FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Bases de Schauder en espacios de Banach

Iker Rodríguez Rodríguez

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Bases de Schauder en espacios de Banach

Iker Rodríguez Rodríguez

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de coñecemento: Análise Matemática
Título: Bases de Schauder en espazos de Banach
Breve descrición do contido
Neste Traballo Fin de Grao estudarase o concepto de base de Schauder dun espazo de Banach, ferramenta similar ás bases de Hilbert dun espazo de Hilbert e o análogo ao caso de dimensión infinita das bases de Hamel dun espazo vectorial de dimensión finita. Para iso, teremos que estudar, comprender e asimilar diversos resultados de análise funcional directamente relacionados coa noción de converxencia.
Recomendacións
Cursar a materia Análise funcional en espazos de Hilbert.
Outras observacións

Índice

Resumen **iv**

Introducción **v**

1. Bases de Schauder **1**

1.1. Bases de Schauder en espacios vectoriales normados 1

1.2. Bases de Schauder en espacios de Banach 5

2. Bases de Schauder y espacios reflexivos I **9**

2.1. Funcionales biortogonales 9

2.2. Espacios de Banach reflexivos con base de Schauder 12

3. Sucesiones básicas **15**

3.1. Sucesiones básicas equivalentes 17

3.2. Perturbación de sucesiones básicas 20

3.3. Sucesión básica bloque 23

4. Bases de Schauder y espacios reflexivos II **26**

4.1. Bases de Schauder incondicionales 26

4.2. Espacios de Banach reflexivos con base de Schauder incondicional 32

5. Estructura de los subespacios de ℓ_p y c_0 **37**

6. Ejemplos de bases de Schauder **44**

6.1. Ejemplos elementales 44

6.2. Espacios de sucesiones 45

6.3. Espacios de funciones 48

Bibliografía **55**

A. Topologías débil y débil* **56**

B. Resultados auxiliares **59**

Resumen

Estudiaremos los conceptos básicos de las bases de Schauder, circunscritas en el ámbito del Análisis Funcional. Veremos algunas de sus propiedades, tipos y utilidades en la caracterización de atributos de los espacios, centrándonos sobre todo en la reflexividad y en la estructura interna de los espacios, dando especial importancia a los espacios de sucesiones como c_0 y los ℓ_p, destacando en especial a ℓ_1 entre estos últimos. También daremos algunas notas relacionadas con la existencia y unicidad de bases de Schauder e intentaremos mostrar como estas bases son una extensión natural de las bases de Hamel en espacios finitos y una generalización de las bases de Hilbert a espacios de Banach más genéricos.

Abstract

We will study the basic concepts of Schauder basis, mainly related to the Functional Analysis. We will see some of their properties, types and utilities in characterization of spaces attributes, focusing on reflexivity and the internal structure of spaces, giving special treat to the spaces of sequences like c_0 and ℓ_p, laying emphasis on ℓ_1 among latter. Furthermore, we will give some notes related to existence and uniqueness of Schauder basis and try to show how this basis are a natural extension of Hamel basis of finite spaces as well as a generalization of Hilbert basis to more generic Banach spaces.

Introducción

Desde el inicio de la matemática moderna, con Descartes, hemos tenido el objetivo de asignar a los objetos de nuestro estudio una secuencia de cifras con las que poder simplificar dichos objetos y embeberlos en el mundo de los números, tratándolos así con todo el poder teórico de las matemáticas. Dio inicio esta tentativa con las primeras coordenadas *cartesianas* —así designadas en honor a su promotor— que movilizaron el motor de la producción matemática haciéndolo más fructífero en los últimos 500 años que en los previos 3 300 que hay desde las primeras ternas pitagóricas mesopotámicas conocidas.

Es con esa filosofía en mente que surge la idea de realizar tal tentativa no ya con objetos físicos o con coordenadas finitas, sino con el poder del infinito. El objetivo es ahora el estudio de objetos mucho más abstractos: las funciones —lo cual trajo consigo el problema de las inifitas dimensiones—.

Al principio, el estudio se reducía a las funciones de $\mathcal{C}^\infty$ o infinitamente diferenciables —las conocidas como series de Taylor, 1715, que fallaron en generar todo el espacio y se reducían a las funciones analíticas—. Con el tiempo, la idea fue madurando y se quiso ampliar el domino de validez a todas las funciones continuas, aún cuando no se tenía muy claro qué era una función continua todavía —de aquí surgieron las series de Fourier, conocidas ya a principios del siglo XIX y que resultarían en una base no para las funciones continuas con la norma de la convergencia uniforme, sino para el espacio L^2 con la norma *euclidiana* $\|\cdot\|_2$—.

Con el final del siglo XIX y la llegada del XX comenzaron a darse los mayores avances en este campo. Hilbert, Schmidt y Riesz—entre muchos otros— comenzaron el estudio del espacio de las funciones de cuadrado integrable y consiguieron extraer ciertas nociones geométricas muy similares a las de los espacios euclidianos de dimensión finita, como por ejemplo la ortogonalidad. El concepto creció y se estableció la abstracción de los espacios de Hilbert —término acuñado por von Neumann—, cuyo principal cometido y éxito es generalizar los espacios euclidianos a dimensión infinita respetando la existencia de sistemas ortonormales que generan la totalidad del espacio. Surgió así el estudio sistemático de la noción de base en dimensión infinita.

De forma paralela, Haar construyó un sistema —el conocido como sistema de Haar— de funciones que sirven de base no sólo para el espacio L^2, que ya tenía una base dada por las series de Fourier que además funcionaba por ser este un espacio de Hilbert, sino de todos los espacios L^p, con $1 \leq p < \infty$ que no son Hilbertianos. Poco después, Georg Faber demostró la existencia de una base para el espacio de las funciones continuas con la norma uniforme.

Todo este impulso histórico se cristalizó en la tesis de 1923 de un joven matemático polaco, Juliusz Schauder. Él dio rigor y formalismo a la idea de una generalización de todo lo anterior introduciendo el concepto hoy en día conocido, en su honor, como *bases de Schauder*: un avance más en el entendimiento de la estructura de los espacios de funciones inspirado en el objetivo de Descartes de simplificar el estudio de cualquier ente a un sistema de coordenadas coherente del que se puedan extraer conclusiones.

Es por querer dar valor a esta idea tan matemática que en el presente Trabajo Fin de Grado queremos dar un repaso a algunos de los resultados que las bases de Schauder han ayudado a probar y comprender.

En el primer capítulo nos centraremos en la definición de lo que es una base de Schauder y caracterizaremos su existencia; también incluiremos algunos comentarios sobre el problema de la existencia de base para un espacio de Banach.

En el Capítulo 2 estudiaremos la relación entre las bases de Schauder y el espacio dual, demostrando el primer gran resultado del trabajo: la caracterización de aquellos espacios de Banach que son reflexivos y admiten base de Schauder.

En el Capítulo 3 estudiaremos las conocidas como sucesiones básicas, que no son más que bases de Schauder del espacio —quizás menor que el total— que generan. También hablaremos sobre la noción equivalencia para bases de Schauder.

En el Capítulo 4 estudiaremos aquellas bases de Schauder que son incondicionales; es decir, es indiferente el orden que consideremos a la hora de estudiar la convergencia de la serie que define a cada vector del espacio. Caracterizaremos los espacios de Banach reflexivos con base incondicional.

En el Capítulo 5 daremos por finalizada nuestra tentativa empleando la teoría de las bases de Schauder desarrollada a lo largo del trabajo para estudiar la estructura interna de los espacios de sucesiones ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, con el objetivo de dar a entender como de distintos son entre sí.

A mayores, queremos dejar patente que las bases de Schauder no son en absoluto una construcción artificiosa, sino que generalizan muy naturalmente a las bases de Hamel de los espacios de dimensión finita. Es por ello que iremos comparando sus propiedades en algunos capítulos para dejar claro el origen algebraico que tiene detrás esta idea y que tan bien resume la filosofía del Análisis Funcional de fusionar conceptos algebraicos con nociones topológicas para el estudio de las funciones.

Santiago de Compostela, julio de 2025.

Capítulo 1

Bases de Schauder

En este capítulo presentaremos algunos conceptos básicos: introduciremos la noción de base de Schauder para un espacio vectorial normado, caracterizaremos su construcción y existencia y más adelante, ya en la segunda sección del capítulo, veremos que la hipótesis de completitud es fundamental para obtener los resultados más importantes de este Trabajo Fin de Grado.

También hablaremos, aunque de manera más superficial, del *problema de existencia de base de Schauder* para espacios de Banach separables.

1.1. Bases de Schauder en espacios vectoriales normados

Es bien conocido que todo espacio vectorial tiene base de Hamel. Es decir, en todo espacio vectorial podemos encontrar un conjunto de vectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales (¡finitas!) generan el espacio. Además, todas las bases de Hamel de un mismo espacio vectorial tienen algo en común: su cardinal. Por tanto, es posible definir la *dimensión* de cualquier espacio vectorial.

No obstante, en el caso de dimensión infinita, la exigencia de finitud de las combinaciones lineales provoca que las bases de Hamel pierdan gran parte de su utilidad. Más exactamente (véase [1, pág.48]):

Teorema 1.1. *Ningún espacio vectorial de dimensión infinita admite base de Hamel numerable.*

Evidentemente, la no numerabilidad de una base es un gran inconveniente, pues reduce enormemente la capacidad de trabajar con éstas: con una base nosotros queremos reducir el número de elementos que necesitamos conocer de un espacio para poder trabajar con él, pero si dicha base es no numerable entonces es necesario conocer casi tantos elementos como tiene el espacio, lo cual hace redundante el sentido de una base.

Para superar la problemática anteriormente mencionada podemos buscar ayuda en la topología y emplear el concepto de convergencia para generalizar las combinaciones lineales finitas a sumas infinitas, es decir, a series.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

Definición 1.2 (Base de Schauder).
Se dice que una sucesión $(e_i)_i \subset X$ es una *base de Schauder de* X si para cada vector $x \in X$

existe una única sucesión de escalares $(a_i)_i$ de modo que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

es decir, cumpliendo que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = 0.$$

La anterior definición ya nos deja entrever esa similitud de las bases de Schauder con las de Hamel: un conjunto de vectores—linealmente independientes— que generan el espacio y nos permiten asignar de forma única unos coeficientes a todos los elementos de dicho espacio. Hasta aquí tenemos la filosofía algebraica del Análisis Funcional.

El lector podrá notar ahora los beneficios de introducir una perspectiva analítica, o más bien topológica, al poder reducir el tamaño de las bases. Donde antes teníamos bases no numerables para espacios de dimensión infinita, ahora tenemos una sucesión numerable que genera todo el espacio manteniendo la unicidad de los coeficientes (que tienen entonces derecho a ser denominados *coordenadas*). Parece que vamos por buen camino en el cumplimiento de nuestro objetivo.

Veamos ahora una caracterización de estas bases que nos será muy útil tanto para demostrar que una sucesión es, en efecto, base de Schauder como para construirlas.

Definición 1.3. (Proyecciones canónicas de una base de Schauder)
Si $(e_i)_i$ es una base de Schauder de X, la sucesión de *proyecciones canónicas* asociada a $(e_i)_i$ es la sucesión de operadores $(P_n)_n \subset \mathcal{B}(X)$ dada, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$P_n \colon x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X \longmapsto P_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in X. \tag{1.1}$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado con base de Schauder $(e_i)_i$.

Proposición 1.4 (Caracterización de las proyecciones canónicas)**.**
La sucesión de proyecciones canónicas asociada a $(e_i)_i$ satisface las siguientes propiedades:

(a) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X)$ es un espacio vectorial de dimensión n;*
(b) *para cualesquiera n, $m \in \mathbb{N}$, $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{n,m\}}$;*
(c) *para cada $x \in X$, $\|P_n x - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Además, dada una sucesión de operadores $(P_n)_n \subset \mathcal{B}(X)$ satisfaciendo (a), (b) y (c), existe una base de Schauder de X que tiene a $(P_n)_n$ como sucesión de proyecciones canónicas asociada.

Observación. Antes de ver la demostración de la Proposición 1.4 conviene recordar que se dice que un operador $P \in \mathcal{B}(X)$ es una *proyección* (lineal y continua) si $P^2 \equiv PP = P$. En tal caso, $I - P$ también es una proyección. Además, $P(X) = \ker(I - P)$, luego P restringido a $P(X)$ es la identidad. Análogamente, $\ker P = (I - P)(X)$. Es evidente que si P es una proyección no trivial ($P \neq 0$ y $P \neq I$), entonces $\|P\| \geq 1$ y $\|I - P\| \geq 1$.

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

(a) A la vista de (1.1) es evidente que $\dim P_n(X) \leq n$. Además, $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente, pues si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, dado que

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} 0\, e_i,$$

la unicidad de los escalares que se exige en la definición de base de Schauder implica que $\lambda_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por tanto, $\dim P_n(X) = n$.

(b) A la vista de (1.1) es evidente que $P_n P_m = P_m P_n = P_{\text{mín}\{n,m\}}$.

(c) Dado que $(P_n(x))_n$ es la sucesión de sumas parciales de la serie (convergente) que coincide con x, por definición, $\|P_n(x) - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

"$\Longleftarrow$"

Indicamos a continuación las ideas claves de la prueba. Se detallan todos los pasos de manera más pormenorizada al final de este epígrafe (en la página 8).

Sea $P_0 \equiv 0$ la aplicación nula y consideremos, para cada $i \in I$, un vector $e_i \in P_i(X) \cap \ker P_{i-1}$. En tal caso, para cada $x \in X$ se tiene que

$$x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i(x) - P_{i-1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

ya que $\dim P_i(X)/P_{i-1}(X) = 1$. La unicidad de la sucesión de escalares $(a_i)_i$ exigida en la definición de base de Schauder es consecuencia de que $a_i e_i = P_i(x) - P_{i-1}(x)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. $\square$

El lector podrá notar que la idea detrás de esta caracterización es muy interesante —y bella—: para construir las bases del espacio total se parte de un espacio de dimensión finita y se va haciendo más grande hasta que, en una especie de convergencia espacial, se construye una sucesión de espacios que se aproxima cada vez más al espacio total. Nos gustaría incidir en esta idea porque guarda una estrecha relación con la filosofía del Análisis Matemático: estudiar aquello que no comprendemos fraccionándolo primero en aquello que sí conocemos y extrapolando luego mediante el uso de límites sus propiedades.

Además, remarca de nuevo la idea principal de este Trabajo Fin de Grado: las bases de Schauder pretenden ser bases de Hamel que admiten sumas infinitas, es decir, *límites* de bases de Hamel.

Veamos ahora un resultado que abre las puertas a lo que será nuestro ámbito de estudio: los espacios completos.

Proposición 1.5 (Condición suficiente para ser base de Schauder de la compleción $\hat{X}$ de X)**.**

Si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty \tag{1.2}$$

la sucesión $(e_i)_i$ *también es una base de Schauder de la compleción* $\hat{X}$ *de* X*.*

Demostración.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la extensión continua de P_n a $\hat{X}$; es decir, para cada $\hat{x} \in \hat{X}$, definimos $\hat{P}_n(\hat{x}) = \text{lím}_{k\to\infty} P_n(x_k)$, siendo $(x_k)_k \subset X$ cualquier[1] sucesión convergente a $\hat{x}$.

Veamos que se cumplen las propiedades (a), (b) y (c) del enunciado del Teorema 1.4.

(a) Atendiendo a la definición de $\hat{P}_n$, resulta evidente que $\hat{P}_n(\hat{X}) \subset \overline{P_n(X)}$. Además, como —por hipótesis— $P_n(X)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita, en particular es cerrado, luego $P_n(X) = \overline{P_n(X)}$. Por tanto $\hat{P}_n(\hat{X}) \subset P_n(X)$.
Por otra parte, dado que $P_n(X) = \hat{P}_n(X) \subset \hat{P}_n(\hat{X})$, concluimos finalmente que $P_n(\hat{X})$ es un espacio vectorial de dimensión n, ya que —por hipótesis— $\dim P_n(X) = n$.

(b) Dado $\hat{x} \in \hat{X}$ arbitrario pero fijado, existe $(x_k)_k \subset X$ tal que $x_k \to \hat{x}$ cuando $k \to \infty$. Así pues, para m, $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera,

$$\begin{aligned}\hat{P}_n\hat{P}_m x &= \text{lím}_{k\to\infty} \hat{P}_n\hat{P}_m x_k = \text{lím}_{k\to\infty} \hat{P}_n P_m x_k = \text{lím}_{k\to\infty} P_n P_m x_k \\ &= \text{lím}_{k\to\infty} P_m P_n x_k = \text{lím}_{k\to\infty} \hat{P}_m\hat{P}_n x_k = \hat{P}_m\hat{P}_n x,\end{aligned}$$

por lo que $\hat{P}_n\hat{P}_m = \hat{P}_m\hat{P}_n$. La igualdad $\hat{P}_n\hat{P}_m = \hat{P}_{\text{mín}\{n,m\}}$ es consecuencia evidente de lo anterior y de la hipótesis $P_nP_m = P_{\text{mín}\{n,m\}}$.

(c) Conviene observar inicialmente que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|\hat{P}_n\| \leq \|P_n\|$. En efecto, pues para cualquier $\hat{x} \in \hat{X}$ se tiene que

$$\|\hat{P}_n(\hat{x})\| = \|\text{lím}_{k\to\infty} P_n(x_k)\| = \text{lím}_{k\to\infty} \|P_n(x_k)\| \leq \text{lím}_{k\to\infty} \|P_n\|\|x_k\| = \|P_n\|\|\hat{x}\|,$$

siendo $(x_k)_k \subset X$ una sucesión tal que $x_k \to \hat{x}$ cuando $k \to \infty$.
Así pues, dado $\hat{x} \in \hat{X}$ arbitrario pero fijado, considerando $(x_k)_k \subset X$ tal que $x_k \to \hat{x}$ cuando $k \to \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\hat{x} - \hat{P}_n\hat{x}\| &= \|\hat{x} - x_k + x_k - \hat{P}_n x_k + \hat{P}_n x_k - \hat{P}_n\hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{x} - x_k\| + \|x_k - P_n x_k\| + \|\hat{P}_n x_k - \hat{P}_n\hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{x} - x_k\| + \|x_k - P_n x_k\| + \|\hat{P}_n\|\,\|x_k - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{x} - x_k\| + \|x_k - P_n x_k\| + \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\hat{P}_n\|\,\|x_k - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{x} - x_k\| + \|x_k - P_n x_k\| + \sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|\,\|x_k - \hat{x}\|.\end{aligned}$$

La condición $x_k \to \hat{x}$ cuando $k \to \infty$ asegura la existencia de $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $k \geq k_\varepsilon$,

[1]Las proyecciones canónicas P_n son continuas. Por tanto, si $(x_k)_k$ e $(y_k)_k$ son dos sucesiones convergentes a $\hat{x}$, entonces $\hat{P}_n(x_k - y_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$ y equivalentemente $\text{lím}_{k\to\infty} P_n(x_k) = \text{lím}_{k\to\infty} P_n(y_k)$.

entonces

$$\|\hat{x} - x_k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \, \|x_k - \hat{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, dado que $(P_n)_n$ es una sucesión de proyecciones canónicas, las sucesión $(P_n)_n$ satisface la propiedad (b) del enunciado de la Proposición 1.4, luego existe $N_{k_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq N_{k_\varepsilon}$ entonces

$$\|x_k - P_n x_k\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, $\|\hat{x} - \hat{P}_n \hat{x}\| < \varepsilon$ si $n \geq N_{k_\varepsilon}$; es decir, $\|\hat{x} - \hat{P}_n \hat{x}\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Observación importante.
La condición (1.2) sugiere definir

$$|||x||| = \sup_n \|P_n x\| \quad \text{para cada } x \in X.$$

Comprobar que $|||\cdot|||$ define una norma en X es muy sencillo:

(N1) $|||x||| \geq 0$ trivialmente y $0 = |||x||| = \sup_n \|P_n x\|$ implica que $\|P_n x\| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero como $\|\cdot\|$ es una norma, podemos deducir que $P_n x = 0$ para todo n, de donde se sigue finalmente que $x = 0$ por ser $(e_i)_i$ una base de Schauder.

(N2) $|||\lambda x||| = \sup_n \|P_n(\lambda x)\| = \sup_n |\lambda| \, \|P_n x\| = |\lambda| \sup_n \|P_n x\| = \lambda \, |||x|||$.

