



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La ecuación de Liénard

María Pérez Armesto

2023-2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

LA ECUACIÓN DE LIÉNARD

María Pérez Armesto

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: La ecuación de Liénard
Breve descripción del contenido
<p>La ecuación de Liénard es una ecuación diferencial de segundo orden con aplicaciones a sistemas mecánicos con rozamiento y a circuitos oscilantes.</p> <p>A través de un cambio de variable apropiado, la ecuación se transforma en un sistema de primer orden bidimensional, llamado sistema de Liénard. En 1928, Liénard obtuvo condiciones suficientes sobre las funciones coeficiente para que el sistema plano tenga un ciclo límite estable [7], es decir, para que exista una única órbita periódica, de manera que las órbitas próximas se acerquen a ella cuando el tiempo tiende a infinito.</p> <p>En este trabajo, se realizará un análisis cualitativo de las soluciones a algunos sistemas de segundo orden asociados a la ecuación de Liénard, estudiando en particular el teorema debido a Liénard mencionado.</p>

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Conceptos previos	1
1.1. Estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias	5
1.2. Nociones de cálculo vectorial	8
1.3. Ciclos límite	9
2. La ecuación de Liénard	13
2.1. Lemas previos al Teorema de Liénard	16
2.2. El Teorema de Liénard	18
3. Ejemplos	25
3.1. El oscilador de Van der Pol	25
3.2. El modelo del latido del corazón de Zeeman	29
4. Modificaciones y generalizaciones de la ecuación de Liénard	35
4.1. Término no lineal respecto a x'	36
4.2. Término de rozamiento no lineal dependiendo de x y x'	45
I. Código empleado para generar los planos de fases	53

Bibliografía

57

Resumen

La ecuación de Liénard generaliza la ecuación del oscilador armónico lineal y permite modelar de manera adecuada algunos sistemas de ecuaciones diferenciales planos donde existe un movimiento periódico. En este trabajo, tras dar unas nociones previas sobre análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales, estudiaremos el Teorema de Liénard, que garantiza la existencia y unicidad de ciclo límite para ciertos sistemas asociados a la ecuación de Liénard. Además, expondremos en profundidad dos ejemplos, correspondientes al área de la electrónica (el oscilador de Van der Pol) y a la biología (el modelo del latido del corazón de Zeeman), que siguen esta estructura. Finalmente, daremos otros dos resultados teóricos de aplicación para otras ecuaciones que resultan de generalizar, aún más, la ecuación de Liénard introduciendo coeficientes no lineales que combinan tanto la variable dependiente y su derivada, con sus respectivos ejemplos.

Abstract

Liénard's equation generalizes the linear harmonic oscillator equation allows for the adequate modeling of certain planar differential equation systems where periodic motion exists. In this work, after providing some preliminary notions on the qualitative analysis of differential equations, we will study Liénard's Theorem, which guarantees the existence and uniqueness of a limit cycle for certain systems associated with Liénard's equation. Additionally, we will explore in depth two examples, corresponding to the fields of electronics (the Van der Pol oscillator) and biology (the Zeeman heart model), which follow this structure. Finally, we will present two other theoretical results applicable to other equations that further generalize the Liénard equation by introducing nonlinear coefficients that combine both the dependent variable and its derivative, along with their respective examples.

Introducción

Alfred-Marie Liénard (1869-1958) fue un físico francés que estudió fenómenos relacionados con la electricidad, la mecánica y el magnetismo, así como la elasticidad y la termodinámica [6]. Entre 1895 y 1908, fue profesor en la Escuela Superior de Minas de Saint-Étienne y, posteriormente, en la Escuela Nacional Superior de Minas de París, entre 1908 y 1936, donde fue catedrático de Electricidad Industrial. Fue subdirector de dicha escuela desde 1918 hasta 1929 y director de la misma desde 1929 hasta su jubilación en 1936. Presidió la Sociedad Matemática de Francia durante 1933.

Solo dos de sus obras estuvieron relacionadas estrictamente con las matemáticas. En la primera, “*Sur le signe de la partie réelle des racines d’une equation algébrique*”, estableció junto a Henri Chipart un criterio para determinar cuándo la parte real de las raíces de una ecuación algebraica es negativa, con interés en problemas relacionados con la radioelectricidad. La segunda sería “*Etude des oscillations entretenues*” [7], en la cual Liénard estudia la ecuación a la que da nombre y que estudiaremos en profundidad en este trabajo. La ecuación de Liénard modela sistemas oscilatorios con un carácter no lineal y tuvo especial interés en el desarrollo de la radio.

Un teorema clásico para estudiar el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos es el Teorema de Poincaré-Bendixson, que permite determinar la *existencia* de ciclos límite. Liénard se propuso, por otra parte, determinar con exactitud *el número* de ciclos límite para sistemas “autosostenidos” (es decir, aquellos que, sin la acción de una fuerza externa, oscilan de manera periódica). En el artículo [7], se prueba la unicidad de solución periódica en un caso muy general.

Este trabajo consta de 4 capítulos. Empezaremos en el Capítulo 1 recordando algunas nociones básicas sobre ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial y análisis cualitativo del comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos, necesarias para tratar con la ecuación de Liénard. Aquellos resultados auxiliares que hayan sido tratados en profundidad a lo largo del Grado de Matemáticas se enunciarán sin demostración.

A lo largo del Capítulo 2, estudiaremos la ecuación de Liénard. Daremos una demostración del Teorema de Liénard, que nos permite determinar la existencia y unicidad de ciclo límite, garantizando su estabilidad asintótica. Daremos, también, un corolario que nos permite concluir,

de nuevo, existencia y unicidad, pero esta vez garantizando inestabilidad.

En el Capítulo 3, trataremos casos particulares de la ecuación de Liénard. Un ejemplo clásico es el de la ecuación de Van der Pol, que modela circuitos eléctricos con un comportamiento no lineal [3]. Por otra parte, experimentalmente, se ha comprobado que el movimiento del latido del corazón se puede modelar de manera muy similar a un circuito eléctrico. Es por ello que otro ejemplo de sistema dinámico que sigue una ecuación de Liénard es el modelo de Zeeman [15].

Finalmente, motivados por la ecuación de Liénard, estudiaremos en el Capítulo 4 otras ecuaciones que la generalizan. La primera de las extensiones considera términos no lineales en la derivada de la variable dependiente. Para ella, daremos un resultado teórico que nos garantiza, en caso de existencia de ciclo límite, su unicidad y estabilidad. La segunda generalización incluye un coeficiente no lineal dependiente tanto de la variable dependiente como de su derivada. Para esta nueva ecuación, otro teorema nos garantiza la existencia de al menos un ciclo límite estable. Estos resultados se acompañan de su demostración y sus correspondientes ejemplos ilustrativos.

Añadimos, además, un Anexo en el que se expone cómo se han generado los diversos planos de fases incluidos en este trabajo utilizando código MATLAB [11] y el paquete `TikZ` de `LATEX`.

Capítulo 1

Conceptos previos

A lo largo de este capítulo, recordaremos nociones relativas a la existencia y unicidad de solución, órbitas y estabilidad. Para recopilar estos conceptos, estudiados en profundidad en la materia *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, hemos consultado [1, 10], entre otros.

Consideramos la *variable independiente* $t \in \mathbb{R}$ que se mueve en el espacio temporal y la *variable dependiente* $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ que representa una magnitud física (distancia, intensidad de corriente eléctrica...). Utilizaremos indistintamente la notación de Leibnitz y de Lagrange para denotar el *operador diferencial de orden* $m \in \mathbb{N}$ *respecto a* t , siendo estas $\frac{d^m}{dt^m}(\cdot)$ y $(\cdot)^m$, respectivamente.

Definición 1.1. Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase uno. Una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden escrita en forma normal** es una ecuación de la forma

$$x' = f(t, x). \quad (1.1)$$

Decimos que la ecuación es **autónoma** si la función f es independiente del tiempo.

Definición 1.2. Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Una **ecuación diferencial escalar de orden** $m \in \mathbb{N}$ **escrita en forma normal** es una ecuación de la forma

$$x^{(m)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}). \quad (1.2)$$

Es posible transformar la ecuación (1.2) en un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden como sigue: si introducimos las variables $z_i := x^{(i-1)}$ con $i = 1, \dots, m$, entonces

$$\begin{cases} z_1' &= z_2, \\ &\vdots \\ z_{m-1}' &= z_m, \\ z_m' &= f(t, z_1, \dots, z_m). \end{cases}$$

Si definimos el vector $z := (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ y la función \hat{f} mediante

$$\begin{aligned} \hat{f}: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, z_1, \dots, z_m) &\longrightarrow \hat{f}(t, z_1, \dots, z_m) := (z_2, \dots, z_m, f(t, z_1, \dots, z_m)), \end{aligned}$$

la ecuación (1.2) se reduce a la ecuación diferencial de primer orden $z' = \hat{f}(t, z)$. Por tanto, los resultados con los que trabajaremos estarán enunciados para una ecuación diferencial de la forma (1.1).

Definición 1.3. Una **solución** de la ecuación diferencial (1.1) es una aplicación $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dominio el intervalo I que cumple

1. $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$.
2. Existe $\varphi'(t)$ para todo $t \in I$.
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Decimos que la solución **pasa por x_0 en tiempo t_0** si $\varphi(t_0) = x_0$. Si no se especifica t_0 , asumimos que $t_0 = 0$. Decimos que la solución φ es **maximal**, definida en el **intervalo maximal I** , si no admite una prolongación propia, es decir, si no existe otra solución ϕ definida en un intervalo J tal que $I \subsetneq J$, de modo que $\phi(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Al trabajar con ecuaciones autónomas, denotaremos por $\varphi_{x_0}(t)$ o $\varphi(t; x_0)$ a la solución maximal de (1.1) pasando por x_0 y por I_{x_0} a su intervalo de definición.

Definición 1.4. Dada la ecuación diferencial (1.1) y dado un punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, llamamos **problema de valor inicial** a la búsqueda de solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

En general, no todo problema de valor inicial tiene solución. El siguiente teorema, al que se conoce como Teorema de Picard-Lipschitz o Teorema de Picard-Lindelöf, garantiza, bajo ciertas condiciones para la función f , la existencia y unicidad de solución para el problema anterior. Definimos antes la siguiente propiedad, que será condición del teorema:

Definición 1.5. Decimos que una función $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **localmente lipschitziana** respecto a x en Ω si existe $L \geq 0$ constante real tal que, para todo punto (t_0, x_0) de Ω , existe U entorno de (t_0, x_0) cumpliendo

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

Teorema 1.6 (Teorema de existencia y unicidad). *Sea la ecuación diferencial (1.1). Si Ω es abierto, f continua en Ω y localmente lipschitziana respecto a x en Ω , entonces para cada condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única solución del problema de valor inicial asociado a (1.1).*

Observación 1.7. Si la función f posee derivada parcial respecto a x continua, entonces, como consecuencia del teorema de los incrementos finitos, f es localmente lipschitziana respecto a x .

Observación 1.8. En condiciones de existencia y unicidad, una solución φ es maximal si, en los extremos del intervalo maximal, toca a un punto de la frontera de Ω o bien diverge hacia infinito.

Observación 1.9. Además del anterior, existe un teorema (conocido como Teorema de Cauchy-Peano) que garantiza simplemente la existencia de solución para el problema de valor inicial bajo la condición de continuidad de f en el abierto Ω .

En lo que sigue, trabajaremos con la ecuación diferencial autónoma

$$x' = f(x), \quad f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Definición 1.10. Dada la ecuación diferencial (1.3), llamamos **órbita** de x_0 al conjunto

$$\gamma_{x_0} := \{\varphi(t; x_0), t \in I_{x_0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Llamaremos **semi-órbita positiva** y **semi-órbita negativa** de x_0 a los conjuntos

$$\begin{aligned} \gamma_{x_0}^+ &:= \{\varphi(t; x_0), t \in I_{x_0} \cap [0, +\infty)\} \subset \mathbb{R}^n, \\ \gamma_{x_0}^- &:= \{\varphi(t; x_0), t \in I_{x_0} \cap (-\infty, 0]\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

respectivamente. Notemos que, en condiciones de existencia y unicidad, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_{x_0}$ y, por tanto, las semi-órbitas positiva y negativa son no vacías.

Nota 1.11. Las soluciones periódicas corresponden a órbitas cerradas y viceversa. Cometeremos abusos de lenguaje y nos referiremos a ellas indistintamente como órbitas cerradas o periódicas.

Definición 1.12. En las condiciones del teorema de existencia y unicidad, llamamos **retrato de fases** asociado a la ecuación (1.3) a la unión disjunta de todas las órbitas orientadas que pasan por los puntos de Ω . Nos referiremos como **campo de vectores** a la función que asigna a cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ el vector $f(x_0)$, que indica la dirección y sentido en la que se mueve γ_{x_0} .

En general, trabajaremos con sistemas de dos ecuaciones diferenciales autónomas, de manera que las órbitas están contenidas en \mathbb{R}^2 y se pueden representar en un plano de fases. Por ser el sistema autónomo, cambiar el instante inicial cambia la solución, pero no la órbita. En efecto, si $\phi(t_0) = x_0$ y $\phi'(t) = f(\phi(t))$ para todo t , entonces $\varphi(t) := \phi(t + t_0)$ verifica:

$$\varphi(0) = \phi(t_0) = x_0 \quad \text{y} \quad \varphi'(t) = \phi'(t + t_0) \cdot 1 = f(\phi(t + t_0)) = f(\varphi(t)).$$

A continuación, daremos unas nociones sobre conjuntos límite de las órbitas. Para recopilar estos resultados, estudiados en profundidad en la materia optativa *Ecuaciones Diferenciales*, hemos consultado [3, 9], entre otros.

Definición 1.13. Sea x_0 un punto de Ω . Si el intervalo de definición de la solución maximal asociada $\varphi(t; x_0)$ es de la forma $I_{x_0} = (a, \infty)$, con $a \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$, definimos el **conjunto ω -límite** de x_0 como

$$\omega(x_0) := \left\{ x \in \Omega \mid \exists \{t_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty : \varphi(t_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\}.$$

Si dicho intervalo es de la forma $I_{x_0} = (-\infty, b)$, con $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, definimos el **conjunto α -límite** de x_0 como

$$\alpha(x_0) := \left\{ x \in \Omega \mid \exists \{t_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty : \varphi(t_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\}.$$

Observación 1.14. Veamos que los conjuntos α -límite y ω -límite poseen las mismas propiedades dinámicas: si x es solución de la ecuación (1.3) pasando por x_0 , $y(t) := x(-t)$ cumplirá

$$y'(t) = -x'(-t) = -f(x(-t)) = -f(y(t)), \quad y(0) = x(0) = x_0.$$

Por tanto, el conjunto ω -límite de x_0 asociado al campo f coincide con el conjunto α -límite de x_0 asociado al campo $-f$. Los resultados que introduzcamos para el conjunto ω -límite serán, así, aplicables al conjunto α -límite.

Proposición 1.15. *Consideremos una ecuación diferencial autónoma y p un punto del dominio tal que su solución maximal tiene intervalo de definición $I_p = (a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$. Si p es un punto singular o γ_p es una órbita periódica, entonces $\omega(p) = \gamma_p$. Si $q \in \gamma_p$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$.*

Esto permite definir el *conjunto ω -límite de una órbita* como el conjunto ω -límite de cualquiera de sus puntos. Lo denotamos, de igual manera, por $\omega(\gamma)$.

Definición 1.16. Decimos que un conjunto K es **positivamente invariante** si $\gamma_p^+ \subset K$ para todo punto $p \in K$. Decimos que es **negativamente invariante** si $\gamma_p^- \subset K$ para todo $p \in K$. Decimos que es **invariante** si es positivamente y negativamente invariante.

Proposición 1.17. *Consideremos una ecuación diferencial autónoma y p un punto del dominio tal que la solución maximal correspondiente posee como intervalo de definición $I_p = (a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$. El conjunto $\omega(p)$ es invariante. Si, además, γ_p^+ está contenida en un conjunto acotado, entonces $\omega(p) \neq \emptyset$. Finalmente, si γ_p^+ está contenida en un conjunto compacto, entonces $\omega(p)$ es un conjunto compacto y conexo.*

A continuación, presentamos el Teorema de Poincaré-Bendixson, un resultado esencial para el estudio del retrato de fases de las ecuaciones no lineales. Su demostración, tratada en profundidad en la materia optativa *Ecuaciones Diferenciales*, se puede consultar en [9, pág. 230].

Teorema 1.18 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Sea la ecuación diferencial (1.3) y consideremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto y que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ es una función que posee un número finito de raíces en Ω . Dada una órbita γ asociada al sistema con $\omega(\gamma) \neq \emptyset$, tenemos que o bien $\omega(\gamma)$ es un punto singular, o bien una órbita periódica, o bien la unión de órbitas regulares conectando singularidades.*

Corolario 1.19. *En las condiciones del Teorema de Poincaré-Bendixson, si γ es una órbita cerrada del sistema plano asociado a la ecuación (1.3), entonces existe una singularidad x_0 en la región del plano que encierra la curva (a la que nos referimos como interior de γ).*

De estos resultados, se puede deducir el Teorema de la Región Anular de Poincaré, cuya demostración se puede consultar en [14]. Antes de enunciarlo, daremos unas definiciones previas.

Definición 1.20. Llamamos **ciclo límite** a una órbita periódica aislada. Decimos que es **internamente** o **externamente estable** si atrae a todas las órbitas que encierra en su interior, o que están en su exterior, respectivamente. Decimos que es **semiestable** si no es estable pero sí internamente o externamente estable. Se definen, análogamente, las nociones de ciclo límite (internamente/externamente) inestable.

Teorema 1.21 (Teorema de la Región Anular de Poincaré). *Consideremos la ecuación diferencial (1.3) y supongamos que existe $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una región anular que no encierra singularidades del sistema. Si Ω es positivamente (negativamente) invariante, entonces existen al menos un ciclo límite internamente estable (inestable) y otro externamente estable (inestable), que pueden coincidir en un ciclo límite estable (inestable).*

1.1. Estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias

Introducimos, ahora, los conceptos de solución estable, asintóticamente estable e inestable, junto con métodos para determinar la estabilidad de las singularidades, estudiados en la materia *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Hemos consultado, para esta sección, [3, 4, 9], entre otros.

Definición 1.22. Sea $x_0 \in \Omega$. Diremos que x_0 es un **punto singular** de la ecuación autónoma (1.3) si $f(x_0) = 0$ y que es un **punto regular** en otro caso.

