



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Valoración de opcións americanas con tipos de interese negativos. Aplicacións a opcións reais.

Abel Álvarez González

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

**Valoración de opcións americanas  
con tipos de interese negativos.  
Aplicacións a opcións reais.**

Abel Álvarez González

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Matemática Aplicada</b>
<b>Título: Valoración de opcións americanas con tipos de interese negativos. Aplicacións a opcións reais.</b>
<b>Breve descripción do contido</b>
No contexto das taxas de interese negativas, as opcións financeiras con posibilidade de exercicio anticipado (opcións americanas) orixinan unha rexión de exercicio que separa dúas rexións de mantemento de opcións. Neste TFG, partindo dos modelos máis clásicos de opcións americanas, revisaranse os resultados existentes no caso de taxas negativas e aplicarase a resolución numérica dos modelos. Por outra banda, estudaranse problemas de opcións reais, que admiten formulacións similares ás das opcións americanas con taxas negativas.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Os Productos Financeiros</b>	<b>1</b>
1.1. Opcións Americanas . . . . .	3
1.2. Préstamos de Ouro . . . . .	3
<b>2. Análise dos Modelos Matemáticos</b>	<b>5</b>
2.1. Presenza de Tipos Negativos . . . . .	5
2.2. Opción Americana de Venda con Tipos Negativos . . . . .	8
2.3. Opción Americana de Compra con Tipos Negativos . . . . .	15
2.4. Préstamos de Ouro . . . . .	20
<b>3. Métodos Numéricos para Opcións Americanas</b>	<b>23</b>
3.1. Discretización de Tempo e Subxacente: Euler Implícito . . . . .	23
3.2. Resolución do Problema da Opción de Venda Americana . . . . .	26
3.3. Resolución do Problema da Opción de Compra Americana . . . . .	27
3.4. Resultados Numéricos . . . . .	28
<b>4. Conclusión</b>	<b>31</b>
<b>Anexo: Programas para a Resolución de Problemas de Valoración de Opcións</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



## **Resumo**

As opcións americanas con tipo de interese negativo baixo certas condicións dan lugar á aparición dunha dobre rexión de continuación non estándar e, debido a isto, estudiamos as propiedades da dobre fronteira libre que separa a dobre rexión de continuación e a rexión de exercicio. A súa vez, estudamos os métodos numéricos necesarios para a resolución de problemas de valoración de opcións e vemos algunhas aplicacións reais que estes problemas poden ter.

## **Abstract**

American options with negative interest rate under certain conditions determine the presence of a nonstandard double continuation region and, because of this, we study the properties of the double free boundary that separates the double continuation region and the exercise region. Moreover, we study the numerical methods necessary for solving american option valuation problems and we also see some real applications for this type of problems.



# Introdución

Un número relevante de problemas de toma de decisións en finanzas poden ser reformulados como problemas de opcións americanas cun tipo de interese negativo endóxico. Dous exemplos son as opcións de prepago garantido como os préstamos de ouro e as opcións de investimento de capital. Un tipo de interese negativo endóxico para derivadas americanas incorporado en préstamos garantidos por activos traspasables aparece cando o tipo de préstamo está por encima da taxa de interese libre de risco. Un tipo de interese negativo endóxico en opcións reais de espera de investimento aparece cando a taxa de crecemento esperada axustada ao risco do valor do proxecto está por riba da taxa usada pola empresa para descontala.

Agora ben, estes problemas de decisión poden implicar unha dobre rexión de continuación non estándar: o exercicio da opción é posposto optimamente non só cando o diñeiro non é suficiente (a parte estándar da rexión de continuación) senón tamén cando o diñeiro é demasiado (a parte non estándar da rexión de continuación). Para opcións americanas call e put con madurez finita e perpetua con tipos de interese negativo nun entorno difuso faremos unha análise das condicións que permiten a dobre rexión de continuación e a caracterización da dobre fronteira libre á cal conleva dita rexión de continuación.

Neste traballo estudiaremos a existencia, a monotónía, a continuidade, os límites e o comportamento asintótico na madurez para a fronteira libre superior e a fronteira libre inferior para os problemas put americanos mediante a aproximación da desigualdade variacional. Despois trasladaremos eses resultados aos enunciados de dobre fronteira libre para o problema call americano utilizando a simetría put-call americana.

Nun préstamo de ouro, este é a garantía, a cal o prestatario ten dereito de amortizar en calquera momento anterior a madurez do préstamo ou nesta mesma. Veremos que como o ouro é un activo de inversión traspasable con custos de almacenamento (e aseguramento) e sen ganancias, a rexión de dobre continuación pode resultar: o exercicio da opción de redención cando hai demasiado diñeiro debe ser posposto optimamente polo prestatario. Os problemas de préstamo de accións teñen unha única fronteira libre estándar porque a desviación porcentual ao risco do prezo das accións subxacentes iguala a taxa libre de risco

menos a rentabilidade por dividendo non negativa.

Nos seguintes capítulos veremos a rexión de dobre continuación para put e calls americanas, resolveremos mediante métodos numéricos o problema de valoración das opcións americanas con taxa de interese negativa e discutiremos a rexión de dobre continuación para as opcións de redención incorporadas no préstamo de ouro e para outras opcións reais interesantes.

# Capítulo 1

## Os Productos Financeiros

Neste primeiro capítulo veremos unha serie de definicións e resultados que serán de utilidade para adentrarnos no tema e comprender mellor os próximos capítulos.

**Definición 1.1. (*Derivado Financeiro*).**

*Os derivados son produtos financeiros que cubren o risco (normalmente causado polos cambios nos prezos) dun activo principal (denominado activo subxacente), que poden ser accións cotizadas, tipos de interese, tipos de cambios de divisa, índices bursátiles, bonos e obrigacións cotizados en renta fixa...*

O valor do derivado estará en consonancia co prezo do activo subxacente,  $S$ , pero non será necesario comprar ou vender este no mesmo momento, co que non se tendrá que desembolsar o prezo do mesmo. Tampouco se transferirá a propiedade do activo, pero na práctica os efectos serán os mesmos. É dicir, cunha pequena cantidade de diñeiro conséguense uns efectos similares á compra ou venda do ben, pero pospoñendo a acción a un momento futuro.

Existen diferentes tipos de derivados financeiros, algúns dos cales definiremos a continuación.

**Definición 1.2. (*Opción Put Europea ou Opción Europea de Venda*).**

*A opción put europea é un contrato entre o vendedor e o comprador que lle otorga a este último o dereito, pero non a obriga de vender un activo a un prezo determinado  $K$ , nunha data de vencemento concreta  $T$  no futuro.*

**Definición 1.3. (*Opción Call Europea ou Opción Europea de Compra*).**

*A opción call europea é un contrato entre o vendedor e o comprador que lle otorga a este último o dereito, pero non a obriga de comprar un activo a un prezo determinado  $K$ , nunha data de vencemento concreta  $T$  no futuro.*



Figura 1.1: Esquema do funcionamento das opcións call.



Figura 1.2: Esquema do funcionamento das opcións put.

O valor dunha opción put aumenta si o prezo de mercado do activo se deprecia. Ao contrario ocorre para a opción call, cuxo valor aumenta si o prezo de mercado do activo se incrementa.

O vendedor da opción ten a obriga de comprar o activo subxacente, ao prezo que se acordou, coñecido como prezo de exercicio, si a opción se executa por parte do posuidor. Ao vendedor págaselle unha prima por asumir os riscos asociados á obriga de comprar. Igual pasa para a opción call, pero neste caso o autor da opción ten a obriga de vender o activo subxacente e a prima págaselle por aceptar os riscos asociados á obriga de vender.

## 1.1. Opción Americana

Agora falaremos das opcións americanas, ás cales está dedicado este traballo.

**Definición 1.4.** (*Opción Put Americana ou Opción Americana de Venda*).

A opción put americana é un contrato entre o vendedor e o comprador dunha opción. Representa o dereito, pero non a obriga de vender un activo subxacente a un prezo determinado  $K$ , en calquera momento do intervalo  $[0, T]$  cunha data de vencemento futura  $T$ .

**Definición 1.5.** (*Opción Call Americana ou Opción Americana de Compra*).

A opción call americana é un contrato entre o vendedor e o comprador dunha opción. Representa o dereito, pero non a obriga de comprar un activo subxacente a un prezo determinado  $K$ , en calquera momento do intervalo  $[0, T]$  cunha data de vencemento futura  $T$ .

As opcións americanas son as opcións máis utilizadas (máis do 95% dos contratos opción son opcións americanas.)

A diferenza entre as opcións europeas e as opcións americanas reside na posibilidade de exercer na opción americana o contrato en calquera momento do intervalo  $[0, T]$ , onde  $T$  é a data de vencemento do contrato, en lugar de só ter a posibilidade de exercer na opción europea o contrato no tempo  $T$ .

Polo tanto, esta opción dalle ao posuidor máis flexibilidade á hora de exercer o contrato. Así, é lóxico que unha opción americana teña un maior valor en comparación cunha opción europea

$$v_{ac}(x, t) \geq v_{ec}(x, t), \quad v_{ap}(x, t) \geq v_{ep}(x, t)$$

Unha opción americana no tempo  $t < T$  sempre debe ter un valor maior ao valor de exercicio, que coincide co valor a vencemento, é dicir,

$$v_{ac}(x, t) \geq v_{ac}(x, T) = \max(x - K, 0),$$

$$v_{ap}(x, t) \geq v_{ap}(x, T) = \max(K - x, 0),$$

## 1.2. Préstamos de Ouro

**Definición 1.6.** (*Préstamo de Ouro*).

Un préstamo de ouro consiste na entrega dunha cantidade de diñeiro que debe ser devolta e cuxa garantía é o ouro.

Nun préstamo de ouro, o prestatario recibe na data da firma do contrato a cantidade do préstamo, usando unha unidade de masa de ouro como garantía, que deberá ser entregada ao prestador. Esta cantidade crece debido a taxa do préstamo estipulada no contrato. Polo tanto, a cantidade a reembolsar o préstamo no futuro usualmente é maior. Cando o prestatario devolve o préstamo, o prestador recibe o ouro de volta e o contrato remata.

## Capítulo 2

# Análise dos Modelos Matemáticos

Neste capítulo abarcaremos as análises dos modelos matemáticos das opcións de compra e venda con tipos de interese negativos, tanto para as opcións con madurez finita como para as opcións perpétuas. Ademais, analizaremos unha opción real, o préstamo de ouro.

### 2.1. Presenza de Tipos Negativos

Nesta sección explícanse diferentes conceptos matemáticos relacionados coas finanzas con especial énfasis nos tipos de interese negativos.

#### Proceso estocástico

Un proceso estocástico,  $W$ , é unha colección de variables aleatorias,  $W_t$ ,  $t \in I$  definidas sobre o espazo da mostra  $\Omega$ .

- Se  $I$  é finito,  $W$  chamase proceso estocástico nun tempo discreto. Se  $I$  é un intervalo,  $W$  chamase proceso estocástico en tempo continuo.
- Para cada  $t \in I$ ,  $W_t = \{W_t(\omega), \omega \in \Omega\}$  é unha variable aleatoria.
- Para cada suceso  $\omega \in \Omega$ ,  $W_\omega = \{W_t(\omega), t \in I\}$  denomínase traxectoria do proceso  $W$ .

#### Movemento Browniano

Un movemento browniano é un proceso estocástico en tempo continuo que verifica as seguintes propiedades:

- $W_0 = 0$

- Ten incrementos independentes, é dicir:

$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

, son variables aleatorias independentes para todo  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in I$

- Para cada  $t \geq s \geq 0, W_t - W_s \in N(0, t - s)$ .

### Movementu Browniano Xeométrico

Un dos principais modelos empregados para representar os movementos dos prezos dun activo suxacente,  $X_t$ , é o browniano xeométrico, que verifica a seguinte ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad (2.1)$$

donde  $dW_t$  é o incremento dun movementu browniano estándar,  $\mu$  é a tendencia e  $\sigma$  denota a volatilidade.

