materia

Topoloxía de Superficies

unidade didáctica 1

Clasificación de Superficies

Xosé M. Masa Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía
Facultade de Matemáticas

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación

Grao en Matemáticas

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

unidade **didáctica 1**

Clasificación de Superficies

Xosé M. Masa Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía
Facultade de Matemáticas

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostea

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 52 - 2013
ISBN 978-84-9887-961-2

MATERIA: Topoloxía de Superficies
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

1. CONEXIDADE
- Separación e conexidade
- Compoñentes conexas

2. CONEXIDADE POR CAMIÑOS
- Camiño. Camiño inverso. Produto de camiños
- Conexidade por camiños
- Conexidade local por camiños

3. COMPACIDADE
- Coberturas e subcoberturas
- Definición de compacidade
- Compacidade dun produto
- Compacidade en espazos métricos

4. COMPACIDADE LOCAL
- Compacidade local
- Compactificación de Aleksandrov

5. SUPERFICIES COMPACTAS
- Superficies. Suma conexa de superficies
- As superficies como cocientes de rexións planas. Triangulacións
- Orientabilidade

6. CLASIFICACIÓN DAS SUPERFICIES COMPACTAS, I
- Símbolo da presentación dunha superficie
- Redución do símbolo a unha forma canónica
- A característica de Euler dunha superficie

7. HOMOTOPÍA
- Homotopía de aplicacións
- Retración e deformación
- Espazos contráctiles
- Equivalencias e Tipo de homotopía

8. O GRUPO FUNDAMENTAL
- Homotopía de camiños. Lazos
- O Grupo Fundamental

9. CÁLCULO DO GRUPO FUNDAMENTAL

Espazos simplemente conexos
O Grupo Fundamental das esferas
O Grupo Fundamental da circunferencia

10. CLASIFICACIÓN DAS SUPERFICIES COMPACTAS, II

Presentación de grupos por xeradores e relacións
O Teorema de Van Kampen
O Grupo Fundamental das superficies compactas
Teorema de Clasificación das Superficies Compactas

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

A *superficie* é un obxecto matemático importante e, como tal, dedícaselle un espazo amplo nos estudos do Grao. Constitúe o exemplo máis sinxelo de variedade multidimensional e as súas propiedades xeométricas, establecidas en gran medida por Gauss hai 200 anos, constitúen o punto de partida do estudo en dimensións superiores. Estudo que, en dimensión dous, se desenvolve na materia *Teoría Global de Superficies*, que se cursa ao tempo que esta.

Aquí adóptase un punto de vista máis abstracto, prescindindo de calquera consideración métrica, centrándose nas propiedades topolóxicas do espazo subxacente. Un marco que, neste caso excepcional, permite conclusións precisas e completas: o *Teorema de Clasificación Topolóxica das Superficies*. O curso vertébrase arredor do enunciado e demostración deste resultado no caso máis simple, o das superficies compactas.

O Programa divídese de forma natural en tres partes, de extensión parella, 1,5 créditos cada unha, para completar os 4,5 créditos dispoñíbeis.

No primeiro terzo, os catro primeiros temas, abórdase o estudo da Topoloxía Conxuntista necesaria, tratando especialmente os conceptos de *conexidade* e *compacidade* en espazos topolóxicos abstractos. Outro terzo da materia, que abrangue os temas 7, 8 e 9, e parte do tema 10, dedícase ao estudo da *Homotopía* e o *Grupo Fundamental*, un mergullo na Topoloxía Alxébrica, unha das grandes achegas da matemática do s.XX, presente no desenvolvemento de toda a matemática pura actual, e que supón unha metodoloxía novidosa e potente, magnificamente exemplificada no uso que se fai dela na demostración do Teorema de Clasificación.

En fin, ao terzo restante dedícase esta ***Unidade Didáctica***. Engloba os contidos referidos directamente a superficies, temas 5, 6 e parte do 10. Desde a súa definición, estudo de exemplos, orientabilidade,…ata o enunciado, discusión e demostración do Teorema de Clasificación. Deste xeito, deixando a un lado os desenvolvementos máis técnicos e auxiliares, a Unidade Didáctica céntrase nos aspectos máis substantivos, poñendo a énfase na comprensión do enunciado do Teorema e o seu alcance, analizando as súas consecuencias. E demorándose na consideración do dobre método da demostración: por un lado, un percorrido xeométrico ata reducir cada superficie a un modelo *standard* e, por outro, un método alxebro-topolóxico, baseado no Grupo Fundamental, para distinguir entre si os diferentes modelos.

OBXECTIVOS

- Coñecer exemplos de superficies, compactas e non compactas, con e sen bordo, orientábeis e non orientábeis
- Manexar invariantes topolóxicos coma xénero dunha superficie e característica de Euler.
- Coñecer e comprender o Teorema de Clasificación, o seu alcance e consecuencias
- Recoñecer unha superficie compacta en función do seu xénero ou da súa característica de Euler, e do feito de ser, ou non, orientábel
- Comprender unha demostración longa e profunda, con dúas partes conceptualmente moi diferentes, e que precisa recursos topolóxicos e alxébricos.

METODOLOXÍA

O Plan de Estudos do *Grao en Matemáticas* estrutura o traballo presencial desta materia en sesións co grupo completo, ás que denominarei ***clases maxistrais***, e sesións en grupos reducidos, ás que denominarei ***seminarios***. Contémplanse tamén titorías en grupos moi reducidos, ás que denominarei ***titorías programadas***.

As clases maxistrais son as sesións dedicadas, dun xeito máis regrado, ao desenvolvemento do programa. Trátase, fundamentalmente, de leccións impartidas polo profesor. De ordinario, nunha mesma sesión dedicarase un tempo á exposición ou ilustración dalgunha cuestión teórica, e outro tempo á resolución de problemas ou exercicios. Ás veces predominará a exposición polo profesor, ás veces procurarase a implicación de todo o alumnado na discusión das cuestións suscitadas.

Nos seminarios preténdese unha maior participación activa das e dos estudantes. Para facilitar a participación, fórmanse grupos de traballo. As sesións dos seminarios terán formatos diversos. Haberá sesións de exercicios, nas que se resolverán os exercicios propostos nos Boletíns; un exercicio pode ser asignado a un grupo de traballo, para que o prepare e expoña, ou non, e traballalo na aula en grupos creados no momento e discutilo de seguido. Noutras sesións abordaranse cuestións preparadas polos estudantes, non explicadas previamente; para a preparación destas sesións contarase cun guión elaborado polo profesor; cada grupo terá que encargarse dunha sesión deste tipo. En fin, outras veces, as menos, serán talleres de exemplos e aplicacións da teoría estudada, sen un encargo previo a ningún grupo, ou discutirase un texto, tal vez unha lectura recomendada. Ao longo do curso, cada grupo fará unha exposición nun seminario e cada estudante explicará, cando menos, un exercicio no encerado.

Previamente a cada sesión de seminario onde estudantes fan exposicións, os grupos implicados teñen unha titoría programada.

En función do calendario, para desenvolver a Unidade Didáctica disporase de 8 ou 10 sesións de clases maxistrais e 4 ou 5 sesións de seminario. No Anexo I inclúense os guións de dous temas que se poderían utilizar para sendas exposicións por grupos de estudantes. No Anexo II, algúns exercicios que poderían traballarse noutras dúas sesións dos seminarios. De haber unha sesión adicional, podería dedicarse a facer un taller sobre superficies compactas con bordo; despois de discutir, dun xeito relativamente informal, a adaptación do Teorema de Clasificación a estas superficies, construiríanse en cartolina modelos, concluíndo que, a diferencia do que ocorre coas superficies sen bordo, todas se poden mergullar no espazo euclidiano $\mathbb{R}^3$.

AVALIACIÓN

Procúrase avaliar os coñecementos teóricos adquiridos, a capacidade de resolución de problemas e, moi especialmente, a adquisición das competencias que figuran na programación.

Na Materia contémplase un dobre sistema de avaliación: a avaliación puntual, realizada mediante o exame final, e a avaliación continuada, realizada ao longo do curso, en base á participación activa na aula e aos traballos realizados.

O exame final é unha proba escrita que ten dúas partes. Unha parte de teoría, que consiste na exposición escrita dun tema da materia entre os seguintes:

- Conexidade
- Compacidade
- Superficies
- Homotopía e Grupo Fundamental
- Cálculo do Grupo Fundamental
- Clasificación das Superficies Compactas

Sortéanse dous, e cada estudante decide cal desenvolve. O tempo dispoñíbel para a realización desta parte é dunha hora e media, e pode utilizarse un guión que haberá que entregar co exame. Cada tema debe conter, cando menos, definición dos principais conceptos, exemplos e enunciado e demostración dalgúns resultados. Esta parte cualifícase sobre 4 puntos.

