



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# OCULTACIÓNS E TRÁNSITOS EN ASTRONOMÍA

ENRIQUE CARDERO RIVEIRO

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Ocultacións e Tránsitos en Astronomía

Enrique Cardero Riveiro

09/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento: Astronomía e Astrofísica</b>
<b>Título: Ocultacións e tránsitos en astronomía</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Os astros no seu movemento aparente pola esfera celeste producen interposicións entre o observador e os mesmos. As máis frecuentes son as que se producen entre a Lúa e unha estrela, planeta ou asteroide, as denominadas ocultacións, ou ben entre unha estrela e un planeta, chamadas tránsitos.</p> <p>Estudaranse os fundamentos físicos e o tratamento matemáticos destes fenómenos. Xeometricamente pódense considerar como casos particulares dos coñecidos eclipses solares e luars. Analizarase igualmente a importancia das súas aplicacións en distintos campos da astronomía.</p> <p>Completarase o estudo co rexistro de ocultacións pola Lúa, utilizando diversos dispositivos e os telescopios do observatorio astronómico.</p>
<b>Recomendacións</b>
Ter cursado ou estar cursando a materia de Fundamentos de Astronomía.
<b>Outras observacións</b>

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Ocultaciones de estrellas por la Luna</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción a las ocultaciones de estrellas por la Luna . . . . .	1
1.2. Ocultaciones como particularización de los eclipses de Sol . . . . .	2
1.3. Predicción para un lugar dado . . . . .	8
1.4. Puntos de contacto con el limbo lunar . . . . .	12
1.5. Distancia mínima e instante central . . . . .	13
1.6. Paralelos límite de la ocultación . . . . .	14
<b>2. Tránsitos</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción a los tránsitos . . . . .	19
2.2. Predicción para el centro de la Tierra . . . . .	20
2.3. Predicción para un punto de observación en la superficie . . . . .	23
<b>3. La observación del fenómeno</b>	<b>33</b>
3.1. Generalidades de nuestras observaciones . . . . .	33
3.1.1. Telescopios . . . . .	33
3.1.2. Medida del tiempo y coordenadas . . . . .	35
3.2. Observación: ocultación de una estrella por la Luna . . . . .	35
3.2.1. Otros materiales para la observación de ocultaciones . . . . .	37
3.2.2. Montaje del equipo para la observación de una ocultación . . . . .	37
3.3. Observación: tránsitos . . . . .	39
3.4. El tránsito de Mercurio del 11/11/2019 . . . . .	41
3.4.1. Generalidades sobre los tránsitos de Mercurio . . . . .	41

3.4.2.	Predicciones para la observación: primera iteración paso a paso . . .	43
3.4.3.	Predicciones para la observación: aplicación completa del método iterativo . . . . .	46
3.4.4.	Predicciones para la observación: resultados finales . . . . .	50
3.4.5.	Particularidades de este tránsito y resultados de la observación . . .	50
<b>4.</b>	<b>Principales aplicaciones astronómicas</b>	<b>55</b>
4.1.	Aplicaciones de la observación de ocultaciones . . . . .	55
4.2.	Aplicaciones de la observación de tránsitos . . . . .	57
	<b>Glosario</b>	<b>61</b>
	<b>Referencias</b>	<b>65</b>





# Agradecimientos

Una parte importante de la experiencia de elaboración de este trabajo han sido las prácticas observacionales. Por la coordinación de las mismas y su asistencia durante la redacción de este escrito, quiero dar las gracias a mi tutora, Josefina F. Ling Ling, así como a Ramón Iglesias Marzoa, Rubén Díez Lázaro y José Ángel Docobo Duránte por su ayuda y asesoramiento durante la realización de las mismas y el material prestado para poder llevarlas a cabo.



## Resumen

Las ocultaciones y los tránsitos pueden ser descritos en términos de modelos geométricos. El objetivo principal de este trabajo consiste en explicar algunos métodos de predicción para ambos fenómenos basados en tales modelos, de modo que podemos usarlos para llevar a cabo observaciones útiles en el momento apropiado.

Debido a sus similitudes, primero introduciremos algo de teoría de eclipses, que será nuestro punto de partida para desarrollar un método iterativo para predecir el instante en que tendrá lugar una determinada etapa de la ocultación. Después, desarrollaremos un algoritmo similar para predecir los instantes de los eventos principales de un tránsito planetario (llamados “contactos”). Por tanto, los primeros dos capítulos de este trabajo se centran en usar trigonometría para describir ocultaciones y tránsitos, destacando la importancia de las matemáticas como una poderosa herramienta para describir todo tipo de fenómenos físicos.