(N3) dado que $\|P_n x + P_n y\| \leq \|P_n\| + \|P_n y\|$,

$$\begin{aligned} |||x+y||| &= \sup_n \|P_n(x+y)\| = \sup_n \|P_n x + P_n y\| \leq \sup_n (\|P_n x\| + \|P_n y\|) \\ &\leq \sup_n \|P_n x\| + \sup_n \|P_n y\| = |||x||| + |||y|||. \end{aligned}$$

1.2. Bases de Schauder en espacios de Banach

Añadamos pues la hipótesis de completitud de la que jamás nos desharemos, pues resulta imprescindible para la acotación uniforme de las proyecciones, hecho que —tal y como el lector verá con el paso de las páginas—, asegura la convergencia de series, continuidad de aplicaciones y existencia de espacios que describiremos en los sucesivos capítulos.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $(e_i)_i$.

Proposición 1.6 (Auxiliar para el Teorema 1.7 siguiente)**.**
La sucesión $(e_i)_i$ es base de Schauder de $(X, |||\cdot|||)$.

Demostración.
Probaremos que la sucesión de proyecciones canónicas $(P_n)_n$ satisface las condiciones enunciadas en la Proposición 1.4.

Las propiedades (a) y (b) no dependen de la norma, por lo que se satisfacen automáticamente. Por otra parte, la propiedad (c) es sencilla de probar, pues para cada $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}|||x - P_n x||| &= \sup_m \|P_m(x - P_n x)\| = \sup_m \|P_m x - P_m P_n x\| \\ &= \sup_m \|P_m x - P_n P_m x\| \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty\end{aligned}$$

porque, para cualquier $y \in X$, por ser $(e_i)_i$ base de Schauder de $(X, \|\cdot\|)$, tenemos que $P_n y \to y$ cuando $n \to \infty$ en $(X, \|\cdot\|)$. $\square$

Teorema 1.7 (Stefan Banach: «Completitud $\Longrightarrow$ Acotación de las proyecciones canónicas»)**.** *La sucesión de proyecciones canónicas $(P_n)_n$ es (uniformemente) acotada en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$.*

Demostración.

Conviene observar que

$$|||P_n||| = \sup_{|||x||| \leq 1} |||P_n x||| = \sup \left\{ \sup_{m \leq n} \|P_m x\| \colon |||x||| = \sup_k \|P_k x\| \leq 1 \right\} \leq 1,$$

por lo que la sucesión $(P_n)_n$ es (uniformemente) acotada en $\mathcal{B}(X)$ si consideramos a X dotado de la norma $|||\cdot|||$ y basta entonces demostrar que $|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|$, es decir, que existen constantes M_1, $M_2 > 0$ de modo que $|||x||| \leq M_1 \|x\| \leq M_2 |||x|||$ para todo $x \in X$.

En efecto, pues tal caso, la acotación uniforme en $(X, \|\cdot\|)$ será inmediata:

$$\|P_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_n x\| \leq \sup_{|||x||| \leq M_1} M_2 |||P_n x||| = \frac{M_2}{M_1} \sup_{|||x||| \leq 1} |||P_n x||| \leq \frac{M_2}{M_1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si $(X, |||\cdot|||)$ fuese completo, dado que la aplicación $I\colon (X, |||\cdot|||) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ es trivialmente continua (pues $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$) y biyectiva, el Teorema B.6 de la aplicación abierta nos permitiría afirmaría que I^{-1} también es continua, por lo que $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ serían necesariamente normas equivalentes.

Probaremos que es posible proceder de tal modo. Para ello, demostraremos que $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach mostrando que $\hat{X} \subset X$, siendo ahora $\hat{X}$ la compleción de X respecto de la norma $|||\cdot|||$.

Dado $x \in \hat{X}$, como $(e_i)_i$ es base de Schauder de $\hat{X}$ (esto es una consecuencia de la Proposición 1.5 y la Proposición 1.6), existe una única sucesión de escalares $(\alpha_i)_i$ de modo que

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{en } (\hat{X}, |||\cdot|||);$$

luego $(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $(X, |||\cdot|||)$, y dado que $\|\cdot\| \leq |||\cdot|||$, también es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$. Por tanto, por ser $(X, \|\cdot\|)$ completo, existe $x' \in X$ de modo que

$$x' = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{en } (X, \|\cdot\|).$$

Es decir, $x' = x \in X$. □

En vista de este teorema podemos introducir la siguiente definición:

Definición 1.8 (Constante básica)**.**
El número real $\mathrm{bc}\,(e_i)_i := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$ recibe el nombre de *constante básica* de $(e_i)_i$.

Como pequeño complemento a la definición anterior, tenemos el concepto de base *monótona*, que es aquella para la que $\mathrm{bc}\,(e_i)_i = 1$. La denominación es explicativa, pues refleja que en dicha base, para cualquier selección de escalares $(a_i)_i$, la sucesión de números reales

$$\Big(\big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\big\|\Big)_n$$

es monótona creciente, lo cual es evidente pues, tomando $n > m$,

$$\big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\big\| = \|P_m x\| = \|P_n P_m x\| \le \|P_n x\|\|P_m\| \le \|P_n x\| = \big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\big\|.$$

Juliusz Schauder
Leópolis, 1899 – Leópolis, 1943

Schauder fue un matemático polaco–judío con una corta pero relevante trayectoria investigadora en los campos del análisis funcional, EDP's y física matemática.

Participó en la Primera Guerra Mundial. Fue alumno de Banach y Steinhaus en Leópolis, donde se doctoró en 1923.

Colaboró con eminentes matemáticos, como Bernstein, Sobolev, Lewy o Leray, con quien llegó incluso a compartir un premio.

Para finalizar esta sección incluimos una breve mención al conocido problema de la existencia de base.

Con el nacimiento de la idea de las bases de Schauder surgió también una cuestión natural:

¿todo espacio de Banach separable admite base de Schauder?

Es una pregunta que surge del teorema con el que dimos inicio a este capítulo. Tendríamos la esperanza de que la respuesta fuese afirmativa y entonces podríamos añadir otra analogía entre las bases de Hamel y las de Schauder. Pero el interrogante se aclaró en 1973, cuando el matemático sueco Per Enflo [2] proporcionó un ejemplo de espacio de Banach separable que no admite base de Schauder. En cualquier caso, todos los espacios clásicos sí admiten bases de Schauder —como el lector podrá ver en el Capítulo 6 de este Trabajo Fin de Grado—.

Por otra parte, aún cabe la posibilidad de que todo espacio de Banach separable tenga algún subespacio con base de Schauder (ignorando evidentemente por triviales a los subespacios de dimensión finita). El lector puede esperar al Capítulo 3 donde se ahondará más en esta cuestión.

Demostración detallada de la Proposición 1.4.

Existencia de los vectores e_i satisfaciendo las condiciones requeridas.

En virtud de (b) sabemos que

$$P_{\text{mín}\{n,m\}}(X) = P_n P_m(X) \subset P_n(X) \quad \text{y} \quad P_{\text{mín}\{n,m\}}(X) = P_m P_n(X) \subset P_m(X).$$

Por tanto, $P_{\text{mín}\{n,m\}}(X) \subset P_{\text{máx}\{n,m\}}(X)$. Es decir,

$$P_0(X) \subset P_1(X) \subset \cdots \subset P_n(X) \subset P_{n+1}(X) \subset P_{n+2}(X) \subset \cdots$$

Por otra parte, en virtud de (a), $\dim P_n(X) - \dim P_{n-1}(X) = 1$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un vector no nulo $\hat{e}_n \in P_n(X) \setminus P_{n-1}(X)$. Trivialmente, $\{\hat{e}_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Además, como $X = P_{n-1}(X) \oplus \ker P_{n-1}$, tenemos en realidad que $\hat{e}_n \in P_n(X) \cap \ker P_{n-1}$.

Sea ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, $e_i = P_i \hat{e}_i$. En tal caso, por la propiedad (b), dado un índice $j > i$, se tiene que $P_j e_i = P_j P_i \hat{e}_i = P_i \hat{e}_i = e_i$. Es decir,

$$P_j e_i = e_i \quad \text{para todo } j > i. \tag{1.3}$$

Por otra parte, si $j < i$, nuevamente por la propiedad (b), $P_j e_i = P_j P_1 \hat{e}_i = P_j 0 = 0$. Es decir,

$$P_j e_i = 0 \quad \text{para todo } j < i. \tag{1.4}$$

Además, ahora es sencillo comprobar que $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ sigue siendo un conjunto linealmente independiente.

Para cada $x \in X$, los coeficientes $(a_i)_i$ son únicos.

En principio, para cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que $P_k x \in \operatorname{span}\{e_i : 1 \leq i \leq k\}$, sabemos que existen escalares a_i^k con $1 \leq i \leq k$ tales que $P_k x = a_1^k e_1 + \cdots + a_k^k e_n$.

Ahora bien, en realidad, $a_i^m = a_i^n \equiv a_i$ para cualesquiera m, n e $i \in \mathbb{N}$. En efecto, pues en virtud de (1.3), la linealidad de las proyecciones, (1.4) y la propiedad (b), tenemos que (si $n < m$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^m e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^m P_n e_i = P_n\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^m e_i\Big) + P_n\Big(\sum_{i=n+1}^{m} a_i^m e_i\Big) = P_n\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i^m e_i\Big) \\ = P_n P_m x = P_m P_n x = P_m\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^n e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i^n P_m e_i.\end{aligned}$$

Por tanto, dado que —de nuevo en virtud de (1.3)— $P_m e_i = e_i$ para todo $1 \leq i \leq n (< m)$, la independencia lineal del conjunto $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ asegura la coincidencia de las coordenadas. Así pues,

$$P_i x - P_{i-1} x = \sum_{j=1}^{i} a_j^i e_j - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{i-1} e_j = a_i e_i. \qquad \square$$

Capítulo 2

Bases de Schauder y espacios reflexivos I. Bases shrinking y bases boundedly complete

Ahora veremos una primera aproximación a nuestro objetivo de deducir propiedades del espacio mediante propiedades de sus bases de Schauder.

La meta del presente capítulo es el estudio del dual y el carácter reflexivo de un espacio de Banach en relación con las propiedades de cualquiera de sus bases de Schauder. Para ello será necesario manejar ciertos resultados sobre la topología débil y débil*, por lo que hemos añadido un Anexo con una breve explicación de las mismas junto con todos los resultados que son necesarios.

2.1. Funcionales biortogonales

Si $(e_i)_i$ es una base de Schauder de un espacio de Banach X, podemos intentar definir —de modo análogo a como hacemos con bases de Hamel— una base de Schauder del espacio dual X^*. Al igual que sucede con sus homólogos puramente algebraicos, estos covectores se anularán en todos los vectores de la base salvo en uno en el que tomarán el valor 1.

Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$$

definimos el covector e_n^* como $e_n^*(x) = a_n$.

Observación importante.

Cabe destacar que estos covectores son, en realidad, funcionales lineales y continuos; es decir, elementos del espacio dual X^*. En efecto, pues:

(*a*) $e_n^*(x + \lambda y) = e_n^*\Big(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + \lambda b_i)\, e_i\Big) = a_n + \lambda b_n = e_n^*(x) + \lambda e_n^*(y)$;

(*b*) para $x \in X$ se tiene que $|e_n^*(x)|\, \|e_n\| = \|e_n^*(x) e_n\| = \|P_n x - P_{n-1}x\|$, por lo que

$$\begin{aligned} \|e_n^*\| &= \sup_{\|x\|=1} |e_n^*(x)| = \|e_n\|^{-1} \sup_{\|x\|=1} \|P_n x - P_{n-1}x\| \\ &\leq \|e_n\|^{-1} \sup_{\|x\|=1} \|P_n - P_{n-1}\|\, \|x\| \leq \|e_n\|^{-1}\, 2 \sup_n \|P_n\|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definición 2.1 (Funcionales biortogonales)**.**
Los funcionales (o covectores) e_n^* reciben el nombre de *funcionales biortogonales* y tenemos que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)\, e_i \quad \text{para todo } x \in X.$$

Detengámonos un segundo para advertir que en algunas referencias bibliograficas se distingue entre *base de un espacio de Banach* y *base de Schauder*; véase por ejemplo [3, pág. 2]. En esos casos se entiende por *base de Schauder* lo que hemos establecido en la Definición 1.2 junto con la existencia de la sucesión de funcionales biortogonales. Bajo la hipótesis de completitud, ambas definiciones son equivalentes, pero la distinción se hace teniendo en mente espacios mucho más generales [3, pág. 3] que no vamos a tratar en este Trabajo Fin de Grado.

Como decíamos anteriormente, lo *idóneo* sería que las sucesiones de funcionales biortogonales $(e_i^*)_i$ formasen una base de Schauder de X^*, pero esto —como veremos a continuación— no siempre es posible, pues tan sólo podremos afirmar que:

Proposición 2.2. *$(e_i^*)_i$ es una base de Schauder del espacio que genera: $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$.*

Para probar este resultado veremos que la sucesión dual de la sucesión de proyecciones canónicas asociada a $(e_i)_i$ satisface las hipótesis del Teorema 1.4. Más exactamente, si $(P_n)_n$ es la sucesión de proyecciones canónicas asociada a $(e_i)_i$, consideraremos la sucesión $(P_n^*)_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f \in X^*$, la aplicación $P_n^* \colon X^* \longrightarrow X^*$ viene dada por

$$P_n^* f(x) = f(P_n x) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Antes de comenzar, conviene observar que

$$\|P_n^*\| = \sup_{\|f\| \le 1} \|P_n^* f\| = \sup_{\|f\| \le 1} \|f P_n\| \le \sup_{\|f\| \le 1} \|f\|\,\|P_n\| = \|P_n\|.$$

Por tanto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n^*\| \le \operatorname{bc}(e_i)_i \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|. \tag{2.2}$$

Demostración.

Veamos ya sin más dilación que la sucesión de proyecciones (P_n^*) satisface las hipótesis (a), (b) y (c) del Teorema 1.4.

(a) Sean $f \in X^*$ y $x \in X$ arbitrarios. Si

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x) e_i,$$

por linealidad de f se tiene que

$$P_n^* f(x) = f(P_n x) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x).$$

Ergo $P_n^*(X^*)$ es una espacio vectorial de dimensión n que tiene por generadores a los funcionales e_i^* con $1 \leq i \leq n$.

(b) Sean $f \in X^*$ y $x \in X$ arbitrarios. En tal caso,

$$P_n^* P_m^* f(x) = f(P_m P_n x) = f(P_{\text{mín}\{n,m\}} x) = f(P_n P_m x) = P_m^* P_n^* f(x) = P_{\text{mín}\{n.m\}}^* f(x).$$

(c) Probar una condición más débil (en cuanto a tipo de convergencia) que la exigida es sencillo. En efecto, pues para cualquier funcional $f \in X^*$ tenemos —por continuidad— que

$$f(x) = f\big(\lim_{n\to\infty} P_n x\big) = \lim_{n\to\infty} f(P_n x) = \lim_{n\to\infty} P_n^* f(x) \quad \text{para todo } x \in X,$$

por lo que $P_n^* f \to f$ en $(X^*, \text{débil}^*)$.

No obstante, si queremos convergencia en norma del espacio dual X^*, tendremos que restringirnos a $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$. Para $f \in \operatorname{span}\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$ la convergencia es trivial, pues $P_n^* f = f$ a partir de cierto índice n.

Dado un funcional $f \in \overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$ arbitrario, por densidad, existe una sucesión $(g_k)_k \subset \operatorname{span}\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$ convergente en norma a f. Por tanto, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ de modo que si $k > N_1$ entonces

$$\|g_k - f\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \operatorname{bc}(e_i))}. \tag{2.3}$$

Por otro lado, gracias a la acotación uniforme de $(P_n^*)_n$ que mencionamos en (2.2), para cada k existe $N_{2,k} \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > N_{2,k}$, entonces

$$\|P_n^* g_k - g_k\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Así pues, tomando $k > N_1$ y $n > N_{1,k}$ y considerando (2.3) y (2.4), concluimos que

$$\begin{aligned}
\|f - P_n^* f\| &= \|f - g_k + g_k - P_n^* g_k + P_n^* g_k - P_n^* f\| \\
&\leq \|f - g_k\| + \|g_k - P_n^* g_k\| + \|P_n^* g_k - P_n^* f\| \\
&\leq \|f - g_k\| + \|g_k - P_n^* g_k\| + \|P_n^*\| \|g_k - f\| \\
&\leq \|g_k - P_n^* g_k\| + (1 + \operatorname{bc}(e_i)) \|g_k - f\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^* f - f\| = 0 \quad \text{para todo } f \in \overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}.$$

Queda entonces probado que $(P_n^*)_n$ es la sucesión de proyecciones canónicas asociada a la sucesión $(e_i^*)_i$, por lo que la sucesión de funcionales biortogonales es una base de Schauder de $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\}$. □

Como vemos, por desgracia tenemos otra diferencia con las bases de Hamel y es que no podemos asegurar que los funcionales biortogonales —los covectores de nuestra base de Schauder— generen el dual. Pero esto nos trae otra pregunta: ¿qué sucede cuando sí lo generan? Es esa cuestión lo que nos conduce a la última sección de este capítulo.

2.2. Espacios de Banach reflexivos con base de Schauder

Introducimos ahora dos adjetivos importantes para una base de Schauder.

Definición 2.3.
Una base de Schauder $(e_i)_i$ de un espacio de Banach X se dice:

(a) *shrinking* si $\overline{\text{span}}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = X^*$.

(b) *boundedly complete* si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| < \infty \implies \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

El lector encontrará en la Capítulo 6, más exactamente en la sección dedicada a espacios de sucesiones, algunos ejemplos de bases que cumplen y no cumplen estas propiedades.

La idea detrás de la primera definición, base shrinking, es la de restringirnos a aquellas bases que cumplen el objetivo que mencionábamos antes de la Proposición 2.2. Si la base es shrinking, el espacio dual está generado por las aplicaciones de asignación de coeficientes —los funcionales biortogonales— y por tanto, la topología débil del espacio puede ser estudiada restringiéndonos a dichos funcionales—cosa que, como veremos más adelante, será fundamental—.

Por otro lado el segundo adjetivo que definimos es algo más sutil. Tal vez el lector vea su significado más claro si revisa el ejemplo de c_0 (véase la página 46), que no verifica esta propiedad, pero para no extendernos demasiado podemos resumirlo diciendo que si una serie tiene norma acotada, entonces dicha serie debe converger a un elemento del espacio.

Veamos al fin el resultado que nos permite alcanzar el primero de nuestros objetivos: una caracterización del carácter reflexivo de un espacio en base a las propiedades de cualquiera de sus bases de Schauder.

El siguiente resultado fue publicado originalmente en [4] por el matemático estadounidense Robert Clarke James en 1950.

Teorema 2.4 (Robert C. James,)**.**
Un espacio de Banach X con base de Schauder $(e_i)_i$ es reflexivo si y sólo si $(e_i)_i$ es shrinking y boundendly complete.

Demostración.
"$\Longrightarrow$"
Veamos inicialmente que $(e_i)_i$ es shrinking.

Dado $f \in X^*$, sabemos que

$$P_n^* f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^* \to f \quad \text{cuando } n \to \infty \text{ en } (X^*, \text{débil}^*).$$

Por tanto, también se tiene que $P_n^* f \to f$ en $(X^*, \text{débil})$, de donde deducimos que todo funcional de X^* es un elemento de la clausura en $(X^*, \text{débil})$ de $\text{span}\,\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$.

No obstante, por el Teorema A.4 de Mazur, al ser $\text{span}\,\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto convexo, su clausura en $(X^*, \text{débil})$ coincide con su clausura en $(X, \|\cdot\|)$; luego, $\overline{\text{span}}\,\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = X^*$, por lo que queda probado el carácter shrinking de $(e_i)_i$.

Veamos ahora que $(e_i)_i$ es bonudedly complete.

Consideremos para ello una sucesión de escalares $(a_i)_i$ de modo que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| < \infty.$$

Y sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in X.$$

En tal caso, $(x_n)_n$ es una sucesión acotada en $(X, \|\cdot\|)$, por lo que —al ser X reflexivo, por el Teorema A.5 de Alaoglu— existe una subsucesión $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ convergente en $(X, \text{débil})$; sea $x \in X$ tal límite débil.

