



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Afondando sobre algúns resultados de Integración

Sofía González Pérez

Xullo 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Afondando sobre algúns resultados de Integración

Sofía González Pérez

Xullo 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Afondando sobre algúns resultados de Integración
Breve descripción do contido
O obxectivo deste traballo é afondar, desde diversos puntos de vista, nalgúns teoremas clásicos sobre integración (de Riemann ou de Lebesgue, nunha ou en varias variables) que, polas súas características, ou ben non teñen presenza nos cursos do Grao ou ben non poden desenvolverse nos mesmos en toda a súa extensión.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VI
Introducción	IX
1. Introducción histórica	1
2. Teorema Fundamental del Cálculo Integral	7
2.1. Las derivadas de Dini	7
2.2. Los puntos de sombra y el lema de Sol naciente	10
2.3. La diferenciabilidad de las funciones monótonas	12
2.4. Funciones de variación acotada	14
2.5. Funciones absolutamente continuas	20
2.6. Las dos versiones del Teorema Fundamental	25
3. Teorema de Fubini	33
3.1. Teorema de Fubini para la integral de Riemann	33
3.2. Teorema de Fubini para la integral de Lebesgue	37
3.3. Teorema de Fubini y derivadas parciales mixtas	42
4. Teorema de Cambio de Variable	47
4.1. El papel del determinante y de las aplicaciones lineales	49
4.2. Representación de cambios de variables de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2	52

4.3. El Teorema de Cambio de Variable para difeomorfismos	54
I. Algunas nociones básicas de teoría de la medida e integración	59
II. Interpretaciones geométricas con Maple	67
Bibliografía	71

Resumen

En este trabajo, se profundiza en algunos teoremas clásicos sobre la teoría de integración: el Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema de Fubini y el Teorema de Cambio de Variable. Para ello, se motivan y se tratan en detalle los conceptos y resultados que llevan a enunciar estos teoremas. Además, en los casos en los que es posible, se dan nociones geométricas de los conceptos a tratar para poder dar una idea intuitiva de lo que enuncian. Con ese fin, se utiliza *Maple* para poder representar las distintas cuestiones que surgen.

Abstract

In this essay, we shall take a close look into some classic integration theorems: The Fundamental Theorem of Calculus, Fubini's Theorem and the Change of Variables Theorem. These important results will be motivated and we shall study in detail the concepts and theorems that lead to the formulation of the results under the scope. Furthermore, whenever possible, we shall give some intuitive and geometric insight on them. In order to do that, *Maple* will be used to represent the different issues that will arise.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el de profundizar en tres de los resultados más importantes y sonados de la Teoría de Integración: el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, el Teorema de Fubini y el Teorema de Cambio de Variable. Trataremos de motivarlos, construirlos y darles un sentido geométrico para poder comprender las ideas que hay detrás de dichos enunciados. Para ello, se recurrirá a *Maple*, programa con el que se han realizado prácticamente todas las figuras de esta memoria.

Primero, trataremos de motivar estos resultados discutiendo desde el punto de vista histórico el concepto de integral y cómo fueron surgiendo y evolucionando estos importantes teoremas. Para ello, se incluye una comparativa entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue que nos servirá para enunciar los resultados previamente mencionados en un contexto más general.

Seguidamente, introduciremos el Teorema Fundamental a través de las derivadas de Dini, las funciones monótonas, las de variación acotada y las absolutamente continuas para caracterizar la relación inversa existente entre la diferenciación y la integración. Nos apoyaremos en ejemplos ilustrativos de cada uno de estos conceptos para poder discutir las condiciones y los conceptos que entran en juego en la construcción de este importante teorema.

Tras esto, presentaremos el Teorema de Fubini. Primero, lo haremos para la integral de Riemann, lo que nos permitirá introducir una interpretación geométrica muy intuitiva y, tras esto, enunciaremos el resultado para la integral de Lebesgue, entrando así en un marco más general de integración. De esta forma, quedará patente la diferencia entre ambas integrales. Para finalizar esta sección, comentaremos una sorprendente aplicación del Teorema de Fubini que volverá a hacer evidente la relación inversa entre la diferenciación y la integración.

Por último, hablaremos del Teorema de Cambio de Variable. Trataremos de caracterizar y visualizar el papel del jacobiano en este importante teorema. Primero, empezaremos con ejemplos muy sencillos, caculando áreas de figuras conocidas y viendo su relación a través de este determinante. Veremos también formalmente estas ideas y, finalmente, presentaremos el teorema utilizando todas estas ideas previas para su demostración e ilustraremos gráficamente las ideas geométricas en las que se fundamenta.

Capítulo 1

Introducción histórica

El concepto *integral* resuelve dos de los grandes problemas del análisis matemático: el cálculo del área encerrada en una región y la obtención de una función conociendo su derivada.

En 1854, Bernhard Riemann (1826 – 1866) propone su famosa teoría de integración. En su época, se tenía una idea distinta de lo que conocemos hoy día como *función*. Esencialmente, se entendía que una función era una expresión analítica. Esta concepción de función restringe el estudio de estas a funciones continuas o continuas en casi todo punto; dicho de otro modo, los matemáticos de la época no consideraban la posibilidad de que una función fuera, por ejemplo, discontinua en todo punto tal y como lo entendemos actualmente. Además, la discontinuidad se introducía como una propiedad a estudiar en un punto y se entendía que una función era discontinua en un punto si no es continua en todo intervalo que lo contenga.

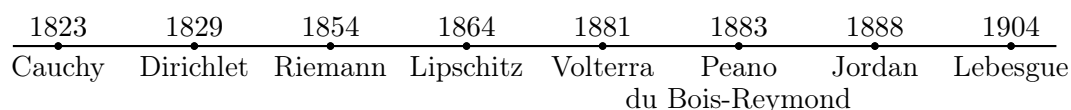


Figura 1.1: Línea temporal.

Heurísticamente, en el siglo XVIII, ya se conocía que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

gracias en gran medida a las ideas de Newton y de Leibniz. Además, se intuía que una integral se podía definir como el límite de una suma. Sin embargo, esto se solía utilizar meramente para aproximar áreas cuando no se podían resolver las integrales mediante un método de antiderivación. Tampoco se entendía muy bien el concepto de área; solo se tenía una idea intuitiva.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) fue el primer matemático en definir el concepto de

integral para funciones continuas en un intervalo compacto. Su definición consistía en considerar una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ en el que la función f es continua y la *suma de Cauchy*

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Usando la continuidad de f en $[a, b]$, consideró que dadas dos particiones cuyas normas son lo suficientemente pequeñas, la diferencia de sus sumas de Cauchy sería muy pequeña y el límite de las sumas sería la integral definida. De esta forma, Cauchy pudo proponer la existencia de funciones primitivas y una primera versión rigurosa de lo que más tarde se conocería como el *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX, Joseph Fourier (1768–1830) trataba de resolver el problema del calor estudiando la posibilidad de desarrollar una función en serie trigonométrica de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

siendo los coeficientes a_n y b_n integrales definidas. Fourier se dio cuenta de que, para calcular los coeficientes de su serie, no se necesita que la función a integrar sea continua. Esto motivó la búsqueda de una clase de funciones que se puedan integrar más amplia que las continuas.

De esta forma, surge el problema de la integración de funciones discontinuas. El primero en hacerlo evidente fue Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859). Dirichlet propuso que, para garantizar la existencia de la integral definida de una función, se necesitaba pedirle a esta la condición de ser continua o continua salvo en un conjunto denso de discontinuidades, extendiendo así el concepto de integral propuesto por Cauchy. Sin embargo, Dirichlet nunca llegó a probar esto último y no fue hasta 1864 cuando Rudolf Lipschitz (1832 – 1903) consiguió demostrar el resultado propuesto por Dirichlet con funciones monótonas a trozos.

Debido a las contribuciones de Euler, Fourier y Cauchy al estudio de las funciones y teoría integración, empieza a extenderse la idea de que una función es una correspondencia entre dos conjuntos en lugar de una expresión analítica como se concebía hasta el momento. Dirichlet fue el primero en interesarse en esta idea introduciendo su famosa función a la que le da nombre:

$$f: [0, 1] \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

De esta forma, se amplía el concepto de función que se tenía en esta época.

Partiendo de las aportaciones de Dirichlet a la teoría de integración, Riemann se centró en el estudio de las funciones integrables tratando de averiguar bajo qué condiciones una función es

integrable. Tomando las sumas de Cauchy, buscó condiciones que permitieran que estas sumas convergieran a un único límite cuando la norma de cualquier partición tomada tiende a cero, independientemente de la elección de los puntos de la partición.

En su investigación, Riemann determinó que las funciones integrables no son solo las continuas, sino que también se incluyen algunas que tienen un conjunto denso de discontinuidades. Con sus hallazgos, se definió la conocida integral de Riemann y enunció la *condición de Riemann*.

Mientras se consolidaba la integral de Riemann, muchos matemáticos se interesaron en la integración en otros tipos de conjuntos, surgiendo así la teoría de la medida. Esto es lo que daría pie a que, más adelante, Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) generalizara el concepto de integral.

En 1881, Vito Volterra (1842 – 1917) introdujo los conceptos integral superior e inferior, lo que permitió reformular la condición de Riemann a

$$\int_a^b f = \int_a^{\bar{b}} f.$$

Además, sugirió que las sumas superiores y las sumas inferiores (definidas por Darboux) convergen a las integrales superiores e inferiores, respectivamente.

Giuseppe Peano (1875 – 1941), influenciado por esta nueva condición de Riemann e ideas clásicas acerca del cálculo de áreas, introduce los conceptos *área interior* y *área exterior* para definir estas integrales. Así, se necesita que $a_e(E) = a_i(E)$ para que se puede verificar la condición de Riemann. Más adelante, propone que, para funciones no negativas, se tiene que la integral superior coincide con el área exterior de la región delimitada por el grafo de la función y la integral inferior, con el área interior de la región descrita, es decir,

$$\int_a^b f = a_i(E), \quad \int_a^{\bar{b}} f = a_e(E).$$

Esto le sirvió para dar una noción más concreta sobre el concepto área en el marco de las integrales definidas.

Cinco años después, Camille Jordan (1838 – 1922) establece la impotencia de la medida en la teoría de integración gracias a su investigación en la cuestión de las integrales múltiples. Jordan toma una partición del plano en rectángulos R_{ij} lo que induce a una partición del conjunto de integración E en rectángulos E_{ij} . Así, define la integral múltiple como el límite de las sumas de Cauchy cuando la norma de la partición tiende a cero:

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) a(E_{ij}) \longrightarrow \int_E f(x, y) dE$$

donde $a(E_{ij})$ denota el área de los rectángulos E_{ij} .

Hasta este punto, los únicos que habían puesto en duda la igualdad de las integrales iteradas

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

habían sido Cauchy y Thomae. En 1883, du Bois-Reymond (1831–1889) sugería que la condición de que la función fuese integrable no garantizaba la integrabilidad de las funciones sección. Así, dejó propuesta la siguiente versión de lo que más tarde conoceríamos como el *Teorema de Fubini* para integrales superiores [7, p. 92]: “si $f(x, y)$ es integrable en $R = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces las funciones $y \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dx$ y $x \rightarrow \int_0^1 f(x, y) dy$ son integrables y

$$\int_R f(x, y) dR = \int_0^1 dy \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right].”$$

En este contexto, Jordan también refina las ideas de Peano, introduciendo los conceptos de *contenido interior* y *contenido exterior*. Así, define un *conjunto medible* como el que verifica $c_i(E) = c_e(E)$.

Con las aportaciones, en especial, de Jordan y Borel a la teoría de la medida se hace evidente la necesidad de reformular la integral en el marco de la medida. De esta forma, Lebesgue trata de buscar una clase de conjuntos medibles más amplia que los Jordan-medibles para definir una clase de funciones integrables más amplia que la de Riemann.

En sus primeros artículos publicados [10], Lebesgue trata el tema de la medida de superficies estableciendo la aditividad numerable de la medida y otras propiedades importantes. Así, su medida extiende la medida de Jordan, lo que sugiere que todo conjunto Jordan-medible es Lebesgue-medible¹:

$$c_i(E) \leq \mu_i(E) \leq \mu_e(E) \leq c_e(E).$$

Esto le permite generalizar la integral de Riemann al darse cuenta de que se verifica que

$$\mathcal{R} \int_a^b f \leq \mathcal{L} \int_a^b f \leq \mathcal{L} \int_a^{\bar{b}} f \leq \mathcal{R} \int_a^{\bar{b}} f,$$

donde \mathcal{R} denota la integral de Riemann y \mathcal{L} , la de Lebesgue. De aquí, se deduce que si f es Riemann-integrable (las integrales superior e inferior de Riemann coinciden), entonces f también es Lebesgue-integrable.

En una conferencia en Dinamarca acerca de su integral, Lebesgue hace un símil entre las integrales de Riemann y Lebesgue con monedas [5, pp. 237-238]. Si Riemann tuviera un saco de monedas con distintos valores, las contaría haciendo montones y luego sumándolos, mientras que Lebesgue las clasificaría previamente según su valor. Dicho de otro modo, Riemann hace

¹Denotaremos por μ la medida de Lebesgue.

una partición de intervalo y considera la medida de los subintervalos resultantes y el valor de la función en ellos, en cambio Lebesgue considera una “partición” del rango, atendiendo al valor de la función. De aquí surge la necesidad de definir las funciones medibles y desarrollar propiedades relativas a ellas.

Esta idea le sirve para probar que toda función acotada en un intervalo cerrado es Riemann-integrable si y solo si el conjunto de discontinuidades es de medida cero. Así, prueba que la integral de Riemann está bien definida para funciones con alguna discontinuidad.

En la construcción de su integral, Lebesgue partió de la función característica y de las funciones escalonadas, relacionando la integral de estas con la medida del conjunto en el que se integra. Tras esto, considera la descomposición de un conjunto medible E en $E = E^+ \sqcup E^-$ siendo E^+ el subconjunto de E que está por encima del eje X y E^- el subconjunto de E que está por debajo del eje X y define la integral como sigue:

$$\int_a^b f = \mu(E^+) - \mu(E^-).$$

Siguiendo con su estudio, se da cuenta de que como

$$\int_a^b 1 = b - a$$

entonces resulta natural pensar que necesita que $f = \chi_E$ para que

$$\int_a^b \chi_E = \mu(E).$$

Además, surge la necesidad de definir las funciones medibles. Con esto se puede dar la definición de integral de Lebesgue que conocemos actualmente:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

siempre que f sea una función medible, E sea un conjunto medible y se verifique que

$$\int_E f^+ d\mu < \infty, \quad \int_E f^- d\mu < \infty$$

donde $f^+ = \max\{f, 0\}$ es la parte positiva de la función y $f^- = \max\{-f, 0\}$, la negativa.

Más adelante, Lebesgue se centró en el estudio del Teorema Fundamental, introduciendo conceptos en este contexto que anteriormente se habían intuido como la *variación acotada* (definida por Jordan). Esto lo llevó a darse cuenta de que, si la derivada de una función continua es finita en casi todo punto, la función es de variación acotada. De aquí surge el concepto *función absolutamente continua*, propiedad que le permitiría dar, por fin, una versión general del Teorema Fundamental para la integral de Lebesgue. Este concepto fue introducido por Giuseppe Vitali en 1905.

Una vez ya establecida la integral de Lebesgue, Guido Fubini (1879 – 1943) fue capaz de enunciar su famoso teorema: sea f una función acotada y medible en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces

$$\begin{aligned} \int_R f(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

En esencia, tras múltiples intentos de formular el concepto integral, no fue hasta Riemann cuando apareció la primera teoría de integración verdaderamente válida. Sin embargo, al mismo tiempo que se cambiaba la concepción de los matemáticos de la época sobre lo que era una función, surge la necesidad de generalizar y reformular el concepto integral a un contexto más amplio que solucione las limitaciones de la integral de Riemann, apareciendo, así, la integral de Lebesgue.

Referencias

Esta introducción histórica se basa principalmente en *Lebesgue's Theory of Integration* [7], libro histórico que abarca un gran período en que se desarrollan conceptos y resultados relativos a la teoría de la integración y otras ramas del análisis matemático importantes para esta teoría. En *The historical development of the calculus* [6], se abarca todavía un período mayor y, en cuanto a la teoría de integración, se centra especialmente en el Teorema Fundamental partiendo de las ideas más intuitivas y antiguas de Newton y Leibniz. Se ha optado por no comentar estos primeros avances porque habría que introducir muchos más conceptos que no nos resultan de interés para el resto de los contenidos a desarrollar.

Además, el símil que el propio Lebesgue hizo entre su integral y la de Riemann se toma de un apéndice de *Lebesgue Integration* [5]. En él, se transcribe lo presentado por Lebesgue en una conferencia en Copenhagen, Dinamarca, del 8 de mayo de 1926.

Por último, cabe destacar que se hace mención al artículo de Lebesgue llamado *Sur une généralisation de l'intégrale définie* [10]. En dicha publicación, habla de la problemática de la integral de Riemann y trata de resolverla partiendo de una partición del rango en lugar de una del dominio e introduciendo la medida exterior. Así, establece que hay funciones que no son integrables en el sentido de Riemann pero que sí son “sumables” (se pueden integrar mediante un proceso indicado en el artículo).

Capítulo 2

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Es bien conocido que existe una relación inversa entre la integración en el sentido de Riemann y la diferenciación. Esto nos lo da el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (en sus dos versiones):

1. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$. Además, si f es continua en un punto $\xi \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en ξ y $F'(\xi) = f(\xi)$.
2. (Regla de Barrow) Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ y existe una función F diferenciable en $[a, b]$ tal que $F' = f$, entonces

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ahora nos interesa generalizar esta relación a la integral de Lebesgue.

2.1. Las derivadas de Dini

En 1878, Dini introdujo una generalización de la derivada de una función (en su definición usual): las cuatro derivadas de Dini.

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Llamamos

- *derivada superior derecha de Dini de f en x* a $D^+ f(x) := \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,
- *derivada inferior derecha de Dini de f en x* a $D_+ f(x) := \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

- derivada superior izquierda de Dini de f en x a $D^-f(x) := \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,
- derivada inferior izquierda de Dini de f en x a $D_-f(x) := \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Tal y como hemos definido las derivadas de Dini, no imponemos que sean valores reales; es decir, pueden tomar los valores $+\infty$ y $-\infty$.