Tras explicar el trasfondo matemático de nuestros algoritmos, es momento de llevar a cabo observaciones basándonos en nuestras predicciones. El tercer capítulo aborda las observaciones de ocultaciones y tránsitos desde un punto de vista más descriptivo. Sin embargo, ya que tuvimos la suerte de observar el último tránsito de Mercurio (11/11/2019), le daremos el protagonismo que merece aplicando nuestros algoritmos de predicción y analizando la información obtenida durante la observación. Para concluir, nuestro último capítulo describe las aplicaciones más importantes de ocultaciones y tránsitos en las investigaciones astronómicas de la actualidad.

## Abstract

Occultations and transits can be described in terms of geometrical models. This work is mainly intended to explain some prediction methods for both kinds of phenomena based on such models, so we can use them to conduct useful observations at the right time.

Due to their similarities, we'll first introduce some eclipse theory, which will be our entry point to develop an iterative method to predict the time when a certain stage of an occultation will happen. After that, we'll develop a similar algorithm to predict the time for the main events of a planetary transit (known as "contacts"). Therefore, the first two chapters of this work are focused on using trigonometry to describe occultations and transits, highlighting the importance of mathematics as a powerful tool to explain all kinds of physical phenomena.

After explaining the mathematical background of our algorithms, it's time to conduct some observations based on our predictions. The third chapter approaches observations of occultations and transits from a more descriptive point of view. However, as we were fortunate to observe the last transit of Mercury (11/11/2019), we'll give it a well-deserved main role by applying our prediction algorithms and analyzing the information obtained during the observation. To conclude, our last chapter describes the most important applications of occultations and transits in today's astronomical research.

# Introducción

La cuestión del movimiento ha sido tema de interés ya desde los filósofos de la antigua Grecia: cuestionar su existencia, entender su naturaleza, encontrar su causa... Diferentes posturas han chocado para describir este fenómeno. Para algunos pensadores, como Heráclito de Éfeso (535 a.C. - 470 a.C.), ha llegado a gozar de una importancia capital, entendiendo el movimiento como una noción de cambio, presente en la misma esencia de la realidad. Más allá de las diferentes connotaciones que pueda recibir, entendemos el movimiento en sentido físico como cualquier desplazamiento en el espacio con respecto a un sistema de referencia y a lo largo de un intervalo de tiempo.

Hoy en día, gracias a los numerosos avances científicos hechos desde la antigüedad, hemos logrado utilizar las matemáticas para modelizar multitud de fenómenos y situaciones, y la Astronomía no es una excepción a esta tendencia. Es posible utilizar estos modelos matemáticos para describir de forma bastante precisa las posiciones de los astros en un instante determinado, permitiéndonos elaborar unas efemérides astronómicas que faciliten la planificación de las observaciones de dichos fenómenos. En su movimiento por el firmamento, no es raro que las trayectorias de los astros se entrecrucen desde nuestro punto de vista, lo que provoca que el más cercano nos impida o reduzca temporalmente la visión del más alejado con respecto a la Tierra. Esto es lo que llamamos una ocultación, que constituirá el eje central de este trabajo.

Entendemos por ocultación la interposición de un astro frente a otro, visto desde la Tierra, que se da bajo unas determinadas condiciones relacionadas con la posición relativa de los cuerpos que intervienen. Atendiendo al tamaño aparente de los astros involucrados, podemos distinguir tres tipos de fenómenos:

- Se habla de **ocultación** cuando el astro que oculta es aparentemente más grande que el ocultado. Un ejemplo de esto es la ocultación de una estrella por la Luna. A pesar de que sabemos que las estrellas son muchísimo más grandes que nuestro satélite, la distancia que nos separa de la estrella es mucho mayor, con lo que su tamaño aparente es muy inferior al de la Luna.

- Cuando los dos astros que intervienen tienen un tamaño aparente similar hablamos de un **eclipse**, probablemente el más conocido de los tres debido a la espectacularidad de los mismos. El ejemplo más claro lo encontramos en los eclipses de Sol y de Luna, aunque también podemos encontrar estos fenómenos en otros lugares, por ejemplo, los eclipses entre satélites galileanos<sup>1</sup>.
- Se entiende por **tránsito** el paso de un astro por delante de otro que tiene un tamaño aparente notablemente mayor. Como ejemplos destacamos los tránsitos de Mercurio y Venus por delante del Sol. En particular, hablaremos en el tercer capítulo sobre el tránsito de Mercurio del 11 de noviembre de 2019, que hemos tenido la oportunidad de observar.