Para resolver a ecuación diferencial estocástica anterior definimos o novo proceso

$$Y_t = \ln \left( \frac{X_t}{X_0} \right). \quad (2.2)$$

Aplicando o Lema de Itô para a función  $F(t, y) = \ln(y)$  obtemos a ecuación diferencial estocástica para  $Y_t$ :

$$dY_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t,$$

e integrando:

$$Y_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \quad (2.3)$$

Agora tendo en conta as expresións (2.2) e (2.3) tense que a solución da ecuación diferencial estocástica é:

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (2.4)$$

### Lema de Itô

A continuación recordamos o Lema de Itô. [3]

#### Lema 2.1. Lema de Itô.

Sexa  $f(x, t)$  unha función  $\mathcal{C}^2$  infinitamente diferenciable das variables  $x$  e  $t$ . Se supoñemos que o proceso  $\{x_t, t \geq 0\}$  satisfai a ecuación diferencial estocástica:

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW_t,$$

onde  $W_t$  é un movemento browniano.

Entonces a ecuación diferencial estocástica para o proceso  $f_t = f(x_t, t)$  vén dada por

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t)dx_t + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(x_t, t)dt, \quad (2.5)$$

ou equivalentemente

$$df_t = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_t, t)dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(x_t, t)dW_t, \quad (2.6)$$

Este lema é unha identidade utilizada no cálculo de Itô para encontrar a diferencial dunha función dependente dun proceso estocástico. Esta fórmula é unha versión estocástica da regra da cadena do cálculo diferencial usual.

Este lema utilízase para obter a ecuación de Black-Scholes.



Figura 2.1: Kiyoshi Itô (1915-2008)

Denotando  $X_t$  é o proceso de prezos do activo subxacente de tipo browniano xeométrico,  $V_t$  é o proceso de prezos dunha opción europea e  $T$  a data de vencemento (tempo de madurez) da opción. Supoñemos que  $V_t = v(X_t, t)$ , donde  $v$  é unha función de dúas variables suficientemente derivable nas condicións do Lema de Itô entón aplicando técnicas de cobertura dinámica a función  $v$  verifica a ecuación de Black-Scholes que indicamos a continuación.

**Definición 2.2.** (*Ecuación de Black-Scholes*).

A ecuación de Black-Scholes é a seguinte ecuación diferencial parcial parabólica para o valor da opción  $v = v(x, t)$  definida para  $x > 0$ ,  $t \in [0, T]$ .

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho x \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v = 0 \quad (2.7)$$

Esta ecuación de Black-Scholes é utilizada en matemática financeira para determinar o valor dunha opción europea de compra ou venda.

## 2.2. Opción Americana de Venda con Tipos Negativos

Nesta sección centrarémonos na opción put americana con tipo de interese negativo e veremos as condicións que levan a aparición dunha dobre rexión de continuación non estándar e estudaremos as propiedades de existencia, monotónía, continuidade, límites e o comportamento cerca da madurez da dobre fronteira libre que separa a rexión de exercicio da dobre rexión de continuación. As ideas deste capítulo seguen as liñas principais do estudo realizado en [2].

Consideramos a opción put americana sobre un activo  $X_t$  que segue o browniano xeométrico, cuxa tendencia baixo medida de probabilidade real denotamos con  $\mu$ . Denotamos a volatilidade con  $\sigma$ , o prezo do exercicio con  $K$  e a taxa de interese con  $\rho$ . O valor da opción put no momento  $t$  está dado por

$$v_t = v(t, X_t) = \text{ess sup}_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}[e^{-\rho(\tau-t)}(K - X_\tau)^+ | \mathcal{F}_\tau],$$

ou equivalentemente

$$v_t = v(t, X_t) = \sup_{\theta \in [0, T-t]} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta}(K - x_\theta \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma W_\theta))^+], \quad (2.8)$$

donde  $W_t$  segue unha distribución browniana baixo a medida de probabilidade real. As esperanzas e as distribucións de procesos estocásticos fan referencia a medida de probabilidade real e, por cuestións de simplicidade, omitiremos a dependencia sobre a medida de probabilidade. Se a opción é perpetua (unha opción con tempo de vencemento infinito), o seu valor non depende do tempo e ven dado por:

$$v_\infty(x_t) = \sup_{0 \leq \theta} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta}(K - x_\theta \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma W_\theta))^+].$$

Sen ter en conta o signo de  $\rho$ , a función  $v$  en (2.8) domina a función de pago, é convexa e decrece con respecto a  $x$ , é decrecente con respecto a  $t$  e é dominada pola put perpetua  $v_\infty$ , polo tanto,

$$(K - x)^+ \leq v(t, x) \leq v(t, 0) \leq v_\infty(x) \text{ para todo } t \in [0, T] \text{ e } x \geq 0. \quad (2.9)$$

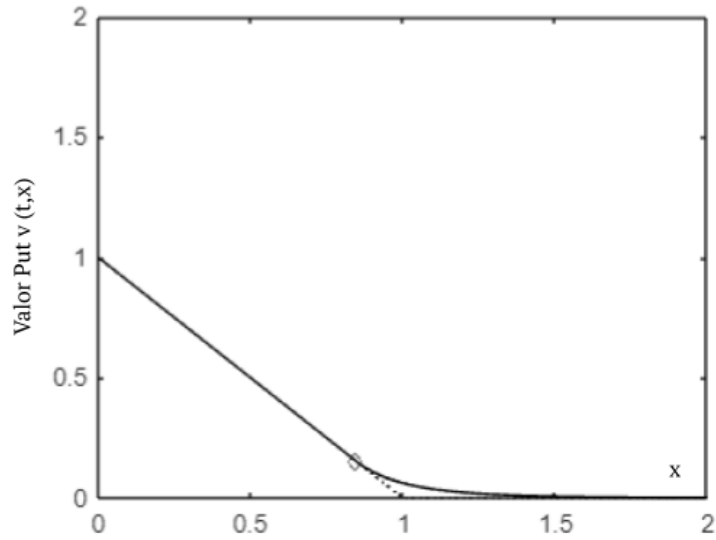


Figura 2.2: Valor da Opción Put Americana  $v(t, \cdot)$  (línea grosa) e o pago de exercicio inmediato (línea fina) con prezo de exercicio  $k = 1$ ,  $\rho \geq 0$  e madurez finita.

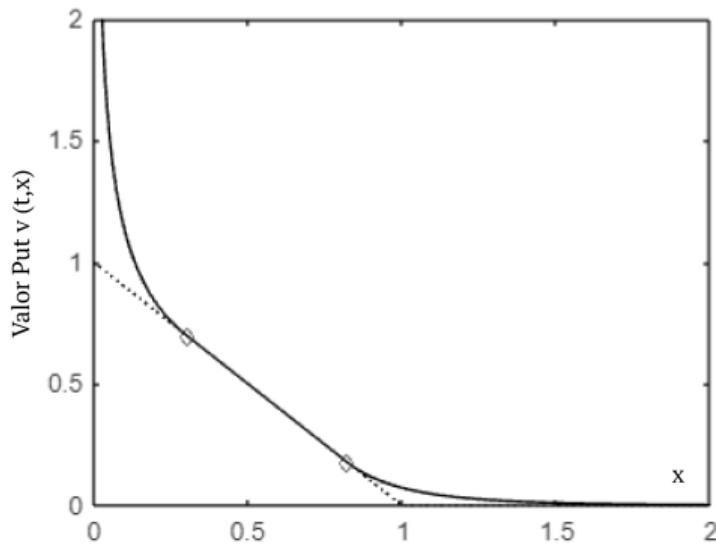


Figura 2.3: Valor da Opción Put Americana  $v(t, \cdot)$  (línea grosa) e o pago de exercicio inmediato (línea fina) con prezo de exercicio  $k = 1$ ,  $\rho < 0$  e madurez finita.

Estas propiedades interactúan co signo de  $\rho$  para determinar a forma da fronteira libre e a “estructura xeométrica” da rexión de exercicio. Máis precisamente, se  $\rho \geq 0$ , para calquera  $t < T$ , temos que  $v(t, 0) = \sup_{0 \leq \theta \leq T-t} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta}(K - 0)^+] = (K - 0)^+$ . Desde que  $v(t, x)$  coincide para  $x = 0$  co exercicio inmediato do pago, a convexidade e (2.9) implican

que  $v(t, x) > (K - x)^+$  para todo  $x > 0$  (véxase a línea grosa e continua da Figura 2.2) ou  $v(t, x) = (K - x)^+$  para calquera  $x$  pertencente aos intervalos cuxos extremos son 0 e  $x^*(t) = \sup(x \geq 0 : v(t, x) = K - x) \leq K$  (véxase a línea grosa da Figura 2.2). O valor de  $x^*(t)$  é o único prezo crítico da opción put con taxa de interese non negativa. Isto é certo para unha gran cantidade de procesos de difusión con taxas de interese non negativas.

Pola contra, se  $\rho < 0$ , entón o valor da opción americana para  $x = 0$  domina estritamente ao exercicio inmediato do pago, xa que,  $v(t, 0) = \sup_{0 \leq \theta \leq T-t} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta}(K - 0)^+] = e^{-\rho(T-t)} \cdot K > K$ . Polo tanto, ou ben o exercicio temperán nunca é óptimo na data  $t$ , é dicir,  $v(t, x) > (K - x)^+$  para todo  $x > 0$  (véxase na liña grosa e continua da figura 2.3), ou ben o exercicio é óptimo no tempo  $t$  para algunhas  $x' \in (0, K)$ , é dicir,  $(K - x')^+ = v(t, x')$  (véxase na liña grosa da figura 2.3). Se  $x'$  fose única, entón a rexión de exercicio colapsa nun só punto (a fronteira libre no tempo  $t$ ). Si  $x'$  non é única, entón por convexidade e (2.9) a rexión de exercicio no tempo  $t$  está constituída por un segmento conectado definido polos extremos  $l(t) \leq u(t) \in [0, K]$  donde

$$l(t) = \inf(x \geq 0 : v(t, x) = (K - x)^+), \quad (2.10)$$

$$u(t) = \sup(x \geq 0 : v(t, x) = (K - x)^+) \wedge K, \quad (2.11)$$

tales que  $v(t, x) = (K - x)^+$  para  $l(t) \leq x \leq u(t)$ , e  $v(t, x) > (K - x)^+$  para  $x < l(t)$  e  $x > u(t)$ . Isto implica que a rexión de continuación no tempo  $t$  se separa en dous segmentos. O exercicio posponse optimamente non só cando a opción é insuficiente no diñeiro ( $x > u(t)$ ), senón que tamén cando a opción é excesiva no diñeiro ( $x < l(t)$ ). Na rexión onde o diñeiro é excesivo o valor da opción put americana decrece con maior pendente que o pago inmediato da put, é dicir,  $(\frac{\partial v}{\partial x})(t, x) < -1$  (véxase a figura 2.3). Pola contra, se  $\rho \geq 0$ , a derivada  $(\frac{\partial v}{\partial x})(t, x) \geq -1$  para todo  $x$ . Polo tanto, se a rexión de exercicio é non vacía na data  $t$ , é a negatividade da taxa de interese a que modifica a “estructura xeométrica” usual.

Os supostos (2.14) e (2.15) na Proposición 2.4 son condicións suficientes para que a rexión de exercicio sexa non vacía no caso perpetuo e, en consecuencia, no caso de madurez finita para calquera data  $t$ . En particular o suposto (2.14) implica que a rendabilidade por dividendo  $\delta = \rho - \mu$  é negativa. Polo tanto, a negatividade tanto de  $\rho$  como de  $\mu$  é crucial para determinar a presenza da rexión de dobre continuación. Certamente, a rexión de continuación non pode ser constituída por máis de dous segmentos non conectados, porque a convexidade da función  $v(t, \cdot)$  debe descansar encima da función de pago  $(K - \cdot)^+$ .