Gráficamente, una función que tiene todas las derivadas de Dini distintas en un punto dado tiene cuatro rectas secantes límite. Es decir, el grafo de la función, en lugar de tener una única recta tangente a un punto dado, límite de las rectas secantes en ese punto, tiene cuatro posiciones límite. Las derivadas de Dini nos dan las pendientes de dichas rectas. Esto se puede ver en la Figura 2.1 donde se ha representado la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

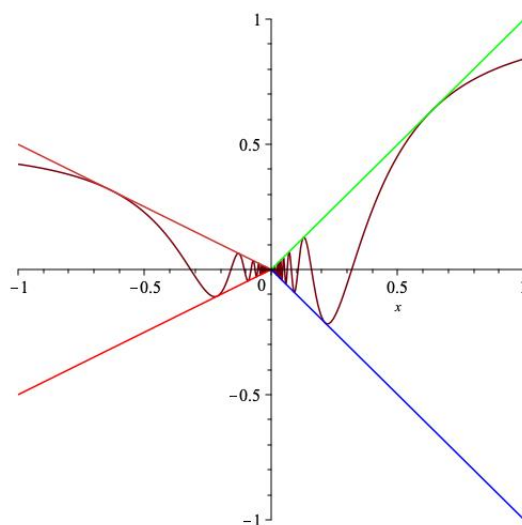


Figura 2.1: Rectas secantes límite de f en $x = 0$.

Así, parece razonable pensar que si estas rectas coinciden, es decir, hay una única recta tangente, la función es diferenciable. Esto lo veremos formalmente en la Proposición 2.3.

La derivada de una función no siempre existe. Sin embargo, las derivadas de Dini siempre existen.

Proposición 2.2. *Las derivadas de Dini de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $x \in (a, b)$*

siempre existen y, además, verifican que

$$D^+ f(x) \geq D_+ f(x), \quad D^- f(x) \geq D_- f(x).$$

Una vez tenemos garantizada la existencia de estas derivadas, nos podemos preguntar bajo qué condiciones, respecto a las derivadas de Dini, se tiene que la función es diferenciable en el sentido usual.

Proposición 2.3. *Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el sentido usual en un punto $x \in (a, b)$ si y solo si las cuatro derivadas de Dini coinciden y toman un valor real.*

Ahora, veremos un ejemplo de una función que no es diferenciable en un punto, usando las derivadas de Dini.

Ejemplo 2.4. Sea la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

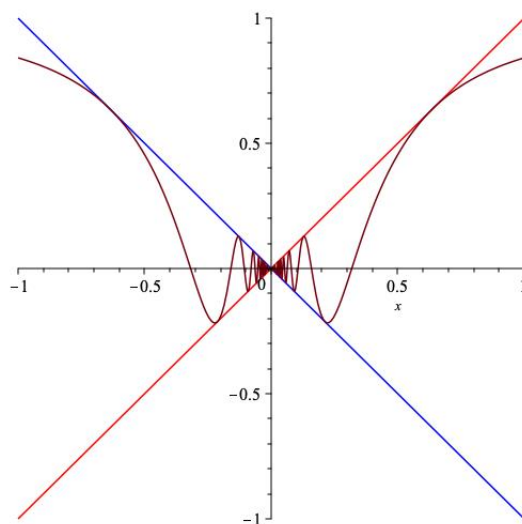


Figura 2.2: Rectas secantes límite a f en $x = 0$.

Esta función es continua en todo su dominio pero no es diferenciable en $x = 0$. Vamos a ver esto desde el punto de vista de las derivadas de Dini. Sea $h = x - x_0$ donde $x_0 = 0$. Se tiene que

$$D^+ f(0) := \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$\begin{aligned}
D_+ f(0) &:= \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right), \\
D^- f(0) &:= \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right), \\
D_- f(0) &:= \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right).
\end{aligned}$$

Vamos a calcular la primera pues las otras tres son análogas. Sea $\eta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\eta \in (0, 1)$. Podemos escribir lo que sigue

$$D^+ f(0) := \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in (0, \eta)} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Ahora bien, como el seno está acotado, se tiene que

$$-1 \leq \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sabemos que $|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})| = 1$ si $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Así, los puntos máximos se dan en $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}, k \in \mathbb{Z}$. Como hay puntos de este tipo en $(0, \eta)$, entonces

$$\sup_{x \in (0, \eta)} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 1.$$

Concluimos que $D^+ f(0) = 1$. Análogamente, $D^- f(0) = -1$, $D_+ f(0) = -1$ y $D_- f(0) = -1$.

Como vemos, las derivadas de Dini coinciden dos a dos y toman valores reales. Sin embargo, como no todas son iguales, tenemos que f no es diferenciable en $x = 0$.

Fijándonos en la Figura 2.2, las rectas secantes límite el grafo de la función f en $x = 0$, no coinciden, lo cual nos deja ver gráficamente que la función no puede ser diferenciable en dicho punto al no coincidir ambas rectas.

2.2. Los puntos de sombra y el lema de Sol naciente

En esta sección vamos a introducir los *puntos de sombra de una función con respecto al Sol naciente* y el *lema del Sol naciente* que nos harán falta para demostrar el Teorema Fundamental.

Definición 2.5. Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Se dice que $x_0 \in [a, b]$ es un *punto de sombra de f respecto al Sol naciente* si $\exists \xi \in [a, b]$ tal que $\xi > x_0$ y $f(\xi) > f(x_0)$.

Lema 2.6 (del Sol Naciente). Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, entonces el conjunto de todos los puntos de sombra de f respecto al Sol naciente es un abierto y se puede escribir como la unión de intervalos disjuntos dos a dos de la forma (a_k, b_k) tales que $f(a_k) \leq f(b_k), \forall k$.

Demostración. Sea $x_0 \in E$ un punto de sombra de f respecto al Sol naciente donde E es el conjunto de todos estos. Sabemos que $\exists \xi \in [a, b]$ tal que $\xi > x_0$ y $f(\xi) > f(x_0)$. Ahora bien, como f es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) < f(\xi)$. Así, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$ y, en consecuencia, E es abierto. Por ser E abierto, podemos escribir

$$E = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$$

donde (a_k, b_k) son intervalos abiertos disjuntos.

Ahora bien, por ser f continua, se tiene que $\lim_{x \rightarrow a_k} f(x) = f(a_k)$, para todo $x \in (a_k, b_k)$. Entonces si probamos que, $\forall x \in (a_k, b_k)$, $f(x) \leq f(b_k)$, entonces ya tendremos que $f(a_k) \leq f(b_k)$, $\forall k$.

Sea el conjunto abierto y no vacío $A = \{y \in [x, b_k] : f(y) \geq f(x)\}$ para $x \in (a_k, b_k)$. Sea $s = \sup(A)$. Si $s = b_k$, ya lo tenemos. Supongamos pues que $s < b_k$. Entonces $s \in (a_k, b_k)$ y s es un punto de sombra. Por tanto, $\exists \hat{\xi}$ tal que $\hat{\xi} > s > b_k$ y $f(\hat{\xi}) > f(s) > f(b_k)$, por ser s el supremo. Esto es que b_k es un punto de sombra, lo cual es una contradicción. Así, b_k es el supremo de A , $\forall x \in (a_k, b_k)$, $f(x) \leq f(b_k)$ y $f(a_k) \leq f(b_k)$, $\forall k$. \square

Observación 2.7. Análogamente, podríamos definir los *puntos de sombra de f respecto al Sol poniente* y el *lema del Sol poniente* en el cual tenemos la desigualdad $f(a_k) \geq f(b_k)$, $\forall k$.

Tanto el concepto punto de sombra como el lema tienen una intuitiva interpretación.

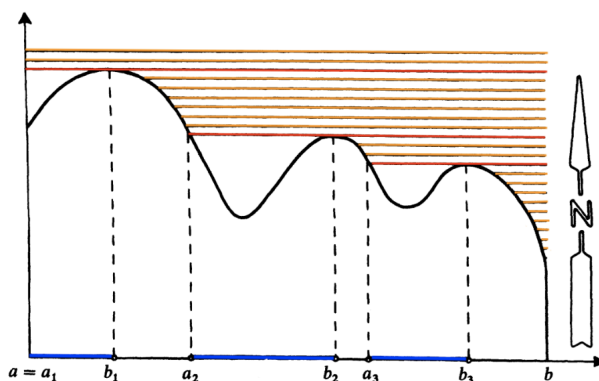


Figura 2.3: Representación gráfica de los puntos de sombra de una función respecto al Sol naciente [5, p. 163].

En la Figura 2.3, puede observarse en negro el grafo de una función f ; en naranja y en rojo, las rectas que representan los rayos de Sol; y, en azul, los puntos de sombra de f .

Observemos que los segmentos de rectas rojas son tangentes a algún punto de la curva y la cortan en otro punto. Los que se hayan por debajo del segmento de recta rojo delimitado por

el punto de tangencia y de corte se proyectan en el eje X , representados en color azul. Estos segmentos se corresponden, como adelantábamos, con los puntos de sombra de la función. De esta forma, vemos fácilmente cómo definimos estos puntos y el lema. El conjunto de puntos de sombra lo podemos escribir como la unión disjunta de esos subintervalos abiertos representados en azul. Además, tal y como hemos tomado los puntos de sombra, se observa claramente que $f(a_k) \leq f(b_k)$, $\forall k$.

2.3. La diferenciabilidad de las funciones monótonas

En 1904, Lebesgue demostró que toda función monótona es diferenciable casi por doquier. Gracias a los *puntos de sombra de una función con respecto al Sol naciente* y el *lema del Sol naciente* se pueden probar las dos siguientes desigualdades que nos harán falta para la demostración del resultado enunciado por Lebesgue. Estas son

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x) \quad (2.1)$$

$$0 \leq D^+ f(x) < \infty \quad (2.2)$$

casi por doquier.

Estas demostraciones son largas y no son de mucho interés para lo que queremos ver. Se pueden ver en *Lebesgue Integration* [5].

Teorema 2.8. *Toda función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona en $[a, b]$ es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que f es monótona creciente. En el caso de f monótona decreciente basta considerar $-f$ y proceder de manera análoga.

Sea $g(x) = -f(-x)$. Por ser f monótona creciente en $[a, b]$, g también lo es en $[-b, -a]$. Además,

$$\begin{aligned} D_- g(-x) &:= \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-x-h) - g(-x)}{-h} = \\ &= \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f(x+h) + f(x)}{-h} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: D_+ f(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} D^+ g(-x) &:= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(-x-h) - g(-x)}{-h} = \\ &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(x+h) + f(x)}{-h} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: D^- f(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como por (2.1), se tiene que $D^+ g(-x) \leq D_- g(-x)$ en casi todo $x \in [a, b]$, entonces $D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ en casi todo $x \in [a, b]$ por (2.3) y (2.4).

Usando esto último, (2.1), (2.2) y por la Proposición 2.2, llegamos a que

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty$$

en casi todo $x \in [a, b]$.

De aquí, se concluye que las derivadas de Dini coinciden y toman un valor real. En virtud de la Proposición 2.3, se tiene que f es diferenciable en casi todo $x \in [a, b]$. \square

Hasta aquí, nos hemos ocupado de la diferenciabilidad de f . Sin embargo, como buscamos la relación inversa entre la diferenciación y la integración, nos interesa conocer si f' es integrable.

Proposición 2.9. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente en $[a, b]$, entonces f' en $[a, b]$ es integrable y se da la relación*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Demostración. La función f está definida en $[a, b]$, pero vamos a considerar su extensión al intervalo $[a, b+1]$ dándole el valor $f(x) = f(b)$ en $[b, b+1]$. Tomemos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b].$$

Tomando límites secuenciales, se tiene que esta sucesión converge a $f'(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$ y, entonces, f' es medible por serlo cada f_n .

Como f es integrable en $[a, b]$, f_n también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, teniendo en cuenta que, por definición, $f_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(x) dx &= n \int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) dx = n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \right] = \\ &= n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx \right] \leq f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Por el Lema de Fatou I.18, se obtiene inmediatamente que f' es integrable y que se verifica la desigualdad

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

\square

La desigualdad probada en esta proposición se acerca a lo que queremos probar con el Teorema Fundamental. Así, nos interesa buscar condiciones que nos garanticen, además, que

$$\int_a^b f'(x) dx \geq f(b) - f(a).$$

Ahora, nos podemos preguntar si las funciones monótonas es la mayor clase de funciones que nos garantizan la diferenciabilidad en casi todo punto y la integrabilidad de las funciones derivadas de estas. En la siguiente sección veremos que la respuesta es negativa.

2.4. Funciones de variación acotada

En 1881, Jordan introdujo las llamadas *funciones de variación acotada*.

Definición 2.10. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de variación acotada* si $\exists C > 0$ constante tal que para toda partición de $[a, b]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C.$$

Definición 2.11. Se define la *variación total* de f en $[a, b]$ como

$$V_a^b(f) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \right\}$$

tomando el supremo de todas las particiones del intervalo considerado.

Es inmediato que si $V_a^b(f) < \infty$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.

De esta definición, salen fácilmente las siguientes propiedades.

Proposición 2.12. *Se verifica:*

1. Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada y cumple que $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
2. La suma de dos funciones de variación acotada es de variación acotada.
3. El producto de dos funciones de variación acotada es de variación acotada.
4. Si f y g son dos funciones monótonas crecientes, entonces su diferencia $f - g$ es de variación acotada.
5. Si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces también lo es en $[a, c]$ y en $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
6. La función $x \mapsto V_a^x(f)$ es monótona creciente en $[a, b]$.

Ahora, vamos a ver un ejemplo muy sencillo de una función de variación acotada.

Ejemplo 2.13. La función $f(x) = x$ con $x \in [-1, 1]$ es de variación acotada en el intervalo $[-1, 1]$. Veámoslo primero por definición. Sea $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ una partición del intervalo $[-1, 1]$. Se tiene que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1 - (-1) = 2.$$

De esta forma, podemos afirmar que existe $C > 0$ tal que $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$, tomando $C = 2$.

Por otro lado, sabemos por la Proposición 2.12 que por ser f estrictamente monótona creciente en $[-1, 1]$, f es de variación acotada en dicho intervalo y que la variación total es $f(1) - f(-1) = 1 - (-1) = 2$, que coincide con lo que calculamos antes.

Este ejemplo ilustra muy bien esta propiedad mencionada pues al ser una función estrictamente monótona, es inyectiva y, entonces, al considerar la imagen de los puntos de la partición, obtenemos una partición del rango formada por subintervalos. Así, es inmediato que si sumamos las longitudes de todos los subintervalos, obtendremos la longitud del intervalo $[f(a), f(b)]$ (si es creciente) o $[f(b), f(a)]$ (si es decreciente).

Veamos un ejemplo de una función que no es de variación acotada.

Ejemplo 2.14. Sea la función

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Veamos que no es una función de variación acotada en el intervalo $[0, 1]$. Para comprobarlo, por conveniencia, lo estudiaremos en el intervalo $\left[0, \frac{1}{\pi/2 + \pi}\right]$. Consideremos la partición de dicho intervalo

$$0 < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi} < \dots < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi},$$

donde $x_0 = 0$ y, en general, $x_m = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-(m-1))\pi}$ con $m = 1, \dots, n$. Así, $f(x_0) = 0$ y

$$f(x_m) = \begin{cases} x_m, & n - (m-1) \text{ par} \\ -x_m, & n - (m-1) \text{ impar.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{m=2}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})| = \\
&= x_1 + \sum_{m=2}^n |(-1)^{n-m+1}x_m - (-1)^{n-m+2}x_{m-1}| \stackrel{(*)}{=} \\
&= x_1 + \sum_{m=2}^n |(-1)^{n-m+1}(x_m + x_{m-1})| = x_1 + \sum_{m=2}^n (x_m + x_{m-1}) = \\
&= x_n + 2 \sum_{m=1}^{n-1} x_m \geq \sum_{m=1}^n x_m = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}.
\end{aligned}$$

En (*) hemos utilizado que $n - m + 1$ y $n - m + 2$ son números enteros consecutivos y, por tanto, tienen paridad distinta.

Ahora bien, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ diverge, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \infty.$$

Así, concluimos que f no puede ser de variación acotada en $[0, \frac{1}{\pi/2 + \pi}]$.

Con más generalidad, se puede ver que la función

$$\begin{aligned}
f: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x^\beta}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

es de variación acotada si y solo si $\alpha > \beta$ y, por tanto, no lo es si y sólo si $\alpha \leq \beta$ (siendo $\alpha = \beta = 1$ el caso particular ya demostrado). De hecho, para probar esto último basta considerar la partición $\hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_n$ con $\hat{x}_0 = x_0 = 0$ y $\hat{x}_m = (x_m)^{1/\beta}$. Análogamente a lo ya probado:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})| &= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{m=2}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})| = \\
&= (x_1)^{\alpha/\beta} + \sum_{m=2}^n |(-1)^{n-m+1}(x_m)^{\alpha/\beta} - (-1)^{n-m+2}(x_{m-1})^{\alpha/\beta}| \stackrel{(*)}{=} \\
&= (x_1)^{\alpha/\beta} + \sum_{m=2}^n |(-1)^{n-m+1}((x_m)^{\alpha/\beta} + (x_{m-1})^{\alpha/\beta})| = \\
&= (x_1)^{\alpha/\beta} + \sum_{m=2}^n ((x_m)^{\alpha/\beta} + (x_{m-1})^{\alpha/\beta}) = (x_n)^{\alpha/\beta} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (x_m)^{\alpha/\beta} \geq \\
&\geq \sum_{m=1}^n (x_m)^{\alpha/\beta} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)^{\alpha/\beta}.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)^{\alpha/\beta}$ diverge si $\alpha/\beta \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \beta$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)^{\alpha/\beta} = \infty.$$

Por tanto, tenemos de nuevo que f no es de variación acotada si $\alpha \leq \beta$.

Tras haber visto la definición de variación acotada, algunas propiedades y un par de ejemplos, podemos hacernos una idea de cómo tienen que ser este tipo de funciones. Para fijar ideas, pensemos en una función continua. ¿Qué significa que dicha función sea de variación acotada? Supongamos que tenemos un punto en movimiento cuya trayectoria es el grafo de nuestra función continua. Ahora, fijémonos en la distancia recorrida en el eje Y sin fijarnos en lo que ocurre en el eje X . Si la distancia recorrida en dicho eje es finita, entonces podremos afirmar que es de variación acotada.

Gráficamente, podemos dibujar la proyección sobre el eje Y del punto que se desliza por el grafo de la función y estudiar la distancia recorrida por este.

