos numéricos que se empregan no método de volumes finitos, coma por exemplo as técnicas de descomposición do fluxo, que non desenvolveremos aquí. Sen embargo, os métodos aquí desenvolto serán suficientes para o noso obxectivo e para unha primeira aproximación á idea xeral do método de volumes finitos.

Pasamos polo tanto a programar en Matlab un modelo xeral do método de volumes finitos, empregando o fluxo numérico de Rusanov.

### 3.4. Programación en Matlab

Para desenvolver o modelo de fluxos de persoas e atopar unha solución do mesmo faremos uso do método de Rusanov. O código de volumes finitos desenvolto permitiría implementar outros fluxos numéricos dos mencionados na memoria ou dos existentes na literatura. Ademais, o código do método de Rusanov en dúas dimensións atópase no Apéndice A.

**Argumentos de entrada** Para comezar debemos introducir os datos que caracterizan o noso problema. Denotamos por argumentos de entrada a todos estes valores, como os extremos dos intervalo de definición,  $x_L$  e  $x_R$  no eixo horizontal e  $y_L$  e  $y_R$  no eixo vertical, así coma o tempo no que comenzamos, o tempo final ó que queremos chegar e os coeficientes propios do noso modelo,  $\gamma$ ,  $v_{max}$  e  $p_0$ , definidos no capítulo 2. Ademais, tamén indicamos as condicións iniciais das variables conservativas. Nos diferentes test considerados resolvemos problemas de Riemann, nos que caracterizamos a densidade a ambos lados dunha curva na que se define a discontinuidade e asumimos que o dato de entrada do fluxo é nulo.

**Definición das mallas** A continuación especificamos o número de nodos que teremos no eixo horizontal, IMAX, e no eixo vertical, JMAX, obtendo os valores de  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , definindo deste xeito a malla estruturada regular. Tamén introducimos o número de Courant para calcular no código o valor de  $\Delta t$  a partir dos valores de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e o máximo dos autovalores en todos os nodos.

**Inicialización das variables conservativas nas matrices  $Q$  e  $Q_n$**  A notación empregada no código para as variables conservativas é  $Q$ . Non entra en condición coa detallada na memoria por empregar o fluxo numérico de Rusanov que non precisa a matriz  $|Q|$ . Inicializamos as variables en dous tempos asignándolle o valor cero e polo tanto introducindo dúas matrices de ceros de dimensión  $3 \times IMAX \times JMAX$ :  $Q$ , que representa a solución no instante  $t_n$ , e  $Q_n$ , que representa a solución no instante  $t_{n+1}$ , posto que debido á metodoloxía do método de volumes finitos serán necesarias as dúas.

Ademais, tamén introduciremos a densidade inicial na primeira columna da matriz  $Q$ , dependendo do test que desexemos realizar. As outras dúas columnas serán 0, posto que, como xa foi mencionado, supoñeremos que o movemento comeza dende o repouso, de xeito que a velocidade inicial vai ser nula, e polo tanto as dúas compoñentes do fluxo tamén.

**Paso temporal** Feito isto, iniciaremos o bucle temporal e calcularemos  $\Delta t$  en cada iteración tendo en conta o número de Courant,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e os autovalores das matriz  $Q$  en cada instante de tempo, que calcularemos mediante unha función Matlab. Deste xeito, teremos que

$$dt = \frac{CFL}{\frac{amax_x}{dx} + \frac{amax_y}{dy}},$$

onde  $CFL$  denota o número de Courant e  $amax_x$  e  $amax_y$  os valores absolutos dos autovalores máximos da matriz  $Q$  na dirección horizontal e vertical, respectivamente. Ademais, aseguraremos de que se alcanza o tempo final cunha condición *if*.

**Método de volumes finitos** Dentro do bucle temporal iniciado no paso anterior, iniciaremos bucles espaciais no eixo X e no eixo Y para o cálculo dos fluxos en ambas direccións, a partir dunha función Matlab. Calcularemos ademais o termo fonte en cada iteración, tamén mediante unha función externa, e finalmente actualizamos a solución envorcando  $Q_n$  en  $Q$  e o paso temporal.

**Cálculo de erros** No caso de que se coñeza a solución exacta ou que exista unha solución de referencia pódense calcular os erros absoluto e relativo cometidos en cada paso de tempo, imprimindo por pantalla os seus máximos en norma  $L^2$ .

**Representación gráfica** Finalmente, represéntase a solución aproximada obtida en tres gráficas diferentes, unha para cada compoñente da matriz de variables conservativas. Isto consistira nunha animación en dúas dimensións, para poder visualizar como evoluciona a solución en calquera instante de tempo e en calquera punto  $(x, y)$  do dominio de definición.



## Capítulo 4

# Resultados numéricos

Neste último capítulo amosaremos os resultados obtidos nalgunhas simulacións feitas en Matlab, empleando o fluxo numérico de Rusanov. Para iso, faremos distintos tests, onde algúns coeficientes permanecerán sempre fixos, e outros variarán para intentar simular situacións diferentes.

Baseándonos nas simulacións feitas en [13] tomaremos os seguintes valores dos parámetros, que serán comúns a todos os tests que fagamos:

$$p_0 = 0.005, \quad \gamma = 2, \quad v_{max} = 2m/s, \quad \tau = 0.61, \quad \alpha = 7.5.$$

Ademais, supoñeremos inicialmente que a densidade máxima é  $\rho_{max} = 10$  persoas por metro cadrado, e nun test en concreto variaremos este valor para simular unhas condicións nas que os peóns deben manter unha distancia de seguridade entre elas.

Traballaremos cun dominio de  $50 \times 50$ , en metros, polo que será un cadrado, e en xeral consideraremos 100 nodos en ambas direccións, aínda que isto tamén variará dependendo do test. Tamén pararemos as simulacións en  $t = 100s$ .

Por outra banda, o número de Courant que tomaremos será 0.7, tendo en conta que para que haxa estabilidade este debe ser menor que 1. Non escollemos un número máis preto de 1, coma 0.9 ou 0.8 porque a condición (3.11) ven dada en situacións xerais, pero neste caso a existencia do termo fonte pode afectar á condición de estabilidade.

Para as condicións iniciais, supoñeremos que a velocidade inicial é nula, como se non houboese movemento no instante  $t_0$ , e daremos as densidades,  $\rho_l$  e  $\rho_r$ , en dúas seccións distintas e complementarias do dominio. Deste xeito, pretendemos simular unha situación na que os peóns se atopan nunha sección do dominio, e que non se lles permite o paso á outra ata o instante  $t_0$ , coma se houboese unha valla ou cinta de separación.