Denotemos con  $\mathcal{ER} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : v(t, x) = (K - x)^+\}$  a rexión de exercicio temperá, e con  $\mathcal{CR} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : v(t, x) > (K - x)^+\}$  a rexión de continuación. A función  $v$  en (2.8) pode ser expresada como a solución dun sistema de

desigualdades diferenciais:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v + \mathcal{L}v - \rho v &\leq 0 \text{ en } (0, T) \times \mathbb{R}^+, \\ v(t, x) &\geq \pi(x), \quad x > 0, t \in [0, T], \\ \left( \frac{\partial}{\partial t}v + \mathcal{L}v - \rho v \right) \cdot (v(t, x) - \pi(x)) &= 0 \quad x > 0, t \in [0, T] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

coa condición final

$$v(T, x) = \pi(x), \quad x > 0 \quad (2.13)$$

donde  $\pi(x) = (K - x)^+$ , e o operador diferencial ven dado por

$$(\mathcal{L}v)(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2x^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) + \mu x \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$$

. Cando a taxa de interese é non negativa, sábese que (2.12) admite unha solución infinitamente diferenciable. Se a taxa de interese é negativa pódese chegar á mesma conclusión, como se demostras incluída no artigo [2] na seguinte proposición.

**Proposición 2.3.** [2] (*Diferenciabilidade Infinita do Valor da Opción Put, v, con Taxa de Interese Negativa*).

A solución de (2.12) admite derivadas parciais  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  que están localmente acotada en  $[0, T) \times \mathbb{R}^+$ . Ademais para  $v$  cúmprese que  $\frac{\partial v}{\partial x}$  é continua en  $[0, T) \times \mathbb{R}^+$ .

No caso da opción perpetua, a dobre fronteira libre pode ser explicitamente calculada resolvendo a ecuación diferencial implicada por (2.12) na rexión de continuación e aplicando o importante principio "smooth-pasting" na fronteira libre. O resultado require unha verificación ad hoc directa, porque  $v_\infty$  contravén os requerimentos usuais de acotamento. Por suposto, cando  $\rho < 0$  e  $x = 0$ , o tempo de exercicio óptimo é  $\theta^* = +\infty$ , e o valor da opción americana é  $v_\infty = \mathbb{E}[e^{-\rho\theta^*}(K - 0)^+] = +\infty$ .

**Proposición 2.4.** [2] (*Opción Put Perpetua con Taxa de Interese Negativa*).

Si  $T = +\infty$ ,

$$\rho < 0, \quad \mu - \frac{\sigma^2}{2} > 0, \quad (2.14)$$

e

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\rho\sigma^2 > 0, \quad (2.15)$$

entón o valor da opción put americana perpetua é

$$v_\infty = \begin{cases} A_l \cdot x^{\xi_l}, & x \in (0, l_\infty), \\ K - x, & x \in [l_\infty, u_\infty], \\ A_u \cdot x^{\xi_u}, & x \in (u_\infty, +\infty), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde  $\xi_u < \xi_l$  son as solucións negativas da ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\xi - \rho = 0. \quad (2.17)$$

Os prezos críticos dos activos (fronteiras libres) son

$$l_\infty = K \frac{\xi_l}{\xi_l - 1} \quad e \quad u_\infty = K \frac{\xi_u}{\xi_u - 1} \quad (2.18)$$

e as constantes  $A_l$  e  $A_u$  veñen dadas por

$$A_l = -\frac{(l_\infty)^{1-\xi_l}}{\xi_l} \quad e \quad A_u = -\frac{(u_\infty)^{1-\xi_u}}{\xi_u}. \quad (2.19)$$

Dada unha taxa de interese negativa  $\rho < 0$ , a condición da derivada positiva (2.14) e a condición do discriminante positivo (2.15) garanten a existencia de solucións (negativas) da ecuación (2.17) e descartan o efecto explosivo potencial dunha taxa de interese negativa na función do valor da opción put. Se a taxa de interese é negativa, o titular da opción pode obter unhas ganancias esperadas infinitas pospoñendo indefinidamente o exercicio da opción. Este incentivo de demora infinita pode ser contrarrestado por unha oportunidade significativa de que a opción se vaia quedando sen diñeiro a medida que o tempo transcorre. Este é o caso en que a taxa de crecemento do activo subxacente  $X_t$  é suficientemente grande comparada co valor absoluto da taxa de interese negativo, como se indica na condición (2.15):  $|\rho| < \frac{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})^2}{(2\sigma^2)}$ .

A función  $v_\infty$  definida en (2.16) ten as seguintes propiedades na rexión de continuación:  $v$  é decrecente, domina a función de pago inmediato, e o proceso  $\{v_\infty(X_t)e^{-\rho t}\}_t$  é unha martingala local. A condición (2.15) tamén potencia a supermartingalidade do proceso  $\{v_\infty(X_t)e^{-\rho t}\}_t$  na rexión de exercicio temperá.

A continuación, na Figura 2.4, móstrase a gráfica dunha opción put perpetua. A liña descontinua representa á función de pago mentres que a liña sólida representa o valor da opción. Ademais podemos apreciar a dobre fronteira libre marcada con rombos.

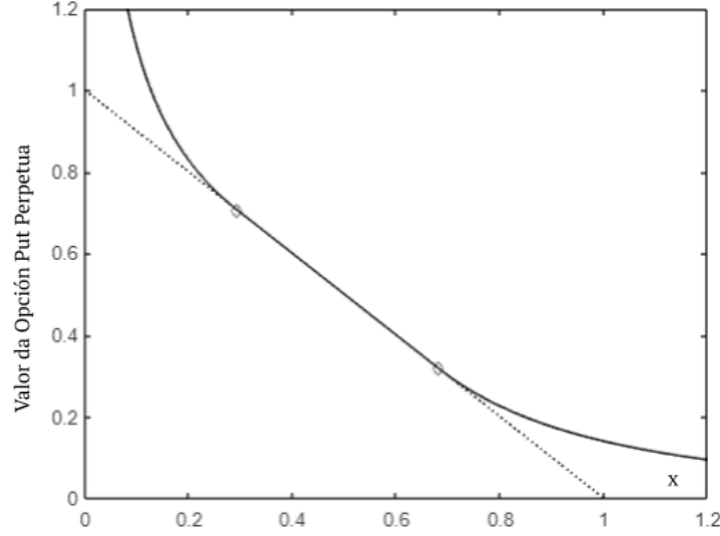


Figura 2.4: O Valor da Opção Put Perpetua com  $\rho = -1\%$ ,  $K = 1$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $\mu = 4\%$

Se temos unha madurez finita e unha taxa de interese negativa, o Teorema 2.5 proporciona unha descripción precisa da rexión de dobre continuación, que está separada da rexión de exercicio temperá por unha dobre fronteira libre. A fronteira libre superior disfruta de todas as propiedades que ten no caso estándar de taxa de interese non negativa: é crecente e continua, e tende ao prezo de exercicio na data de vencemento. A fronteira libre inferior é decrecente en todas partes e continua en todas partes excepto na data de vencemento, onde presenta unha descontinuidade.

**Teorema 2.5.** [2] (*Rexión de Continuación e Caracterización da Fronteira Libre con Madurez Finita e Taxa de Interese Negativa*).

Si se satisfan as condicións (2.14) e (2.15), entón para calquera  $t \in [0, T)$ , existe  $u(t)$  e  $l(t)$  tales que

$$\frac{\rho K}{\rho - \mu} \leq l(t) < u(t) \leq K, \quad (2.20)$$

donde  $(K - x)^+ = v(t, x)$  para calquera  $x \in [l(t), u(t)]$  e  $(K - x)^+ < v(t, x)$  para calquera  $x \notin [l(t), u(t)]$ .

A fronteira libre inferior  $l : [0, T] \rightarrow [0, l_\infty)$  é decrecente, continua para calquera  $t \in [0, T)$ ,  $l(T^-) = \frac{\rho K}{\rho - \mu} > l(T) = 0$ .

A fronteira libre superior  $u : [0, T] \rightarrow (u_\infty, K]$  é crecente, continua para calquera  $t \in [0, T]$ , e  $u(T) = u(T^-) = K$ .

A rexión de exercicio temperá é  $\mathcal{ER} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : l(t) \leq x \leq u(t)\}$ , e a rexión de dobre continuación é  $\mathcal{CR} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : 0 \leq x < l(t) \text{ ou } x > u(t)\}$ , donde  $\{(t, l(t)); (t, u(t)) : t \in [0, T]\}$  é a dobre fronteira libre.

Describir a fronteira libre cerca do vencemento é moi importante para o titular da opción americana. O comportamento asintótico da fronteira libre dunha opción put americana no caso estándar de taxa de interese positiva e dun activo subxacente difusivo xa é bastante conocido.

No Teorema 2.6 veremos o comportamento asintótico da dobre fronteira libre na data de vencemento e no caso de ter unha taxa de interese negativa. Cando a taxa de interese domina a rentabilidade por dividendo non negativa do activo subxacente, a fronteira libre dunha opción put americana tende na data de vencemento ao prezo de exercicio de forma parabólica-logarítmica. No caso dunha taxa de interese negativa, a fronteira libre superior ten o mesmo comportamento asintótico na data de vencemento. Mentres que a fronteira libre inferior non estándar converxe monótona e decrecentemente na data de vencemento ao límite pola esquerda  $l(T^-) = \frac{\rho K}{(\rho - \mu)}$  de forma parabólica.

**Teorema 2.6.** [2] (*O Comportamento Asintótico das Fronteiras Libres na Madurez para Opcións Put con Taxa de Interese Negativa*).

Se se satisfan as condicións (2.14) e (2.15), entón se  $t \rightarrow T$ , a fronteira libre superior satisfai

$$u(t) - K \sim -K\sigma \sqrt{(T-t) \ln \frac{\sigma^2}{8\pi(T-t)\mu^2}}.$$

Se  $t \rightarrow T$ , a fronteira libre inferior satisfai

$$l(t) - \frac{\rho K}{\rho - \mu} \sim \frac{\rho K}{\rho - \mu} (-y^* \sigma \sqrt{(T-t)}),$$

donde  $y^* \in (-1, 0)$ ,  $y^* \approx -0,638$ , é un número tal que:

$$\phi(y) = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta (y + \mathcal{B}(s)) ds \right] = 0 \text{ para todo } y \leq y^* \text{ e } \phi(y) > 0 \text{ para todo } y > y^*$$

As condicións (2.14) e (2.15) son suficientes pero non necesarias para a existencia da dobre fronteira libre. Na próxima proposición obsérvase a condición necesaria dependente do tempo para a optimalidade do exercicio temperán da opción put durante a vida da opción cando as taxas de interese son negativas. Como consecuencia, esta condición tamen é necesaria para a existencia da dobre fronteira libre con taxa de interese negativa.

**Proposición 2.7.** [2] (*Condición Necesaria para o Exercicio Temperán con Taxa de Interese Negativa*).

Si  $\rho < 0$  en  $\mu > 0$ , a condición necesaria para o exercicio óptimo da opción put americana con madurez finita en  $t \in [0, T)$  é

$$\mathcal{N}^{-1}(e^{\rho(T-t)}) - \mathcal{N}^{-1}(e^{(\rho-\mu)(T-t)}) \geq \sigma \sqrt{T-t}, \quad (2.21)$$

cando  $\mathcal{N}^{-1}(\cdot)$  denota a inversa da función de distribución estándar normal acumulativa.

A condición (2.21) require que  $\mu$ , a taxa de crecemento do activo subxacente  $x$ , sexa relativamente alta comparada coa taxa de interese (negativa)  $\rho$  no sentido de que a distancia entre os cuantiles  $\mathcal{N}^{-1}(e^{\rho(T-t)})$  e  $\mathcal{N}^{-1}(e^{(\rho-\mu)(T-t)})$  é polo menos tan grande como  $\sigma\sqrt{T-t}$ . Aínda que axuda a limitar a forza relativa de  $\rho$  en comparación con  $\mu$ , a condición (2.21) é un requerimento máis feble que as condicións suficientes (2.14) e (2.15).