Ahora bien, fijado un índice $i \in \mathbb{N}$ arbitrario, se tiene que $e_i^*(x_n) = a_i$ para todo $n \geq i$, por lo que $e_i^*(x) = a_i$. Por tanto, invocando la unicidad de la expansión que proporciona la base de Schauder, concluimos finalmente que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

por lo que la serie es convergente en $(X, \|\cdot\|)$, quedando probado así que $(e_i)_i$ es boundedly complete.

"$\Longleftarrow$"

Sabemos que un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si su bola unidad es débilmente compacta. Probaremos que X satisface tal propiedad. No obstante, en virtud del Teorema A.6 de Eberlein-Smulyan, basta ver que B_X es secuencialmente compacto en $(X$, débil).

Sea pues $(x_n)_n \subset B_X$ una sucesión arbitraria.

Para cualquier índice $i \in \mathbb{N}$ se tiene que, por ser e_i^* una aplicación lineal y continua, $(e_i^*(x_n))_n$ es una sucesión acotada en el cuerpo de escalares $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, por lo que admite una subsucesión convergente. Así pues, empleando el argumento diagonal de Cantor, es posible extraer un subsucesión $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ de modo que $(e_i^*(x_{n_k}))_k$ es convergente para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos por comodidad que $(x_{n_k})_k \equiv (x_n)_n$ y sea, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$a_i := \lim_{n\to\infty} e_i^*(x_n).$$

En tal caso,

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} e_i^*(x_k) e_i \Big\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x_k) e_i \Big\| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \lim_{k\to\infty} P_n x_k \Big\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} \|P_n x_k\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} \|P_n\| \, \|x_k\| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| = \mathrm{bc}\,(e_i)_i.
\end{aligned}$$

Y como —por hipótesis— $(e_i)_i$ es boundedly complete, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad \text{es convergente en } (X, \|\cdot\|),$$

es decir, existe $x \in X$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Veamos finalmente que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ en $(X, \text{débil})$. En efecto, pues para todo índice $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} e_i^*(x_n) = a_i = e_i^*(x)$$

y dado que $(e_i)_i$ es —por hipótesis— shrinking, $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i^* \colon i \in \mathbb{N}\} = X^*$, por lo que $f(x_n) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ para todo funcional $f \in X^*$. $\square$

Capítulo 3

Sucesiones básicas

Demos un paso atrás para generalizar el concepto de base de Schauder. Dedicaremos este capítulo a introducir la idea de *sucesión básica* —que podemos pensar como el análogo de la idea independencia lineal del Álgebra—, así como una caracterización de las mismas para estudiar luego cuando dos sucesiones básicas son esencialmente diferentes.

Aprovecharemos también para responder a la pregunta que quedó inconclusa en el primer capítulo sobre la existencia de subespacios con bases de Schauder.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(e_i)_i \subset X$ una sucesión.

Definición 3.1 (Sucesión básica)**.**
Se dice que $(e_i)_i$ es una *sucesión básica* si es una base de Schauder de $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 3.2 (Criterio de Banach-Grumblum)**.**
Una sucesión $(e_i)_i$ *es una sucesión básica si y sólo si existe* $K > 0$ *tal que para cualesquiera índices* $n < m$ *y escalares* a_i*, con* $1 \leq i \leq m$*, se tiene que*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=}^{m} a_i e_i \Big\|.$$

Además, el valor óptimo de K *es la constante básica* $\operatorname{bc}(e_i)_i$*.*

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Si la sucesión $(e_i)_i$ es sucesión básica, entonces es base de Schauder de $\overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto, sus las proyecciones canónicas asociadas a $(e_i)_i$ están uniformemente acotadas por la constante básica $\operatorname{bc}(e_i) =: K$. Por tanto, para cualquier

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in X$$

se tiene que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| = \|P_n(x)\| = \|P_n\| \, \|x\| \leq K\|x\| = K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \Big\|.$$

"$\Longleftarrow$"

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P_n \colon \operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \operatorname{span}\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ la proyección definida por

$$P_n\Big(\sum_{i=1}^{m} e_i a_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} e_i a_i.$$

Es evidente que P_n es una aplicación lineal. Por otra parte, la hipótesis asegura la continuidad de P_n en $\operatorname{span}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$. No obstante, como $\operatorname{span}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$, es posible extender de forma única y continua la aplicación P_n al espacio $\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$; y obtendremos así, para cada $n \in \mathbb{N}$, una proyección (que seguiremos denotando igual) $P_n\colon \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}$.

Veamos que estas proyecciones satisfacen las hipótesis de la primera parte del Teorema 1.4.

(a) Para cualquier $n < m$ tenemos que $P_m(\operatorname{span}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}) = \operatorname{span}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}$. Por tanto, dado que todo subespacio finito dimensional es cerrado,

$$\dim P_n(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}) = \dim \operatorname{span}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\}).$$

Es decir, basta probar que el conjunto $\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente. No obstante, dada una combinación lineal $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = 0$, por hipótesis,

$$\|a_1e_1\| \leq K\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big\| = 0;$$

luego $a_1 = 0$. Y procediendo por inducción, si suponemos que a_1,..., a_{n-1} son nulos,

$$\|a_ne_n\| \leq K\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big\| = 0;$$

luego $a_n = 0$, quedando así demostrado que que $\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(b) Evidente a partir de la definición de las proyecciones P_n en $\operatorname{span}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$.

(c) Sea $x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por densidad, existe $y \in \operatorname{span}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ que se puede expresar como

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i,$$

y es tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Entonces, tomando $m > n$ (y por tanto $P_my = y$), concluimos que

$$\begin{aligned}\|x - P_m(x)\| &\leq \|x - y\| + \|P_my - P_mx\| = \|x - y\| + \|P_m(x - y)\| \\ &\leq \|x - y\| + K\|x - y\| < (1 + K)\varepsilon;\end{aligned}$$

es decir, $\|P_nx - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Conviene recordar lo dicho al final del primer capítulo sobre la existencia de subespacios con base de Schauder: habíamos dicho que no todo espacio de Banach separable admite base de Schauder, resultado nefasto para esta teoría, pero quedaba abierta la existencia de al menos una sucesión básica.

La solución a esta cuestión fue resuelta con el siguiente teorema (véase [5, pág. 39] y [6, pág. 4]):

Teorema 3.3. *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

La pregunta había permanecido sin respuesta hasta 1958, año en el que aparecieron tres demostraciones simultáneamente: una de M. M. Day [7], otra de B. Gelbaum [8] y una más por parte de C. Bessaga y A. Pełczyński [9].

3.1. Sucesiones básicas equivalentes

A continuación introduciremos un concepto que, careciendo sentido en el caso de dimensión finita, es de capital importancia en dimensión infinita.

Definición 3.4 (Sucesiones básicas equivalentes)**.**
Dos sucesiones $(e_i)_i$ y $(x_i)_i$ se dicen *equivalentes* si la convergencia de

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \text{ equivale a la convergencia de } \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i.$$

En esencia, lo que estamos haciendo es definir una relación de equivalencia entre sucesiones que se comportan igual: si unos coeficientes definen un elemento para una de las bases, entonces también definen otro para la segunda sucesión. Recordemos que, ahora que tratamos con la convergencia de series para definir los coeficientes de un elemento, no gozamos de la misma libertad para decir que unas coordenadas definen algo o no.

El siguiente teorema nos ayudará a comprender mejor la idea que acabamos de mencionar.

Sean X e Y dos espacios de Banach, $(e_i)_i$ una sucesión básica en X y $(\varepsilon_i)_i$ una sucesión básica en Y.

Teorema 3.5 (Caracterización e interés de las sucesiones básicas equivalentes)**.**
Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) *Las sucesiones básicas $(e_i)_i$ y $(\varepsilon_i)_i$ son equivalentes.*
- (b) *La aplicación $T\colon X \longrightarrow Y$ dada por $Te_i = \varepsilon_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ define un isomorfismo entre $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ y $\overline{\operatorname{span}}\,\{\varepsilon_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.*
- (c) *Existen dos constantes C_1, $C_2 > 0$ de forma que para cualesquiera escalares a_i, con $1 \leq i \leq n$, se tiene que*

$$C_1{}^{-1} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \Big\|_X \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\|_Y \leq C_2 \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \Big\|_X.$$

Demostración.

$(a) \Longrightarrow (b)$

Primero introducimos la aplicación $T\colon \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{\varepsilon_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ dada por

$$T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i.$$

Veamos que T es un isomorfismo entre $\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ y $\overline{\operatorname{span}}\{\varepsilon_i\colon i \in \mathbb{N}\}$.

- La aplicación T está bien definida por ser $(e_i)_i$ y $(\varepsilon_i)_i$ sucesiones básicas equivalentes.
- Es evidente que T es una aplicación lineal.
- El carácter biyectivo de T es resulta fácil de probar.

  Dado
  $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i \in \overline{\operatorname{span}}\{\varepsilon_i\colon i \in \mathbb{N}\},$$
  existe —en virtud de la equivalencia de sucesiones—,
  $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$$
  tal que
  $$T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum a_i \varepsilon_i;$$
  luego T es sobreyectiva.

  Puesto que T es lineal, para demostrar que es inyectiva basta ver que $Tx = 0$ implica $x = 0$. No obstante, dado que $(\varepsilon_i)_i$ es una sucesión básica, $\{\varepsilon_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente, luego
  $$T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}$$
  $$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = 0.$$
- Deduciremos la continuidad de T a partir del Teorema B.7 del grafo cerrado.

  Sea $(x^k)_k \subset X$ una sucesión tal que
  $$x^k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k e_i \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}$$
  y satisface que, cuando $k \to \infty$,
  $$x^k \to x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X \quad \text{y} \quad T(x^k) = \sum a_i^k \varepsilon_i \to \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_i.$$
  Como los funcionales biortogonales de ambas sucesiones básicas son aplicaciones continuas, y por tanto secuencialmente continuas, tenemos que, para cualquier i, cuando $k \to \infty$,
  $$e_i^*(x^k) = a_i^k \to a_i \quad \text{y} \quad \varepsilon_i^*(x^k) = a_i^k \to c_i.$$

Por tanto, por unicidad de límites, $a_i = c_i$. Y entonces $Tx = \text{lím}_{k\to\infty} Tx^k$, ergo el grafo de T es cerrado.

Finalmente, dado que T es continua y sobreyectiva, el Teorema B.6 de la aplicación abierta asegura que T es un isomorfismo.

$(b) \implies (c)$

Dado que T es un isomorfismo que satisface $Te_i = \varepsilon_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, para cualesquiera escalares a_1,..., a_n se tiene que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\Big\| = \Big\|T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i\Big)\Big\| \leq \|T\|\,\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big\|.$$

Por otra parte, razonando de forma análoga con T^{-1}, concluimos que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_ie_i\Big\| = \Big\|T^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varepsilon_i\Big)\Big\| \leq \|T^{-1}\|\,\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\Big\|$$

Por tanto, basta tomar $C_1 = \|T\|$ y $C_2 = \|T^{-1}\|$.

$(c) \implies (a)$

Probaremos que para cualesquiera escalares $(a_i)_i \subset \mathbb{K}$, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i \text{ es de Cauchy en } X \text{ si y solo si } \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varepsilon_i \text{ es de Cauchy en } X. \tag{3.1}$$

Si la primera serie en (3.1) es de Cauchy en X, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que para par p, $q \geq N_\varepsilon$ se tiene que

$$\Big\|\sum_{i=p}^{q} a_ie_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{C_2}.$$

Por tanto, para p, $q > N_\varepsilon$, también tenemos que

$$\Big\|\sum_{i=p}^{q} a_i\varepsilon_i\Big\| \leq C_2\Big\|\sum_{i=p}^{q} a_ie_i\Big\| < \varepsilon,$$

por lo que la segunda serie de (3.1) es de Cauchy en Y.

El recíproco se prueba de forma completamente análoga cambiando C_2 por C_1. □

Si definiésemos *sucesiones básicas equivalentes* como en el punto (b) del anterior teorema estaríamos tentados a pensar que se resume a que dos sucesiones básicas son equivalentes si los espacios que generan son isomorfos, lo cual no es del todo correcto. Existen espacios isomorfos con bases no equivalentes; puede verse un ejemplo en la página 46.

Esta distinción nos lleva a preguntarnos si un mismo espacio de Banach puede tener dos bases de Schauder distintas —en el sentido de no ser equivalentes—; es decir, si una base de Schauder es o no única. La respuesta a esta cuestión la encontramos en el siguiente teorema [6, pág. 5]:

Teorema 3.6. *Todo espacio de Banach de dimensión infinita con base de Schauder tiene, por lo menos, dos bases de Schauder normalizadas no equivalentes.*

Hay que señalar el poder de esta respuesta: no solo es que existan espacios de Banach con más de una base de Schauder, es que cualquier espacio de Banach tiene como mínimo dos. Es más, se puede probar que el número de bases de Schauder no equivalentes en un mismo espacio es no numerable.

Nótese que en dimensión finita esta pregunta no tiene sentido porque, dadas dos bases $(e_i)_{i=1}^n$ y $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ cualesquiera de un espacio podemos definir un isomorfismo de una en la otra como $Te_i = \varepsilon_i$ sin ningún problema.

3.2. Perturbación de sucesiones básicas

Las bases de Schauder, y por extensión las sucesiones básicas, satisfacen una curiosa propiedad de estabilidad: si son alteradas lo suficientemente poco —es decir, modificamos cada término sólo mínimamente— la sucesión resultante es equivalente a la de partida, como bien podemos ver por el siguiente teorema que también se le puede llamar el Principio de Pequeñas Perturbaciones [3, pág. 13].

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

Teorema 3.7 (Krein-Milman-Rutman).
Si $(e_i)_i$ es una sucesión básica y $(x_i)_i \subset X$ es una sucesión tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|e_i - x_i\|}{\|e_i\|} < \frac{1}{2K}, \quad \text{con } K = \operatorname{bc}(e_i)_i, \tag{3.2}$$

entonces $(x_i)_i$ es una sucesión básica equivalente a $(e_i)_i$.

Demostración.

Veremos que la aplicación $T\colon \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ definida como

$$T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i \in \mathbb{N}\}$$

es un isomorfismo. En tal caso, si demostramos que $(x_i)_i$ es una sucesión básica, el resultado enunciado será una consecuencia del Teorema 3.5 anterior.

- Veamos en primer lugar que T está bien definida.

  Para ello conviene recordar —de (2.1)— que, para cualquier $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|e_i^*\|\,\|e_i\| \leq 2\operatorname{bc}(e_i)_i = 2K$. Por tanto, si

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X, \tag{3.3}$$

para n, $m \in \mathbb{N}$ arbitrarios, tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\Big\| &= \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i - \sum_{i=n}^{m} a_i e_i + \sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i (x_i - e_i)\Big\| + \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i=n}^{m} e_i^*(x)(x_i - e_i)\Big\| + \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\| \leq \sum_{i=n}^{m} \|e_i^*\|\|x\|\|x_i - e_i\| + \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\| \\ &\leq 2K\,\|x\| \sum_{i=n}^{m} \frac{\|e_i - x_i\|}{\|e_i\|} + \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\|.\end{aligned}$$

Ahora bien, como las series que aparecen en (3.2) y (3.3) son convergentes, dado $\varepsilon > 0$ existen N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\Big\|\sum_{i=p}^{q} x_i e_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } p,\, q \geq N_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=k}^{l} \frac{\|e_j - x_j\|}{\|e_j\|} < \frac{\varepsilon}{4K\|x\|} \quad \text{si } k,\, l \geq N_2.$$

Por tanto, si n, $m \geq \max\{N_1, N_2\}$, entonces

$$\Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\Big\| \leq 2K \sum_{i=n}^{m} \frac{\|e_i - x_i\|}{\|e_i\|} + \Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i e_i\Big\| < \varepsilon,$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

es de Cauchy en X, luego convergente a cierto vector de X.

- La linealidad de T es evidente.
- Veamos ahora que T es una aplicación continua.

  Dado un vector

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X,$$

  tenemos que

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|Tx - x + x\| \leq \|Tx - x\| + \|x\| \leq \Big\|T\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big\| + \|x\| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big\| + \|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)(e_i - x_i)\Big\| + \|x\| \qquad (3.4) \\ &\leq 2K\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|e_i - x_i\|}{\|e_i\|} + \|x\| < 2\|x\|.\end{aligned}$$

  Por tanto, T es una aplicación continua.
- Veamos por último la biyectividad de T.

  Para probar que T es inyectiva, observemos que para cualquier $x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, empleando la acotación obtenida en (3.4), se tiene que

$$\|x\| \leq \|Tx - x\| + \|Tx\| \leq 2K\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|x_i - e_i\|}{\|e_i\|} + \|Tx\|,$$

de donde se sigue que

$$\|x\|\left(1-2K\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\|x_i-e_i\|}{\|e_i\|}\right)\leq\|Tx\|. \tag{3.5}$$

Por tanto, en virtud de la desigualdad (3.2) de la hipótesis, el factor que aparece entre paréntesis en el primer miembro de la desigualdad anterior es positivo, por lo que $Tx=0$ implica que $x=0$; es decir, T es inyectiva.

Ya hemos probado que $\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ es isomorfo a $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})$, por lo que tan sólo resta justificar que $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})=\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$.
No obstante, dado que $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})$ es un subespacio cerrado de $\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ que contiene a $\operatorname{span}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$, concluimos que $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})=\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$; luego T es sobreyectiva.
El carácter cerrado de $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})$ es consecuencia de la desigualdad (3.5). Dada una sucesión $(y_i)_i\subset T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})$, existe $(z_i)_i\subset\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ tal que $Tz_i=y_i$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Por tanto, si $(y_i)_i$ es convergente, es de Cauchy y entonces, en virtud de la desigualdad (3.5), la sucesión $(z_i)_i$ también es convergente, y por la continuidad de T, si $z_i\to z$ entonces $y_i\to Tz$, que es un vector de $T(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})$.

Dado que hemos empleado el Teorema 3.5, es necesario justificar que $(x_i)_i$ es una sucesión básica. Para ello veremos que si $(P_n)_n$ es la sucesión de proyecciones canónicas de $(e_i)_i$, entonces la sucesión de proyecciones $(\hat{P}_n)_n=(TP_nT^{-1})_n$ verifica las hipótesis del Teorema 1.4, por lo que $(x_i)_i$ también es una sucesión básica.

(a) Dado que T es un isomorfismo y $\dim\operatorname{span}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\}=n$ tenemos que

$$\begin{aligned}\dim\hat{P}_n(\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\})&=\dim TP_nT^{-1}(\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\})=\dim TP_n(\overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i\in\mathbb{N}\})\\&=\dim T(\operatorname{span}\{e_i\colon i\in\{1,\ldots,n\}\})=n\end{aligned}$$

(b) $\hat{P}_n\hat{P}_m=TP_nT^{-1}TP_mT^{-1}=TP_nP_mT^{-1}=TP_{\min\{n,m\}}T^{-1}=\hat{P}_{\min\{n,m\}}$.

(c) Empleando que T es continua, dado un $x\in\overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$,

$$\lim_{n\to\infty}\hat{P}_n(x)=\lim_{n\to\infty}TP_nT^{-1}(x)=T\lim_{n\to\infty}P_nT^{-1}(x)=TT^{-1}(x)=x.$$ □

Como corolario tenemos el siguiente resultado bastante obvio, pero importante.

Corolario 3.8 (Krein-Milman-Rutman).
En las condiciones del Teorema 3.7 anterior, si $(e_i)_i$ es base de Schauder de X, entonces $(x_i)_i$ es base de Schauder de X.

Demostración.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, basta ver que $T(X)=X$.

Si $T(X) \subsetneq X$, dado que $T(X)$ es en cualquier caso un subespacio cerrado de X, podríamos invocar el Lema B.10 (de elementos casi ortogonales) de Riesz para afirmar la existencia de un vector $x \in X$ tal que

$$\|x\| = 1 \quad \text{y} \quad 1 > \operatorname{dist}(x, T(X)) > 2K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|x_i - e_i\|}{\|e_i\|},$$

pero ya habíamos demostrado antes que

$$\operatorname{dist}(x, T(X)) \leq \|x - Tx\| \leq 2K\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|x_i - e_i\|}{\|e_i\|} = 2K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|x_i - e_i\|}{\|e_i\|}. \qquad \square$$

3.3. Sucesión básica bloque

Introducimos a continuación el siguiente concepto también relacionado en cierta forma con la perturbación de las sucesiones básicas, pero ahora producida por extraer una sucesión nueva a partir de ellas.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(e_i)_i \subset X$ una sucesión básica.