Existe también otro criterio que define un eclipse como el paso de un astro por la sombra de otro, de modo que los eclipses de Luna seguirían considerándose eclipses, pero los eclipses de Sol serían, estrictamente hablando, una ocultación. Uno de los factores más importantes para hacer esta distinción es que los eclipses serían visibles en cualquier lugar donde pueda verse el astro involucrado, mientras que las ocultaciones solo son visibles en determinadas zonas. En efecto, esto último es lo que ocurre en el caso de los eclipses de Sol, y de ahí este criterio de clasificación alternativo.

El inicio del interés por estos fenómenos se remonta, nuevamente, a la antigüedad. Los griegos buscaron la cuantización del Universo, tratar de describirlo con números; en particular, medir tamaños y distancias. Por ejemplo, la sombra de la Tierra proyectada sobre la superficie lunar fue utilizada por Aristarco de Samos para dar una estimación de los tamaños relativos del Sol, la Tierra y la Luna. Los métodos usados por Aristarco fueron utilizados durante mucho tiempo para esta clase de observaciones; curiosamente, un error de cálculo del propio Aristarco condujo a una estimación errónea de la distancia al Sol, confundiendo incluso a destacados astrónomos como Nicolás Copérnico y Tycho Brahe, ya en el siglo XVI.

Acercándonos ya a la modernidad, en el siglo XVII, Galileo Galilei revolucionó la astronomía con la introducción del telescopio como instrumento de observación. Esto permitió unas mejores estimaciones de los tamaños y distancias en el Sistema Solar (en aquel momento, el planeta más lejano conocido era Saturno). También se facilitó la observación de los tránsitos de Mercurio y Venus mediante el método de la proyección, del cual hablaremos en su correspondiente sección.

Todavía se conservaba este interés clásico por la cuantización, y esto se acentuó cuando

---

<sup>1</sup> *Ío, Europa, Ganimedes y Calisto* son los cuatro satélites más grandes de Júpiter, y reciben la denominación de *galileanos* en honor a Galileo Galilei, quien los descubrió en el año 1610.

Johannes Kepler, coetáneo de Galileo, enunció sus tres leyes. La tercera de ellas afirma que la relación entre el cuadrado del período y el cubo de la distancia media al Sol de todos los planetas venía dada por una constante; de este modo, como se conocían bien los períodos planetarios, bastaría con estimar bien la distancia media de cualquier planeta al Sol para calcular esa constante. Una opción es clara: la correcta determinación de la distancia de la Tierra al Sol, corrigiendo los errores cometidos por los astrónomos de épocas anteriores con la ayuda de los nuevos avances científicos e instrumentales.

En este interés por el estudio cuantitativo de la realidad tuvieron gran importancia las ocultaciones y los tránsitos, por ser muy buenos indicativos de la posición relativa de los astros involucrados. De las observaciones de estos fenómenos se puede extraer información muy útil, incluso a día de hoy, donde los tránsitos constituyen uno de los métodos principales en la búsqueda de exoplanetas, así como otras aplicaciones que comentaremos más adelante.

Además, para este tipo de observaciones es conveniente hacer predicciones aproximadas con el fin de prepararse apropiadamente para el momento de llevarlas a cabo. Es aquí donde entran de nuevo en juego las Matemáticas como herramienta para la formalización teórica, tratando todos los aspectos relativos a la geometría de ocultaciones y tránsitos, estimando los instantes en que deberemos prestar atención al fenómeno, y permitiéndonos un estudio correcto y riguroso de la información obtenida durante la observación para extraer conclusiones.

Dividiremos este trabajo en cuatro capítulos. En el primero de ellos trataremos de explicar los fundamentos de las ocultaciones, entendiendo la geometría subyacente y permitiéndonos así desarrollar un método iterativo para la predicción de las mismas. En el segundo capítulo, abordaremos el tema de los tránsitos con un enfoque similar. Una vez estudiadas estas cuestiones formales, explicaremos cómo sacarles partido a través de las observaciones astronómicas en el tercer capítulo, dedicando especial interés a la predicción y observación del tránsito de Mercurio del 11 de noviembre de 2019. Finalmente, en el cuarto capítulo profundizaremos un poco más en la utilidad de la observación de ambos fenómenos, justificando así la necesidad de llevarlas a cabo.



# Capítulo 1

## Ocultaciones de estrellas por la Luna

### 1.1. Introducción a las ocultaciones de estrellas por la Luna

La **esfera celeste** es una esfera imaginaria, de radio arbitrario y centrada en la Tierra, sobre la cual se mueven aparentemente los astros. La razón de este movimiento es la rotación de la Tierra sobre su eje, cuya prolongación define el eje de rotación de la esfera celeste y recibe el nombre de **eje del mundo**. Dado que el movimiento de rotación de la Tierra es en sentido Oeste-Este, entonces el movimiento aparente de los astros en la esfera celeste ocurre en dirección Este-Oeste. La esfera celeste es un elemento muy importante en astronomía, ya que sobre ella se definen los distintos sistemas de coordenadas que usamos para localizar los astros (horizontales, ecuatoriales horarias, ecuatoriales absolutas, eclípticas, galácticas).