Definición 1.23. Una solución φ de la ecuación (1.3) se dice **estable (en el sentido de Lyapunov)** si las soluciones que pasan por puntos próximos a $\varphi(0)$ permanecen próximas a φ en todo instante t , es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $\|\varphi(0) - x_0\|_\infty \leq \delta$, entonces φ_{x_0} está definida para todo $t \geq 0$ y

$$\|\varphi(t) - \varphi_{x_0}(t)\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Decimos que φ es **inestable** si no es estable. Decimos que φ es **asintóticamente estable (en el sentido de Lyapunov)** si, además de ser estable, podemos escoger $\eta > 0$ tal que

$$\|\varphi(0) - x_0\|_\infty \leq \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

Si se puede tomar cualquier valor de η , hablamos de estabilidad asintótica **global**.

Observación 1.24. La órbita de una singularidad es el conjunto unitario formado por ella misma. Cometeremos un abuso de lenguaje y hablaremos de singularidades estables, asintóticamente estables o inestables. También cometeremos un abuso de lenguaje y nos referiremos, en ocasiones, a órbitas estables, asintóticamente estables o inestables (en vez de a sus soluciones).

Métodos para determinar la estabilidad de las singularidades

Existen varios métodos para determinar la estabilidad e inestabilidad de un punto singular. El más sencillo es el método de la Primera Aproximación, que nos aporta condiciones suficientes para asegurar la estabilidad o inestabilidad mediante el estudio de los autovalores de la matriz jacobiana del campo evaluada en tal singularidad. La demostración del siguiente resultado se puede consultar, por ejemplo, en [9].

Teorema 1.25 (Método de la Primera Aproximación). *Sea la ecuación diferencial $x' = f(x)$ con $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable en un conjunto abierto Ω y tal que $f(0) = 0$. Si todos los autovalores de la matriz jacobiana de f en el origen poseen parte real negativa, entonces el origen es una singularidad asintóticamente estable. Si al menos uno de los autovalores posee parte real positiva, entonces el origen es una singularidad inestable.*

Observación 1.26. Si todos los autovalores poseen parte real nula, el método de linealización no decide sobre la estabilidad de la singularidad.

Otro método para determinar la estabilidad de una singularidad es el método de Lyapunov, desarrollado por el matemático ruso Aleksandr Lyapunov en su tesis doctoral, de 1892. Las demostraciones correspondientes se pueden encontrar en [4, 9, 10], entre otros.

Definición 1.27. Sea x_0 un punto singular de la ecuación diferencial (1.3) y sea $V: A \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con A abierto, $x_0 \in A$. Definimos la **derivada orbital** de la función V en el punto $x \in A$ como

$$V^*(x) := \langle \nabla V(x), f(x) \rangle,$$

donde $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)$ es el vector gradiente de V en el punto $x \in A$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.28. Sea x_0 un punto singular de la ecuación diferencial (1.3). Llamamos **función de Lyapunov** a una función diferenciable $V: A \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con A abierto, $x_0 \in A$, que satisface, por un lado, que $V(x_0) = 0$ y $V(x) > 0$ para los x de A distintos de la singularidad y, por otro,

$$V^* \leq 0 \quad \text{en} \quad A \setminus \{x_0\}.$$

Decimos que V es una **función de Lyapunov estricta** si $V^* < 0$ en $A \setminus \{x_0\}$.

Teorema 1.29 (Teorema de Lyapunov). *Sea x_0 un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (1.3). Si existe una función de Lyapunov $V: A \rightarrow \mathbb{R}$, entonces x_0 es una singularidad estable. Si V es una función de Lyapunov estricta, entonces x_0 es asintóticamente estable.*

Observación 1.30 (Interpretación geométrica del teorema de Lyapunov). Haciendo uso de la regla de la cadena, podemos escribir

$$V^*(x) := \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = DV(x)f(\varphi_x(0)) = DV(x)\varphi'_x(0) = \frac{d}{dt}(V \circ \varphi_x)(0).$$

Así, si la derivada orbital es negativa, entonces V es decreciente a lo largo de la curva solución que pasa por x en un entorno del punto. Para $n = 2$, tenemos la siguiente interpretación geométrica: consideremos la curva de nivel $C_r = \{x \in \mathbb{R}^2: V(x) = r\}$, $r > 0$. Sabemos que el vector gradiente $\nabla V(x)$ es perpendicular a C_r y apunta hacia la dirección de máximo crecimiento de la función V . Además,

$$V^*(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle = \|\nabla V(x)\|_2 \|f(x)\|_2 \cos \angle(\nabla V(x), f(x)),$$

donde $\angle(\nabla V(x), f(x))$ denota el ángulo comprendido entre ambos vectores. Así, el signo de $V^*(x)$ nos indica cómo se mueve el campo: si es positivo, entonces $\angle(\nabla V(x), f(x)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y el campo cruza C_r , en el punto x , en el mismo sentido que $\nabla V(x)$; si es negativo, al revés. Si fuese cero, entonces $\angle(\nabla V(x), f(x)) = \pm\frac{\pi}{2}$ y el campo sería tangente a la curva en el punto x . Si fuese cero a lo largo de toda la curva C_r , entonces C_r estaría compuesto por órbitas del sistema. Ilustramos, en la Figura 1.1, la correspondiente representación gráfica.

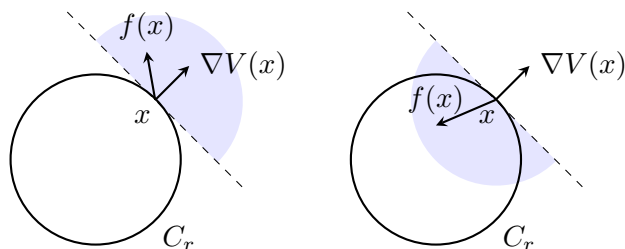


Figura 1.1: Interpretación geométrica del método de Lyapunov. A la izquierda, el caso $V^*(x) > 0$ y, a la derecha, $V^*(x) < 0$. En el primer caso, el campo es saliente del interior de C_r y, en el segundo, entrante.

1.2. Nociones de cálculo vectorial

Otros resultados útiles para determinar la existencia de ciclos límite o su estabilidad requieren de nociones de cálculo vectorial. En esta sección, recopilamos todos estos resultados, consultados en [8] y estudiados en profundidad en la materia *Cálculo Vectorial e Integración de Lebesgue*. Escribimos las definiciones para \mathbb{R}^2 , por ser el espacio en el que trabajamos.

Teorema 1.31 (Teorema del cambio de variable para funciones reales). *Dadas dos funciones f , continua, y φ de clase 1 en un intervalo $[a, b]$, se satisface que*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Definición 1.32. Llamamos **curva** a una aplicación continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. También llamamos curva a su imagen, $\Gamma = \text{Im } \gamma$. Decimos, además, que γ es una **parametrización** de Γ .

Definición 1.33. Sea $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ una biyección. Llamamos **reparametrización** de γ a la aplicación continua $\hat{\gamma} = \gamma \circ h$, que también cumple que $\Gamma = \text{Im } \hat{\gamma}$. Decimos que Γ está **parametrizada por longitud de arco** si la parametrización escogida, γ , es de clase 1 y satisface $\|\gamma'(t)\| = 1$ para todo t , donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.34. Sea $\gamma = (x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase uno y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar que satisface que $f \circ \gamma$ es continua en $[a, b]$. Definimos la **integral de f a lo largo de la curva γ** como

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Otra notación usual es $\int_{\gamma} f(x, y) ds$.

Definición 1.35. Sea $\gamma = (x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase uno y $F = (P, Q): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial que satisface que $F \circ \gamma$ es continua. Definimos la **integral de línea de F a lo largo de γ** como

$$\int_{\gamma} F \cdot ds := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Como tenemos que

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt,$$

es usual denotar a la integral de línea por $\int_{\gamma} P dx + Q dy$.

Observación 1.36. Si tomamos una reparametrización de γ orientada en el sentido contrario (esto es, si $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ es la biyección que transforma una parametrización en la otra, $h(a) = d$ y $h(b) = c$), entonces la integral de línea cambia de signo, por hacerlo la derivada de la parametrización. Consideramos la *orientación positiva* en el sentido antihorario.

Teorema 1.37 (Teorema de Green). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ una curva de clase 1 a trozos orientada positivamente. Si $F = (P, Q): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en un abierto que contiene a Ω , entonces*

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot ds = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

orientada $\partial\Omega$ positivamente.

1.3. Ciclos límite

Para completar este capítulo, emplearemos estas nociones de cálculo vectorial para dar condiciones necesarias para la existencia de ciclos límite, así como condiciones suficientes para determinar si tal ciclo límite es asintóticamente estable o inestable. Consideraremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales bidimensional autónomo:

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

Nos referiremos al campo $W(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y a su divergencia

$$\operatorname{div} W(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

El siguiente resultado, estudiado en la materia *Ecuaciones Diferenciales*, se deduce del Teorema 1.37 (Teorema de Green) y su demostración se puede consultar en [1, 3, 9].

Teorema 1.38 (Criterio negativo de Bendixson). *Supongamos que P y Q poseen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{R}^2$. El sistema anterior no posee órbitas cerradas en D si, en este dominio, la divergencia del campo $\operatorname{div} W$ no es idénticamente nula ni cambia de signo.*

Finalmente, vamos a demostrar una condición suficiente para garantizar la estabilidad (o inestabilidad) de una órbita cerrada del sistema (1.4). Hemos extraído este resultado de [14].

Teorema 1.39. *Sean P y Q dos funciones con derivadas de primer orden continuas. Si, en una órbita cerrada Γ del sistema bidimensional (1.4), con solución asociada $\gamma(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, tenemos que*

$$\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \right) dt < 0 \quad (> 0)$$

(donde $T > 0$ es el periodo de γ), entonces Γ es un ciclo límite estable (inestable).

Demostración. Supongamos que el sistema bidimensional posee una órbita cerrada Γ negativamente orientada, con solución asociada $\gamma(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ periódica de periodo $T > 0$. Podemos escribir $(x, y) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ para cada punto (x, y) de Γ .

Realizamos un cambio de variable a coordenadas curvilíneas (s, n) . El parámetro s mide la longitud de arco recorrida desde un punto de referencia de Γ en sentido horario, esto es,

$$s = \int_0^t \sqrt{\hat{x}(u)^2 + \hat{y}(u)^2} du.$$

Las coordenadas $(s, 0)$ representan a puntos de la órbita y existen φ y ψ funciones tales que $(x, y) = (\varphi(s), \psi(s))$ para cada punto (x, y) de Γ . Como la órbita es cerrada, φ y ψ son funciones periódicas. Para cada s , el parámetro n mide la distancia en la recta normal a Γ desde ese punto, tomando positivo el sentido exterior.

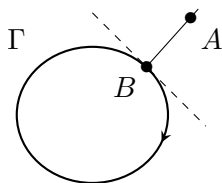


Figura 1.2: Representación gráfica de los puntos A , en un entorno de Γ , y B , punto de la órbita donde la recta normal a Γ en B pasa por A .

Para un punto A arbitrario en un entorno de Γ , existe un punto B en Γ tal que A está en la recta normal a Γ en B (ver Figura 1.2). Las coordenadas rectangulares de B se pueden escribir como $(\varphi(s), \psi(s))$. Las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares (x, y) de A con sus coordenadas curvilíneas (s, n) son

$$x = \varphi(s) - n\psi'(s), \quad y = \psi(s) + n\varphi'(s), \quad (1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} \Big|_B = P(B) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_B} = \frac{P(B)}{\sqrt{P(B)^2 + Q(B)^2}} = \frac{P(\varphi(s), \psi(s))}{\sqrt{P(\varphi(s), \psi(s))^2 + Q(\varphi(s), \psi(s))^2}}, \\ \psi'(s) &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \Big|_B = P(B) \frac{1}{\frac{ds}{dt} \Big|_B} = \frac{Q(B)}{\sqrt{P(B)^2 + Q(B)^2}} = \frac{Q(\varphi(s), \psi(s))}{\sqrt{P(\varphi(s), \psi(s))^2 + Q(\varphi(s), \psi(s))^2}}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que, en un entorno suficientemente pequeño de Γ , (1.5) es un cambio de coordenadas que preserve la orientación. En efecto, la matriz jacobiana de la transformación $(s, n) \rightarrow (x, y)$ posee determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \varphi'(s) - n\psi''(s) & -\psi'(s) \\ \psi'(s) + n\varphi''(s) & \varphi'(s) \end{vmatrix} &= (\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 + n(\psi'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\psi''(s)) \\ &= 1 + n(\psi'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\psi''(s)). \end{aligned}$$

Como las derivadas parciales de primer orden de P y Q son continuas, las derivadas φ' , φ'' , ψ' y ψ'' son continuas y, para $|n|$ suficientemente pequeño, la jacobiana posee determinante positivo. Notemos que, como estamos en una órbita cerrada, φ y ψ no pueden ser nulas a la vez (pues, en ese caso, estaríamos en una singularidad). Ahora, derivamos (1.5) respecto a s :

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s) - n\psi''(s) - \psi'(s) \frac{dn}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s) + n\varphi''(s) + \varphi'(s) \frac{dn}{ds}.$$

Teniendo en cuenta el sistema en coordenadas rectangulares (1.4), se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(s) + n\varphi''(s) + \frac{dn}{ds}\varphi'(s)}{\varphi'(s) - n\psi''(s) - \frac{dn}{ds}\psi'(s)} = \frac{Q(\varphi(s) - n\psi'(s), \psi(s) + n\varphi'(s))}{P(\varphi(s) - n\psi'(s), \psi(s) + n\varphi'(s))}.$$

Despejando, se tiene que

$$\frac{dn}{ds} = \frac{Q\varphi' - P\psi' - n(P\varphi'' + Q\psi'')}{P\varphi' + Q\psi'} =: F(s, n). \quad (1.6)$$

Utilizaremos (1.6) para estudiar la estabilidad de Γ . Como φ y ψ son periódicas, estamos ante una ecuación diferencial con coeficientes periódicos, con s variable independiente y n incógnita.

De las expresiones de φ' y ψ' , deducimos que $n = 0$ es solución de (1.6), correspondiente a Γ . Determinar el comportamiento asintótico de esta solución nos permitirá saber si las órbitas alrededor de Γ se acercan al ciclo límite (de manera que $n(s)$ disminuye) o si, por el contrario, se alejan. Para ello, trataremos de aplicar el Teorema 1.25 (Método de la Primera Aproximación). Consideramos, por tanto, la ecuación diferencial

$$\frac{dn}{ds} = \left(\frac{dF}{dn}(s, 0) \right) n.$$

Notemos que, como P y Q poseen derivadas parciales de primer orden continuas, F tendrá también derivada respecto a n continua.

Para aligerar la notación, escribimos $P_0 := P(B)$ y $Q_0 := Q(B)$, los valores de P y Q en el punto de Γ correspondiente a $n = 0$. Asimismo, denotamos a las derivadas parciales de P respecto a x o a y en B por P_{x0}, P_{y0} y, de forma análoga, para Q . Tenemos, tras aplicar la regla de la cadena y agrupar y simplificar los términos correspondientes, que

$$\begin{aligned} \varphi''(s) &= -\frac{Q_0}{(P_0^2 + Q_0^2)^2} [P_0^2 Q_{x0} + P_0 Q_0 (Q_{y0} - P_{x0}) - Q_0^2 P_{y0}], \\ \psi''(s) &= +\frac{P_0}{(P_0^2 + Q_0^2)^2} [P_0^2 Q_{x0} + P_0 Q_0 (Q_{y0} - P_{x0}) - Q_0^2 P_{y0}], \end{aligned}$$

obteniendo, así, que

$$P_0 \varphi'' + Q_0 \psi'' = 0.$$

Sustituimos en la definición de F , (1.6), los valores de φ' , φ'' , ψ' y ψ'' , de manera que

$$\frac{dF}{dn}(s, 0) = \frac{P_0^2 Q_{y0} - P_0 Q_0 (P_{y0} + Q_{x0}) + Q_0^2 P_{x0}}{\sqrt{(P_0^2 + Q_0^2)^3}} =: H(s).$$

La ecuación de aproximación lineal es, así,

$$\frac{dn}{ds} = H(s) n,$$

con solución $n(s) = n(0) \exp\{\int_0^s H(w) dw\}$. Si denotamos por $l > 0$ a la longitud de arco de la órbita, podemos afirmar que Γ será estable (o inestable) si

$$\int_0^l H(w) dw < 0 \quad (> 0).$$

En efecto, cuando es negativa, tendremos que $|n(l)| < |n(0)|$. Por tanto, la solución $n = 0$ del sistema linealizado es asintóticamente estable, lo cual implica que también lo será la solución del no linealizado.

Para concluir, solo queda demostrar que, deshaciendo el cambio de variable, la integral $\int_0^l H(w) dw$ se transforma en la integral del enunciado. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^l H(w) dw &= \int_0^T \frac{P_0^2 Q_{y0} - P_0 Q_0 (P_{y0} + Q_{x0}) + Q_0^2 P_{x0}}{P_0^2 + Q_0^2} dt \\ &= \int_0^T \left[Q_{y0} + P_{x0} - \frac{P_0^2 P_{x0} + Q_0^2 Q_{y0} + P_0 Q_0 (P_{y0} + Q_{x0})}{P_0^2 + Q_0^2} \right] dt \\ &= \int_0^T (P_{x0} + Q_{y0}) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{P_0^2 + Q_0^2} \frac{d(P_0^2 + Q_0^2)}{dt} dt = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt, \end{aligned}$$

luego podemos aplicar el mismo criterio con esta integral al estudio de la estabilidad de ciclo límite y finalizamos la demostración. \square

Observación 1.40. Del teorema anterior, se deduce que, si Γ es un ciclo límite semiestable, entonces la integral anterior es nula. Sin embargo, el recíproco no es cierto: al ser una condición suficiente no necesaria, si Γ es estable (o inestable), la igualdad también se puede dar.

Capítulo 2

La ecuación de Liénard

Cuando hablamos de *osciladores*, nos referimos a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales que modelan un movimiento periódico, como, por ejemplo, un sistema formado por una masa ligada a un resorte que, una vez estirado, se mueve para restaurar el equilibrio. Todos los osciladores lineales de segundo orden se pueden escribir, a través de cambios de variable adecuados, como:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad \beta, \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

El coeficiente de la primera derivada de u representa el factor de rozamiento. Sin embargo, no todos los movimientos oscilantes se pueden escribir como sistemas lineales. Es por ello que Liénard, en su artículo de 1928 [7], decide estudiar una versión más general de esta ecuación.