Definición 3.9 (Sucesión básica bloque).
Dada una sucesión de escalares $(a_i)_i$ y una sucesión estrictamente creciente de índices $(p_i)_i \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, se dice que una sucesión $(u_i)_i \subset X$ de vectores no nulos de la forma

$$u_i = \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} a_j e_j, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N},$$

es *sucesión básica bloque.*

La propiedad más importante de estas nuevas sucesiones es que siguen siendo básicas, lo que nos ayuda a extraer nuevas sucesiones básicas de una dada.

Lema 3.10. *Toda sucesión básica bloque es una sucesión básica.*

Demostración.

Es una consecuencia directa del Teorema 3.2. En efecto, dado que $(e_i)_i$ es una sucesión básica, para cualesquiera escalares b_1,..., b_m y $n < m$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} b_j u_j \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} b_j \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i e_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{p_{n+1}} c_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{p_{m+1}} c_i e_i \Big\|$$
$$= K \Big\| \sum_{i=1}^{m} b_j \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i e_i \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^{m} b_j u_j \Big\|,$$

donde $c_i = \hat{b}_i a_i$ para cada $1 \leq i \leq p_{m+1}$ y siendo $\hat{b}_i = b_j$ si $p_j + 1 \leq i \leq p_{j+1}$. $\square$

Presentamos por último un criterio para saber cuando una subsucesión contiene una sucesión básica. Es importante hacer notar el poder de este lema que nos permite extraer sucesiones básicas de sucesiones que no son convergentes en norma.

Lema 3.11 (Principio de selección de Bessaga-Pełczyński).
Dada una base de Schauder $(e_i)_i$ para un espacio de Banach X, si una sucesión $(x_i)_i$ verifica:

- $\inf\limits_n \|x_n\| > 0$
- $e_i^*(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}$

entonces contiene una subsucesión equivalente a una sucesión básica bloque de $(e_i)_i$.

Demostración.

Por comodidad definamos $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ y $x_n = \sum a_i^n e_i$. Vamos a construir la sucesión básica bloque y la subsucesión al mismo tiempo por recurrencia, aprovechando la convergencia puntual de las proyecciones de $(e_i)_i$, P_n, a la identidad.

Para el primer término de la subsucesión tomamos $n_1 = 1$, por la propiedad (c) de 1.2 tenemos que existe un cierto r_i tal que

$$\|x_{n_1} - P_{r_1} x_{n_1}\| < \frac{\alpha}{4 \cdot 2K}, \qquad \text{siendo } K \text{ la constante básica de } (e_i)_i$$

Así, nuestro primer término de la subsucesión va a ser x_{n_1} y el primer término de la sucesión básica bloque va a ser $u_1 = P_{r_1} x_{n_1}$

Como $e_i^*(x_n) = a_i^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ para todo i, y

$$\|P_{r_1} x_n\| \leq \sum_{i=1}^{r_i} |a_i^n| \|e_i\|$$

tenemos que existe un cierto $n_2 > n_1$ natural de forma que para todo $i \in \{1, \dots, r_1\}$

$$|a_i^{n_2}| < \frac{\alpha}{4 \cdot 2K r_1 \sup_i \|e_i\|}$$

y por tanto

$$\|P_{r_1} x_{n_2}\| \leq \sum_{i=1}^{r_1} |a_i^{n_2}| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{r_1} |a_i^{n_2}| \sup_i \|e_i\| \leq \frac{\alpha}{4^2 \cdot 2K}$$

asi, de nuevo por la propiedad (c) de 1.2 tenemos que existe un $r_2 > r_1$ de forma que

$$\|x_{n_2} - P_{r_2} x_{n_2}\| < \frac{\alpha}{4^2 \cdot 2K}$$

por lo que definimos $u_2 = P_{r_2} x_{n_2} - P_{r_1} x_{n_2}$. Es evidente que

$$\|u_2 - x_{n_2}\| = \|P_{r_2} x_{n_2} - P_{r_1} x_{n_2} - x_{n_2}\| \leq \|P_{r_1} x_{n_2}\| + \|P_{r_2} x_{n_2} - x_{n_2}\| < \frac{\alpha}{4^2 K}$$

En general, dado r_{k-1} y el término $x_{n_{k-1}}$ sabemos por el mismo razonamiento de antes que, como $e_i^*(x_n) = a_i^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ existe un cierto $n_k > n_{k-1}$ de forma que

$$\|P_{r_{k-1}} x_{n_k}\| < \frac{\alpha}{4^k \cdot 2K}$$

Además, sabemos que existe un cierto $r_k > r_{k-1}$ de forma que

$$\|x_{n_k} - P_{r_k} x_{n_k}\| < \frac{\alpha}{4^k \cdot 2K}$$

por tanto, definimos $u_k = P_{r_k} x_{n_k} - P_{r_{k-1}} x_{n_k}$, que verifica

$$\|u_k - x_{n_k}\| = \|P_{r_k} x_{n_k} - P_{r_{k-1}} x_{n_k} - x_{n_k}\| \leq \|P_{r_{k-1}} x_{n_k}\| + \|P_{r_k} x_{n_k} - x_{n_k}\| < \frac{\alpha}{4^k K}.$$

Ahora comprobaremos que ambas sucesiones están en las hipótesis del Teorema 3.7.

$$\|x_{n_k}\| - \|u_k\| \leq \|u_k - x_{n_k}\| < \frac{\alpha}{4^k K} < \frac{\alpha}{4} \implies \|x_{n_k}\| - \frac{\alpha}{4} < \|u_k\|$$

y como $\alpha = \inf_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\|$

$$\|u_k\| > \alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4} > 0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

Así, tenemos una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que verifica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|u_k - x_{n_k}\|}{\|u_k\|} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3\alpha} \frac{\alpha}{4^k K} = \frac{4}{3K} \frac{1}{4(1-\frac{1}{4})} = \frac{4}{9K} < \frac{1}{2K}$$

Lo que implica que $(x_{n_k})_k$ es una sucesión básica equivalente a una sucesión básica bloque de $(e_i)_i$. □

Mark Krein
Kiev, 1907 – Odessa, 1989

Mark Grigorievich Krein fue un importante matemático soviético. Sufrió persecución por judío a lo largo de su vida, lo cual le generó importantes dificultades, tanto en el plano personal como profesional.

Fundó una de las escuelas de análisis funcional más importantes de la época en Odessa. Dicha escuela fue disuelta por la ocupación nazi, momento en el que Krein fue destituido (y jamás readmitido).

Capítulo 4

Bases de Schauder y espacios reflexivos II. Bases incondicionales

En este capítulo introduciremos una nueva propiedad que pueden tener las bases de Schauder: converger incondicionalmente. Primero la caracterizaremos y luego veremos su importancia para el tema que nos ocupa: las propiedades que podemos extraer de espacios con bases de este tipo.

En este caso, veremos que la inclusión de la incondicionalidad nos permite caracterizar los espacios reflexivos, pero ahora viendo su estructura interna. A mayores daremos algunas propiedades de espacios con bases incondicionales y responderemos preguntas similares a las formuladas en anteriores epígrafes.

4.1. Bases de Schauder incondicionales

Volvemos de nuevo a intentar encontrar similitudes entre las bases de Hamel en espacios finitos y las de Schauder que estamos estudiando. Las primeras no les afecta una reordenación de los vectores de la base: si un elemento tiene unas coordenadas entonces al cambiar de orden seguiremos teniendo el mismo elemento. Pero como el lector podrá intuir, no sucede lo mismo cuando añadimos una topología al espacio. Recordemos que existen series que no convergen si alteramos el orden de los términos sumados y es lo que motivó la siguiente definición para diferenciar a las series que sí lo hacen—y que es equivalente a esta idea de reordenación por el Lema B.1—:

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

Definición 4.1 (Convergencia incondicional)**.**
Se dice que la serie convergente en $(X, \|\cdot\|)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x \in X$$

es *incondicionalmente convergente* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}$ de modo que para cualquier conjunto finito $F' \subset \mathbb{N}$ tal que $F \subset F'$ se tiene que

$$\|x - \sum_{i \in F'} x_i\| < \varepsilon.$$

Como dijimos, se puede intuir que existen casos en los que la reordenación de los vectores de la base no convergen, y esto lo podemos ver en el espacio c_0 con la conocida como *base sumante* —que el lector puede ver en la página 47—. Por tanto, es necesario hacer una distinción entre bases que al reordenar siguen convergiendo y bases que no. Es así como surge de forma natural la siguiente definición:

Definición 4.2 (Base de Schauder incondicional & Sucesión básica incondicional)**.**

(*a*) Una base de Schauder $(e_i)_i$ de X se dice *incondicional* si para cada $x \in X$ la serie (que coincide con x)

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$$

es incondicionalmente convergente en $(X, \|\cdot\|)$.

(*b*) Se dice que una sucesión $(e_i)_i \subset X$ es una *sucesión básica incondicional* si es una base de Schauder incondicional de $\overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.

Algunos casos de bases incondicionales son las bases unitarias de los espacios de sucesiones c_0 y los ℓ_p o la base de Haar de los espacios $L^p[0,1]$ con $p \in (1, \infty)$, cuya construcción el lector puede revisar en la página 48 —la incondicionalidad de la base de Haar no la probaremos pero puede consultarse en [3, pág. 130]—. Pero cuando tratamos con la base de Haar para L^1 o con la base de Faber de $\mathcal{C}[0,1]$ (véase [3, pág. 142] y [3, pág. 69] o [1, pág. 203-204]) nos encontramos con dos perfectos ejemplos de bases de Schauder no incondicionales —la construcción de la base de Faber se puede consultar en la página 51—.

Pasamos ahora a caracterizar las sucesiones básicas incondicionales.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(e_i)_i \subset X$ una sucesión de vectores.

Teorema 4.3 (Caracterización de sucesiones básicas incondicionales)**.**
Los siguientes enunciados son equivalentes:

(*a*) $(e_i)_i$ *es una sucesión básica incondicional;*

(*b*) *existe* $K > 0$ *de modo que para cualesquiera escalares* $a_1, \ldots, a_m$ *y todo subconjunto de índices* $\sigma \subset \{i \colon 1 \leq i \leq m\}$ *se tiene que*

$$\Big\| \sum_{i \in \sigma} a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \Big\|;$$

(*c*) *existe* $K > 0$ *de modo que para cualesquiera escalares* $a_1, \ldots, a_m$ *y elección de signos* $\varepsilon_i = \pm 1$ *para* $1 \leq i \leq m$ *se tiene que*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \Big\|. \tag{4.1}$$

Observación 4.4 (Sobre los enunciados (*b*) y (*c*) del Teorema 4.3).

Si $\sum a_i e_i$ es convergente los enunciados (*b*) y (*c*) son equivalentes, respectivamente, a

(b') existe $K > 0$ de modo que para cualquier sucesión de escalares $(a_i)_i$ y todo subconjunto de índices $\sigma \subset \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{i\in\sigma} a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \Big\|;$$

(c') existe $K > 0$ de modo que para cualquier sucesión de escalares $(a_i)_i$ y elección de signos $(\varepsilon_i)_i = (\pm 1)_i$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \Big\|.$$

Las implicaciones $(b') \implies (b)$ y $(c') \implies (c)$ son triviales. Veamos entonces la validez de sus recíprocos.

El carácter convergente de $\sum a_i e_i$ implica que tal serie es de Cauchy. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si p, $q \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\Big\| \sum_{i=p}^{q} a_i e_i \Big\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

“$(b) \implies (b')$”

Así pues, dado un subconjunto arbitrario $\sigma \subset \mathbb{N}$, tenemos que, si $\sigma' = \{i \in \sigma \colon p \leq i \leq q\}$, la hipótesis (b) nos permite afirmar que

$$\Big\| \sum_{i\in\sigma'} a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{q} b_i e_i \Big\| = K \Big\| \sum_{i=p}^{q} a_i e_i \Big\| < \varepsilon,$$

siendo $b_i = 0$ para $i < p$ y $b_i = a_i$ para $p \leq i \leq q$.

Por tanto, la serie $\sum_{i\in\sigma} a_i e_i$ es de Cauchy en X, luego convergente. La desigualdad de (b') se deduce ahora a partir de la de (b) tomando límites.

“$(c) \implies (c')$”

En virtud de (c) tenemos que

$$\Big\| \sum_{i=p}^{q} \varepsilon_i a_i e_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{q} b_i e_i \Big\| = K \Big\| \sum_{i=p}^{q} a_i e_i \Big\| < \varepsilon,$$

siendo $b_i = 0$ para $i < p$ y $b_i = a_i$ para $p \leq i \leq q$.

Por tanto, la serie $\sum_{i\in\sigma} a_i e_i$ es de Cauchy en X, luego convergente. La desigualdad de (c') se deduce ahora a partir de la de (c) tomando límites.

Definición 4.5 (Constante básica incondicional)**.**
La constante K óptima en (4,1) recibe el nombre de *constante básica incondicional* de la sucesión básica incondicional $(e_i)_i$ y será denotada por $\operatorname{ubc}(e_i)_i$.

Demostración del Teorema 4.3.

Las demostraciones se realizarán para el caso $m = \infty$, pues este implicará el caso finito tomando todos los $a_i = 0$ a partir de $i > m$.

$(a) \Longrightarrow (b)$

Dado $\sigma \subset \mathbb{N}$, consideraremos la aplicación $P_\sigma \colon \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ definida como

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big) = \sum_{i \in \sigma} a_i e_i, \quad \text{para cada } \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}.$$

Veremos que la familia $\{P_\sigma \colon \sigma \subset \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(X)$ está uniformemente acotada por una constante K. En tal caso, para cualquier $\sigma \subset \mathbb{N}$ se tendrá que

$$\Big\| \sum_{i \in \sigma} a_i e_i \Big\| = \Big\| P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big)\Big\| \le K \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \Big\|,$$

de donde se deduce (b) considerando $a_i = 0$ si $i > m$.

Deduciremos la acotación uniforme de la familia $(P_\sigma)_\sigma$ a partir del Principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus B.11, por lo que bastará ver que el conjunto $\{P_\sigma(x) \colon \sigma \subset \mathbb{N}\}$ es acotado para cada $x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.

Veamos pues que dado

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}, \tag{4.2}$$

el conjunto $\{P_\sigma(x) \colon \sigma \subset \mathbb{N}\}$ es acotado. Por hipótesis, como la serie que aparece en (4.2) es incondicionalmente convergente, en virtud del Lema B.2, dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ de modo que para cualquier $F' \subset \mathbb{N}$ disjunto con F se tiene que

$$\Big\| \sum_{i \in F'} a_i e_i \Big\| < \varepsilon.$$

En tal caso, dado $\sigma \subset \mathbb{N}$, si consideramos $F' = \sigma \setminus F$ tenemos que

$$\|P_\sigma x\| = \Big\| \sum_{i \in \sigma} a_i e_i \Big\| = \Big\| \sum_{i \in \sigma \cap F} a_i e_i + \sum_{i \in \sigma \setminus F} a_i e_i \Big\| \le \Big\| \sum_{i \in \sigma \cap F} a_i e_i \Big\| + \Big\| \sum_{i \in \sigma \setminus F} a_i e_i \Big\|.$$

Ahora bien, como F es finito, $\sigma \cap F$ también. Por tanto,

$$\Big\| \sum_{i \in \sigma \cap F} a_i e_i \Big\| \le \max_{\sigma' \subset \mathbb{N}} \Big\| \sum_{i \in \sigma' \cap F} a_i e_i \Big\| =: M,$$

por lo que

$$\|P_\sigma x\| \le \Big\| \sum_{i \in \sigma \cap F} a_i e_i \Big\| + \Big\| \sum_{i \in \sigma \setminus F} a_i e_i \Big\| < M + \varepsilon.$$

Para que la prueba esté completa es necesario justificar algunos detalles menores. Más exactamente, es necesario ver que P_σ es una aplicación lineal y continua en $\overline{\operatorname{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.

- Veamos inicialmente que P_σ está bien definida.

La incondicionalidad de $(e_i)_i$ y el Lema B.4 aseguran que si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \text{ es convergente, entonces } \sum_{i\in\sigma} a_i e_i \text{ también.}$$

.

- La linealidad de P_σ es trivial.
- Veamos finalmente que P_σ es continua empleando el Teorema B.7 del grafo cerrado.

Sea $(x^k)_k \subset \overline{\text{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$x^k = \sum a_i^k e_i \text{ para cada } k \in \mathbb{N} \text{ y } x_k \to x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\text{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\} \text{ cuando } k \to \infty.$$

y supongamos que

$$P_\sigma x^k \to \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i \in \overline{\text{span}}\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\} \text{ cuando } k \to \infty.$$

En tal caso, la continuidad de los funcionales biortogonales e_i^* nos permite afirmar que

$$e_i^*\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k e_i\Big) = a_i^k \to e_i^*(x) = a_i \text{ cuando } k \to \infty.$$

Y por la misma razón,

$$e_i^*\Big(P_\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k e_i\Big)\Big) = e_i^*\Big(\sum_{i\in\sigma} a_i^k e_i\Big) = a_i^k \to e_i^*\Big(\sum b_i e_i\Big) = b_i \text{ cuando } k \to \infty.$$

Por tanto, por unicidad de límites, $a_i = b_i$ para todo i, por lo que el grafo de P_σ es cerrado.

$(b) \implies (a)$

Conviene observar que, bajo la hipótesis (b), la sucesión $(e_i)_i$ es una sucesión básica en X. En efecto, pues si en (b) consideramos como $\sigma = \{i \colon 1 \le i \le n\}$, entonces para cualquier elemento de span $\{e_i \colon 1 \le i \le m\}$, con $m > n$, se tiene —por hipótesis— que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\Big\| \le K\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\|.$$

Por tanto, en virtud del Teorema 3.2, $(e_i)_i$ es una sucesión básica.

Veamos ahora el carácter incondicional de $(e_i)_i$. Sea $(a_i)_i$ una sucesión de escalares tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad \text{es convergente en } (X, \|\cdot\|).$$

En tal caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > N_\varepsilon$ entonces

$$\Big\|\sum_{i=n}^{\infty} a_i e_i\Big\| < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{4.3}$$

A continuación justificaremos que para cualquier conjunto finito de números naturales F tal que

$\{1, \dots, N_\varepsilon\} \subset F$ se tiene que

$$\Big\|x - \sum_{i\in F} a_i e_i\Big\| = \Big\|\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\Big\| \leq K\Big\|\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} a_i e_i\Big\| < \varepsilon; \tag{4.4}$$

es decir, que $(e_i)_i$ es una sucesión básica incondicional.

En efecto, para obtener la primera igualdad de (4.4) basta considerar $\sigma = \mathbb{N}\setminus F$. La desigualdad que sigue es consecuencia de aplicar la hipótesis (b) a

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i, \quad \text{siendo } b_i = a_i \text{ para todo } i > N_\varepsilon \text{ y } b_i = 0 \text{ en otro caso.}$$

La última desigualdad es consecuencia de (4.3).

$(b) \Longleftrightarrow (c)$

Supongamos (b). Sea $(a_i)_i$ una sucesión de escalares y $(\varepsilon_i)_i$ una sucesión de signos y consideremos $\sigma_1 = \{i\colon \varepsilon_i = 1\}$ y $\sigma_2 = \{i\colon \varepsilon_i = -1\}$. Aplicando (b) tenemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i e_i\Big\| &= \Big\|\sum_{i\in\sigma_1} \varepsilon_i a_i e_i - \sum_{i\in\sigma_2} \varepsilon_i a_i e_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i\in\sigma_1} a_i e_i\Big\| + \Big\|\sum_{i\in\sigma_2} a_i e_i\Big\| \\ &\leq K\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big\| + K\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big\| = 2K\Big\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\Big\|.\end{aligned}$$

Supongamos (c). Dados cualesquiera escalares a_1,..., a_m y un subconjunto $\sigma \subset \{i\colon 1 \leq i \leq m\}$, consideramos la sucesión de signos $(\varepsilon_i)_i$ definida como $\varepsilon_i = 1$ si $i \in \sigma$ y $\varepsilon_i = -1$ en otro caso. En tal caso, en virtud de (c),

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\Big\| &= \Big\|\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i a_i e_i + a_i e_i}{2}\Big\| \leq \frac{1}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i e_i\Big\| + \frac{1}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\| \\ &\leq \frac{K}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\| + \frac{K}{2}\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\| = K\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\Big\|.\end{aligned}$$ □

Para terminar con esta sección, aunque introdujimos el concepto de las bases incondicionales con la siguiente sección como objetivo vamos a pararnos un segundo a completar una pregunta que nos hicimos en el capítulo anterior. Nos habíamos preguntado si las bases de Schauder son únicas —en el sentido de ser todas equivalentes entre si— para un espacio dado y no solo habíamos respondido con una negativa sino que, de hecho, vimos que no existían espacios con todas sus bases de Schauder equivalentes en general. Podemos ahora volver a hacernos las mismas preguntas de nuevo: ¿Todo espacio con base de schauder tiene una base incondicional?¿Es dicha base única?¿Tiene todo espacio un subespacio de dimensión infinita con base de Schauder incondicional?

