SEMANTICA DE LAS TABLAS MATEMATICAS: LAS TABLAS DE LOGARITMOS COMO EJEMPLO*

Javier Echeverría

1. Introducción

Las tablas son ampliamente usadas por los científicos. Baste recordar las tablas de datos y de observaciones, así como las diversas tablas numéricas que los matemáticos, físicos, economistas e ingenieros han elaborado y utilizado a lo largo de la historia. Los filósofos de la ciencia han prestado escasa atención a estos instrumentos científicos, a pesar de que sus funciones mnemónicas, computacionales y heurísticas han sido extremadamente importantes. Desde una perspectiva fundamentista como la que predominó durante décadas en la filosofía contemporánea de la ciencia, parecería que las tablas científicas eran simples representaciones de colecciones de hechos, y por lo tanto un instrumento auxiliar para ilustrar los conceptos científicos o para poder operar con ellos. La complejidad teórica y metodológica inherente a las construcciones auxiliares de los geómetras griegos debería de haber suscitado alguna duda sobre la escasa relevancia atribuida a los instrumentos auxiliares en la investigación científica. No ha sido así, a pesar del importante papel que las tablas han desempeñado en le progreso de la ciencia.

Para ilustrar esta última afirmación mencionaré un ejemplo: la tabla periódica de los elementos químicos propuesta por Mendeleiev. Es sabido que, a partir de la revolución suscitada por el *Traité de Chimie* de Lavoisier, se desarrolló un nuevo lenguaje científico, que todavía está en uso: *ácido sulfuroso, ácido sulfúrico, clorato sódico, cloruro nítrico*, etc. Se trataba de un sistema de denominaciones para las combinaciones de los elementos. Esta nueva generalización simbólica, o paradigma, por decirlo al modo de Kuhn, se difundió rápidamente y todavía hoy sigue impregnando el lenguaje de la

---

* Trabajo realizado en el marco de un Proyecto de Investigación de la Universidad del País Vasco (1991) sobre «La emergencia de la teoría de logaritmos en el siglo XVII» y otro ulterior (1993-96) de la Dirección General de Política Científica del Ministerio de Educación y Ciencia sobre «Aspectos pragmáticos de las teorías científicas: construcción de representaciones científicas». Este texto retoma una ponencia leída en Santiago de Compostela durante el Simposio sobre «Semántica de los lenguajes científicos» (mayo 1994). Agradezco a José Antonio Díez Calzada y a José Luis Falguera sus comentarios críticos tras la lectura de la ponencia, que me han llevado a modificar algún punto de mi texto original.

AGORA 13/2 (1994): 93-109
© Universidade de Santiago de Compostela

química, de la farmacología y de otras muchas ciencias. Podríamos decir que Lavoiser y sus seguidores inventaron un sistema de signos lingüísticos por medio del cual, además de nombrar las diversas sustancias químicas, se expresaban en los nombres mismos una serie de relaciones químicas fundamentales. Se trataba de una *Característica química*, en el sentido leibniciano del término. Para ello se recurría a reglas sintácticas y a un sistema de símbolos químicos paralelo. Además de las combinaciones, también algunos elementos quedaban sistematizados, al denominarlos *oxígeno, hidrógeno o nitrógeno, por ejemplo. Pero la sistematización de los elementos dejaba* mucho que desear: no era más que un *desiderata*, que cumplió una importante función heurística. Aparte del problema de los términos teóricos y de sus referentes, que tanto ha ocupado a los tratamientos semánticos de las teoría científicas, se apuntaba así una cuestión adicional: la importancia de los nombres de los conceptos, y sobre todo del sistema en que dichas denominaciones se articulan.

La tabla de Mendeliev, como luego la teoría atómica de los elementos químicos, supuso un paso importante en la sistematización de dichos nombres, y por consiguiente de los conceptos químicos fundamentales. Dicha tabla añadió a la teoría nuevas virtualidades. Por mencionar la más importante: la ordenación de los elementos químicos en tabla (en lugar de en lista), y sobre todo en tabla periódica, introdujo unas posibilidades de intelección del sistema químico, y en particular de *predicción*, que no hubieran surgido sin este recurso al formato o representación tabloide. Resumiendo mucho, cabe decir que en la tabla Mendeleiev se sintetizaba todo un *programa de investigación* heurísticamente progresivo, que en las décadas ulteriores se fue desarrollando casilla a casilla y dio lugar al descubrimiento o la síntesis artificial de numerosos elementos que la naturaleza no ofrecía *prima facie* a nuestros sentidos. Baste con recordar el descubrimiento de la radioactividad, o más recientemente la física de nuevos materiales, aunque ésta se aleje ya considerablemente de la tabla que estamos comentando.

Para iniciar este primer análisis filosófico de las tablas científicas, haré una breve mención a Frege. El propuso la noción de función no saturada[1], que luego resultó esencial, no sólo para la ontología y para la semántica fegeana, sino para el propio desarrollo de la teoría de modelos, y por ende de la concepción semántica de la verdad. Pues bien, en términos de la concepción estructural podríamos decir que la tentativa de saturar, casilla a casilla, una tabla como la de Mendeleiev ha caracterizado a toda una *red teórica* de la química moderna y contemporánea. Cada casilla de la tabla era una nueva *aplicación propuesta*.