Finalmente, as condicións de contorno serán de tipo Neumann, supoñendo por exemplo que o fluxo a esquerda nas celas  $C_{1,j}$  é o fluxo na propia fronteira, aplicando a consistencia

dos fluxos numéricos cos correspondentes fluxos físicos. Faremos isto nos catro bordos de  $\Omega$ .

### Test 1: Movemento horizontal

Neste primeiro caso, dividiremos o dominio pola sección  $x = 25\text{m}$ , e a dirección de movemento dos peóns será completamente horizontal:  $\mu = (1, 0)$ . Ademais, partimos dunha densidade inicial dada por  $\rho_l = 4$ ,  $\rho_r = 0$ , polo que estamos a supoñer que non hai peóns na parte dereita do dominio, e que os peóns da esquerda se desprazan cara alí. Mostramos graficamente a densidade inicial na figura 4.1.

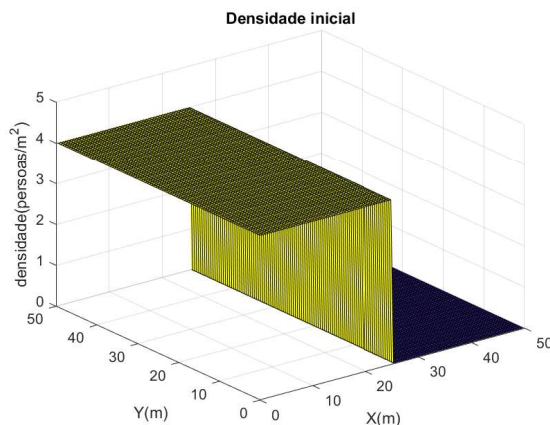


Figura 4.1: Densidade inicial nos tests horizontais supoñendo  $\rho_l = 4$  e  $\rho_r = 0$ .

Os resultados obtidos, que vemos na figura 4.2 confirman con certa claridade a intuición que tiñamos antes de facela simulación: a densidade vaise distribuindo cara a parte dereita do dominio, coma se os peóns que se atopaban na parte esquerda se movesen cara alí. Ademais, os peóns poden saír pola parte dereita unha vez chegan ó bordo dereito de  $\Omega$ , polo que pasado un tempo a densidade total dentro do dominio se reduce.

Co fluxo horizontal,  $q_1$ , vese claramente coma o entorno de maior movemento é a sección  $x = 25$ , é dicir, o lugar onde estaría posta inicialmente a cinta que prohibe o paso. Ademais, é maior conforme nos movemos cara  $x = 50$  que cara  $x = 0$ . O fluxo vertical  $q_2$  é constantemente igual a 0, xa que o movemento é só horizontal.

A velocidade horizontal é maior canto máis nos acerquemos a  $x = 50$ , especialmente para  $t$  preto de 0, xa que os peóns que pasaron á parte dereita non teñen restricións á hora de moverse, mentres que os da parte esquerda deben esperar a que os peóns que teñen diante deixen espazo.

Fixando o valor de  $y = y_0$  e un instante de tempo determinado, podemos ver mellor como varían as solucións dependendo do punto  $x$ :

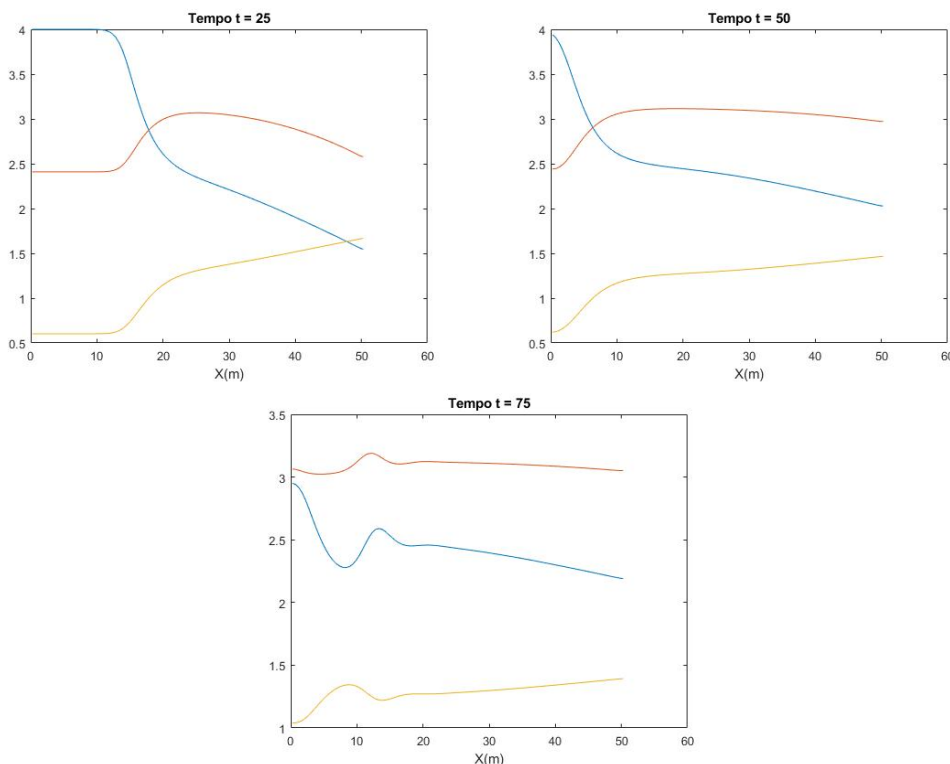


Figura 4.2: Densidade ( $\rho$ ), en azul; fluxo horizontal ( $q_1$ ), en vermello; e velocidade horizontal ( $v_1$ ), en amarelo; nos instantes  $t = 25$  s,  $t = 50$  s e  $t = 75$  s con  $y = y_0$  fixo.

Pódese extraer bastante información se analizamos as tres gráficas da figura 4.2 en profundidade, pero a modo de resumo diremos que a densidade se move claramente cara a dereita conforme pasa o tempo, mentres que o fluxo estabilízase bastante en 3 peóns por segundo e a velocidade parece ser sempre crecente con respecto a  $x$ , aínda que isto deixa de suceder a partir de  $t = 75$ .