Definición 2.1. Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Se denomina **ecuación de Liénard** a la ecuación diferencial

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0. \quad (2.1)$$

Llamamos **sistema de Liénard** al sistema de ecuaciones bidimensional asociado a la ecuación de Liénard: si añadimos la variable $y := x'$, el sistema de Liénard se escribe como

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \quad (2.2)$$

En este caso, la función f representa una fuerza de rozamiento. Cuando f toma valores positivos, el sistema *se retrae* y, cuando f toma valores negativos (un “rozamiento negativo”), decimos que el sistema *se excita*. La función g es característica del sistema y representa la fuerza de restauración que el sistema ejerce para volver a la posición de equilibrio.

La ecuación de Liénard modela eventos físicos en los que, en general, se tiene una situación periódica o un movimiento oscilatorio, pero ahora ya no necesariamente lineal, como el bombeo de sangre del corazón o la caída y subida de tensión en un circuito eléctrico.

Ejemplo 2.2. La ecuación que describe el *movimiento de un péndulo*, esto es, un cuerpo suspendido por medio de una cuerda con masa despreciable que se mueve por acción de la fuerza gravitatoria, sigue la forma de una ecuación de Liénard:

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{g}{l} \operatorname{sen}(x) = 0,$$

siendo x el desplazamiento angular respecto a la posición de equilibrio, $b > 0$ una constante que caracteriza la resistencia del medio frente al movimiento, $m > 0$ la masa del cuerpo, $g > 0$ la constante de gravitación y $l > 0$ la longitud de la cuerda.

Ejemplo 2.3. En algunos textos, como [4], se refieren a la *ecuación de Liénard clásica* como

$$x'' + f(x)x' + x = 0.$$

Esta es la ecuación que estudia el propio Liénard en su artículo de 1928 [7], aunque posteriormente sus conclusiones se han podido generalizar a la ecuación (2.1).

Como sabemos, toda función continua admite primitivas que, en este caso, serán funciones de clase uno cuya derivada coincide con la función original. Por tanto, si la función f de la ecuación (2.1) es continua, podemos considerar una primitiva obtenida en la forma $F(x) := \int_0^x f(u)du$. Vamos a introducir la variable $y := x' + F(x)$, de manera que

$$y' = \frac{d}{dt} [x' + F(x)] = x'' + f(x)x' = -g(x),$$

obteniendo, así, el sistema equivalente a (2.2)

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x). \end{cases} \quad (2.2')$$

Las órbitas del sistema (2.2') son más fáciles de estudiar que las del sistema (2.2). Veamos, como se sugiere en el artículo [13], que la correspondencia

$$\Phi(x, y) := (x, y + F(x))$$

transforma órbitas del sistema en forma (2.2) en órbitas del sistema en forma (2.2'). Para ello, probaremos que (x, y) cumple (2.2) si, y solo si, $(x, z) := \Phi(x, y)$ cumple (2.2)':

- Empecemos por la implicación hacia la derecha. Supongamos que (x, y) cumple (2.2):

$$x' = y, \quad y' = -f(x)y - g(x).$$

Entonces (x, z) satisface las condiciones (2.2'). En efecto,

$$\begin{aligned} x' &= y = z - F(x), \\ z' &= [y + F(x)]' = y' + f(x)x' = -f(x)y - g(x) + f(x)y = -g(x). \end{aligned}$$

- Recíprocamente, supongamos que (x, z) cumple

$$x' = z - F(x), \quad z' = -g(x).$$

Así, (x, y) cumple las condiciones (2.2). En efecto,

$$\begin{aligned} x' &= z - F(x) = y + F(x) - F(x) = y, \\ y' &= [z - F(x)]' = z' - f(x)x' = -g(x) - f(x)y. \end{aligned}$$

Además, las órbitas cerradas de uno de los sistemas se corresponden con las del otro y viceversa pues, como tenemos que

$$\Phi(0, y) = (0, y + F(0)) = (0, y), \quad \Phi(x, 0) = (x, F(x)),$$

el eje Y queda invariante y el eje X se convierte en la curva $y = F(x)$. Dada una órbita del sistema en forma (2.2) que corte al eje Y , su equivalente en el sistema (2.2') sigue cortando al eje Y en los mismos puntos. Así, las órbitas son cualitativamente similares y también llamaremos sistema de Liénard al sistema en forma (2.2').

Ejemplo 2.4. Consideremos la ecuación diferencial $x'' + \left(\frac{3x^2}{4} - 1\right)x' + x = 0$, con sistemas asociados

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - \left(\frac{3x^2}{4} - 1\right)y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y - \left(\frac{x^3}{4} - x\right), \\ y' = -x, \end{cases}$$

en forma (2.2) y (2.2'), respectivamente. En este caso, $F(x) = \frac{x^3}{4} - x$ se anula en $x = 0$ y en $x = \pm 2$. Por tanto, $\Phi(\pm 2, 0) = (\pm 2, 0)$. En la Figura 2.1 quedan representadas las órbitas $\gamma_{(\pm 2, 0)}$ correspondientes a ambos sistemas.

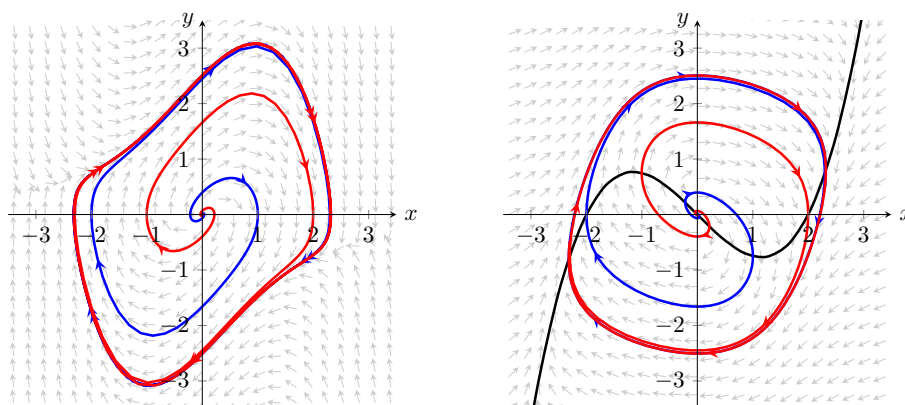


Figura 2.1: Campos de vectores y algunas órbitas asociadas a la ecuación diferencial $x'' + \left(\frac{3x^2}{4} - 1\right)x' + x = 0$. A la izquierda, en forma (2.2) y, a la derecha, en forma (2.2'). En ambos, la órbita roja corresponde a $\gamma_{(2,0)}$ y la azul, a $\gamma_{(-2,0)}$. La curva en negro de la segunda figura es la curva $y = F(x)$.

2.1. Lemas previos al Teorema de Liénard

El Teorema de Liénard, que enunciaremos más adelante, trata de determinar la existencia y unicidad de ciclo límite. Los siguientes lemas analizan el comportamiento del campo en las hipótesis del teorema y serán de ayuda para la demostración. Estas hipótesis vienen de generalizar el comportamiento de los osciladores lineales.

Hipótesis 2.5. Dada la ecuación de Liénard (2.1), suponemos que f , g y F cumplen:

- La función f es una función par (esto es, $f(x) = f(-x)$ para todo x) y g impar (es decir, $g(x) = -g(-x)$ para todo x), ambas continuamente diferenciables.
- La función g es positiva para todo x positivo, lo cual implica, por ser impar, que g se anula solo en $x = 0$.
- La función F , impar, tendrá una raíz positiva en $x = a$, será negativa en $(0, a)$, positiva y no decreciente en $(a, +\infty)$ y, además, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$.

Lema 2.6 (Simetría). *Consideremos la ecuación (2.1). Si se cumplen las Hipótesis 2.5, entonces las órbitas del sistema (tanto en forma (2.2) como en forma (2.2')) son simétricas por una reflexión respecto al origen.*

Demostración. Consideramos el sistema asociado en la forma (2.2'). Tenemos que ver que el sistema no cambia si reemplazamos (x, y) por $(-x, -y)$. Como las funciones F y g son impares,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x). \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y}} \left\{ \begin{array}{l} (-x)' = -x' = -y - F(-x) = -(y - F(x)), \\ (-y)' = -y' = -g(-x) = -(-g(x)). \end{array} \right.$$

Tenemos, por tanto, que las órbitas del sistema en forma (2.2') son simétricas a través de una reflexión respecto al origen. De manera análoga, se concluye para el sistema en forma (2.2). \square

Lema 2.7 (Análisis del campo de vectores y puntos singulares). *Si se cumplen las Hipótesis 2.5, entonces el origen es el único punto singular del sistema asociado a la ecuación (2.1). Además, x' sólo se anula en la curva $y = F(x)$ e y' sólo se anula en el eje de ordenadas.*

Demostración. Consideramos el sistema en forma (2.2'). Tenemos que:

- $x' = y - F(x)$ se anulará en la curva $y = F(x)$, será positiva en la región por encima de la curva y será negativa en la región por debajo de la curva.
- $y' = -g(x)$ se anulará en el eje de ordenadas, será positiva en el semiplano negativo de abscisas y negativa en el semiplano positivo.

Como g solo se anula en $x = 0$ y $F(0) = 0$, necesariamente el origen es el único punto singular. Representamos el campo de vectores para una función F cumpliendo las condiciones anteriores en la Figura 2.2.

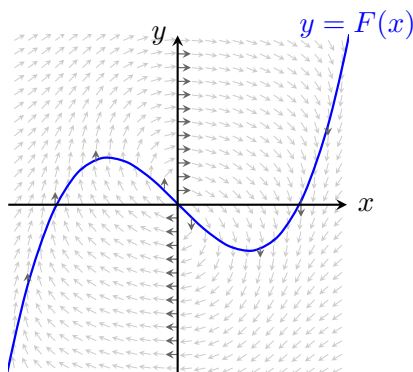


Figura 2.2: Campo de vectores asociado. En azul, la curva $y = F(x)$. En gris, el campo, estando más oscuros los completamente verticales u horizontales. \square

Lema 2.8. *Consideramos el sistema en forma (2.2'). Sea un punto $P = (x_P, y_P)$ en la curva $y = F(x)$. Si se cumplen las Hipótesis 2.5, γ_P cruza necesariamente el eje de ordenadas en dos puntos, uno con ordenada positiva y otro con ordenada negativa.*

Demostración. Consideremos $x_P > 0$. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que la solución maximal $\varphi_P(t) = (x(t), y(t))$ cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty.$$

Es decir, la órbita posee una asíntota vertical en el plano XY . Entonces, la pendiente del campo (tangente a la órbita γ_P), cumple que $\frac{y'(t)}{x'(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$. Pero, en ese caso (por ser g y F continuas),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-g(x)}{y - F(x)} = 0,$$

de manera que llegamos a una contradicción por suponer que la solución, en tiempos positivos, no cruzaba el eje de ordenadas. Procedemos igual para tiempos negativos: supongamos que φ_P cumple que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0 \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty.$$

Entonces la pendiente del campo satisface $\frac{y'(t)}{x'(t)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty$, pero

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-g(x)}{y - F(x)} = 0.$$

Como, además, el sistema es simétrico, queda probado que, si P es un punto en la curva $y = F(x)$, entonces γ_P corta al eje de ordenadas en dos puntos, que denotamos por A y C , con $y_A > 0$ e $y_C < 0$. \square

2.2. El Teorema de Liénard

En su artículo de 1928 [7], Liénard establece unas condiciones suficientes sobre los coeficientes de la ecuación (2.1) para garantizar la existencia y unicidad de ciclo límite. En esta sección, se recogen los correspondientes resultados teóricos, con demostración, acompañados de una representación gráfica.

Teorema 2.9 (Teorema de Liénard). *Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que satisfacen*

1. $f, g \in C^1(\mathbb{R})$.
2. La función g es impar y la función f es par.
3. $xg(x) > 0, \forall x \neq 0$.
4. La función $F(x)$, impar, tiene exactamente una raíz positiva en $x = a$, es negativa para todo $0 < x < a$, es positiva y monótona creciente para todo $x > a$ y, además, cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Entonces el sistema (2.2) tiene un único ciclo límite, rodeando al origen en el plano, que será el conjunto ω -límite de todas las órbitas distintas de la singularidad $(0, 0)$.

Demostración. ([9, 10]). Por ser las funciones f y g de clase uno, estamos en condiciones de existencia y unicidad de solución. Por el Lema 2.6 (Simetría), podemos restringirnos al estudio de las órbitas para x no negativos. Por el Lema 2.7 (Análisis del plano de fases y puntos singulares), el origen es la única singularidad y la órbita cerrada, de existir, debe rodearlo. Consideramos el sistema en forma (2.2').

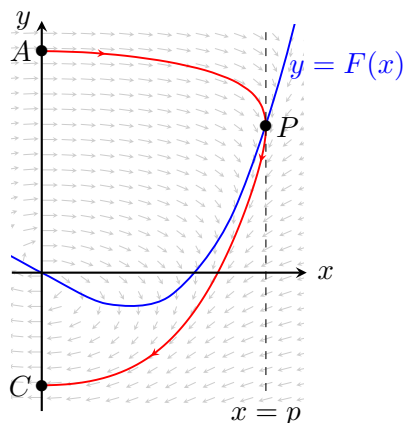


Figura 2.3: Representación gráfica γ_P , en rojo, con P un punto sobre la curva $y = F(x)$, dibujada en azul. En gris, el campo de vectores y, en negro, los puntos A , P y C .

Sea $P = (p, F(p))$ un punto sobre la curva $y = F(x)$. Por el Lema 2.8, la órbita γ_P intersecará al eje de ordenadas en un punto A en tiempo $t_A < 0$ con tangente horizontal, cruzará la curva $y = F(x)$ en el punto P con pendiente vertical y descenderá hasta volver a cortar al eje de ordenadas en el punto C en tiempo $t_C > 0$, también de manera horizontal. Se representa en la Figura 2.3 la situación en la que nos encontramos.

Como las órbitas son simétricas, γ_P será cerrada si la distancia de A al origen coincide con la distancia de C al origen (esto es, si $y_A = -y_C$). Variar p hará cambiar la órbita y demostraremos que existe un único valor de $x = p$ para el cual $y_A = -y_C$. Consideremos la función

$$E(x, y) := \int_0^x g(u) du + \frac{y^2}{2},$$

que se reduce a $\frac{y^2}{2}$ en el eje de ordenadas. Haciendo uso de la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} [E(x, y)] = g(x)x' + yy' = (-y')(y - F(x)) + yy' = F(x)y',$$

donde, implícitamente, x e y son funciones de t . Definimos la función continua $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} I(p) &:= \int_{\widehat{AC}} (0, F(x)) \cdot ds = \int_{\widehat{AC}} F(x) dy = \int_{t_A}^{t_C} F(x(t)) y'(t) dt = \int_{t_A}^{t_C} \frac{d}{dt} [E(x(t), y(t))] dt \\ &= E(C) - E(A) = \frac{y_C^2 - y_A^2}{2}, \end{aligned}$$

donde hemos tomado la parametrización $\alpha : t \in [t_A, t_C] \mapsto \alpha(t) := (x(t), y(t)) \in \widehat{AC}$.

Así, solo hay que demostrar que existe una única raíz (positiva) de I . Notemos que, si $p \leq a$, entonces F e y' son negativas, de modo que $I(p) > 0$ y la órbita no es cerrada.

Tomemos, como en la Figura 2.3, $p > a$. Entonces consideramos los puntos Q_1 y Q_2 de la curva γ_P sobre la recta $x = a$ (ver Figura 2.4) y dividimos la integral anterior, $I(p)$, en dos sumandos:

$$I_1(p) := \int_{\widehat{AQ_1}} F(x) dy + \int_{\widehat{Q_2C}} F(x) dy \quad \text{e} \quad I_2(p) := \int_{\widehat{Q_1Q_2}} F(x) dy.$$

Tenemos que y' siempre es negativa a lo largo de todo el arco \widehat{AC} , pero F es negativa en los arcos $\widehat{AQ_1}$, $\widehat{Q_2C}$ y positiva en el arco $\widehat{Q_1Q_2}$. Así, $I_1(p) > 0$ e $I_2(p) < 0$ para todo valor de $p > a$.

Probaremos primero que $I = I_1 + I_2$ es una función decreciente en $(a, +\infty)$ considerando por separado I_1 e I_2 . Después veremos que $\lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = -\infty$ y, como ya vimos que $I(a) > 0$, quedaría probado que I posee una única raíz real y, por tanto, el sistema posee una única órbita cerrada.

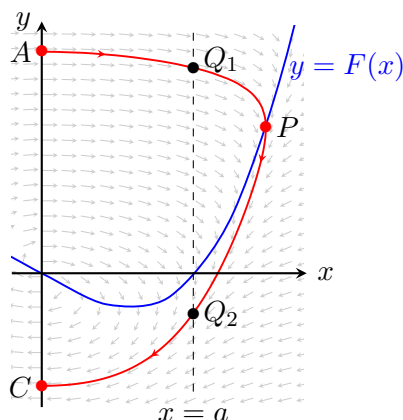


Figura 2.4: Representación gráfica de la situación descrita, añadiendo los nuevos puntos Q_1 y Q_2 , en negro, a la gráfica de la órbita. De nuevo, representamos en rojo a γ_P y los puntos anteriores, en azul, a la curva $y = F(x)$ y, en gris, al campo de vectores.

Empecemos viendo que I_1 es decreciente. Como x' solo se anula en la curva $y = F(x)$ y los arcos $\widehat{AQ_1}$ y $\widehat{Q_2C}$ no la intersecan en ningún punto, podemos escribir, en estos arcos,

$$F(x)y' = F(x) \frac{y'}{x'} x' = \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} x'.$$

Como, además, las órbitas del sistema (2.2') no se pueden intersecar, aumentar p eleva el arco $\widehat{AQ_1}$, hace descender el arco $\widehat{Q_2C}$ y desplaza el arco $\widehat{Q_1Q_2}$ hacia la derecha. Entonces:

- Podemos parametrizar el arco $\widehat{AQ_1}$ a través de $\alpha|_{[t_A, t_{Q_1}]}$, de manera que

$$\int_{\widehat{AQ_1}} F(x) dy = \int_{t_A}^{t_{Q_1}} F(x(t)) y'(t) dt = \int_{t_A}^{t_{Q_1}} \frac{-g(x(t))F(x(t))}{y(t) - F(x(t))} x'(t) dt.$$

Como x' es positiva en todo el arco $\widehat{AQ_1}$, x es inyectiva en $[t_A, t_{Q_1}]$ y existe su inversa $x^{-1}: [0, a] \rightarrow [t_A, t_{Q_1}]$. Por tanto, podemos hacer el cambio de variable

$$u = x(t) \Leftrightarrow t = x^{-1}(u), \quad du = x'(t) dt$$

y escribir

$$\int_{\widehat{AQ_1}} F(x) dy = \int_0^a \frac{-g(u)F(u)}{y(x^{-1}(u)) - F(u)} du.$$

Para cualquier valor de p , los límites de integración de u quedan fijos en $u = 0$ y $u = a$. Sin embargo, aumentar p eleva el arco $\widehat{AQ_1}$, lo que aumenta el denominador del integrando y, así, disminuye el valor de la integral.