La tabla de Mendeleiev, sobre todo a partir de su reinterpretación en base a la teoría atómica, ofrecía una tipología cualitativa para los modelos potenciales de todas y cada una de sus casillas. Luego había que producir en los

[1] G. Frege, *Funktion und Begriff* (1891), en *Funktion, Begriff, Bedeutung,*, Göttinge, Vandenhoek & Ruprecht, 1975, pp. 18-39.

laboratorios o descubrir en la naturaleza las sustancias químicas elementales que satisficieran las condiciones impuestas por cada una de las casillas de la tabla. A su vez, la propia estructura sintáctica de la tabla de elementos, conjuntamente con la estructura sintáctica del sistema de nomenclatura de las combinaciones químicas, imponían restricciones a las combinaciones posibles de elementos, o si se prefiere a los modelos potenciales. Saturar la tabla de Mendeleiev era, y ha sido, una empresa de extraordinario interés teórico para la química y para la ciencia en general. Y no hay que olvidar que la simplicidad de la tabla le concedía unas cualidades pedagógicas excelentes en el *contexto de educación*, demasiado poco estudiado por los filósofos de la ciencia[2]. En resumen, la tabla de Mendeleiev ha supuesto un instrumento científico de primer orden en buena medida porque supuso la introducción de un principio de formalización en Química, y por consiguiente la emergencia de un primer sistema de signos no estrictamente lingüístico.

Otro tanto sucede con numerosas tabla científicas. El interés de estos *instrumentos teóricos* radica principalmente en el hecho de que una tabla incorpora y expresa exigencias teóricas *por su propia forma*, que es más compleja que la de una simple hilera de signos o de conceptos. La potencialidad algorítmica y combinatoria de las tablas tampoco puede ser desdeñada: baste recordar las tablas de verdad que se utilizan en lo cálculos lógico-semánticos, o en las ulteriores lógicas borrosas. O por poner un ejemplo todavía más elemental: tablas tan sencillas (y tan fundamentales) como las tablas de sumar y de multiplicar funcionan como referente sígnico último para comprobar la validez y la exactitud de los cálculos aritméticos. Numerosas funciones matemáticas han estado representadas, a efectos computacionales y operatorios, por medio de tablas: así la función β o la función γ o la función de ζ Riemann, que forman parte del núcleo de diversas teorías matemáticas. La relación entre las tablas y las funciones matemáticas, consideradas desde un punto de vista semántico, resulta mucho más compleja que lo que una pretendida reducción de las tablas a funciones (o a funtores lógicos) nos podría hacer pensar.

En el presente artículo me ocuparé exclusivamente de las tablas matemáticas, por estar a la base de la construcción de las demás tablas científicas. Pero desde ahora llamo la atención sobre la posibilidad de ampliar y de mejorar este tipo de estudios tomando como punto de partida otras tablas científicas.

Una última observación, antes de terminar esta introducción. Este trabajo se inscribe en una línea de investigación que se remonta a 1987, cuando tratábamos de confrontar las teorías matemáticas y el programa estructural en filosofía de la ciencia[3]. Al respecto, el libro de Balzer, Moulines y Sneed dejaba claro desde el principio que, en su arquitectónica, el conocimiento

---

[2] Ver J. Echeverría, «Crítica a la distinción entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación: una propuesta alternativa» (Río Bravo, Argentina, 1993), por aparecer en la *Revista Latinoamericana de Filosofía*, así como «The Four Contexts of Scientific Activity» (Varsovia, 1994), por aparecer en los *Ponznan Studies*.

[3] El equipo de investigación que trabajó de 1987 a 1990 estuvo formado por Mary Sol de

matemático quedaba «out of consideration»[4]. A pesar de ello, dicha obra proponía, a título meramente tentativo, un criterio de delimitación (si no de demarcación) entre la matemática pura y la matemática empírica:

> «If we were interested in establishing a citerion for drawing a sharp boundary between pure mathematics and empircal science we should use this idea: the first discipline would consist of theories not putting any (semantic) constraint on the content of the base sets of their models; empirical science consist of theories which do put such constraints –which differenciate between 'plausible' and 'implausible' potential models on some pre-theoretic grounds»[5].

Esta primera investigación sobre las tablas matemáticas trata de indagar si esta propuesta es aceptable o no. Trataré de mostrar que las tablas matemáticas sí constriñen los modelos potenciales posibles para una teoría matemática, sin perjuicio de que haya que explicitar qué tipo de modelos usa una teoría matemática, así como afrontar el importante problema de si existen o no términos T-teóricos en las teoría matemáticas.

Para ello se parte de una primera constatación: una tabla bidimensional, por ejemplo, posee una forma que desde el punto de vista operacional y heurístico (que involucra a las aplicaciones propuestas de una teoría), no es reducible a la representación unilineal de los datos contenidos en dicha tabla como pura concatenación de hileras o ristras de signos. Prueben ustedes a representar las tablas lógico-semánticas de verdad (para 2 ó 3 argumentos) en forma de hilera de signos, y no como tabla bi- o tri-dimensional; verán que las tablas, así representadas, pierden su potencia algorítmica y buena parte de su valor heurístico.

Los modelos potenciales que pueden saturar y satisfacer una tabla no son cualesquiera: ha de tener una tipología equivalente a lo que expresa la tabla con su forma bidimensional. Habrá pues modelos plausibles y modelos implausibles a partir del momento en que se haya encontrado un modelo que satisface (y satura) la tabla. Este es el poder algorítmico y heurístico de la combinatoria, de la que las tablas son un caso particular. Piénsese en las tablas puramente combinatorias de un grupo finito, o de un dominio de integridad, con y sin divisores de cero, por atenernos a ejemplos muy sencillos de representaciones matemáticas tabloides. La organización de datos (científicos o matemáticos) en forma de tabla no es irrelevante desde el punto de vista de la determinación de modelos posibles para la teoría que así se representa.

Enlazamos así con otro tema fundamental para la filosofía de la ciencia: el de las diversas representaciones científicas y sus interrelacions, que conecta

---

Mora, Andoni Ibarra y Yosu Yurramendi, incorporándose ulteriormente Amparo Díez. Tras un simposio celebrado en San Sebastián en septiembre de 1990, surgieron las publicaciones siguientes: *Structrures of Mathematical Theories*(ed. A. Díez, J. Echeverría, y A. Ibarra), Lejona, Universidad del País Vasco, 1990; y *The Space of Mathematics* (eds. J. Echeverría, A. Ibarra y T. Mormann), Berlín, De Gruyter, 1992.

4 *An Architectonic for Science*, Dordrecht, Reidel, 1987, p. XVI.