Con todo, cando nos acercamos ao tempo  $t = 100$  aparecen pequenas fluctuacións tanto no fluxo coma na velocidade, tal vez debidas á escala empregada nos eixos, coma se pode apreciar nas gráficas da figura 4.3:

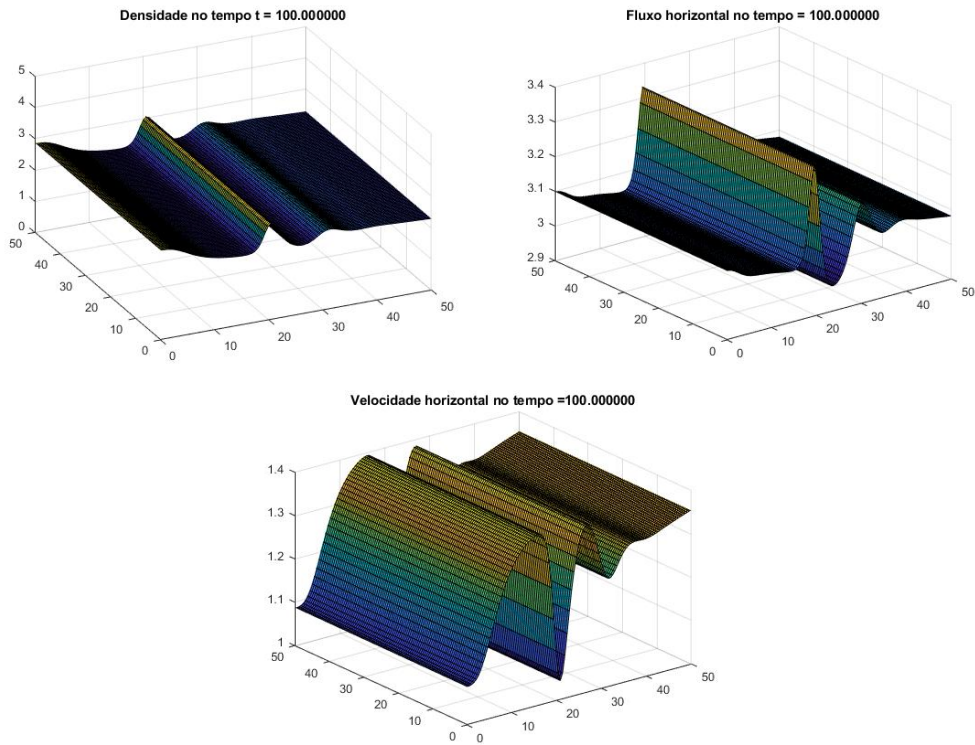


Figura 4.3: Densidade, fluxo horizontal e velocidade horizontal no instante  $t = 100$ .

Para mostrar agora como poden variar os resultados cunha malla máis ou menos refinada, repetiremos o este test dúas veces en idénticas condicións, salvo por unha pequena variación: na primeira imos considerar unha malla con 50 nodos en cada dirección, mentres que na segunda consideraremos 200 nodos en cada dirección.

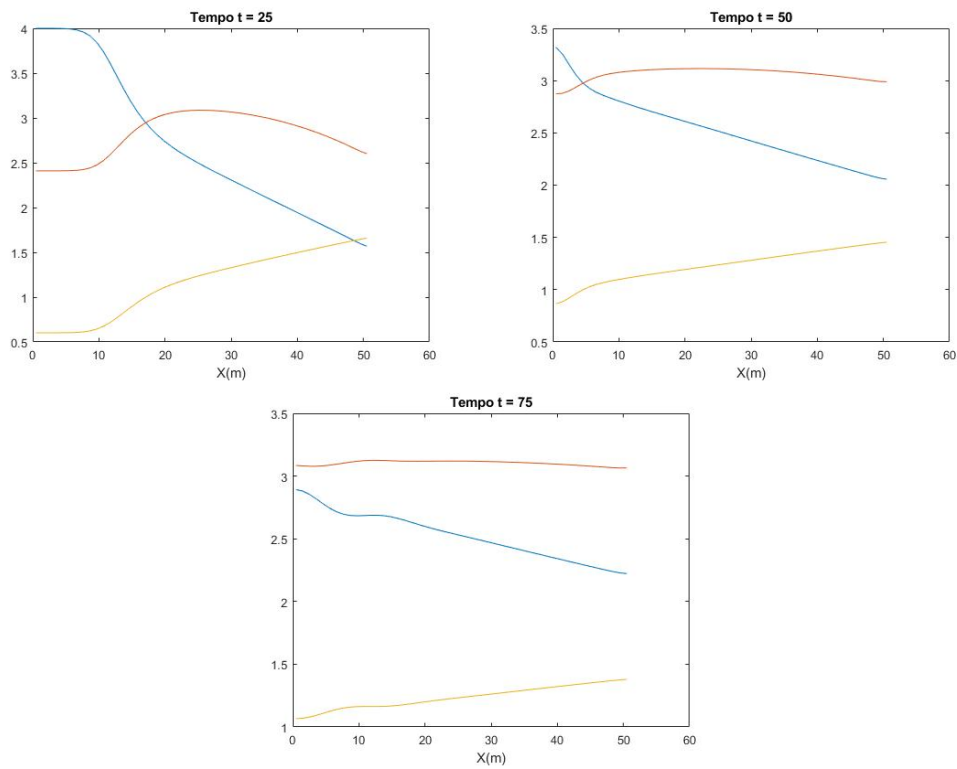


Figura 4.4: Densidade ( $\rho$ ), em azul; fluxo horizontal ( $q_1$ ), em vermelho; e velocidade horizontal ( $v_1$ ), em amarelo; nos instantes  $t = 25$  s,  $t = 50$  s e  $t = 75$  s com  $y = y_0$  fixo e 50 nodos em cada eixo.