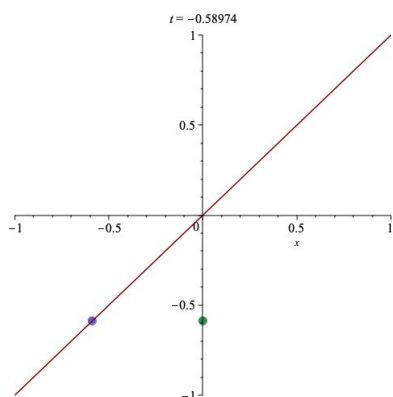


Figura 2.4:

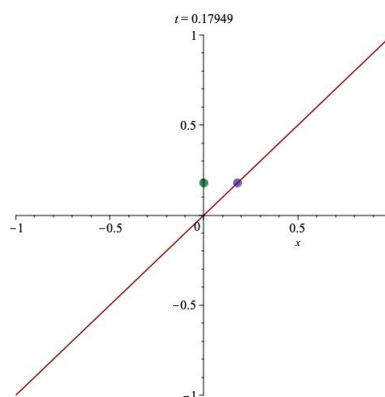


Figura 2.5:

En las Figuras 2.4 y 2.5, podemos ver dos momentos del desplazamiento del punto por el grafo de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$ y su proyección sobre el eje Y , correspondiente al Ejemplo 2.13. Aquí, queda ejemplificado que al ir desplazándose el punto sobre el grafo de la función f , la proyección de dicho punto recorre una distancia finita, lo cual sugiere que la función es de variación acotada como habíamos probado.

En las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8, podemos ver tres momentos del desplazamiento del punto por el grafo de la función $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, si $x \neq 0$, $f(x) = 0$, si $x = 0$, en el intervalo $[-1, 1]$. Mientras que en las Figuras 2.9, 2.10 y 2.11, podemos observar lo mismo pero para la función

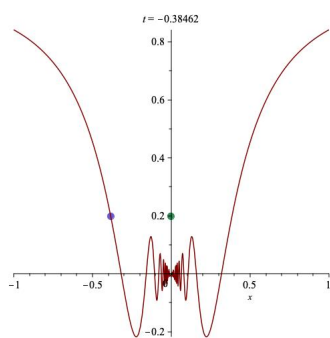


Figura 2.6:

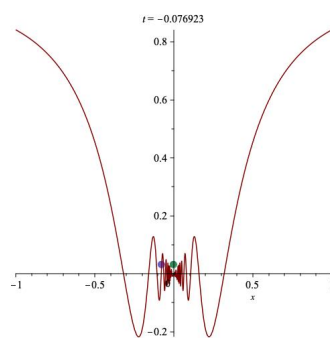


Figura 2.7:

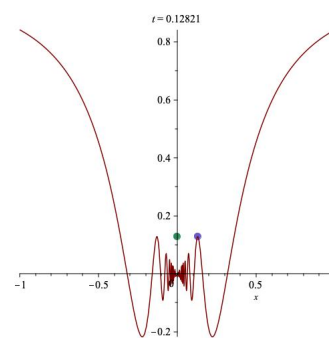


Figura 2.8:

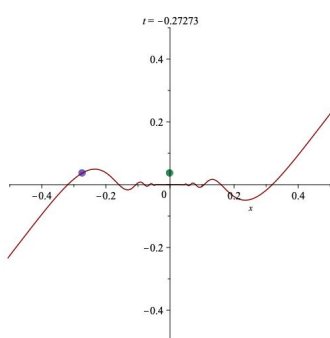


Figura 2.9:

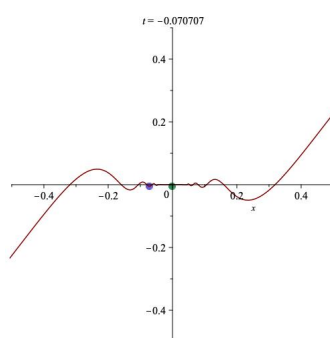


Figura 2.10:

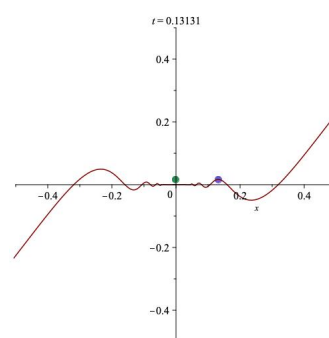


Figura 2.11:

$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, si $x \neq 0$, $f(x) = 0$, si $x = 0$, en el intervalo $[-1, 1]$ ¹. Así, vemos gráficamente dos funciones con infinitas oscilaciones en torno a $x = 0$. La primera no es variación acotada ($\alpha = \beta$) y la segunda, sí lo es ($\alpha > \beta$).

Teorema 2.15 (de Descomposición de Jordan). *Toda función f de variación acotada en $[a, b]$ se puede expresar como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.*

Demostración. Escribamos la función f de la siguiente manera:

$$f(x) = V_a^b(f) - \left(V_a^b(f) - f(x) \right).$$

Como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes es monótona creciente, basta ver que $V_a^b(f)$ y $V_a^b(f) - f(x)$ son monótonas. Por la Proposición 2.12, ya se tiene que $V_a^b(f)$ lo es. Veamos que $V_a^b(f) - f(x)$ también. Tomemos $y > x$. Se tiene que, como f es de variación acotada,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq V_x^y(f) \Rightarrow (V_a^y(f) - f(y)) - (V_a^x(f) - f(x)) = \\ &= (V_a^y(f) - V_a^x(f)) - (f(y) - f(x)) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Con lo cual, ya se tiene que $V_a^b(f) - f(x)$ es monótona creciente, de lo que se sigue el resultado. \square

¹Se ha ampliado el la imagen del grafo de la función para poder ver en mayor detalle las oscilaciones de la función.

Observación 2.16. Esta descomposición no es única.

Este teorema nos proporciona una importante propiedad de las funciones de variación acotada y nos permitirá enunciar un teorema similar al Teorema 2.8 para una clase de funciones más amplia.

Teorema 2.17. *Toda función de variación acotada en $[a, b]$ es diferenciable casi por doquier en $[a, b]$.*

Demostración. Como por el Teorema de Descomposición de Jordan 2.15 se tiene que podemos expresar una función de variación acotada como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes, basta aplicar el Teorema 2.8 a cada una de estas funciones. Como las funciones son diferenciables casi por doquier, la unión finita de conjuntos de medida cero es de medida cero y la suma de funciones diferenciables es diferenciable, ya se tiene el resultado. \square

Podemos preguntarnos si el recíproco es cierto. En el siguiente resultado veremos que necesitamos que la derivada de la función esté acotada y exista en todo punto. Dicha proposición se puede encontrar propuesta como ejercicio en *Lebesgue integration* [5, p. 177].

Proposición 2.18. *Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ tal que es derivable en todo punto de $[a, b]$ y esta última está acotada en $[a, b]$. Entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Por estar f' acotada en $[a, b]$, entonces sabemos que existe $k \in \mathbb{R}$ constante tal que $|f'(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]$. Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ fijado. Por el Teorema del Valor Medio, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f'(c_i)| \cdot |x_i - x_{i-1}| \Rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq k \cdot |x_i - x_{i-1}|.$$

Como se verifica para todo i , entonces si sumamos

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n k \cdot |x_i - x_{i-1}| \leq k \cdot |b - a|.$$

Por tanto, f es de variación acotada en $[a, b]$. \square

Observación 2.19. Observemos que, en las hipótesis de la proposición anterior, se tiene que f es Lipschitziana.

En virtud del teorema anterior y la Proposición 2.9, resulta obvio que se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.20. *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces f' es integrable en $[a, b]$ y se da la relación*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

2.5. Funciones absolutamente continuas

Hasta aquí, hemos probado

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

para funciones monótonas crecientes y de variación acotada. Podemos preguntarnos si podemos tener la igualdad garantizada bajo estas hipótesis. En el siguiente ejemplo, veremos que no llega con que la función cumpla estas condiciones para garantizar que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Ejemplo 2.21 (Función singular de Cantor). Consideremos el conjunto ternario de Cantor. Recordemos que dicho conjunto se construye partiendo del intervalo $[0, 1]$, dividiéndolo en 3 subintervalos iguales, eliminando el subintervalo intermedio y repitiendo el proceso indefinidamente para los subintervalos restantes. Formalmente, el conjunto de Cantor es

$$\mathbb{F} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \cup \left[\frac{6}{3^n}, \frac{7}{3^n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, 1\right].$$

Además, este conjunto es de medida cero.

Denotemos por $F_{n,k}$ los subintervalos que hemos suprimido con $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Definamos la función

$$f: [0, 1] \setminus \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{2k - 1}{2^n}$$

con $x \in F_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ y $n \in \mathbb{N}$.

De esta forma, $[0, 1] \setminus \mathbb{F}$ es la unión de los subintervalos que habíamos suprimido al construir el conjunto ternario de Cantor. Ahora, extendamos la función a todo el intervalo $[0, 1]$, es decir, definamos la función en el conjunto de Cantor. Para $x = 0$, $f(0) = 0$ y para $x > 0$, $f(x) = \sup \{f(t) : t \in [0, 1] \setminus \mathbb{F}, t < x\}$.

La función f es constante en cada uno de estos subintervalos y, además, es inmediato que es monótona creciente y de variación acotada (ver Figura 2.12). Así, f es diferenciable casi por doquier y f' es integrable en $[0, 1] \setminus \mathbb{F}$. Como la función es constante (una constante distinta en

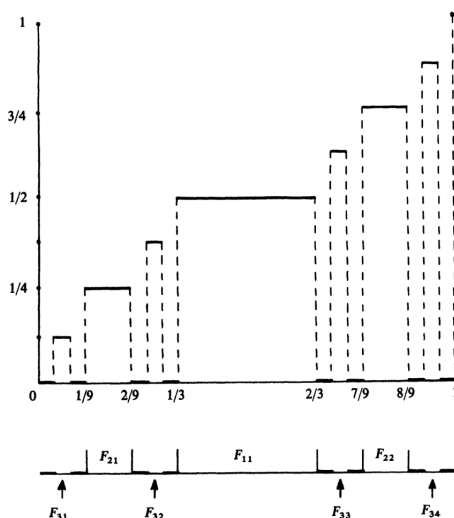


Figura 2.12: Función singular de Cantor, [5, p. 175].

cada subintervalo), claramente $f'(x) = 0$, $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{F}$. Como f' es nula en casi todo punto, concluimos que

$$0 = \int_0^1 f'(x) dx = \int_{[0,1] \setminus \mathbb{F}} f'(x) dx < f(1) - f(0) = 1.$$

Así pues, debemos buscar condiciones sobre la función f que sean más fuertes que la continuidad o la variación acotada. De esta forma, introducimos las funciones absolutamente continuas.

Definición 2.22. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* si verifica lo siguiente:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para toda colección finita de subintervalos disjuntos $(a_k, b_k) \subset [a, b]$,

$$k = 0, 1, \dots, n \text{ tales que } \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \text{ se tiene que } \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon. \quad (2.5)$$

Notación 2.23. Denotaremos por $AC(A)$ al conjunto de funciones absolutamente continuas en un conjunto A .

Ahora vamos a enunciar una serie de propiedades de las funciones absolutamente continuas.

Proposición 2.24. *Se verifica:*

1. Toda función absolutamente continua es uniformemente continua.
2. Toda función Lipschitziana es absolutamente continua.
3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. Si f es absolutamente continua, entonces $\alpha \cdot f$ también lo es.

4. Si f y g son funciones absolutamente continuas, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también lo son.

Observación 2.25. Recordemos que f es Lipschitziana en $[a, b]$ si y solo si f es diferenciable en $[a, b]$ y f' está acotada en $[a, b]$.

Con esto parece evidente que, para un conjunto E , se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathcal{C}^1(E) \subset Lip(E) \subset AC(E) \subset UC(E) \subset \mathcal{C}(E).$$

Además, parece natural que se tenga el siguiente resultado.

Proposición 2.26. Si $f \in AC([a, b])$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.

Demostración. Como f es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces verifica la condición (2.5). Tomemos $\epsilon = 1$ y consideremos una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que $x_k - x_{k-1} < \delta, \forall k = 1, \dots, m$. Se tiene que

$$V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq \epsilon = 1, \forall k = 1, \dots, m.$$

Por tanto,

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^m V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq m \cdot \epsilon = m < \infty.$$

Así, f es de variación acotada en $[a, b]$. □

Ahora podemos preguntarnos si el recíproco es cierto. En general, no lo es, pero Banach probó en 1925 el siguiente resultado que quedará motivado por las Proposiciones 2.31 y 2.32 acerca de cómo se comportan las funciones absolutamente continuas con respecto a conjuntos medibles y conjuntos de medida cero.

Teorema 2.27. Sea f una función continua y de variación acotada. Se tiene que f es absolutamente continua si y solo si f lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.

Esto sugiere que existen funciones continuas que no son absolutamente continuas.

Ejemplo 2.28. La función $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$, $f(x) = 0$, si $x = 0$, es continua pero no absolutamente continua pues no es de variación acotada como vimos en el Ejemplo 2.14.

Corolario 2.29. Si $f \in AC([a, b])$, entonces f es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$ y f' es integrable en $[a, b]$.

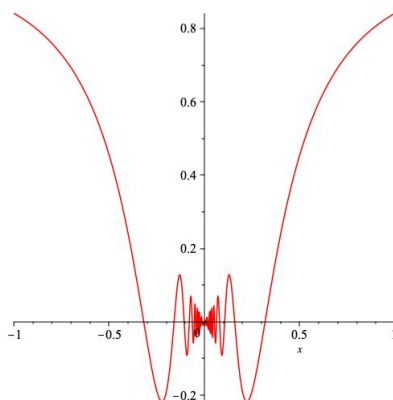


Figura 2.13: Función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Como toda función absolutamente continua es de variación acotada, parece razonable pensar que admitirá una descomposición en funciones monótonas crecientes en virtud del Teorema de Descomposición de Jordan 2.15. Sin embargo, las funciones absolutamente continuas admiten la siguiente descomposición.

Teorema 2.30. *Toda función absolutamente continua en un intervalo $[a, b]$ admite una descomposición en la forma de la diferencia de dos funciones absolutamente continuas y monótonas crecientes.*

Demostración. Tomando una descomposición como la de la demostración del Teorema 2.15,

$$f(x) = V_a^x(f) - (V_a^x(f) - f(x)),$$

ya tenemos que las funciones en las que se descompone f son monótonas crecientes. Falta ver que son absolutamente continuas. Como, por hipótesis f es absolutamente continua, basta ver que $V_a^x(f)$ también lo es y, en virtud de la Proposición 2.24, ya tendremos el resultado.

Sea $\epsilon > 0$ fijado y arbitrario y consideremos η tal que $0 < \eta < \epsilon$. Por ser f absolutamente continua en $[a, b]$, se verifica la condición (2.5) intercambiando ϵ por η ; es decir, se tiene que

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \eta.$$

Consideremos una partición del subintervalo $[a_k, b_k]$ para un k arbitrario de la forma $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,n_k} = b_k$ tal que $x_{k,j} - x_{k,j-1} < \delta, \forall j = 1, \dots, n_k$. Se tiene que

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} |f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})| < \eta.$$

El supremo de estas sumas es

$$\sum_{k=1}^n |V_a^{b_k}(f) - V_a^{a_k}(f)| = \sum_{k=1}^n V_{a_k}^{b_k}(f) \leq \eta < \epsilon.$$

Por tanto, $V_a^x(f)$ es absolutamente continua en $[a, b]$ como queríamos ver. \square

Ahora enunciaremos dos resultados que darán a conocer la importancia de las funciones absolutamente continuas en el marco del Teorema Fundamental.

Proposición 2.31. *Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero.*

Demostración. Sea $E \subset (a, b)$ tal que $\mu(E) = 0$. Como f es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces se verifica la condición (2.5). Observemos que la partición de subintervalos disjuntos $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ recubre E .

Como f es continua por ser absolutamente continua, f es uniformemente continua en cada subintervalo compacto $[a_k, b_k]$ y, entonces, $\exists \alpha_k, \beta_k \in [a_k, b_k]$ tales que $f(\alpha_k) = m_k$ y $f(\beta_k) = M_k$ son el mínimo y el máximo de f en $[a_k, b_k]$, respectivamente.

Por la continuidad absoluta de f ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k - \alpha_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k < \delta$$

implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k - m_k < \epsilon.$$

Además, como $f(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k]) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (m_k, M_k)$, ya se tiene que $f(E)$ es de medida cero. \square

Proposición 2.32. *Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ lleva conjuntos medibles en conjuntos medibles.*

Demostración. Sea $E \subset [a, b]$ un conjunto medible. Por la Proposición I.4, tenemos que existe una sucesión creciente de conjuntos cerrados, $F_n \subset E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Además, podemos escribir $E = \cup_{n=1}^{\infty} F_n \cup N$ con N un conjunto tal que $\mu(N) = 0$. Aplicando f ,

$$f(E) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup N\right) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cup f(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n) \cup f(N).$$

Por la Proposición 2.31, $f(N)$ es de medida cero y como f , por ser continua, lleva compactos en compactos, $f(F_n)$ es compacto, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $f(F_n)$ es medible, $\forall n \in \mathbb{N}$. \square

En la Figura 2.14 quedan resumidas algunas de las implicaciones que hemos utilizado.

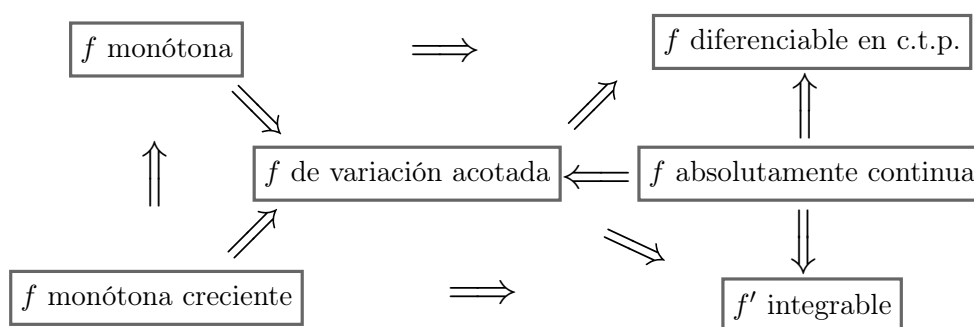


Figura 2.14: Esquema resumen

2.6. Las dos versiones del Teorema Fundamental

Con todos estos conceptos y resultados previos, ya estamos en condiciones de formular el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue en sus dos versiones. Este resultado fue propuesto por el propio Lebesgue en 1904.