5 *Ibid.*, p. 22.

con el problema quieneano clásico de la traducción. Las tablas matemáticas tienen la ventaja de su claridad y simplicidad, aparte de no depender de los lenguajes naturales sino accesoriamente. Por eso constituyen un excelente objeto de reflexión para la filosofía de la ciencia.

2. Las tablas de logaritmos y su emergencia

Entre las diversas tablas matemáticas que podríamos elegir para los objetivos antes enunciados, las tablas de logaritmos presentan varias ventajas: han sido ampliamente usadas, todavía mantienen alguna vigencia y, lo que es más importante para el objetivo de este trabajo, su historia ha sido detalladamente estudiada por diversos autores[6]. Expondremos brevemente algunos momentos importantes de la historia de la teoría de logaritmos antes de pasar a estudiar filosóficamente las tableas de Napier, Briggs y otros muchos autores que consagraron sus esfuerzos a la elaboración de estos instrumentos matemáticos.

Las tablas de logaritmos ha sido presentadas tradicionalmente en dos grandes bloques: los logaritmos de los números naturales y los logaritmos de las funciones trignométricas (seno, coseno, etc)[7]. Es sabido que los logaritmos fueron descubiertos (¿o inventados?) por John Napier en 1614, cuando publicó su tratado Mirifici logarithmorum canonis descriptio. El propio Napier en un libro póstumo (1619), Speidell (1619), Briggs (1617 y 1624), Kepler (1624), Halley (1695) y otros muchos fueron mejorando las tablas y desarrollando la teoría a lo largo del siglo XVII: aparecieron los logaritmos naturales, los hiperbólicos y los imaginarios, se fijó la noción de base, se precisaron las técnicas de interpolación, se definió la curva logarítmica y se acuñó la noción de función logarítmica. Finalmente Euler reorganizó toda la teoría con técnicas basadas en el nuevo Cálculo Diferencial de Newton y de Leibniz, aportando las notaciones exponenciales. Cabe decir que a partir de este momento la teoría de logaritmos se inserta en una red teórica más amplia, el Análisis Matemático, motivo por el cual nos centraremos en el siglo XVII, sin comentar los desarrollos ulteriores de las tablas y de la teoría.

Los logaritmos fueron inventados para facilitar los cálculos astronómicos,

---

[6] Usaremos como referencias principales las obras de Ch. Naux, *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, Paris, Blanchard, 1971, 2 vols., así como la obra de H. H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, New York, Springer, 1978. Fuentes generales sobre las tablas matemáticas son la obra de Karl Schüte, *Index mathematischer Tafelwerke und Tabellen*, München, Oldenbourg, 1966, así como la revista editada por Lehmer, *Mathematical Tables and other Aids of Computation*, que actualmente se sigue publicando con el título *Mathematics of Computation*. Para la primera historia de la teoría de logaritmos la fuenta básica es la introducción de Hutton a las *Mathematical Tables* de Sherwin publicadas en 1785, London, Paternoster-Row.

[7] Ulteriormente han surgido otras representaciones operatorias para los logaritmos: la regla de cálculo, la calculadora electrónica, el ordenador, etc. Las tablas impresas tienen la ventaja de que en ellas se explicitan más claramente los presupuestos de la teoría.

en la medida en que éstos dependían de los cocientes entre senos, cosenos, tangetes, etc., los cuales era difíciles de computar con precisión. Al reducir las multiplicaciones y las divisiones de números con varios decimales a sumas y restas, las tablas de logaritmos fueron un auxiliar excelente para abreviar, facilitar y precisar los cálculos de los triángulos y figuras rectilíneas y curvilíneas. De hecho, el propio Napier presenta su obra. En el Prefacio de su primer *Canon* de 1614 puede leerse:

> «Puesto que nada es tan penoso como la práctica de las matemáticas, debido a que su logística se ve tanto más frenada y retardada conforme las multiplicaciones, las divisiones y las extracciones de raíces caudradas se refieren a grandes números; y puesto que está sometida al tedio de las largas operaciones, y todavía más, a la incertidumbre de los errores, he pretendido indagar qué tipo de procedimiento rápido y seguro nos permitirá evitar estos obstáculos»[8].

Los nuevos números, los logaritmos, surgen para permitir a los astrónomos, navegantes, agrimensores, etc., realizar sus cálculos con mayor rapidez, seguridad y exactitud, Se trata de:

> «...dejar de lado los números que se utilizan en las multiplicaciones, las divisiones y las extracciones de raíces, cuando éstas son prolijas, y reemplazarlos por otros números, que me he tomado el trabajo de adjuntar (en tablas), de manera que se lleven a cabo esos cálculos mediante adiciones, sutracciones y divisiones por dos y por tres, únicamente»[9].

Las tablas de logaritmos, por consiguiente, sirven en principio para *mejorar* las aplicaciones de teorías matemáticas ya consolidadas: la aritmética y la trigonometría. Sin embargo, van a dar lugar a un proceso de profundo cambio científico en matemáticas. Por ello conviene subrayar desde ahora que, desde el punto de vista filosófico, las tablas suponen la construcción de un *nuevo sistema de signos* aritméticos y geométricos (los logaritmos naturales y los trigonométricos) que reemplazó ventajosamente a dos sistemas previos (los guarismos aritméticos y las magnitudes geométricas) *salva veritate*; es decir, sin merma de capacidad para deducir computacionalmente consecuencias y verdades, pero de manera que esos cómputos sean más rápidos, más certeros y más seguros. Cada casilla de la tabla tiene como referente inicial a un número natural o a una magnitud geométrica; posteriormente podrá tener como referente a sistemas empíricos, conforme las tablas se apliquen a ámbitos concretos.