- Podemos parametrizar el arco $\widehat{Q_2C}$ a través de $\alpha|_{[t_{Q_2}, t_C]}$, de manera que

$$\int_{\widehat{Q_2C}} F(x) dy = \int_{t_{Q_2}}^{t_C} F(x(t)) y'(t) dt = \int_{t_{Q_2}}^{t_C} \frac{-g(x(t))F(x(t))}{y(t) - F(x(t))} x'(t) dt.$$

Análogamente al arco $\widehat{AQ_1}$, hacemos el cambio de variable $u = x(t)$, de forma que

$$\int_{\widehat{Q_2C}} F(x) dy = \int_a^0 \frac{-g(u)F(u)}{y(x^{-1}(u)) - F(u)} du = \int_0^a \frac{g(u)F(u)}{y(x^{-1}(u)) - F(u)} du.$$

Los límites de integración de u quedan fijos en $u = 0$ y $u = a$ para cualquier valor de p . Sin embargo, aumentar p hace descender el arco $\widehat{Q_2C}$, lo que aumenta el denominador del integrando en valor absoluto y, así, disminuye el valor de la integral.

Queda visto, por tanto, que I_1 es una función estrictamente decreciente respecto a p . Para probar que I_2 es también decreciente respecto a p , parametrizamos el arco $\widehat{Q_1Q_2}$ a través de $\alpha|_{[t_{Q_1}, t_{Q_2}]}$. Así,

$$I_2(p) = \int_{\widehat{Q_1Q_2}} F(x) dy = \int_{t_{Q_1}}^{t_{Q_2}} F(x(t)) y'(t) dt.$$

Como y' es siempre negativa a lo largo del arco $\widehat{Q_1Q_2}$, tenemos que y es inyectiva en $[t_{Q_1}, t_{Q_2}]$ y existe su inversa $y^{-1}: [y_{Q_2}, y_{Q_1}] \rightarrow [t_{Q_1}, t_{Q_2}]$. Notemos que y^{-1} invierte la orientación. Podemos considerar el cambio de variable

$$v = y(t) \Leftrightarrow t = y^{-1}(v), \quad dv = y'(t) dt.$$

Escribimos

$$I_2(p) = \int_{\widehat{Q_1Q_2}} F(x) dy = \int_{y_{Q_1}}^{y_{Q_2}} F(x(y^{-1}(v))) dv.$$

Recordemos que I_2 es siempre negativa para todo valor de $p > a$. Aumentar p sube el punto Q_1 , baja el punto Q_2 y aumenta hacia la derecha el arco $\widehat{Q_1Q_2}$. Como F es positiva y monótona creciente para $x > a$, es evidente que la función

$$-I_2(p) = \int_{y_{Q_2}}^{y_{Q_1}} F(x(y^{-1}(v))) dv$$

aumenta al aumentar p . En consecuencia, I_2 es una función decreciente.

Veamos, finalmente, que I_2 tiende a $-\infty$ cuando hacemos tender p a $+\infty$ (lo cual ya implica que lo hace I por ser I_1 , aunque positiva, decreciente al aumentar p). Como $p > a$, la órbita γ_P corta al eje X en un punto $B = (b, 0)$ en tiempo $t_B \in (0, t_C)$. Fijamos un valor $d \in (a, b)$. Consideremos los dos puntos sobre la recta $x = d$ siguientes: $D_F = (d, F(d))$, en la gráfica $y = F(x)$, y D_P , el punto de la órbita por encima de la gráfica $y = F(x)$ (ver Figura 2.5).

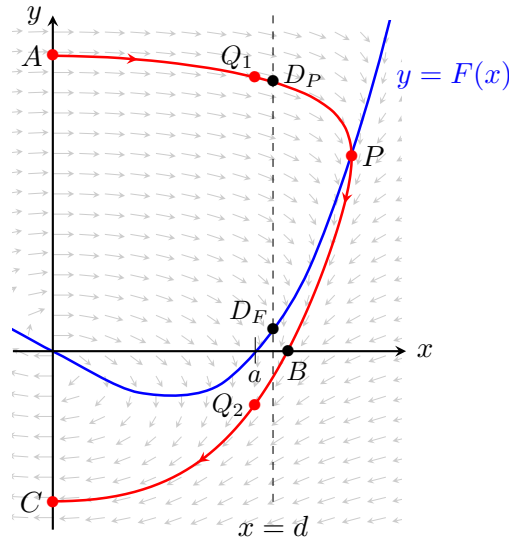


Figura 2.5: Representación gráfica de la situación actual con los nuevos puntos B , D_F y D_P , en negro. De nuevo, en rojo, γ_P y los puntos anteriores, en azul, la curva $y = F(x)$ y, en gris, el campo de vectores.

Notemos que, al aumentar p , el punto B se desplaza hacia la derecha, luego d sigue siendo un valor en (a, \hat{b}) para $\hat{p} > p$. Podemos, por tanto, considerar d fijo. También estará fijo, al aumentar p , el punto D_F , pero no ocurre lo mismo con el punto D_P : como $y_{D_P} > F(p)$ y $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \infty$, el punto D_P tiende al infinito cuando p tiende a infinito o, equivalentemente, $\lim_{p \rightarrow \infty} y_{D_P} = \infty$.

De nuevo, tomamos como parametrización de $\widehat{Q_1 Q_2}$ a $\alpha|_{[t_{Q_1}, t_{Q_2}]}$ y haremos uso del cambio de variable $v = y(t)$, válido al ser $y' < 0$ (y por tanto y inyectiva) en todo el arco. Así,

$$I_2(p) = \int_{\widehat{Q_1 Q_2}} F(x) dy = \int_{t_{Q_1}}^{t_{Q_2}} F(x(t)) y'(t) dt = \int_{y_{Q_1}}^{y_{Q_2}} F(x(y^{-1}(v))) dv.$$

En el arco $\widehat{Q_1 Q_2}$, F es positiva, y como $\widehat{D_P B} \subsetneq \widehat{Q_1 Q_2}$, tenemos la siguiente desigualdad:

$$-I_2(p) = \int_{y_{Q_2}}^{y_{Q_1}} F(x(y^{-1}(v))) dv > \int_{y_B}^{y_{D_P}} F(x(y^{-1}(v))) dv = \int_0^{y_{D_P}} F(x(y^{-1}(v))) dv.$$

Además, como se puede observar en la Figura 2.5, a lo largo de esta integral de línea, se cumple que x toma valores en $[d, p]$, de manera no inyectiva. Por tanto, en este recorrido, se satisface que $F(x(y^{-1}(v))) \geq F(d) > 0$ para todo $v \in [0, y_{D_P}]$. Así,

$$-I_2(p) > \int_0^{y_{D_P}} F(x(y^{-1}(v))) dv > F(d) \int_0^{y_{D_P}} dv = F(d) \cdot y_{D_P} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty.$$

En consecuencia, $\lim_{p \rightarrow \infty} I_2(p) = -\infty$, lo cual implica exactamente lo mismo para I .

Recapitulando, hemos probado que la función I posee exactamente una raíz positiva, $p = p_0$, lo cual implica la existencia y unicidad de órbita cerrada. Esta será la que pase por el punto $(p_0, F(p_0))$ y, al ser única, es un ciclo límite. Nos queda determinar su comportamiento asintótico. Recordemos que

$$I(p) = \frac{(y_C^2 - y_A^2)}{2}.$$

Como I es negativa para $p > p_0$ y el sistema es simétrico, se sigue que las órbitas exteriores al ciclo límite se contraen girando en espiral y tienden hacia el ciclo límite.

Para las órbitas interiores al ciclo límite (distintas de la singularidad), se tiene que I es positiva, luego, de nuevo por la simetría, las órbitas se expanden girando en espiral y se aproximan hacia el ciclo límite. Así, el ciclo límite tiene un comportamiento globalmente asintóticamente estable, es decir, es el ω -límite de todas las órbitas del sistema distintas del punto singular. \square

Una parte importante del teorema para concluir la estabilidad asintótica del ciclo límite es la cuarta hipótesis. Que F , impar, tome valores negativos en $(0, a)$ y diverja al infinito está muy relacionado con la monotonía de la función I . En su artículo, Liénard [7] afirma, sin demostración, que cambiar f por $-f$ y F por $-F$ transforma el ciclo límite asintóticamente estable en inestable. Enunciamos este resultado como un corolario del Teorema de Liénard.

Corolario 2.10. *Si se mantienen las condiciones 1-3 del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard) y, además,*

4'. $F(x)$, impar, posee exactamente una raíz positiva en $x = a$, es positiva para todo $0 < x < a$, negativa y monótona decreciente para todo $x < a$ y, además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$,

entonces el sistema (2.2') tiene un único ciclo límite rodeando al origen en el plano, que será el α -límite de todas las órbitas distintas del punto singular $(0, 0)$.

Demostración. En este caso, lo que se prueba es que I es una función creciente respecto a p y que $I(a) < 0$. Así, también se cumple que solo posee una raíz real $p = p_0$ y, por tanto, se deduce la existencia y unicidad de ciclo límite para el sistema (2.2').

Se concluye de igual manera, utilizando la simetría, el comportamiento asintótico del resto de órbitas: para las exteriores, $I(p) > 0$ y, por tanto, se expanden en espiral y se alejan del ciclo límite y, para las interiores, $I(p) < 0$ y, por tanto, giran en espiral hacia el origen. Así, el ciclo límite será el α -límite de todas las órbitas del sistema (excepto la singularidad) y su comportamiento asintótico es inestable repulsor. \square

Observación 2.11. Cambiar f por $-f$ en la ecuación (2.1) es equivalente a “recorrer el tiempo hacia atrás”. Si hacemos el cambio de variable $u(t) = x(-t)$, entonces tenemos que

$$u'(t) = \frac{d}{dt}[x(-t)] = -x'(-t), \quad u''(t) = \frac{d}{dt}[-x'(-t)] = x''(-t),$$

de manera que, como la ecuación (2.1) es autónoma, u cumplirá la ecuación diferencial

$$u'' - f(u)u' + u'' = 0,$$

que coincide con la ecuación diferencial (2.1) cambiando f por $-f$. Así, es evidente que el ciclo límite pasa a ser el conjunto α -límite de todas las órbitas distintas de la singularidad y que su comportamiento es globalmente inestable repulsor.

Ejemplo 2.12. Consideremos el sistema asociado a la ecuación $x'' + (1 - 3x^2)x' + x = 0$, en las condiciones del Corolario 2.10:

$$\begin{cases} x' = y - (x - x^3), \\ y' = -x. \end{cases}$$

Representamos, en la Figura 2.6, el ciclo límite del sistema, donde podemos ver claramente su comportamiento inestable.

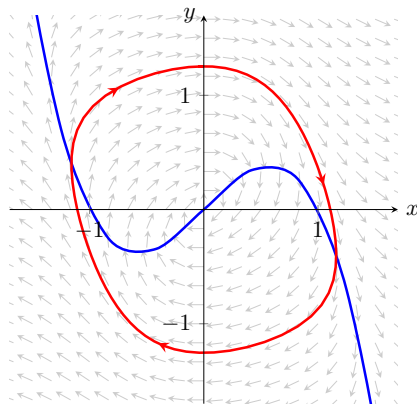


Figura 2.6: Representación gráfica del ciclo límite de la ecuación $x'' + (1 - 3x^2)x' + x = 0$. Se representa, en azul, la curva $y = F(x)$, en rojo, la órbita periódica y, en gris, el campo de vectores.

Capítulo 3

Ejemplos

Conocemos muchos eventos físicos que se pueden modelar a través de la ecuación de un oscilador con rozamiento: un resorte en movimiento (cuya ecuación se deduce de la Segunda Ley de Newton), el comportamiento de la corriente en un circuito eléctrico (cuya ecuación se deduce de las Leyes de Kirchoff), etc.

Aunque las hipótesis del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard) parecen arbitrarias, a continuación, veremos dos ejemplos del área de la electrónica y la biología, respectivamente, en los que toda esta teoría que hemos desarrollado en el capítulo anterior nos será de mucha utilidad.

El primero será el oscilador de Van der Pol, que sigue una ecuación dependiente de un parámetro y para el que podremos estudiar, en todos los casos posibles, la existencia y unicidad de ciclo límite, así como dar una estimación de dónde se encuentra (en el caso de la unicidad). El segundo será el modelo del latido del corazón de Zeeman, para el que comprobaremos cuánto se acerca a cumplir las propiedades que su autor impone y sus limitaciones.

3.1. El oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol es un ejemplo clásico de ecuación de Liénard. Se trata de un oscilador no lineal que estudió el físico Balthasar Van der Pol en relación con experimentos con circuitos [1]. La ecuación de Van der Pol describe el comportamiento de la corriente eléctrica en un triodo.

Definición 3.1 ([1]). Se denomina **ecuación de Van der Pol** a la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

El parámetro μ solo tiene sentido físico si es no negativo pero, desde el punto de vista matemático, podemos considerar $\mu \in \mathbb{R}$. Estudiaremos, según el valor del parámetro, la aparición o desaparición de ciclo límite y su estabilidad.

Este análisis queda comprendido en la *teoría de bifurcaciones*, que estudia cómo la modificación de un parámetro de la ecuación repercute en la estructura y la estabilidad de sus soluciones. Pese a no poder, por motivos de extensión, entrar en profundidad en este campo de estudio, disponemos de las herramientas suficientes para determinar, para cada valor de μ , la existencia de ciclo límite y su estabilidad.

Para $\mu = 0$, (3.1) se transforma en $x'' + x = 0$, la ecuación del oscilador armónico simple, que no cumple la cuarta condición del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard). Tenemos, en este caso, el sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases} \quad (3.2)$$

El único punto crítico del sistema es el origen. Veamos que el resto de órbitas forman círculos concéntricos en el origen, todas ellas periódicas de periodo $T = 2\pi$. Realizamos un cambio de coordenadas a polares: consideramos $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$ el módulo del vector (x, y) y $\theta \in [-\pi, \pi)$ el ángulo comprendido entre el vector (x, y) y el eje de abscisas. De esta forma, las variables cartesianas se escriben como $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y por tanto

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \left\{ \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0, \cotan \theta = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \right\}.$$

Nos interesa saber el comportamiento de las órbitas en los puntos regulares, es decir, los puntos distintos del origen. Derivando respecto al tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} 2rr' &= 2xx' + 2yy' \implies rr' = xx' + yy' \stackrel{(3.2)}{=} xy - yx = 0 \implies r = 0 \text{ o bien } r' = 0, \\ \frac{\theta'}{\cos^2 \theta} &= \frac{y'x - yy'}{x^2} \stackrel{(3.2)}{=} \frac{-x^2 - y^2}{x^2} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta} \implies \theta' = -1 \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Si derivamos la expresión $\cotan \theta$, obtenemos $\frac{-\theta'}{\sen^2 \theta}$ y, de manera análoga, probaríamos que $\theta' = -1$ para todo punto regular. Así, toda órbita partiendo de un punto distinto del $(0, 0)$ describe una trayectoria circular en torno al origen. Con respecto a su periodo,

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \theta'(w) dw = \int_0^t -1 dw = -t \implies \theta(t) = \theta(0) - t.$$

Si $T > 0$ es el periodo de la órbita, esto es, el menor valor de tiempo tal que $\theta(T) \equiv \theta(0) \pmod{2\pi}$, es evidente que $T = 2\pi$, como queríamos demostrar. Representamos, en la Figura 3.1, el plano de fases del sistema (3.2).

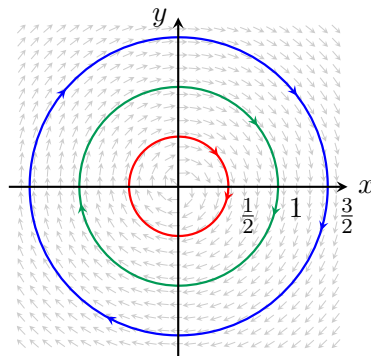


Figura 3.1: Plano de fases del sistema (3.2). En gris, los vectores (x', y') . Representamos, en azul, verde y rojo, tres órbitas del sistema.

Para $\mu > 0$, la ecuación de Van der Pol (3.1) está en las condiciones del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard). En efecto, en este caso, las funciones son $f(x) = -\mu(1 - x^2)$, par, y $g(x) = x$, impar. Ambas son continuamente diferenciables en todo \mathbb{R} y

$$F(x) = \int_0^x -\mu(1 - w^2) dw = -\mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right) = -\mu x \left(1 - \frac{x^2}{3} \right)$$

es una función que posee exactamente una raíz positiva en $x = \sqrt{3}$, que toma valores negativos en $(0, \sqrt{3})$ y positivos en $(\sqrt{3}, +\infty)$, es monótona creciente en ese intervalo y, además, satisface que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mu x^3}{3} - \mu x \right) = +\infty$. Existe, así, un único ciclo límite globalmente asintóticamente estable.

Por otra parte, para $\mu < 0$ se cumplen las condiciones del Corolario 2.10 y, así, existe un único ciclo límite con comportamiento inestable. Representamos, en la Figura 3.2, el ciclo límite de dos sistemas en forma (2.2') asociados a la ecuación (3.1).