En la primera versión de este importante teorema, queda patente la relación inversa existente entre la integración y la diferenciación, resolviendo así uno de los grandes problemas del análisis matemático en el marco de la integral de Lebesgue: la obtención de una función conociendo su derivada. Antes de enunciar y probar este resultado, se verá una proposición previa que nos permitirá demostrar inmediatamente una de las partes del Teorema Fundamental.

Proposición 2.33. *Sea f una función tal que $|f|$ es integrable en un intervalo $[a, b]$. Entonces se verifica lo siguiente:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } E \subset [a, b] \text{ es medible verificando que } \mu(E) < \delta \Rightarrow \left| \int_E f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Demostración. Como $|f|$ es integrable en $[a, b]$, entonces f también lo es. Por tanto, en virtud

de la Proposición I.23, existe una función continua $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b ||f(x)| - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $S = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$. Consideremos $E \subset [a, b]$ un conjunto medible verificando que $\mu(E) < \delta$. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2S}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_E f(x) dx \right| &\leq \int_E |f(x)| dx \leq \int_E ||f(x)| - g(x) + g(x)| dx \leq \\ &\leq \int_E ||f(x)| - g(x)| dx + \int_E |g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \delta \cdot S = \frac{\epsilon}{2} + S \cdot \frac{\epsilon}{2S} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.34 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral I). Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

su integral indefinida. Se tiene que F es absolutamente continua en $[a, b]$ y que

$$F'(x) = f(x)$$

en casi todo punto $x \in [a, b]$.

Demostración. La continuidad absoluta de F sale inmediatamente de la Proposición 2.33.

Para probar que $F'(x) = f(x)$, probaremos que $F'(x) \leq f(x)$ para casi todo $[a, b]$.

Definimos el conjunto $E = \{x \in [a, b] : F'(x) > f(x)\}$. Claramente, si vemos que $\mu(E) = 0$, entonces tendremos la desigualdad. Para $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p < q$, definimos los conjuntos $E_{pq} = \{x \in [a, b] : f(x) < p < q < F'(x)\}$. De manera inmediata, vemos que

$$E = \bigcap_{p, q} E_{pq}.$$

De esta forma, si vemos que todo E_{pq} es de medida cero, entonces E también lo es.

Por la Proposición 2.33, se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$, entonces se tiene que

$$\left| \int_A f(t) dt \right| < \epsilon. \quad (2.6)$$

Como f y F' son medibles, entonces E_{pq} también lo es. En virtud del Primer Principio de Littlewood I.5, sabemos que existe un conjunto abierto G tal que $E_{pq} \subset G$ y $\mu(G \setminus E_{pq}) < \delta$.

Además, por ser G abierto, podemos escribirlo como la unión de intervalos abiertos disjuntos dos a dos de la siguiente forma:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Denotemos por $G_n = E_{pq} \cap (a_n, b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente, se tiene que

$$G_n \subset \{x \in (a_n, b_n) : F'(x) = D^+ F(x) > q\}.$$

Tomemos $x_0 \in G_n$. Tenemos que $\exists \xi > x_0$ un punto de sombra de $F(x) - qx$ con respecto al Sol naciente. Por tanto, podemos recubrir G_n con intervalos abiertos disjuntos dos a dos de la forma $(a_{nk}, b_{nk}) \subset (a_n, b_n)$ de forma que

$$q(b_{nk} - a_{nk}) \leq F(b_{nk}) - F(a_{nk}) = \int_{a_{nk}}^{b_{nk}} f(t) dt$$

por el Lema de Sol naciente 2.6.

De aquí,

$$q \cdot \mu(G_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{nk}}^{b_{nk}} f(t) dt = \int_{S_n} f(t) dt$$

donde $S_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_{nk}, b_{nk})$ son conjuntos disjuntos dos a dos.

Definimos $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ y tenemos que $E_{pq} \subset S \subset G$ con $\mu(S \setminus E_{pq}) < \delta$. Así, por (2.6)

$$\left| \int_{S \setminus E_{pq}} f(t) dt \right| < \epsilon.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} q \cdot \mu(E_{pq}) &= q \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} f(t) dt = \int_S f(t) dt = \int_{E_{pq}} f(t) dt + \int_{S \setminus E_{pq}} f(t) dt \leq \\ &\leq p \cdot \mu(E_{pq}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\mu(E_{pq}) \leq \frac{\epsilon}{q-p}$, despejando en la expresión anterior, concluimos que E_{pq} es de medida cero.

Así, ya tenemos la desigualdad $F'(x) \leq f(x)$ en casi todo punto $x \in [a, b]$. Si ahora consideramos $-f$ y $-F$, tenemos que

$$-F'(x) \leq -f(x) \iff F'(x) \geq f(x).$$

Por tanto, $F'(x) = f(x)$ en casi todo punto $x \in [a, b]$ como queríamos probar. \square

Observación 2.35. La idea de esta demostración es la de probar las dos desigualdades no estrictas para probar la igualdad. Aunque, como vemos, basta ver una de las dos pues la otra sale de la primera de manera inmediata. Para probar la desigualdad, se utiliza un procedimiento propio y ampliamente usado de la teoría de la medida. Este consiste en definir un conjunto que cumple la condición contraria a la que queremos probar y ver que es de medida cero. Para ello, se recurre a escribir dicho conjunto como la intersección de otros conjuntos que esperamos que tengan medida cero para que la intersección también sea de medida cero. A partir de aquí, se usan resultados de teoría de la medida como el Primer Principio de Littlewood y otros resultados como el Lema del Sol naciente para probar que, efectivamente, cada uno de estos conjuntos son de medida cero.

Para probar la segunda versión del Teorema Fundamental, necesitamos enunciar un lema previo.

Lema 2.36. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua y monótona creciente en $[a, b]$ y se verifica que $f'(x) = 0$ casi por doquier, entonces f es constante.*

Demostración. Como f es continua por ser absolutamente continua y es monótona creciente en $[a, b]$, sabemos que su rango es $[f(a), f(b)]$ es cerrado. Si vemos que dicho rango es de medida cero, $f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a, b]$, quedando probado el resultado.

Consideremos los conjuntos $E = \{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ y $G = [a, b] \setminus E$. Por como hemos tomado estos conjuntos, $\mu(E) = \mu([a, b]) = b - a$ y $\mu(G) = \mu([a, b] \setminus E) = \mu([a, b]) - \mu(E) = 0$. Además, $[f(a), f(b)] = f(E) \cup f(G)$. Por la Proposición 2.31, como f es absolutamente continua, $\mu(f(G)) = 0$. Falta ver que $\mu(f(E)) = 0$. Sea $x_0 \in E$. Como $f'(x_0) = 0$, $\exists \xi > x_0$ tal que

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon\xi - f(\xi) > \epsilon x_0 - f(x_0).$$

Así, x_0 es un punto de sombra de $\epsilon x - f(x)$ y, por el Lema del Sol naciente 2.6, podemos tomar una cantidad numerable de intervalos (a_k, b_k) disjuntos dos a dos que recubren a E y verificando que

$$\epsilon a_k - f(a_k) \leq \epsilon b_k - f(b_k) \Leftrightarrow f(b_k) - f(a_k) \leq \epsilon(b_k - a_k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(b_k) - f(a_k) \leq \epsilon(b - a).$$

De esta forma, vemos que podemos recubrir $f(E)$ por una cantidad numerable de intervalos cuya longitud es arbitrariamente pequeña. Concluimos que $\mu(f(E)) = 0$. \square

Teorema 2.37 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral II). *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua en $[a, b]$, entonces su función derivada f' es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

para casi todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Como f es absolutamente continua en $[a, b]$, se tiene inmediatamente que f' es integrable en $[a, b]$, en virtud de la Proposición 2.29.

Podemos suponer que la función es monótona creciente en $[a, b]$, pues, en otro caso, sabemos, que por el Teorema 2.30, podemos escribir la función como la diferencia de dos funciones absolutamente continuas y monótonas crecientes.

Sea la función

$$g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt.$$

Como f es absolutamente continua y $\int_a^x f'(t)dt$ también lo es, entonces g es absolutamente continua en $[a, b]$. Dados $x, y \in [a, b]$ tales que $x < y$, se tiene que

$$g(y) - g(x) = \left[f(y) - \int_a^y f'(t)dt \right] - \left[f(x) - \int_a^x f'(t)dt \right] = f(y) - f(x) - \int_x^y f'(t)dt \geq 0,$$

con lo cual g es monótona creciente.

Ahora bien, por el Teorema Fundamental I, $g'(x) = 0$ casi por doquier. Por el Lema 2.36, g es constante y, como

$$g(a) = f(a) - \int_a^a f'(t)dt = f(a),$$

entonces $g(x) = f(a)$ para casi todo $x \in [a, b]$. Concluimos que

$$g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt = f(a) \Rightarrow \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a).$$

□

Observación 2.38. El recíproco es cierto si tenemos garantizada la existencia de f' en casi todo punto de $[a, b]$.

Ejemplo 2.39. Como ya veíamos en el Ejemplo 2.28, la función

$$f: x \in [0, 1] \mapsto f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es absolutamente continua por no ser de variación acotada. Ahora, lo que haremos es ver esto comprobando si se verifican las consecuencias del Teorema Fundamental 2.37 (junto con la condición que consideramos en la Observación 2.38). Sabemos pues que al menos una de ellas va a fallar. Veamos que no verifica que $f' \in \mathcal{L}^1(0, 1)$. La función derivada de f es la que sigue:

$$f': x \in [0, 1] \mapsto f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Por un lado, f' es medible por ser continua (ver Figura 2.15). Por otro lado, debemos probar si $\int_0^1 |f'(x)|dx < \infty$.

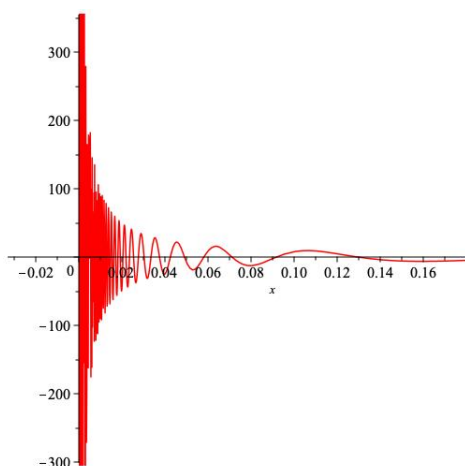


Figura 2.15: Función derivada de f

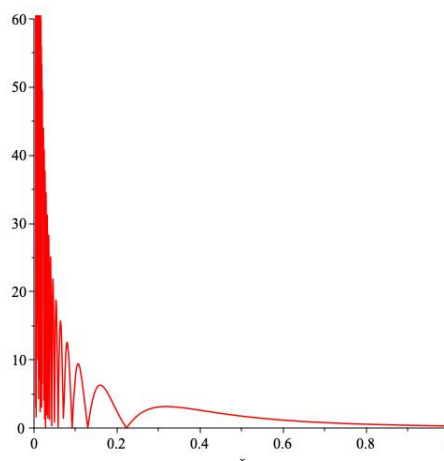


Figura 2.16: Valor absoluto de la función derivada de f .

Si tomamos la partición del Ejemplo 2.14, tenemos subintervalos de la forma $[x_{m-1}, x_m]$ donde $x_m = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (n-(m-1))\pi}$ con $m = 1, \dots, n$. Así, sabemos que en cada uno de estos subintervalos la función es monótona y, en consecuencia, integrable (ver Figura 2.16²). Por tanto, utilizando lo hallado en el Ejemplo 2.14 y el Teorema Fundamental 2.34,

$$\int_0^1 |f'(x)| dx = \sum_{m=1}^n \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f'(x)| dx = \sum_{m=1}^n |f(x_m) - f(x_{m-1})| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}.$$

Como la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

diverge, entonces la integral buscada no es finita. Luego, la derivada de f no es integrable en $[0, 1]$. Por el Teorema Fundamental 2.37, sabemos que f no puede ser absolutamente continua en $[0, 1]$.

Con esto vemos que las funciones absolutamente continuas quedan caracterizadas por el Teorema Fundamental del Cálculo.

Por último, veremos una aplicación directa del Teorema Fundamental que es la Integración por partes; una técnica muy útil para resolver integrales.

Proposición 2.40 (Integración por partes). Sean f y g dos funciones en $[a, b]$ tales que $f(x) = F'(x)$ para casi todo $x \in [a, b]$ y $G(x) = \int_a^x g(t) dt + C$, donde C es una constante real y $F(x) =$

²Se ha ampliado la gráfica en torno al 0 para que se puedan apreciar mejor las oscilaciones de la función cerca de dicho punto.

$\int_a^x f(t)dt$. Si F es absolutamente continua y g es integrable en $[a, b]$, entonces $F \cdot g$ y $f \cdot G$ son integrables en $[a, b]$ y se tiene que

$$\int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)G(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Demostración. Como F es absolutamente continua, es de variación acotada y, por la Proposición 2.29, su derivada $F' = f$ es integrable. Así, ya tenemos que tanto f como g son integrables. Como F y G son medibles y acotadas, entonces Fg y fG son integrables por la Proposición I.22.

Por un lado, se tiene que, usando la regla del producto, que $F' = f$ y que $G' = g$ (por el Teorema Fundamental I), verifican que

$$(FG)'(t) = F(t)g(t) + f(t)G(t)$$

casi por doquier.

Por otro lado, se tiene que F es absolutamente continua y, por el Teorema Fundamental II, G también lo es. Como el producto de funciones absolutamente continuas es absolutamente continuo, entonces FG es absolutamente continua en $[a, b]$ y, por la Proposición 2.29 $(FG)'$ es integrable verificando

$$\int_a^b (FG)'(t)dt = (FG)(b) - (FG)(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_a^b (FG)'(t)dt &= \int_a^b F(t)g(t) + f(t)G(t)dt = \int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)G(t)dt = \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a). \end{aligned}$$

□

Referencias

Este capítulo está basado principalmente en *Lebesgue Integration* [5]. Cabe destacar que hay otros procedimientos para construir y demostrar el Teorema Fundamental, como es el de *Real and abstract analysis* [9]. Este último basa su demostración en los teoremas de diferenciación de Lebesgue y en resultados importantes de teoría de la medida. La idea de la demostración se basa en probar el resultado para la función característica de un conjunto medible; después, para funciones simples medibles; tras eso para funciones arbitrarias no negativas; y, por último, para funciones cualesquiera separando su parte positiva y negativa. Este tipo de demostración lo utilizaremos en el siguiente capítulo.

El libro *Real and abstract analysis* se diferencia principalmente de *Lebesgue Integration* en que utiliza funciones complejas en lugar de funciones reales. Aunque realmente las demostraciones son similares separando parte real y parte imaginaria.

Hemos optado por seguir *Lebesgue Integration* [5] porque utiliza una técnica distinta de la habitual y, además, geoméricamente da una idea que resulta más intuitiva de los conceptos que hemos estudiado.

Capítulo 3

Teorema de Fubini

El Teorema de Fubini es uno de los grandes resultados de la teoría de integración que establece que, bajo ciertas condiciones, el cálculo de una integral múltiple se puede restringir a calcular las integrales iteradas y, además, permite intercambiar el orden de integración.

Primero, estudiaremos este teorema en el marco de la integral de Riemann y después generalizaremos el resultado a la integral de Lebesgue tal y como sucedió históricamente.

3.1. Teorema de Fubini para la integral de Riemann

En el caso de la integral de Riemann, nos restringiremos a rectángulos compactos de la forma $I \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Antes de enunciar el teorema, nos conviene definir unas funciones previas.

Sea

$$f : I \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $I \times J$ denota un rectángulo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Definimos

- para cada $x \in I$, $g_x : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_x(y) = f(x, y)$,
- para cada $y \in J$, $g_y : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_y(x) = f(x, y)$,
- $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi = \int_J g_x = \int_J f(x, y)dy$,
- $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi = \int_I g_y = \int_I f(x, y)dx$,
- $\varphi_L : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_L = \underline{\int}_J g_x = \underline{\int}_J f(x, y)dy$,
- $\varphi_U : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_U = \bar{\int}_J g_x = \bar{\int}_J f(x, y)dy$,

- $\psi_L : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi_L = \int_I g_y = \int_I f(x, y)dx$,
- $\psi_U : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi_U = \int_I \bar{g}_y = \int_I \bar{f}(x, y)dx$.

Las dos primeras funciones se conocen como *funciones sección* y tienen un importante papel en la interpretación geométrica del Teorema de Fubini, como veremos más adelante. Mientras que las otras seis funciones son funciones auxiliares que utilizaremos en la demostración del teorema.

Restringiéndonos al caso de \mathbb{R}^2 , consideramos el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y una función $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Tomemos una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ tan fina como queramos. De esta forma, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, parece razonable pensar que el volumen del rectángulo $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$ se puede aproximar de la siguiente forma:

$$(t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d g_{x_i}(y)dy = (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x_i, y)dy.$$

Ahora bien, si sumamos todos los rectángulos inducidos por la partición del intervalo $[a, b]$, obtendríamos el volumen total. De forma aproximada, tendríamos que

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d g_{x_i}(y)dy = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot \int_c^d f(x_i, y)dy.$$

Si consideramos la función continua $\varphi(x) = \int_c^d g_x(y)dy$ para $x \in [a, b]$, parece natural que se tenga la siguiente igualdad

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

que es lo que queremos obtener finalmente con el Teorema de Fubini. Haciendo un procedimiento totalmente análogo, podríamos haber considerado una partición del intervalo $[c, d]$ y la función sección g_y , llegando al mismo resultado pero con las integrales iteradas cambiadas. Esto sugiere la igualdad de las integrales iteradas.

Ahora podemos preguntarnos qué condiciones necesitamos para poder hacer esta construcción.

Notación 3.1. Denotaremos por $v(A)$ al volumen de rectángulo A . Obsérvese que este volumen no es más que el contenido o la medida de dicho rectángulo.