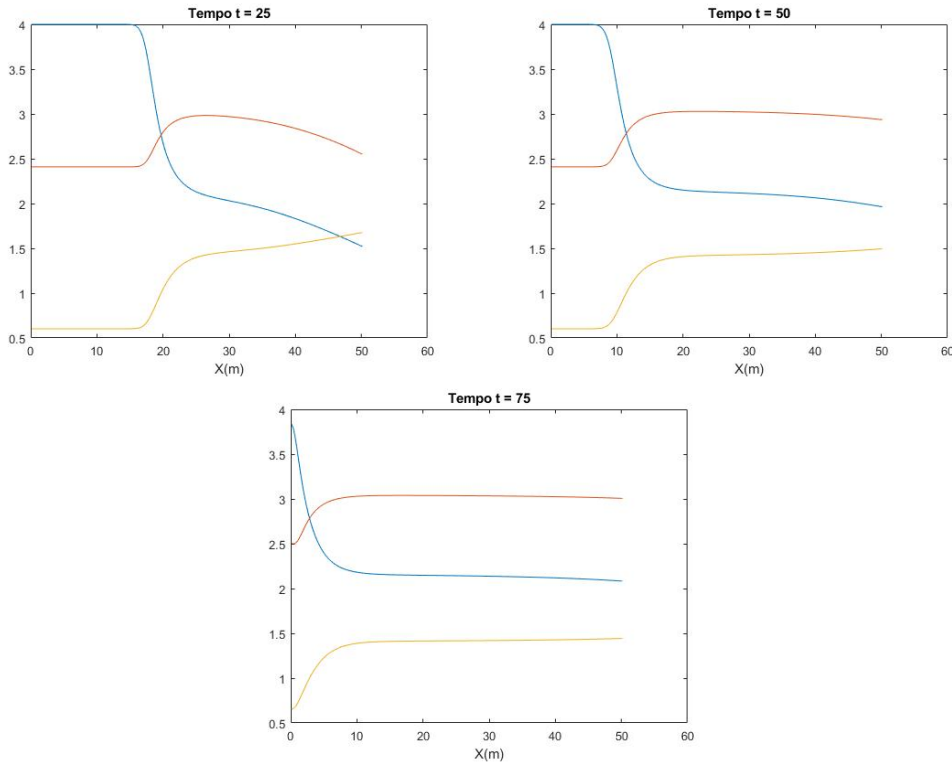


Figura 4.5: Densidade ( $\rho$ ), en azul; fluxo horizontal ( $q_1$ ), en vermello; e velocidade horizontal ( $v_1$ ), en amarelo; nos instantes  $t = 25$  s,  $t = 50$  s e  $t = 75$  s con  $y = y_0$  fixo e 200 nodos en cada eixo.

Comparando as figuras 4.2, 4.4 e 4.5 observamos que o refinamento da malla non fai variar practicamente nada a solución entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 50$ . Sen embargo, se nos fixamos na terceira gráfica, os resultados coa malla máis refinada carecen das fluctuacións que aparecían no test anterior e son moito máis suaves. Vemos así que o efecto do refinamento nótase máis canto maior sexa o tempo.

Isto danos unha intuición de que se poñemos un maior tempo final e refinamos aínda máis a malla, obteríamos resultados máis aproximados á solución exacta, algo totalmente coherente co explicado para o método de volumes finitos.

Para os test sucesivos volveremos aos 100 nodos por un motivo de custo computacional.

## Test 2: Movemento vertical

Dividimos agora  $\Omega$  de xeito horizontal, pola sección  $y = 25$  m, e escollemos coma vector de dirección  $\mu = (0, 1)$ , para que o movemento se produza en horizontal. Como o dominio nas nosas simulacións é cadrado, este test é completamente análogo ó anterior, e

pode servirnos para comprobar se efectivamente temos ben programado o código en ambas direccións. Con todo, cambiaremos as condicións iniciais para simular algunhas situacións diferentes.

Partimos así das condicións iniciais  $\rho_l = 6$  e  $\rho_r = \rho_{max} = 10$ . Denotamos igual as densidades iniciais para non liar coa notación, pero nótese que neste caso  $\rho_l$  fai referencia á metade inferior de  $\Omega$  e  $\rho_r$  á súa metade superior. Ademais, o que queremos comprobar con esta simulación é o que acontece cando nun dos lados a densidade coincide coa densidade máxima.

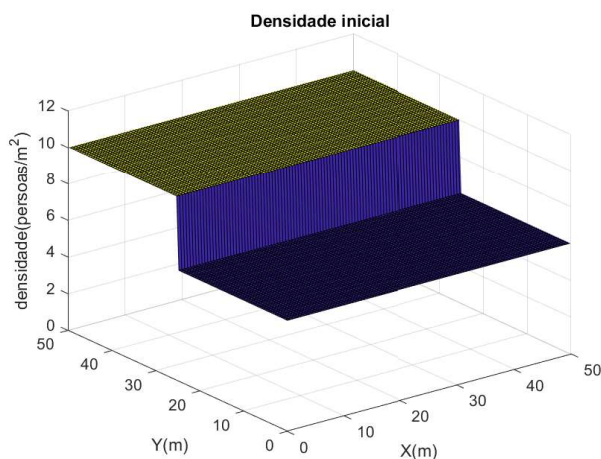


Figura 4.6: Densidade inicial nos tests verticais supoñendo  $\rho_l = 6$  e  $\rho_r = 10$ .

A figura 4.6 ilustra a situación inicial, e o que debe acontecer aquí: o movemento será lento debido a grande densidade na parte superior do dominio, e os peóns da parte inferior deberán esperar a que os peóns da parte superior liberen espazo.

Os resultados deste test mostran como apenas hai movemento nos primeiros 100 segundos, coincidindo novamente coa intuición que tiñamos: unha densidade alta impide o movemento libre dos peóns. Isto queda reflectido na figura 4.7, na cal se ve coma a densidade segue practicamente igual que no instante  $t = 0$ , aínda que a diferenza inicial entre ambos estados xa non é tan marcada, e o fluxo e a velocidade son moi reducidas. Non mostramos aquí a velocidade e o fluxo horizontais posto que son nulos, coma sucedía no test 1 co fluxo e a velocidade verticais.

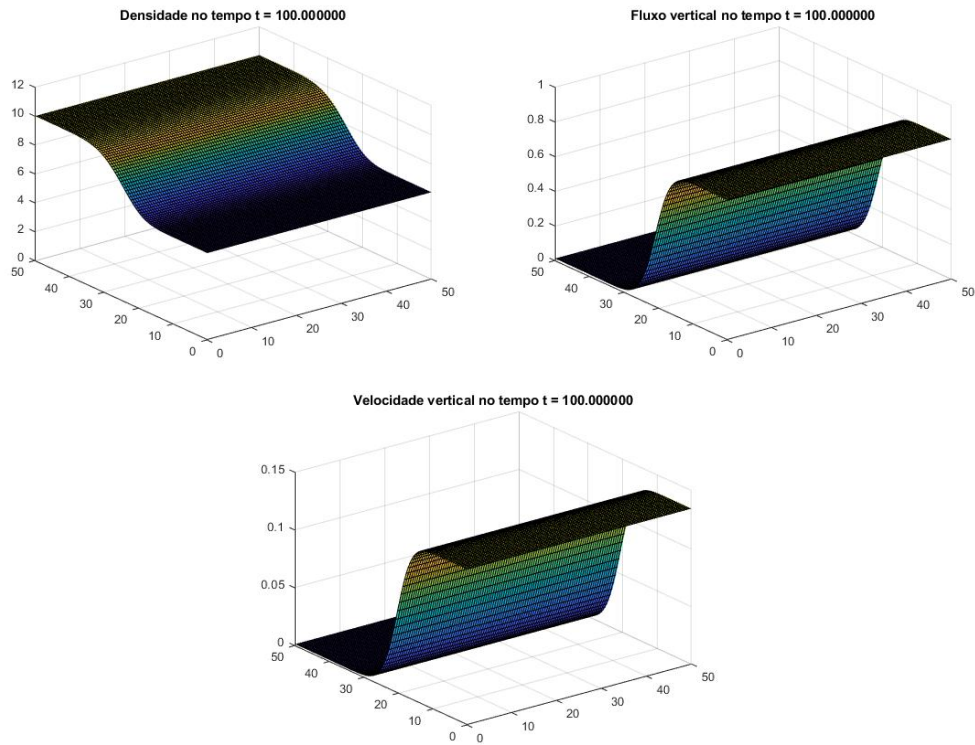


Figura 4.7: Densidade, fluxo vertical e velocidade vertical no instante  $t = 100$ .