A outra parte do exame consiste na resolución de exercicios, que serán análogos aos propostos ao longo do curso. Esta parte cualifícase sobre 6 puntos.

A cualificación do exame é a suma das cualificacións de ambas probas.

A avaliación continuada intégrase na propia metodoloxía de aprendizaxe que se pretende poñer en práctica. Procurase suscitar unha motivación inicial, propiciar a participación nas actividades do curso e manter o interese no tempo. O profesor vai seguindo, día a día, o proceso de aprendizaxe de cada estudante. A base desta avaliación é a participación na clase, as actuacións no encerado nas sesións de seminario, os traballos entregados e a discusión dos mesmos, etc. Previamente a cada sesión de seminario onde estudantes fan exposicións, os grupos implicados teñen unha titoría programada. Ten un gran valor formativo, pois acoden estudantes coa motivación que supón o afrontaren unha exposición na aula, e porque están xustamente traballando o tema. Ademais, esta sesión incide positivamente na calidade da exposición a realizar, en beneficio do xeral aproveitamento. Por outra parte, é un tempo de intercambio intenso, o que a convirte nunha ferramenta eficaz de avaliación, tanto individual como da marcha xeral da materia.

A avaliación da Unidade Didáctica é, naturalmente, unha parte deste proceso xeral de avaliación. No exame final sempre hai algún exercicio relativo a superficies. En canto á avaliación continua, cando menos un terzo do conxunto de estudantes participarán activamente nas sesións de seminarios onde se desenvolven temas ou exercicios relativos á Unidade Didáctica; e unha porcentaxe maior participará, dunha forma ou outra, no período correspondente. As titorías de despacho, ás que acoden, certo, un número reducido de estudantes, tamén contribúen ao proceso de avaliación. Unha das lecturas recomendadas ten que ver co concepto de superficie, pero non sempre o tempo permite a súa discusión, e a presentación dun resumo, para evitar unha sobrecarga de tarefas, é voluntaria.

CONTIDOS

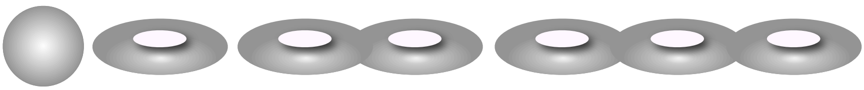
1. Superficies

Bernhard Riemann (1826-1866) En palabras de Bourbaki, «os seus traballos sobre as funcións alxébricas e as súas integrais e as súas reflexións —considerablemente inspiradas polo estudo dos traballos de Gauss— sobre os fundamentos da xeometría, por outra, levaron a Riemann a formular un programa de estudos que é o mesmo da topoloxía moderna. (...) Comezou a levar a cabo este programa grandioso, definindo os *números de Betti* dunha superficie.»

Unha das propiedades de natureza topolóxica máis antigas é a que afirma que a suma do número de caras dun poliedro, máis o número de vértices, menos o número de arestas é sempre igual a 2,

$$C + V - A = 2\,.$$

Xa fora probada por Descartes (1630), aínda que foi Euler quen a deu a coñecer (1752) e Poincaré quen demostrou a súa natureza topolóxica e a xeneralizou a figuras n-dimensionais. Na segunda metade do s.XIX, a raíz dos estudos de Riemann sobre funcións holomorfas, e as superficies que lles asocia, houbo un interese grande no estudo das superficies, ao que contribuíron, entre outros, ademais do propio Riemann, matemáticos como Möbius e Jordan. Grazas á triangulación, división das superficies en pequenas rexións curvas a semellanza de triángulos nun poliedro, pódese aplicar a anterior fórmula, que define un número coñecido como *característica de Euler*. Número distinto para cada superficie, e que permite distinguilas, clasificalas topoloxicamente, no sentido de que calquera delas está completamente determinada, salvo homeomorfismo, pola súa característica de Euler (trátase, neste momento, de superficies orientábeis). Os seguintes son os primeiros *modelos*:



Unha demostración completa do Teorema de Clasificación, incluíndo as superficies non orientábeis, publicaríase a principios do s.XX polos matemáticos Dehn e Heegaard.

1.1 Definición e exemplos

1.1.1 DEFINICIÓN.- Unha *superficie* (*surface)* é unha variedade 2-dimensional, 2^0 enumerábel, Hausdorff e conexa.

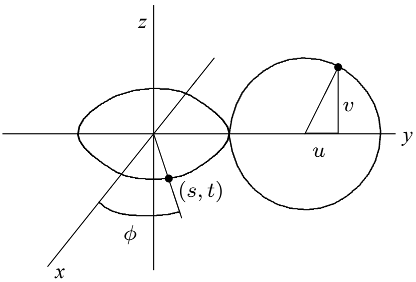
1.1.2 EXEMPLO.- O plano euclidiano é unha superficie. Calquera subespazo aberto e conexo dunha superficie é unha superficie. □

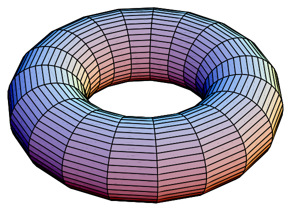
1.1.3 EXEMPLO.- A esfera $\mathbb{S}^2$ é unha superficie. Ademais, é un espazo topolóxico compacto, é unha superficie compacta. □

1.1.4 EXEMPLO.- O *toro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é unha superficie. Denotemos por $\mathcal{T}^2$ este espazo. Como produto de dous subespazos de $\mathbb{R}^2$, pódese considerar como subespazo de $\mathbb{R}^4$. Pero pódese mergullar en $\mathbb{R}^3$, que é como habitualmente se presenta. Por exemplo, a aplicación $h\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(s,t,u,v) = ((2+u)s, (2+u)t, v)$$

é inxectiva e continua. Ademais, como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ é compacto, pois é un subconxunto pechado e limitado de $\mathbb{R}^4$, e como $\mathbb{R}^3$ é Hausdorff, h tamén é pechada, logo é un mergullo. A súa imaxe é a superficie dunha rosquilla. Vexamos como se constrúe h.





Para un punto arbitrario, (s,t,u,v), as primeiras coordenadas obtéñense proxectando a lonxitude $2+u$ sobre os respectivos eixos x e y, o que corresponde a multiplicar polo coseno e o seno do ángulo ϕ que determina o punto (s,t), ou sexa, por s e por t, respectivamente.

□

1.1.5 EXEMPLO.- No tema de Compacidade introducíronse os espazos proxectivos. O espazo proxectivo de dimensión 2, P^2, denomínase *plano proxectivo*. É unha superficie compacta, cociente de $\mathbb{S}^2$ pola relación que identifica puntos antipodais: un punto (x,y,z) de $\mathbb{S}^2$ identifícase co punto $(-x,-y,-z)$. O plano proxectivo pódese mergullar en $\mathbb{R}^4$. Unha forma de facelo consiste en partir da función $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)\,.$$

Trátase de comprobar que esta función pasa ao cociente, definindo unha función continua

$$h\colon P^2 \to \mathbb{R}^4\,.$$

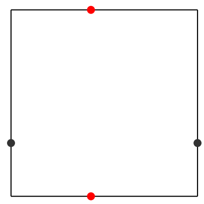
E que, ademais, h é inxectiva ($f(x,y,z) = f(x',y',z')$ sse $(x,y,z) = \pm(x',y',z')$, un pequeno cálculo, que se reduce a resolver unha ecuación cuadrática). Así, h será unha función inxectiva, continua, con dominio compacto e rango Hausdorff. $\square$

No caso destes tres exemplos, tanto a esfera como o toro como o plano proxectivo son segundo enumerábeis, por ser subespazos de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^4$. No caso de superficies compactas, que son as que imos estudar, a condición de ser segundo enumerábeis pódese deducir de seren compactas e localmente euclidianas (ver o Exercicio **??**).