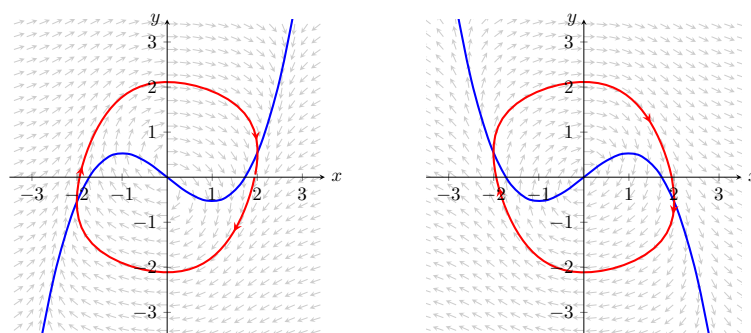


Figura 3.2: Representación gráfica de los ciclos límite, en rojo, de dos sistemas en forma (2.2') asociados a la ecuación (3.1). A la izquierda, $\mu = 0,8$ y, a la derecha, $\mu = -0,8$. En ambos retratos tenemos, en gris, el campo de vectores y, en azul, la curva $y = F(x)$.

En resumen, para valores $\mu > 0$, tenemos un ciclo límite que atrae a todas las órbitas del sistema. Para $\mu = 0$, el ciclo límite “se disipa” y el origen se convierte en un centro. Para $\mu < 0$, el ciclo límite reaparece y repele a todas las órbitas del sistema. Tenemos una *bifurcación de Hopf*: de un punto de equilibrio, surge una órbita periódica que lo rodea. Para más información sobre este campo de estudio y otros tipos de bifurcaciones (silla-nodo, tridente...), se puede consultar [3].

Notemos, además, que hacer variar μ no cambia la posición de las raíces de F : siempre están fijas en $-a$, 0 y a . Hacer tender μ a 0 “aplana” la función F . Esto, sin embargo, no implica que el ciclo límite tienda al origen cuando μ tiende a 0 . Para verlo, basta recordar que, en la demostración del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard), definimos la función I como sigue

$$I(p) := \int_{AC} F(x) dy = \dots = \frac{y_C^2 - y_A^2}{2},$$

donde A y C eran los puntos de corte de la órbita $\gamma_{(p,F(p))}$ con el eje de abscisas. Habíamos probado que $I(p) > 0$ para $p < a$ (la raíz positiva de F), lo cual implica (por la simetría del sistema) que la órbita $\gamma_{(p,F(p))}$ se expande para todo $p < a$. Así, el ciclo límite está, necesariamente, fuera de la circunferencia de centro el origen y radio a . En el caso de la ecuación de Van der Pol, el ciclo límite estará fuera de la circunferencia de radio $\sqrt{3}$ para cualquier valor $\mu > 0$. El argumento análogo sirve para deducir que el ciclo límite, para valores de μ negativos, no colapsa en el origen.

Consideraremos ahora el oscilador de Rayleigh, estudiado por el matemático Lord Rayleigh en problemas del área de la acústica.

Definición 3.2 ([1]). Se denomina **ecuación de Rayleigh** a la ecuación diferencial de segundo orden

$$u'' - \mu \left(1 - \frac{(u')^2}{3} \right) u' + u = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Veremos cómo podemos transformar la ecuación de Rayleigh en la ecuación de Van der Pol. Primero, consideremos el sistema bidimensional que obtenemos al introducir la variable $v = -u'$:

$$\begin{cases} u' = -v, \\ v' = u - \mu \left(1 - \frac{(-v)^2}{3} \right) (-v) = u + \mu \left(v - \frac{v^3}{3} \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Transformamos este sistema con el cambio de variable $\{x = v, y = u\}$, obteniendo

$$\begin{cases} x' = y + \mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right), \\ y' = -x, \end{cases}$$

que es precisamente el sistema en forma (2.2') asociado a la ecuación (3.1). Las órbitas de este sistema se obtendrán de una rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes a partir de las órbitas del sistema de Van der

Pol tras aplicarles una reflexión respecto al eje de ordenadas (o, lo que es lo mismo, una reflexión respecto al origen). Por tanto, todas las conclusiones obtenidas para el oscilador de Van der Pol se pueden trasladar al oscilador de Rayleigh: existencia de un único ciclo límite (globalmente asintóticamente estable para $\mu > 0$, inestable para $\mu < 0$), comportamiento repulsor del origen...

En la Figura 3.3, representamos el ciclo límite de la ecuación de Rayleigh junto con la curva $u = -\mu \left(v - \frac{v^3}{3} \right)$. Podemos observar que este diagrama es el mismo que el obtenido en la primera representación de la Figura 3.2 tras realizarle una reflexión respecto al origen.

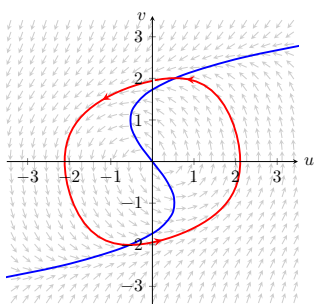


Figura 3.3: Representación gráfica del ciclo límite del sistema (3.3) para $\mu = 0,8$. En gris, el campo de vectores y, en azul, la curva $u = -\mu \left(v - \frac{v^3}{3} \right)$.

3.2. El modelo del latido del corazón de Zeeman

En 1972, el matemático Zeeman presentó su modelo para estudiar el movimiento del latido del corazón [15]. Este modelo nos resulta interesante porque sigue un esquema de la forma (2.2') y, en algunos casos, cumple las Hipótesis 2.5. Zeeman admite haberse basado en el oscilador de Van der Pol.

El corazón se encarga de bombear sangre al resto del cuerpo, de manera que tiene dos estados diferenciados: el periodo de *sístole*, en el que se contrae para expulsar la sangre a mucha velocidad, y el de *diástole*, en el que se relaja para acumular más sangre. Esto se repite de manera periódica. Zeeman decidió construir el modelo atendiendo a las tres siguientes propiedades:

- El sistema posee un equilibrio estable, que corresponde a la diástole. Zeeman establece este hecho debido a que, si el corazón deja de latir, se relaja.
- Una onda electroquímica provoca la *acción* de latir. Se considera que una cierta acción implica un cambio grande en alguna de las variables en poco tiempo. Así, matemáticamente, una acción implica que existen regiones del plano donde el campo es grande en módulo.
- La órbita vuelve a la posición de equilibrio.

Las ecuaciones presentadas por Zeeman son:

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= -(x^3 - Tx + b), \\ b' &= x - x_d, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde x representa la longitud de la fibra muscular y b la cantidad de un detonante electroquímico. Las constantes del sistema son $\varepsilon > 0$ pequeño, $T > 0$ la tensión dada por la presión sanguínea y x_d la longitud de la fibra muscular en diástole.

Zeeman llama *variedad lenta* a la curva $x^3 - Tx + b = 0$. Además, en sus planos de fases, decide representar las variables como (b, x) en vez de (x, b) . Aunque nosotros trabajaremos con las variables (x, b) , sí seguiremos su método de representación geométrica.

Antes de analizar el modelo, veamos cómo podemos transformar el sistema anterior en una ecuación tipo Liénard. Si derivamos la primera ecuación respecto al tiempo, obtenemos

$$\varepsilon x'' = -3x^2 x' + Tx' - b' = -(3x^2 - T)x' - (x - x_d),$$

o, equivalentemente,

$$x'' + \frac{1}{\varepsilon}(3x^2 - T)x' + \frac{1}{\varepsilon}(x - x_d) = 0.$$

Supongamos, en primer lugar, que $x_d = 0$. Entonces el sistema (3.4) posee un único equilibrio en el punto $(0, 0)$ y obtenemos la ecuación de Liénard

$$x'' + \frac{1}{\varepsilon}(3x^2 - T)x' + \frac{x}{\varepsilon} = 0,$$

con funciones coeficiente $f(x) = \frac{1}{\varepsilon}(3x^2 - T)$ y $g(x) = \frac{x}{\varepsilon}$. Ambas son claramente de clase uno en todo \mathbb{R} , f es par y g es impar. Además, $xg(x) > 0$ para todo x no nulo y

$$F(x) = \int_0^x f(u) \, du = \frac{1}{\varepsilon}(x^3 - Tx) = \frac{x}{\varepsilon}(x^2 - T)$$

es una función impar que cumple las condiciones del Teorema 2.9: posee una única raíz positiva en $x = \sqrt{T}$, toma valores negativos en $(0, \sqrt{T})$ y positivos en $(\sqrt{T}, +\infty)$, es monótona creciente en este intervalo y, por último, satisface que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Concluimos, en virtud del Teorema 2.9 (Teorema de Liénard), que el sistema (3.4) con $x_d = 0$ posee un único ciclo límite globalmente asintóticamente estable. Representamos, en la Figura 3.4, el correspondiente ciclo límite para el sistema (3.4) con $\varepsilon = 0,2$ y $T = 1$.

En este caso, el origen sería un equilibrio repulsor y, por tanto, no satisface la primera condición de Zeeman. Así, no podríamos interpretar este equilibrio como el punto de diástole.

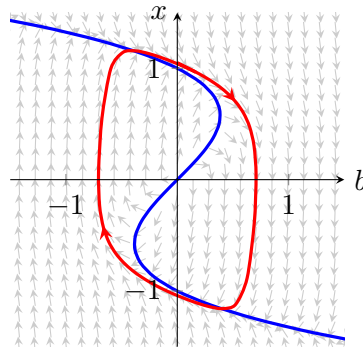


Figura 3.4: Ciclo límite del sistema (3.4), representado en rojo, con $x_d = 0$, $\varepsilon = 0,2$ y $T = 1$. En azul, la variedad lenta y, en gris, el campo de vectores. Representamos el plano (b, x) y no el plano (x, b) para seguir el esquema de Zeeman.

En general, el sistema (3.4) posee un único equilibrio en el punto $(x_d, Tx_d - x_d^3)$. Este punto está sobre la variedad lenta. Zeeman pretende, por un lado, que este punto represente la diástole del sistema y, por otro, que la sístole esté representada por otro punto sobre la variedad lenta $(x_s, Tx_s - x_s^3)$. Además, exige que $b_d := Tx_d - x_d^3 < 0$ y $b_s := Tx_s - x_s^3 > 0$. Representamos, en la Figura 3.5, la situación descrita y la “órbita” que debería describir el movimiento del corazón según Zeeman.

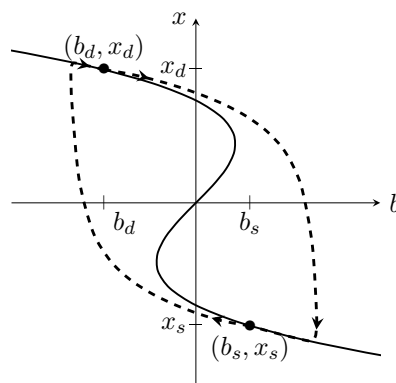


Figura 3.5: “Ciclo límite” que debería existir según Zeeman, dibujado con trazo discontinuo. Representamos la variedad lenta con un trazo continuo.

Sin embargo, la anterior no es una órbita del sistema. Realmente, el sistema (3.4) sólo modela adecuadamente la “vuelta” desde el punto de sístole al punto de diástole. Por supuesto, cambiar el equilibrio del punto (x_d, b_d) al punto (x_s, b_s) (o, equivalentemente, cambiar la segunda ecuación del sistema (3.4) por $b' = x - x_s$) modelaría de manera correcta la “ida” desde el punto de diástole al de sístole, pero no la “vuelta”. Representamos, en la Figura 3.6, las órbitas de ambos modelos.

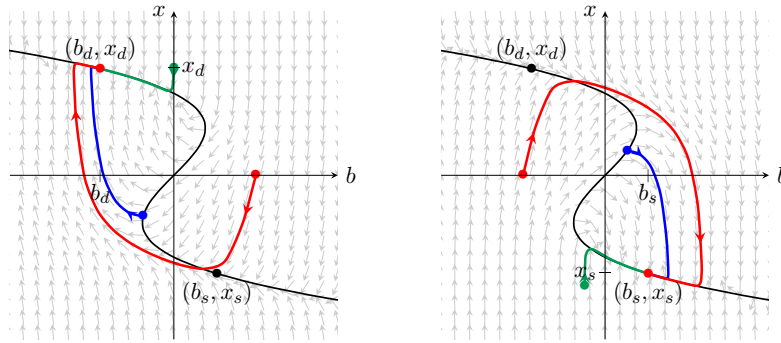


Figura 3.6: Órbitas de los modelos de Zeeman y su modificación. A la izquierda, la figura con segunda ecuación $b' = x - x_d$ y, a la derecha, la figura con segunda ecuación $b' = x - x_s$. En ambas figuras, dibujamos, en negro, la variedad lenta, en azul y rojo, dos órbitas que se comportan como Zeeman describe en su artículo y, en verde, una órbita que no sigue la trayectoria que debería.

En su artículo, Zeeman habla de la existencia de un detonante electroquímico, al que se refiere como “pacemaker” o marcapasos, que aumenta la concentración de b y da lugar al movimiento de la órbita desde el punto de diástole al de sístole. Después de este estímulo, la órbita vuelve a su posición original siguiendo el sistema (3.4). Añadir esta fuerza externa a las ecuaciones sería una de las soluciones para que el modelo se comportara correctamente.

Otra de las soluciones, presentada en [5], sería cambiar el modelo para que, según la región del plano, sea el punto (x_d, b_d) o el (x_s, b_s) el que atraiga a las órbitas. Sus autores proponen

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= -(x^3 - Tx + b), \\ b' &= x - x_d + h(x, b)(x_d - x_s), \end{cases} \quad (3.5)$$

donde h sería la siguiente función definida a trozos:

$$h(x, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } b > b_1 \text{ o } x^3 - Tx + b > 0, \text{ } b \in [b_d, b_s], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Representamos, en la Figura 3.7, las regiones donde $h(x, b) = 1$ y $h(x, b) = 0$.

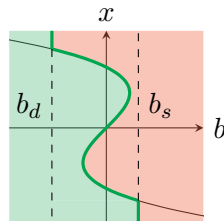


Figura 3.7: Regiones del plano donde la función h vale 0, en verde, y 1, en rojo. En negro, representamos la variedad lenta, $b = x^3 - Tx$, con $T = 1$.

Si derivamos la primera ecuación de (3.5), obtenemos

$$\varepsilon x'' = -(3x^2 - T)x' - (x - x_d + h(x, b)(x_d - x_s))$$

o, equivalentemente,

$$x'' + \frac{3x^2 - T}{\varepsilon} x' + \frac{(x - x_d + h(x, b)(x_d - x_s))}{\varepsilon} = 0.$$

Obtenemos, así, una ecuación de Liénard donde la función coeficiente g no es continua. Si hacemos el cambio de variable $u = x - x_d$, lo anterior se reescribe como

$$u'' + \frac{3(u + x_d)^2 - T}{\varepsilon} u' + \frac{(u + h(u + x_d, b)(x_d - x_s))}{\varepsilon} = 0,$$

que, de nuevo, no posee coeficiente g continuo. Por tanto, no podemos asegurar la existencia de ciclo límite para este sistema empleando el Teorema 2.9 (Teorema de Liénard).

Pese a sus limitaciones, el sistema (3.5) modifica las ecuaciones (3.4) de manera coherente con el artículo de Zeeman. Este modelo permite, según el valor de T , detectar problemas cardíacos: como b_d y b_s son datos conocidos (según Zeeman), el valor de la tensión es el único parámetro que determina la forma de la variedad lenta y, en consecuencia, el lugar del plano en el que se localizan los puntos de diástole y de sístole. Para valores muy pequeños de T , la contracción del corazón es débil. Para valores muy grandes de T , los dos puntos de diástole y de sístole se encuentran en el semiplano superior y la órbita no cruza el eje de abscisas. Por tanto, el corazón no se contrae y permanece próximo a la diástole.

Capítulo 4

Modificaciones y generalizaciones de la ecuación de Liénard

Hemos visto, por ejemplo, estudiando la ecuación de Rayleigh (3.2), que el Teorema 2.9 (Teorema de Liénard) puede garantizar la existencia y unicidad de ciclo límite para sistemas que no provienen, en principio, de una ecuación de Liénard. Por ejemplo:

- Si, como ya hicimos con la ecuación de Rayleigh, transformamos las dos ecuaciones del sistema (2.2') con el cambio de variable $\{u(t) = y(t), v(t) = x(t)\}$, obtenemos un sistema de la forma

$$\begin{cases} u' = -g(v), \\ v' = u - F(v). \end{cases}$$

Geoméricamente, las órbitas de este sistema se obtienen, mediante una reflexión respecto a la recta $y = x$, a partir de las órbitas del sistema (2.2). Por tanto, si g y F cumplen las Hipótesis 2.5, también tenemos garantizada la existencia y unicidad de ciclo límite globalmente asintóticamente estable.

- Podemos girar $\frac{\pi}{2}$ radianes el plano de fases del sistema (2.2') a través del cambio de variable $\{u(t) = -y(t), v(t) = x(t)\}$, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} u' = g(v), \\ v' = -u - F(v) \end{cases}$$

y, de nuevo, si los coeficientes g y F satisfacen las Hipótesis 2.5, dicho sistema tendrá un ciclo límite globalmente asintóticamente estable.

Cualquier movimiento rígido, tanto del sistema (2.2) como del (2.2'), respetará el Teorema de

Liénard. Podemos combinarlos, también, con la transformación que se corresponde con “recorrer el tiempo al revés”, para obtener ciclos límite inestables, como vimos en el Corolario 2.10.

4.1. Término no lineal respecto a x'

En esta sección, nos preguntamos qué ocurre con la ecuación

$$u'' + F(u') + h(u) = 0. \quad (4.1)$$

La ecuación de Rayleigh (3.2) sigue esta estructura. Suponemos que la función F es impar. Introduciendo la variable $v = -u$ y, posteriormente aplicando el cambio de variable $\{x = v, y = u\}$, obtenemos

$$\begin{cases} u' = -v, \\ v' = F(-v) + h(u), \end{cases} \xrightarrow[v \rightarrow x]{u \rightarrow y} \begin{cases} x' = h(y) - F(x), \\ y' = -x, \end{cases} \quad (4.2)$$

que, para $h(y) = y$, sería el sistema (2.2') asociado a la ecuación de Liénard clásica

$$x'' + f(x)x' + x = 0, \quad F(x) = \int_0^x f(w) dw.$$

Si f (o $-f$) cumple las condiciones restantes de las Hipótesis 2.5, el sistema (4.2) posee un único ciclo límite globalmente asintóticamente estable (inestable). En 1970, los matemáticos Leonid Antonovich Cherkas y Lidiya Iosifovna Zhilevich [2] estudiaron el sistema, más general,

$$\begin{cases} x' = -h(y) - F(x), \\ y' = g(x), \end{cases} \quad (4.3)$$

para el que proporcionaron el resultado siguiente.