Desde esta intencionalidad inicial, explícita en la obra de Napier, cabe decir que la recepción que tuvo esta innovación matemática fue excelente, salvo aisladas excepciones. Kepler, por ejemplo, afirmó tajantemente en 1624: «No pienso que haya nada mejor que la teoría de Napier»[10]. De hecho, Kepler perfeccionó y aplicó rápidamente las tablas neperianas a cómputo de sus propias *Tablas Rudolfinas*. Los logaritmos tuvieron así una incidencia in-

---

[8] J. Napier, *o. c.*, p. I.
[9] *Ibid.*
[10] *Oeuvres Complètes*, t. XVIII, p. 210.

mediata en el debate entre el sistema ptolomeico y el copernicano. Pero el mérito principal de Lepler estriba en haber escrito un capítulo sobre la «demostración de la estructura de los logaritmos» en el que propone una teoría para fundamentar las tablas que difiere en parte de la propuesta por Napier. Mediante postulados, axiomas y 30 proposiciones, Kepler muestra que la teoría de logaritmos permite la *reducción científica* de la teoría griega de las proporciones entre magnitudes (medias, tercias, cuartas proporcionales), que era ampliamente utilizada para todo tipo de cómputos y medidas.

Podríamos decir que, frente al modelo geométrico vigente en la Trigonometría de aquella época, las tablas de logaritmos supusieron una aritmetización de dicha ciencia, y por consiguiente una aritmetización de la Geometría, al posibilitar un nuevo método de cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.

La teoría de logaritmos, concebida inicialmente como una ayuda para el cálculo, y por consiguiente como una herramienta para potenciar una actividad científica concreta, generó efectos muy amplios sobre buena parte del sistema de conocimiento científico, y en concreto sobre dos disciplinas claves: la Geometría y la Trigonometría. Este proceso de cambio científico se basó en una nueva manera de representar matemáticamente los sistemas empíricos, que puede ser ilustrada adecuadamente mediante el *problema del tonel*, estudiado por Chuquet.

En su manuscrito de Lyon titulado «Le Triparty en la science des nombres» (1484), analizado detalladamente por Naux, Chuquet formulaba explícitamente la propiedad fundamental de los logaritmos, que está a la base de las tablas neperianas. Al considerar una sucesión de números naturales en progresión geométrica, concluía que:

> «qui multiplie lung d'iceux par lung des autres, et qui de'ouste les deux ordres esquelz sont situés les deux nombres ml'tipliez, il trouve le lieu ou doit estre situé le nombre venu de la multiplication»[11],

es decir, que, en una progresión geométrica, supuesto que el rango de cada término viene definido por el número de orden de cada término de dicha sucesión, el producto del número de rango m por el número de rango n da el número de rango $m+ n$. Por consiguiente, Chuquet utilizaba la propiedad fundamental de los logaritmos para determinar el lugar o la posición de un número definido a partir del lugar (o posición) de dos números dados:

$r(m^* n)= r(m)+(n)$.

Partiendo de esta propiedad, Chuquet trataba de resolver el siguiente problema concreto: «si un tonel se vacía diariamente en 1/10 de su capacidad, ¿al cabo de cuánto tiempo se vaciará hasta la mitad?»[12].Chuquet estudiaba en primer lugar la solución que en su época se daba al problema propuesto, para luego criticarla y proponer una solución alternativa.

---

[11] Citado por Naux, *op. cit.*, p. 16.
[12] *Ibid.*

En aquella época solía calcularse que, al final de sexto día, el contenido había tenido que bajar hasta 0.531 de capacidad total, mientras que al final del séptimo día era el 0,477 del total. Admitiendo a continuación que la bajada de nivel tenía lugar a velocidad constante durante el séptimo día, se encontraba, mediante la regla de tres (es decir, mediante la teoría griega de proporciones), que el contenido del tonel era la mitad exacta pasados seis día y 31441/531441 de día.

Chuquet se mostró disconforme con esta solución y propuso una nueva, basada en una modelización (o representación) distinta del barril. El suponía que la velocidad de bajada del nivel de líquido disminuía «proporcionalmente» durante ese séptimo día, es decir, que dicha velocidad era variable en función del tiempo, y no constante. El problema, por tanto, se planteaba así:

A las 0 horas del séptimo día el contenido es de 0,531441.
A las 24 horas del séptimo día el contenido es de 0,4782969.
¿A qué hora del séptimo día el contenido es de 0,5?

Mas todo ello con un presupuesto adicional muy importante, que modifica la solución: *el descenso del nivel del líquido varía en función el tiempo transcurrido.*

Fue Neper quien, por medio de sus tablas, pudo solucionar éste y otros problemas similares, que constituyen otras tantas *aplicaciones propuestas* de las tablas de logaritmos. Y todo ello sin disponer de la noción de función logarítmica, y ni siquiera de la noción de base de logaritmos. Interesa pues subrayar que las tablas no sólo resolvían problemas computacionales o trigonométricos, sino que también tenían aplicación a sistemas físicos concretos, modelizados conforme a la propiedad fundamental de los logaritmos.

Antes de pasar a este punto, que será central en el presente artículo, conviene recordar brevemente de qué manera presentaba Napier la teoría de logaritmos, entonces en fase de emergencia.

Napier supone (ver fig.1) una semirecta Ax de origen A y un segmento unitario *aw*, al que denomina seno total, y que por lo tanto representa la magnitud $sen\ 90^{o} = 1$. Sobre la semirecta A*x* representamos una sucesión aritmética $B_1, B_2, B_3,..., B_n$, y por consiguiente $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 =...= B_{n-1}B_n$. Sobre el segmento unitario aw representamos en cambio una progresión geométrica $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...,\alpha_n$, cuya razón Napier hallaba en función del segmento auxiliar *SRQ*, conforme a la proporción siguiente:

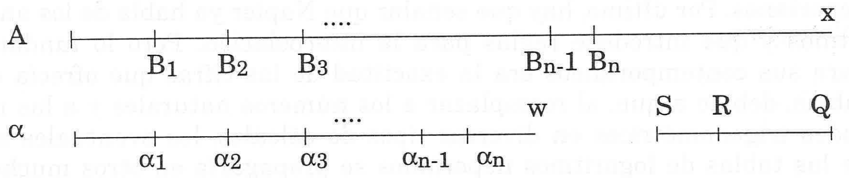
$$\frac{SQ}{RQ} = \frac{aw}{a_1w} = \frac{a_1w}{a_2w} = \frac{a_2w}{a_3w} = ...,$$

de manera que, al ser $aw=1$, si llamamos K a la razón de la progresión geométrica (que determina la base de los logaritmos) y ponemos

$$\frac{SQ}{RQ} = \frac{1}{k}$$

es claro que $\alpha_1 w = k$, $\alpha_2 w = k^2$, $\alpha_3 w = k^3$, ... , $\alpha_n w = k^n$,con lo cual tenemos una progresión aritmética que se corresponde biunívocamente con una progresión geométrica, lo cual permite sustituir los números naturales (o las magnitudes trigonométricas) por sus logaritmos.