– –

Con frecuencia presentaremos as superficies como cocientes de rexións planas. Normalmente, tratarase de rexións poligonais cun número par de arestas, identificadas dúas a dúas. Por exemplo, o toro pódese construír a partir do cadrado unitario $\mathbb{I}^2$, coa topoloxía usual. Partimos da relación de equivalencia en $\mathbb{I}^2$ xerada por:

$$\begin{cases} (x,0) \sim (x,1)\,, \\ (0,y) \sim (1,y)\,. \end{cases}$$



Cando dicimos "xerada por", significa que non damos todo o conxunto $\mathcal{R}$ que define a relación de equivalencia, senón un subconxunto que o determina completamente, sendo $\mathcal{R}$ o menor conxunto que é unha relación de equivalencia e contén o conxunto dado. Para ter a relación completa habería que engadir $(x,y) \sim (x,y)$ para todo punto (x,y) de $\mathbb{I}^2$, as relacións $(x,1) \sim (x,0)$ e $(1,y) \sim (0,y)$, e, finalmente, $(0,0) \sim (1,1)$ e $(1,1) \sim (0,0)$.

Imos demostrar que este cociente é homeomorfo ao toro. Para iso imos construír unha identificación f de $\mathbb{I}^2$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ que defina en $\mathbb{I}^2$ a mesma relación de equivalencia que a dada. Esta condición equivale a que exista unha aplicación bixectiva h entre o cociente e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, facendo conmutativo o diagrama.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{I}^2 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{I}^2/\sim \arrow[dl, "h"] \\ & \mathcal{T}^2 & \end{tikzcd}$$

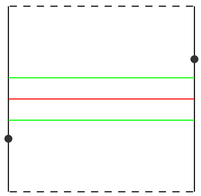
Sexa

$$f(s,t) = (\cos 2\pi s, \text{sen}\, 2\pi s, \cos 2\pi t, \text{sen}\, 2\pi t)\,.$$

A función f é claramente continua, e define a relación de equivalencia apropiada. Ademais é unha identificación, pois é sobre e tamén é pechada: efectivamente, o seu dominio é un compacto en $\mathbb{R}^2$, a súa imaxe está en $\mathbb{R}^4$.

– –

1.1.6 A FAIXA DE MÖBIUS.- Imos construír agora un exemplo notable; non vai ser unha superficie compacta, como os exemplos anteriores. Será un cociente do produto do intervalo pechado polo intervalo aberto, $[0,1] \times (0,1)$, pola relación de equivalencia xerada por $(0,y) \sim (1, 1-y)$.



O cociente, $\mathcal{M}$, é a *faixa de Möbius (Möbius strip*). (Se queres construír unha faixa de Möbius con papel ou cartolina, parte dun rectángulo, mellor que dun cadrado).

1.1.7 EXERCICIO.-
1. Identifica o cociente dos conxuntos bermello e verde.
2. Constrúe unha función continua de $\mathcal{M}$ sobre $\mathbb{S}^1$.

1.2. Suma conexa de superficies

Sexan S_1 e S_2 dúas superficies, D_1 e D_2 discos pechados en S_1 e S_2, respectivamente; ou sexa, subconxuntos homeomorfos a un disco pechado no plano euclidiano. Imos supor que cada disco escollido está contido nun aberto da superficie homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. As fronteiras dos discos, $\mathrm{Fr}(D_i), i = 1, 2$, son homeomorfas a $\mathbb{S}^1$. Sexa $\phi\colon \mathrm{Fr}(D_1) \to \mathrm{Fr}(D_2)$ un homeomorfismo. Na unión disxunta $(S_1 - \mathrm{Int}(D_1)) \cup (S_2 - \mathrm{Int}(D_2))$ consideramos a relación de equivalencia $\sim_\phi$ determinada por $x \sim \phi(x)$ se $x \in \mathrm{Fr}(D_1)$. Construímos o cociente

$$S_1 \# S_2 = [(S_1 - \mathrm{Int}(D_1)) \sqcup (S_2 - \mathrm{Int}(D_2))] / \sim_\phi \ .$$

1.2.1 LEMA.- O cociente $S_1 \# S_2$ é unha superficie.

1.2.2 CUESTIÓN.- Comprobade que o cociente é Hausdorff, localmente euclidiano e conexo. (Pódese considerar $S_1 \# S_2$ como unión de tres subespazos abertos: S_1 menos un disco pechado, S_2 menos un disco pechado e un cilindro)

1.2.3 DEFINICIÓN.- A superficie $S_1 \# S_2$ denomínase *suma conexa* (*connected sum)* das superficies S_1 e S_2.

A construción depende das escollas feitas, D_1, D_2 e ϕ, pero ao variar a escolla as superficies resultantes son homeomorfas. Non é difícil construír o homeomorfismo pertinente, pero nós deduciremos este feito do Teorema de Clasificación.

1.2.4 OBSERVACIÓN.- O Teorema de Clasificación permitirá concluír que a operación # ten, no conxunto de tipos de homeomorfía das superficies, as boas propiedades da suma dos números enteiros, salvo non ter oposto: é conmutativa, asociativa e ten elemento neutro, a esfera $\mathbb{S}^2$; ten estrutura de *semigrupo*.

1.3. Superficies con bordo

Hai unha definición de variedade topolóxica máis xeral da que temos dado. Será un espazo topolóxico M no que cada punto teña unha veciñanza aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ ou ao semi-espazo $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_n \geq 0\}$. O conxunto de puntos que non admiten ningunha veciñanza homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ denomínase *bordo (boundary)* da variedade. E diremos que M é unha *variedade con bordo (manifold with boundary)*. O bordo denótase $\partial(M)$.

No caso de ser $n = 2$ e de se verificar as restantes propiedades topolóxicas que consideramos na definición de superficie, teremos unha *superficie con bordo (bordored surface)*.

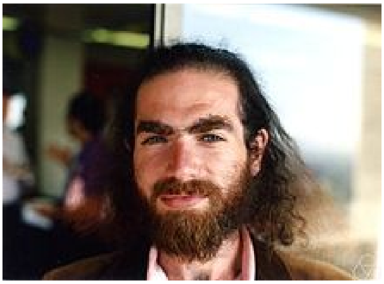
1.3.1 EXEMPLOS.- O semiplano superior pechado, ou o disco pechado, son superficies con bordo. O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ é unha superficie con bordo. A Faixa de Möbius, construída partindo dun cadrado pechado, é unha superficie con bordo. Dada unha superficie sen bordo, se consideramos nela unha colección finita de discos pechados disxuntos, se quitamos os interiores deses discos teremos unha superficie con bordo.

1.3.2 CUESTIÓN.- Supoñamos que, nun espazo X, un punto x admite unha veciñanza homeomorfa ao plano superior pechado, e que a imaxe do punto x polo homeomorfismo pertenza ao eixo de abscisas. Pode o punto x admitir unha veciñanza aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^2$?

Cando falemos de superficies neste curso, de non explicitar o contrario, entenderemos que se trata de superficies sen bordo.

2. Clasificación das Superficies Compactas

Grigori Perelman (1966). O último elo dunha longa cadea de esforzo para resolver a conxectura de Poincaré. Os inmediatos anteriores que non se pode deixar de citar son Richard Hamilton (1943), que desenvolveu a técnica do *fluxo de Ricci* que permitiu a Perelman probar a *conxectura de xeometrización*, proposta en 1983 por Willian Thurston (1946), e que implica a conxectura de Poincaré.



Un dos retos da matemática consiste en clasificar os obxectos ou estruturas que define. Poucas veces se consigue unha resposta tan completa e tan simple como no caso que nos ocupa.

Do Teorema de Clasificación dedúcese, en particular, que toda superficie compacta simplemente conexa é homeomorfa á esfera $\mathbb{S}^2$.

Seguramente xa a estas alturas, mesmo antes de acabar a demostración do teorema, paréceche un resultado razoábel e, se cadra, non moi complicado. Pois xa ves, a famosa *conxectura de Poincaré*, si, o mesmo Poincaré que deu nome ao grupo fundamental, afirmaba (agora xa é un teorema) xustamente iso, pero en dimensión 3. *Toda variedade compacta e simplemente conexa de dimensión 3 é homeomorfa á esfera $\mathbb{S}^3$.* E foron necesarios 100 anos, o esforzo de moita xente e profundas teorías para poder concluír que é certo.

E isto só para a esfera, nada comparado co Teorema de Clasificación de Superficies, que agora tes a oportunidade de comprender e gozar.