La Luna también orbita en torno a la Tierra, y como consecuencia, podemos observar cómo se desplaza hacia el Este con respecto al fondo estelar. Debido a esto, muchas veces el disco lunar se interpone entre una estrella y la Tierra, produciendo lo que llamamos una ocultación. La Luna, aunque sabemos que es muchísimo más pequeña que las estrellas, está también mucho más cerca de la Tierra, por lo que su tamaño aparente es mucho mayor. De hecho, la gran distancia que nos separa de otras estrellas hace que su visión desde nuestra perspectiva quede reducida a un único punto en la esfera celeste.

En una ocultación de una estrella podemos destacar dos eventos: la **inmersión**, que es el instante en que la estrella desaparece tras el disco lunar, y la **emersión**, el instante en que la estrella reaparece. El intervalo de tiempo que la estrella permanece oculta puede ir desde unos instantes a más de una hora. Por eso, es muy importante la predicción de estos fenómenos para permitir su observación.

Un caso particular es el de las **ocultaciones rasantes**, que como su nombre indica, consisten en el paso de una estrella muy cerca del borde del disco lunar, de manera que se pueden producir apariciones y desapariciones intermitentes debidas al relieve de la Luna.

Esto, así como la desaparición súbita de la estrella durante cualquier ocultación en vez de una desaparición gradual, se debe a la ausencia de atmósfera lunar, lo cual permite también el análisis de estos fenómenos mediante fotometría. Estos aspectos más prácticos relacionados con la observación los trataremos en el Capítulo 3.

El interés principal del estudio de estas ocultaciones se encuentra en la teoría sobre el movimiento de la Luna. Dado que se trata de un movimiento muy complejo, es difícil hacer predicciones precisas sobre su posición en cada instante. El conocimiento de las coordenadas exactas de una estrella y la correcta medida de los instantes en que se produce una ocultación nos permiten determinar con precisión la posición de nuestro satélite en relación a la posición del punto de observación.

## 1.2. Ocultaciones como particularización de los eclipses de Sol

Para desarrollar la teoría sobre la predicción de ocultaciones de estrellas por la Luna, vamos a tomar como punto de partida la teoría sobre los eclipses de Sol, para posteriormente analizar las ocultaciones como un caso particular de las ecuaciones aquí expuestas. Dado que nuestro interés son las ocultaciones de estrellas y no la teoría de eclipses, no desarrollaremos en exceso esta última, proporcionando al lector algunas referencias recomendadas en caso de buscar una justificación rigurosa de las fórmulas enunciadas.

Un elemento geométrico común a ambos fenómenos y que usaremos como fundamento de nuestros razonamientos es el **eje de sombra**. Se trata de una recta imaginaria que, como estamos considerando un eclipse solar, pasa por los centros del Sol y de la Luna, y a partir de él definiremos un sistema de referencia para nuestros cálculos. Centraremos nuestra atención especialmente en un punto que llamaremos  $Z$ , que es lo que se conoce en geometría como el **punto de fuga**, es decir, aquel punto en el que se cortarían aparentemente todas las rectas en el espacio que comparten una dirección (en este caso, la dirección del eje de sombra). Denotaremos las coordenadas ecuatoriales absolutas de este punto (ascensión recta y declinación) por  $(a, d)$ .

Consideremos un nuevo sistema de coordenadas ortogonal dextrógiro, donde el plano  $XY$  será el que pasa por el centro de la Tierra y es perpendicular al eje de sombra, y nos referiremos a él como **Plano Fundamental o Principal de Referencia** según Bessel. El plano  $YZ$  se corresponderá con el que contiene al meridiano celeste que pasa por  $Z$ . Por último, el plano  $XZ$  será ortogonal a estos dos. El eje  $y$  queda determinado por la intersección de los planos  $XY$  e  $YZ$ , y lo tomamos positivo hacia el norte (figura 1.1; el punto  $P$  representa el Polo Norte Celeste en todas las figuras donde aparezca). El eje  $z$

## 1.2. OCULTACIONES COMO PARTICULARIZACIÓN DE LOS ECLIPSES DE SOL 3

vendrá dado por la recta paralela al eje de sombra que pasa por el centro de la Tierra, y se tomará positivo hacia  $Z$ . Por último, el eje  $x$  se toma positivo hacia el punto  $X$ , cuya ascensión recta es  $90 + a$ .