A intuición da Proposición 2.7: Se o valor da opción put Europea no tempo  $t$ ,  $v_e(t, x)$  domina estrictamente a función de pago inmediato para todo  $x \geq 0$ , entón non hai exercicio temperán óptimo en  $t$ , e dado que o valor da opción put americana no tempo  $t$  domina a  $v_e(t, x)$ , entón,  $v(t, x) \geq v_e(t, x) > (K - x)^+$ . Se as taxas de interese son non negativas, é dicir,  $\rho \geq 0$ , isto non pode pasar nunca, xa que, en  $x = 0$  temos que  $v_e(t, 0) = Ke^{-\rho(T-t)} \leq (K - 0)^+ = K$ , e por continuidade  $v_e(t, x)$  quedará por debaixo de  $(K - x)^+$  nun segmento de valores subxacentes non negativos. Pola contra, cando as taxas de interese son negativas,  $\rho < 0$ , o valor da opción put Europea no tempo  $t$  cando o activo subxacente é 0 domina a función de pago inmediato, porque  $v_e(t, 0) = Ke^{-\rho(T-t)} > (K - 0)^+ = K$ . Por eso, dúas alternativas son posibles: ou ben,  $v_e(t, x)$  domina a función de pago inmediato para todo  $x \geq 0$ , e consecuentemente, o exercicio temperán nunca é óptimo en  $t$ , ou ben,  $v_e(t, x) < (K - x)^+$  para algún  $x > 0$ , entón, o exercicio temperán debería ser óptimo en  $t$ . Cando  $\rho < 0$  a ecuación (2.21) é equivalente a existencia de algúns  $x > 0$  de forma que  $v_e(t, x) \leq (K - x)^+$ . A ecuación (2.21) é polo tanto unha condición mínima necesaria para a posibilidade do exercicio temperán óptimo en  $t$  no caso de taxas de interese negativas que á súa vez implica a posibilidade de existencia da dobre rexión de continuación.

### 2.3. Opción Americana de Compra con Tipos Negativos

No sección 2.2 centrámonos na opción put americana con tipos de interese negativos, nesta realizaremos unha análise similar mais para a opción call americana. Ao igual que na sección 2.2, séguense as ideas extraídas de [2].

Consideramos a opción call americana sobre un activo  $X_t$  que segue un movemento browniano xeométrico, cuxa tendencia baixo medida de probabilidade real denotamos con  $\mu$ . Denotamos a volatilidade con  $\sigma$ , o prezo do exercicio con  $K$  e a taxa de interese con  $\rho$ . O valor da opción call no momento  $t$  está dado por

$$v_t = v(t, X_t) = \text{ess sup}_{\tau \in [t, T]} \mathbb{E}[e^{-\rho(\tau-t)}(X_\tau - K)^+ | \mathcal{F}_\tau],$$

ou equivalentemente

$$v_t = v(t, X_t) = \sup_{\theta \in [0, T-t]} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta} (x_\theta \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma W_\theta) - K)^+], \quad (2.22)$$

donde  $W_t$  segue unha distribución browniana baixo a medida de probabilidade real. Centrarémonos no caso  $\rho < 0$ . Se  $\mu > 0$  o valor da opción perpetua

$$v_\infty(x_t) = \sup_{0 \leq \theta} \mathbb{E}[e^{-\rho\theta} (x_\theta \cdot \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma W_\theta) - K)^+].$$

non está acotado pola desigualdade de Jensen. De xeito contrario, para  $\rho, \mu < 0$ , a función  $v$  en (2.22) pode ser acotada incluso no caso perpetuo, como mostra na Proposición 2.9. No caso de madurez finita,  $v$  en (2.22) pode ser caracterizada como a solución da desigualdade variacional (2.12) con  $\pi(x) = (x - K)^+$ . Sen ter en conta o signo de  $\rho$  a función  $v$  en (2.22) domina o pago da opción call ( $0 \leq (x - K)^+ \leq v(t, x)$  para calquera  $t \in [0, T]$  e  $x \geq 0$ ), e é convexa e crecente con respecto a  $x$  para calquera  $t \in [0, T]$ . Estas propiedades son herdadas pola convexidade e monotonía do pago da opción call. Pola definición de  $v$  en (2.22) como un supremo no conxunto de tempos de parada dende 0 hasta o tempo de vencemento, podemos deducir que, para calquera  $x \geq 0$ , a función  $v(t, x)$  é decrecente con respecto de  $t$ . Obviamente, a opción con madurez finita está dominada pola opción perpetua:  $v(t, x) \leq v_\infty(x)$  para calquera  $t \in [0, T]$   $x \geq 0$ . Tamén se pode ver que o signo negativo de  $\rho$  e  $\mu$  e as condicións adicionais de (2.23) e (2.24) preveñen que a función identidade domine a función  $v_\infty$ , é dicir, a desigualdade estándar  $v_\infty(x) \leq x$  non é certa.

As propiedades mencionadas de  $v$  implican que a rexión de exercicio temperará no tempo  $t$  está constituída por un segmento conectado definido polos extremos  $l(t) \leq u(t) \in [0, K]$ , donde

$$l(t) = \inf (x \geq 0 : v(t, x) = (x - K)^+) \vee$$

$$u(t) = \sup (x \geq 0 : v(t, x) = (x - K)^+)$$

tal que  $v(t, x) = (x - K)^+$  para  $l(t) \leq x \leq u(t)$  e  $v(t, x) > (x - K)^+$  para  $x < l(t)$  e  $x > u(t)$ . Isto implica que a rexión de continuación no tempo  $t$  se separa en dous segmentos. Caracterizamos a rexión de continuación, a rexión de exercicio temperará e a dobre fronteira libre no Teorema 2.10. Nas Proposicións 2.8 e 2.9 damos as restriccións para os valores dos parámetros baixo os cales a opción call perpetua americana é finita aínda cando a taxa de interese é negativa. Tamén damos as expresións explícitas para a dobre fronteira libre.

No caso de madurez finita, a fronteira libre inferior ten todas as mesmas propiedades que no caso estándar, onde as taxas de interese son positivas: é decrecente e continua, e tende ao prezo de exercicio na data de vencemento. A fronteira libre superior é crecente e continua en todas partes excepto na data de vencemento, onde é finita.

A Proposición 2.9 e o Teorema 2.10 son probados construíndo respectivamente a Proposición 2.4 e o Teorema 2.5 e aplicando a simetría put-call americana. A simetría put-call americana relaciona o prezo da opción call americana co prezo da opción put americana, cambiando só o prezo subxacente inicial polo prezo de exercicio e a rendabilidade por dividendo pola taxa de interese. Esta simetría compréndese pola simetría da distribución normal logarítmica do activo  $X$  e da simetría entre os pagos das opcións call e put. O cambio permítenos derivar dita propiedade tamén no noso caso, onde tanto a taxa de interese  $\rho$  como a rendabilidade por dividendo  $\delta = \rho - \mu$  son negativas.

**Proposición 2.8.** [2] (*Simetría Put-Call Americana*).

*Considerando a opción call americana con prezo de exercicio  $K$ , taxa de interese  $\rho$ , derivada subxacente  $\mu$ , volatilidade subxacente  $\sigma$ , e valor inicial subxacente  $x$ , cuxo valor no tempo  $t \in [0, T]$  vén denotado por  $v(t, x) = v_{\text{call}}(t, x; K, \rho, \mu, \sigma)$  en (2.22).*

*Considerando a opción put americana simétrica con prezo de exercicio  $K_{\text{put}} = x$ , taxa de interese  $\rho_{\text{put}} = \rho - \mu$ , derivada subxacente  $\mu_{\text{put}} = -\mu$ , volatilidade subxacente  $\sigma_{\text{put}} = \sigma$ , e valor inicial subxacente  $x_{\text{put}} = K$ , cuxo valor no tempo  $t \in [0, T]$  vén denotado por  $v_{\text{put}}(t, x_{\text{put}}; K_{\text{put}}, \rho_{\text{put}}, \mu_{\text{put}}, \sigma_{\text{put}}) = v_{\text{put}}(t, K; x, \rho - \mu, -\mu, \sigma)$ .*

1. *As condicións*

$$\rho < \mu < -\frac{\sigma^2}{2} < 0, \quad (2.23)$$

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\rho\sigma^2 > 0 \quad (2.24)$$

*para  $\rho, \mu, \sigma$  no problema call americano son equivalentes as condicións (2.14) e (2.15) para os parámetros  $\rho_{\text{put}}, \mu_{\text{put}}, \sigma_{\text{put}}$  no problema put americano simétrico.*

2. *O valor da opción call americana coincide co valor da put simétrica americana*

$$v(t, x) = v_{\text{call}}(t, x; K, \rho, \mu, \sigma) = v_{\text{put}}(t, K; x, \rho - \mu, -\mu, \sigma) \quad (2.25)$$

*para calquera  $t \in [0, T]$ .*

3. *Para calquera  $t \in [0, T]$ , se  $l(t)$  (respectivamente  $u(t)$ ) denota a fronteira libre inferior (respectivamente superior) no tempo  $t$  para a opción call americana con prezo de exercicio  $K$  e parámetros  $\rho, \mu$  e  $\sigma$ . E  $l_{\text{put}}(t)$  (respectivamente  $u_{\text{put}}(t)$ ) denota a fronteira libre inferior (respectivamente superior) no tempo  $t$  para a put simétrica americana con prezo de exercicio  $K_{\text{put}} = 1$  e parámetros  $\rho_{\text{put}}, \mu_{\text{put}}$  e  $\sigma_{\text{put}}$ . Si se cumpren (2.23) e (2.24), entón para calquera  $t \in [0, T]$ , temos que*

$$l(t) = \frac{K}{u_{\text{put}}(t)} \text{ e } u(t) = \frac{K}{l_{\text{put}}(t)}. \quad (2.26)$$

A continuación mostraremos unha táboa na que se verá como o valor dunha opción call americana (con parámetros  $\rho_{call} = -0,05$ ,  $\mu_{call} = -0,04$ ,  $\sigma_{call} = 0,15$  e  $T = 2$ ) coincide co valor da put simétrica americana (con parámetros  $\rho_{put} = -0,01$ ,  $\mu_{put} = 0,04$ ,  $\sigma_{put} = 0,15$  e  $T = 2$ ).

Parámetros Call	Parámetros Put	$v_{call}$	$v_{put}$
$K_{call} = 1$ , $x_{call} = 1$	$x_{put} = 1$ , $K_{put} = 1$	0.0420	0.0416
$K_{call} = 0,8$ , $x_{call} = 1$	$x_{put} = 0,8$ , $K_{put} = 1$	0.2	0.2003
$K_{call} = 1,6$ , $x_{call} = 1$	$x_{put} = 1,6$ , $K_{put} = 1$	0.000451	0.000017

Cadro 2.1: Proba da proposición 2.8

Utilizamos a Proposición 2.8 para estudar a dobre fronteira libre para a opción call americana. A Proposición 2.9 analiza o caso perpetuo. No Teorema 2.10 vemos o caso de madurez finita, e Teorema 2.11 explica o comportamento asintótico das fronteiras libre superior e inferior na data de vencemento.

**Proposición 2.9.** [2] (*Perpetual Call con Taxa de Interese Negativa*).

Se  $T = +\infty$ , e se satisfan as condicións (2.23) e (2.24), entón o valor da opción call perpetua americana é

$$v_{\infty} = \begin{cases} A_l \cdot x^{\xi_l} & \text{para } x \in (0, l_{\infty}), \\ x - K & \text{para } x \in [l_{\infty}, u_{\infty}], \\ A_u \cdot x^{\xi_u} & \text{para } x \in (u_{\infty}, +\infty), \end{cases}$$

onde  $\xi_l > \xi_u > 1$  son as solucións positivas da ecuación (2.17). A dobre fronteira libre vén dada por  $l_{\infty}, u_{\infty}$  definidas en (2.18), con  $A_l = \frac{(l_{\infty})^{1-\xi_l}}{\xi_l}$  e  $A_u = \frac{(u_{\infty})^{1-\xi_u}}{\xi_u}$ .

Na Figura 2.5, móstrase a gráfica dunha opción call perpetua. A liña descontinua representa á función de pago mentres que a liña sólida representa o valor da opción. Ademais podemos apreciar a dobre fronteira libre marcada con rombos.