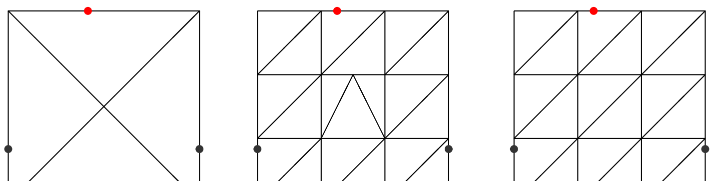
2.1. As superficies como cocientes de rexións planas. Triangulacións

Temos presentado algunhas superficies como cocientes de rexións planas. Imos ver agora que toda superficie compacta se pode presentar desta forma. Para iso, comezaremos por *triangular* a superficie, ou sexa, dividir a superficie en trozos pechados homeomorfos a triángulos, de xeito que estos *triángulos* se peguen ben. A triangulación é un tipo de *estrutura combinatoria* (*combinatorial structure*). As estruturas combinatorias teñen grande interese en moitas ramas da matemática, tamén na topoloxía. Nós imos apenas rozala, polo que non faremos un tratamento sistemático. Imos falar de triángulos, entendendo por tais conxuntos pechados homeomorfos a un triángulo xeométrico. E nestes conxuntos imos distinguir vértices, arestas e cara, en correspondencia polo homeomorfismo cos vértices, as arestas e o interior do triángulo xeométrico.

2.1.1 DEFINICIÓN.- Unha *triangulación (triangulation)* dunha superficie compacta S é unha colección de triángulos en S, $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$, tal que se verifica:

1. $S = \cup_{i=1}^{n} T_i$
2. dous triángulos T_i, T_j, ou son disxuntos, ou teñen en común un punto, que corresponde a un vértice dos triángulos, ou teñen en común un conxunto que corresponde a unha aresta.
3. toda aresta é a fronteira de exactamente dous triángulos
4. todo vértice está na fronteira de varios triángulos, que poden ser dispostos en orde cíclica; isto é, se x_0 é un vértice, o conxunto de triángulos que o conteñen poden ser enumerados como $T_{i_1}, \ldots, T_{i_k}$ de xeito que $T_{i_j} \cap T_{i_{j+1}}$ é unha aresta (facendo $T_{i_{k+1}} = T_{i_1}$).

Sobre o Toro, nas figuras abaixo, (a) e (b) non serían triangulacións; por contra, (c), si.



(a) (b) (c)

2.1.2 CURIOSIDADE.- Cal é o número mínimo de triángulos necesarios para triangular a esfera?

É bastante natural admitir que toda superficie compacta posúe unha triangulación, pero isto require unha demostración. Unha demostración rigorosa deste feito é menos elemental do que se puidera un imaxinar, desborda o tempo de que dispomos e non ten especial interese para nós, polo que non a faremos. Algún dos seus argumentos, dun valor formativo maior no contexto do noso programa, abordarémolo como exercicio.

Sexa agora S unha superficie compacta, cunha triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$. A partir de $\mathcal{T}$ constrúese un polígono, coas arestas identificadas de dúas en dúas, tal que o seu cociente é a superficie de partida. Para facelo, asociamos a cada T_i un triángulo xeométrico T_i' en $\mathbb{R}^2$. Partindo dun deles, por exemplo, T_1', imos pegando os outros por algunha das arestas que están identificadas na triangulación. Os detalles poden consultarse no libro de Massey [**?**, Capítulo I, Sección 7].

2.1.3 OBSERVACIÓN.- Na definición de triangulación inclúese que dous triángulos poden compartir, como moito, un lado. Descompoñendo unha superficie en rexións triangulares poderían tres triángulos, ou máis, compartir un mesmo lado? Pola propia natureza da superficie, a resposta semella non. Pero dar unha resposta formal esixe unha argumentación non trivial, que nós abordaremos máis adiante, utilizando como ferramenta o grupo fundamental (Tema 8). De momento, admitímolo sen proba.

2.2. Orientabilidade

Vivimos nun planeta orientado: en calquera punto, se miramos cara ao Polo Norte, temos o Leste á nosa dereita. Ou, mirando ao Polo Sur, teriamos o Leste á nosa esquerda, que é o mesmo en canto a orientación.

Outro exemplo práctico: unha mesa chea de comensais; podemos pensar nunha mesa redonda, que é máis visual. Co servizo de cada comensal, situado lateralmente, hai un anaco de pan. Na nosa cultura adóitase adxudicar a cada comensal o pan que ten á súa esquerda. Pero acontece a miúdo que a primeira persoa colla o pan que máis lle entre polos ollos; dise, entón, que orientou a mesa (no sentido das agullas do reloxo, se optou polo panciño da esquerda, no contrario, no outro caso).

Que é unha orientación? Nun espazo vectorial de dimensión finita, pensade en $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, primeiro, dadas dúas bases ordenadas existe unha matriz de cambio de base, matriz que ten determinante diferente de cero. Pódese definir unha relación de equivalencia no conxunto de bases ordenadas: dúas serán equivalentes se o determinante da matriz de cambio de base é positivo. Só hai dúas clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia denomínase *orientación (orientation)*.

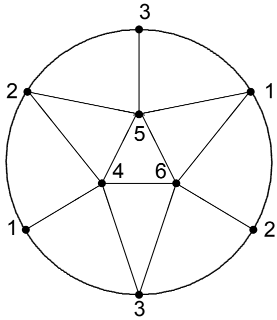
En dimensións baixas é doado visualizar o concepto de orientación. En $\mathbb{R}$ redúcese a sentido. En $\mathbb{R}^2$, dada unha base v_1, v_2, se nos movemos sobre a circunferencia unitaria, por exemplo, de v_1 a v_2 polo ángulo máis pequeno, faremos un percorrido no sentido das agullas do reloxo ou no contrario, en función da clase de equivalencia á que pertenza a base; no plano, orientación é o mesmo que sentido de xiro. Para facer un símil en $\mathbb{R}^3$, na vez dun reloxo pódese usar un sacarrollas.

Como trasladar esta noción a unha superficie? De dispor das ferramentas da Xeometría Diferencial, unha orientación da superficie nun punto sería unha orientación do seu plano tanxente. Localmente poderiamos trasladar unha orientación de $\mathbb{R}^2$ a todos os puntos dunha carta coordenada.

Se tivesemos unha cobertura por cartas coordenadas tais que os jacobianos dos cambios de cartas foran positivos, teriamos unha orientación en cada punto compatible coa escolla local. A superficie estaría orientada.

Sempre se pode definir orientación nun punto da superficie, dúas orientacións en cada punto, de feito. Pero non sempre é posible facelo de forma coherente: cando é posible dise que a superficie é *orientábel (orientable)*, e *non orientábel (nonorientable)*noutro caso.

Pero nós non imos usar unha estrutura diferenciable. Poderiamos utilizar a estrutura combinatoria dada polas triangulacións. Por exemplo, podemos numerar os vértices dunha triangulación. E orientar arestas e triángulos segundo a orde crecente dos vértices. As orientacións de dous triángulos adxacentes dinse coherentes se inducen na aresta común orientacións contrarias. Se todas son coherentes, definirán unha orientación na superficie. É un bo método para traballar exemplos.

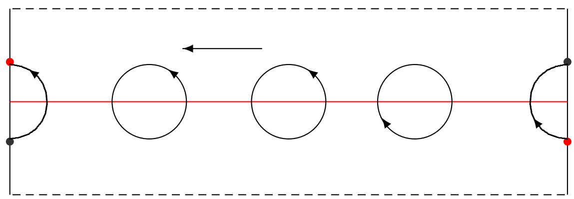


Triangulación do Plano Proxectivo

A orientabilidade é unha propiedade topolóxica, e pódese definir para calquera variedade topolóxica, sen recorrer a técnicas diferenciais nin combinatorias. Nós imos dar unha definición moi particular, útil para o caso das superficies.

Comezaremos facendo unha discusión intuitiva, informal. Para esta discusión, identificaremos orientación nun punto da superficie con sentido de xiro sobre unha pequena circunferencia debuxada na superficie, arredor do punto.

Imos traballar sobre a Faixa de Möbius, que a pensamos como cociente do rectángulo da figura:



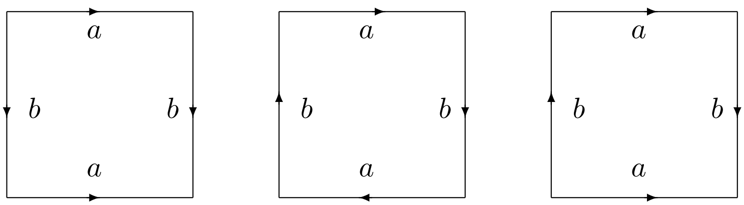
Fixada unha orientación no punto central e desprazándoa ao longo da circunferencia (liña vermella), ao volver ao mesmo punto a orientación inverteuse. Isto lévanos a concluír que a Faixa de Möbius é non orientábel. Esta idea pódese usar como definición: unha superficie sería orientábel se desprazando unha orientación ao longo dun camiño pechado, esta non muda. Pero nós imos dar aínda outra definición, que será máis cómoda, e abonda para as nosas necesidades.