La primera de esas preguntas tiene respuesta negativa: ni $L^1[0,1]$ ni $\mathcal{C}[0,1]$ tienen bases incondicionales (véase [1, pág. 203]). La segunda, sin embargo, guarda una respuesta mucho más interesante. Se ha demostrado (véase [6, pág. 71]) que los espacios c_0, ℓ_1 y ℓ_2 tienen de hecho una base incondicional normalizada única —cualquier otra es equivalente a la base unitaria—. Pero no sólo eso, se ha demostrado un resultado incluso más fuerte (Véase [6, pág. 73]):

Teorema 4.6.
Un espacio de Banach con base de Schauder incondicional única, salvo equivalencia de sucesiones, es isomorfo a c_0, ℓ_1 o ℓ_2.

Quedan así caracterizados los espacios con bases tan únicas.

En cuanto a la última de estas preguntas su respuesta no es tan positiva como la que se dio en el capítulo 3. En 1993 Gowers y Maurey construyeron un espacio que no tenía ningún subespacio con base de Schauder incondicional (véase [10])—o lo que es lo mismo, sin sucesiones básicas incondicionales—.

4.2. Espacios de Banach reflexivos con base de Schauder incondicional

c_0 y ℓ_1 son dos espacios para los cuales fallan sus bases en verificar una de las dos propiedades antes vistas: shrinking en el caso de ℓ_1 y bounedly complete en el caso de c_0— remitimos al lector al Capítulo 6 para las pruebas—. Podemos suponer que todo espacio que contenga a alguno de estos dos no tiene bases que cumplan una de las propiedades. Esta intuición resulta cierta si nos restringimos a los espacios con bases de Schauder incondicionales y toma forma en los siguientes dos resultados:

Teorema 4.7. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder incondicional $(e_i)_i$. Si $(e_i)_i$ no es boundedly complete, entonces X tiene un subespacio isomorfo a c_0.*

Teorema 4.8. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder incondicional $(e_i)_i$. Si $(e_i)_i$ no es shrinking, entonces X tiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.*

Por ser demostraciones algo largas las incluiremos al final de este capítulo.

Partiendo de la intuición que teníamos antes, y que resultó ser verdadera, podemos ahora pensar un poco más allá y sugerir una nueva caracterización de la reflexividad en base a los espacios c_0 y ℓ_1 para espacios con bases de Schauder incondicionales:

Teorema 4.9 (Robert C. James)**.**
Sea X un espacio de Banach con base de Schauder incondicional $(e_i)_i$. En tal caso, X es reflexivo si y sólo si no existe ningún subespacio de X que sea isométrico a c_0 o a ℓ_1.

Demostración del Teorema 4.9.

"$\Longleftarrow$"

Probamos el contrarecíproco. Si X es un espacio no reflexivo con base de Schauder incondicional $(e_i)_i$, el Teorema 2.4 asegura que: o bien $(e_i)_i$ no es shrinking, y por tanto X tiene una copia isomorfa de ℓ_1 por el Teorema 4.8, o bien no es boundedly complete, y por tanto X tiene una copia isomorfa de c_0 por el Teorema 4.7.

”$\Longrightarrow$“

Si X es reflexivo, de tener un subespacio isomorfo a c_0, concluiríamos que $X^* \subset c_0^* \equiv \ell_1$, lo cual a su vez implicaría que $\ell_1^* \equiv \ell_\infty \subset X^{**} \equiv X$, pero esto no es posible porque X es separable y ℓ_∞ no.

Por otro lado, si X tuviese por subespacio a ℓ_1, entonces $X^* \subset \ell_1^* \equiv \ell_\infty$, lo cual su vez implicaría que $\ell_\infty^* \subset X^{**} \equiv X$, pero esto no es posible porque ℓ_∞^* no es separable.

Supongamos que ℓ_∞^* es separable. En ese caso existe un conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso. Como

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| > 0$$

tenemos que existe un conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $\|x_n\| = 1$ para todo n natural de forma que

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq f_n(x_n)$$

Veamos que $(x_n)_n$ es un conjunto denso en ℓ_∞. Para ello veremos que, de existir un funcional $f \in \ell_\infty^*$ que se anule en $\overline{\text{span}}(x_n)_n$ entonces $f = 0$—este es un corolario de Hahn-Banach, sería bueno incluírlo? (más por el espacio que por el tiempo)—

en efecto, primeramente

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \leq f_n(x_n) - f(x_n) = (f_n - f)(x_n) \leq \|f_n - f\|$$

por tanto, como $f \in \ell_\infty^* = \overline{\text{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ existe $(f_{n_i})_i$ tal que $f_{n_i} \xrightarrow{i\to\infty} f$, i.e., $\|f_{n_i} - f\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$. Lo que implica, por la anterior desigualdad, que $\|f_{n_i}\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$ Por tanto

$$\|f\| \leq \|f - f_{n_i}\| + \|f_{n_i}\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

Ergo, $f = 0$.

Pero sabemos que ℓ_∞ no es separable, contradicción.[11] □

Incluimos, ahora sí, las demostraciones de los dos teoremas que dejamos pendientes para la completitud del trabajo.

Demostración del Teorema 4.7.

Probaremos que si $(e_i)_i$ no es boundedly complete, entonces existe una sucesión básica bloque —formada a partir de $(e_i)_i$— que es equivalente a la base de Schauder natural de c_0. Por tanto, el resultado enunciado será una consecuencia del Teorema 3.5 (b).

Si $(e_i)_i$ no es boundedly complete, existe una sucesión de escalares $(a_i)_i$ de forma que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \text{ no es convergente.} \tag{4.5}$$

Por tanto, como dicha serie no es convergente, el criterio de Cauchy asegura la existencia de cierto $\varepsilon > 0$ de modo que para cada $i \in \mathbb{N}$ existen p_i, $q_i \in \mathbb{N}$ satisfaciendo que si

$$u_i := \sum_{i=p_i}^{q_i} a_i e_i,$$

entonces $\|u_i\| \geq \varepsilon$. Por otra parte, como $(e_i)_i$ es incondicional, en virtud del Teorema 4.3 (b), para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} u_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{q_m} a_i e_i \Big\| \leq K, \quad \text{siendo } K = \operatorname{ubc}(e_i)_i, \tag{4.6}$$

donde en la última desigualdad hemos empleado la cota que aparece en (4.5).

A continuación veremos que la sucesión básica bloque $(u_i)_i$ es equivalente a la base de Schauder natural de c_0. Para ello emplearemos el Teorema 3.5 (c). Es decir, probaremos que existen constantes C_1 y $C_2 > 0$ de forma que para cualesquiera escalares λ_i, con $1 \leq i \leq m$, se tiene que

$${C_1}^{-1} \|(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots)\|_{c_0} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\|_X \leq C_2 \|(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots)\|_{c_0}.$$

Dada la incondicionalidad de $(e_i)_i$, el Teorema 4.3 (b) nos permite afirmar que si $\{j\}$ es un subconjunto de $\{1, \ldots, m\}$, entonces

$$|\lambda_j|\varepsilon \leq \|\lambda_j u_j\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\|,$$

es decir, como la cota anterior es válida para cualquier j, concluimos en realidad que

$$\|(\lambda_i)_i\|_\infty \frac{\varepsilon}{K} \leq \Big\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \Big\|.$$

Por otra parte, por el Teorema B.9 de extensión de Hahn-Banach aplicado a funcionales existe un funcional $f \in S_{X^*}$ de modo que

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big) = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\|.$$

Consideremos signos $\varepsilon_i = \pm 1$ de forma que $\varepsilon_i f(u_i) \geq 0$ para cada i. En tal caso,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\| &= f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big) \leq \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i||f(u_i)| \leq \|(\lambda_i)_i\|_\infty \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i f(u_i) \\ &= \|(\lambda_i)\|_\infty f\Big(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i u_i \Big) \leq \|(\lambda_i)_i\|_\infty \Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i u_i \Big\| \end{aligned}$$

$$\leq \|(\lambda_i)\|_\infty K \Big\| \sum_{i=1}^{m} u_i \Big\| \leq \|(\lambda_i)\|_\infty \, K^2,$$

donde en la segunda línea hemos empleado que $\|f\| = 1$ y en la tercera línea hemos invocado el carácter incondicional de $(e_i)_i$ (más exactamente el Teorema 4.3 (c)) y (4.6).

Así pues, tenemos que

$$\|(\lambda_i)_i\|_\infty \frac{\varepsilon}{K} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\| \leq K^2 \|(\lambda_i)_i\|_\infty,$$

por lo que el Teorema 3.5 nos permite afirmar que $\overline{\operatorname{span}}(u_i)_i$ es isomorfo a c_0. □

Demostración del Teorema 4.8.

Probaremos que si $(e_i)_i$ no es shrinking, entonces existe una sucesión básica bloque —formada a partir de $(e_i)_i$— que es equivalente a la base de Schauder natural de ℓ_1. Por tanto, el resultado enunciado será una consecuencia del Teorema 3.5 (b).

Si $(e_i)_i$ no es shrinking, $\overline{\operatorname{span}}\{e_i^*\colon i \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio cerrado propio de X^*, por lo que —en virtud del Lema B.10 de Riesz— dado $1 > \varepsilon > 0$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que

$$\operatorname{dist}(f, \overline{\operatorname{span}}\{e_i^*\colon i \in \mathbb{N}\}) \equiv \operatorname{ínf}\big\{\|f - g\|\colon g \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i^*\colon i \in \mathbb{N}\}\big\} > \varepsilon.$$

Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in B_X$ de modo que

$$\operatorname{ínf}\Big\{\Big|f(z_n) - \sum_{i=1}^{n} g(e_i)e_i^*(z_n)\Big|\colon g \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i^*\colon i \in \mathbb{N}\}\Big\} > \varepsilon.$$

No obstante, si $z_n \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon 1 \leq i \leq n\} \cap B_X$, entonces (trivialmente)

$$\operatorname{ínf}\Big\{\Big|f(z_n) - \sum_{i=1}^{n} g(e_i)e_i^*(z_n)\Big|\colon g \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i^*\colon 1 \leq i \leq n\}\Big\} = 0.$$

Por tanto, concluimos que $z_n \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i > n\} \cap B_X$ y

$$\Big|f(z_n) - \sum_{i=1}^{n} g(e_i)e_i^*(z_n)\Big| = |f(z_n)| > \varepsilon.$$

Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f(z)|\colon z \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i\colon i > n\} \cap B_X\} \neq 0$$

o, equivalentemente, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ de modo que para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{|f(z)|\colon z \in \operatorname{span}\{e_{n_k}, e_{n_k+1}, e_{n_k+2}, ...\}\} \geq \varepsilon. \tag{4.7}$$

Empleando (4.7) podemos construir, por inducción, una sucesión básica bloque normalizada $(u_i)_i$ (formada a partir de $(e_i)_i$) de modo que $|f(u_j)| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

A continuación veremos que la sucesión básica bloque normalizada $(u_i)_i$ es equivalente a la base de Schauder natural de ℓ_1. Para ello emplearemos el Teorema 3.5 (c). Es decir, probaremos que existen constantes C_1 y $C_2 > 0$ de forma que para cualesquiera escalares λ_i, con $1 \leq i \leq m$, se tiene que

$$C_1{}^{-1}\|(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots)\|_{\ell_1} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\Big\|_X \leq C_2\|(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots)\|_{\ell_1}.$$

Puesto que la sucesión $(u_i)_i$ es normalizada,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|\|u_i\| = \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| = \|(\lambda_i)_i\|_{\ell_1}.$$

Por otro lado, la incondicionalidad de $(u_i)_i$ (que se deduce trivialmente de la incondicionalidad de $(e_i)_i$) nos permite afirmar que (véase el Teorema 4.3 (b))

$$\Big\|\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i u_i\Big\| \leq K\Big\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\Big\|,$$

donde K es la constante básica incondicional de $(e_i)_i$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2\Big\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\Big\| &\geq \frac{2}{K}\Big\|\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i u_i\Big\| \geq \frac{2}{K} f\Big(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i u_i\Big) = \frac{2}{K}\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i f(u_i) \\ &\geq \frac{2\varepsilon}{K}\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i = \frac{\varepsilon}{K}\Big(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i + \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i\Big) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{K}\Big(\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i + \sum_{\lambda_i < 0} -\lambda_i\Big) \\ &= \frac{\varepsilon}{K}\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| = \frac{\varepsilon}{K}\|(\lambda_i)_i\|_{\ell_1}, \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos empleado que $f \in S_{X^*}$ y en la tercera línea hemos supuesto que

$$\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i \geq \sum_{\lambda_i < 0} -\lambda_i,$$

el caso complementario es completamente análogo. □

Capítulo 5

Estructura de los subespacios de ℓ_p y c_0

En este último capítulo estudiaremos más en profundidad los espacios ℓ_p y c_0. Veremos resultados relativos a sus subespacios, propiedades de las sucesiones básicas de bloques extraídas de sus bases de Schauder naturales y, al final del capítulo, un resultado que nos informa de que estos espacios son totalmente diferentes entre si y no comparten subespacios de dimension infinita.

Como decíamos, nuestro último objetivo es emplear la teoría de las bases de Schauder para demostrar que los espacios c_0, ℓ_p y ℓ_r con $p \neq r$ son totalmente distintos entre si. Para ello primero debemos comenzar estudiando las estructuras internas de cada espacio.

Vamos a demostrar un teorema más general que será fundamental:

Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(e_i)_i$.

Teorema 5.1.
Todo subespacio $Y \subset X$ de dimensión infinita contiene un subespacio $Z \subset Y$ con base de Schauder equivalente a una sucesión básica bloque de $(e_i)_i$.

Demostración.

Emplearemos el siguiente resultado: *si $W \subset X$ es un subespacio de codimensión finita (es decir,* $\dim X/W < \infty$*), entonces $W \cap Y$ es un subespacio de dimensión infinita.* Veamos su demostración.

Consideremos la proyección canónica $\pi\colon X \longrightarrow X/W$, que es una aplicación lineal y sobreyectiva y satisface que $\ker \pi = W$. Si consideramos la restricción de π al subespacio Y, esto es, $\pi|_Y\colon Y \longrightarrow X/W$, entonces $\ker \pi|_Y = Y \cap \ker \pi = Y \cap W$. Y en tal caso, por el primer teorema de isomorfía,

$$Y/(Y \cap W) \simeq \pi(Y) \subset X/W.$$

Y como —por hipótesis— $\dim X/W < \infty$, deducimos que $\dim Y/(Y \cap W) < \infty$. No obstante, por hipótesis $\dim Y = \infty$, luego el subespacio $Y \cap W$ no puede ser de dimensión finita. $\square$

Consideremos ahora, para cada $p \in \mathbb{N}$, el subespacio de codimensión finita

$$W_p = \Big\{x \in X\colon x = \sum_{i=p+1}^{\infty} a_i e_i\Big\} = \overline{\operatorname{span}}\,\{e_i\colon i > p\}.$$

Por tanto, dado que —en virtud de lo visto al inicio de la prueba— $W_p \cap Y$ es un subespacio vectorial de dimensión infinita, para cada $p \in \mathbb{N}$, existe algún vector unitario $y_p \in W_p$ cuya expansión como serie (empleando la base de Schauder $(e_i)_i$),

$$y_p = \sum_{i=p+1}^{\infty} a_i e_i,$$

contiene una sucesión de coeficientes $(a_i)_i$ con infinitos términos no nulos.

Ahora ya estamos en condiciones de construir una sucesión básica bloque $(u_i)_i$ que sea equivalente a $(e_i)_i$ y genere un subespacio vectorial Z en las condiciones del enunciado. Veamos cómo proceder.

- Tomemos un vector $y_1 \in S_Y$. En tal caso, puesto que $(e_i)_i$ es base de Schauder de X e $y_1 \in X$, existe una (única) sucesión de escalares $(a_i^1)_i$ de modo que
$$y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 e_i.$$
Y como tal serie es convergente, existe un índice $p_1 \in \mathbb{N}$ de modo que si
$$u_1 = \sum_{i=1}^{p_1} a_i e_i, \text{ entonces } \|y_1 - u_1\| = \Big\| \sum_{i=p_1+1}^{\infty} a_i^1 e_i \Big\| < \frac{1}{4\,\mathrm{bc}\,(e_i)_i}.$$
- Tomemos ahora $y_2 \in S_Y \cap W_{p_1}$. Nuevamente, puesto que $(e_i)_i$ es base de Schauder de X e $y_2 \in X$, existe una (única) sucesión de escalares $(a_i^2)_i$ de modo que
$$y_2 = \sum_{i=p_1+1}^{\infty} a_i^2 e_i.$$
Y como tal serie es convergente, existe un índice $p_2 \in \mathbb{N}$ de modo que si
$$u_2 = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_i e_i, \text{ entonces } \|y_2 - u_2\| = \Big\| \sum_{i=p_2+1}^{\infty} a_i^1 e_i \Big\| < \frac{1}{4^2\,\mathrm{bc}\,(e_i)_i}.$$
- Continuando de tal modo, suponiendo que ya hemos obtenido u_i para $1 \leq i \leq n-1$, tomamos $y_n \in S_Y \cap W_{p_{n-1}}$ y empleamos la serie que nos proporciona la base de Schauder $(e_i)_i$ para afirmar que si
$$y_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{\infty} a_i^n e_i,$$
entonces existe un índice $p_n \in \mathbb{N}$ de modo que si
$$u_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i e_i, \text{ entonces } \|y_n - u_n\| = \Big\| \sum_{i=p_n+1}^{\infty} a_i^1 e_i \Big\| < \frac{1}{4^n\,\mathrm{bc}\,(e_i)_i}.$$

Obtenemos así una sucesión $(u_i)_i \subset Y$ que es una sucesión básica bloque a partir de $(e_i)_i$.

Además, dado que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i - u_i\| < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^n \operatorname{bc}(e_i)_i} = \frac{1}{\operatorname{bc}(e_i)_i} \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3\operatorname{bc}(e_i)_i},$$

el Teorema 3.7 nos permite afirmar que $(y_i)_i$ e $(u_i)_i$ son sucesiones básicas equivalentes.

Por tanto, basta considerar $Z = \overline{\operatorname{span}}\{u_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. □

Partiendo del anterior teorema, que de por sí nos habla mucho sobre la estructura de los espacios de Banach en general, podemos empezar con nuestro objetivo de explorar el interior de los espacios de sucesiones.

Sea X el espacio c_0 (de las sucesiones convergentes a 0) o el espacio ℓ_p para algún $1 \le p < \infty$.

Teorema 5.2.
Si $(u_i)_i$ es una sucesión básica bloque normalizada de la base de Schauder natural $(e_i)_i$ de X, entonces:

(a) $(u_i)_i$ es equivalente a $(e_i)_i$ y $\overline{\operatorname{span}}\{u_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es isométrico a X;
(b) existe una proyección de norma 1 de X en $\overline{\operatorname{span}}(u_i)_i$ (es decir, es complementado).

Demostración.

(a)

Supongamos inicialmente que $X = c_0$. Sea $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i e_i$ con $\sup_{p_n \le i \le p_{n+1}} |a_i^n| = 1$ (por ser $(u_i)_i$ normalizada) para cada $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualesquiera escalares λ_i con $1 \le i \le m$, se tiene que

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} a_j^i e_j \Big\|_\infty = \sup\big\{|a_j^i \lambda_i| : 1 \le i \le m,\, p_i + 1 \le j \le p_{i+1}\}\big\}$$

$$= \sup_{1\le i\le m} \sup_{p_i+1 \le j \le p_{i+1}} |\lambda_i|\,|a_j^i| = \sup_{1\le i\le m} |\lambda_i| = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \Big\|_\infty.$$

Por tanto, el resultado enunciado es consecuencia del Teorema 3.5.