Teorema 3.2. *Sea $f : I \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $I \times J$ donde I y J son rectángulos compactos. Entonces se verifica lo siguiente:*

1. φ_L y φ_U son integrables en I ,
2. ψ_L y ψ_U son integrables en J ,

3.

$$\int_I \varphi_L = \int_{I \times J} f = \int_I \varphi_U \quad y \quad \int_J \psi_L = \int_{I \times J} f = \int_J \psi_U$$

o lo que es lo mismo

$$\int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_{I \times J} f = \int_I \int_J \bar{f}(x, y) dy dx$$

$$\int_J \int_I f(x, y) dx dy = \int_{I \times J} f = \int_J \int_I \bar{f}(x, y) dx dy.$$

Demostración. Vamos a probar 1 y la primera igualdad de 3 pues el resto es análogo. Primero, recordemos que

$$m_S(f) = \inf \{f(x) | x \in S\}$$

$$M_S(f) = \sup \{f(x) | x \in S\}.$$

Tomemos P_I y P_J particiones de I y J , respectivamente. Estas particiones inducen una partición P del rectángulo $I \times J$ formada por subrectángulos $S = S_I \times S_J$ con S_I y S_J subrectángulos de P_I y P_J , respectivamente.

De esta forma,¹

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_{S_I, S_J} m_{S_I \times S_J}(f) \cdot v(S_I \times S_J) = \\ &= \sum_{S_I} \left(\sum_{S_J} m_{S_I \times S_J}(f) \cdot v(S_J) \right) \cdot v(S_I). \end{aligned}$$

Como, dado $x \in S_I$, se tiene que $m_{S_I \times S_J}(f) \leq m_{S_J}(f)$, entonces

$$\sum_{S_J} m_{S_I \times S_J}(f) \cdot v(S_J) \leq \sum_{S_J} m_{S_J}(g_x) \cdot v(S_J) \leq \int_J g_x = \varphi_L.$$

Así,

$$L(f, P) = \sum_{S_I} \left(\sum_{S_J} m_{S_I \times S_J}(f) \cdot v(S_J) \right) \cdot v(S_I) \leq \sum_{S_I} \varphi_L = L(\varphi_L, P_I).$$

De forma análoga, se tiene que como $M_{S_I \times S_J}(f) \geq M_{S_J}(f)$, $x \in S_I$, entonces²

$$U(f, P) = \sum_{S_I} \left(\sum_{S_J} M_{S_I \times S_J}(f) \cdot v(S_J) \right) \cdot v(S_I) \geq \sum_{S_I} \varphi_U = U(\varphi_U, P_I).$$

¹ $L(f, P)$ denota la suma inferior de f con respecto a la partición P .

² $U(f, P)$ denota la suma superior de f con respecto a la partición P .

Así, llegamos a que

$$L(f, P) \leq L(\varphi_L, P_I) \leq U(\varphi_L, P_I) \leq U(\varphi_U, P_I) \leq U(f, P). \quad (3.1)$$

Ahora bien, como f es integrable por hipótesis, entonces

$$\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\} = \int_{I \times J} f$$

y, en consecuencia, por (3.1), se tiene que

$$\sup \{L(\varphi_L, P_I)\} = \inf \{U(\varphi_L, P_I)\} = \int_{I \times J} f.$$

Así, ya tenemos que φ_L es integrable en J y que

$$\int_{I \times J} f = \int_I \varphi_L = \int_I \int_J g_x = \int_I \int_J f(x, y) dy dx.$$

Usando el mismo procedimiento, se obtiene que

$$L(f, P) \leq L(\varphi_L, P_I) \leq L(\varphi_U, P_I) \leq U(\varphi_U, P_I) \leq U(f, P)$$

y, en consecuencia, φ_U es integrable en J y se verifica que

$$\int_{I \times J} f = \int_I \varphi_U = \int_I \int_J \bar{g}_x = \int_I \int_J \bar{f}(x, y) dy dx.$$

□

Observación 3.3. Obsérvese que por ser f acotada, las integrales superior e inferior existen.

Con esta primera y general versión del Teorema de Fubini, podemos preguntarnos bajo qué condiciones podemos considerar las integrales iteradas sin considerar las integrales inferior y superior. La respuesta es sencilla: las funciones sección deben ser integrables. Esto es porque, en ese caso, se tiene que la integral superior e inferior coinciden y su valor es la integral “usual”. Así, estamos en condiciones de enunciar la versión del Teorema de Fubini que es ampliamente usada y conocida.

Teorema 3.4 (Teorema de Fubini). *Sea $f : I \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $I \times J$ donde I y J son rectángulos compactos. Si además, para todo $x \in I$, g_x es integrable en I y para todo $y \in J$, g_y es integrable en J , entonces*

1. φ es integrable en I ,
2. ψ es integrable en J ,

3.

$$\int_I \varphi = \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_{I \times J} f = \int_J \int_I f(x, y) dx dy = \int_J \psi.$$

Demostración. El resultado se obtiene de forma inmediata utilizando el teorema anterior y que las secciones son integrables (las integrales superior e inferior coinciden). \square

Este importante teorema tiene una interpretación geométrica bastante intuitiva. Pensemos en el grafo de una función

$$\begin{aligned} f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

continua y no negativa. Dicho grafo es una superficie $S \in \mathbb{R}^3$. Ahora, consideremos, para cada $x \in [a, b]$, los planos paralelos al plano YZ . Si intersecamos la superficie S con dichos planos, obtenemos unas curvas sobre S que se corresponderán con los grafos de todas las funciones sección $g_x(y) = f(x, y)$, $x \in [a, b]$. El área que se halla por debajo de cada una de estas curvas se corresponderá con el grafo de la función $\varphi(x) = \int_c^d g_x(y) dy$. Así, parece razonable pensar que si tomamos las infinitas secciones con sus correspondientes áreas y las sumamos, obtendremos el volumen encerrado entre el la superficie S y el plano XY , es decir,

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

En la Figura 3.1, podemos ver una superficie en azul que intersecamos con planos paralelos al YZ para obtener las funciones sección g_x (curvas en rojo).

Podríamos haber procedido partiendo de las secciones g_y con $y \in [c, d]$, obteniendo el mismo resultado pero con las integrales iteradas cambiadas. Esto se puede observar en la Figura 3.2.

En definitiva, el Teorema de Fubini nos proporciona una manera de calcular volúmenes.

3.2. Teorema de Fubini para la integral de Lebesgue

Ahora vamos a extender el Teorema de Fubini al contexto de la integral de Lebesgue. Para construir este teorema, primero probaremos el resultado para el caso de funciones no negativas (Teorema de Tonelli) en el cual no necesitamos que la función $f \in \mathcal{L}^1$ pero sí que sea medible. Dicho de otro modo, el Teorema de Tonelli no pide que la integral de f sea finita.

La demostración consiste en ir probando el resultado primero para la función característica de un conjunto medible; después, para funciones simples medibles; y, por último, para una función

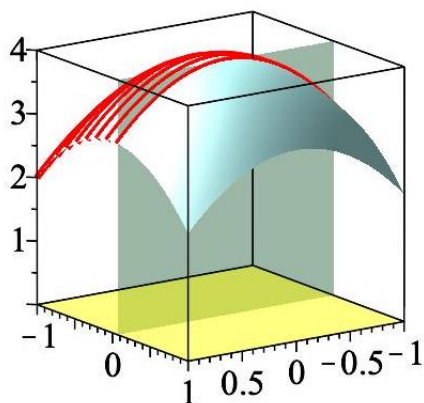


Figura 3.1: Funciones
sección g_x

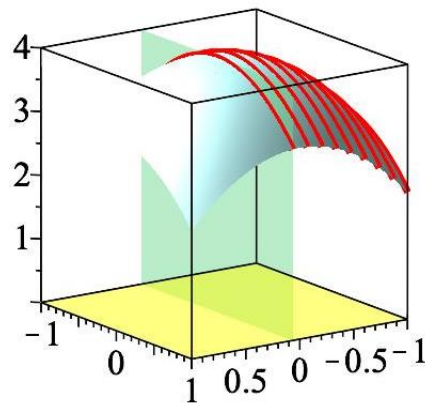


Figura 3.2: Funciones
sección g_y

medible no negativa arbitraria, usando resultados muy importantes de la teoría de la medida como, por ejemplo, el Teorema de la Convergencia Monótona. Este es un procedimiento muy usual en la demostración y construcción de resultados y propiedades de la integral de Lebesgue.

Antes de enunciar y demostrar estos teoremas, vamos a definir varias cuestiones de utilidad, así como un resultado previo, que se utilizará en la demostración del Teorema de Tonelli.

Sea $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ un conjunto medible. Definimos los siguientes conjuntos:

- para cada $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q | (x, y) \in E\}$,
- para cada $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p | (x, y) \in E\}$.

Estos conjuntos debemos interpretarlos como “secciones” del conjunto medible E que esperamos que también sean medibles para el contexto del Teorema de Fubini.

Teorema 3.5. *Sea $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ un conjunto medible. Se verifica que:*

- para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ es medible,
- para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y)$ es medible,
- la aplicación $\mathbb{R}^p \rightarrow [0, \infty]$ tal que $x \mapsto \mu(E(x))$ es medible,
- la aplicación $\mathbb{R}^q \rightarrow [0, \infty]$ tal que $y \mapsto \mu(E(y))$ es medible,

▪

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(E(y)).$$

La demostración se puede consultar en *Análisis Matemático II* [4].

Consideremos, de nuevo, las funciones sección de f de la siguiente forma:

- para cada $x \in \mathbb{R}^p$, $g_x : \mathbb{R}^q \rightarrow [-\infty, \infty]$ tal que $g_x(y) = f(x, y)$,
- para cada $y \in \mathbb{R}^q$, $g_y : \mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, \infty]$ tal que $g_y(x) = f(x, y)$.

Además, como consideraremos f una función medible, se tiene que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} | f(x, y) > \alpha\}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Y, de esta forma, los conjuntos

$$\{y \in \mathbb{R}^q | g_x(y) > \alpha\} \quad \text{y} \quad \{x \in \mathbb{R}^p | g_y(x) > \alpha\}$$

son también medibles.

Teorema 3.6 (Teorema de Tonelli). *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Se verifica que:*

1. para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, g_x es medible,
2. para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, g_y es medible,
3. la función $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} g_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ es medible,
4. la función $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} g_y = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx$ es medible,

5.

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^q} \psi = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx dy.$$

Demostración. Probaremos 1, 3 y la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f$$

de 5 pues el resto es análogo.

Consideremos el conjunto

$$A(r, x) = \{y \in \mathbb{R}^q | g_x(y) > r\}$$

con $r \in \mathbb{Q}$.

Ahora, definamos el conjunto

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^p | \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } A(r, x) \text{ no es medible}\}.$$

Este último es de medida nula y, en consecuencia, $\cup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$ también es de medida nula. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^p \setminus \cup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$ el conjunto $A(r, x)$ es medible.

Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\{r_k\}$ una sucesión decreciente en \mathbb{Q} tal que $r_k \rightarrow \alpha$. Entonces $A(\alpha, x) = \cup_{k=1}^{\infty} A(r_k, x)$ es medible. De esta forma, ya se tiene que para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, g_x es medible.

Ahora, consideremos que la función f es la función característica de un conjunto medible: $f = \chi_E$. Así, se tiene que $g_x = \chi_E(x)$. Por definición, $\varphi(x) = \mu(E(x))$ y entonces ya tenemos que φ es medible y que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi.$$

Tomemos $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$. De nuevo, se tiene que $g_x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{A_i}(x)$ y $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i(x))$. Así, φ es medible y, por el Teorema 3.5 y el Teorema I.17,

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int_{\mathbb{R}^p} \mu(A_i(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi. \quad (3.2)$$

Por último, consideremos una función f no negativa y medible. Por el Teorema de aproximación de funciones medibles I.10, sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples medibles en \mathbb{R}^{p+q} tal que converge puntualmente a f en \mathbb{R}^{p+q} y es monótona creciente.

Definimos

$$\begin{aligned} \varphi_n: \mathbb{R}^p &\longrightarrow [0, \infty] \\ x &\longmapsto \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^q} s_n(x, y) dy. \end{aligned}$$

Ahora bien, por (3.2) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} s_n = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_n$$

siendo $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones medibles monótona creciente.

Así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona I.16:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^q} s_n(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy = \varphi(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Además, se tiene que, por ser el límite de una sucesión de funciones medibles, φ es medible.

Por último, aplicando este teorema otra vez,

$$\int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} s_n(x, y) dy dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} s_n = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f$$

como queríamos probar. \square

Ahora, consideraremos una función de signo arbitrario. En este caso, necesitaremos que la función sea integrable en el sentido de Lebesgue y no solo medible, es decir, $f \in \mathcal{L}^1$. De esta forma, enunciamos el Teorema de Fubini para la integral de Lebesgue como sigue.

Teorema 3.7 (Teorema de Fubini). *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ tal que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{p+q})$. Se verifica que:*

1. para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $g_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$,
2. para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, $g_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$,
3. la función $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} g_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$,
4. la función $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} g_y = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$,
- 5.

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^q} \psi = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx dy.$$

Demostración. De nuevo, probaremos 1, 3 y la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f$$

de 5 pues el resto es análogo.

Definimos

$$\varphi_+(x) = \int_{\mathbb{R}^q} g_x^+, \quad \varphi_-(x) = \int_{\mathbb{R}^q} g_x^-$$

tales que $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.

Queremos ver que $g_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$, por lo que debemos comprobar que g_x es medible y que

$$\int_{\mathbb{R}^q} g_x^+ < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^q} g_x^- < \infty.$$

Aplicando el Teorema de Tonelli 3.6, tenemos que g_x^+ y g_x^- son medibles y, por tanto, $g_x = g_x^+ - g_x^-$ es medible. Además, como f , f^+ , y f^- son integrables, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_+ &= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ < \infty \\ \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_- &= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi_+, \varphi_- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$ y, en consecuencia, $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$. Entonces $\varphi_+, \varphi_-, \varphi$ son finitas, con lo cual $g_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$ pues

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \int_{\mathbb{R}^q} g_x^+ - \int_{\mathbb{R}^q} g_x^- = \int_{\mathbb{R}^q} g_x.$$

Por último, se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x, y) dy dx - \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x, y) dy dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_+ - \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_- = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

3.3. Teorema de Fubini y derivadas parciales mixtas

Ahora, probaremos un resultado sorprendente: el Teorema de Fubini y el Teorema de Schwarz son equivalentes. Recordemos que el Teorema de Schwarz establece la igualdad entre las derivadas parciales mixtas.

El Teorema de Fubini, como hemos visto, tiene una interpretación geométrica clara. Sin embargo, el Teorema de Schwarz resulta geoméricamente poco intuitivo.

La idea de la demostración de este resultado se basa en la utilización de la diferenciación y la integración como operaciones inversas. De hecho, como resulta lógico, se hará uso del Teorema Fundamental (en sus dos versiones) que establece esta relación entre ambos campos del análisis matemático.

Previamente, se enunciará un lema que servirá para demostrar una de las implicaciones.

Lema 3.8. *Sea $g \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R})$ con I y J intervalos abiertos no degenerados. Entonces las funciones*

$$f_1(x, y) = \int_a^x g(u, y) du \quad y \quad f_2(x, y) = \int_c^y g(x, v) dv$$

son continuas en el rectángulo abierto $I \times J$.

La demostración no se realizará pues no resulta de interés para lo que queremos obtener. Se trata de una corta y simple prueba en la que se hace uso del Teorema Fundamental y del Teorema del Valor Medio. Dicha demostración se puede ver en el artículo *Mixed partial derivatives and Fubini's theorem* [1].

Con esto, ya estamos en condiciones de enunciar y probar la equivalencia entre el Teorema de Fubini y el Teorema de Schwarz.

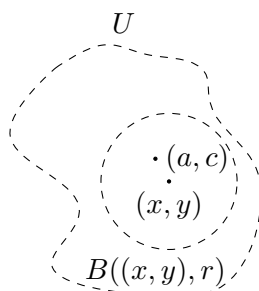
Teorema 3.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}), [a, b] \times [c, d] \subset U \Rightarrow \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b g(x, y) dx dy$ (Teorema de Fubini).

2. $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}) \Rightarrow \exists \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ tal que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ (Teorema de Schwarz).

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Tomemos $(x, y) \in U$. Por ser U un abierto de \mathbb{R}^2 , $\exists r > 0 / B((x, y), r) \subset U$. Ahora consideremos un punto $(a, c) \in B((x, y), r)$. Por hipótesis, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ son continuas en U (y, por tanto, en la bola tomada). Así, se tiene lo que sigue

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_c^y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (u, v) dv du &= \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} (u, y) - \frac{\partial f}{\partial x} (u, c) du = \\ &= \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} (u, y) du - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} (u, c) du = f(x, y) - f(a, y) - f(x, c) + f(a, c). \end{aligned}$$



Ahora bien, como se verifica el Teorema de Fubini y por el Teorema Fundamental (Regla de Barrow),

$$\begin{aligned} \int_c^y \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (u, v) du dv &= \int_a^x \int_c^y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (u, v) dv du \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_c^y \int_a^x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (u, v) dv du = f(x, y) - f(a, y) - f(x, c) + f(a, c). \end{aligned}$$

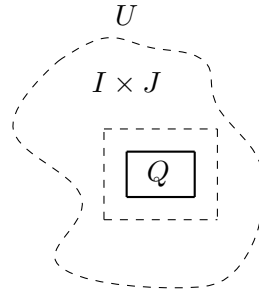
Derivando con respecto a y

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (u, y) du = \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) - \frac{\partial f}{\partial y} (a, y).$$

Derivando con respecto a x , llegamos a que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y).$$

(2) \Rightarrow (1) Sean $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ y $Q = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en U . Como $Q \subset U$ y U es abierto en \mathbb{R}^2 , podemos tomar un rectángulo abierto $I \times J$, con I y J intervalos abiertos, tal que $Q \subset I \times J \subset U$.



Definimos las funciones

$$\begin{aligned}
 h : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y) &\longrightarrow h(x, y) = \int_c^y g(x, v) dv \\
 f : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y) &\longrightarrow f(x, y) = \int_a^x h(u, y) du.
 \end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x, y), \forall (x, y) \in I \times J$. Además, por el Lema 3.8, $h = \frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $I \times J$.

Por otro lado, sea $r > 0$, se tiene que

$$f(x, y + r) - f(x, y) = \int_a^x h(u, y + r) - h(u, y) du.$$

De nuevo, por el Teorema Fundamental, $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g(x, y), \forall (x, y) \in I \times J$. Usando el Teorema del Valor Medio, tenemos que

$$\begin{aligned}
 h(u, y + r) - h(u, y) &= \frac{\partial h}{\partial y}(u, y + \lambda r)r = g(u, y + \lambda r)r \Rightarrow \\
 \Rightarrow f(x, y + r) - f(x, y) &= r \int_a^x g(u, y + \lambda r) du \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{f(x, y + r) - f(x, y)}{r} &= \int_a^x g(u, y + \lambda r) du, \lambda \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Nótese que λ depende de r . Tomando límites cuando $r \rightarrow 0$ y $\lambda \rightarrow 0$, llegamos a que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_a^x g(u, y) du.$$

Usando el Lema 3.8 otra vez, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I \times J$. Así, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Schwarz. Por tanto,

$$h = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow g = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Finalmente, llegamos a que

$$\int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b g(x, y) dx dy.$$

□

Observación 3.10. Como bien hemos visto, el enunciado del Teorema de Fubini es más extenso, apareciendo la integral doble y no solo las integrales iteradas. Sin embargo, para probar este resultado, basta considerar esta versión del teorema.