Figura 1



Es importante señalar que Napier introduce a continuación una auténtica definición de los logaritmos: $\log \alpha_x w = AB_x$, y partir de ella utiliza una modelización cinemática para hacer inteligible la nueva noción matemática. Las dos progresiones corresponden entonces a dos movimientos sincrónicos que son función de un tiempo que discurre de manera constante. en base a esta representación, el punto B recorre en el instante t_1 la distancia AB_1 mientras el punto β recorre hasta ese instante la distancia $\alpha\alpha_1$; en t_2 se recorre B_1B_2 y $\beta_1 \beta_2$, y así sucesivamente. Así consigue demostrar que es válida la proporción:

$$\frac{\alpha_n W}{\alpha_m W} = \frac{\alpha_p W}{\alpha_q W}$$

y por consiguiente que, de acuerdo con la definición del logaritmo:

$AB_m = \log \alpha_m W$; $AB_p = \log \alpha_p W$; $AB_n = \log \alpha_n W$ y $AB_q = \log \alpha_q W$.

Resulta al final que cuando cuatro números forman una proporción, la diferencia de los logaritmos de los dos últimos, propiedad que para Napier es la que caracteriza a los nuevos números.

Vemos que tanto que:

1. Napier no conoce todavía la propiedad: *log a+ lob b= log c*, siendo *c = a. b*.
2. Su objetivo principal era reducir la teoría griega de las proporciones a un cálculo de diferencias con los nuevos números. Con ello se lograban simplificar los cálculos astronómicos y trigonométricos.
3. Para representar los nuevos números Napier recurrió a una modelización cinemática, basada en la correspondencia instante a instante entre un movimiento en progresión aritmética y otro en progresión geométrica.

El *Canon* de Napier muestra otras muchas peculiaridades. Por ejemplo, la proposición I enuncia la propiedad fundamental (si a es b como c es a d, entonces $\log a - \log b = \log c - \log d$), pero las cinco proposiciones siguientes son consecuencias triviales de dicha prop. I, y no teoremas en el sentido actual del término. En realidad, lo que Napier estaba demostrando eran simples reglas de uso práctico de las tablas de logaritmos, más que teoremas geométricos. Asimismo fue importante su decisión de dividir el segmento unitario (y por consiguiente el radio del círculo subyacente a toda la teoría) en 10.000.000 de partes: ello dio lugar a los logaritmos de 7 cifras significativas. Más decisiva aún fue la elección de la magnitud k, que determinó la importancia del número trascendente e y también la existencia de logaritmos neperianos. Por último, hay que señalar que Napier ya habla de los antilogaritmos y que introduce reglas para la interpolación. Pero lo fundamental para sus contemporáneos era la exactitud de las cifras que ofrecía en sus tablas, debido a que, al reemplazar a los números naturales y a las magnitudes trigonométricas en diversos tipos de cálculos, los eventuales errores de las tablas de logaritmos neperianos se propagaría en otros muchos cálculos científicos. De ahí que muchos autores trataran exclusivamente de mejorar las tablas de Napier en lo que se refiere a exactitud, número de decimales significativos, elección de la base, tablas adicionales para la interpolación, etc. Asimismo fueron decisivas las diversas aplicaciones propuestas para los logaritmos: teoría de proporciones, aritmética elemental, trigonometría plana, trigonometría esférica, etc. Cada una de ellas planteaba nuevos problemas e inducía el descubrimiento de nuevas propiedades fundamentales de logaritmos. De hecho, el propio Napier se vio llevado en el capítulo V de su primer libro a *usar* relaciones del tipo: $\log ab = \log a + \log b$; $\log a^n = n. \log a$; $\log b/a = \log b - \log a$; etc. Pero esas propiedades son descubiertas como puras reglas para el cálculo, no como enunciados derivados de una teoría bien organizada. En una palabra: fueron problemas computacionales (más la representación cinemática antes mencionada) los que generaron una teoría matemática nueva, y no al revés.

Detendremos aquí esta breve incursión en la historia de los logaritmos para centrarnos en los temas filosóficos propuestos al principio. Aun así, es importante resaltar que la construcción de una herramienta matemática, que en principio era puramente auxiliar para calcular, generó toda una teoría matemática que tuvo enorme influencia sobre la ciencia y las técnicas del siglo XVII. Así como Napier concibió y calculo sus tablas en base a la teoría griega de las proporciones, otros autores aplicaron nuevas teorías subyacentes y nuevos métodos de cálculo, contribuyendo con ello a una forma de progreso científico que ha sido poco resaltada por los filósofos de la ciencia, el perfeccionamiento de los instrumentos científicos. Los matemáticos británicos, por ejemplo, aplicaron las series infinitas al cómputo de los logaritmos; y el momento decisivo fue la definición de los logaritmos en términos del Cálculo Integral, anticipada por diversos autores, pero culminada por Euler.