**Teorema 2.10.** [2] (*Rexión de Continuación e Caracterización da Fronteira Libre con Madurez Finita e Taxa de Interese Negativa*).

Se se satisfán as condicións (2.23) e (2.24), para calquera  $t \in [0, T)$ , existen  $l(t)$  e  $u(t)$  tales que

$$l(t) \leq l_{\infty} < u_{\infty} \leq u(t)$$

tal que  $(x - K)^+ = v(t, x)$  para calquera  $x \in [l(t), u(t)]$  e  $(x - K)^+ < v(t, x)$  para calquera  $x \notin [l(t), u(t)]$ .

A fronteira libre inferior  $l : [0, T] \rightarrow [K, l_\infty)$  é decrecente, continua para calquera  $t \in [0, T]$ , e  $l(T) = l(T^-) = K$ .

A fronteira libre superior  $u : [0, T] \rightarrow (u_\infty, \frac{\rho K}{\rho - \mu}]$  é crecente, continua para calquera  $t \in [0, T]$ , con  $u(T^-) = \frac{\rho K}{\rho - \mu} > K$  e  $u(T) = +\infty$ .

A rexión de exercicio temperá é  $\mathcal{ER} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : l(t) \leq x \leq u(t)\}$ , e a rexión de dobre continuación é  $\mathcal{CR} = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty] : 0 \leq x < l(t) \text{ ou } x > u(t)\}$ , donde  $\{(t, l(t)); (t, u(t)) : t \in [0, T]\}$  é a dobre fronteira libre.

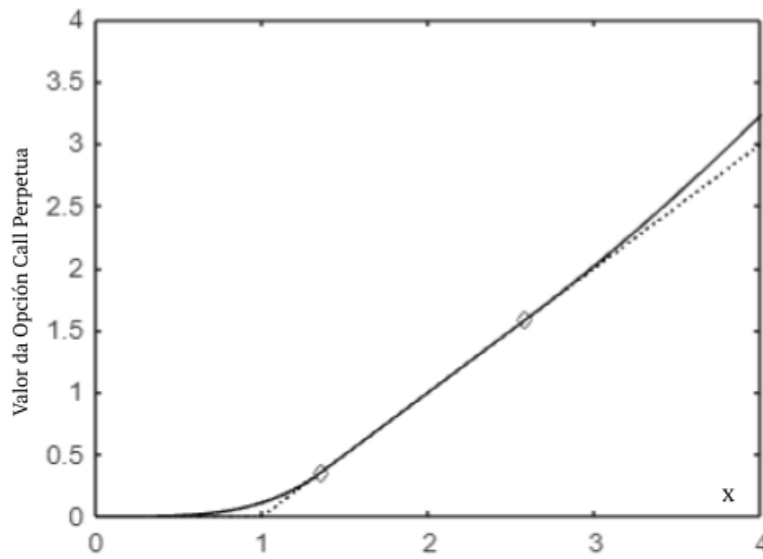


Figura 2.5: O Valor da Opção Call Perpetua com  $\rho = -7\%$ ,  $K = 1$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $\mu = -5\%$

**Teorema 2.11.** [2] (*O Comportamento Asintótico das Fronteiras Libres na Madurez para Opções Call con Taxa de Interesse Negativa*).

Baixo as condicións (2.23) e (2.24), para  $t \rightarrow T$ , a fronteira libre superior satisfai

$$u(t) - \frac{\rho K}{\rho - \mu} \sim y^* \sigma \sqrt{(T - t)},$$

Si  $t \rightarrow T$ , a fronteira libre inferior satisfai

$$l(t) - K \sim K \sigma \sqrt{(T - t) \ln \frac{\sigma^2}{8\pi(T - t)\mu^2}}.$$

donde  $y^* \approx -0,638$  está definido no Teorema 2.6.

As condicións (2.23) e (2.24) son suficientes pero non necesarias para a existencia da dobre fronteira libre para a opción call. A condición necesaria para o exercicio óptimo en  $t$

é  $\mathcal{N}^{-1}(e^{-(\mu-\rho)(T-t)}) - \mathcal{N}^{-1}(e^{\rho(T-t)}) \geq \sigma\sqrt{T-t}$ , que pode ser obtida aplicando a simetría put-call á condición necesaria para o exercicio temperán das opcións put da Proposición 2.7.

## 2.4. Préstamos de Ouro

Os préstamos garantizados experimentaron un gran crecemento dende a crise financeira. Os bonos do tesouro e as accións son as garantías máis aceptadas polas institucións financeiras, pero nos últimos anos o uso do ouro como garantía está crecendo en todo o mundo. As principais empresas financeiras non bancarias de India como Muthoot Finance e Manappuram Finance foron bastante activos en préstamos con garantías de ouro. Os préstamos de ouro tenden a ter tempos de madurez curtos e diferenciais bastante altos (taxa de préstamo menos taxa libre de risco), aínda que sexan significativamente inferior aos préstamos sen garantía. A opción de prepago é común, permitindo a redención do ouro en calquera momento antes da data de vencemento. Destacamos que os préstamos de ouro difiren notablemente dos préstamos de bolsa, porque o ouro é un activo de investimento negociable con custos de almacenamento / seguros e sen ganancias. Isto pódenos levar a políticas de redención particulares que constituirán unha aplicación interesante dos resultados dados na Proposición 2.9 e nos Teoremas 2.10 e 2.11.

Nun préstamo de ouro, o prestatario recibe no tempo  $t = 0$  (data da firma do contrato) a cantidade do préstamo  $q > 0$ , usando unha unidade de masa de ouro como garantía, que deberá ser entregada ao prestador. Esta cantidade crece a unha velocidade  $\gamma$ , donde  $\gamma$  é a taxa do préstamo (maior a taxa libre de risco  $r$ ) estipulada no contrato. Polo tanto, o custo de reembolsar o préstamo no tempo  $t$  vén dado por  $qe^{\gamma t}$ . Cando o prestatario devolve o préstamo, recibe o ouro de volta e o contrato remata. Podemos asumir que os custos de almacenamento e seguros das reservas de ouro son  $G_t c > 0$  por unidade de tempo, onde  $G_t$  é o proceso do prezo do ouro ao contado no tempo  $t$ . Suporemos dinámicas de tipo browniano xeométrico para o proceso  $G_t$  baixo a medida de probabilidade de risco neutro  $\mathcal{Q}$  de modo que se verifica a ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dG_t}{G_t} = (r + c)dt + \sigma dW_t,$$

onde  $r$  é a taxa sin risco constante,  $\sigma$  a volatilidade das devolucións do ouro e  $W$  un movemento browniano baixo a medida de risco neutral  $\mathcal{Q}$ . Dada unha data de vencemento  $T$ , o valor da opción de redención no tempo  $t = 0$  é

$$C(0, G_0) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[e^{-r\tau}(G_\tau - qe^{\gamma\tau})^+] = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}}[e^{-(r-\gamma)\tau}(X_\tau - q)^+],$$

onde  $X_t = G_t e^{-\gamma t}$  é o prezo do ouro descontado pola taxa  $\gamma$ . Entónces, o valor inicial da opción de redención do préstamos de ouro é o valor inicial dunha opción call americana en (2.22) sobre o valor subxacente  $X_t$ , o cal segue unha distribución normal logarítmica, con parámetros  $\rho = r - \gamma < 0$ ,  $\mu = r + c - \gamma$  e  $K = q$ .

Consecuentemente, o valor da opción de redención en calquera data  $t \in [0, T]$  pode ser calculado como  $C(t, G_t) = v(t, X_t)$ , con  $v$  definida en (2.22). A porcentaxe de almacenamento e os custos de seguro  $c$  son positivos e normalmente por debaixo do diferencial  $\gamma - r > 0$ . Así, fixamos  $\rho < \mu < 0$ . Agora, se as condicións (2.23) e (2.24) se cumpren, é dicir,

$$r - \gamma < r - \gamma + c < -\frac{\sigma^2}{2} < 0 \quad e \quad (2.27)$$

$$(r - \gamma + c - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2(r - \gamma) > 0, \quad (2.28)$$

para o caso perpetuo aparece unha dobre rexión de non redención, como vimos na Proposición 2.9. Gracias a esta mesma proposición podemos calcular as fronteiras libres constantes perpetuas  $l_\infty$  e  $u_\infty$  en termos do proceso do prezo do ouro descontado  $X_t = G_t e^{-\gamma t}$ . A súa vez mediante o Teorema 2.11, para os contratos con madurez finita, podemos obter unha aproximación asintótica das dobres fronteiras libres cerca da data de vencemento. Usualmente para os préstamos de ouro, as datas de vencemento  $T$  están cerca dos 36 meses. As taxas de préstamo normalmente oscilan entre o 12% e o 16% para os bancos e entre o 12% e o 24% para as institucións financeiras especializadas, mentres que o rendemento dos títulos do goberno indio a curto prazo estivo rondando o 8%. A volatilidade histórica, expresada en rupias indias, do cambio diario no rexistro do prezo do ouro foi do 21,4%, segundo datos do Consello Mundial do Ouro. Os custos medios de almacenamento e seguro do ouro son aproximadamente do 2%. Polo tanto, fixando  $r = 8\%$ ,  $c = 2\%$ ,  $\gamma = 17\%$  e  $\sigma = 21,4\%$ , cúmprense as condicións (6.1) e (6.2). Se supoñemos agora que  $q = 1$ , na seguinte figura veremos a opción perpetua para este caso real, o préstamo de ouro. Na figura tamén podremos apreciar a dobre rexión de non redención, a fronteira libre constante inferior  $l_\infty = 1,70$  e a fronteira libre constante superior  $u_\infty = 2,64$ .

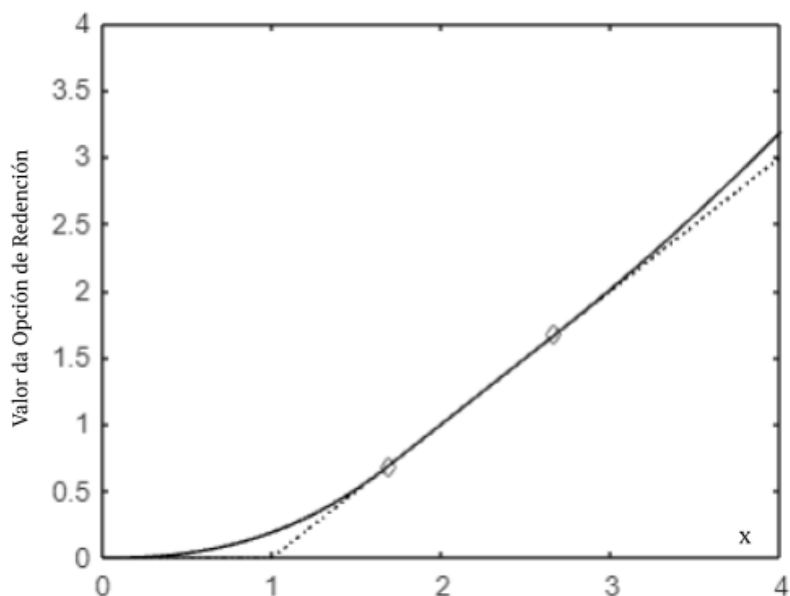


Figura 2.6: O Valor da Opção de Redenção Perpetua do Préstamo de Ouro com  $q = 1$ ,  $r = 8\%$ ,  $c = 2\%$ ,  $\gamma = 17\%$  e  $\sigma = 21,4\%$

Como podemos ver, as opções put e call americanas com tipo de interesse negativo teñen aplicacións no mundo real á hora de valorar diferentes tipos de opcións, como por exemplo, a opción de redención do préstamo de ouro, ou tamén, distintas opcións de inversión de capital (inversión en plantas nucleares). Parte dos exemplos explicados neste capítulo foron extraídos de [2].

## Capítulo 3

# Métodos Numéricos para Opciones Americanas

Ao longo deste capítulo expóñense os métodos numéricos utilizados para a resolución dos problemas de valoración de opcións americanas.