2.2.1 Definición.- Diremos que unha superficie é orientábel se non contén ningún subespazo homeomorfo a unha Faixa de Möbius. Noutro caso diremos que é non orientábel.

É doado comprobar que o Plano Proxectivo e a Garrafa de Klein son superficies non orientábeis. A Esfera e o Toro, por contra, son superficies orientábeis. Pero isto non o poderemos concluír cabalmente ata ter demostrado o Teorema de Clasificación.

2.3. Símbolo da presentación dunha superficie

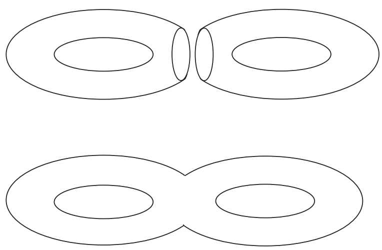
Como temos visto, toda superficie compacta pódese presentar como cociente dun polígono, coas arestas identificadas dúas a dúas. A cada unha destas presentacións asociaremos un *símbolo (symbol)*. Para iso, etiquetamos cada aresta cunha letra. Etiquetada unha aresta, por exemplo coa letra a, a aresta coa que se identifica denotarémola por a ou por a^{-1}: fixado un sentido de lectura do polígono, se o primeiro vértice que encontramos da aresta a se identifica ao primeiro que encontramos da súa parella, etiquetarémola como a. En caso contrario, como a^{-1}. Para indicar como se identifican as arestas, non se marcan puntos a identificar, como viñamos facendo; indícase unicamente o sentido da identificación, mediante unha frecha. A superficie resultante non depende do homeomorfismo, soamente do sentido, da imaxe dos extremos (podería un extremo do segmento ter como imaxe un punto do interior do segmento?). A continuación poñemos como exemplos representacións do Toro, o Plano Proxectivo e a Garrafa de Klein. As representacións, certamente, non son únicas, como teremos ocasión de comprobar. Aínda menos o símbolo. Neste caso, para escribir os símbolos, empezamos a ler o polígono polo vértice superior da esquerda.

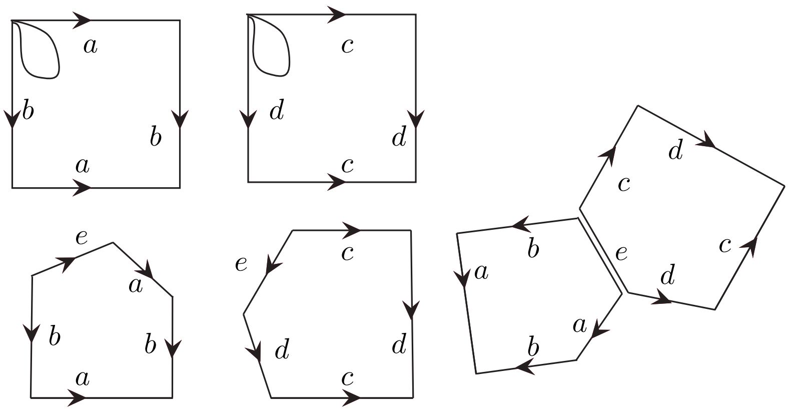


$aba^{-1}b^{-1}$ $\qquad$ $abab$ $\qquad$ $aba^{-1}b$

Non resulta difícil comprobar que un símbolo da suma conexa de dúas superficies pódese formar unindo os símbolos das dúas superficies. Ímolo ver nun exemplo.

2.3.1 O DOBRE TORO.- O dobre toro, como se indica na figura, é a suma conexa de dous toros. Imos partir da presentación de dous toros, con símbolos $aba^{-1}b^{-1}$ e $cdc^{-1}d^{-1}$, e imos chegar ao símbolo $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ para o dobre toro. Quitamos un disco aberto na rexión poligonal de cada toro; as modificamos para obter novas rexións poligonais, agora con cinco arestas (a nova corresponde á fronteira do disco). Finalmente pegamos as dúas rexións por esta aresta impar. O proceso indícase na figura abaixo.





2.3.2 OBSERVACIÓN.- Se no símbolo dunha superficie hai dúas arestas co mesmo expoñente, digamos $\ldots a \ldots a \ldots$, daquela a superficie é non orientábel. En efecto, unindo os extremos destas arestas fórmase unha faixa de Möbius. Reciprocamente, se a superficie contén unha faixa de Möbius, pódese construír unha triangulación comezando por unha da faixa de Möbius, que conteña duas arestas co mesmo expoñente.

2.4. Redución do símbolo a unha forma canónica

O Teorema de Clasificación vai dicir que toda superficie compacta é homeomorfa ou a unha esfera, ou a unha suma conexa de toros, ou a unha suma conexa de planos proxectivos. A esfera admite como símbolo aa^{-1}. A suma conexa de n toros admite como símbolo $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$. A suma conexa de n planos proxectivos admite como símbolo $c_1c_1\ldots c_nc_n$. Trátase de ver que todo símbolo se pode reducir a un destes. Iso é o que faremos agora.

2.4.1 OBSERVACIÓN Tamén é común utilizar outra linguaxe: denomínase *asa (handle)* a un toro menos o interior dun disco pechado; a suma conexa de

n toros é tamén unha esfera con n asas. Analogamente, un *bonete cruzado (cross-cap)* é un plano proxectivo menos o interior dun disco pechado; a suma conexa de n planos proxectivos é tamén unha esfera con n bonetes cruzados.

O proceso de redución de calquera símbolo a un destes está descrito na maioría dos textos sobre superficies, por exemplo, en [**?**]. Trátase de realizar unha cadea de modificacións da rexión plana que non alteran a clase de homeomorfía do cociente. Ou sexa, que todas definen superficies homeomorfas. Tal como nós o faremos, está dispoñíbel no curso virtual nunha presentación cos principais argumentos. Pódese acceder a esta presentación tamén na seguinte páxina web:

http://www.slideshare.net/XosMMasaVzquez/superf-nova

Agora quedará por demostrar que dous símbolos diferentes representan superficies non homeomorfas. Isto precisará novas ideas, novas técnicas. Nós utilizaremos a homotopía e o Grupo Fundamental, polo que teremos que agardar ata o Tema 10 para rematar a demostración.

No proceso de redución, se o símbolo ten arestas cos mesmos expoñentes, reducirase a unha suma conexa de planos proxectivos. Noutro caso, á esfera ou a unha suma conexa de toros. De acordo coa Observación 2.**??**, a esfera e a suma conexa de toros serán as superficies orientábeis, a suma conexa de espazos proxectivos, as non orientábeis.

Temos demostrado, pois, o seguinte

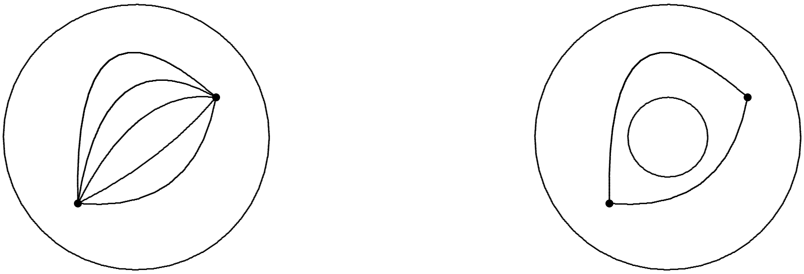
2.4.2 TEOREMA .- Toda superficie compacta é homeomorfa a unha esfera, ou a unha suma conexa de toros ou a unha suma conexa de planos proxectivos.

Para completar o Teorema de Clasificación, resta por demostrar que estas superficies non son homeomorfas entre si, o que faremos no último tema.

3. O Grupo Fundamental das superficies compactas

Henri Poincaré (1854-1912) De intelixencia portentosa, fixo grandes aportacións en teoría de funcións, ecuacións diferenciais, xeometría hiperbólica, física relativista, filosofía da ciencia,... A descuberta do grupo de transformacións da xeometría non euclidiana, co papel que xogan na presentación das superficies como cocientes métricos de rexións planas, e os seus estudos de topoloxía combinatoria conducíronno á construcción do *grupo fundamental*.

Que propiedade topolóxica dun espazo reflicte a diferencia entre, por exemplo, un disco e unha coroa no plano euclidiano? Noutras palabras, como detectar a presenza dun burato sen facer uso de ningunha ferramenta non topolóxica, como distancia ou ángulo?