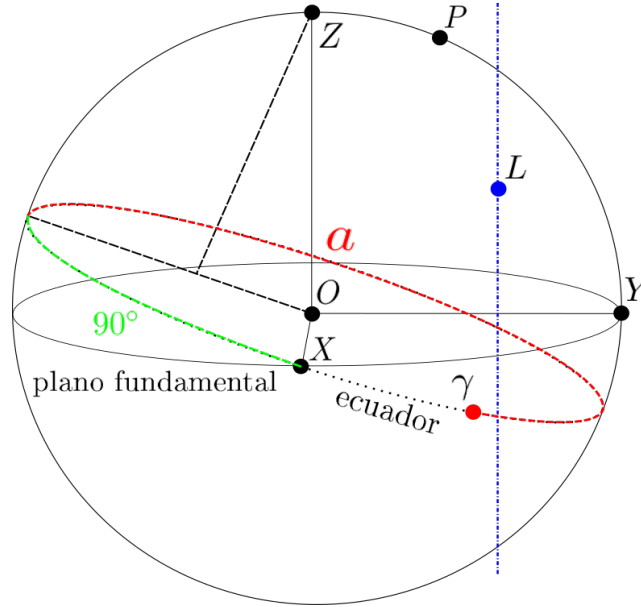


Figura 1.1: Representación del sistema de referencia descrito. Obsérvese que el eje de sombra, representado en azul, y el eje  $OZ$ , son paralelos, aunque desde nuestro punto de vista se cortarán en el punto  $Z$  (punto de fuga).

En la figura 1.1, el punto  $\gamma$ , conocido también como **punto Aries**, es uno de los dos puntos donde la eclíptica (la trayectoria aparente del Sol en la esfera celeste) corta al ecuador celeste; concretamente, es el punto donde se encuentra el Sol durante el equinoccio de marzo, en el instante en que comienza la primavera en el hemisferio Norte, y es el que se toma como referencia en las coordenadas ecuatoriales absolutas para determinar la ascensión recta de un astro.

Sea ahora  $L$  el punto que marca el centro de la Luna, cuyas coordenadas en este sistema de referencia vienen dadas por la terna  $(x, y, z)$ . Podemos calcularlas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\delta) \operatorname{sen}(\alpha - a) \\ y &= r(\operatorname{sen}(\delta) \cos(d) - \cos(\delta) \operatorname{sen}(d) \cos(\alpha - a)) \\ z &= r(\operatorname{sen}(\delta) \operatorname{sen}(d) + \cos(\delta) \cos(d) \cos(\alpha - a)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde  $\alpha$  y  $\delta$  son, respectivamente, la ascensión recta y la declinación de la Luna, y  $r$  la distancia que hay del centro de la Tierra al de la Luna.

Explicamos muy brevemente el cálculo de  $x$ , pudiendo razonar análogamente para el resto de casos. Una forma de definir la coordenada  $x$  sería la altura del punto  $L$  sobre el plano  $YZ$ . Si pensamos en las coordenadas esféricas, podemos describir esa altura como una expresión dependiente únicamente de la distancia de  $L$  al centro de la esfera celeste (radio, que en este caso es la distancia Tierra-Luna) y el coseno del ángulo que determinan los *radiovectores* que pasan por  $L$  y por  $X$ , ya que el punto  $X$  es el polo del plano  $YZ$ . Así, se tiene en este caso que  $x = r \cos(LX)$ . La expresión final se sigue de aplicar la primera fórmula de Bessel al triángulo esférico  $LPX$  para desarrollar  $\cos(LX)$ , teniendo en cuenta que los ángulos involucrados se pueden describir a partir de las coordenadas de la Luna  $(\alpha, \delta)$  y las coordenadas de  $Z$   $(a, d)$ .

Nos interesa también conocer las coordenadas del punto de observación en este mismo sistema, que llamaremos  $(\xi, \eta, \zeta)$ , y que podemos calcular del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos(\psi) \operatorname{sen}(\theta - a) \\ \eta &= \rho (\operatorname{sen}(\psi) \cos(d) - \cos(\psi) \operatorname{sen}(d) \cos(\theta - a)) \\ \zeta &= \rho (\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(d) + \cos(\psi) \cos(d) \cos(\theta - a))\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $\rho$  es el radio de la Tierra en el punto de observación,  $\psi$  la latitud geocéntrica del lugar y  $\theta$  el *tiempo sidéreo local*. Los cálculos que hay que hacer para llegar a estas fórmulas son muy similares a los que hemos explicado para (1.1).