### 3.1. Discretización de Tempo e Subxacente: Euler Implícito

Para resolver ditos problemas utilizaremos o método de diferenzas finitas. Empezamos por describir a resolución numérica da ecuación de Black-Scholes con condicións de contorno para opcións europeas.

#### Discretización do Problema Put Europeo

O primeiro paso para a utilización deste método consiste en establecer un dominio acotado. Agora, para un valor suficientemente grande  $x_\infty$ , temos a función  $v_e(t, x)$ , definida nun dominio  $D = [0, T] \times [0, x_\infty]$ , tal que:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} + (\rho - \mu)x \frac{\partial v_e}{\partial x} - \rho v_e = 0 \text{ en } D, \quad (3.1)$$

$$v_e(T, x) = \text{máx}(K - x, 0), \quad x > 0, \quad (3.2)$$

$$v_e(t, x_\infty) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.3)$$

$$v_e(t, 0) = Ke^{-\rho(T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (3.4)$$

Unha vez fixado o dominio acotado, consideraremos un enreixado con diferenzas finitas uniformes, cunha metodoloxía que estenderemos aos pasos das variables tempo e espazo. Por isto, para os números naturais  $N > 1$  e  $M > 1$ , os pasos constantes do tempo e espazo veñen definidos por

$$\Delta t = \frac{T}{N+1}, \quad \Delta x = \frac{x_\infty}{M+1},$$

polo tanto, o enreixado de diferenzas finitas está definido por unha serie de nodos

$$(t_j, x_i) = (j\Delta t, i\Delta x), \quad j = 0, \dots, N+1; \quad i = 0, \dots, M+1.$$

No esquema Euler implícito de diferenzas finitas, as derivadas que aparecen na ecuación (3.1) son aproximadas nos nodos do enreixado de diferenzas finitas así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2}(t_j, x_i) &\approx \frac{v_e(t_j, x_{i+1}) - 2v_e(t_j, x_i) + v_e(t_j, x_{i-1}))}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial v_e}{\partial x}(t_j, x_i) &\approx \frac{v_e(t_j, x_{i+1}) - v_e(t_j, x_i)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial v_e}{\partial t}(t_j, x_i) &\approx \frac{v_e(t_{j+1}, x_i) - v_e(t_j, x_i)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Polo tanto, reescribindo a ecuación (3.1) no punto  $(t_j, x_i)$  para  $j = 1, \dots, N$ ;  $i = 1, \dots, M$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{v_e(t_{j+1}, x_i) - v_e(t_j, x_i)}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{v_e(t_j, x_{i+1}) - 2v_e(t_j, x_i) + v_e(t_j, x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \\ &+ (\rho - \mu)x_i \frac{v_e(t_j, x_{i+1}) - v_e(t_j, x_i)}{\Delta x} - \rho v_e(t_j, x_i) \approx 0. \end{aligned}$$

Despois agrupando a esquerda os termos no tempo  $t_j$ , conseguimos

$$\begin{aligned} &(1 + \Delta t\rho + \frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t(\rho - \mu)x_i}{\Delta x})v_e(t_j, x_i) - \frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{2\Delta x^2}v_e(t_j, x_{i-1}) + \\ &+ (-\frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t(\rho - \mu)x_i}{\Delta x})v_e(t_j, x_{i+1}) \approx v_e(t_{j+1}, x_i). \end{aligned}$$

Despois, definimos as aproximacións  $v_{e(j,i)} \approx v_e(t_j, x_i)$  como os valores que verifican exactamente as identidades aproximadas anteriores. Así, para cada  $j$  obtemos o sistema lineal de ecuacións

$$\begin{aligned} &-\frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{2\Delta x^2}v_{e(j,i-1)} + (1 + \Delta t\rho + \frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t(\rho - \mu)x_i}{\Delta x})v_{e(j,i)} + \\ &+ (-\frac{\Delta t\sigma^2 x_i^2}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t(\rho - \mu)x_i}{\Delta x})v_{e(j,i+1)} = v_{e(j+1,i)}. \end{aligned}$$

Agora, no esquema de marcha atrás no tempo, o sistema de ecuacións obtido para  $i = 1, \dots, M$  é resolto recurrentemente para  $j = N, N - 1, \dots, 1, 0$  empezando pola condición final.

$$v_{e(N+1,i)} = v_e(T, x_i) \text{ para todo } i = 1, \dots, M + 1.$$

Ademais, para cada  $j$ , temos as seguintes condicións de fronteira dadas por (3.3) e (3.4):

$$v_{e(j,M+1)} = v_e(t_j, x_\infty), v_{e(j,0)} = v_e(t_j, 0).$$

Por tanto a cada paso  $j = N, N - 1, \dots, 1, 0$  deberemos resolver o sistema lineal tridiagonal

$$Av_{ej} = s_j \tag{3.6}$$

donde os coeficientes que non son cero da matriz tridiagonal A veñen dados por

$$A_{i,i} = 1 + c + ax_i^2 + dx_i, \quad A_{i,i+1} = -bx_i^2 - dx_i, \quad A_{i+1,i} = -bx_i^2,$$

onde  $A_{1,1} = 1$ ,  $A_{M+1,M+1} = 1$ ,  $A_{1,2} = 0$ ,  $A_{M+1,M} = 0$  e os termos constantes son:

$$a = \frac{\Delta t \sigma^2}{\Delta x^2}, \quad b = \frac{\Delta t \sigma^2}{2\Delta x^2}, \quad c = \Delta t \rho, \quad d = \frac{\Delta t (\rho - \mu)}{\Delta x}.$$

Ademais,  $v_{ej}$  e  $s_j$  do sistema (3.6) veñen dados por:

$$\begin{aligned} v_{ej} &= (v_{e(j,0)}, v_{e(j,1)}, \dots, v_{e(j,M)}, v_{e(j,M+1)})^t, \\ s_j &= (Ke^{-\rho(T-t)}, v_{e(j+1,1)}, \dots, v_{e(j+1,M)}, 0), \end{aligned}$$

Para un cálculo máis detallado do cálculo da matriz A e os vectores  $v_{ej}$  e  $s_j$ , consultar [1].

O sistema (3.6) é equivalente ao seguinte problema de optimización sin restriccións:

$$\frac{1}{2} v_{ej}^T Av_{ej} - v_{ej}^T s_j = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} y^T Ay - y^T s_j \right). \tag{3.7}$$

### Discretización do Problema Call Europeo

Agora, ao igual que para a opción put, resolvemos o problema de valoración da opción call europea mediante o método de diferenzas finitas.

Polo tanto, para un valor suficientemente grande  $x_\infty$ , temos a función  $v_e(t, x)$ , definida nun dominio  $D = [0, T] \times [0, x_\infty]$ , tal que:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} + (\rho - \mu)x \frac{\partial v_e}{\partial x} - \rho v_e = 0 \text{ en } D, \quad (3.8)$$

$$v_e(T, x) = \max(x - K, 0), \quad x > 0, \quad (3.9)$$

$$v_e(t, x_\infty) = x_\infty \exp(-\mu(T-t)) - K \exp(-\rho(T-t)), \quad t \in [0, T] \quad (3.10)$$

$$v_e(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.11)$$

Agora ao igual que para a opción put utilizaremos o esquema Euler implícito de diferencias finitas mediante o cal obteremos o sistema de ecuacións:

$$Av_{ej} = s_j \quad (3.12)$$

donde a matriz  $A$  é a mesma que para a opción put e  $v_{ej}$  e  $s_j$  son tales que:

$$\begin{aligned} v_{ej} &= (v_{e(j,0)}, v_{e(j,1)}, \dots, v_{e(j,M)}, v_{e(j,M+1)})^t, \\ s_j &= (0, v_{e(j+1,1)}, \dots, v_{e(j+1,M)}, x_\infty \cdot e^{-\mu(T-t)} - K \cdot e^{-\rho(T-t)}), \end{aligned}$$

O sistema de ecuacións (3.12) e equivalente ao seguinte problema de optimización:

$$\frac{1}{2}v_{ej}^T Av_{ej} - v_{ej}^T s_j = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2}y^T Ay - y^T s_j \right). \quad (3.13)$$

## 3.2. Resolución do Problema da Opción de Venda Americana

Para resolver o problema de valoración da opción put americana extrapolaremos os resultados obtidos:

Deberemos resolver o problema

$$L(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\rho - \mu)x \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v = 0 \text{ en } D, \quad (3.14)$$

$$v(t, x) \geq \max(K - x, 0), \text{ en } D, \quad (3.15)$$

$$L(v) \cdot (v - \max(K - x, 0)) = 0, \text{ en } D. \quad (3.16)$$

e para isto son necesarios métodos numéricos para aproximar a solución.

Primeiro aplicaremos o esquema Euler implícito de diferenzas finitas. Polo tanto, para cada  $j = N, N - 1, \dots, 1, 0$ , consideramos  $v_j \approx v(t_j, \cdot)$  verificando

$$\frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} v_j'' + (\rho - \mu)xv_j' - \rho v_j \leq 0 \quad (3.17)$$

$$v_j \geq g_j \quad (3.18)$$

$$\left( \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} v_j'' + (\rho - \mu)xv_j' - \rho v_j \right) (v_j - g_j) = 0, \quad (3.19)$$

donde  $g_j = \max(K - x, 0)$  denota o prezo de exercicio no tempo  $t_j$ , o cal non depende de  $j$ .

Se consideramos a mesma discretización de diferenzas finitas no espazo que para a opción put Europea, obtemos o seguinte problema de complementariedade

$$A\bar{v}_j \geq s_j, \quad \bar{v}_j \geq \bar{g}_j, \quad (A\bar{v}_j - s_j)^T (\bar{v}_j - \bar{g}_j) = 0, \quad (3.20)$$

onde a matriz  $A$  e o vector  $s_j$  son os mesmos que para as opcións Europeas, e  $\bar{g}_j$  denota o vector da función  $g_j$  nos nodos de diferenzas finitas. O problema (3.20) é equivalente ao seguinte problema de programación con desigualdades como restriccións:

$$\frac{1}{2} \bar{v}_j^T A \bar{v}_j - \bar{v}_j^T s_j = \min_{y \geq \bar{g}_j} \left( \frac{1}{2} y^T A y - y^T s_j \right). \quad (3.21)$$

Este último problema de programación con desigualdades resolverémolo mediante o método de relaxación proxección. Para máis detalle ver [5].

### 3.3. Resolución do Problema da Opción de Compra Americana

Para continuar, extrapolaremos os resultados obtidos para resolver o problema de valoración das opcións call americanas:

Deberemos resolver o problema

$$L(v) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\rho - \mu)x \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v = 0 \text{ en } D, \quad (3.22)$$

$$v(t, x) \geq \max(x - K, 0), \text{ en } D, \quad (3.23)$$

$$L(v) \cdot (v - \max(x - K, 0)) = 0, \text{ en } D. \quad (3.24)$$

e para isto son necesarios métodos numéricos para aproximar a solución.

Agora, seguindo o mesmo proceso que para a opción put, aplicaremos o esquema Euler implícito de diferencias finitas considerando a mesma discretización que para a opción europea para obter o seguinte problema de complementariedade

$$A\bar{v}_j \geq s_j, \quad \bar{v}_j \geq \bar{g}_j, \quad (A\bar{v}_j - s_j)^T (\bar{v}_j - \bar{g}_j) = 0, \quad (3.25)$$

onde  $g_j = \max(x - K, 0)$  denota o prezo de exercicio no tempo  $t_j$ , o cal non depende de  $j$ , a matriz  $A$  e o vector  $s_j$  son os mesmos que para as opcións Europeas, e  $\bar{g}_j$  denota o vector da función  $g_j$  nos nodos de diferencias finitas. O problema (3.25) é equivalente ao seguinte problema de programación con desigualdades como restriccións:

$$\frac{1}{2} \bar{v}_j^T A \bar{v}_j - \bar{v}_j^T s_j = \min_{y \geq \bar{g}_j} \left( \frac{1}{2} y^T A y - y^T s_j \right). \quad (3.26)$$

Este último problema de programación con desigualdades resolverémolo mediante o método de relaxación proxección. Pódese ver con maior detalle en [5].