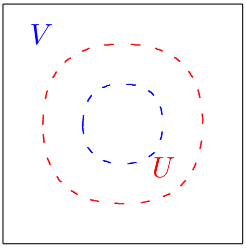


Xustamente a razón de introducir neste curso a homotopía é a necesidade de distinguir entre superficies non homeomorfas, como a esfera e o toro. Non faremos unha teoría xeral de homotopía, limitarémonos, esencialmente, á consideración de homotopía de camiños. No caso dos exemplos citados, dous camiños cos mesmos extremos no disco pódense deformar un no outro con continuidade; na linguaxe que imos introducir, son homótopos. Isto non acontece sempre na coroa.

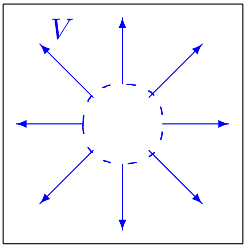
Esta idea sinxela vaise elaborar ata dar lugar á construcción dun grupo, o *Grupo de Poincaré* ou *Grupo Fundamental* do espazo, que será un invariante topolóxico. Calcularemos o Grupo de Poincaré de cada superficie modelo, comprobando que son todos diferentes. Concluiremos que cada modelo corresponde a unha clase de homeomorfía distinta.

3.1. Cálculo do Grupo Fundamental dunha superficie

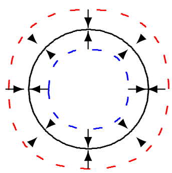
Partimos dunha superficie S, cociente dunha rexión poligonal plana cun número par de arestas, digamos, $2k$. Supoñemos a rexión poligonal $\mathcal{P}$ en forma canónica, de xeito que todos os vértices corresponden a un mesmo punto da superficie. Sexa $q\colon \mathcal{P} \to S$ a aplicación cociente. Escollemos subconxuntos abertos U e V da superficie nas hipóteses do Teorema de Van Kampen como segue: tomamos abertos U' e V' na rexión plana, que sexan saturados a respecto da identificación, ou sexa, tales que $q^{-1}(q(U')) = U'$ e $q^{-1}(q(V')) = V'$; así, as súas imaxes na superficie serán tamén conxuntos abertos, e serán os U e V requiridos, $U = q(U')$, $V = q(V')$. Como U' tomamos un disco aberto cuxa fronteira non corte ao polígono $\mathrm{Fr}(\mathcal{P})$. Fixamos agora un disco pechado dentro de U' e como V' tomamos o seu complementar. Cómpre observar que a aplicación cociente q restrinxida ao interior da rexión poligonal $\mathcal{P}$ é un homeomorfismo sobre a súa imaxe.



Os abertos U e V



A retracción r_V


A retracción $r_{U\cap V}$

O aberto U é contráctil, logo $\pi_1(U)$ é trivial. $U \cap V$ ten o tipo de homotopía de $\mathbb{S}^1$, que é un rectracto por deformación; logo $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$.

Vexamos que o aberto V ten o tipo de homotopía da rosa de k-pétalos, que é un retracto por deformación. Sexa $r'\colon V' \to \mathrm{Fr}(\mathcal{P})$ a aplicación radial. É unha retracción por deformación. Sexa $H'\colon V' \times \mathbb{I} \to V'$ a deformación. H' pasa ao cociente,

$$\begin{array}{ccc} V' \times \mathbb{I} & \xrightarrow{H'} & V' \\ \big\downarrow{\scriptstyle q\times id_{\mathbb{I}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ V \times \mathbb{I} & \xrightarrow{H} & V \end{array}$$

Certamente, existe unha función H facendo o diagrama conmutativo. Para concluír que é continua, argumentamos que $q \times id_{\mathbb{I}}$ é unha identificación. Pódese comprobar traballando coas adherencias de V' e de V, pois H' se estende a $H'\colon \overline{V}' \times \mathbb{I} \to \overline{V}'$; daquela $q \times id_{\mathbb{I}}\colon \overline{V}' \times \mathbb{I} \to \overline{V} \times \mathbb{I}$ é identificación por ser sobrexectiva con dominio compacto e rango Hausdorff. Ou ben pódese utilizar un resultado máis xeral (vid. [**?**, Exercicio 29.11]). O cociente do polígono $\mathrm{Fr}(\mathcal{P})$ é $\mathcal{R}_k$, a rosa de k-pétalos. Concluímos, pois, que $\mathcal{R}_k$ é un retracto por deformación de V, e, logo, $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \overset{k}{\ldots} * \mathbb{Z}$.

Para aplicar o Teorema de Van Kampen temos que calcular o grupo N polo que se cocienta $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V x_0)$. Como $\pi_1(U)$ é trivial, só hai que considerar os elementos $[j_V(\sigma)]$, onde j_V é a inclusión de $U \cap V$ en V. Como, ademais, $\pi_1(U \cap V)$ é $\mathbb{Z}$, abonda considerar a imaxe dun xerador, $\pi_1(X)$ admitirá unha presentación con k xeradores e unha relación, a imaxe en $\pi_1(V)$ dun xerador de $\pi_1(U \cap V)$. Temos que calcular esa imaxe.

Fixamos un punto base $x_0 \in U \cap V$. Supoñemos que o punto x_0 ten como imaxe pola retracción o vértice. Un lazo σ en x_0, recorrendo unha circunferencia C en $U \cap V$ no sentido contrario ao das agullas do reloxo, define un xerador de $\pi_1(U \cap V)$. Temos que calcular a clase de $j_V \circ \sigma$ en $\pi_1(V)$.

Para calcular $\pi_1(j_V)$ usamos os isomorfismos que acabamos de construír, substituíndo j_V pola composición das tres aplicacións do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{j_V} & V \\ {\scriptstyle r_0}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle i} \\ C & \xrightarrow{q} & \mathcal{R}_k \end{array}$$

Tomando cada aresta con expoñente positivo no símbolo da rexión plana como dominio, o cociente define un lazo no pétalo correspondente, que tomamos como xerador do seu grupo fundamental. Denominando cos mesmos nomes arestas e lazos, a relación buscada ten a mesma forma que o símbolo. De forma concreta:

3.1.1 GRUPO FUNDAMENTAL DA SUMA CONEXA DE TOROS.- A rexión poligonal correspondente á suma conexa de n toros ten símbolo

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\,\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\,\ldots\,\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}\,.$$

Se denominamos α_i e β_i aos xeradores correspondentes, será

$$\boxed{\pi_1(\#_n T^2) = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n; \{\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\ldots\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}\})}$$

3.1.2 GRUPO FUNDAMENTAL DA SUMA CONEXA DE PLANOS PROXECTIVOS.- A rexión poligonal correspondente á suma conexa de n planos proxectivos ten símbolo

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_n^2\,.$$

Se denominamos α_i aos xeradores correspondentes, será

$$\boxed{\pi_1(\#_n P^2) \;=\; (\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n;\,\{\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_n^2\})}$$

3.2. Teorema de Clasificación das Superficies Compactas

Temos xa unha presentación do grupo fundamental de cada superficie. Pero non é fácil discernir se son isomorfos ou non. O que imos facer é abelianizalos, cocientalos polo respectivo subgrupo de conmutadores. Os cocientes son grupos abelianos finitamente xerados; dispomos dun Teorema de Clasificación para estes grupos, en función do rango e da parte de torsión. E comprobamos que son todos diferentes, o que permitirá concluír que as superficies consideradas son todas distintas. Imos denominar $H_1(X)$ ao abelianizado de $\pi_1(X)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} H_1(\#_n T^2) \;\cong\; \mathbb{Z} \oplus \overset{2n}{\smile\!\cdots}\; \oplus \mathbb{Z} \\[2em] H_1(\#_n P^2) \;\cong\; \mathbb{Z} \oplus \overset{n-1}{\smile\!\cdots}\; \oplus \mathbb{Z} \,\oplus\, \mathbb{Z}_2 \end{array}}$$

No caso da suma conexa de planos proxectivos, o abelianizar a presentación dada, obtense un grupo abeliano con n xeradores e a única relación

$$2\alpha_1 \,+\, 2\alpha_2 \,+ \cdots +\, 2\alpha_n\,.$$

Para recoñecer o grupo resultante facemos unha escolla apropiada do conxunto de xeradores, tomando os seguintes:

$$\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1},\, \alpha_1 \,+\, \alpha_2 \,+ \cdots +\, \alpha_n\,.$$