Para un desarrollo más extenso del cálculo de las ternas  $(x, y, z)$  y  $(\xi, \eta, \zeta)$ , se puede consultar cualquiera de los dos libros de Gil Chica[7] [8], especialmente *Nueva Teoría de Eclipses*, pp. 40-44, una versión más actualizada donde se tratan estas ecuaciones en una extensión mayor.

Sea  $\Delta$  la distancia desde el punto de observación  $(\xi, \eta, \zeta)$  al eje de sombra. Se tiene que:

$$\Delta = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

o, equivalentemente:

$$\begin{cases} \Delta \operatorname{sen}(Q) = x - \xi \\ \Delta \cos(Q) = y - \eta \end{cases}$$

donde  $Q$  es el ángulo de posición del punto de contacto entre los dos astros. Llamemos  $O'$  a la proyección del punto de observación  $(\xi, \eta, \zeta)$  sobre el plano fundamental. Como se puede ver en la figura 1.2, el ángulo  $Q$  es el que forma el meridiano celeste que pasa por  $Z$  con el círculo máximo que pasa por  $Z$  y el centro de la Luna ( $L$ ). En realidad, los círculos máximos que se están representando serían rectas paralelas al eje de sombra, por lo que aparentemente se cortan en el punto  $Z$  (punto de fuga). Esto es importante ya que, como una de ellas pasa por el centro de la Luna ( $L$ ) y es paralela al eje de sombra, entonces

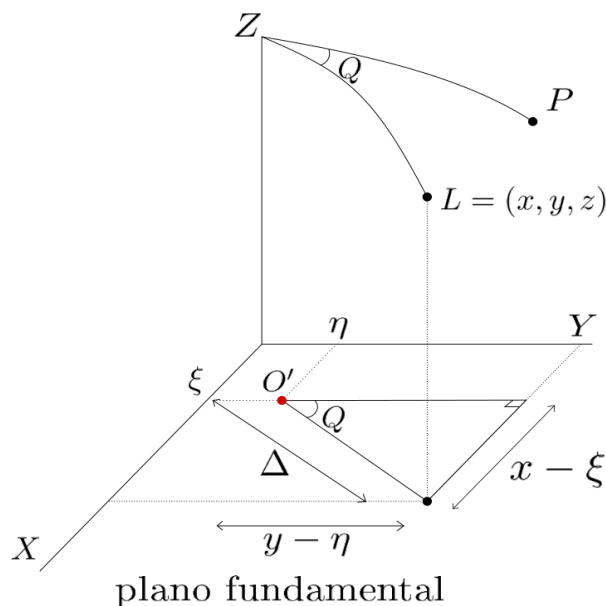


Figura 1.2: Interpretación del ángulo  $Q$  y relación con la distancia  $\Delta$ . El punto rojo es la proyección del punto de observación sobre el plano fundamental.

necesariamente coincide con este último, luego esa misma recta pasa también por el centro del Sol, de acuerdo con la definición geométrica del eje de sombra. Por tanto, dado que dicha recta pasa por los centros del Sol y de la Luna, entonces pasa también por el punto de contacto; de este hecho se sigue que el ángulo  $Q$  es el ángulo de posición del punto de contacto entre los dos astros. Más concretamente,  $Q$  coincide con el ángulo, medido sobre el disco solar, que va desde el punto norte del *limbo* (es decir, el punto de intersección del limbo con el meridiano celeste que pasa por el centro del Sol) hasta el punto de contacto en sentido Norte-Este-Sur-Oeste (en sentido antihorario).

En la representación geométrica del eclipse de Sol (figura 1.3) podemos ver cómo se forman dos conos. Uno de ellos es el **cono de sombra**, cuyas generatrices quedan determinadas por las tangentes exteriores al Sol y la Luna, mientras que el otro es el **cono de penumbra**, determinado por las tangentes interiores. Ambos cortan al plano fundamental (y, claramente, cualquier plano paralelo a él) según una circunferencia. Sean  $\Sigma$  y  $\varsigma$  respectivamente los radios de las circunferencias de corte con el plano  $z = \zeta$  (a la altura del punto de observación) y con el plano fundamental. Entonces, esos radios vienen dados por:

$$\varsigma = z \tan(f) \pm k \sec(f)$$

$$\Sigma = \varsigma - \zeta \tan(f)$$

donde  $z$  y  $\zeta$  siguen siendo la correspondientes coordenadas que hemos calculado para la Luna y el punto de observación anteriormente,  $k = \frac{R_L}{R_T}$  es la razón entre el radio lunar y el radio ecuatorial terrestre (o, dicho de otro modo, el radio de la Luna expresado en radios terrestres), y  $f$  es el ángulo del correspondiente cono, es decir, el ángulo determinado por una generatriz y el eje de sombra (no haremos distinción notacional; simplemente, elegiremos uno de los dos conos y llamaremos  $f$  al ángulo descrito). En la figura 1.3 representamos el ángulo de cada cono para mayor claridad). El doble signo en la expresión de  $\zeta$  es el que determina cuál de los dos conos estamos considerando: el de penumbra si tomamos el signo positivo, o el de sombra si tomamos el negativo.