Teorema 4.1. *Supongamos que las funciones coeficiente del sistema (4.3) cumplen las siguientes condiciones:*

1. $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $yh(y) > 0$ para $y \neq 0$.
2. $f = F', g, h \in C^1(\mathbb{R})$, h es una función estrictamente creciente y $f(0) < 0$ (> 0).
3. Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$\Phi(x) = f(x) + g(x)(\alpha + \beta F(x)) \quad (4.4)$$

posee solo dos ceros simples $x_1 < 0 < x_2$ y $\Phi(x) < 0$ (≥ 0) en (x_1, x_2) .

4. El cociente $\frac{\Phi(x)}{g(x)}$ es una función monótona creciente (decreciente) en $\mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$.

5. Todos los ciclos rodean al intervalo $[x_1, x_2]$ en el eje de abscisas.

Entonces el sistema (4.3) no puede tener más de un ciclo límite y, si existe, entonces es estable (inestable).

Demostración. ([2, 14]) Solo consideramos el caso $f(0) < 0$. Como $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, necesariamente $g(0) = 0$. Por el mismo motivo, $h(0) = 0$. Así, el único punto singular es el origen. Determinaremos su comportamiento asintótico por el método de la Primera Aproximación. El sistema (4.3) posee la siguiente matriz jacobiana en el origen, con autovalores λ_{\pm} :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -f(0) & -h'(0) \\ g'(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{-f(0) \pm \sqrt{f(0)^2 - 4g'(0)h'(0)}}{2}.$$

Por hipótesis, $f(0) < 0$. Como $g(0) = h(0) = 0$ y ambas toman valores positivos en $(0, +\infty)$, sus derivadas cumplirán $g'(0), h'(0) \geq 0$. Por tanto, al menos un autovalor de la matriz tiene parte real positiva: si el discriminante es menor o igual que 0, $\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -\frac{f(0)}{2} > 0$ y, en caso contrario,

$$\lambda_+ = \frac{-f(0) + \sqrt{f(0)^2 - 4g'(0)h'(0)}}{2} > 0.$$

Por tanto, por el Teorema 1.25 (Método de la Primera Aproximación), concluimos que el origen es inestable. Esto nos servirá más adelante para estudiar la estabilidad asintótica de las órbitas del sistema.

Procedemos por reducción al absurdo: supongamos que el sistema (4.3) posee dos ciclos límite, Γ_1 y Γ_2 . Como la singularidad es única, por el Corolario 1.19, Γ_1 y Γ_2 rodean al origen y, como estamos en las condiciones del Teorema 1.6 (Teorema de existencia y unicidad), los ciclos límite son disjuntos. Así, un ciclo encierra al otro en su interior (sin pérdida de generalidad, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$).

La divergencia del campo del sistema (4.3) es $-f(x)$. Vamos a probar, para $i = 1, 2$, que

$$h_i := - \int_{\Gamma_i} f(x(t)) dt = - \int_{\Gamma_i} \Phi(x(t)) dt.$$

Para ello, veremos que, en virtud de (4.4),

$$\int_{\Gamma_i} g(x(t)) [\alpha + \beta F(x(t))] dt = 0, \quad i = 1, 2.$$

Lo probaremos para Γ_1 , siendo el caso de Γ_2 análogo.

Como Γ_1 rodea al origen, necesariamente corta al eje de ordenadas en dos puntos $Y_1 = (0, y_1)$ y $Y_2 = (0, -y_2)$, con $y_1, y_2 > 0$. Si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es una solución asociada, periódica de periodo $T > 0$, denotamos por $t_1, t_2 \in [0, T)$ los instantes correspondientes a Y_1 y a Y_2 , respectivamente. Representamos, en la Figura 4.1, el ciclo Γ_1 y los puntos Y_1 e Y_2 .

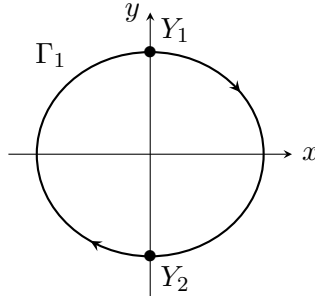


Figura 4.1: Puntos de corte del ciclo límite con el eje de ordenadas.

Además, $y' = g(x)$ solo se anula en $x = 0$, de manera que, en los dos arcos $\widehat{Y_1 Y_2}$ e $\widehat{Y_2 Y_1}$, se cumple que las aplicaciones

$$y: [t_1, t_2] \rightarrow [y_1, y_2], \quad \hat{y}: [t_2, t_1 + T] \rightarrow [y_1, y_2]$$

son inyectivas y poseen inversas

$$y^{-1}: [y_1, y_2] \rightarrow [t_1, t_2], \quad \hat{y}^{-1}: [y_1, y_2] \rightarrow [t_2, t_1 + T],$$

respectivamente. Además, por la periodicidad de φ , necesariamente $y^{-1}(y) = \hat{y}^{-1}(y) + T$.

Por tanto, podemos separar la integral anterior en los arcos $\widehat{Y_1 Y_2}$ e $\widehat{Y_2 Y_1}$ y, en cada arco, realizar los cambios de variable

$$\left\{ u = y(t) \Leftrightarrow t = y^{-1}(u), \quad dt = \frac{du}{y'(y^{-1}(u))} \right\}, \left\{ u = \hat{y}(t) \Leftrightarrow t = \hat{y}^{-1}(u), \quad dt = \frac{du}{\hat{y}'(\hat{y}^{-1}(u))} \right\},$$

respectivamente. Recordemos que $y' = g(x)$. Obtenemos, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} g(x(t))[\alpha + \beta F(x(t))] dt &= \int_{t_1}^{t_2} g(x(t))[\alpha + \beta F(x(t))] dt + \int_{t_2}^{t_1+T} g(x(t))[\alpha + \beta F(x(t))] dt \\ &= \int_{y_1}^{-y_2} \alpha + \beta F(x(y^{-1}(u))) du + \int_{-y_2}^{y_1} \alpha + \beta F(x(\hat{y}^{-1}(u))) du \\ &= -\beta \int_{-y_2}^{y_1} F(x(y^{-1}(u))) du + \beta \int_{-y_2}^{y_1} F(x(y^{-1}(u) + T)) du = 0, \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos utilizado que $x(t)$ también es periódica de periodo T .

Queda probado que la integral de la divergencia del campo, a lo largo de cada ciclo límite, coincide con la integral de $-\Phi(x)$. A continuación, vamos a probar que $h_2 < h_1$. Para ello, demostraremos, descomponiendo Γ_1 y Γ_2 en subarcos convenientes, que

$$\int_{\Gamma_2} \Phi(x(t)) dt - \int_{\Gamma_1} \Phi(x(t)) dt > 0.$$

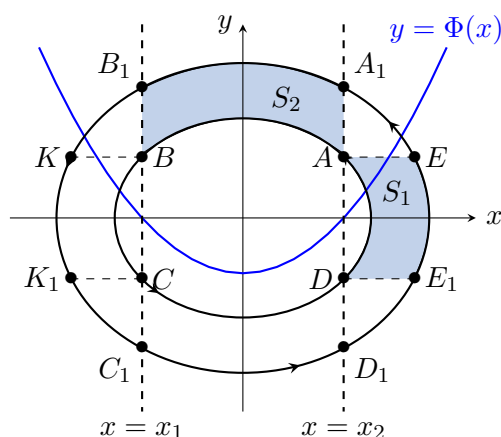


Figura 4.2: Ciclos límite del sistema. Representamos, en azul, la curva $y = \Phi(x)$ y sombreamos, también en azul, las regiones S_1 y S_2 .

Representamos, en la Figura 4.2, los ciclos límite Γ_1 y Γ_2 y los distintos puntos en los que los descompondremos: en el ciclo interior, Γ_1 , elegimos los puntos de corte del ciclo con las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$ y, en el ciclo exterior, Γ_2 , las proyecciones de los anteriores puntos en las direcciones vertical y horizontal. Consideramos las regiones S_1 y S_2 , determinadas por las curvas cerradas $\widehat{E_1EADE_1}$ y $\widehat{A_1B_1BAA_1}$, respectivamente.

En primer lugar, vamos a probar que

$$\int_{\widehat{E_1E}} \Phi(x) ds - \int_{\widehat{DA}} \Phi(x) ds \geq 0.$$

Para ello, comenzamos viendo que esta resta de integrales coincide con la integral de línea siguiente:

$$\int_{\widehat{E_1EADE_1}} \left(0, \frac{\Phi(x)}{g(x)}\right) \cdot ds = \int_{\widehat{E_1EADE_1}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy.$$

En efecto, si separamos la curva anterior en $\widehat{E_1E}$, \widehat{EA} , \widehat{AD} y $\widehat{DE_1}$, tenemos que, siguiendo la notación de la Definición 1.35,

- Parametrizamos, en el arco $\widehat{E_1E}$, con la solución $\varphi_2 = (x_2, y_2)$ asociada a Γ_2 :

$$\int_{\widehat{E_1E}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy = \int_{t_{E_1}}^{t_E} \frac{\Phi(x_2(t))}{g(x_2(t))} y_2'(t) dt = \int_{\widehat{E_1E}} \Phi(x) ds,$$

donde, en la última igualdad, hemos utilizado que $y_2'(t) = g(x_2(t))$.

- De manera análoga, parametrizamos en el arco \widehat{AD} con la solución asociada a Γ_1 y obtenemos que

$$\int_{\widehat{AD}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy = - \int_{\widehat{DA}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy = - \int_{\widehat{DA}} \Phi(x) ds.$$

- Finalmente, como $y_E = y_A$, parametrizamos \overline{EA} a través de

$$\gamma : t \in [0, 1] \rightarrow (x_E + t(x_A - x_E), y_A) \in \overline{EA}.$$

Así, como la derivada de su segunda componente es nula,

$$\int_{\overline{EA}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy = 0.$$

Análogamente, se ve para $\overline{DE_1}$.

Queda probada la igualdad. Ahora, podemos transformar esta integral de línea empleando el Teorema 1.37 (Teorema de Green), obteniendo

$$\int_{\overline{E_1EADE_1}} \frac{\Phi(x)}{g(x)} dy = \iint_{S_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi(x)}{g(x)} \right) dx dy \geq 0,$$

donde, en la última desigualdad, hemos utilizado la cuarta hipótesis del teorema. Hemos probado que la resta de las integrales es no negativa. De manera análoga, probamos que la desigualdad también se cumple en la resta de las integrales entre los arcos $\widehat{KK_1}$ y \widehat{BC} .

En segundo lugar, vamos a probar que

$$\int_{\widehat{A_1B_1}} \Phi(x) ds - \int_{\widehat{AB}} \Phi(x) ds > 0.$$

Para ello, veremos, de manera similar a como hicimos en el caso anterior, que la resta de las integrales coincide con la integral de línea siguiente:

$$\int_{\widehat{A_1B_1BAA_1}} \left(\frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)}, 0 \right) \cdot ds = \int_{\widehat{A_1B_1BAA_1}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx.$$

- Razonando como hicimos en el caso anterior, deducimos que

$$\int_{\widehat{B_1B}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx = \int_{\widehat{AA_1}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx = 0,$$

por ser $x_B = x_{B_1}$ y $x_A = x_{A_1}$ (ver Figura 4.2).

- Parametrizamos, en el arco $\widehat{A_1B_1}$, con φ_2 :

$$\int_{\widehat{A_1B_1}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx = \int_{t_{A_1}}^{t_{B_1}} \frac{-\Phi(x_2(t))}{h(y_2(t)) + F(x_2(t))} x_2'(t) dt = \int_{\widehat{A_1B_1}} \Phi(x) ds,$$

donde, en la última igualdad, hemos utilizado que $x_2'(t) = -h(y_2(t)) - F(x_2(t))$.

- De manera análoga, parametrizando con la solución asociada al ciclo Γ_1 , vemos que

$$\int_{\widehat{BA}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx = - \int_{\widehat{AB}} \Phi(x) ds.$$

Queda probada la igualdad. De nuevo, con el Teorema 1.37 (Teorema de Green) transformamos la integral de línea anterior y obtenemos la desigualdad siguiente:

$$\int_{\widehat{A_1 B_1 B A A_1}} \frac{-\Phi(x)}{h(y) + F(x)} dx = \iint_{S_2} \frac{-\Phi(x)h'(y)}{[h(y) + F(x)]^2} dx dy > 0,$$

donde hemos utilizado la segunda hipótesis (h estrictamente monótona creciente) y la tercera ($\Phi \leq 0$ en (x_1, x_2)). Hemos probado que la resta de las integrales es positiva. De manera análoga, probamos que la desigualdad estricta también se cumple en la resta de las integrales entre los arcos $\widehat{C_1 D_1}$ y \widehat{CD} . Finalmente, notemos que la integral de Φ a lo largo de los arcos $\widehat{B_1 K}$, $\widehat{K_1 C_1}$, $\widehat{D_1 E_1}$ y $\widehat{EA_1}$ es no negativa por ser Φ positiva en $\mathbb{R} \setminus (x_1, x_2)$.

Hemos visto, así, que $h_2 < h_1$. Como, recordemos, el origen presentaba un comportamiento inestable, en virtud del Teorema 1.18 (Teorema de Poincaré-Bendixson), Γ_1 será el ω -límite de todas las órbitas que encierra distintas de la singularidad. Por tanto, Γ_1 es internamente estable. En virtud del Teorema 1.39, concluimos que $h_1 \leq 0$ y, en consecuencia, $h_2 < 0$.

Probaremos que Γ_1 será necesariamente estable y no semiestable. De nuevo, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que Γ_1 es un ciclo semiestable. Asumiremos $\beta \geq 0$, procediendo de manera parecida para $\beta < 0$. Construimos el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro μ :

$$\begin{cases} x' &= -h(y) - \hat{F}(x), \\ y' &= g(x), \end{cases} \quad (4.5)$$

donde

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} F(x), & x \leq x_2, \\ F(x) + \int_{x_2}^x \mu(u - x_2)g(u) du, & x > x_2, \end{cases}$$

con $\mu > 0$ un cierto parámetro. Los sistemas (4.3) y (4.5) coinciden en el semiplano $x \leq x_2$. En el semiplano $x > x_2$, tenemos que y' se mantiene y x' disminuye: $(u - x_2) > 0$ para todo $u > x_2$, g toma valores positivos en $(0, +\infty)$ y $\mu > 0$, luego $-\hat{F}(x) < -F(x)$ para todo $x \geq x_2$.

Para el sistema original (4.3) (por suponer Γ_1 semiestable), dado un punto P_1 en la región delimitada por los dos ciclos límite, su órbita γ_{P_1} dará vueltas en espiral, aproximándose a Γ_2 . Vamos a suponer P_1 en la recta $x = x_2$ y consideramos su órbita en una vuelta completa: esta cortará a la recta $x = x_2$ en un punto P_2 en el primer cuadrante y acabará en otro punto P_3 , que estará por debajo de P_1 (ver Figura 4.3).

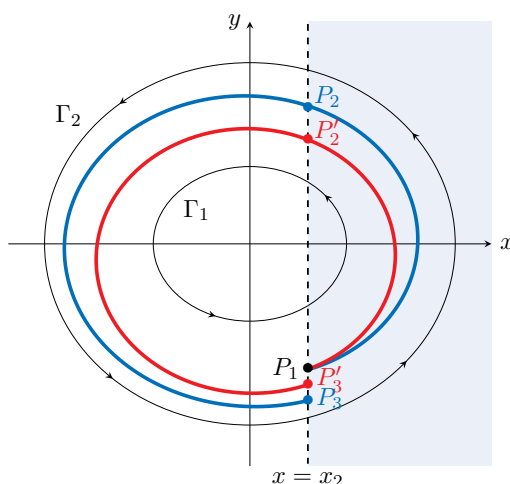


Figura 4.3: Órbitas pasado por el punto P_1 : en azul, correspondiente al sistema (4.3) y, en rojo, a (4.5). Sombreamos, en azul, la región donde los sistemas difieren.

Para este mismo P_1 , si escogemos μ suficientemente pequeño, su órbita $\hat{\gamma}_{P_1}$ en el sistema (4.5) estará, en el semiplano $x \geq x_2$, entre el ciclo límite y la órbita γ_{P_1} del sistema original. Cortará a la recta $x = x_2$ en un punto P'_2 , por debajo de P_2 , y entrará en la región del plano donde los sistemas coinciden. En este semiplano, la órbita $\hat{\gamma}_{P_1}$ permanecerá siempre entre Γ_1 y γ_{P_1} . Al realizar una vuelta completa, cortará a la recta $x = x_2$ en un punto P'_3 , por debajo de P_1 . En la Figura 4.3, está representada esta situación.

Podemos construir ahora una región anular que será un conjunto negativamente invariante: tomamos la curva $\widehat{P_1 P'_2 P'_3 P_1}$ como límite externo y Γ_1 como límite interno. En la Figura 4.4, se aprecia que el campo del sistema (4.5) es saliente (o tangente) a la región anular.

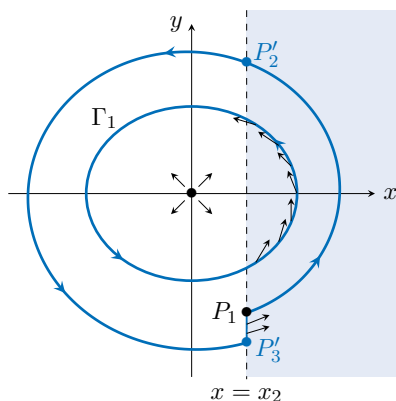


Figura 4.4: Regiones positivamente invariante (la encerrada por Γ_1) y negativamente invariante (la región anular) del sistema (4.5).

Como, dentro de esta región, no existen puntos críticos y es negativamente invariante, en virtud del Teorema 1.18 (Teorema de Poncaré-Bendixson), existe, necesariamente, una órbita cerrada $\hat{\Gamma}_2$ en esta región, que será inestable. En virtud del Teorema 1.39, $\hat{h}_2 \geq 0$.

Como el origen tiene un comportamiento inestable y el campo es entrante (o tangente) a lo largo de Γ_1 , tenemos que su interior es un conjunto positivamente invariante (ver Figura 4.4) para el sistema (4.5). Existe, en esta región, por tanto, una órbita cerrada que será asintóticamente estable. En virtud del Teorema 1.39, $\hat{h}_1 \leq 0$.