De esta forma, tenemos probada la equivalencia entre un resultado con una interpretación geométrica intuitiva y un teorema que no se puede visualizar. Además, obtenemos otro resultado que ejemplifica la relación inversa existente entre la diferenciación y la integración.

Hasta este punto, hemos supuesto la continuidad y diferenciabilidad de las funciones involucradas en estos resultados. Sin embargo, hay casos en los que se tiene la igualdad de las derivadas parciales mixtas pero sin cumplirse las hipótesis del Teorema de Schwarz. Uno de los ejemplos clásicos es el de la ecuación de ondas unidimensional.

Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & (x, y) \in U \\ u(x, 0) = g(x), & x \in (-\infty, \infty) \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $U = (-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ y g es la extensión periódica de la función $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1, 1]$. Su solución vendrá dada por la *fórmula de D'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2}. \quad (3.4)$$

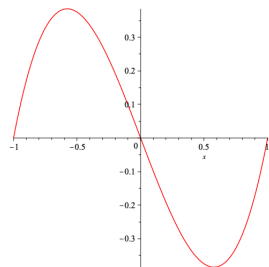


Figura 3.3: Función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$

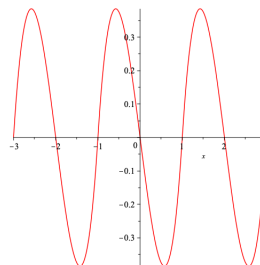


Figura 3.4: Extensión periódica de f

Sin embargo, esta solución se obtiene obviando que la derivada segunda de g no está definida en los puntos de la forma $2n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$ y utilizando la regla de la cadena y el Teorema de Schwarz para convertir la EDP del problema en $\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ donde $\eta = x + t$ y $\xi = x - t$.

Se puede probar que la solución (3.4) es la única solución del problema (3.3) aunque no existan las derivadas parciales mixtas en los puntos previamente mencionados.

Esto sugiere que el Teorema de Schwarz puede ser generalizado a una clase de funciones más amplia y otra en la que se verifica el Teorema de Fubini. En el artículo *The Wave Equation, Mixed Partial Derivates and Fubini's Theorem* [2], se construyen las clases de funciones donde se verifican dichos teoremas, generalizando teoremas importantes como el Teorema Fundamental y se acaba probando la equivalencia de estos dos resultados en este nuevo contexto.

Referencias

Para la integral de Riemann, nos hemos basado en *Cálculo en variedades* [12]. Cabe destacar que en *Análisis Matemático II* [4], se sigue un procedimiento análogo para demostrar este resultado. Sin embargo, en *Cálculo en variedades* se motiva el resultado de una forma geométrica muy intuitiva que inspira la posterior interpretación geométrica en la que se hace uso de *Maple* para dibujar las figuras (ver Anexo II).

En cuanto a la versión de Lebesgue, se ha utilizado *Análisis Matemático II* [4]. La construcción de este teorema se basa en probar el resultado para funciones no negativas viendo el resultado para la función característica de un conjunto medible, para funciones simples medibles y, por último, para una función no negativa. Tras esto, se enuncia una versión más general y se prueba para funciones de cualquier signo, teniendo que imponer unas condiciones más fuertes. En *Calculus* [3], se prueba primero el resultado para funciones escalonadas y, tras esto, demuestra el teorema utilizando este resultado previo y una técnica similar a las pruebas del Teorema de Tonelli y el Teorema de Fubini. En *Real and abstract analysis* [9] y en *Lebesgue integration* [5] se realizan pruebas análogas.

Por último, para la sección acerca de la equivalencia del Teorema de Fubini y del Teorema de Schwarz nos basamos en el artículo *Mixed Partial Derivatives and Fubini's Theorem* [1] para el resultado y *The Wave Equation, Mixed Partial Derivates and Fubini's Theorem* [2] para ver un ejemplo en el que las condiciones del Teorema de Schwarz fallan y no se puede dar la equivalencia entre ambos resultados. No se incluyen los resultados relativos a la construcción de una clase de funciones más amplia en la que se verifica esta equivalencia pues habría que introducir muchos conceptos y resultados que harían esta sección demasiado larga y, además, perderíamos de vista el objetivo de este capítulo: profundizar y darle un sentido geométrico al Teorema de Fubini.

Capítulo 4

Teorema de Cambio de Variable

Los cambios de variables son unas herramientas muy útiles a la hora de simplificar cálculos y, en el marco de integración, nos permiten resolver integrales que o son difíciles de resolver o no se pueden resolver de manera inmediata. En este capítulo, vamos a estudiar el Teorema de Cambio de Variable intentando entender y visualizar qué es lo que realmente estamos haciendo al usar este tipo de recursos para resolver integrales. Lo haremos en el marco de la integral de Lebesgue y en varias variables, aunque comentaremos que se puede proceder de manera similar para la integral de Riemann.

Nuestro objetivo es llegar a probar que dada una aplicación inversible que es clase \mathcal{C}^1 , de inversa también \mathcal{C}^1 y dada una función integrable T , se verifica que $(f \circ T) \cdot |\det DT|$ también es integrable. Además, buscamos que se verifique que

$$\int_E f d\mu = \int_{T^{-1}(E)} (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu \quad (4.1)$$

donde E es un conjunto medible.

Para entender por qué aparece el jacobiano, vamos a dar una intuitiva interpretación geométrica antes de entrar en detalles de la demostración y construcción del teorema. Vamos a restringirnos inicialmente al caso 2-dimensional. Sea la aplicación

$$\begin{aligned} T: U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^2 \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\longmapsto T(\hat{x}, \hat{y}) = (X(\hat{x}, \hat{y}), Y(\hat{x}, \hat{y})). \end{aligned}$$

Por lo pronto, le pediremos que sea continua y diferenciable para poder considerar sus derivadas parciales. Definamos también su *ecuación vectorial* $T(\hat{x}, \hat{y}) = X(\hat{x}, \hat{y})\vec{e}_1 + Y(\hat{x}, \hat{y})\vec{e}_2$. Por tanto, sabemos que las derivadas parciales de T son

$$\vec{V}_1 := \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial X}{\partial \hat{x}}\vec{e}_1 + \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}}\vec{e}_2,$$

$$\vec{V}_2 := \frac{\partial \vec{r}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} \vec{e}_1 + \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} \vec{e}_2,$$

siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 .

¿Qué representan los vectores \vec{V}_1 y \vec{V}_2 ?

Primero, supongamos un segmento de recta horizontal en el abierto U (es constante en \hat{y}). De esta forma, T transforma este segmento de recta en una curva en V . La recta tangente a esta curva en cada uno de sus puntos tendrá la dirección del vector $\vec{V}_1 = \frac{\partial T}{\partial \hat{x}}$ ($\vec{V}_2 = 0$ por ser T constante en \hat{y}).

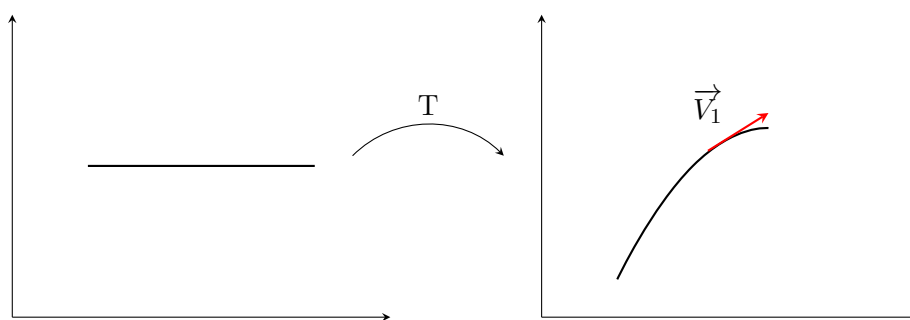


Figura 4.1: Transformación de una recta en una curva.

Ahora supongamos que tenemos un rectángulo de la forma $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] \times [\hat{y}_1, \hat{y}_2]$ y que T es lineal. Si denotamos por $\Delta \hat{x} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$ y $\Delta \hat{y} = \hat{y}_2 - \hat{y}_1$, claramente el área del rectángulo es $\Delta \hat{x} \cdot \Delta \hat{y}$. Supongamos que T transforma este rectángulo en un paralelogramo de lados $\vec{V}_1 \Delta \hat{x}$ y $\vec{V}_2 \Delta \hat{y}$ (ver Figura 4.2). Así, el área de este paralelogramo tendrá que ser $\|(\vec{V}_1 \Delta \hat{x}) \times (\vec{V}_2 \Delta \hat{y})\| = \|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| \cdot \Delta \hat{x} \cdot \Delta \hat{y}$. De esta forma, el área del paralelogramo la podremos obtener multiplicando el área del rectángulo por cierto factor que veremos ahora qué es. Se tiene que

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial X}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \det(DT(\hat{x}, \hat{y})) \vec{e}_3.$$

Por tanto, concluimos que

$$\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = |\det DT(\hat{x}, \hat{y})|.$$

Acabamos de ver que el jacobiano de T relaciona el área de ambas figuras (cuyas áreas sabemos calcular). Así, parece razonable pensar que a través de la medida podremos establecer una igualdad entre áreas gracias al papel del jacobiano. Como la medida (área) de un conjunto es la integral de la función $f = 1$ en dicho conjunto, podemos intuir que tendremos algún tipo

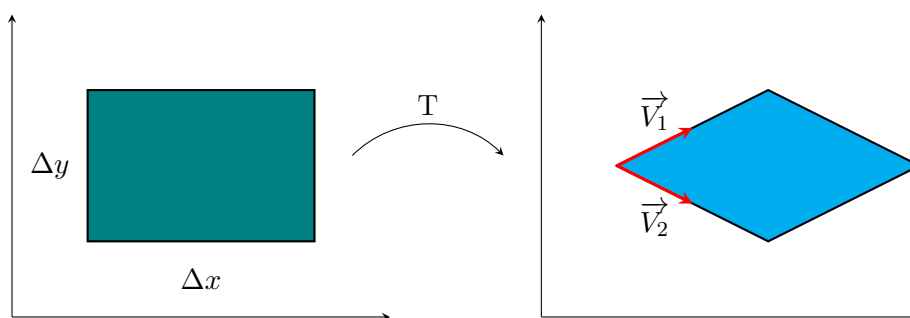


Figura 4.2: Áreas de las figuras.

de relación entre las integrales sobre ambos conjuntos de una función f con la participación del jacobiano. Esto resultará ser la igualdad (4.1).

Ante esto, nos podemos preguntar qué le debemos pedir a la aplicación T , además de la continuidad y de la diferenciabilidad. Parece lógico pensar que el jacobiano debe ser distinto de cero pues, en otro caso, tendríamos que el área de la segunda región sería cero (caso degenerado). Así, parece natural pedirle a DT que sea no singular, garantizando la existencia su inversa y la biyectividad. Además, nos interesa que cada punto de U se corresponda con un único punto de V , con lo cual nos convendrá que T sea biyectiva, existiendo así T^{-1} . A esta aplicación inversa debemos pedirle lo mismo que a T para que podamos hacer un razonamiento análogo al realizado anteriormente.

En definitiva, como habíamos adelantado, nos interesa T sea un difeomorfismo. Además, parece natural pedirle a los conjuntos de integración que sean medibles para que esté bien definida la integral. Observemos que DT es una aplicación lineal, por lo que quedará motivada la siguiente sección.

Por último, cabe destacar que nuestro objetivo final involucra a una función f arbitraria que hasta ahora hemos considerado que es la aplicación $f = 1$. Parece lógico que debemos pedirle a esta función que sea \mathcal{L}^1 para que tenga sentido su integral.

4.1. El papel del determinante y de las aplicaciones lineales

Primero, consideraremos aplicaciones lineales y veremos qué ocurre con la medida cuando las aplicamos sobre conjuntos abiertos y medibles. El primer resultado que vamos a enunciar pone de manifiesto que la medida de un abierto es proporcional a la medida de la imagen de dicho abierto por la aplicación lineal. Evidentemente, para poder hacer este tipo de transformaciones siempre pediremos que la aplicación sea regular, es decir, que exista su inversa y que su determinante nunca sea nulo. Tendremos, además, garantizada la biyectividad de esta.

Teorema 4.1. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y regular y consideremos $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se verifica que

$$\mu(LG) = |\det L| \cdot \mu(G).$$

Demostración. Como L es una aplicación lineal, entonces L es una transformación de una de las tres siguientes maneras:

- (a) $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (k \cdot x_1, x_2, \dots, x_n)$, con k una constante real,
- (b) $L(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$,
- (c) $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$.

Primero, probaremos el resultado para un conjunto A no abierto de la forma $A = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$, donde $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$.

Para una transformación del tipo (a), se tiene que $LA = (k \cdot a_1, k \cdot b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n]$, por lo que $\mu(LA) = k \cdot \mu(A) = |\det L| \cdot \mu(A)$.

Para L de tipo (b), se tiene que $|\det L| = 1$ y $\mu(LA) = \mu(A)$. Así, $\mu(LA) = |\det L| \cdot \mu(A)$.

Por último, para transformaciones de tipo (c), se tiene que

$$LA = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_2 < x_2 \leq b_2, \dots, a_n < x_n \leq b_n, a_1 + x_2 < x_1 \leq b_1 + x_2\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \mu(LA) &= \int_{LA} 1 dx_1 \dots dx_n = \int_{a_2}^{b_2} \dots \left\{ \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_1}^{b_1} 1 dx_1 \right) dx_n \right\} \dots dx_2 = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \dots \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_1}^{b_1} 1 dx_1 \dots dx_n = 1 \cdot \mu(A) = |\det L| \cdot \mu(A), \end{aligned}$$

aplicando el Teorema de Fubini.

Ahora, consideremos un abierto G tal que $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde cada A_k es de la misma forma que el conjunto A anteriormente descrito. Por la aditividad numerable de la medida,

$$\mu(LG) = \mu \left(L \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) \right) = \mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} LA_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(LA_k).$$

Aplicando el caso anterior ya probado sobre A_k , $\forall k$, se llega al resultado.

También, podemos considerar el caso en el que L combina (a), (b) y (c). Si esto ocurre, basta descomponer L de la forma $L = L_s \circ L_{s-1} \circ \dots \circ L_1$ donde cada L_i es de uno de los tres tipos de transformaciones. Así, se tiene que

$$\mu(LG) = \mu(L_s \circ L_{s-1} \circ \dots \circ L_1 G) = |\det L_s| \cdot |\det L_{s-1}| \cdot \dots \cdot |\det L_1| \cdot \mu(G) = |\det L| \cdot \mu(G).$$

□

Notación 4.2. Denotaremos $LA = L(A)$, la imagen de A mediante la aplicación lineal L , para simplificar la notación.

Ahora, veremos que las aplicaciones lineales llevan medibles en medibles y que, además, se verifica la misma igualdad que en la proposición anterior para medibles.

Teorema 4.3. *Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y regular y consideremos $E \subset \mathbb{R}^n$ un medible. Se verifica que LE es medible y*

$$\mu(LE) = |\det L| \cdot \mu(E).$$

Demostración. Primero, veamos que LE es medible. En virtud del Primer Principio de Littlewood I.5 y I.6, sabemos que para que LE , dado $\epsilon > 0$, debemos buscar $G' \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F' \subset \mathbb{R}^n$ cerrado verificando que $G' \supset LE \supset F'$ y $\mu(G' \setminus F') < \epsilon$. Usando este mismo resultado, sabemos que por ser E un conjunto medible, $\exists G \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\exists F \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tales que $G \supset E \supset F$ y $\mu(G \setminus F) < \frac{\epsilon}{|\det L|}$.

Como G es abierto, F es cerrado y L es una aplicación lineal, entonces LG es abierto y LF es cerrado y verifican que $LG \supset LE \supset LF$. Además,

$$\mu(LG \setminus LF) = \mu(L(G \setminus F)) = |\det L| \cdot \mu(G \setminus F) < |\det L| \cdot \frac{\epsilon}{|\det L|} = \epsilon,$$

usando el Teorema 4.1 y la linealidad de L . Tomando $G' = LG$ y $F' = LF$, ya se tiene lo que buscábamos.

Por último, vamos a ver que $\mu(LE) = |\det L| \cdot \mu(E)$. Es claro que

$$\begin{aligned} \mu(LE) &= \inf \{ \mu(G') : G' \supset LE, G' \text{ abierto} \} = \inf \{ \mu(LG) : G \supset E, G \text{ abierto} \} = \\ &= \inf \{ |\det L| \cdot \mu(G) : G \supset E, G \text{ abierto} \} = |\det L| \cdot \inf \{ \mu(G) : G \supset E, G \text{ abierto} \} = \\ &= |\det L| \cdot \mu(E). \end{aligned}$$

□

Esto sugiere que se tiene el siguiente resultado que se acerca a la versión de Teorema de Cambio de Variable que queremos obtener.

Teorema 4.4. *Sean $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y regular y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ una función medible y no negativa. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) \cdot |\det L| d\mu.$$

Demostración. Si consideramos $f = \chi_{\mathbb{R}^n} = 1$, basta aplicar el Teorema 4.3:

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^n) = \mu(L\mathbb{R}^n) \cdot |\det L| = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \circ L \cdot |\det L| d\mu.$$

Ahora, consideremos que f es una función simple medible. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu &= \int_{E_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{E_i} 1 d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(E_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(LE_i) \cdot |\det L| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int_{E_i} 1 \circ L \cdot |\det L| d\mu = \\ &= \int_{LE_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{E_i} \circ L \cdot |\det L| d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) \cdot |\det L| d\mu. \end{aligned}$$

Por último, para una función f no negativa, basta aplicar el Teorema de aproximación de funciones simples medibles I.10 y el Lema de Fatou I.18, obteniendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Usando lo probado para una función simple medible, obtenemos el resultado buscado. \square

En la siguiente sección, veremos cómo cambia esta versión del teorema si, en lugar de considerar una transformación lineal, consideramos un difeomorfismo. Veremos cómo el papel del determinante de la aplicación lineal lo llevará a cabo el jacobiano del difeomorfismo, tal y como adelantábamos al principio del capítulo.