3. Cuestiones semánticas ligadas a las tablas de logaritmos: términos *TNL*-teóricos y leyes fundamentales en la teoría de logaritmos de Napier

En la emergencia de los logaritmos no existió una teoría matemática propiamente dicha, sino unas tablas de números que se mostraron eficaces a la hora de redeucir la teoría de proporciones a un nuevo tipo de cómputo numérico. La teoría se fue perfeccionando progresivamente por influencia directa de las diversas aplicaciones que se les fueron dando a dichas tablas. La teoría de logaritmos constituye un excelente ejemplo de la influencia de las prácticas matemáticas sobre la teoría, que apenas ha sido resaltada por los filósofos de las matemáticas.

Ello da lugar a que la semántica de las tablas de logaritmos durante esta fase de emergencia fuera muy distinta a lo que suele pensarse desde las concepciones vigentes hoy en día en filosofía de la ciencia. Para ejemplificar este punto volveremos sobre el problema del tonel, que las tablas de Napier y su modelización cinemática subyacente resolvieron por completo.

La resolución de dicho problema es inmediata con las tablas neperianas. Puesto que a las 0 horas del séptimo día el barril está en 0,531441 de su capacidad y a las 24 horas de ese mismo día está en 0,4782869 de dicha capacidad, una simple interpolación en las tablas de logaritmos de números naturales nos permite hallar la solución exacta. Las tablas de logaritmos tienen así a los tones de vino (o de cualquier otro líquido) como una de sus aplicaciones propuestas. Lo que interesa es investigar qué tipo de modelización (o representación matemática) de los toneles hay que construir para que dicha aplicación propuesta sea efectiva.

Sea A la representación geométrica de un tonel lleno y B la del mismo tonel lleno hasta la mitad (ver Fig.2). Se trata de determinar en cuánto tiempo se pasa del estado $A1$ al estado B bajo la suposición (obviamente modificable) de que el tonel se vacía cada día en 1/10 de su capacidad.

Figura 2

Imaginemos que un tonelero quisiera resolver dicho problema por métodos exclusivamente empíricos y observacionales. A cada hora, por ejemplo, haría una marca que correspondería al nivel del líquido en ese momento. En el transcurso del tiempo ello daría lugar a una nueva representación C del tonel (ver Fig.3). Obtenemos así una segunda representación del problema planteado: el tonel es ahora un puro sistema de marcas obtenidas *a posteriori*. Para resolver el problema hay que elaborar una teoría (o un instrumento matemático: fórmulas, tablas, etc.) que a cada instante transcurrido se corresponda exactamente con la marca asignada a ese instante. Dicho instrumento (las tablas neperianas) no sólo permite resolver el problema propuesto, sino otros muchos del mismo tipo. En concreto, permite *predecir* el nivel del líquido en el tonel en un instante cualquiera. Vemos así que las tablas de logaritmos (o las fórmulas matemáticas) admiten contrastaciones empíricas perfectamente determinadas, o si se prefiere, que teorías matemáticas como la teoría de logaritmos, además de reducir la teoría previa de las proporciones o de facilitar los cómputos trigonométricos, también admiten sistemas empíricos que, representados adecuadamente, satisfacen las propiedades fundamentales de la teoría.

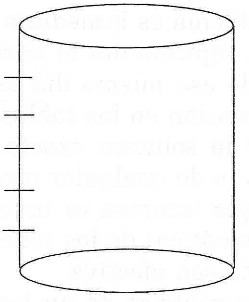


Figura 3

El paso siguiente consiste en representar el sistema de marcas C mediante números que midan a cada instante (u hora) la altura del nivel del líquido en el barril. Ello implica la construcción de una tercera representación científica D (ver Fig.4), que a su vez admite diversas variantes en función de las unidades de medida que elijamos (horas, centímetros; o minutos, milímetros; etc.), de las notaciones que prefiramos, de la representación tabloide que usemos, del sistema de numeración que utilicemos, etc. Es importante subrayar que entre todas estas representaciones en forma de tabla numérica *existen ligaduras estrictas*: una representación aritmética concreta determina estrictamente cualquier otra representación aritmética de las mediciones del barril mediante ligaduras aditivas, multiplicativas, etc. *Las ligaduras de esta teoría matemática (y de otras) son morfismos*: isomorfismos, homomorfismos, homeomorfismos, etc.

Pues bien, la representación D que elijamos ha de ser finalmente contrastada con la tablas T de Napier. Ello equivale a decir que D es un modelo potencial de T, en el sentido estructuralista del término. Para comprobar si es un modelo efectivo o no (lo cual resolvería el problema del barril) hay que recurrir a la teoría de logaritmos (propiedad fundamental, propiedades derivadas) y a sus técnicas anexas (regals de uso de las tablas, interpolación, grado de aproximación prefijado, etc.). Sin embargo, en D todavía no se usa la noción de logaritmo ni su propiedad (¿o ley?) fundamental. La distinción estructuralista entre los términos T-teóricos y T-no-teóricos resulta pertinente a la hora de distinguir entre la representación D y las tablas T, que ya han sido aobtenidas recurriendo a los eventuales conceptos T-teóricos de la teoría de logaritmos.

	CAPACIDAD	
Días	Observada	Prevista
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Figura 4

El punto central de esta artículo consiste en indagar, sobre la base del problema de los toneles como aplicación propuesta de la teoría de logaritmos T, si cabe hablar o no de modelos potenciales plausibles o implausibles para T, o de términos T-teóricos, o de leyes fundamentales en T. Y todo ello teniendo en cuenta que en el caso de Napier sólo disponemos de una teoría emergente, que se representa antes que nada en las propias tablas, y en último término en la propiedad fundamental antes citada[13].

Acabamos de afirmar que las representaciones D_i constituyen otros tantos modelos potenciales de la teoría TNL (teoría neperiana de logaritmos). Asimismo hemos mencionado que entre dichos modelos potenciales existen ligaduras de varios tipos (los morfismos correspondientes a las transformaciones de unos sistemas de numeración en otros, o de unas escalas en otras, o de unas unidades de medida en otras). Con ello sólo estamos estudiando una de las aplicaciones propuestas: los toneles. El razonamiento sería el mismo si con-

13 En lo que sigue, y en aras de una mayor claridad expositiva, consideraremos que la propiedad fundamental de la teoría neperiana de logaritmos, *TNL*, es la siguiente: si $c = a{,}b$, *entonces,* $log\ c = log\ a + log\ b$.

sideráramos las figuras trigonométricas, por ejemplo, como otra de las representaciones propuestas. También en esta caso hay que recurrir, implícita o explícitamente a representaciones C_i.