Por otro lado, \hat{F} y su derivada $f(x) + \mu(x - x_2)g(x)$ siguen satisfaciendo las condiciones del teorema. Por tanto, razonando como hicimos para el sistema (4.3), llegamos a que $\hat{h}_2 < \hat{h}_1$, lo cual no es posible. Esto implica que Γ_2 no puede existir: habíamos visto que $h_2 < 0$ y, por el Teorema 1.39, esto implica que Γ_2 es estable. Sin embargo, acabamos de demostrar que Γ_1 es, necesariamente, estable. Hemos llegado a una contradicción por suponer la existencia de dos ciclos límite. \square

Las hipótesis del Teorema 4.1 son, en general, difíciles de verificar, sobre todo la última: si no conocemos todos los ciclos límite del sistema (4.3), no parece fácil comprobar que deben contener al intervalo $[x_1, x_2]$ en el eje de abscisas. Sin embargo, si el sistema es, por ejemplo, simétrico, se vuelve más fácil de verificar. Veremos, a continuación, un ejemplo.

Ejemplo 4.2. El siguiente sistema satisface las hipótesis del Teorema 4.1 y, por tanto, de existir un ciclo límite, es estable:

$$\begin{cases} x' = -y^3 + x - x^5, \\ y' = x. \end{cases} \quad (4.6)$$

Las funciones coeficiente son $h(y) = y^3$, $F(x) = x^5 - x$ y $g(x) = x$. La primera condición se cumple trivialmente. Las tres funciones (y , por tanto, también f) son de clase infinito, h es estrictamente creciente y

$$f(x) = 5x^4 - 1 \implies f(0) = -1 < 0.$$

Tomando $\alpha = \beta = 0$, definimos la función auxiliar $\Phi(x) := f(x) = 5x^4 - 1$. Este polinomio posee cuatro raíces complejas:

$$x_1 := -\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}, \quad x_2 := \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}, \quad -i\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}, \quad +i\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5},$$

todas simples y $\Phi(x) = 5x^4 - 1 < 0$ en (x_1, x_2) . Con respecto al cociente $\frac{\Phi(x)}{g(x)} = 5x^3 - \frac{1}{x}$, veamos que es una función monótona creciente en $\mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi(x)}{g(x)} \right) = 15x^2 + \frac{1}{x^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2],$$

luego el cociente representa a una función creciente en todo \mathbb{R} . Finalmente, queda por comprobar si, de existir, todo ciclo límite rodea al segmento $[x_1, x_2]$ del eje de abscisas. En primer lugar, observemos que el sistema es simétrico: si $(x(t), y(t))$ es solución del sistema, también lo es $(-x(t), -y(t))$. En efecto,

$$\begin{cases} (-x)' = -x' = y^3 - x + x^5 = (-y)^3 + (-x) - (-x)^5, \\ (-y)' = -y' = -x. \end{cases}$$

En segundo lugar, utilizamos el Teorema 1.38 (Criterio negativo de Bendixson): la divergencia del campo asociado al sistema (4.6) coincide con $-f(x) = 1 - 5x^4$. En virtud de este teorema, de existir ciclo límite Γ , debe estar en una región del plano donde la divergencia cambia de signo. Así, debe cortar a la recta $x = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}$ o a la recta $x = -\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}$. Pero si cruza una de ellas, también debe cruzar la otra por la simetría del sistema. Razonamos, por tanto, solo con la raíz positiva.

Estudiaremos el plano de fases de este sistema para determinar el comportamiento del campo. Tenemos que $y' = 0$ en el eje de ordenadas y

$$x' = -y^3 - x^5 + x = 0 \iff y^3 = -x^5 + x \iff y = \sqrt[3]{x - x^5}.$$

Así, x' es positiva por debajo de esta curva y negativa por encima. Representamos el campo de vectores en la Figura 4.5.

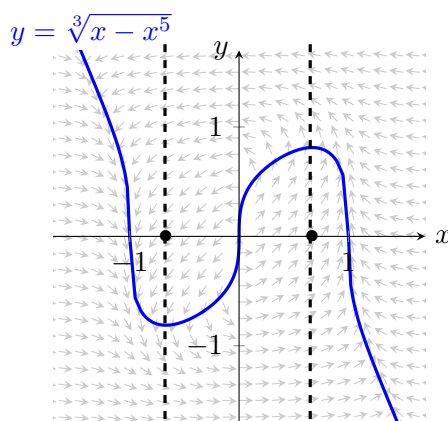


Figura 4.5: Campo de vectores, en gris, del sistema (4.6). Representamos, en azul, la curva $y = \sqrt[3]{x - x^5}$ y, en negro, las rectas $x = \pm \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}$.

Geoméricamente, vemos que, de existir, un ciclo límite no puede cruzar las rectas $x = \pm \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}$ y “darse la vuelta” sin rodear al intervalo $\left[-\frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}, \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5}\right]$ en el eje de abscisas. Por tanto, de existir, este teorema nos garantiza que el (único) ciclo límite es estable.

Pese a no disponer de ningún resultado que nos garantice su existencia, con ayuda del ordenador somos capaces de verificar que existe un ciclo límite, que representamos en la Figura 4.6.

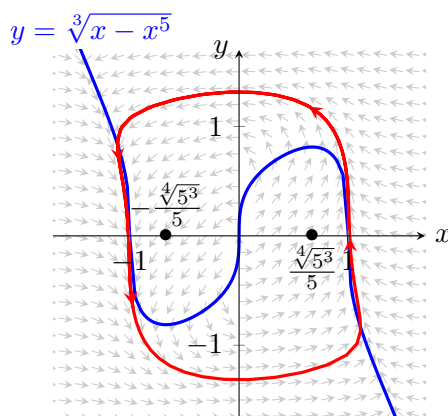


Figura 4.6: Ciclo límite, en rojo, del sistema (4.6). Representamos, en azul, la curva donde $x' = 0$ y, en gris, el campo de vectores.

4.2. Término de rozamiento no lineal dependiendo de x y x'

La ecuación (4.1), por un lado, incluye a u' dentro de una función F que podría ser no lineal, pero, por otro, separa los términos u y u' . Por ello, nos planteamos ahora qué ocurre con una ecuación general de la forma

$$u'' + F(u, u')u' + h(u) = 0. \quad (4.7)$$

En 1952, el matemático A. V. Dragilëv (citado a través de [14]) determinó condiciones suficientes para garantizar la existencia de ciclos límite estables para la ecuación (4.7).

Teorema 4.3. *Supongamos que las funciones coeficiente de la ecuación (4.7) satisfacen las siguientes propiedades:*

1. h, F son continuamente diferenciables en su dominio y, además, $F(0, 0) < 0$.
2. $xh(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H(x) = \infty$, donde $H(x) = \int_0^x h(u) du$.
3. Existe $x_0 > 0$ tal que $F(x, y) \geq 0$ si $|x| \geq x_0$ y existe $M > 0$ tal que $F(x, y) > -M$ si $|x| \leq x_0$.
4. Existe $x_1 > x_0$ tal que, para cualquier función $y(x)$ positiva y decreciente,

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x)) dx \geq 4Mx_0 + \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (4.8)$$

Entonces, el sistema (4.7) posee al menos un ciclo límite estable.

Demostración. ([14]) Consideremos el sistema asociado a la ecuación (4.7)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -F(x, y)y - h(x). \end{cases} \quad (4.9)$$

Para probar la existencia de una órbita periódica estable, construiremos una “región anular” que no contenga al origen, única singularidad del sistema, y de modo que el campo de vectores sea entrante en la región. Esta región anular será un conjunto positivamente invariante y, en virtud del Teorema 1.18 (Teorema de Poincaré-Bendixson), el sistema poseerá un ciclo límite estable en esta región anular.

Empecemos construyendo una curva cerrada que sea la frontera interna de la región anular. Definimos la función

$$\lambda(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x h(u) du = \frac{y^2}{2} + H(x).$$

Recordemos que el gradiente de una función de clase 1 es perpendicular a sus curvas de nivel. En nuestro caso, $\nabla\lambda(x, y) = (h(x), y)$ para cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como $xh(x) > 0$ para todo x no nulo, deducimos que los conjuntos de nivel $\{(x, y) : \lambda(x, y) = C\}$ son curvas cerradas simples rodeando al origen, pues el campo $\nabla\lambda$ siempre apunta alejándose del origen. Como, además, $F(0, 0) < 0$, en un entorno del origen, tenemos que

$$\lambda^*(x, y) = \langle \nabla\lambda(x, y), (y, -F(x, y)y - h(x)) \rangle = h(x)y - F(x, y)y^2 - h(x)y = -F(x, y)y^2 > 0.$$

Tomando $C > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos que $\lambda^*(x, y) > 0$ para todo (x, y) en la curva cerrada $\lambda(x, y) = C$. Por tanto, el campo cruza esta curva desde su interior hacia el exterior. Escogemos esta curva como la frontera interna de la región anular.

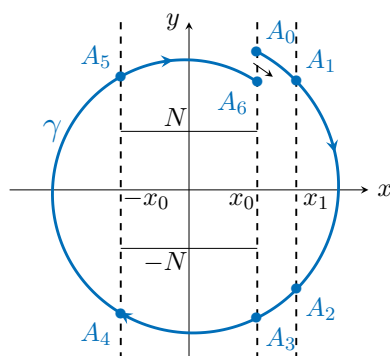


Figura 4.7: Órbita γ , en azul, comenzando en el punto A_0 . Resaltamos, en la curva, los puntos A_1 y A_2 , sobre la recta $x = x_1$; A_3 y A_6 , sobre la recta $x = x_0$; y A_4 y A_5 , sobre la recta $x = -x_0$.

Para construir la frontera externa de la región anular, estudiaremos el comportamiento de una órbita γ comenzando en un punto $A_0 = (x_0, a)$, $a > 0$, sobre la recta $x = x_0$. Representamos, en la Figura 4.7, esta órbita y probaremos la existencia de los seis puntos resaltados.

Si probamos que, para algún a suficientemente grande, la órbita posee, en efecto, esta estructura y, además, no interseca al conjunto de nivel seleccionado anteriormente, podremos tomar como frontera externa de la región anular a la curva cerrada formada por la órbita γ entre A_0 y A_6 junto con el segmento que los une (si observamos la expresión del campo (4.9), vemos que, a lo largo de este segmento, el campo sigue el sentido marcado en la Figura 4.7).

Por la tercera condición del teorema, tenemos que $\lambda^*(x, y) \leq 0$ en los puntos a la derecha de $x = x_0$, luego el campo se mueve del exterior al interior de las curvas de nivel que, recordemos, son curvas cerradas simples rodeando al origen. Así, existe una curva de nivel $\{(x, y) : \lambda(x, y) = c_1\}$ que encierra a γ en este semiplano. Por tanto, como no existen más singularidades, γ debe intersecar al eje de abscisas y luego volver a cruzar la recta $x = x_0$ en un punto A_3 . Asumimos que, si tomamos a lo suficientemente grande, la órbita γ cruza también la recta $x = x_1$ en dos puntos A_1 y A_2 , el primero de ordenada positiva y el segundo de ordenada negativa.

Cuando $|x| \leq x_0$, sabemos, por la tercera condición, que

$$\frac{y'}{x'} = -f(x, y) - \frac{h(x)}{y} \leq M + \frac{\max_{|x| \leq x_0} |h(x)|}{|y|} < M + 1, \quad \forall |y| > \max_{|x| \leq x_0} |h(x)|.$$

Por otro lado, sabemos que la órbita no puede cruzar el conjunto de nivel anterior y que, en el eje de abscisas,

$$x' = 0, \quad y' = -h(x),$$

luego necesariamente la órbita γ cruza el semieje negativo de ordenadas y entra en el tercer cuadrante. Después, o bien cruza el semieje negativo de abscisas sin pasar por la recta $x = -x_0$, o bien, como en la Figura 4.7, sí la cruza. Asumimos, de nuevo, que, si tomamos a suficientemente grande, estamos en el segundo caso.

Como en puntos a la izquierda de $x = -x_0$ tenemos que $\lambda^*(x, y) \leq 0$, de nuevo existe una curva de nivel $\{(x, y) : \lambda(x, y) = c_2\}$ que encierra a γ en este semiplano. Necesariamente, la órbita γ debe cruzar el eje negativo de abscisas y volver para intersecar, otra vez, a la recta $x = -x_0$ en un punto A_5 . De manera análoga al semiplano inferior, deducimos que γ volverá a cruzar el semieje positivo de ordenadas y, más adelante, cruzar $x = x_0$ en el punto A_6 .

Vamos a probar que, para $a > 0$ suficientemente grande, el punto A_6 está por debajo de A_0 , lo que concluiría la construcción de la frontera externa de la región anular. Como necesitamos, además, que esta órbita no corte a la frontera interna de la región anular, probaremos que existe un $N > 0$ dado tal que, si escogemos $a > N$, en la banda $-x_0 \leq x \leq x_1$ la órbita pasa por encima de $y = N$ o por debajo de $y = -N$ (como ocurre en la Figura 4.7).

Antes de demostrarlo, justifiquemos que todos los supuestos anteriores son asumibles. Si γ no cruza la recta $x = x_1$ para ningún $a > 0$, podemos escoger otra órbita $\hat{\gamma}$ empezando en $\hat{A}_1 = (x_1, \hat{a})$, $\hat{a} > 0$. La semi-órbita positiva $\hat{\gamma}^+$ se moverá como hemos descrito antes. Como, en

el primer cuadrante, tenemos que $x' = y \geq 0$, necesariamente $\hat{\gamma}^-$ se irá hacia infinito y tendrá una asíntota vertical en una recta $x = \hat{x}$, con $\hat{x} \in [x_0, x_1)$. En este caso, basta tomar \hat{A}_6 el punto de $\hat{\gamma}^+$ en la recta $x = x_0$ y \hat{A}_0 un punto en $\hat{\gamma}^-$ con abscisa mayor que la abscisa de \hat{A}_6 : en el segmento que une \hat{A}_6 con el punto \hat{A}_0 , el campo es tal que $x' > 0$ e $y' < 0$. La frontera externa de la región anular sería la órbita desde \hat{A}_0 hasta \hat{A}_6 , junto con el segmento que los une.

De manera similar, por ejemplo, si A_3 queda por encima de $y = -N$, podemos tomar la trayectoria $\tilde{\gamma}$ empezando desde $\tilde{A}_3 = (x_0, -N - 1)$, que se comportará como hemos descrito inicialmente, y unir los puntos \hat{A}_3 y \tilde{A}_3 con un segmento, en el que el campo es tal que $x' < 0$ e $y' < 0$.

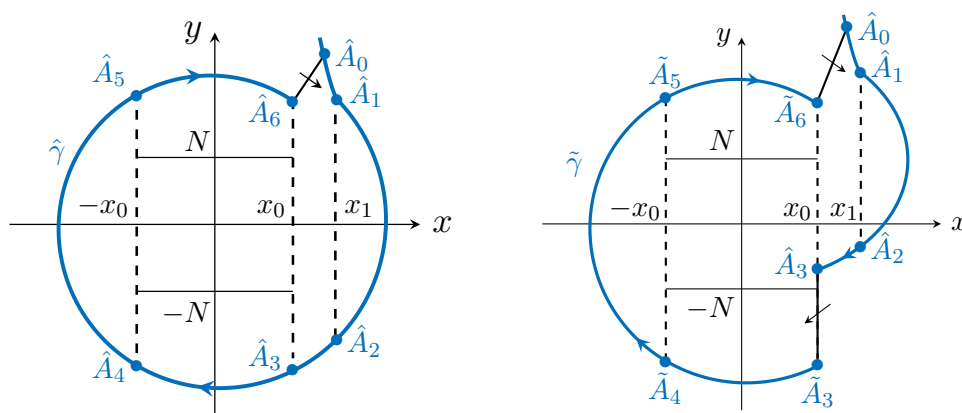


Figura 4.8: Modificaciones de la frontera externa de la región anular. A la izquierda, en el caso en que $\gamma_{(x_0, a)}$ no cruza la recta $x = x_1$ para ningún valor de $a > 0$. A la derecha, en el caso en que, además, \hat{A}_3 queda por encima de $y = -N$. En ambas representaciones, dibujamos la órbita $\hat{\gamma}$ en azul y la semirrecta y el segmento en negro.

Representamos, en la Figura 4.8, ambas modificaciones de la frontera externa de la región anular. En lo que sigue, trabajamos con γ en las condiciones asumidas inicialmente y nos referiremos por $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ a su solución asociada. Denotemos por t_i el instante en el que $\varphi(t_i) = A_i$ y por y_i la ordenada del punto A_i , con $i = 0, \dots, 6$. Vamos a probar que existe un N suficientemente grande tal que $y_0 - y_6 > 0$. Procedemos probando las desigualdades auxiliares siguientes:

- En primer lugar, a lo largo del arco $\widehat{A_0 A_1}$, tenemos que $x' = y$ es positiva. Por tanto, $x(t)$ es inyectiva en $[0, t_1]$ y existe su inversa $x^{-1}: [x_0, x_1] \rightarrow [0, t_1]$. Por tanto, en la siguiente integral,

$$y_1 - y_0 = \int_0^{t_1} y'(t) dt = \int_0^{t_1} [-F(x(t), y(t))y(t) - h(x(t))] dt,$$

podemos hacer el cambio de variable

$$u = x(t) \Leftrightarrow t = x^{-1}(u), \quad du = x'(t) dt \Leftrightarrow dt = \frac{du}{y(t)},$$

quedando, así,

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= - \int_{x_0}^{x_1} F(u, y(x^{-1}(u))) du - \int_{x_0}^{x_1} \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} du < - \int_{x_0}^{x_1} F(u, y(x^{-1}(u))) du \\ &\leq -4Mx_0 - \alpha, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde, en la última desigualdad, hemos utilizado la hipótesis (4.8), pues sabemos que $y(x^{-1}(u))$ es una función positiva y decreciente en $[0, t_1]$.