3.2.1 TEOREMA DE CLASIFICACIÓN.- *Toda superficie compacta é homeomorfa a unha esfera, ou a unha suma conexa de n toros, para algún $n \in \mathbb{N}$, ou a unha suma conexa de n planos proxectivos para para algún $n \in \mathbb{N}$. Ademais, estas superficies corresponden todas a tipos de homeomorfía diferentes.*

3.3. Outra definición da Característica de Euler

A notación empregada para o abelianizado do grupo fundamental non é casual. Para calquera espazo topolóxico conexo por camiños, X, o abelianizado de $\pi_1(X)$ é $H_1(X)$, o seu primeiro *grupo de homoloxía (first homology group)*. En xeral, para calquera espazo X, defínense os seus grupos de homoloxía, $H_n(X), n \geq 0$, grupos abelianos que son invariantes topolóxicos do espazo. $H_0(X)$, por exemplo, é o grupo abeliano libre con tantos xeradores como compoñentes conexas por camiños teña o espazo. No caso de ser finito, o rango de $H_n(X)$ denomínase *n-ésimo número de Betti* de X, que se denota β_n,

$$\beta_n \,=\, \text{rango}\; H_n(X)\,.$$

Para unha variedade topolóxica compacta, M, de dimensión n, estos números son finitos. Ademais, $H_i(M) \,=\, 0$ se $i \,>\, n$. Así, ten sentido a seguinte definición de característica de Euler de M:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i \,.$$

Para unha superficie compacta S, verifícase

$$H_2(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } S \text{ é orientábel} \\ 0 & \text{se } S \text{ é non orientábel}\,, \end{cases}$$

recuperando un resultado que xa obtiveramos calculando a característica de Euler dunha suma conexa:

Superficie	Característica de Euler
Esfera	2
Suma conexa de n toros	$2-2n$
Suma conexa de n planos proxectivos	$2-n$

Poderiamos agora dar un novo enunciado do Teorema de Clasificación:

3.3.1 TEOREMA.- Dúas superficies compactas, S_1 e S_2, son homeomorfas se, e só se, as súas características de Euler son iguais e ámbalas dúas son orientábeis ou ámbalas dúas son non orientábeis.

3.4. O xénero dunha superficie

Citaremos agora, pola súa relevancia histórica e polo uso que del se fai noutros ámbitos, un invariante clásico das superficies, o seu *xénero (genus)*. Foi introducido por Riemann no estudo das funcións alxébricas e as súas integrais (funcións alxébricas ou curvas alxébricas, que son superficies; xa fora considerado nalgunha medida por Abel, ao describir a parametrización destas curvas; o nome foi usado por primeira vez por Clebsch, outro matemático do XIX).

Neste contexto clásico, o xénero aparece como o número máximo de curvas pechadas simples que, sen intersecarse, se poden tracexar sobre unha superficie sen desconectala. O xénero da esfera é 0, o xénero dunha suma conexa de n toros é n, o xénero dunha suma conexa de n planos proxectivos é n. Así, a relación entre xénero e característica de Euler é:

$$\begin{cases} g(S) = \frac{1}{2}(2-\chi(S)) & \text{se } S \text{ é orientábel} \\ g(S) = 2-\chi(S) & \text{se } S \text{ é non orientábel} \end{cases}$$

Tamén é común utilizar outra linguaxe: denomínase *asa (handle)* a un toro menos o interior dun disco pechado; a suma conexa de n toros é tamén unha esfera con n asas. Analogamente, un *bonete cruzado (cross-cap)* é un plano proxectivo menos o interior dun disco pechado; a suma conexa de n planos proxectivos é tamén unha esfera con n bonetes cruzados. Así, o xénero é o número de asas ou o número de bonetes cruzados, segundo o caso.

ANEXO I: EXPOSICIÓNS PARA FACEREN AS E OS ESTUDANTES

A. A característica de Euler dunha superficie

Tomade un poliedro calquera; un tetraedro, un cubo, un octaedro,... Sumade o número das súas caras e dos seus vértices e restade o número de arestas. O resultado é 2. Se engadides novas arestas, para que todas as caras sexan triángulos, o resultado non varía. Se proxectades estas figuras desde o centro sobre unha esfera, obtedes unha triangulación da esfera. Se agora colledes calquera triangulación da esfera e facedes o mesmo cálculo, sempre obteredes 2 como resultado.

Podemos facer un cálculo análogo para triangulacións doutras superficies. Podes probar co toro e co plano proxectivo. Para cada superficie imos obter sempre o mesmo número, con independencia da triangulación considerada.

Ese número é un invariante topolóxico da superficie, denominado *característica de Euler (Euler characteristic)*. Denótase $\chi(S)$.

Pódense facer argumentos de tipo combinatorio para concluír a independenza deste número a respeito da triangulación. Pero son argumentos longos, que se alonxan dos métodos e obxectivos do curso. Ademais, pódese definir a característica de Euler para espazos topolóxicos moito máis xerais, nos que estas técnicas non se aplican, e si outras, que usan *teoría de homoloxía*, como se pode estudar na materia *Topoloxía Alxébrica*, do 4^0 curso do Grao. Do que faremos hoxe e do Teorema de Clasificación poderemos concluír que a característica de Euler non depende da triangulación.

A.1 Característica de Euler da suma conexa de dúas superficies

$$\boxed{\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2}$$

A.2 Calculade a característica de Euler $\chi(\#_n \mathcal{T}^2)$ da suma conexa de n toros, e a característica de Euler $\chi(\#_n \mathcal{P}^2)$ da suma conexa de n planos proxectivos.

Outro invariante clásico das superficies é o que se denomina *xénero (genus)*. Por definición, o xénero da esfera é 0; o xénero da suma conexa de n toros é n; o da suma conexa de n planos proxectivos, n, tamén. O Teorema de Clasificación di que calquera superficie compacta é homeomorfa a unha destas.

A.3 CÁLCULO DE $\chi(S)$ A PARTIR DO SÍMBOLO DUNHA PRESENTACIÓN PLANA.- Obtense $\chi(S)$ considerando a presentación como unha soia cara, o polígono, e os vértices e arestas que resulten de facer as identificacións. Para comprobalo, pártese dunha triangulación, suprímese un vértice interior e todas as arestas que o conteñen, e a suma de caras máis vértices menos arestas non se altera, considerando o novo polígono que aparece, que non será un triángulo, como cara.

A.4 Utilizando o método anterior, recoñecede as seguintes superficies:

$$a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n\,; \quad a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}\,.$$

B. Revestimento de orientación dunha superficie

A toda superficie non orientábel pódese asociar unha superficie orientábel: de cada pequeno aberto da superficie dada se toman dúas copias, unha cunha orientación, outra coa contraria, para formar a nova superficie. Se S é a superficie non orientábel, para construír a orientábel asociada pártese do conxunto $\widetilde{S} = S \times \{\pm 1\}$, coa proxección obvia sobre S. E dótase da topoloxía que ten como base os subconxuntos U de $\widetilde{S}$ tales que $p(U)$ sexa aberto en S e orientábel. Nós ímonos contentar cunha descrición máis sinxela. En todo caso, a noción que está en xogo é a de revestimento:

B.1 DEFINICIÓN.- Unha función continua $p\colon E \to X$ denomínase *proxección de revestimento (covering projection)* se para todo punto x de X existe unha veciñanza aberta U tal que

1. $p^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} U_{\tilde{x}}$, onde $U_{\tilde{x}}$ son subconxuntos abertos disxuntos, e
2. para cada $U_{\tilde{x}}$, $p\,|_{U_{\tilde{x}}} : U_{\tilde{x}} \to U$ é un homeomorfismo.

Os abertos de X con esta propiedade denomínanse abertos *lisos (evenly covered)*. Cada aberto $U_{\tilde{x}}$ é unha *lámina (sheet)*. O dominio dunha proxección de revestimento é un *espazo de revestimento* ou *revestimento (covering space, cover)* de X, que é o *espazo base (base space)*.

B.2 EXEMPLOS.- A aplicación exponencial, $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, a aplicación cociente da esfera sobre o plano proxectivo, $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$, a k-ésima potencia $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, son proxeccións de revestimento. O produto cartesiano dun número finito de proxeccións de revestimento é unha proxección de revestimento.

B.3 Toda proxección de revestimento é unha aplicación aberta e sobrexectiva.

B.4 Se E é conexo, todas as fibras $p^{-1}(x)$ de $p\colon E \to X$ teñen a mesma cardinalidade.

B.5 A fibra $p^{-1}(x)$ dunha proxección de revestimento $p\colon E \to X$ é un subespazo discreto do espazo E.