Se trata ahora de analizar el punto más delicado: la existencia de términos *TNL*-teóricos. Y por consiguiente la cuestión central última: si cabe hablar o no de *leyes* en el caso de teorías matemáticas como la teoría de logaritmos.

Si suponemos que la representación D introduce horas y centímetros en el sistema de marcas C, es claro que ninguna de estas dos unidades de tiempo y de longitud son *TNL*-teórico para la aplicación propuesta B_j (del nivel de los barriles con disminución de capacidad de 1/10 diaria); y razonando de manera similar, podría mostrase que también es *TNL*-teórico para las restantes aplicaciones propuestas de *TNL*.

Para justificar esta tesis arguiré que, para detrminar si el sistema empírico representado por A *y* B satisface o no la propiedad fundamental de los logaritmos, resulta imprescindible medir los niveles A y B, lo cual equivale a construir la representación C, o una similar. La representación D no sería un modelo potencial, ni mucho menos efectivo, si no se hubiera construído explícita o implícitamente una representación del tipo C, que es un puro sistema de marcas, sin números ni undidades de medida

Las representaciones del tipo C_i pasan así a ser claves para afrontar el problema de aplicar el programa estructural a las teoría matemáticas. Dichas representaciones son *semióticas*, debido a que son sistemas de trazos. Pero la construcción de un modelo potencial D_i implica necesariamente la presuposición de esos sistemas de signos C_i.

Pues bien, el argumento principal que sustenta la tesis anteriormente expuesta es la siguiente: *el sistema de signos C_i satisface la propiedad fundamental de la teoría de logaritmos, y por lo tanto constituye otra aplicación efectivade TNL.* Por consiguiente, la determinación de un modelo potencial de *TNL*, como D_i, es un modelo efectivo o no de *TNL*, implica presuposición de otra aplicación efectiva de *TNL*, que en este caso son los sistemas de signos o representaciones del tipo C_i. Las marcas de C_i satisfacen la propiedad fundamental de las tablas de logaritmos, como es fácil de comprobar. Sin embargo, es preciso distinguir entre el sistema de signos C_i y los sistemas empíricos (en esta caso barriles) que también satisfacen dicha propiedad fundamental. Podemos así concluir que en *TNL* hay al menos un concepto teórico, *log*, el cual es definido al modo de Napier en términos de magnitudes gemométricas: $log\ xW = AB_x$. El concepto neperiano de logaritmos está definido como correspondencia biunívoca entre dos magnitudes o segmentos geométricos, desde la recta AB al intervalo (0,1), y por consiguiente puede ser caracterizado fácilmente mediante los métodos conjuntistas del programa estructural. Mas para determinarlo o medirlo en caulquiera de sus aplicaciones es preciso presuponer (o construir explícitamente) otra aplicación efectiva, del tipo de los sistemas de signos o representaciones C_i.

Profundizando más en el argumento cabría decir que *las propias tablas* *de logaritmos constituyen un sistema de signos* (en este caso aritméticos) *que satisface la propiedad fundamental de los logaritmos*; como el uso de las tablas es imprescindible para dilucidar en cualquier aplicación propuesta si los modelos potenciales son modelos efectivos o no, podemos reafirmarnos en nuestra tesis de que el concepto *log* es *TNL*-teórico.

Pasamos con ello a la cuestión crucial. ¿Existen leyes fundamentales en el caso de las teorías matemáticas, y en concreto en el caso de *TNL*?

Nuestra propuesta al respecto consiste en afirmar que las propiedades fundamentales de las teorías matemáticas, y en este caso la propiedad fundamental de los logaritmos neperianos (es decir; si $c = ab$, entonces $log\ c= log\ a + log\ b$), son un sucedáneo de las leyes fundamentales de las teorías empíricas que resulta suficiente para intentar reconstruir las teorías matemáticas aplicando las técnicas estructuralistas.

No hay que olvidar que, si nos atenemos al uso de los términos, los matemáticos han hablado frecuentemente de *leyes* en sus teorías: así la ley de los grandes números, o la ley de distribución de los números primos, y otros muchos ejemplos históricos que podrían aducirse. Aun así, no niego que haya diferencias básicas entre estas «leyes» propiedades fundamentales) y las leyes de las teorías empíricas. Por eso se habla de sucedáneos de leyes, o sise prefiere de *cuasi-leyes*. Este punto queda aquí abierto para análisis y debates ulteriores.

En cualquier caso, aceptando que la cuasi-ley fundamenteal TNL puede formularse así: sic $= ab$, entonces $log\ c = log\ a + log\ b$, donde a, b y c admiten diferentes interpretaciones semánticas (números naturales, magnitudes trigonométricas, magnitudes astronómicas, sistemas de signos del tipo C_i, niveles del líquido en barriles de vino, etc.); entonces las componentes básicas de los núcleos de las teorías científicas que estudian los estructuralistas también pueden ser dilucidadas en el caso de una teoría matemática como *TNL*.

Puesto que la existencia de aplicaciones propuestas, e incluso de aplicaciones paradigmáticas de *TNL*, ya ha sido subrayada suficientemente en lo que precede, podemos concluir que la metodología del programa estructural es aplicable a teorías mamtemáticas como *TNL*. Queda abierto el problema de determinar si todas las teorías matemáticas son este tipo o no. Pero como se ha podido comprobar, la clave para afrontar dicho problema consiste en estudiar con sumo cuidado las representaciones qeu los matemáticos utilizan, explícita o implícitamente, a la hora de construir sus teoría, y sobre todo a la hora de aplicarlas. las dependencia de las matemáticas con respecto a diversos sistemas de signos (o representaciones) que requieren un cierto soporte físico constituye, a mi entender, la vía para afrontar en toda su extensión el problema de las teorías matemáticas y de sus relaciones con las concepciones semánticas en filosofía de la ciencia.