4.2. Representación de cambios de variables de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2

Hemos visto unos sencillos ejemplos que motivaron el papel del determinante y de las aplicaciones lineales en el Teorema de Cambio de Variable. Ahora, trataremos de ver cómo representar gráficamente los cambios de variables cuando trabajamos en varias dimensiones. Para poder visualizarlo, usaremos transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como el grafo de esta aplicación está en \mathbb{R}^4 , consideraremos su función compleja asociada.

Considerando la base canónica de \mathbb{R}^2 , una aplicación lineal $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tendrá una matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)^T.$$

Ahora, consideremos $z = x + iy \in \mathbb{C}$. De esta forma, $T(z) = (ax + by) + i(cx + dy)$.

Ahora bien, como

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

entonces $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida de la siguiente forma

$$T(z) = \left(a \frac{z + \bar{z}}{2} + b \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i \left(c \frac{z + \bar{z}}{2} + d \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \frac{z + \bar{z}}{2}(a + ci) + \frac{z - \bar{z}}{2i}(b + di).$$

De esta forma, podremos representar funciones de variables reales en el plano complejo, de manera que podamos ver gráficamente el tipo de transformaciones a las que se ven sometidas las regiones de integración bajo la acción de transformaciones lineales arbitrarias.

Ejemplo 4.5. Sea la aplicación lineal $T(x, y) = (2x + 3y, x - 4y)$. Consideremos el rectángulo $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Usando lo anterior, pasamos al plano complejo: $T(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}(2 + i) + \frac{z - \bar{z}}{2i}(3 - 4i)$. El cuadrado pasa a ser el cuadrado sobre el plano complejo de vértices $-1 - i$ y $1 + i$.

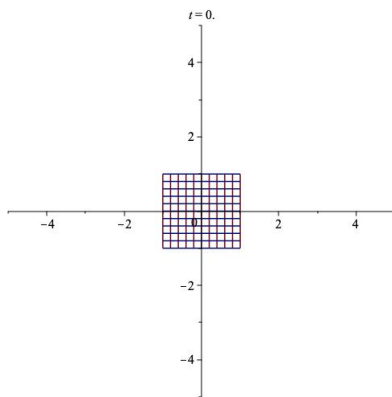


Figura 4.3: Cuadrado inicial.

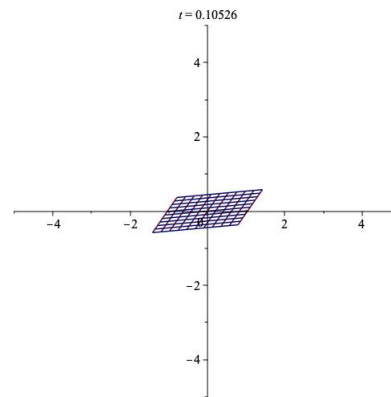


Figura 4.4: Región intermedia.

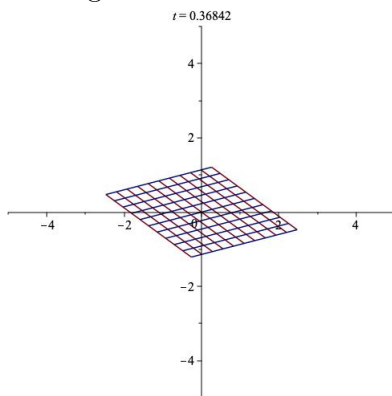


Figura 4.5: Región intermedia.

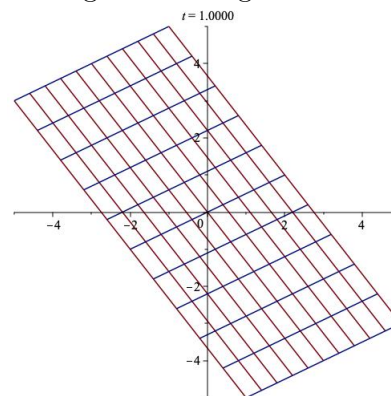


Figura 4.6: Imagen del cuadrado.

Para poder visualizar mejor cómo se transforma una región en otra, vamos a considerar una homotopía lineal $H(z, t) = (1 - t)z + t \cdot T(z), t \in [0, 1]$. Ahora, representaremos, a través de una

animación de Maple (ver Apéndice II), algunas de las aplicaciones intermedias entre la identidad (lleva el rectángulo en sí mismo) y la transformación lineal que estamos considerando (ver Figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6).

Nótese que simplemente estamos usando la homotopía como herramienta para visualizar la transformación que produce la aplicación lineal. Lo que realmente ocurre es que pasamos del rectángulo a la imagen del rectángulo por la aplicación lineal (una correspondencia).

4.3. El Teorema de Cambio de Variable para difeomorfismos

Ya vimos que necesitamos una aplicación lineal para que el Teorema de Cambio de Variable se puede aplicar. La idea principal que yace tras el uso de difeomorfismos es que estas son localmente aplicaciones lineales, lo que nos permitirá generalizar el teorema. Además, como tenemos garantizada la existencia de la aplicación inversa, el jacobiano es no nulo, por lo que podremos descartar los casos degenerados.

De aquí en adelante consideraremos la aplicación regular $T : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ donde U y V son abiertos de \mathbb{R}^n tales que $TU = V$. Además, $T \in \mathcal{C}^1(U)$ y $T^{-1} \in \mathcal{C}^1(V)$. Así, T es un difeomorfismo.

En esta sección nos ocupará demostrar la desigualdad

$$\mu(TE) \leq \int_E |\det DT| d\mu.$$

Primero, lo haremos para un intervalo cúbico; después, para un abierto; y, finalmente, para un conjunto medible. Esta desigualdad nos permitirá más adelante demostrar el Teorema de Cambio de Variable.

Teorema 4.6. *Sea $C \subset U$ un intervalo cúbico. Se tiene que*

$$\mu(TC) \leq \int_C |\det DT| d\mu.$$

Demostración. Como C es compacto y T es un difeomorfismo, TC es compacto y, en consecuencia, es medible. Además, $|\det DT|$ es integrable por ser una función continua. Por el Teorema del Valor Medio, para $y \in C$,

$$\begin{aligned} \|Ty - Ta\| &\leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \|DT(a + \lambda(y - a))\| \cdot \|y - a\| \leq \sup_{z \in C} \|DT(z)\| \cdot \|y - a\| \leq \\ &\leq \sup_{z \in C} \|DT(z)\| \cdot S, \end{aligned}$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n)$ es el centro del cubo C y S es su semiarista verificando que $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_\infty \leq S\}$. Así, TC está contenido en el cubo cerrado de centro Ta

y semiarista $\{\sup_{z \in C} \|DT(z)\|\} \cdot S$. Por tanto,

$$\mu(TC) \leq \left\{ \sup_{z \in C} \|DT(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C).$$

Consideremos la aplicación lineal y regular $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se tiene que $L \circ T$ verifica que

$$\begin{aligned} \mu((L \circ T)C) &\leq \left\{ \sup_{z \in C} \|(L \circ T)(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C) = \left\{ \sup_{z \in C} \|(L \circ DT)(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\det L| \cdot \mu(TC) \leq \left\{ \sup_{z \in C} \|(L \circ DT)(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(TC) \leq |\det L|^{-1} \cdot \left\{ \sup_{z \in C} \|(L \circ DT)(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C). \end{aligned}$$

Ahora bien, para $y \in C$ y $L = [DT(y)]^{-1}$,

$$\mu(TC) \leq |\det DT(y)| \cdot \left\{ \sup_{z \in C} \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\| \right\}^n \cdot \mu(C).$$

Como $z \rightarrow \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\|$ es una aplicación continua en el compacto C , sabemos que, fijado $y \in C$, se alcanza el supremo en algún $z \in C$. Entonces $\forall y \in C, \exists z \in C$ tal que

$$\mu(TC) \leq |\det DT(y)| \cdot \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\|^n \cdot \mu(C).$$

Ahora, consideremos la aplicación continua $C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(y, z) \mapsto \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\|$. Como $C \times C$ es un compacto (producto de compactos), entonces esta aplicación es uniformemente continua. Así, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar C_1, \dots, C_s cubos cerrados en C tales que $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$, y $C = \bigcup_{i=1}^s C_i$. Además, se verifica que para $y, z \in C_i$,

$$\left| \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\| - \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(y)\| \right| < \epsilon \Rightarrow \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\| < 1 + \epsilon.$$

Si consideramos $\epsilon \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|(DT(y))^{-1} \cdot DT(z)\|^n &< (1 + \epsilon)^n = 1 + \frac{n}{1}\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \dots + \epsilon^n = \\ &= 1 + \epsilon \left(\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon + \dots + \epsilon^{n-1} \right) \leq 1 + \epsilon \left(\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + 1 \right) = 1 + \epsilon(2^n - 1). \end{aligned}$$

Para cada $i = 1, \dots, s$, tomemos $y_i \in C_i$ tal que

$$\begin{aligned} |\det DT(y_i)| &= \inf \{ |\det DT(u)| \in \mathbb{R} : u \in C_i \} \Rightarrow \mu(TC_i) \leq \\ &\leq |\det DT(y_i)| \cdot \|(DT(y_i))^{-1} \cdot DT(z)\|^n \mu(C_i) < |\det DT(y_i)| \cdot (1 + \epsilon(2^n - 1)) \cdot \mu(C_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(TC) \leq \sum_{i=1}^s \mu(TC_i) \leq (1 + \epsilon(2^n - 1)) \cdot \sum_{i=1}^s |\det DT(y_i)| \cdot \mu(C_i) \leq \\ &\leq (1 + \epsilon(2^n - 1)) \cdot \sum_{i=1}^s \int_{C_i} |\det DT| d\mu \leq (1 + \epsilon(2^n - 1)) \cdot \int_C |\det DT| d\mu. \end{aligned}$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$, ya tenemos que

$$\mu(TC) \leq \int_C |\det DT| d\mu.$$

□

Teorema 4.7. *Sea $G \subset U$ un abierto. Se tiene que*

$$\mu(TG) \leq \int_G |\det DT| d\mu.$$

Demostración. Por ser G abierto, TG también lo es y, por tanto, TG es medible. Además, podemos escribir $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ con $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ cubos cerrados tales que $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$. Entonces

$$\mu(TG) = \mu\left(T\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} TC_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(TC_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} |\det DT| d\mu = \int_G |\det DT| d\mu,$$

por el Teorema 4.6. □

Teorema 4.8. *Sea $E \subset U$ un conjunto medible. Se tiene que*

$$\mu(TE) \leq \int_E |\det DT| d\mu.$$

Demostración. Por un lado, supongamos que $|\det DT|$ está acotado en U , es decir, $\exists k \in \mathbb{R}$ constante tal que $|\det DT(x)| < k, \forall x \in U$.

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, por ser E medible, sabemos que $\exists G \subset U$ abierto y $\exists F \subset U$ cerrado tales que $G \supset E \supset F$ y $\mu(G \setminus F) < \frac{\epsilon}{k}$ por el Primer Principio de Littlewood I.5.

Como G es abierto y F es cerrado, por ser T un difeomorfismo se tiene que TG es abierto, TF es cerrado, $TG \supset TE \supset TF$ y

$$\mu(TG \setminus TF) = \mu(T(G \setminus F)) \leq \int_{G \setminus F} |\det DT| d\mu \leq k \cdot \mu(G \setminus F) < \epsilon,$$

por el Teorema 4.7.

Así, TE es medible y

$$\begin{aligned} \mu(TE) &\leq \mu(TG) \leq \int_G |\det DT| d\mu \leq \int_F |\det DT| d\mu + \int_{G \setminus F} |\det DT| d\mu \leq \\ &\leq \int_E |\det DT| d\mu + k \cdot \mu(G \setminus F) < \int_E |\det DT| d\mu + k \cdot \frac{\epsilon}{k} = \int_E |\det DT| d\mu + \epsilon. \end{aligned}$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$, ya se tiene la desigualdad buscada.

Ahora bien, para llegar hasta aquí supusimos que $|\det DT|$ estaba acotado. Si no lo estuviera, podemos escribir $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ donde cada U_k es un abierto de la forma $\{x \in U : |\det DT| < k\}$ y usar lo anterior para cada U_k . □

Ya estamos en condiciones de probar el Teorema de Cambio de Variable. Pediremos que la función sea integrable para poder garantizar la existencia de las integrales.

Teorema 4.9 (de Cambio de Variable). *Sea $E \subset U$ un conjunto medible. Dada la función $f : V \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrable, se tiene que*

$$\int_{TE} f d\mu = \int_E (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu.$$

Demostración. Primero, supongamos que $f = \chi_{TE}$. Observemos que $\chi_{TE} = \chi_E \circ T$. En virtud del Teorema 4.8, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{TE} f d\mu &= \int_{TE} \chi_{TE} d\mu = \mu(TE) \leq \int_E |\det DT| d\mu \leq \int_E \chi_E \cdot |\det DT| d\mu = \\ &= \int_E (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu. \end{aligned}$$

Ahora, supondremos que $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{TE_i}$ donde $T = \bigcup_{i=1}^n TE_i$ con TE_i abiertos (imagen mediante T de los abiertos E_i) tales que $TE_i \cap TE_j = \emptyset$, $\forall i, j$, $i \neq j$ (por ser T un difeomorfismo, los E_i verifican las mismas propiedades). Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{TE} f d\mu &= \int_{TE} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{TE_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{TE} \alpha_i \chi_{TE_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(TE_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{E_i} |\det DT| d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu = \int_E (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu. \end{aligned}$$

A continuación, consideremos que f es no negativa. Por el Teorema de aproximación de funciones simples medibles I.10, sabemos que existe una sucesión de funciones simples monótona creciente $\{s_n\}$ tal que converge puntualmente a f . Por un lado, por lo probado hasta ahora, sabemos que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{TE} s_n d\mu \leq \int_E (s_n \circ T) \cdot |\det DT| d\mu. \quad (4.2)$$

Por otro lado, por el Teorema de la Convergencia Monótona I.17, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{TE} s_n d\mu = \int_{TE} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d\mu = \int_{TE} f d\mu. \quad (4.3)$$

Juntando (4.2) y (4.3), llegamos a la desigualdad

$$\int_{TE} f d\mu \leq \int_E (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu.$$

Para probar la otra desigualdad, basta componer con T^{-1} :

$$\begin{aligned} \int_E (f \circ T) \cdot |\det DT| d\mu &\leq \int_{TE} [(f \circ T) \cdot |\det DT|] \circ T^{-1} \cdot |\det DT^{-1}| d\mu = \\ &= \int_{TE} (f \circ T \circ T^{-1}) \cdot |(\det DT) \circ T^{-1}| \cdot |\det DT^{-1}| d\mu = \\ &= \int_{TE} f d\mu. \end{aligned}$$

Como tenemos probadas las dos desigualdades no estrictas, tenemos ya la igualdad buscada para funciones no negativas. Para funciones de signo arbitrario, basta considerar $f = f^+ - f^-$, aplicar la igualdad a f^+ y a f^- y sumar. \square

Observación 4.10. La demostración de este teorema sigue el mismo esquema que la demostración del Teorema de Tonelli (y Fubini). Se demuestra el resultado para la función característica de un conjunto medible, para una función simple medible, para una función no negativa y, por último, se aplica lo probado para una función de signo arbitrario. Además, se hace uso de las desigualdades demostradas hasta el momento.

Referencias

Por un lado, para la interpretación geométrica que hemos utilizado como motivación del Teorema de Cambio de Variable, hemos seguido las ideas de *Calculus* [3]. Este se centra en la geometría que hay detrás de este importante teorema para después demostrarlo formalmente para la integral de Riemann, dando abundantes ejemplos.

Por otro lado, para los resultados y las demostraciones formales, se ha utilizado principalmente *Análisis matemático II* [4]. Este libro no incluye muchos ejemplos o interpretaciones geométricas, en cambio se centra en la parte más formal de este resultado, construyéndolo de manera que quede patente el papel del determinante en el este resultado.

Cabe destacar que se da un enunciado y una demostración del teorema ligeramente distinto; el resultado se prueba directamente para una función simple medible S tal que $0 < S < f$ (considerando f no negativa) y procediendo de una manera similar a la presentada en este trabajo. Después, se utiliza lo probado para ver el resultado para una función de signo arbitrario, separando parte positiva y negativa. Se ha optado por modificar esta demostración para que queden más claros los resultados de teoría de la medida que hay detrás de este teorema.

Anexo I

Algunas nociones básicas de teoría de la medida e integración

En este anexo, recordaremos algunos conceptos y resultados de teoría de la medida e integración de Lebesgue. Para realizar este anexo, se han seguido las ideas de *Análisis Matemático II* [4].

Medida exterior

Sea $A \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $\{I_i\}$ una familia numerable de intervalos abiertos que recubren a A , es decir,

$$A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Sea $v(I_i)$ el volumen de cada uno de estos abiertos.

Definición I.1. Llamamos *medida exterior de Lebesgue* de A a

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) \in [0, \infty].$$

La medida exterior verifica las siguientes propiedades:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- Si A es finito o infinito numerable, entonces $\mu^*(A) = 0$.

- La medida exterior generaliza la idea de volumen de un intervalo: si I es un intervalo abierto verificando que $I \subset A \subset \overset{\circ}{I}$, entonces $\mu^*(A) = v(I)$.
- La medida exterior verifica la subaditividad numerable: para $\{A_m\}$ una colección numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^n , se tiene que

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(A_m).$$

Medida de Lebesgue

La idea fundamental de la medida de Lebesgue es la de generalizar el concepto de longitud en \mathbb{R} y de volumen en \mathbb{R}^n . Antes de nada definamos los conjuntos medibles.

Definición I.2. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice *Lebesgue-medible* si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E), \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

De esta definición, es inmediato ver que, si $\mu^*(E) = 0$, entonces E es medible. Además, se puede probar que la familia de los conjuntos Lebesgue-medibles es una σ -álgebra (el complementario de un medible es medibles, la unión de medibles es medible y la intersección de medibles es medible) y que los conjuntos de medida exterior nula son medibles.

Con esto, definimos la medida de Lebesgue como sigue.

Definición I.3. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible, entonces llamamos *medida de Lebesgue* a la medida exterior de Lebesgue de dicho conjunto medible.

Así, esta medida verifica las siguientes propiedades.