Outra forma de comprovar isto é verificando que non hai apenas cambios entre as gráficas en 2D dun instante de tempo a outro se fixamos o valor de  $x = x_0$ , como se pode ver na figura (4.8). Nótase o valor da velocidade vertical, que non crece en ningún momento.

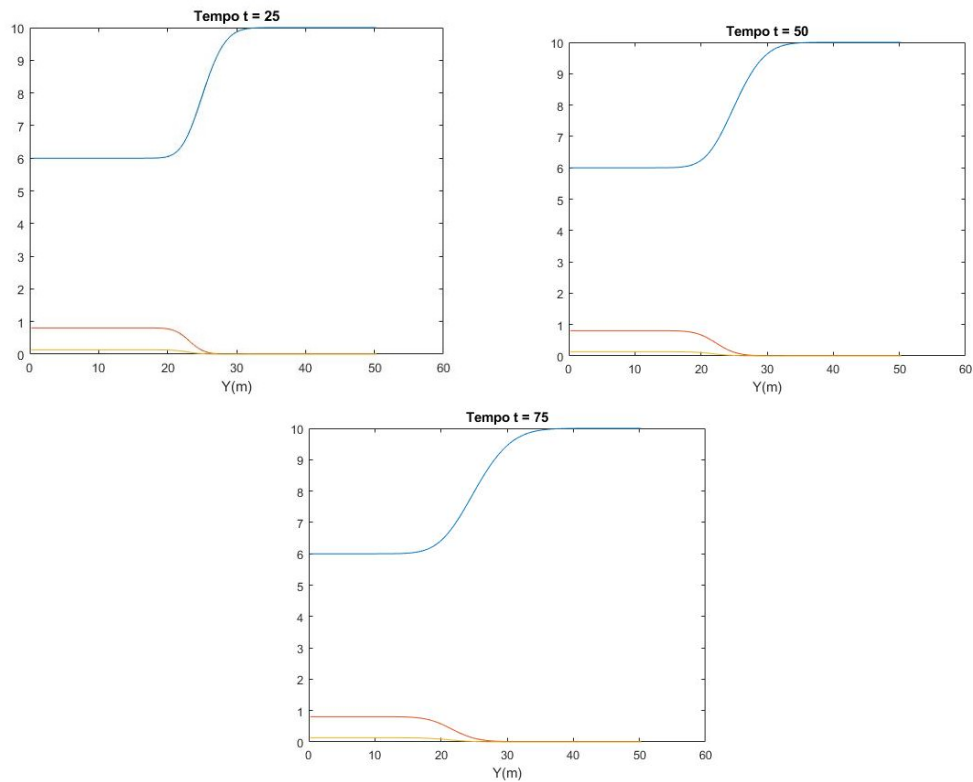


Figura 4.8: Densidade ( $\rho$ ), en azul; fluxo vertical ( $q_2$ ), en vermello; e velocidade vertical ( $v_2$ ), en amarelo; nos instantes  $t = 25$  s,  $t = 50$  s e  $t = 75$  s con  $x = x_0$  fixo.

Para seguir probando situacións diferentes, imos supoñer que entre os peóns se debe manter unha distancia de seguridade de 1.5 m, coma sucede agora na vida real coas restricións COVID. Así, a densidade máxima é  $\rho_{max} = 0.75$ , e supoñeremos  $\rho_l = 0.5$  e  $\rho_r = 0.3$ .

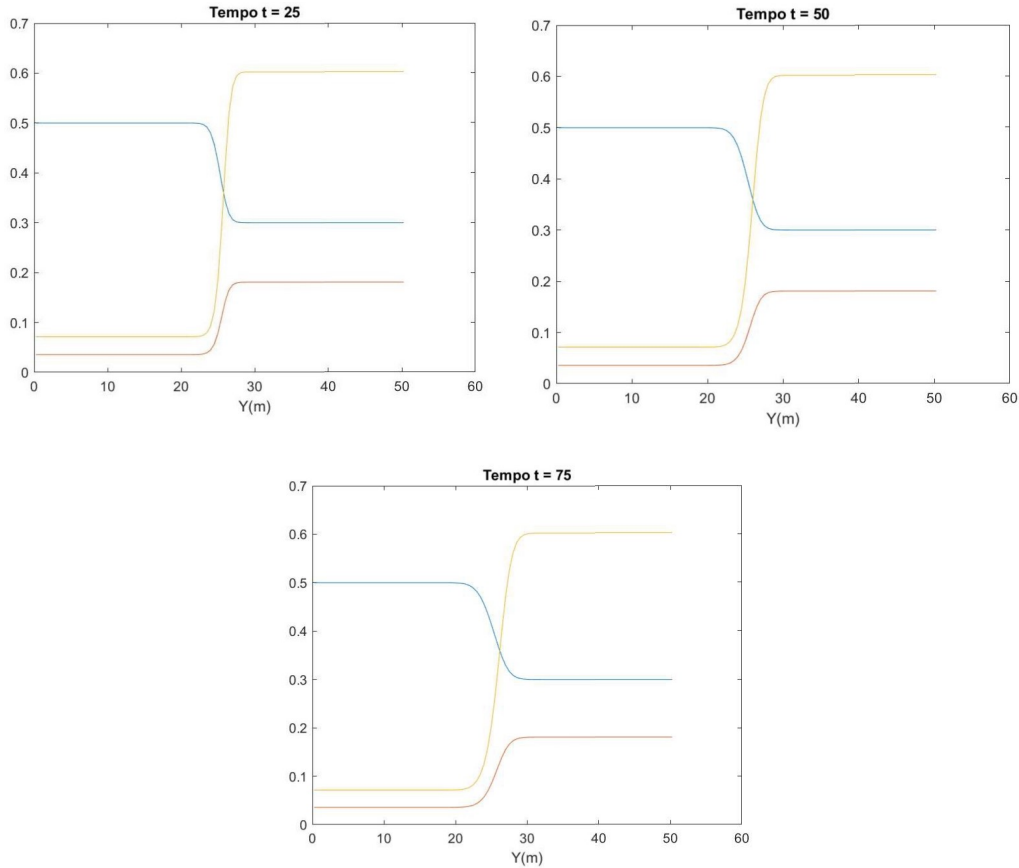


Figura 4.9: Densidade ( $\rho$ ), en azul; fluxo vertical ( $q_2$ ), en vermello; e velocidade vertical ( $v_2$ ), en amarelo; nos instantes  $t = 25$  s,  $t = 50$  s e  $t = 75$  s con  $x = x_0$  fixo e supoñendo  $\rho_{max} = 0.75$ .