### 3.4. Resultados Numéricos

Nesta última sección do capítulo móstranse resultados numéricos de problemas de valoración de opcións americanas obtidos mediante o emprego dos métodos mencionados anteriormente a través do software matemático Matlab (ver programas en Anexo).

A continuación ilústranse unhas gráficas nas que se recollen o valor dunha opción americana de venda (Figura 3.1) e o valor dunha opción americana de compra (Figura 3.2) con madurez finita (data de vencemento  $T = 2$ ) obtida utilizando os métodos numéricos estudiados con  $M = 799$  e  $N = 63900 * 2$ , sendo  $N$  o número de pasos en tempo e  $M$  o número de pasos no subxacente.

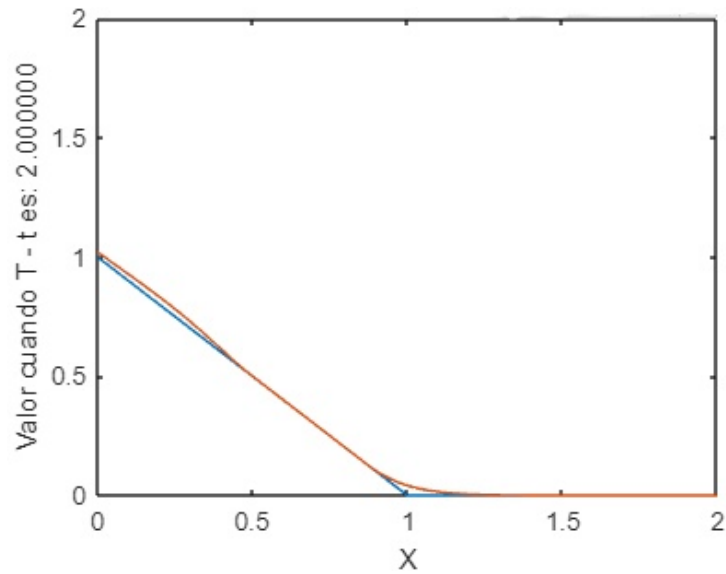


Figura 3.1: O Valor da Opción Put con  $T = 2$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $\rho = -1\%$ ,  $\mu = 4\%$ ,  $K = 1$ ,  $N = 63900 * 2$  e  $M = 799$

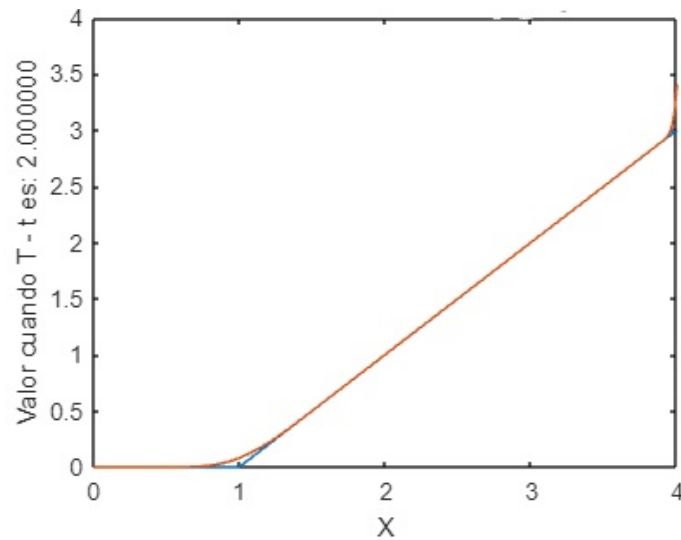


Figura 3.2: O Valor da Opción Call con  $T = 2$ ,  $\sigma = 21,4\%$ ,  $\rho = -9\%$ ,  $\mu = -7\%$ ,  $K = 1$ ,  $N = 63900 * 2$  e  $M = 799$

Nas dúas gráficas desta última sección (tanto para as opcións americanas de venda como para as de compra) o eixo  $x$  corresponde ao valor do activo subxacente  $x$  e o eixo  $y$  corresponde ao valor da opción  $v(t, x)$ . Ademais no cálculo de todas elas poden existir erros de aproximación derivados do enreixado de tempo e subxacente.

Por último, mediante a resolución numérica tamén se obtivo a táboa 2.1 na que vemos a paridade put-call.

## Capítulo 4

# Conclusión

As opcións put e call americanas con tipo de interese negativo endógeno son importantes porque son a reformulación de problemas de opción de préstamos garantizados e de presupostación de capital. Para as opcións americanas con taxa de interese negativa e madurez finita vimos as condicións que levan a aparición dunha dobre rexión de continuación non estándar (o exercicio da opción é retrasado optimamente tanto cando o diñeiro é insuficiente como cando é demasiado) e estudamos as propiedades (existencia, monotonía, continuidade, límites e comportamento cerca da data de vencemento) da dobre fronteira libre que separa a rexión de exercicio da dobre rexión de continuación.

Ademais, tamén vimos que existen certas aplicacións reais para estes este tipo de problemas (como son, a opción de redención do préstamo de ouro, ou tamén, distintas opcións de inversión de capital) e reformulando así os problemas reais como problemas de opción americana con tipo de interese negativo logramos resolver estes mediante o uso de todo o argumentado no traballo.

Para rematar, estudamos os métodos numéricos para a resolución dos problemas de valoración das opcións put e call americanas, tanto para o caso perpetuo como para o caso con madurez finita. A súa vez, utilizando todo o estudiado, fixéronse os programas de Matlab adecuados para a resolución destes problemas de valoración de opcións co fin de obter o valor de ditas opcións tanto numerica como graficamente e comprobouse que as opcións americanas con madurez finita tenden a opción perpetua cando aumentamos o tempo de madurez infinitamente.



# Anexo: Programas para a Resolución de Problemas de Valoración de Opciones

Neste anexo veremos os programas feitos en Matlab para a resolución dos problemas de valoración de opcións vistos neste traballo. Algunhas ideas aplicadas para a realización destes programas foron recollidas de [4].

- Método Relaxación Proyección

```
function [vk,iter] = RelajacionProyeccion(bb,aa,cc,s,v_min,max_iter_rel,error_max)
% Resolución de sistemas tridiagonales mediante relajacion con proyeccion.
%
% O metodo de relajacion e un metodo iterativo no que cada valor
% do vector solucion se calcula en funcion dos valores calculados
% no paso anterior ata que o error se fai inferior ao maximo permitido.
% Cada x(i) calculase da seguinte forma:
%
%  $x(i,t+1) = x(i,t) + \omega(f(i) - b(i)*x(i-1,t+1) -$ 
%  $c(i)*x(i+1,t) - a(i)*x(i,t))/a(i)$ 
%
% donde t+1 indica valores da iteracion actual e t da anterior.
%
% No metodo de relajacion con proyeccion os valores de x deben ser maiores
% que o obstaculo polo que se corrixe o seu valor cada vez que se fan inferiores
% ao mesmo.
```

34 ANEXO: PROGRAMAS PARA A RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

```

% FUNCTION : [x,iter] = RelajacionProyeccion(b,a,c,f,x_min,omega,max_iter,error_max)
% b a c: Vectores que conteñen a matriz tridiagonal.
% a: Diagonal principal da matriz.
% b: Diagonal inferior da matriz.
% c: Diagonal superior da matriz.
% f: Vector ao que debe ser igual o produto da matriz pola solucion.
% x_min : valor minimo que debe tomar a solucion do sistema.
% omega : Parametro de relaxacion.
% max_iter : Número maximo de iteracions permitido.
% error_max : error maximo permitido.
% x: Vector resultado.
% iter : Numero de iteracions que foron necesarias na aplicacion do metodo.

n = length(aa);
vk = zeros(1,n);
dif = zeros(1,n);
error = error_max + 1;
iter = 0;

while ((error > error_max) & (iter < max_iter_rel))
aux = vk;
vk(1) = vk(1) + (s(1) - cc(1).*vk(2)-aa(1).*vk(1))./aa(1);
vk(1) = max(vk(1),v_min(1));
for i=2:n-1
vk(i) = vk(i) + (s(i) - vk(i-1).*bb(i-1) - vk(i+1).*cc(i)-aa(i).*vk(i))./aa(i);
vk(i) = max(vk(i),v_min(i));
end;
vk(n) = vk(n) + (s(n) - vk(n-1).*bb(n-1)-aa(n).*vk(n))./aa(n);
vk(n) = max(vk(n),v_min(n));
dif = vk - aux;
error = (sum(dif.^2))./sum(vk.^2);
iter = iter + 1;
end;

```

- Opción Put Perpetua

Función chi:

```
function [chil,chiu] = chi(sigma,mu,rho)
chil = (-mu/(sigma^2))+0.5+sqrt(0.25+((2*rho-mu)/(sigma^2))+((mu^2)/(sigma^4)));
chiu = (-mu/(sigma^2))+0.5-sqrt(0.25+((2*rho-mu)/(sigma^2))+((mu^2)/(sigma^4)));
end
```

Función pboundary:

```
function [l_infty,u_infty] = pboundary(K,chil,chiu)
l_infty = K*(chil/(chil-1));
u_infty = K*(chiu/(chiu-1));
end
```

Función A:

```
function [Al,Au] = A(l_infty,u_infty,chil,chiu)
Al = -(((l_infty)^(1-chil))/chil);
Au = -(((u_infty)^(1-chiu))/chiu);
end
```

Función v\_infty:

```
function [v_inf] = v_infty(K,Al,Au,chil,chiu,l_infty,u_infty,x)
v1=Al.*x.^(chil);
v2=K-x;
v3=Au.*x.^(chiu);
v_inf=v1.*((x>0)&(x<l_infty))+v2.*((x>=l_infty)&(x<=u_infty))+v3.*(x>u_infty);
end
```

Programa principal:

```
%Perpetual Put Option

K=input('ingrese K');
sigma=input('ingrese sigma');
rho=input('ingrese rho');
```

36 ANEXO: PROGRAMAS PARA A RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

```

mu=input('ingrese mu');
M=input('ingrese M');
x_infty=4*K;
deltax=x_infty/(M+1);
x=0:deltax:x_infty;

[chil,chiu] = chi(sigma,mu,rho);

[l_infty,u_infty] = pboundary(K,chil,chiu);

[Al,Au] = A(l_infty,u_infty,chil,chiu);

if (rho<0) && ((mu-(sigma^(2)/2))>0) && (((mu-(sigma^(2)/2)))^(2)+2*rho*sigma^(2)>0)

[v_inf] = v_infty(K,Al,Au,chil,chiu,l_infty,u_infty,x);

plot(x,v_inf,'k',xlabel('x'),ylabel('Valor da Put Perpetua'))

axis([0 2 0 2])

hold on

payoff = max(K-x,0);
plot(x,payoff,':k')
plot(u_infty,K-u_infty,'dk','MarkerSize',5)
plot(l_infty,K-l_infty,'dk','MarkerSize',5)

hold off
else
disp('Non se pode garantir a existencia')
end

```

- Opción Put Europea

```

K=input('ingrese K');
sigma=input('ingrese sigma');
rho=input('ingrese rho');
mu=input('ingrese mu');
T=input('ingrese T');
N=input('ingrese N');
M=input('ingrese M');
x_infty=4*K;
deltat=T/(N+1);
deltax=x_infty/(M+1);
t=0:deltat:T;
x=0:deltax:x_infty;
a=(deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
b=(deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
c=deltat*rho;
d=(deltat*(rho-mu))/(deltax);

aa=(1+c+a*x.^2+d*x).*ones(1,M+2);
cc=(-b*x(1:length(x)-1).^2-d*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bb=(-b*x(2:length(x)).^2).*ones(1,M+1);
aa(1)=1;
aa(M+2)=1;
cc(1)=0;
bb(M+1)=0;
A = diag(aa) + diag(cc, 1) + diag(bb, -1);

vTx=max(K-x,0);

v=transpose(vTx);
s=zeros(1,M+2);
S=zeros(M+2,1);
V=zeros(M+2,1);
for j=N:-1:1
s=[K*exp(-rho*(T-t(j)));v(2:1:length(v)-1);0];