Para $X = \ell_p$ la demostración es completamente análoga. Sea $u_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i e_i$ con $\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |a_i|^p = 1$ (por ser $(u_i)_i$ normalizada) para cada $n \in N$. En tal caso,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \Big\|_p = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} \lambda_i a_j e_j \Big\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} |\lambda_i|^p |a_j|^p \Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^p \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} |a_j|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^p \Big)^{1/p} = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \Big\|_p.$$

(b)

Primero construimos las aplicaciones duales de la sucesión $(u_i)_i$: Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $u_n^* \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i^* \colon p_{n-1} + 1 \le i \le p_n\}$ tal que $u_n^*(u_n) = 1$ y $\|u_n^*\| = 1$ (la existencia de tal funcional está asegurada por el Teorema B.8 de Hahn-Banach).

Conviene observar que como $u_k \in \overline{\text{span}}\,\{e_i : p_{k-1}+1 \leq i \leq p_k\}$, entonces $u_n^*(u_k) = 0$ si $k \neq n$. Por tanto, si definimos $P : X \longrightarrow \overline{\text{span}}\,\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ como

$$Px = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) u_i, \quad \text{para cada } x \in X,$$

obtenemos una aplicación lineal que satisface $P(X) = \overline{\text{span}}\,\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $P^2 = P$. Tan sólo resta ver que $\|P\| = 1$.

Para $X = c_0$, como $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $x \in c_0$ es tal que $\|x\|_\infty \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Px\|_\infty &= \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) u_i \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} a_j e_j \Big\|_\infty \\
&= \sup\{|a_j|\, |u_i^*(x)| : i \in \mathbb{N},\, p_{i-1}+1 \leq j \leq p_i\} \\
&= \sup_{i \in N} |u_i^*(x)| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|u_i^*\|\, \|x\|_\infty = \|x\|_\infty,
\end{aligned}$$

por lo que $\|P\| \leq 1$, pero como $Px = x$ para todo $x \in \overline{\text{span}}\,\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$, debe ser necesariamente $\|P\| = 1$.

Para $X = \ell_p$ la demostración es completamente análoga. Basta observar que como $\|u_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ es tal que $\|x\|_p = 1$, entonces

$$|u_i^*(x)|^p = \Big|u_i^*\Big(\sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} x_i e_i\Big)\Big|^p \leq \Big(\Big\|\sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} x_i e_i\Big\|_p\Big)^p = \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} |x_i|^p,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\|Px\|_p &= \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) u_i \Big\|_p = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*(x) \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} a_j e_j \Big\|_p \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i^*(x)|^p \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} |a_j|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i^*(x)|^p \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} |x_i|^p \Big)^{1/p} = \|x\|_p.
\end{aligned}$$

□

Corolario 5.3 (Subespacios de c_0 o ℓ_p con $1 \leq p < \infty$).
Todo subespacio de dimensión infinita $Y \subset X$ contiene un subespacio Z isomorfo a X y complementado en X.

Demostración.

Para la demostración de este resultado no es necesario otra cosa que aplicar los dos resultados previos. Por el Teorema 5.1 tenemos que X tiene un subespacio con base de Schauder equivalente a una sucesión básica bloque de la base unitaria. Normalizando dicha sucesión básica bloque y aplicando el Teorema 5.2 ya tenemos que dicho espacio es isométrico a X (por (i)) y que es complementado (por (ii)). □

Con el anterior teorema ya podemos vislumbrar que la naturaleza de los espacios de sucesiones es casi fractal: siempre encontraremos copias isomorfas del espacio en cualquiera de sus subespacios —infinitos—.

El siguiente teorema tiene gran importancia para el Análisis Funcional por su demostración— aunque su enunciado también es relevante y es la principal razón por la que lo hemos incluído— en la cual se emplea el conocido como proceso de descomposición de Pełczyński. Pero la importancia que más nos debe llamar la atención es cómo se plantea como un recíproco del anterior resultado:

Teorema 5.4 (Subespacios complementados de c_0 o ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, Pełczyński)**.**
Todo subespacio $Y \subset X$ complementado y de dimensión infinita es isomorfo a X.

Demostración.

Si $Y \subset X$ es complementado en X, entonces —por definición— existe un subespacio $X_1 \subset X$ de modo que $X \simeq Y \oplus X_1$.

Por otro lado, si Y es de dimensión infinita, el Corolario 5.3 afirma la existencia de un subespacio $Z \subset Y$ complementado en X y tal que $Z \simeq X$. Sea $X_2 \subset X$ el complemento de Z en X; es decir, $X \simeq Z \oplus X_2$. En particular, restringiéndonos a Y, tendremos que $Y \simeq Z \oplus Y_1$.

Por tanto, empleando que $X \simeq X \oplus X$ (véase el Lema B.5), obtenemos que

$$\begin{aligned} X \oplus Y &\simeq X \oplus (Z \oplus Y_1) \simeq (X \oplus Z) \oplus Y_1 \\ &\simeq (X \oplus X) \oplus Y_1 \simeq X \oplus Y_1 \simeq Z \oplus Y_1 \simeq Y \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por otra parte,

$$X \oplus Y \simeq (Y \oplus X_1) \oplus Y \simeq X_1 \oplus Y \oplus Y \simeq X_1 \oplus Y \simeq X. \tag{5.2}$$

Finalmente, a la vista de (5.1) y (5.2), el resultado enunciado es claro. □

Sumando el Teorema 5.3 y el Teorema 5.4 tenemos como resultado que los factores de cualquier descomposición de los espacios de sucesiones son el mismo espacio descompuesto, dándonos una idea de "primalidad": al igual que los números primos son aquellos que no tienen más divisores —o factores— que el trivial, 1, y él mismo, lo análogo sucede c_0 y ℓ_p con la operación de la suma directa de espacios.

Demostremos ahora, por último, que estos espacios son fundamentalmente distintos entre si, no conteniendo espacios isomorfos a subespacios de cualquiera de los otros.

Para ello, demostraremos primero el siguiente teorema, que nos servirá de base para el resultado del que hablamos.

Teorema 5.5 (de Pitt)**.** *Dados p, r de forma que $1 \leq p < r < \infty$, se tiene que para todo $T : \ell_r \to \ell_p$ operador lineal acotado, T también es compacto. Lo mismo se da con un operador $T : c_0 \to \ell_p$ con $p \in [1, \infty)$.*

Demostración.
Veamos la prueba primero para ℓ_r. Basta con probar $T(B_{\ell_r})$ es un precompacto, es decir su clausura es compacta.

Por el Teorema A.5 de Alaoglu tenemos que B_{ℓ_r} es compacta con la topología débil (gracias a que ℓ_r es reflexivo). Si demostramos que $T\colon (\ell_r, \text{débil}) \to (\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es continuo, entonces $T(B_{\ell_r})$ será precompacto. Por el Lema A.7 sabemos que la bola unidad B_{ℓ_r} es metrizable, y por tanto sólo es necesario probar que T es secuencialmente continua, lo que se traduce gracias a la linealidad de T en que, dada una sucesión $x_n \xrightarrow{\text{débil}} 0$ entonces $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Supongamos que no sucede, que existe una sucesión $(x_n)_n$ de forma que $x_n \xrightarrow{\text{débil}} 0$ pero existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|Tx_n\| \geq \varepsilon$ para todo n natural—podemos suponer $\|x_n\| = 1$ pues $\varepsilon < \|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\|$, es decir, existe $\inf_n \|x_n\| \neq 0$ y por tanto podemos normalizar—.

Por el Lema 3.11, como $x_n \xrightarrow{\text{débil}} 0$ y $\|x_n\| = 1$, sabemos que la sucesión $(x_n)_n$ tiene una subsucesión, $(x_{n_k})_k$, equivalente a una sucesión básica bloque de la base unitaria de ℓ_r (que, por el Teorema 5.2, es equivalente a la base unitaria de ℓ_r). Como la convergencia en norma implica la convergencia débil tenemos que $T\colon (\ell_r, \text{débil}) \to (\ell_p, \text{débil})$ es continua y por tanto $T(x_{n_k})_k \xrightarrow{\text{débil}} 0$. Como $\|Tx_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$ para todo k natural aplicamos el Lema 3.11 y de nuevo el Teorema 5.2 y tenemos que $(Tx_{n_k})_k$ es equivalente a la base unitaria de ℓ_p.

Sea ahora una una sucesión $(a_n)_n \in \ell_r \setminus \ell_p$. Por ser $(x_{n_k})_k$ equivalente a la base unitaria de ℓ_r tenemos que $\sum a_k x_{n_k}$ converge, y por tanto converge $T(\sum a_k x_{n_k}) = \sum a_k T(x_{n_k})$ que, como es equivalente a la base unitaria de ℓ_p implica que $\sum |a_k|^p$ converge, lo cual es una contradicción pues $(a_k)_k \notin \ell_p$. Por tanto, $T\colon (\ell_r, \text{débil}) \to (\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es continua.

Para la prueba del caso de c_0 supongamos que T no es un operador compacto, en ese caso $T(B_{c_0})$ no es precompacto, es decir: existe una sucesión $(Tx_i)_i$ que no tiene subsucesiones convergentes. Pero $(x_i)_i$ es una sucesión acotada en c_0 por lo que, por el Lema A.9(en el archivo de topologías débiles), tiene una subsucesión $(x_{i_n})_n$ de Cauchy en la topología débil. Si probamos que $T : (c_0,\text{débil}) \to (\ell_p, \|\cdot\|)$ es continua, entonces $(Tx_{i_n})_n$ es una subsucesión de $(Tx_i)_i$ de Cauchy y, por ser ℓ_p espacio de Banach, por tanto convergente, lo cual es una contradicción.

Veamos que, en efecto, $T : (c_0,\text{débil}) \to (\ell_p, \|\cdot\|)$ es continua, problema que se puede reducir a probar que es secuencialmente continua gracias al Lema A.8.

Supongamos que no sucede, que existe una sucesión $(y_n)_n$ de forma que $y_n \xrightarrow{\text{débil}} 0$ pero existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|Ty_n\| \geq \varepsilon$ para todo n natural—podemos suponer $\|y_n\| = 1$ pues $\varepsilon < \|Ty_n\| \leq \|T\|\|y_n\|$, es decir, existe $\inf_n \|y_n\| \neq 0$ y por tanto podemos normalizar—.

Por el Lema 3.11, como $y_n \xrightarrow{\text{débil}} 0$ y $\|y_n\| = 1$, sabemos que la sucesión $(y_n)_n$ tiene una subsucesión, $(y_{n_k})_k$, equivalente a una sucesión básica bloque de la base unitaria de c_0 (que, por el Teorema 5.2, es equivalente a la base unitaria de c_0). Como la convergencia en norma implica la convergencia débil tenemos que $T\colon (c_0, \text{débil}) \to (\ell_p, \text{débil})$ es continua y por tanto $T(y_{n_k})_k \xrightarrow{\text{débil}} 0$. Como $\|Ty_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$ para todo k natural aplicamos el Lema 3.11 y de nuevo el Teorema 5.2 y tenemos que $(Ty_{n_k})_k$ es equivalente a la base unitaria de c_0.

Pero llegamos a la contradicción de que la base de c_0 es equivalente a la de ℓ_p, cosa que no es posible pues, si tomamos $(\alpha_i)_i$ una sucesión de $\ell_{p+1} \setminus \ell_p$ tenemos que está en c_0 y por tanto $\sum \alpha_i e_i$ converge, pero entonces también converge en el sentido de ℓ_p, cosa que no sucede por hipótesis, llegando a una contradicción. □

Teorema 5.6. *Dados $p, q \in [1, \infty)$, $p \neq q$ se tiene que ℓ_p y ℓ_q no tienen subespacios de dimensión infinita isomorfos. Es decir, no existen $Q \subset \ell_p$ y $K \subset \ell_q$ de forma que $Q \simeq K$*

Mismo resultado se tiene con c_0 y ℓ_p con $p \in [1, \infty)$.

Demostración.
Suponiendo que sí lo hiciesen existiría un isomorfísmo

$$f\colon K \subset \ell_p \to Q \subset \ell_q$$

donde K y Q son subespacios de dimensión infinita y $q < p$. Como K es un subespacio de dimensión infinita tiene dentro una copia isomorfa a ℓ_p con base $(u_i)_i$ (en la demostración del Teorema 5.1 vemos que tienen norma 1). Por ser f un isomorfismo tenemos que $(f(u_i))_i$ es una sucesión básica equivalente a $(u_i)_i$.

Si tomamos F la extensión de f a ℓ_p por el Teorema B.8 de Hahn-Banach estamos en las hipótesis del Teorema 5.5 y por tanto F es un operador compacto, lo que implica que, como $(u_i)_i \xrightarrow{\text{débil}} 0$ por construcción en la demostración del Teorema 5.1, entonces $\|Fu_i\| = \|f(u_i)\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$. Pero f es un isomorfismo, por lo que $\|u_i\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$ lo cual es una contradicción con que $\|u_i\| = 1$. La misma situación se da si en vez de ℓ_p tomamos c_0. □

Lo anterior sugiere una definición más general de este fenómeno:

Definición 5.7. Dados dos espacios de Banach de dimensión infinita X e Y se dicen *totalmente incomparables* si no existen $Q_1 \subset X$ y $Q_2 \subset Y$ subespacios de dimensión infinita isomorfos entre si.

Capítulo 6

Ejemplos de bases de Schauder

Incluímos en este anexo la construcción de varias bases de Schauder de diferentes espacios clásicos para ejemplificar los conceptos tratados en este trabajo.

Si un espacio de Banach X admite base de Schauder $(e_i)_i$, entonces necesariamente X es separable. En efecto, pues el conjunto de las combinaciones lineales con coeficientes de racionales generado por $\{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es numerable y denso en X.

Así pues, por ejemplo, el espacio de las sucesiones acotadas ℓ_∞, que no es separable, no admite base de Schauder.

6.1. Ejemplos elementales

Espacios de dimensión finita

Si X es un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, toda base de Hamel de X es una base de Schauder de X.

En efecto, pues una base de Hammel de X es un conjunto de vectores $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ linealmente independientes cuyas combinaciones lineales generan el espacio X. Por tanto, todo vector $x \in X$ puede expresarse como

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,$$

donde los a_i son escalares biunívocamente determinados por x.

Espacios de Hilbert

Toda base de Hilbert $(e_i)_i$ de un espacio de Hilbert H (separable) es una base de Schauder de H. En efecto, pues si $(e_i)_i$ es base de Hilbert de H, entonces —de *Análisis funcional en espacios de Hilbert*— sabemos que todo vector $x \in H$ coincide con su serie de Fourier; esto es,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{para todo } x \in H.$$

Tenemos por tanto una sucesión $(e_i)_i \subset H$ de modo que $H = \overline{\operatorname{span}} \{e_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ con coeficientes (o coordenadas) únicos.

6.2. Espacios de sucesiones

Espacios ℓ_p

Para $1 \leq p < \infty$, el espacio de sucesiones $\ell_p = \{x = (x_i)_i \colon \sum |x_i|^p < \infty\}$ dotado de la norma

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^p \Big)^{1/p} \quad \text{para cada } x = (x_i)_i \in \ell_p,$$

admite como base de Schauder natural la sucesión (de sucesiones) $(e^i)_i \subset \ell_p$ dada, para cada $i \in \mathbb{N}$, por

$$e^i = (0, \dots, 0, 0, 0, \underset{\text{posición } i}{1}, 0, 0, \dots).$$

A continuación intentaremos dar una justificación detallada.

Dada una sucesión arbitraria $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_p$, puesto que $\sum |x_i|^p$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > N_\varepsilon$, entonces

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Así pues, como la desigualdad anterior es válida para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i e^i - x \Big\|_p = \lim_{n\to\infty} \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p = 0. \tag{6.1}$$

Por tanto, si para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i,$$

entonces es evidente que $x^n \in \operatorname{span}\{e^i \colon \in \mathbb{N}\}$ y —a la vista de (6.1)— $\|x^n - x\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

La unicidad de los coeficientes x_i es prácticamente evidente. Si para una misma sucesión de ℓ_p tenemos dos sucesiones de coeficientes $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tendrá que

$$|x_n - y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p = \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \Big\|_p = 0,$$

por lo que debe ser $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 6.1.

(*a*) Para $1 < p < \infty$, la base natural $(e^i)_i$ del espacio ℓ_p es shrinking, pues la sucesión de funcionales biortogonales coincide con $(e^i)_i$, que es base de Schauder del espacio dual $\ell_p^* = \ell_q$, siendo $1/p + 1/q = 1$. Tenemos que resaltar que ℓ_1 no puede tener una base shrinking pues su espacio dual, ℓ_∞, es no separable.

(*b*) Para $1 \leq p < \infty$, la base natural $(e^i)_i$ del espacio ℓ_p es boundedly complete, pues si $(a_i)_i$

es una sucesión de escalares para la que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e^i \Big\| < \infty,$$

entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e^i \Big\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty,$$

por lo que $x = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ es un vector del espacio ℓ_p.

Espacio c_0

El espacio c_0 formado por todas las sucesiones convergentes a 0 dotado de la norma

$$\|(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \text{para cada } x = (x_i)_i \in C_0$$

admite como base de Schauder natural la sucesión (de sucesiones) $(e^i)_i \subset \ell_p$ dada, para cada $i \in \mathbb{N}$, por

$$e^i = (0, \dots, 0, 0, \underset{\text{posición } i}{0, 1, 0}, 0, \dots).$$

A continuación intentaremos dar una justificación detallada.

Dado una sucesión arbitraria $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in c_0$, puesto que $x_n \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que si $n > N_\varepsilon$, entonces $|x_n| < \varepsilon$. Así pues, tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - x \|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{i>n} |x_i| = 0. \tag{6.2}$$

Por tanto, si para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i,$$

entonces es evidente que $x^n \in \operatorname{span}\{e^i : \in \mathbb{N}\}$ y —a la vista de (6.2)— $\|x^n - x\|_p \to 0$ cuando $n \to \infty$.

La unicidad de los coeficientes x_i es prácticamente evidente. Si para una misma sucesión de c_0 tenemos dos sucesiones de coeficientes $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tendrá que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \| \\ &= \lim_{n\to infty} \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, 0, \dots)\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{i<n} |x_i - y_i| \end{aligned}$$

por lo que debe ser $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 6.2.

(*a*) La base natural de c_0 no es boundedly complete. En efecto, pues sí consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de escalares $(a_n)_n$ dada por $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonce se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e^i \Big\|_\infty = \|(1,1,\dots,1,0,0,\dots)\|_\infty,$$

pero

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = (1,1,\dots,1,1,\dots) \notin c_0.$$

(b) La base natural de c_0 sí es shrinking, pues el dual de c_0 es ℓ_1 y los funcionales biortogonales de la base natural $(e^i)_i$ son los mismos vectores unitarios.

(c) La anterior es una base natural de c_0 pero hay otras bases también como la conocida como *base sumante*:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

Sus funcionales biortogonales son

$$f_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$$

de forma que valen 0 para todos los f_i con $i < n$, para $i = n$ entonces $f_n^*(f_n) = 1$ y para $i > n$

$$f_n(f_i) = e_n^*(f_i) - e_{n+1}^*(f_i) = e_n^*\Big(\sum_{k=1}^{i} e_k\Big) - e_{n+1}^*\Big(\sum_{k=1}^{i} e_k\Big) = 1 - 1 = 0$$

Por tanto, dado $x = (x_n)_n$ de c_0 tenemos, tomando como $f_0 = 0$, que

$$\begin{aligned}\Big\|x - \sum_{i=1}^{n} f_i^*(x) f_i\Big\| &= \Big\|x - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}) f_i\Big\| = \Big\|x - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i - \sum_{i=2}^{n+1} x_i f_{i-1}\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i - \sum_{i=1}^{n} x_i (f_i - f_{i-1}) + x_{n+1} f_n\Big\| = \Big\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i + x_{n+1} f_n\Big\| \\ &\leq \Big\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i\Big\| + \|f_n\| |x_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

quedando demostrado que la base sumante es base de c_0.

Además, dicha base no es incondicional:

Solo es necesario recordar por el Lema B.3 que $\sum \frac{(-1)^n}{n} f_n$, serie convergente, converge incondicionalmente si lo hace $\sum \frac{1}{n} f_n$. Pero es obvio ver que la segunda serie no puede converger pues

$$e_1^*\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} f_n\Big) = e_1^*\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i} e_k\Big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \quad \text{no convergente.}$$

y como la serie no converge en (c_0,débil) no puede hacerlo en norma por el Teorema A.3.