Si las propuestas anteriores fuesen ciertas, lo cual está sujeto a discusión, resultaría que el programa estructural, remodelado eventualmente en alguno de sus puntos, sería aplicable para analizar y reconstruir recionalmente las teorías matemáticas, entendidas éstas no como puros cálculos lógico-deductivos, sino como estructuras que cuentan con varias componentes: un núcleo teórico, unas aplicaciones prouestas y un ámbito pragmático en donde dichas teorías se explicitan (comunidad científica, intervalo histórico, representaciones utilizadas, etc.).

La mayor perculiaridad de las teorías matemáticas, desde el punto de vista semántico, consistiría en que utilizan representaciones y sistemas de signos (como los numerales, las figuras geométricas, las fórmulas algebraicas o diferenciales, las tablas d logaritmos, etc.) que, al instanciar a las propias teorías, satisfacen en tanto sistemas de signos las propiedades fundamentales de dechas teorías. O dicho de otra manera: entre las diversas aplicaciones efectivas que pueden tener las teorías matemáticas siempre hay algunas que están formadas por los sistemas de signos construídos por los propios matemáticos.

4. Consideraciones finales

A partir de los argumentos precedentes queda claro que en una teoría matemática como *TNL* pueden distinguirse modelos potenciales plausibles o implausibles. El criterio a utilizar para ello es la propiedad fundamental de los logaritmos: todo modelo potencial debe de satisfacer la propiedad según la cual, si $c= a.b$, entonces $log\ c= log\ a+log\ b$. Por consiguiente, basta con elegir dos valores *a y b*, multiplicarlos, sumar los números correspondientes en el modelo potencial y comprobar si se verifica dicha propiedad, o si al menos se aproxima, para dilucidar si el modelo es plausible o no. Para ello pueden utilizarse diversas representaciones aritméticas del modelo potencial, puesto que todas son isomorfas entre sí.

Pero el punto más importante radica en el papel que desempeñan las tablas matemáticas, y en general las tablas científicas. Hemos afirmado que en *TNL* hay un término *TNL*-teórico, y que cabe considerar a la propiedad fundamenteal como una cuasi-ley que caracteriza el núcleo de la teoría. Pero asimismo hemos visto que las tablas de logaritmos, entendidas como un puro sistema de signos numéricos, verifican la propiedad fundamental de la teoría. Ello equivale a decir que, para comprobar si una aplicación propuesta de *TNL* es efectiva o no, matemáticos como Napier y otros muchos construyeron un instrumento matemático que, además de permitir una aplicación más fácil de la nueva teoría a diversos ámbitos matemáticos y empíricos, constituye por sí mismo una aplicación efectiva de la teoría. Las tablas de logaritmos son una *aplicación canónica* de la teoría de logaritmos, que sirve como criterio práctico para dilucidar cualquiera otra aplicación propuesta. La *TNL*-teoricidad del concepto *log* se basa en último término en las propias tablas de logaritmos, a las cuales es preciso recurrir para medir o determinar cualquier otra aplicación propuesta.

Obtenemos así una consecuencia interesante. Si estudiamos la semántica de las teorías matemáticas, podemos aplicar el programa estructural, aunque sea ampliando algunos de sus instrumentos de análisis modelo-teórico. Al aplicarlo a teorías como *TNL*, resulta que la construcción de instrumentos como las tablas tiene una relevancia semántica, por ser dichas tablas la aplicación canónica de la teoría, entre las muchas aplicaciones paradigmáticas o subsidiarias que *TNL* puede tener. Entre dichas aplicaciones puede haber algunas que tengan como referente sistemas empíricos y otras que tengan como referentes sistemas de objetos matemáticos (magnitudes trigonométricas, cálculos aritméticos, trigonometría eférica, etc.). Las sucesivas aplicaciones van influyendo sobre la propia estructura de la teoría, contribuyendo a descubrir nuevas propiedades al resolver problemas concretos de aplicación, y por consiguiente generando una red teórica. Lo esencial estriba en que, etre todas esas aplicaciones propuestas, hay una canónica que determina a todas las demás, al modo como el sistema métrico decimal, o cualquier sistema canónico de medidas, determina ulteriormente otras aplicaciones de teorías científicas.

Esa representación canónica es de índole estrictamente semiótica. Las tablas de logaritmos son un sistema de signos que pueden ser mejorado a base de introducir nuevas formas de presentación de laas tabals, o nuevas reglas operatorias para el manejo de dicho sistema de signos. El progreso científico depende también de esta labor de mejora de las aplicaciones canónicas de las teoráis matemáticas (las notaciones), y no sólo del aumento del contenido empírico de las teorías. Las aplicaciones canónicas satisfacen, en tanto objetos semióticos, las propiedades o leyes fundamentales de las teorías[14], pero asimismo permite dilucidar si otros sistemas (empíricos o no) satisfacen dichas leyes o propiedades. Por consiguiente, las tablas matemáticas y científicas ocupan un papel destacado en la estructura de las teorías, en tanto aplicaciones efectivas canónicas que permiten dilucidar el resto de aplicaciones propuestas. A su vez, dichas aplicaciones canónicas nos permiten distinguir de manera inmediata entre modelos plausibles y modelos implausibles de la teoría.

Si estas propuestas, en las que la cuestión de los vínculos interteóricos no ha sido tratada, resultan aceptables, el programa estructural podría aplicarse a la reconstrucción de las teorías matemáticas. Esta línea de investigación queda abierta para contribuciones ulteriores.

J. ECHEVERRIA
Universidad del País Vasco

[14] Así, los números enteros satisfacen las propiedades fundamentales de la teoría de grupos, los reales la de cuerpos, etc.