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$, con E_1 y E_2 conjuntos medibles.
- Si E es un conjunto medible finito o infinito numerable, entonces $\mu(E) = 0$.
- La medida de Lebesgue verifica la aditividad numerable: para $\{E_m\}$ una colección numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^n disjuntos dos a dos, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m).$$

- Si E_1 y E_2 son conjuntos medibles tales que $E_2 \subset E_1$ y $\mu(E_2) < \infty$, entonces $\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$.

El siguiente resultado afirma que la medida y el límite se pueden ‘intercambiar’ para sucesiones monótonas de conjuntos medibles .

Proposición I.4. *Sea $\{E_i\}$ es una familia de conjuntos medibles. Se tiene que:*

- Si $E_i \subset E_{i+1}, \forall i$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i).$$

- Si $E_{i+1} \subset E_i, \forall i$ y $\mu(E_1) < \infty$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i).$$

Los siguientes resultados caracterizan los conjuntos medibles con los conjuntos abiertos que los contienen (los conjuntos medibles son ‘casi abiertos’) y los conjuntos cerrados que están contenidos en ellos, dando así una relación entre la medida y la topología.

Teorema I.5 (Primer Principio de Littlewood). *El conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ es medible si y solo si $\forall \epsilon > 0, \exists U \in \mathbb{R}^n$ abierto verificando que $E \subset U$ y $\mu(E \setminus U) < \epsilon$.*

Teorema I.6. *El conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ es medible si y solo si $\forall \epsilon > 0, \exists F \in \mathbb{R}^n$ cerrado verificando que $F \subset E$ y $\mu(E \setminus F) < \epsilon$.*

Corolario I.7. *El conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ es medible si y solo si $\forall \epsilon > 0, \exists U \in \mathbb{R}^n$ abierto y $\exists F \in \mathbb{R}^n$ cerrado verificando que $F \subset E \subset U$ y $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.*

Funciones medibles

Definición I.8. Sea E un conjunto medible. Una función $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^1$ es *medible* si, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica una de las siguientes afirmaciones equivalente:

- El conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible.
- El conjunto $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.
- El conjunto $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ es medible.
- El conjunto $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.

Para E un conjunto medible, las funciones medibles verifican las siguientes propiedades:

¹ $\overline{\mathbb{R}}$ denota la recta real ampliada.

- Si f es continua, entonces f es medible.
- Sea $F \subset E$ un conjunto medible. Se tiene que $f|_F$ es medible.
- Las funciones medibles tienen un buen comportamiento con las operaciones aritméticas: dados $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, se tiene que $f + g, f + c, f \cdot g, c \cdot f$ son medibles.
- Las funciones medibles tienen un buen comportamiento al tomar supremos e ínfimos: dada una sucesión de funciones medibles $\{f_m\}$ de E en $\overline{\mathbb{R}}$, se tiene que las funciones $\sup \{f_m\}$ e $\inf \{f_m\}$ son medibles.
- Las funciones medibles tienen un buen comportamiento al tomar límites: dada una sucesión de funciones medibles $\{f_m\}$ de E en $\overline{\mathbb{R}}$, se tiene que las funciones $\overline{\lim} \{f_m\}$ e $\underline{\lim} \{f_m\}$ son medibles.

Definición I.9. Sea E un conjunto medible. $S : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función simple* si existen E_i una familia finita de conjuntos disjuntos dos a dos tales que la unión de todos ellos es E y escalares reales $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de forma que

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{E_i}.$$

Si, además, los conjuntos E_i son medibles, entonces S es una *función simple medible*.

El siguiente resultado nos permite aproximar toda función medible no negativa por una sucesión de funciones simples medibles.

Teorema I.10 (de aproximación de funciones medibles). *Sea f una función medible no negativa en un conjunto E medible. Se tiene que existe una sucesión de funciones simples medibles monótona creciente en E , $\{S_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, tal que S_m converge puntualmente a f en E .*

El siguiente resultado nos dice que la convergencia puntual de las funciones medibles es “casi uniforme”.

Teorema I.11 (de Egoroff). *Sean E un conjunto medible y $\{f_m\}$ una sucesión de funciones medibles de E en \mathbb{R} . Si $\mu(E) < \infty$ y $\{f_m\}$ converge a una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ casi por doquier, entonces $\{f_m\}$ converge casi uniformemente a f en E .*

El resultado que sigue afirma que las funciones medibles son “casi continuas”.

Teorema I.12 (de Lusin). *Sean E un conjunto medible con $\mu(E) < \infty$ y $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists F \subset E$ un conjunto cerrado tal que $\mu(E \setminus F) < \epsilon$ y f es continua en F .*

En consecuencia, se tiene el siguiente teorema.

Teorema I.13. Sean E un conjunto medible y $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\mu(x \in E : f(x) \neq g(x)) < \epsilon$.

La integral de Lebesgue

Para definir la integral de Lebesgue, empezamos definiéndola para funciones no negativas y, más adelante, para funciones de signo arbitrario separando parte positiva y negativa.

Definición I.14. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $S : D \rightarrow [0, \infty]$ una función simple medible con forma canónica

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \chi_{E_i}.$$

Si $E \subset D$ es un conjunto medible, definimos la *integral* de S como

$$\int_E S d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(\chi_{E_i \cap E}).$$

Sean D un conjunto medible y $S_1, S_2 : D \rightarrow [0, \infty]$ funciones simples medibles. Esta integral verifica lo que sigue.

- Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ medible con $E_i \subset D$ conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\int_E S d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} S d\mu.$$

- $S_1 + S_2$ es simple medible y para cada $E \subset D$ medible se verifica que

$$\int_E S_1 + S_2 d\mu = \int_E S_1 d\mu + \int_E S_2 d\mu.$$

- Si $S_1 \leq S_2$ en D , entonces para cada $E \subset D$ medible se verifica que

$$\int_E S_1 d\mu \leq \int_E S_2 d\mu.$$

Definición I.15. Sea D un conjunto medible. Consideremos $E \subset D$ un conjunto medible y $f : D \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Definimos la *integral de Lebesgue* de f en E como

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E S d\mu,$$

donde S es una función simple medible tal que $0 \leq S \leq f$.

De nuevo, tenemos unas propiedades que cumple esta integral de forma inmediata. Sean f y g son funciones medibles no negativas definidas en D medible y sea $E_1, E_2, E \subset D$ conjuntos medibles, se verifica que:

- Si $0 \leq f \leq g$, entonces

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

- Si $E_1 \subset E_2$ y $f \geq 0$, entonces

$$\int_{E_1} f d\mu \leq \int_{E_2} f d\mu.$$

- Si $c \in \mathbb{R}^+$ y $f \geq 0$, se tiene que

$$\int_E c \cdot f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

- Si $f = 0$ en E , entonces

$$\int_E f d\mu = 0.$$

- Si $\mu(E) = 0$, entonces

$$\int_E f d\mu = 0.$$

- Se verifica que

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Ahora, enunciaremos uno de los grandes teoremas de convergencia y una de sus consecuencias inmediatas.

Teorema I.16 (de la Convergencia Monótona). *Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en D , un conjunto medible, tal que es monótona creciente y convergente a una función f no negativa. Entonces*

$$\int_D f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_D f_m d\mu.$$

Corolario I.17. *Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en un conjunto medible D . Se tiene que*

$$\int_D \sum_{m=1}^{\infty} f_m d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_D f_m d\mu.$$

Los dos resultados siguientes son un importante lema y su muy útil corolario.

Lema I.18 (de Fatou). Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en un conjunto medible D . Entonces se verifica que

$$\int_D \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} f_m d\mu \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_D f_m d\mu.$$

Corolario I.19. Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en D , un conjunto medible, tal que es monótona creciente y convergente casi por doquier a una función f medible no negativa. Entonces

$$\int_D f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_D f_m d\mu.$$

Con esto, ya podemos definir la integral de Lebesgue para funciones de signo arbitrario. Consideremos $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Definimos $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = \max\{-f, 0\}$ las partes positiva y negativa de f , respectivamente. Claramente, ambas son funciones no negativas y f es medible si y solo si f^+ y f^- también lo son.

Definición I.20. Sea $E \subset D$ un conjunto medible. Se dice que f es *Lebesgue-integrable* en E si

$$\int_E f^+ d\mu < \infty, \quad \int_E f^- d\mu < \infty.$$

Así, llamamos *integral de Lebesgue* de f en E a

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

La integral de Lebesgue cumple las siguientes propiedades.

- Si f es medible, entonces $|f|$ es medible e integrable y, además,

$$\int_E |f| d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu.$$

- Linealidad de la integral: si $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

- Desigualdad modular:

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Ahora, enunciaremos otro de los grandes teoremas de convergencia .

Teorema I.21 (de la Convergencia Dominada o de Levi). *Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definida en un conjunto medible D tales que son convergentes casi por doquier a una función f medible. Si $\exists g$ una función integrable en D tal que $|f_m| \leq g$ casi por doquier y $\forall m \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable en D y*

$$\int_D f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_D f_m d\mu.$$

Los dos siguientes resultados son de utilidad para demostrar algunos de los resultados tratados en este trabajo. Se pueden consultar en *Lebesgue integration* [5].

Proposición I.22. *Sean f y g dos funciones tales que f es integrable en $[a, b]$ y g es medible y está acotada en casi todo punto de $[a, b]$. Se tiene que fg es integrable en $[a, b]$.*

Teorema I.23. *Sean E un conjunto medible y $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Se tiene que $\forall \epsilon > 0$, $\exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\int_E |f - g| < \epsilon$.*

Anexo II

Interpretaciones geométricas con Maple

Para ilustrar algunos de los conceptos y resultados de este trabajo, se ha utilizado el software *Maple*. Algunas de las ideas para programar los distintos recursos visuales se han basado en *Introduction to Maple* [8], *Maple animation* [11] y en la página de ayuda de este programa.

En este apéndice, introduciremos el código y las ideas utilizadas. En esencia, se han combinado procedimientos y comandos de *Maple* para poder crear procedimientos originales que generen gráficas y animaciones ilustrativas de los conceptos tratados en este trabajo.

Se han utilizado procedimientos para poder cambiar fácilmente los parámetros involucrados en estos para estudiar distintos casos. Así, el código no solo sirve para los ejemplos que se han presentado en este trabajo, sino que valen para cualquier otro caso en el que dichos procedimientos tengan sentido.

Representando funciones de variación acotada

Para las Figuras 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11 acerca de las funciones de variación acotada, se han tomado *frames* de animaciones (la misma pero para tres funciones distintas).

Esta animación se ha realizado para poder tener una noción intuitiva de lo que son las funciones de variación acotada. Fijándonos en la definición de este tipo de funciones, queremos que, dada una partición, la suma de las distancias entre las imágenes de dos puntos consecutivos de la partición esté acotada. Así pues, debemos sumar distancias verticales y ver si la suma está acotada. De aquí, surge la idea de considerar un punto que se desplaza por el grafo de la función y su proyección en el eje Y . Si la distancia recorrida por esta proyección es finita (la variación total es finita), entonces podemos intuir que la función es de variación acotada.

Para realizar esta interpretación de las funciones de variación acotada, se ha creado un procedimiento específico cuyo código es el siguiente:

```
varacot:=proc(f,a,b,t1,t2,fr)
local A;
local B;
local C;
A := plot(f(x), x = a .. b, color = "Maroon");
B := animate(pointplot, [[[0, f(t)]], symbol = solidcircle, symbolsize = 17,
color = "SeaGreen"], t = t1 .. t2, frames = fr);
C := animate(pointplot, [[[t, f(t)]], symbol = solidcircle, symbolsize = 17,
color = "SlateBlue"], t = t1 .. t2, frames = fr);
display(A,B,C);
end proc;
```

Primero, se representa en A la gráfica de la función f en el intervalo $[a, b]$. Tras esto, se representan dos animaciones en B y en C . La primera se corresponde con la proyección sobre el eje Y del punto que va a “viajar” por el grafo de la función, mientras que la segunda representa el propio punto. Finalmente, se representan las tres representaciones gráficas simultáneamente con el comando *display*.

Interpretación geométrica del Teorema de Fubini

Para las Figuras 3.1 y 3.2 sobre el Teorema de Fubini, se han tomado dos *frames* de dos animaciones realizadas con un procedimiento.

Como vimos en el Capítulo 3, el Teorema de Fubini tiene una interpretación geométrica bastante intuitiva. Sin embargo, nos interesa buscar una manera de representar fácilmente esta cuestión. Para ello, se ha optado por crear una animación en la cual mediante planos que intersecan a la superficie (grafo de la función) se ven claramente las secciones de esta última. Además, queda representada el área bajo cada sección, que se corresponderá con la integral de la sección considerada; esto es la región que queda por debajo de la sección, contenida en el plano de intersección. Al ir añadiendo secciones, se da la idea intuitiva de que si sumamos todas esas regiones obtendremos una aproximación del volumen encerrado bajo el grafo de la función y, si tomamos límites, tendremos el volumen total (la integral de la función).

El código para el procedimiento creado para poder representar esta situación es el siguiente:

```
fubini:=proc(f,a,b,c,d,z1,z2,fr,tr,t1,t2,varphi1,varphi2,psi1,psi2)
```

```

local surf:
local planexz:
local planeyz:
local sectionx:
local sectiony:
local A:
local region:
local sgx:
local sgy:
surf := plot3d(f(x, y), x = varphi1(y) .. varphi2(y), y = psi1(x) .. psi2(x),
color = "turquoise", style = surface);
planexz := animate(implicitplot3d, [y = t, x = a .. b, y = c .. d, z = z1 .. z2,
color = "aquamarine", style = surface, transparency = 0.5], t = t1 .. t2,
frames = fr);
planeyz := animate(implicitplot3d, [x = t, x = a .. b, y = c .. d, z = z1 .. z2,
color = "aquamarine", style = surface, transparency = 0.5], t = t1 .. t2,
frames = fr);
sectionx := animate(intersectplot, [z = f(x, y), y = t, x = a .. b,
y = c .. d, z = z1 .. z2, color = "red", thickness = 10], t = t1 .. t2,
frames = fr, trace = tr);
sectiony := animate(intersectplot, [z = f(x, y), x = t, x = a .. b,
y = c .. d, z = z1 .. z2, color = "red", thickness = 10], t = t1 .. t2,
frames = fr, trace = tr);
region := plot3d(0, x = varphi1(y) .. varphi2(y), y = psi1(x) .. psi2(x),
color = "yellow", style = surface, transparency = 0.5);
sgx:=display({planexz, region, surf, sectionx}, overrideoptions,
axes = boxed, title = "SECCIONES g_x");
sgy:=display({planeyz, region, surf, sectiony}, overrideoptions,
axes = boxed, title = "SECCIONES g_y");
A:=Array(1..2):
A[1]:=sgx:
A[2]:=sgy:
display(A);
end proc;

```

Primero, lo que se hace es crear el *plot3d* con el que dibujaremos el grafo de la función f a integrar. Observemos que los “extremos” de integración son funciones $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Esto es porque, de esta forma, podemos definir conjuntos de integración más generales

que los rectángulos.

Seguidamente, se crean los planos paralelos al YZ y XZ como animaciones que irán intersectando a la superficie dada por el grafo de f . Después, se crean dos animaciones simultáneas a las de los planos que irán dibujando las intersecciones de la superficie con cada uno de los planos, es decir, las funciones sección. También dibujamos la región de integración para saber en qué conjunto estamos trabajando.

Ahora, juntamos todos estos elementos con dos *display*, que, por un lado, crea la animación de las secciones g_x y, por otro, la de las secciones g_y . Finalmente, se crea un *array* para crear un vector con las dos animaciones y que se reproduzcan simultáneamente con el *display*.

Los demás parámetros del procedimiento sirven para delimitar los ejes de la gráfica que va a mostrar y decidir cuántos *frames* queremos ver y cuántos queremos que se mantengan a lo largo de la animación.

Así, combinando distintos comandos de *Maple*, se ha creado un procedimiento original que ilustra el Teorema de Fubini.

Transformando regiones con el Teorema de Cambio de Variable

Para las Figuras 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 acerca del Teorema de Cambio de Variable, se han combinado comandos de *Maple* para crear el siguiente procedimiento:

```

cambvar:=proc(a,b,c,d,fr,z1,z2)
animate(conformal, [(1 - t)*z + t*((z+conjugate(z))/2*(a+c*I)+
(z-conjugate(z))/(2*I)*(b+d*I)), z = z1 .. z2], t = 0 .. 1, frames = fr);
end proc;

```

La idea que llevó a crear este procedimiento es la de transformar una aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , a partir de los coeficientes de su matriz asociada (en base canónica), a una aplicación lineal de \mathbb{C} en \mathbb{C} . Estos coeficientes son los parámetros a, b, c, d . Los parámetros fr y $z1, z2$ se refieren a la cantidad de *frames* y a los extremos del rectángulo sobre el plano complejo a considerar, respectivamente.

Se usa una animación para poder visualizar las transformaciones que se realizan en la cual el parámetro t se corresponde con el parámetro de una homotopía lineal. La homotopía nos da todas las aplicaciones intermedias entre la identidad y la transformación lineal considerada. De esta forma, podemos visualizar cómo se transforman regiones en \mathbb{R}^4 mediante aplicaciones lineales utilizando variable compleja.

Bibliografía

- [1] Aksoy, A., Martelli, M.: *Mixed partial derivatives and Fubini's theorem*. The College Mathematics Journal **33**(2), 126–130 (2002)
- [2] Aksoy, A., Martelli, M.: *The wave equation, mixed partial derivatives, and Fubini's theorem*. The American Mathematical Monthly **111**(4), 340–347 (2004)
- [3] Apostol, T.M.: *Selected papers on calculus*, vol. 2. Mathematical Association of America (1969)
- [4] del Castillo, F.: *Análisis matemático II*. Alhambra, Madrid (1987)
- [5] Chae, S.B.: *Lebesgue Integration*. Springer-Verlag, New York (1995)
- [6] Edwards, C.J.: *The historical development of the calculus*. Springer Science & Business Media (2012)
- [7] Hawkins, T.: *Lebesgue's theory of integration*. AMS Chelsea Publishing (1970)
- [8] Heck, A.: *Introduction to maple*. Springer (2003)
- [9] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, New York (1975)
- [10] Lebesgue, H.: *Sur une généralisation de l'intégrale définie*. CR Acad. Sci. Paris **132**, 1025–1028 (1901)
- [11] Putz, J.F.: *Maple animation*. Chapman and Hall/CRC (2018)
- [12] Spivak, M.: *Cálculo en variedades*. Reverté (1988)