- A lo largo del arco $\widehat{A_1A_2}$, tenemos que

$$\frac{d\lambda}{dt}(x, y) = yy' + h(x)x' = -F(x, y)y^2 - h(x)y + h(x)y = -F(x, y)y^2 \leq 0.$$

Por tanto, como $x(t_1) = x(t_2) = x_1$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\lambda(x(t), y(t))}{dt} dt = \lambda(A_2) - \lambda(A_1) = \frac{y_2^2}{2} + H(x_1) - \frac{y_1^2}{2} - H(x_1) = \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} \\ &\Leftrightarrow y_1^2 \geq y_2^2 \Leftrightarrow y_1 \geq |y_2| \Leftrightarrow |y_2| - y_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

- En el arco $\widehat{A_2A_3}$ también tenemos que $\frac{d\lambda}{dt}(x, y) \leq 0$. Por tanto, teniendo en cuenta que $x(t_2) = x_1$, $x(t_3) = x_0$ y que estamos asumiendo que $y_2, y_3 < -N$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{t_2}^{t_3} \frac{d\lambda(x(t), y(t))}{dt} dt = \lambda(A_3) - \lambda(A_2) = \frac{y_3^2}{2} + H(x_0) - \frac{y_2^2}{2} - H(x_1) \\ &\Leftrightarrow y_3^2 - y_2^2 = (|y_3| - |y_2|)(|y_3| + |y_2|) \leq 2[H(x_1) - H(x_0)] \\ &\Leftrightarrow |y_3| - |y_2| \leq \frac{2[H(x_1) - H(x_0)]}{|y_3| + |y_2|} < \frac{H(x_1) - H(x_0)}{N}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

- Para el arco $\widehat{A_3A_4}$, procedemos de manera análoga a como hicimos con el arco $\widehat{A_0A_1}$:

$$y_4 - y_3 = \int_{t_3}^{t_4} y'(t) dt = \int_{t_3}^{t_4} [-F(x(t), y(t))y(t) - h(x(t))] dt.$$

Como $x' = y$ no se anula en este arco, $x(t)$ es inyectiva y existe $x^{-1}: [-x_0, x_0] \rightarrow [t_3, t_4]$. Notemos que x^{-1} invierte la orientación. Podemos hacer, por tanto, el mismo cambio de variable que en la primera integral, de manera que obtenemos

$$\begin{aligned} y_4 - y_3 &= - \int_{t_3}^{t_4} F(x(t), y(t)) y(t) dt - \int_{t_3}^{t_4} h(x(t)) dt \\ &= \int_{x_0}^{-x_0} -F(u, y(x^{-1}(u))) du - \int_{x_0}^{-x_0} \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} du. \end{aligned}$$

Es claro que $|y_3| = -y_3$ y $|y_4| = -y_4$, de manera que $|y_4| - |y_3| = -y_4 + y_3$. Vamos a acotar esta cantidad. Además, estamos asumiendo que, a lo largo del arco $\widehat{A_3A_4}$, siempre tenemos $y(t) < -N$. Utilizando este hecho junto con la tercera hipótesis del teorema, obtenemos la desigualdad siguiente:

$$\begin{aligned} |y_4| - |y_3| &= \int_{-x_0}^{x_0} -F(u, y(x^{-1}(u))) \, du - \underbrace{\int_{-x_0}^0 \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} \, du}_{>0} - \int_0^{x_0} \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} \, du \\ &< \int_{-x_0}^{x_0} M \, du + \int_0^{x_0} \frac{h(u)}{N} \, du = 2Mx_0 + \frac{H(x_0)}{N}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

- Como, a lo largo del arco $\widehat{A_4A_5}$, tenemos que $\frac{d\lambda}{dt}(x, y) \leq 0$, de manera análoga a como hicimos para el arco $\widehat{A_1A_2}$, deducimos que

$$\frac{y_5^2}{2} - \frac{y_4^2}{2} \leq 0 \iff y_5^2 \leq y_4^2 \iff y_5 - |y_4| \leq 0. \quad (4.14)$$

- Finalmente, en el arco $\widehat{A_5A_6}$, procedemos como hicimos con el arco $\widehat{A_3A_4}$: como, en este arco, $x' = y$ no se anula, $x(t)$ es inyectiva y existe su inversa $x^{-1}: [-x_0, x_0] \rightarrow [t_5, t_6]$. En la siguiente integral, haremos el mismo cambio de variable que en los casos anteriores. Obtenemos

$$y_6 - y_5 = \int_{t_5}^{t_6} y'(t) \, dt = \int_{-x_0}^{x_0} -F(u, y(x^{-1}(u))) \, du - \int_{-x_0}^{x_0} \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} \, du.$$

Como asumimos que, a lo largo de este arco, $y(t) > N$, junto con la tercera hipótesis del teorema, deducimos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} y_6 - y_5 &< \int_{-x_0}^{x_0} M \, du - \underbrace{\int_0^{x_0} \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} \, du}_{>0} - \int_{-x_0}^0 \frac{h(u)}{y(x^{-1}(u))} \, du \\ &< \int_{-x_0}^{x_0} M \, du + \int_0^{-x_0} \frac{h(u)}{N} \, du = 2Mx_0 + \frac{H(-x_0)}{N}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sumando las expresiones (4.10)–(4.15), obtenemos que

$$y_6 - y_0 < -\alpha + \frac{H(x_1) + H(-x_0)}{N},$$

de manera que, tomando $N \geq \frac{1}{\alpha} [H(x_1) + H(-x_0)]$, queda probado que $y_6 - y_0 < 0$, como queríamos demostrar. \square

A continuación, exponemos un ejemplo para ilustrar el Teorema :

Ejemplo 4.4. Consideremos la ecuación diferencial

$$x'' + (x^2 - 4) (1 + \cos^2(x')) x' + x = 0,$$

con sistema diferencial asociado

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -(x^2 - 4) (1 + \cos^2(y)) y - x. \end{cases} \quad (4.16)$$

Vamos a verificar que el sistema (4.16) está en las condiciones del Teorema 4.3. En primer lugar, las funciones $h(x) = x$ y $F(x, y) = (x^2 - 4)(\cos^2(y) + 1)$ son continuamente diferenciables en su dominio y $F(0, 0) = -8 < 0$. En segundo lugar, $xh(x) = x^2$ es positiva para todo x no nulo y

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x w \, dw = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty.$$

En tercer lugar, tenemos que verificar si existen $x_0 > 0$ y $M > 0$ tales que

$$(x^2 - 4) (1 + \cos^2(y)) \geq 0 \text{ si } |x| \geq x_0, \quad (x^2 - 4) (1 + \cos^2(y)) > -M \text{ si } |x| \leq x_0.$$

Notemos que $1 + \cos^2(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y que $x^2 - 4$ es una función cuya gráfica es una parábola tomando valores positivos en $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ y alcanzando su mínimo en $x = 0$. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4) (1 + \cos^2(y)) \geq 0 &\iff x^2 - 4 \geq 0 \iff |x| \geq 2, \\ (x^2 - 4) (1 + \cos^2(y)) > -M &\iff x^2 - 4 > \frac{-M}{1 + \cos^2(y)} \geq -M. \end{aligned}$$

Si escogemos $M > 4$, tendremos que se cumple la segunda desigualdad para todo $x \in \mathbb{R}$ (y, en particular, para todo $|x| \leq x_0$). Podemos tomar, así, $x_0 = 2$ y $M = 5$. En cuarto y último lugar, tenemos que verificar si existe $x_1 > 2$ que satisfaga que

$$\int_2^{x_1} (x^2 - 4) (1 + \cos^2(y(x))) \, dx \geq 4Mx_0 + \alpha = 40 + \alpha, \quad \alpha > 0,$$

para cualquier función positiva y decreciente $y(x)$. Como $\cos^2(y(x))$ toma siempre valores positivos, independientemente de la función $y(x)$, y $x^2 - 4$ también toma valores positivos en $(2, +\infty)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_2^{x_1} (x^2 - 4) (1 + \cos^2(y(x))) \, dx &= \int_2^{x_1} (x^2 - 4) \, dx + \int_2^{x_1} (x^2 - 4) \cos^2(y(x)) \, dx \\ &\geq \int_2^{x_1} (x^2 - 4) \, dx = \frac{x_1^3}{3} - 4x_1 + \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Esta función toma el valor 0 en $x_1 = 2$ por construcción, es positiva y creciente en $(2, +\infty)$ por ser su derivada, $x^2 - 4$, positiva en este intervalo y, además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3} = \infty.$$

Así, existe $x_1 > 2$ tal que $\frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3} > 40$ para cualquier $x \geq x_1$.

Hemos verificado que el sistema (4.16) satisface las condiciones del Teorema 4.3, luego tenemos garantizada la existencia de al menos un ciclo límite. Representamos, en la Figura 4.9, el campo de vectores del sistema (4.16).

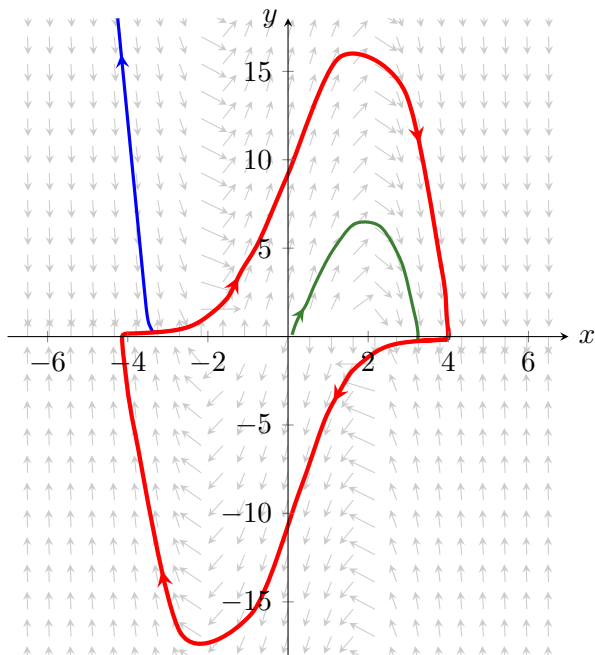


Figura 4.9: Campo de vectores del sistema (4.16). Dibujamos, en rojo, el ciclo límite y, en azul y verde, dos órbitas del sistema.

Anexo I

Código empleado para generar los planos de fases

A lo largo de este trabajo, han sido numerosos los retratos de fases que se han generado tanto para ilustrar ejemplos como para acompañar demostraciones teóricas. En este anexo, quedan recogidos los diferentes archivos de código L^AT_EX y MATLAB [11].

Los paquetes de L^AT_EX que hemos empleado y que están relacionados con la generación de gráficos son TikZ y PGFPlots. Hemos añadido, además, las siguientes líneas de código:

```
\usetikzlibrary{matrix,through,trees,positioning}
\usetikzlibrary{decorations.markings,shapes.arrows}
\usetikzlibrary{arrows.meta,bending}
\pgfplotsset{compat=newest}
```

Para marcar con flechas las orientaciones de las órbitas, hemos definido en el preámbulo del documento algunos comandos inspirados en [12]:

```
\tikzset{FlechasAntihorario/.style={postaction={decorate, decoration={
markings, mark = between positions 0.1 and 1.1 step 50mm with
{\arrow[#1]{stealth};}}}}}

\tikzset{FlechasHorario/.style={postaction={decorate, decoration={
markings, mark = between positions 0.1 and 1.1 step 50mm with
{\arrowreversed[#1]{stealth};}}}}}
```

Así, `FlechasAntihorario` y `FlechasHorario` son opciones que se añaden a la gráfica de la órbita. El argumento `[#1]` corresponde, en principio, al color de la flecha (aunque cualquiera de las opciones de los comandos `arrow` o `arrowreversed` es válida). Por otra parte, `positions 0.1 and 1.1` hace referencia al ángulo donde empiezan y terminan las flechas, donde 0 y 1 representan 0 y 2π radianes, respectivamente. Por último, `step` se refiere a la separación entre flechas.

El siguiente código `LATEX` serviría como plantilla para cualquier retrato de fases cambiando el campo de vectores correspondiente. Para ilustrar su resultado, consideramos el sistema

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) = y - x^3 + x, \\ y' = f_2(x, y) = x, \end{cases}$$

del que, en principio, no conocemos la expresión de sus órbitas. El código para generar su plano de fases con $x \in [-2, 2]$ e $y \in [-2, 2]$ en `LATEX` es el siguiente:

```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
  \begin{axis}[
    axis lines=center, xtick={-2,-1,...,2}, ytick={-2,-1,...,2},
    xlabel={x}, ylabel={y}, xlabel style={right}, ylabel style={above},
    xmin = -2, xmax = 2, ymin = -2, ymax = 2,
    width = 8cm, height = 8cm, view = {0}{90}]
    % Campo de vectores
    \addplot3[quiver = {
      u = {(y-x^3+x)/sqrt((y-x^3+x)^2+(x)^2)},
      v = {(x)/sqrt((y-x^3+x)^2+(x)^2)},
      scale arrows = 0.15,
    }, -stealth, domain = -2:2, domain y = -2:2, black!20]
    {0};
    % Curva y=F(x) -- opcional
    \addplot[very thick, blue,smooth] {x^3-x};
    % Órbita
    \addplot[very thick, red, FlechasAntihorario = red]
      file {carpeta/data.txt};
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Exponemos ahora dos ficheros de código `MATLAB` para generar el documento de texto `data.txt`. El método numérico de aproximación empleado para las ecuaciones diferenciales empleado es Runge-Kutta de cuarto orden y los códigos generados se obtuvieron modificando las prácticas de la asignatura *Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales*.

```

% Programa principal para aproximar la órbita de un sistema
% - María Pérez Armesto
clear all
fid = fopen('data','w'); % fichero de datos
% Datos iniciales
a = 0; b = 12; % Intervalo temporal
eta = [0;0.5]; % punto inicial de la órbita
h = 1.e-1; N = floor((b-a)/h); % paso y nº de iteraciones (= nº de ptos de la órbita)
% Sistema de ecuaciones
f = @(x,y) [y(2)+y(1)-y(1)^3;-y(1)]; % función de dos columnas, con y(1)=x e y(2)=y
% Método
[x,y] = RK4(fid,f,a,eta,h,N);
fclose(fid); % cerrar fichero de datos
%-----%
function [x,y] = RK4(fid,f,a,eta,h,N)
% Función que programa el método de Runge-Kutta de orden 4.
% - María Pérez Armesto
% Inicialización
    yn = eta; xn = a;
    fprintf(fid,'%f %f\n',yn(1),yn(2)); % añadir al .txt el punto inicial
% Método de RK
    for n=1:N
        xn1 = xn;
        xn2 = xn+h/2;
        xn3 = xn + h/2;
        xn4 = xn+h;
        %-----
        kn1 = f(xn1,yn);
        kn2 = f(xn2,yn+(h/2)*kn1);
        kn3 = f(xn3,yn+(h/2)*kn2);
        kn4 = f(xn4,yn+h*kn3);
        %-----
        yn = yn+(h/6)*(kn1+2*kn2+2*kn3+kn4);
        xn = a+n*h;
        fprintf(fid,'%f %f\n',yn(1),yn(2)); % añadir al .txt el nuevo punto
    end
x = xn; y = yn;
end

```

Notemos que, con estos programas, lo que se dibuja es γ^+ . Si se quiere recorrer el tiempo “al revés” (es decir, dibujar γ^-), se hace el cambio de variable

$$\{u(t) = x(-t), v(t) = y(-t)\},$$

de manera que cambian de signo las derivadas de orden impar y quedan iguales las de orden par. En el archivo de código MATLAB, por tanto, se introducirían las funciones $-f_1$ y $-f_2$ y generaríamos γ^- . Este procedimiento es el que hemos utilizado para representar ciclos límite inestables. Notemos que, en estos casos, sería la opción `FlechasHorario` la que marcaría el avance de la órbita en el tiempo, en lugar de no `FlechasAntihorario`.

El producto de todas estas líneas de código es la Figura I.1:

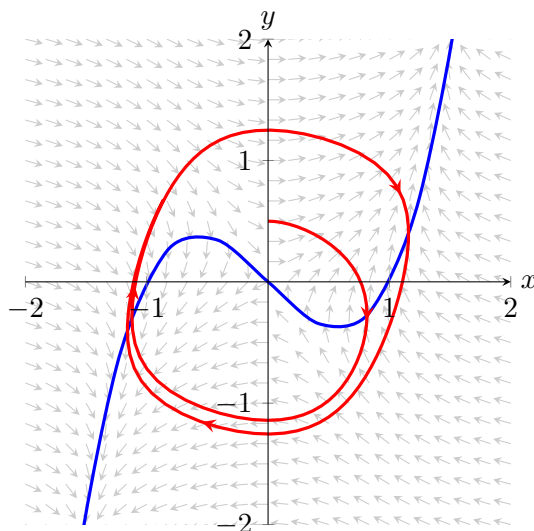


Figura I.1: Campo de vectores del sistema y su ciclo límite. Se representa, en azul, la curva $y = F(x)$, en rojo, $\gamma_{(0, \frac{1}{2})}$ y, en gris, el campo.

Bibliografía

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11^a ed., Wiley, New York.
- [2] L. A. Cherkas, L. I. Zhilevich. (1970). *Some tests for the absence or uniqueness of limit cycles*, *Differentsial'nye Uravneniya*, **6**(7), 1170–1178 (en ruso).
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes. (1996). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, 42, Springer, New York.
- [4] M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 7^a ed., Academic Press, Massachusetts.
- [5] D. S. Jones, M. J. Plank, B. D. Sleeman. (2009). *Differential Equations and Mathematical Biology*, 2^a ed., Chapman and Hall/CRC, New York (acceso a páginas 163–175).
- [6] Les Annales des Mines, Biografía de Alfred-Marie Liénard [página web]. Recuperado de: <https://www.anales.org/archives/x/lienard.html> [Consultado: 12 de junio de 2024].
- [7] A. Liénard. (1928). *Etude des oscillations entretenues*, *Revue Générale de l'Électricité*, **23**, 901–912, 946–954.
- [8] J. E. Marsden, A. J. Tromba. (2004). *Cálculo Vectorial*, 5^a ed., Pearson Educación, Madrid.
- [9] L. Perko. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer, New York.
- [10] G. F. Simmons. (1986). *Ecuaciones Diferenciales: con Aplicaciones y Notas Históricas*, 7^a ed., McGraw-Hill, Madrid.
- [11] The MathWorks Inc. (2023). Optimization Toolbox version: 23.2 (R2023b), The MathWorks Inc, Natick, Massachusetts. <https://www.mathworks.com>.
- [12] TikZBlog (2020). Phase portrait of Van-Der-Pol oscillator in TikZ [página web]. Recuperado de: <https://latexdraw.com/phase-portrait-of-van-der-pol-oscillator/> [Consultado: 12 de junio de 2024].

-
- [13] G. Villari. (1987). *On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation*, Journal of Differential Equations, **67**(2), 269–277.
- [14] Y. Yan-Quian, C. Sui-Lin. (1986). *Theory of Limit Cycles*, 7^a ed., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [15] E. C. Zeeman. (1972). *Differential equations for the heartbeat and nerve impulse*. En: C. H. Waddington (ed.), *Biological Processes in Living Systems: Toward a Theoretical Biology*. Edinburgh University Press, Edinburgh, 8–67.