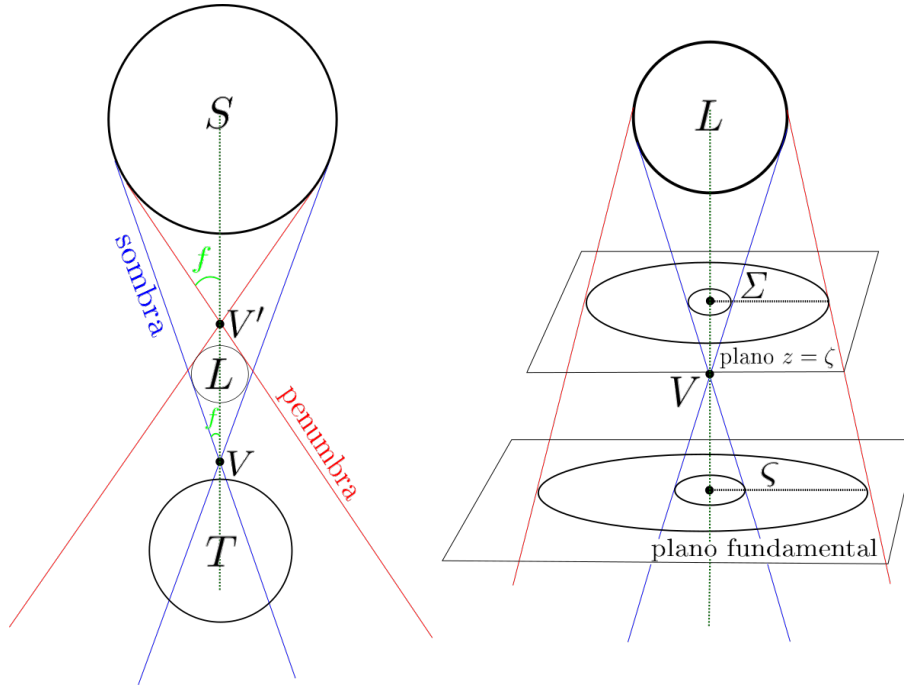


Figura 1.3: Geometría de los eclipses de Sol. A la izquierda, de arriba abajo, el Sol ( $S$ ), la Luna ( $L$ ) y la Tierra ( $T$ ).  $V$  y  $V'$  denotan los vértices de los conos de sombra y penumbra respectivamente.

De lo que hemos comentado en los párrafos anteriores se sigue la **ecuación fundamental** de los eclipses de Sol, que es la que marca el inicio o final del eclipse y viene dada por:

$$\Delta = \Sigma \tag{1.3}$$

o, equivalentemente:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\varsigma - i\zeta)^2.$$

## 1.2. OCULTACIONES COMO PARTICULARIZACIÓN DE LOS ECLIPSES DE SOL 7

con  $i = \tan(f)$ . Intuitivamente, este planteamiento resulta lógico, ya que el inicio o final del eclipse ocurre cuando los limbos del Sol y la Luna se tocan en un único punto, y esto es lo que ocurre cuando el observador se encuentra en el extremo del cono de sombra, es decir, la distancia del observador al eje de sombra ( $\Delta$ ) coincide con el radio del cono ( $\Sigma$ ).

Las cantidades  $(a, d, x, y, \varsigma, i)$  que hemos calculado reciben el nombre de **elementos besselianos** del eclipse. Como no dependen del lugar de observación, son los valores utilizados en las predicciones para un lugar específico en la superficie de la Tierra.

Con esto concluye la base de teoría de eclipses que necesitamos para el estudio de las ocultaciones. Para tener una explicación más detallada acerca de los procedimientos llevados a cabo en la obtención de todas estas expresiones, se recomienda consultar los libros de Gil Chica [7] [8] referidos en la bibliografía, así como el libro de Chauvenet [4], que simplifica el método de Friedrich Bessel para la predicción de eclipses.