Así, se E é compacto, o cardinal da fibra é finito. Cando este cardinal é k, dise que se trata dun *revestimento de k láminas (k-fold cover)*.

B.6 Sexa E conexo e segundo enumerábel. Se $p\colon E \to S$ é unha proxección de revestimento e S é unha superficie, E é tamén unha superficie.

B.7 Sexan $\widetilde{S}$ e S superficies compactas, $p\colon \widetilde{S} \to S$ unha proxección de revestimento de k láminas. Daquela

$$\chi(\widetilde{S}) = k\chi(S)\,.$$

(Indicación: usar unha triangulación de S con triángulos contidos en abertos lisos. Construír a partir dela unha triangulación de $\widetilde{S}$)

B.8 CONSTRUCIÓN DO REVESTIMENTO DE ORIENTACIÓN.- A clase de homeomorfía dunha superficie non orientábel vén determinada pola súa característica de Euler, que será un número enteiro necesariamente menor ou igual que 1. Se S é non orientábel, é a suma conexa de $2 - \chi(S)$ planos proxectivos.

No exercicio 8.**??** (seminario do 12 de abril), vimos que a suma conexa de $n+1$ planos proxectivos admite unha presentación poligonal de símbolo

$$a_1 a_2 \ldots a_n c\, a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1} c$$

Imos considerar outra copia desta superficie; escribiremos o seu símbolo como

$$b_n b_{n-1} \ldots b_1 c\, b_n^{-1} b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1} c$$

Agora construímos unha nova superficie a partir destas dúas copias; formamos unha nova rexión poligonal pegando unha aresta c de cada copia.

Trátase de identificar a nova superficie, $\widetilde{S}$, comprobar que é orientábel, definir unha función $p\colon \widetilde{S} \to S$ e verificar que é unha proxección de revestimento.

B.9 Definide explicitamente o revestimento de orientación da Garrafa de Klein

ANEXO II: EXERCICIOS

C.1 Comprobade que o cociente do disco coa identificación que se indica na Figura 1 é homeomorfo á esfera.

C.2 Comprobade que o cociente do disco coa identificación que se indica na Figura 2 é homeomorfo ao plano proxectivo.

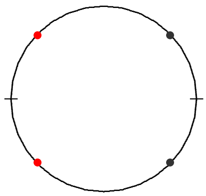


Figura 1

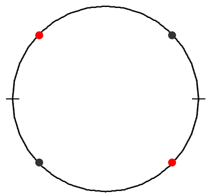


Figura 2

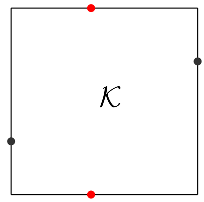


Figura 3

C.3 Expresade analiticamente a relación de equivalencia que se indica en $\mathbb{I}^2$, na Figura 3, e demostrade que o cociente é unha superficie. Denomínase *Garrafa de Klein (Klein Bottle)*

C.4 Demostrade que todo espazo compacto e localmente euclidiano é segundo enumerábel (Indicación: pódese expresar como unión finita de subconxuntos abertos homeomorfos ao espazo euclidiano).

C.5 Constrúe unha función continua e sobrexectiva da faixa de Möbius sobre a circunferencia $\mathbb{S}^1$.

C.6 Constrúe un mergullo do toro $\mathcal{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$.

C.7 Partindo da función $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

constrúe un mergullo de P^2 en $\mathbb{R}^4$.

C.8 Sexa K un subconxunto compacto, convexo e con interior non baleiro do plano euclidiano. Demostrade que existe un homeomorfismo $\phi\colon D^2 \to K$ entre o disco unitario pechado e K, que leva $\mathbb{S}^1$ na fronteira $\mathrm{Fr}(K)$ de K. (Podedes supor, sen perda de xeneralidade, $D^2 \subset K$)

C.9 Buscade un argumento formal para xustificar que unha triangulación dunha superficie compacta non pode ter unha infinidade de triángulos.

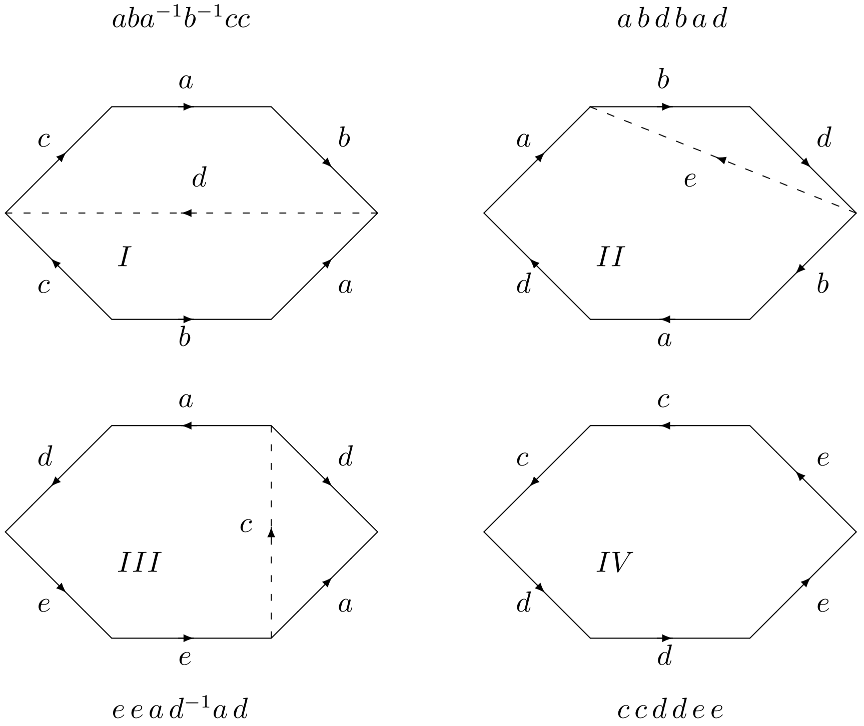
C.10 Considera as rexións planas con símbolos

$$a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,c\,d^{-1}\;, \quad a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,d^{-1}\,c^{-1}\,.$$

Cantos vértices distintos teñen?

C.11 Demostrade o homeomorfismo $\mathcal{K} \approx P^2 \# P^2$.

C.12 Demostrade o homeomorfismo $T^2 \# P^2 \approx P^2 \# P^2 \# P^2$.
Esquema:



C.13 Sexa U o interior dun disco pechado en P^2. Discutide o homeomorfismo $P^2 - U \approx \mathcal{M}$.

C.14 Dados dous espazos con punto base, (X, x_0) e (Y, y_0), denomínase *wedge* ou *unión por un punto*, e se denota $X \vee Y$, ao cociente da unión disxunta de X e Y resultante de identificar x_0 e y_0,

$$X \vee Y \;=\; (X \sqcup Y)/x_0 \sim y_0\,.$$

Utilizando o Teorema de Van Kampen, calculade o grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$. (Observación: en xeral, o wedge depende da escolla dos puntos base; no caso das esferas, non)

C.15 Deducide do Teorema de Clasificación das supefrficies compactas con bordo que a clase de homeomorfía da suma conexa de dúas superficies non depende das escollas feitas.

Referencias

[1] ARMSTRONG, M. A., *Topología Básica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1987.

[2] CROSSLEY, M. D., *Essential Topology*. Springer-Verlag, London, 2005.

[3] GOODMAN, S. E., *Beginning Topology*. Undergraduat Texts, **10**, AMS, Providence, Rhode Island, 2009

[4] GRAMAIN, A., *Topologie des Surfaces*. Presses Universitaires de France, Paris, 1971

[5] GREENBERG, M. J. and J. R. HARPER, *Algebraic Topology: a first course*, Benjamin, Massachusetts, 1981.

[6] KATOK, A. and V. CLIMENHAGA, *Lectures on Surfaces: (almost) everything you wanted to know about them*. Student Math. Library, **46**, AMS, Providence, R.I., 2008

[7] KINSEY, L. C., *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993

[8] LEE, J. M., *Introduction to topological manifolds* Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000

[9] MCCLEARY, J., *A First Course in Topology. Continuity and Dimension.* Student Math. Library, **31**, AMS, Providence, R. I., 2006.

[10] MASA VÁZQUEZ, X.M., *Topoloxía xeral. Introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*. Manuais universitarios, 1. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.

[11] MASSEY, W. S., *Introducción a la Topología Algebraica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1972.

[12] MESSER, R. and P. STRAFFIN, *Topology Now*! The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2006.

[13] MUNKRES, J. R., *Topología*, Prentice Hall, Madrid, 2002

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

9 788498 879612