Os resultados deste test, que podemos ver na figura 4.9, mostran como a densidade se mantén sempre por debaixo do 0.5 e o fluxo e a velocidade horizontais son tamén moi próximos a 0, debido ás dificultades para levar un movemento normal mantendo a distancia de seguridade entre os peóns. Ademais, non hai apenas diferenzas entre os tres instantes de tempo.

### Test 3: Movemento diagonal

Neste caso dividimos o dominio en diagonal, mediante a recta  $x + y = 50$ , de xeito que teremos novamente dúas zona diferenciadas, e os peóns moveranse en diagonal dunha a outra, de xeito que o vector de dirección será  $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$ .

Supoñendo que a densidade inicial veña dada coma  $\rho_l = 7$  e  $\rho_r = 4$ , estamos na

situación que se mostra na figura 4.10.

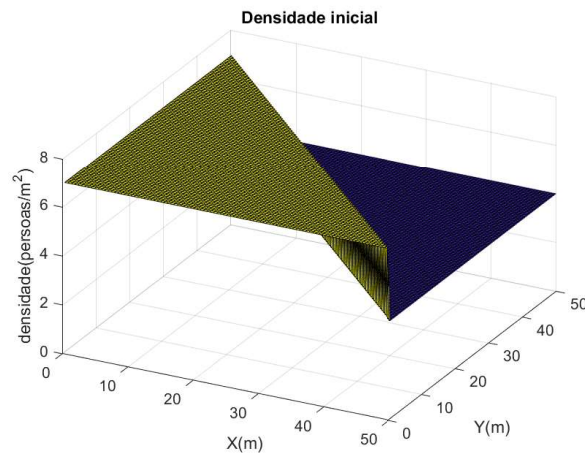


Figura 4.10: Densidade inicial no test diagonal con  $\rho_l = 7$  e  $\rho_r = 4$

Os resultados aos 25 segundos poden verse graficamente na figura 4.11, que nos mostra varias cousas. En primeiro lugar, as gráficas para o fluxo horizontal e para o fluxo vertical, así coma para a velocidade horizontal e a velocidade vertical son as mesmas, posto que a dirección de movemento verifica  $x = y$ . Ademais, vese claramente coma a densidade se despraza en diagonal, o fluxo é maior na zona onde aparecía inicialmente a discontinuidade e a velocidade é crecente conforme avanzamos en diagonal.

Debemos comentar aquí que para instantes de tempo maiores, coma  $t = 50$ , comezaban a aparecer certas flutuacións preto das esquinas do dominio, tal vez debidas ás condicións de contorno.

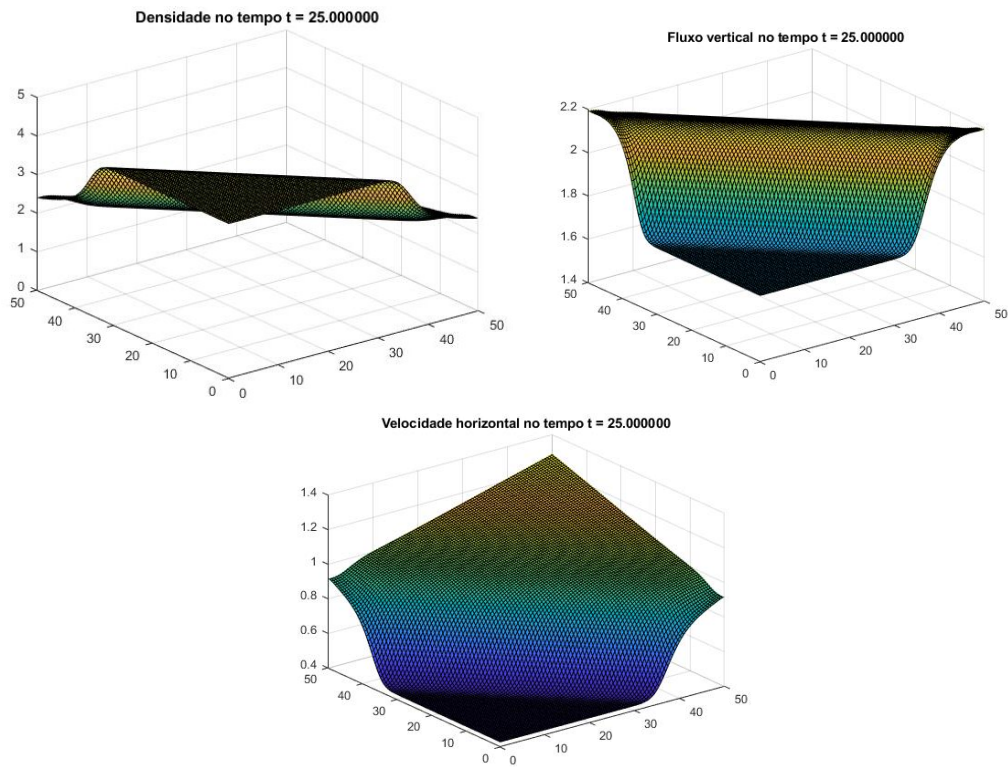


Figura 4.11: Densidade, fluxo vertical e velocidade horizontal para o test diagonal no instante  $t = 25$ .

Mostramos a continuação na figura 4.12 a velocidade vertical, para dar unha evidencia gráfica de que é a mesma que a velocidade horizontal.

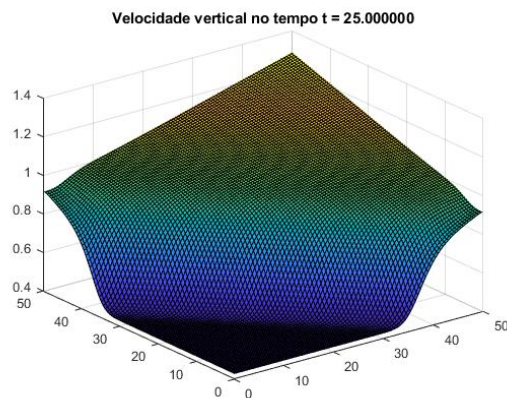


Figura 4.12: Velocidade vertical para o test diagonal no instante  $t = 25$ .