Por tanto, es evidente que ambas bases —la unitaria y la sumante— no son equivalentes entre sí.

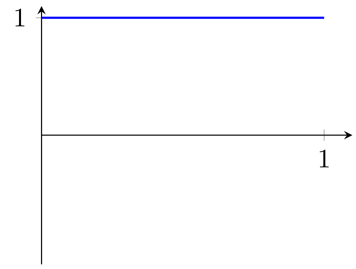
6.3. Espacios de funciones

El sistema de Haar

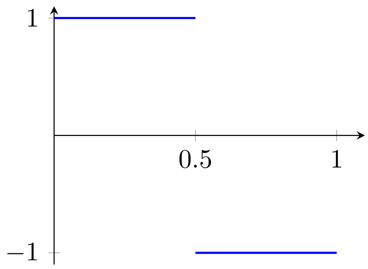
Para $1 \leq p < \infty$, el espacio $(L^p(0,1), \|\cdot\|_p)$ de las (clases de equivalencia de) funciones Lebesgue–medibles definidas en casi todo punto del intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ y tales que $\int_0^1 |f|^p < \infty$ dotado de la norma

$$\|f\|_p = \Big(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} \quad \text{para cada } f \in L^p(0,1),$$

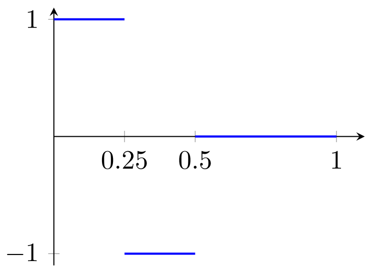
admite base de Schauder. Un ejemplo es la conocida como sistema de Haar, que viene dado por la sucesión de funciones $(h_n)_n$, cuyas gráficas (para $1 \leq i \leq 4$) aparecen en la Figura 6.1).



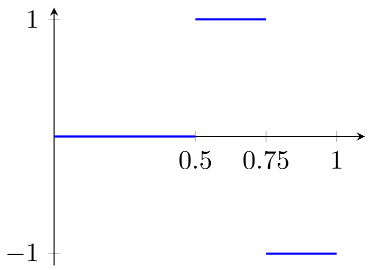
(a) h_1



(b) h_2



(c) h_3



(d) h_4

Figura 6.1: Base de Haar

Formalmente, enumeramos la sucesión $(h_n)_n$ del siguiente modo:

$$h_1(t) = 1 \quad \text{para todo } t \in [0,1];$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,1/2], \\ -1, & \text{si } t \in [1/2,1]; \end{cases}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0,1/4], \\ -1, & \text{si } t \in [1/4,1/2], \\ 0, & \text{si } t \in [1/2,1]; \end{cases} \qquad h_4(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0,1/2], \\ 1, & \text{si } t \in [1/2,3/4], \\ -1, & \text{si } t \in [3/4,1]. \end{cases},$$

Y en general, para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq 2^n$, si 1_A es la función característica del conjunto $A \subset [0,1]$,

$$h_{2^n+i}(t) = 1_{\left[\frac{2i-2}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right]} - 1_{\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right]}.$$

Para probar que $(h_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ es una base de Schauder de $L^p(0,1)$ veremos que $(h_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión básica en $L^p(0,1)$ y que $\overline{\operatorname{span}}\,\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = L^p(0,1)$. Procederemos en tres etapas.

- Las funciones características de los intervalos diádicos son elementos de $\operatorname{span}\{h_i : i \in \mathbb{N}\}$.

  Podemos construir las funciones características de los intervalos $[0,1/4], [1/4,1/2], [1/2,3/4]$ y $[3/4,1]$ combinando linealmente las cuatro primeras funciones de la base de Haar. En efecto, pues se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{h_1+h_2}{4} + \frac{h_3}{2} &= \frac{1}{4}\Big[1_{[0,1]} + 1_{[0,1/2]} - 1_{[1/2,1]}\Big] + \frac{1}{2}\Big[1_{[0,1/4]} - 1_{[1/4,1/2]}\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[2 \cdot 1_{[0,1/2]}\Big] + \frac{1}{2}\Big[1_{[0,1/4]} - 1_{[1/4,1/2]}\Big] = 1_{[0,1/4]}, \\ \frac{h_1+h_2}{4} - \frac{h_3}{2} &= \cdots = 1_{[1/4,1/2]}, \\ \frac{h_1-h_2}{4} + \frac{h_3}{2} &= \cdots = 1_{[1/2,3/4]}, \\ \frac{h_1-h_2}{4} - \frac{h_3}{2} &= \cdots = 1_{[3/4,1]}. \end{aligned}$$

  Veamos ahora cómo obtener la función característica del intervalo diádico $[j/2^i, (j+1)/2^i]$ como combinación lineal de elementos de la base de Haar.

  Si j es impar, suponiendo que ya hemos obtenido la función característica del intervalo $[(j-1)/2^i, j/2^i]$ —que por brevedad y comodidad denotaremos por f— como combinación lineal de elementos de la base de Haar, es fácil constatar que

$$\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}h_{2^{i-1}+(j+1)/2} = 1_{[j/2^i,(j+1)/2^i]}.$$

  Por otra parte, si j es par, suponiendo que ya hemos obtenido la función característica del intervalo $[j/2^i, (j+2)/2^i]$ —que por brevedad y comodidad denotaremos por g— como combinación lineal de elementos de la base de Haar, es fácil constatar que

$$\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h_{2^{i-1}+(j+2)/2} = 1_{[j/2^i,(j+1)/2^i]}.$$

- $\overline{\operatorname{span}}\,\{h_i : i \in \mathbb{N}\} = L_p[0,1]$.

  Dada una función $f \in L^p[0,1]$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ (en otro caso habría que descomponer f en f^+ y f^-). En tal caso, si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$g_n = \sum_{i=1}^{2^n-1} f(i/2^n)\, 1_{[i/2^n,(i+1)/2^n]},$$

entonces es evidente —a la vista de la etapa anterior— que $g_n \in \operatorname{span}\{h_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ y, por otra parte, se tiene que $\|f - g_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por tanto, $\overline{\operatorname{span}}\,\{h_i \colon i \in \mathbb{N} \ = L^p(0,1)$.

- El sistema de Haar es una sucesión básica en $L^p(0,1)$.

  Probaremos que $\|f\|_p \le \|g\|_p$ para cualesquiera funciones f y $g \in \operatorname{span}\{h_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ que sean de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \quad \text{y} \quad g = \sum_{i=1}^{m} a_i h_i \quad \text{con } m = n+1. \tag{6.3}$$

En tal caso, el Teorema 3.2 (Criterio de Banach–Grumblum) nos permitirá deducir que el sistema de Haar es una sucesión básica en $L^p(0,1)$. En efecto, pues para $m \in \mathbb{N}$ arbitrario bastaría aplicar m veces la desigualdad que probaremos:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i h_i\| \le \|\sum_{i=}^{n+1} a_i h_i\| \le \|\sum_{i=1}^{n+2} a_i h_i\| \le \cdots \le \|\sum_{i=1}^{m} a_i h_i\|.$$

A la vista de (6.3), f y g se diferencian únicamente en un intervalo diádico, en el que f es constante, y toma por tanto cierto valor b, y g toma dos valores: $b + a_{n+1}$ en la primera mitad y $b - a_{n+1}$ en la segunda.

No obstante, dado que $|x|^p$ es una función convexa,

$$|b|^p = |\frac{b + a_{n+1}}{2} + \frac{b - a_{n+1}}{2}|^p \le |b + a_{n+1}|^p + |b - a_{n+1}|^p,$$

por lo que resulta evidente que $\|f\|_p \le \|g\|_p$.

Alfréd Haar
Budapest, 1885 - Szeged, 1933

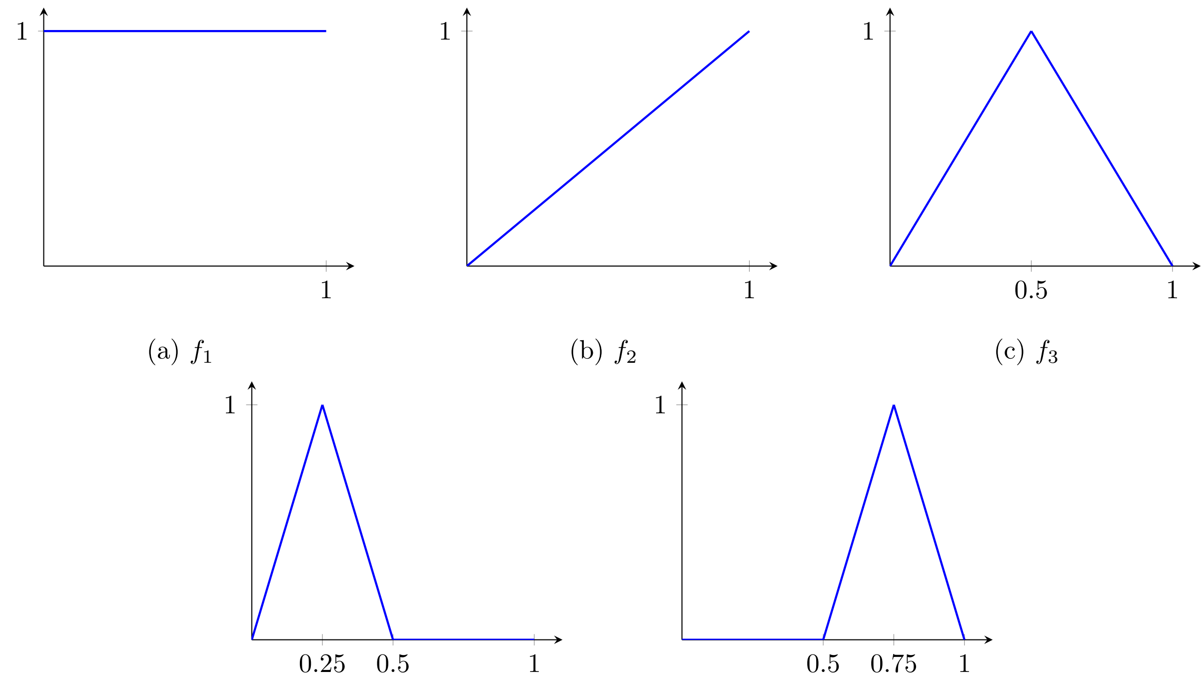
Matemático húngaro relevante en los campos del análisis en grupos—dando lugar a la medida de Haar— así como en calculo variacional y ecuaciones en derivadas parciales. Estudió e investigó en la Universidad de Götingen bajo la tutela de David Hilbert, donde se doctoró, para luego volver a Hungría en 1912. Tras la Primera Guerra Mundial, y tras la creación de la Universidad de Szeged (resultante de mover la antigua Universidad de Kolozsvár a las fronteras de la recién fundada república de Hungría) Haar formó, junto a Frigyes Riesz, un importante centro de investigación matemática con su propia revista de gran prestgio donde publicaron gente de la talla de Von Neumann, Henri Cartan, George Pólya o Paul Erdös.

La base de Faber–Schauder

El espacio $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de las funciones continuas en el intervalo compacto $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dotado de la norma de la convergencia uniforme,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}([0,1]),$$

admite base de Schauder. Un ejemplo es la conocida como base de Faber–Schauder, que viene dada por la sucesión $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([0,1])$ cuyas gráficas (para $1 \leq i \leq 5$) aparecen en la Figura 6.2).



(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3

(d) f_4 (e) f_5

Figura 6.2: Base de Faber–Schauder

Formalmente, enumeramos la sucesión $(f_n)_n$ del siguiente modo:

$$f_1(t) = 1 \quad \text{para todo } t \in [0,1];$$

$$f_2(t) = t \quad \text{para todo } t \in [0,1];$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0,1/2], \\ 2-2t, & \text{si } t \in [1/2,1]; \end{cases}$$

$$f_4(t) = \begin{cases} 4t, & \text{si } t \in [0, 1/4], \\ 2 - 4t, & \text{si } t \in [1/4, 1/2], \\ 0, & \text{si } t \in [1/2, 1]; \end{cases} \qquad f_5(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 4t - 2, & \text{si } t \in [1/2, 3/4], \\ 4 - 4t, & \text{si } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Y en general, para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq 2^n$,

$$f_{2^n+i+1}(t) = \begin{cases} f_3(2^n t + 1 - i), & \text{si } t \in [(i-1)/2^n, i/2^n], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Georg Faber
Kaiserslautern, 1877 – Múnich, 1966

Matemático alemán. Estudió fisica y matemáticas en las universidades de Munich y Götingen y realizó trabajos que resultaron ser muy importantes en los años ochenta cuando fueron utilizados para la resolución eficaz de ecuaciones en derivadas parciales.

Fue lingüista por afición, interesado tanto en lenguas modernas como antiguas y estuvo muy interesado en la enseñanza.

La construcción (y existencia) de la base de Faber–Schauder se fundamenta en el carácter separable del intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. En realidad, bastaría con tomar cualquier sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1]$ cuyo conjunto de términos sea denso en $[0, 1]$ y considerar como f_n a la función afín que vale 1 en el nodo t_n y decae hasta 0 en los nodos adyacentes manteniéndose nula en el resto del intervalo. Por comodidad, hemos considerado como sucesión de puntos $(t_n)_n$ a la dada por: $t_1 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_k = i/2^m$ si $k = 2^m + i$.

Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la proyección (lineal y acotada) $P_n\colon \mathcal{C}([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ que asocia a cada función $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ la poligonal de vértices $(t_k, f(t_k))$ con $1 \leq k \leq n$.

En tal caso,

$$\begin{aligned} P_1 f =& f(0) f_1, \\ P_2 f =& f(0) f_1 + \big[f(1) - f(0) f_1(1)\big] f_2, \\ P_3 f =& f(0) f_1 + \big[f(1) - f(0) f_1(1)\big] f_2 \\ &+ \Big[f(1/2) - f(0) f_1(1/2) - \big[f(1) - f(0) f_1(1)\big] f_2(1/2)\Big] f_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

En general,

$$P_n f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i,$$

donde $a_1 = f(0)$ y

$$a_n = f(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_n f_i(t_n) \quad \text{para } n \geq 2.$$

Conviene observar que, por ser $f_i(t_k) = 0$ para todo $k < i$, al incrementar n, no varía el valor de los primeros sumandos, por lo que sólo hay que calcular los coeficientes de los nuevos nodos (o sumandos) añadidos.

También resulta interesante observar que por tener $P_n f$ una función con gráfica poligonal, ésta alcanza sus máximo y mínimo en uno de sus nodos (donde los valores de f y $P_n f$ coinciden). Por tanto,

$$\|P_n f\|_\infty = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} |f(\text{nodo}_k)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Es decir, concluimos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \leq 1$.

Probaremos que la sucesión de proyecciones $(P_n)_n$ que acabamos de introducir satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4, por lo que podremos afirmar que $(f_n)_n$ es base de Schauder de $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(a) Veamos que $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{C}([0,1])$. Consideremos para ello una combinación lineal arbitraria igualada a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{n_i} = 0.$$

En tal caso, evaluando en el nodo t_{n_i}, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{n_i}(t_{n_i}) = \lambda_i = 0,$$

por lo que concluimos que $\lambda_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Queda entonces probado que $P_n(X)$ es un espacio vectorial de dimensión n.

(b) Trivial a la vista de la definición de las proyecciones P_n.

(c) Sea f una función continua en el intervalo $[0,1]$. Tenemos que probar que $P_n f \rightrightarrows f$ uniformemente en $[0,1]$.

Dado que f y $P_n f$ son funciones continuas en $[0,1]$, el Teorema de Weierstrass asegura la existencia de $t_n^* \in [0,1]$ de modo que:

$$\|P_n f - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P_n f(t) - f(t)| = |P_n f(t_n^*) - f(t_n^*)|$$

Por otra parte, la continuidad uniforme de f en $[0,1]$ asegura que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si s, $t \in [0,1]$ y $|t - s| < \delta$, entonces $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

Además, la densidad de la sucesión de puntos $(t_n)_n \subset [0,1]$, nos permite afirmar que dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que todo punto del intervalo $[0,1]$ dista menos que δ de algún punto del conjunto $\{t_i : 1 \leq i \leq N_\varepsilon\}$.

En tal caso, para $n \geq N_\varepsilon$, dado que existen i, $j \in \mathbb{N}$ de modo que $t_n^* \in [t_i, t_j]$ con $t_j - t_i < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|P_nf - f\|_\infty &= |P_nf(t_n^*) - f(t_n^*)| = |P_nf(t_n^*) - P_nf(t_i) + f(t_i) - f(t_n^*)| \\ &\leq |P_nf(t_n^*) - P_nf(t_i)| + |f(t_i) - f(t_n^*)| \\ &\leq |P_nf(t_j) - P_nf(t_i)| + |f(t_i) - f(t^*)| \\ &= |f(t_j) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(t_n^*)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

donde en la tercera línea hemos empleado que

$$|P_nf(t) - P_nf(s)| < |P_nf(t_i) - P_nf(t_j)| \quad \text{para todo } s,\, t \in [t_i, t_j].$$

Queda justificada entonces la convergencia uniforme de P_nf a f en el intervalo $[0, 1]$.

Bibliografía

[1] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos y V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer, 2011.

[2] P. Enflo, «A counterexample to the approximation problem in Banach spaces,» *Acta Mathematica*, vol. 130, págs. 309-317, 1973.

[3] F. Albiac y N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory* (Graduate Texts in Mathematics, 233). Springer New York, 2006.

[4] R. C. James, «Bases and Reflexivity of Banach Spaces,» *Annals of Mathematics*, vol. 52, n.º 3, págs. 518-527, 1950.

[5] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*. Springer-Verlag, 1984.

[6] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*. Springer, 1996 - 1977.

[7] M. M. Day, «On the Basis Problem in Normed Spaces,» *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 13, n.º 4, págs. 655-658, 1962.

[8] B. R. Gelbaum, «Notes on Banach spaces and bases,» *Anais Acad. Brasil. Ci.*, vol. 30, págs. 29-36, 1958.

[9] C. Bessaga y A. Pełczyński, «On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces,» *Studia Mathematica*, vol. 17, n.º 2, págs. 151-164, 1958.

[10] W. T. Gowers y B. Maurey, «The Unconditional Basic Sequence Problem,» *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 6, n.º 4, págs. 851-874, 1993.

[11] user24367, *Separability of Banach Spaces*, (consultado por última vez: junio 2025). dirección: `https://math.stackexchange.com/q/106961`.

[12] P. Habala, P. Hájek y V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I, II*. Matfyzpress, 1996.

[13] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.

[14] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1994.

Anexo A

Topologías débil y débil*

Definición A.1. Dado un espacio normado X, definimos su topología débil como la topología más pequeña que hace que los funcionales lineales sean continuos. También podemos caracterizarla describiendo cómo una sucesión de X converge débilmente: dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esta converge a x_0 si y solo si, para cualquier funcional $f \in X^*$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

También podemos describir los abiertos básicos de esta topología: como la topología débil aún mantiene el carácter de espacio vectorial topológico de X la suma y multiplicación por escalares son continuos, y por tanto cualquier abierto puede ser expresado como homeomorfismo de un entorno del 0. Basta ver cómo son estos entornos. Dado cualquier funcional, por ser lineal la imagen del 0 debe ser el 0, y si queremos que sea continuo la imagen de valores cercanos al 0 deberán estar cerca del 0, por lo tanto los abiertos básicos los podemos describir como, dado un $\varepsilon > 0$,

$$W(0; f, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\}$$

y como la convergencia se tiene que dar para todos los funcionales, realmente un abierto básico debe ser, dados $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ y un $\varepsilon > 0$,

$$W(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_1(x)|, \ldots, |f_n(x)| < \varepsilon\}.$$

Así, al verificar la condición de continuidad cerca del 0 para cualquier funcional la imagen inversa de un entorno del 0 va a estar contenida en alguno de estos abiertos básicos.

Cabe destacar que los entornos del 0 (y por extensión cualquier entorno) son particularmente grandes. Como la dimensión del rango de un funcional $f \in X^*$ es a lo mucho 1, si su dominio X es de dimensión infinita entonces $ker(f)$ va a tener dimensión infinita, y $ker(f)$ o la intersección finita de núcleos de funcionales están contenidas en los entornos del 0, ergo dichos entornos contienen espacios de dimensión infinita (son muy grandes). O lo que es lo mismo, los abiertos en (X, débil) no pueden ser acotados de X.