```

### 38 ANEXO: PROGRAMAS PARA A RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

```
S=[s,S];
v=inv(A)*s;
V=[v,V];
end
S(:,N+1)=[];
S=transpose(S);
V(:,N+1)=[];
V=transpose(V);

plot(x,v,'k',xlabel('x'),ylabel('Valor da Put Perpetua'))

hold on
plot(x,vTx,':k')
hold off
```

#### ■ Opción Put Americana

```
K=input('ingrese K');
sigma=input('ingrese sigma');
rho=input('ingrese rho');
mu=input('ingrese mu');
T=input('ingrese T');
N=input('ingrese N');
M=input('ingrese M');
omega=0.5;
x_infty=4*K;
deltat=T/(N+1);
deltax=x_infty/(M+1);
t=0:deltat:T;
x=0:deltax:x_infty;
a=(omega*deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
b=(omega*deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
c=omega*deltat*rho;
d=(omega*deltat*(rho-mu))/(deltax);
ad=((1-omega)*deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
```

```

bd=((1-omega)*deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
cd=(1-omega)*deltat*rho;
dd=((1-omega)*deltat*(rho-mu))/(deltax);
max_iter_rel = 1000;
x2 = x.*x;
coef=(1-rho*deltat*(1-omega))/(1+rho*deltat*omega);
error_max=input('ingrese error_max');
step_plot=input('ingrese step_plot');

aa=(1+c+a*x2+d*x).*ones(1,M+2);
cc=(-b*x2(1:length(x)-1)-d*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bb=(-b*x2(2:length(x))).*ones(1,M+1);
aa(1)=1;
aa(M+2)=1;
cc(1)=0;
bb(M+1)=0;
A = diag(aa) + diag(cc, 1) + diag(bb, -1);

aaa=(1-cd-ad*x2-dd*x).*ones(1,M+2);
ccc=(bd*x2(1:length(x)-1)+dd*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bbb=(bd*x2(2:length(x))).*ones(1,M+1);

vk=max(K-x,0);
v_min=vk;
num_plot=1;

% Impresion de la grafica que muestra la condicion final.
if (step_plot > 0)
plot(x,vk);
cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos.
              DF. Iter: %d',num_plot);
title(cad);
xlabel('X');
cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T - t);
ylabel(cad);
drawnow;

```

40 ANEXO: PROGRAMAS PARA A RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

```

hold on
end

s=zeros(1,M+2);

num_plot = num_plot + 1;
for j=1:1:N+1
s=zeros(1,M+2);
%s(2:M+1)=vk(2:M+1);
s(2:M+1) =aaa(2:M+1).*vk(2:M+1) + bbb(1:M).*vk(1:M) + ccc(2:M+1).*vk(3:M+2);
%s(1) =K*exp(-rho*(T-t((N+2)-j)));
s(1)= coef*vk(1);
s(M+2) = 0;
[vk,iter] = RelajacionProyeccion(bb,aa,cc,s,v_min,max_iter_rel,error_max);

Impresion de las graficas con la solucion para cada momento de tiempo.
if (step_plot > 0) && (rem(num_plot,step_plot) == 0)
    plot(x,vk);
    cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos.
                    DF. Iter: %d',num_plot);
    title(cad);
    xlabel('X');
    cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T - t);
    ylabel(cad);
    axis([0 1.2 0 1.2])
    drawnow;
    hold on
end

num_plot = num_plot + 1;
end

% Impresion del resultado final.
plot(x,vk);
cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos. DF. Fin. ');
title(cad);

```

```

xlabel('X');
cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T);
ylabel(cad);
axis([0 2 0 2])
hold on
drawnow;
hold off

```

- Opción Call Perpetua

Función chi:

```

function [chil,chiu] = chi(sigma,mu,rho)
chil = (-mu/(sigma^2))+0.5+sqrt(0.25+((2*rho-mu)/(sigma^2))+((mu^2)/(sigma^4)));
chiu = (-mu/(sigma^2))+0.5-sqrt(0.25+((2*rho-mu)/(sigma^2))+((mu^2)/(sigma^4)));
end

```

Función pboundary:

```

function [l_infty,u_infty] = pboundary(K,chil,chiu)
l_infty = K*(chil/(chil-1));
u_infty = K*(chiu/(chiu-1));
end

```

Función A:

```

function [Al,Au] = Acall(l_infty,u_infty,chil,chiu)
Al = (((l_infty)^(1-chil))/chil);
Au = (((u_infty)^(1-chiu))/chiu);
end

```

Función v\_infty:

```

function [v_inf] = v_inftycall(K,Al,Au,chil,chiu,l_infty,u_infty,x)
v1=Al.*x.^(chil);
v2=x-K;
v3=Au.*x.^(chiu);
v_inf=v1.*((x>0)&(x<l_infty))+v2.*((x>=l_infty)&(x<=u_infty))+v3.*(x>u_infty);
end

```

## 42 ANEXO: PROGRAMAS PARA A RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

Programa principal:

```
%Perpetual Call Option
K=1;
sigma=0.15;
rho=-0.05;
mu=-0.04;
M=639;

%K=input('ingrese K');
%sigma=input('ingrese sigma');
%rho=input('ingrese rho');
%mu=input('ingrese mu');
%M=input('ingrese M');
x_infty=4*K;
deltax=x_infty/(M+1);
x=0:deltax:x_infty;

[chil,chiu] = chi(sigma,mu,rho);

[l_infty,u_infty] = pboundary(K,chil,chiu);

[Al,Au] = Acall(l_infty,u_infty,chil,chiu);

if ((-(sigma^(2)/2))<0) && (mu<(-(sigma^(2)/2)))
    && (rho<mu) && ((mu-(sigma^(2)/2))^(2)+2*rho*sigma^(2)>0)

[v_inf] = v_inftycall(K,Al,Au,chil,chiu,l_infty,u_infty,x);

plot(x,v_inf,'k',xlabel('x'),ylabel('Valor da Put Perpetua'))

axis([0 4 0 4])

hold on

payoff = max(x-K,0);
plot(x,payoff,':k')
```

```

plot(u_infty,u_infty-K,'dk','MarkerSize',5)
plot(l_infty,l_infty-K,'dk','MarkerSize',5)

hold off
else
disp('Non se pode garantir a existencia')
end

```

- Opción Call Europea

```

K=input('ingrese K');
sigma=input('ingrese sigma');
rho=input('ingrese rho');
mu=input('ingrese mu');
T=input('ingrese T');
N=input('ingrese N');
M=input('ingrese M');
x_infty=4*K;
deltat=T/(N+1);
deltax=x_infty/(M+1);
t=0:deltat:T;
x=0:deltax:x_infty;
a=(deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
b=(deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
c=deltat*rho;
d=(deltat*(rho-mu))/(deltax);

aa=(1+c+a*x.^2+d*x).*ones(1,M+2);
cc=(-b*x(1:length(x)-1).^2-d*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bb=(-b*x(2:length(x)).^2).*ones(1,M+1);
aa(1)=1;
aa(M+2)=1;
cc(1)=0;
bb(M+1)=0;
A = diag(aa) + diag(cc, 1) + diag(bb, -1);

```

```

vTx=max(x-K,0);

v=transpose(vTx);
s=zeros(1,M+2);
S=zeros(M+2,1);
V=zeros(M+2,1);
for j=N:-1:1
s=[0;v(2:1:length(v)-1);x_infty.*exp(-mu.*(T-t(j))) - K.*exp(-rho*(T-t(j)))];
S=[s,S];
v=inv(A)*s;
V=[v,V];
end
S(:,N+1)=[];
S=transpose(S);
V(:,N+1)=[];
V=transpose(V);

plot(x,v,'k',xlabel('x'),ylabel('Valor da Put Perpetua'))
axis([0 4 0 4])
hold on
plot(x,vTx,':k')
hold off

```

- Opción Call Americana

```

K=input('ingrese K');
sigma=input('ingrese sigma');
rho=input('ingrese rho');
mu=input('ingrese mu');
T=input('ingrese T');
N=input('ingrese N');
M=input('ingrese M');
omega=0.5;
x_infty=4*K;
deltat=T/(N+1);

```

```

deltax=x_infty/(M+1);
t=0:deltat:T;
x=0:deltax:x_infty;
a=(omega*deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
b=(omega*deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
c=omega*deltat*rho;
d=(omega*deltat*(rho-mu))/(deltax);
ad=((1-omega)*deltat*(sigma^2))/(deltax^2);
bd=((1-omega)*deltat*(sigma^2))/(2*(deltax^2));
cd=(1-omega)*deltat*rho;
dd=((1-omega)*deltat*(rho-mu))/(deltax);
max_iter_rel = 1000;
x2 = x.*x;
coef=(1-rho*deltat*(1-omega))/(1+rho*deltat*omega);
error_max=input('ingrese error_max');
step_plot=input('ingrese step_plot');

aa=(1+c+a*x2+d*x).*ones(1,M+2);
cc=(-b*x2(1:length(x)-1)-d*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bb=(-b*x2(2:length(x))).*ones(1,M+1);
aa(1)=1;
aa(M+2)=1;
cc(1)=0;
bb(M+1)=0;
A = diag(aa) + diag(cc, 1) + diag(bb, -1);

aaa=(1-cd-ad*x2-dd*x).*ones(1,M+2);
ccc=(bd*x2(1:length(x)-1)+dd*x(1:length(x)-1)).*ones(1,M+1);
bbb=(bd*x2(2:length(x))).*ones(1,M+1);

vk=max(x-K,0);
v_min=vk;
num_plot=1;

% Impresion de la grafica que muestra la condicion final.
if (step_plot > 0)

```

```

plot(x,vk);
cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos.
              DF. Iter: %d',num_plot);
title(cad);
xlabel('X');
cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T - t);
ylabel(cad);
drawnow;
hold on
end

s=zeros(1,M+2);

num_plot = num_plot + 1;
for j=1:1:N+1
s=zeros(1,M+2);
s(2:M+1) =aaa(2:M+1).*vk(2:M+1) + bbb(1:M).*vk(1:M) + ccc(2:M+1).*vk(3:M+2);
s(1)= coef*vk(1);
s(M+2) = x_infty.*exp(-mu.*(T-t((N+2)-j))) - K.*exp(-rho*(T-t((N+2)-j)));
[vk,iter] = RelajacionProyeccion(bb,aa,cc,s,v_min,max_iter_rel,error_max);

Impresion de las graficas con la solucion para cada momento de tiempo.
if (step_plot > 0) && (rem(num_plot,step_plot) == 0)
    plot(x,vk);
    cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos.
                  DF. Iter: %d',num_plot);
    title(cad);
    xlabel('X');
    cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T - t);
    ylabel(cad);
    axis([0 1.2 0 1.2])
    drawnow;
    hold on
end

num_plot = num_plot + 1;

```

```
end

% Impresion del resultado final.
plot(x,vk);
cad = sprintf('Opción americana de venta con dividendos continuos. DF. Fin.');
```

title(cad);

xlabel('X');

cad = sprintf('Valor cuando T - t es: %f',T);

ylabel(cad);

axis([0 4 0 4])

hold on

drawnow;

hold off



# Bibliografía

- [1] Yves Achdou, Olivier Pironneau, *Computational Methods for Option Pricing*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
- [2] Anna Battauz, Marzia De Donno and Alessandro Sbuelz, Real Options and American Derivatives: The Double Continuation Region, *Management Science* **61**(2015), 1094-1107.
- [3] Daniel Sevcovic, *Lectures on analytical and numerical methods for pricing financial derivatives*, Kniznicné a edicné centrum FMFI UK, Bratislava, 2011.
- [4] John C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Chapman and Hall, New York, 1990.
- [5] Carlos Vazquez, An Introduction to Black-Scholes Modeling and Numerical Methods in Derivative Pricing, *MAT - Serie A* **17** (2010).