Variando parámetros coma o vector de dirección ou as condicións iniciais poden facerse outros tests que simulan situacións diferentes. Unha opción que contemplamos pero que finalmente non incluimos aquí é un test no que a condición inicial veña dada de xeito radial, coma se a discontinuidade se atopase na circunferencia de radio 10.



# Conclusión

Antes de finalizar co traballo, cómpre resumir de xeito breve o feito nel: Comezamos expoñendo o modelo de fluxo de persoas unidimensional e bidimensional, explicando como variar algún dos parámetros podía permitir adaptarse mellor ó comportamento humano, tan variable e difícil de prever. Seguimos explicando a teoría matemática na que se atopaba dito modelo, e desenvolvemos tamén a metodoloxía que nos ía permitir facer as simulacións pertinentes. Finalmente, puidemos atopar certas solucións para o problema en situacións sinxelas nas que a dirección de movemento é un dato do problema. Recordemos ademais que a aplicación deste modelo debe limitarse a situacións normais, posto que a modelización do comportamento humano en situacións de pánico é dunha grande complexidade.

Tamén é preciso destacar que o presente traballo serviu para afondar no estudo das ecuacións en derivadas parciais hiperbólicas, así coma para desenvolver o método de volumes finitos, metodoloxía con grandes aplicacións en diversos ámbitos.

Finalmente, aínda que aquí non o chegamos a desenvolver, a idea da ecuación imaxe e a súa resolución pode ser de grande interese e contar con moitas aplicacións, polo que animamos a quen o desexe que continúe este Traballo de Fin de Grado desenvolvendo ese concepto e resolvendo dita ecuación en busca da dirección da velocidade en cada paso temporal.



## Apéndice A

# Código en Matlab

Mostramos aquí o código Matlab do problema de fluxo de persoas empregando o fluxo de Rusanov.

```
% Resolutor para o modelo de fluxo de persoas en 2D
clear all
close all
clc

global p0
global gamma
global vmax
global eps

% Definimos o problema físico
p0 = 0.005; % presión
gamma = 2; % expoñente adiabático
vmax = 2; % velocidade desexada
eps = 10^-6;

tempo = 0; tf = 100;
rho_l = 4; rho_r = 0; % densidades a esquerda e dereita

% Definimos o dominio computacional, que vai ser regular
```

```

xL = 0; xR = 50; % bordos a esquerda e dereita
yL = 0; yR = 50; % bordos arriba e abaixo
IMAX = 100; JMAX = 100; % número de celas en ambas direccións
dx = (xR-xL)/IMAX; dy = (yR-yL)/JMAX; % incrementos espaciais
x = linspace(xL+dx/2,xR+dx/2,IMAX);
y = linspace(yL+dy/2,yR+dy/2,JMAX);
CFL = 0.7; % Condición de Courant

% Damos a densidade inicial (rho_l ou rho_r) e a velocidade inicial (0,0)
Q = zeros(3,IMAX,JMAX); Qn = zeros(3,IMAX,JMAX);
for i = 1:IMAX
for j = 1:JMAX
%if x(i) < (xR-xL)/2 % test 1
%if y(j) < (yR-yL)/2 % test 2
%if x(i) + y(j) < 50 % test 3

Q(:,i,j) = [rho_l; 0; 0];
else
Q(:,i,j) = [rho_r; 0; 0];
end
end
end

% Representacion gráfica da densidade inicial
surf(x,y,squeeze(Q(1,:,:)))
axis([xL xR yL yR 0 5])
xlabel ('X(m)')
ylabel ('Y(m)')
zlabel ('densidade(persoas/m^2)')
title (sprintf('Densidade inicial'))

% Definimos os vectores para almacenar as velocidades
v_x = zeros(1,IMAX,JMAX); v_y = zeros(1,IMAX,JMAX);

% Método de volumes finitos
NMAX = 10000;

```

```

for n = 1:NMAX % iniciamos o bucle temporal
amax_x = 0; amax_y = 0;
for i = 1:IMAX
for j = 1:JMAX
amax_x = max(amax_x,max(abs(lambdax(Q(:,i,j)))));
amax_y = max(amax_y,max(abs(lambday(Q(:,i,j)))));
end
end
dt = CFL/(amax_x/dx + amax_y/dy);
% Chegada ó tempo final
if (tempo + dt > tf)
dt = tf - tempo;
end
% Criterio de parada
if (tempo >= tf)
break
end
for i = 1:IMAX % bucle no eixo X
for j = 1:JMAX % bucle no eixo Y
% fluxo na dirección X
if (i==1) % fronteira da esquerda
QL = Q(:,i,j);
fp = Rusanovx(Q(:,i,j),Q(:,i+1,j));
fm = Rusanovx(QL,Q(:,i,j));
elseif (i==IMAX) % fronteira da dereita
QR = Q(:,i,j);
fp = Rusanovx(Q(:,i,j),QR);
fm = Rusanovx(Q(:,i-1,j),Q(:,i,j));
else % dentro do dominio
fp = Rusanovx(Q(:,i,j),Q(:,i+1,j));
fm = Rusanovx(Q(:,i-1,j),Q(:,i,j));
end

%fluxo na dirección Y
if (j==1) % fronteira de abaixo
QL = Q(:,i,j);

```

```

gp = Rusanovy(Q(:,i,j),Q(:,i,j+1));
gm = Rusanovy(QL,Q(:,i,j));
elseif (j==JMAX) % fronteira de arriba
QR = Q(:,i,j);
gp = Rusanovx(Q(:,i,j),QR);
gm = Rusanovx(Q(:,i,j-1),Q(:,i,j));
else % dentro do dominio
gp = Rusanovx(Q(:,i,j),Q(:,i,j+1));
gm = Rusanovx(Q(:,i,j-1),Q(:,i,j));
end

% Definimos o termo fonte
s = S(Q(:,i,j));

% Solución no instante n+1
Qn(:,i,j) = Q(:,i,j) - dt/dx *(fp-fm) - dt/dy *(gp-gm) + dt*s;
end
end

% Actualizamos o tempo e a solución
Q = Qn; tempo = tempo + dt;

% Representacion gráfica
figure(1)
surf(x,y,squeeze(Q(1,:,:))) % densidade
axis([xL xR yL yR 0 5])
title(sprintf('Densidade no tempo t = %f',tempo))
drawnow

figure(2)
surf(x,y,squeeze(Q(2,:,:))) % fluxo horizontal
axis([xL xR yL yR])
title(sprintf('Fluxo horizontal no tempo = %f',tempo))
drawnow

figure(3)