De la misma forma podemos definir una topología aún más pequeña.

Definición A.2. Dado un espacio normado X^* que sea el dual de otro espacio X, definimos su topología débil estrella o débil* como la topología más pequeña que hace que las aplicaciones evaluación,$T_x\colon f \in X \to f(x) \in \mathbb{K}$, sean continuas. También podemos caracterizarla de la misma forma que con la topología débil mediante la convergencia de sus sucesiones: dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge a f_0 si y solo si para cualquier x de X,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$$

Al igual que con la topología débil podemos describir sus abiertos básicos. Por las mismas razones que expresamos con anterioridad tenemos que cualquier abierto débil* es homeomorfo a un entorno del 0 por lo que solo tenemos que estudiar los abiertos en (X^*, débil*) que contengan al 0. Para ello, como las evaluaciones son lineales por la linealidad de los funcionales de X^* y queremos que sean continuos, si tomamos una conjunto de puntos de X, $x_1, \ldots, x_n$ queremos que si están cerca del 0 entonces sus imágenes por cualquier funcional estén cerca del 0, por tanto dado un $\varepsilon > 0$ se tendría por abierto básico

$$W(0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{f \in X^* \colon |f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)| < \varepsilon\}.$$

Hay que resaltar que la topología débil* no es más que la topología débil en el dual pero restringiendo los funcionales de su dual, X^{**}, que empleamos para construir los abiertos básicos sólo a las evaluaciones.

Estas topologías siguen guardando una relación entre ellas y con la topología de la norma, como podemos ver en el siguiente teorema:

Teorema A.3. *Dado un espacio vectorial noramdo X y una sucesión $(x_n)_n$ en X, tenemos las siguientes implicaciones*

- *Si $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ entonces $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en (X, débil)*
- *Si $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en (X, débil) entonces $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ en (X, débil*)*

Además, si el espacio es reflexivo, es decir $X \simeq X^{**}$, entonces las topologías débil y débil coinciden.*

Ahora pasamos a enumerar una serie de resultados sobre las topologías débiles que empleamos a lo largo del presente trabajo:

Teorema A.4 (de Mazur)**.** *[5, pág. 11][12] Dado un espacio normado X y un subconjunto convexo $K \subset X$, se tiene que*

$$\overline{K} = \overline{K}^w$$

siendo $\overline{K}$ la clausura de K en la norma y $\overline{K}^w$ su clausura en (X, débil).

Teorema A.5 (de Alaoglu)**.** *[5, pág. 13] Para todo espacio normado X, la bola unidad de su espacio dual, B_{X^*}, es compacta en (X^*, débil*).*

En particular, si X es un espacio reflexivo entonces B_X es compacta en (X, débil)

Teorema A.6 (de Eberlein-Šmulian)**.** *[5, pág. 18] Dado un espacio de Banach X, un subconjunto*

A es relativamente compacto en $(X, \text{ débil})$ si y solo si es relativamente secuencialmente compacto en $(X, \text{ débil})$.

Lema A.7. *[3, pág. 16] Dado un espacio de Banach X, si X^* contiene una sucesión $(x_n^*)_n$ tal que*

$$x_n^*(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \implies x = 0$$

entonces todo subconjunto compacto de $(X, \text{ débil})$ es metrizable con la topología débil.

Lema A.8. *[13, pág. 74-76] Dado un espacio de Banach X, si X^* es separable entonces B_X es metrizable en $(X, \text{ débil})$*

Lema A.9. *[14, pág. 185 ej. 3] Toda sucesión acotada de c_0 tiene una subsucesión de Cauchy en $(c_0, \text{ débil})$.*

Anexo B

Resultados auxiliares

Lema B.1. *Sea* $\sum x_i$ *una serie en un espacio de Banach* X *y* $x \in X$*. Son equivalentes:*

(i) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto finito* $F \subset \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left\|x - \sum_{i \in F'} x_i\right\| < \varepsilon$$

para cualquier F' *conjunto finito de* $\mathbb{N}$ *tal que* $F \subset F'$

(ii) *Si* π *es una permutación de* $\mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum x_{\pi(i)} = x$$

Demostración.

$(i) \implies (ii)$

Se verá que F está contenido en el subconjunto de las permutaciones de los primeros m números naturales y, aplicando la hipótesis tomando por F' ese subconjunto, se tendrá el resultado.

Sea $\varepsilon > 0$ fijado y considérese el conjunto $F \subset \mathbb{N}$ como el que verifica la hipótesis. Como π es una permutación de $\mathbb{N}$, y por tanto una biyección, y F es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ se tiene que para cada $n \in F$ existe un m tal que $\pi(m) = n$, y como F es finito existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, que puede ser el máximo de los m, tal que $F \subset \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n_0)\}$. Por la hipótesis, se tiene que

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)}\right\| < \varepsilon$$

$(ii) \implies (i)$

Suponiendo que no sucede (ii) pero si (i), se construirá una sucesión de conjuntos finitos F_k para los cuales la suma de sus elementos sea siempre mayor a un cierto valor, después se escogerá una permutación que deja dichos conjuntos fijos fijos y se verá que la serie asociada a esa permutación no converge.

Por reducción al absurdo, supóngase que existe un $\varepsilon > 0$ para el cual todo conjunto finito F verifica que existe un $F' \supset F$ tal que

$$\left\|x - \sum_{i \in F'} x_i\right\| > \varepsilon$$

Por hipótesis, y como la identidad es una permutación de $\mathbb{N}$, $\sum x_i = x$ y por tanto para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un n'_k tal que

$$\|\sum_{i=1}^{n'_k} x_i - x\| < \frac{1}{k}$$

.

Sea ahora, para $k = 1$ un subconjunto $F' \subset \mathbb{N}$ que contiene a $\{1, \ldots, n'_1\}$ y que verifica que

$$\|x - \sum_{i \in F'} x_i\| > \varepsilon$$

(y que existe por la hipóteis de reducción al absurdo). Sea ahora $F_1 = F' \cap \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n'_0\}$, $n_1 = n'_1$ y $n_2 = \text{máx}\{n'_2, \text{máx}(F_1) + 1\}$, así se tiene que $n_2 > \text{máx}\, F_1 \geq \text{mín}\, F_1 > n_1$.

Aplicando inducción, se construyen todos los conjuntos F_k y los naturales n_k verificando que $n_{k+1} > \text{máx}\, F_k \geq \text{mín}\, F_k > n_k$ y

$$\|\sum_{i \in F'} x_i - x\| = \|\sum_{i=1}^{n_k} x_i + \sum_{i \in F_k} x_k - x\| > \varepsilon$$

. Por tanto

$$\varepsilon < \|\sum_{i=1}^{n_k} x_i + \sum_{i \in F_k} x_i - x\| \leq \|\sum_{i=1}^{n_k} x_i - x\| + \|\sum_{i \in F_k} x_i\| < \frac{1}{k} + \|\sum_{i \in F_k} x_i\|$$

Con k suficientemente grande se tiene que $\|\sum_{i \in F_k} x_i\| > \tilde{\varepsilon}$ para cierto $\tilde{\varepsilon} > 0$

Tomando la permutación π que deja fijos los elementos de F_k se tiene que, para k suficientemente grande

$$\varepsilon < \|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} + \sum_{i \in F_k} x_i - x\| \geq \|\sum_{i \in F_k} x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} - x\| > \tilde{\varepsilon} - \|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} - x\|$$

Lo cual es una contradicción, pues suponiendo que la serie $\sum x_{\pi(i)}$ converge entonces el término $\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} - x\|$ tiende a 0, pero entonces

$$\|\sum_{i=1}^{n_k} x_{\pi(i)} + \sum_{i \in F_k} x_i - x\| \not\longrightarrow 0$$

contradiciendo la hipótesis de partida.

□

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

Lema B.2. *Una serie $\sum x_i$ es incondicionalmente convergente si y solo si es incondicionalmente de Cauchy, i.e., si dado $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\|\sum_{i \in F'} x_i\| < \varepsilon$$

para cualquier F' conjunto finito disjunto de F.

Demostración.

Primero es necesario ver que una serie incondicionalmente de Cauchy es una serie de Cauchy.

Fijado $\varepsilon > 0$ y con F un conjunto finito dado por la definición de incondicionalmente de Cauchy basta tomar $N = \text{máx}\, F$ con lo que tiene que para todo par $p, q > N$,

$$\| \sum_{i=1}^{p} x_i - \sum_{i=1}^{q} x_i \| = \| \sum_{i=p}^{q} x_i \| < \varepsilon$$

tomando como $F' = \{p, \dots, q\}$, el cual es disjunto de F. Y por tanto, se cumple la definición de serie de Cauchy.

Como estamos en un espacio completo, por ser X de Banach, se tiene que existe un cierto $x \in X$ tal que $x = \sum x_i$.

"$\Longrightarrow$"

Fijado un $\varepsilon > 0$, por ser condicionalmente de Cauchy se tiene que existe un F^* subconjunto finito de $\mathbb{N}$ tal que para todo F' subconjunto finito disjunto de F^* se tiene que

$$\| \sum_{i \in F'} x_i \| < \varepsilon.$$

Por la convergencia de la serie se tiene que existe un cierto N_1 natural para el cual, dado un $n > N_1$,

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \| < \varepsilon.$$

Si se toma $n_0 = \text{máx}\{\text{máx}\, F^*, N_1\}$ y $F = \{1, \dots, n_0\}$ se tiene que, para cualquier $F' \supset F$

$$\| \sum_{i \in F'} x_i - x \| = \| \sum_{i=1}^{n_0} x_i + \sum_{i \in F', i > n_0} x_i - x \| \leq \| \sum_{i=1}^{n_0} x_i - x \| + \| \sum_{i \in F', i > n_0} x_i \| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Y por tanto se tiene la convergencia incondicional.

"$\Longleftarrow$"

Fijado $\varepsilon > 0$, por la convergencia incondicional se tiene que existe F conjunto finito de $\mathbb{N}$ de forma que dado un conjunto finito $F' \supset F$ se tiene que

$$\| \sum_{i \in F'} x_i - x \| < \varepsilon$$

de la misma forma, por la convergencia de la serie se tiene que existe un cierto N_1 natural para el cual, dado un $n > N_1$

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \| < \varepsilon.$$

Si se toma $n_0 = \text{máx}\{\text{máx}\, F, N_1\}$, dado un conjunto finito F' disjunto de F se tiene que $F \subset$

$F' \cup \{1, \ldots, n_0\}$ y por tanto

$$\|\sum_{i\in F'} x_i\| = \|\sum_{i\in F'} x_i + \sum_{i=1}^{n_0} x_i - x + x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\| \leq \|\sum_{i\in F'\cup\{1,\ldots,n_0\}} x_i - x\| + \|x - \sum_{i=1}^{n_0} x_i\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\square$

Lema B.3. *Una serie $\sum x_i$ converge incondicionalmente si y solo si converge $\sum \varepsilon_i x_i$ con cualquier elección de $(\varepsilon_i)_i = (\pm 1)_i$.*

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Probemos que $\sum \varepsilon_i x_i$ es de Cauchy y, por ser X un espacio completo, convergente.

Por ser $\sum x_i$ incondicionalmente convergente, por el Lema B.2, fijado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto F finito de $\mathbb{N}$ tal que para cualquier F' disjunto de F que verifica

$$\|\sum_{i\in F'} x_i\| < \varepsilon$$

Sea $n_0 > \max F$, dados $n, m > n_0$, se tiene que $\{i \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = 1, m > i > n\} \cap F = \emptyset$ y $\{i \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = -1, m > i > n\} \cap F = \emptyset$, por tanto:

$$\|\sum_{i=n}^{m} \varepsilon_i x_i\| \leq \|\sum_{n\leq i\leq m, \varepsilon_i=1} x_i\|\|\sum_{n\leq i\leq m, \varepsilon_i=-1} -x_i\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y por tanto la serie converge.

"$\Longleftarrow$"

Suponiendo que $\sum x_i$ no es incondicionalmente de Cauchy, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ finito F existe otro conjunto finito F' disjunto de F que verifica

$$\|\sum_{i\in F'} x_i\| > \varepsilon$$

En particular, si se toma $F^* = \{1\}$ finito, existe F_1 disjunto tal que $\|\sum_{i\in F_1} x_i\| > \varepsilon$. Si ahora se toma $F^* = \{1, \ldots, \max F_1\}$ finito se tiene que existe un F_2 disjunto de F^* verificando que

$$\|\sum_{i\in F_2} x_i\| > \varepsilon$$

y que $\min F_2 > \max F_1$.

Por recurrencia se definen todos los F_k con k natural de forma que $\|\sum_{i\in F_k} x_i\| > \varepsilon$ y que $\min F_{k+1} > \max F_k$.

Se definen ahora los conjuntos $E_k = \{\min F_k, \ldots, \max F_k\}$ para todo k natural y los valores v_i como

- $v_i = 1$ si $i \in \bigcup F_k$

- $v_i = -1$ si $i \notin \bigcup F_k$.

De esta forma,

$$\Big\| \sum_{i\in E_k} x_i \Big\| + \Big\| \sum_{i\in E_k} v_i x_i \Big\| \geq \Big\| \sum_{i\in E_k} x_i + \sum_{i\in E_k} v_i x_i \Big\| = \Big\| \sum_{i\in F_k} x_i \Big\| > 2\varepsilon$$

Por tanto, o bien $\| \sum_{i\in E_k} x_i \| > \varepsilon$, y en ese caso se tomará $\varepsilon_i = 1$ para todo $i \in E_k$, o bien $\| \sum_{i\in E_k} v_i x_i \| > \varepsilon$, y en ese caso $\varepsilon_i = v_i$ para todo $i \in E_k$. En cualquier caso, se asegura que

$$\Big\| \sum_{i\in E_k} \varepsilon_i x_i \Big\| \geq \varepsilon$$

y por tanto la serie no es de Cauchy, pues para todo N natural existe un k natural de forma que $p = \text{mín}\, F_k, q = \text{máx}\, F_k > N$:

$$\Big\| \sum_{i=p}^{q} \varepsilon_i x_i \Big\| = \Big\| \sum_{i\in E_k} \varepsilon_i x_i \Big\| > \varepsilon.$$

□

Lema B.4. *Una serie $\sum x_i$ es incondicionalmente convergente si y solo si $\sum x_{n_i}$ es convergente para cualquier sucesión creciente $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Por ser incondicionalmente convergente (y por tanto incondicionalmente de Cauchy) existe F conjunto finito de $\mathbb{N}$ tal que para cualquier F' conjunto finito disjunto se tiene que

$$\Big\| \sum_{i\in F'} x_i \Big\| < \varepsilon.$$

En particular, si $p, q > \text{máx}\, F$, entonces $n_p, n_q > \text{máx}\, F$ y

$$\Big\| \sum_{i\in=p}^{q} x_{n_i} \Big\| < \varepsilon.$$

Por tanto la serie es de Cauchy, ergo convergente.

"$\Longleftarrow$"

Viendo el contrarrecíproco, supongamos que la serie no es incondicionalmente de Cauchy, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una sucesión de conjuntos finitos F_k de $\mathbb{N}$ tal que $\text{máx}\, F_k < \text{mín}\, F_{k+1}$ y

$$\Big\| \sum_{i\in F_k} x_i \Big\| \geq \varepsilon.$$

Tomando por $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup F_k$, se tiene que, para cualquier N natural existe un k tal que

$\text{mín}\, F_k, \text{máx}\, F_k > N$:

$$\|\sum_{i=\text{mín}\, F_k}^{\text{máx}\, F_k} x_{n_i}\| \geq \varepsilon$$

y por tanto la serie no es de Cauchy.

$\square$

Lema B.5. *Denotando por X al espacio c_0 o ℓ_p con $p \in [1, \infty)$ tenemos que*

$$X \oplus X \simeq X$$

Demostración. Primero hay que dotar al espacio suma de la norma producto:

$$\|x + y\| = \|x\|_X + \|y\|_X \quad \text{donde } \ x, y \in X$$

Para probar el isomorfismo veamos que la aplicación $T\colon X \oplus X \to X$ definida como

$$T((x_n)_n, (y_n)_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$$

es un isomorfismo. Por completitud, la expresión general sería

$$T((x_n)_n, (y_n)_n) = (z_m)_m \quad \text{donde } \ z_m = \begin{cases} x_n, & m = 2n \\ y_n, & m = 2n + 1 \end{cases}$$

La linealidad es fácil de probar:

dados dos elementos $((x_n)_n, (y_n)_n), ((a_n)_n, (b_n)_n) \in X \oplus X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda((x_n)_n, (y_n)_n) + ((a_n)_n, (b_n)_n)) = T(((\lambda x_n + a_n)_n, (\lambda y_n + b_n)_n)) = (z_m)_m$$

donde, para todo m natural

$$z_m = \begin{cases} \lambda x_n + a_n, & m = 2n \\ \lambda y_n + b_n, & m = 2n + 1 \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\lambda T(((x_n)_n, (y_n)_n)) = \lambda(z^1_m)_m \quad \text{donde } \ z^1_m = \begin{cases} x_n, & m = 2n \\ y_n, & m = 2n + 1 \end{cases}$$

$$T(((a_n)_n, (b_n)_n)) = (z^2_m)_m \quad \text{donde } \ z^2_m = \begin{cases} a_n, & m = 2n \\ b_n, & m = 2n + 1 \end{cases}$$

Resulta por tanto evidente que

$$T(\lambda((x_n)_n, (y_n)_n) + ((a_n)_n, (b_n)_n)) = \lambda T(((x_n)_n, (y_n)_n)) + T(((a_n)_n, (b_n)_n))$$

La biyectividad es sencilla, Para toda sucesión de X su preimagen es coger las subsucesiones de índices pares e índices impares, por tanto T es sobreyectiva (dichas subsucesiones están en X de forma trivial). La inyectividad es trivial.

Por último, la continuidad.

Dado un elemento $((x_n)_n, (y_n)_n) \in X \oplus X$,

- Para el caso de $X = c_0$,

$$\begin{aligned}\|T(((x_n)_n, (y_n)_n))\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|, |y_n|\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \\ &= \|(x_n)_n\|_\infty + \|(y_n)_n\|_\infty = \|((x_n)_n, (y_n)_n)\|\end{aligned}$$

- Para el caso de ℓ_p

$$\begin{aligned}\|T(((x_n)_n, (y_n)_n))\|_p &= \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + |y_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p \\ &= \|((x_n)_n, (y_n)_n)\|\end{aligned}$$

y por tanto se da que T es continua, demostrándose que T es un isomorfismo. $\square$

Teoremas fundamentales del Análisis funcional

Teorema B.6 (de la aplicación abierta). *[13, pág. 35]*

Dados X, Y dos espacios de Banach y $f : X \to Y$ un operador lineal continuo y sobreyectivo, entonces f es una aplicación abierta.

Teorema B.7 (del grafo cerrado). *[13, pág. 37]*

Sean X, Y dos espacios de Banach y $T \colon X \to Y$ un operador lineal. Si para toda sucesión $(x_n)_n$ de X tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ se verifica que, si $T(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$ entonces $y = T(x)$, entonces T es un operador continuo.

Teorema B.8 (de extensión de Hahn-Banach). *Dados X espacio normado, Y espacio de Banach y M un subespacio denso en X. Si $T_0 \colon M \to Y$ es un operador lineal continuo entonces existe un único $T : X \to Y$ operador lineal acotado que verifica*

(i) $T|_M = T_0$
(ii) $\|T\| = \|T_0\|$

Teorema B.9 (de extensión de Hahn-Banach aplicado a funcionales). *Sea X un espacio normado e Y un subespacio de X. Si $f_0 \in Y^*$, entonces existe un $f \in X^*$ tal que*

(i) $\|f_0\| = \|f\|$
(ii) $f|_Y = f_0$

Lema B.10 (de Riesz de elementos casi ortogonales). *[5, pág. 2]*

Dado un espacio normado X y un subespacio Y no denso en X entonces para todo $r \in (0, 1)$ existe un cierto $x \in X$ con $\|x\| = 1$ de forma que

$$d(x, Y) \geq r$$

Teorema B.11 (Principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus). *[13, pág. 32]*

Dados X, Y espacios normados y $\mathcal{F}$ una familia de operadores lineales de X a Y. Si $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\|$ para todo $x \in X$, entonces $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$.