```

```

surf(x,y,squeeze(Q(3,,:))) % fluxo vertical
axis([xL xR yL yR])
title(sprintf('Fluxo vertical no tempo = %f',tempo))
drawnow

% Introducimos unha sentencia condicional para poder representar tamén
% as velocidades.
if (Q(1,,:) <= eps)
v_x(1,,:) = 0;
v_y(1,,:) = 0;
else
v_x(1,,:) = Q(2,,:)./Q(1,,:);
v_y(1,,:) = Q(3,,:)./Q(1,,:);

end

figure (4)
surf (x,y,squeeze(v_x)) % velocidade horizontal
axis([xL xR yL yR])
title(sprintf('Velocidade horizontal no tempo =%f',tempo))
drawnow

figure(5)
surf (x,y,squeeze(v_y)) % velocidade vertical
axis([xL xR yL yR])
title(sprintf('Velocidade vertical no tempo =%f',tempo))
drawnow

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Fluxo numérico na dirección x
function fluxo = Rusanovx(Qm,Qp)
s_max = max(max(abs(lambdax(Qm)),abs(lambdax(Qp))));
fluxo = 0.5*(f(Qm)+f(Qp))- 0.5*s_max*(Qp-Qm);

```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Fluxo numérico na dirección y
```

```
function fluxo = Rusanovy(Qm,Qp)
```

```
s_max = max(max(abs(lambday(Qm)),abs(lambday(Qp))));
```

```
fluxo = 0.5*(g(Qm)+g(Qp))- 0.5*s_max*(Qp-Qm);
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Fluxo físico na dirección x
```

```
function fluxo = f(Q)
```

```
global p0
```

```
global gamma
```

```
global eps
```

```
fluxo(1,1) = Q(2);
```

```
if (Q(1) <= eps)
```

```
fluxo(2,1) = p0*Q(1)^gamma;
```

```
fluxo(3,1) = p0*Q(1)^gamma;
```

```
else
```

```
fluxo(2,1) = Q(2)^2/Q(1) + p0*Q(1)^gamma;
```

```
fluxo(3,1) = Q(2)*Q(3)/Q(1) + p0*Q(1)^gamma;
```

```
end
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Fluxo físico na dirección y
```

```
function fluxo = g(Q)
```

```
global p0
```

```
global gamma
```

```

global eps

fluxo(1,1) = Q(3);

if (Q(1) <= eps)
fluxo(2,1) = p0*Q(1)^gamma;
fluxo(3,1) = p0*Q(1)^gamma;
else
fluxo(2,1) = Q(3)*Q(2)/Q(1) + p0*Q(1)^gamma;
fluxo(3,1) = Q(3)^2/Q(1) + p0*Q(1)^gamma;
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Cálculo dos valores propios na dirección de x: A1 = df/dQ
function L = lambdax (Q)

global p0
global gamma
global eps

if (Q(1) <= eps)
v1 = 0;
else
v1 = Q(2)/Q(1);
end

c = sqrt(gamma * p0 * Q(1)^(gamma-1));
L(1) = v1 - c;
L(2) = v1;
L(3) = v1 + c;

end

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Cálculo dos valores propios na dirección de y:  $A2 = dg/dQ$ 
```

```
function L = lambday (Q)
```

```
global p0
```

```
global gamma
```

```
global eps
```

```
if (Q(1) <= eps)
```

```
v2 = 0;
```

```
else
```

```
v2 = Q(3)/Q(1);
```

```
end
```

```
c = sqrt(gamma * p0 * Q(1)^(gamma-1));
```

```
L(1) = v2 - c;
```

```
L(2) = v2;
```

```
L(3) = v2 + c;
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Termo fonte
```

```
function fonte = S(Q)
```

```
global vmax
```

```
global eps
```

```
% Definición dos vectores unitarios para os distintos tests
```

```
%mu1 = 1; mu2 = 0; % test 1
```

```
%mu1 = 0; mu2 = 1; % test 2
```

```
%mu1 = sqrt(2)/2; mu2 = sqrt(2)/2; % test 3
```

```
rhomax = 10; % densidade máxima
```

```
alpha = 7.5; % coeficiente de densidade-velocidade
```

```
tau = 0.61; % parámetro de relaxación
```

```
V = vmax*exp(-alpha*(Q(1)/rhomax)^2);

fonte(1,1) = 0;
if (Q(1) <= eps)
fonte(2,1) = Q(1)*V*mu1/tau;
fonte(3,1) = Q(1)*V*mu2/tau;
else
fonte(2,1) = Q(1)*(V*mu1 - Q(2)/Q(1))/tau;
fonte(3,1) = Q(1)*(V*mu2 - Q(3)/Q(1))/tau;
end
end
```



# Bibliografía

- [1] R. M. Colombo, M. D. Rosini, *Pedestrian flows and non-classical shocks*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 28: 1553-1567, 2005.
- [2] E. Godlewski and P. A. Raviart. *In Numerical Approximation of Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1996.
- [3] A. Harten, P. Lax e A. van Leer. *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws with source terms*. *Computer and Fluids*, 23(8):1049-1071, 1994.
- [4] D. Helbing, P. Molnár, *Social force model for pedestrian dynamics*, *Physical Review E* 51(5): 4282-4286, 1995.
- [5] R. L. Hughes, *A continuum theory for the flow of pedestrians*. *Transportation Research Part B: Methodological* 36: 507-535, 2002.
- [6] Y. Jiang, P. Zhang, S. Wong, R. Liu, *A higher-order macroscopic model for pedestrian flows*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389: 4623-4635, 2010.
- [7] Xián López Álvarez. *Modelos matemáticos de tráfico en estradas*. Trabajo de fin de grao, Grao en Matemáticas, 2013.
- [8] R. Löhner, *On the modeling of pedestrian motion*, *Applied Mathematical Modelling* 34(2): 366-382, 2010.
- [9] B. Piccoli, A. Tosin, *Pedestrian flows in bounded domains with obstacles*, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 21(2): 85-107, 2009.
- [10] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Wadsworth and Brooks/Cole, 1989.
- [11] J. J. Stoker. *Water Waves*. Interscience, New York, 1957.

- [12] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*. Springer, 1997.
- [13] Monika Twarogowska, Paola Goatin, Régis Duvigneau. Numerical study of macroscopic pedestrian flow models.[Research Report] RR-8340,INRIA. hal-00849587, 2013.
- [14] M.Elena Vázquez Cendón. *Introducción al método de volúmenes finitos*. Manuais universitarios(10), 2008.
- [15] Y. Xia, S. C. Wong, C. Shu, *Dynamic continuum pedestrian flow model with memory effect*. Physics Revision E 79: 066113, 2009.