El interés de todo esto viene de que podemos tratar las ocultaciones de estrellas por la Luna como un caso particular de los eclipses de Sol, y con estos fundamentos teóricos ya tenemos resuelta buena parte del problema. Para el caso de una ocultación, vamos a suponer que desplazamos el Sol a una distancia infinita. Una primera consecuencia de este hecho es que la estrella, al estar a distancia infinita y sobre el eje de sombra, entonces coincidirá con el punto de fuga ( $Z$ ); de este modo, mientras que en el caso de un eclipse se necesitaba calcular las coordenadas de  $Z$ , ahora nos basta con consultar en las *efemérides* las coordenadas ecuatoriales absolutas de la estrella ocultada. Por tanto, con estos datos podemos resolver (1.1) y (1.2), ya que el eje de sombra no cambió de dirección con respecto al caso de un eclipse y, por tanto, el sistema de referencia utilizado es el mismo, luego las coordenadas del centro de la Luna y el punto de observación no varían.

Existen también otras implicaciones más importantes derivadas del desplazamiento del Sol a distancia infinita que hemos definido. Para entenderlas mejor, introducimos dos nuevos conceptos.

En primer lugar, llamamos **semidiámetro** al ángulo bajo el cual se ve el radio de un astro desde el centro de la Tierra. Por otro lado, llamamos *paralaje horizontal* al ángulo bajo el que se ve el radio de la Tierra desde el centro de un astro cuando está situado en el horizonte del observador. Estos dos conceptos aparecen en buena parte de los procedimientos para hallar las ecuaciones que hemos expuesto para los eclipses de Sol, y de ahí su importancia. En la figura 1.4 se muestra una representación de dichos ángulos. En particular, representamos el paralaje horizontal de la Luna (que denotamos por  $P_L$ ) porque más adelante nos interesará entender su relación con la distancia Tierra-Luna ( $r$ ), pero la figura sigue siendo válida cambiando la Luna ( $L$ ) por otro astro y sustituyendo la distancia  $r$  por la distancia entre los centros de la Tierra ( $T$ ) y el nuevo astro.

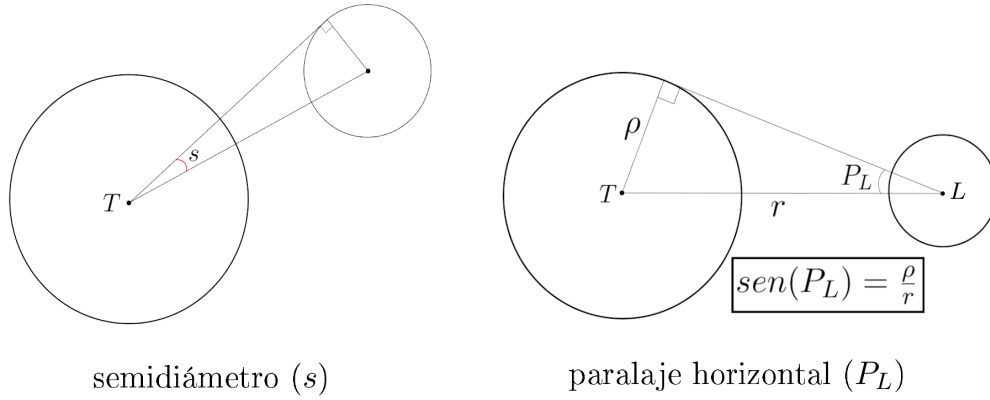


Figura 1.4: Representación del semidiámetro ( $s$ ) y el paralaje horizontal ( $P_L$ ).

Cuando trasladamos el Sol a una distancia infinita, tanto el semidiámetro como el paralaje horizontal se anulan, y como consecuencia, en vez de tener los conos de sombra y de penumbra, nos queda un cilindro de radio constante, como se muestra en la figura 1.5. Tomando las fórmulas para los radios de los conos de sombra y penumbra y haciendo la sustitución  $f = 0$ , ya que ahora las que serían generatrices de un cono son rectas paralelas, obtenemos en ambos casos  $\Sigma = \zeta = \pm k$ . Tomamos  $k$  como una constante positiva, omitiendo el signo, ya que se trata del radio del cilindro y en este caso, a diferencia de lo que ocurría con los eclipses de Sol, no es necesario para estudiar la posición de un vértice con respecto al punto de observación. Como se trata de un cilindro cuyas generatrices son tangentes a la Luna, entonces claramente su radio coincide con el de la Luna; por tanto, si tomamos como unidad el radio ecuatorial terrestre, obtenemos que  $k = 0,2725$ .

### 1.3. Predicción para un lugar dado

Tras las consideraciones anteriores, ya tenemos resueltas las cuestiones geométricas fundamentales acerca de este tipo de ocultaciones. Ahora, nos centraremos en la predicción de una ocultación para un determinado lugar de la Tierra; más concretamente, supondremos que sabemos que cierto día una ocultación va a tener lugar, y trataremos de determinar las horas de inmersión y emersión para facilitar la observación del fenómeno.

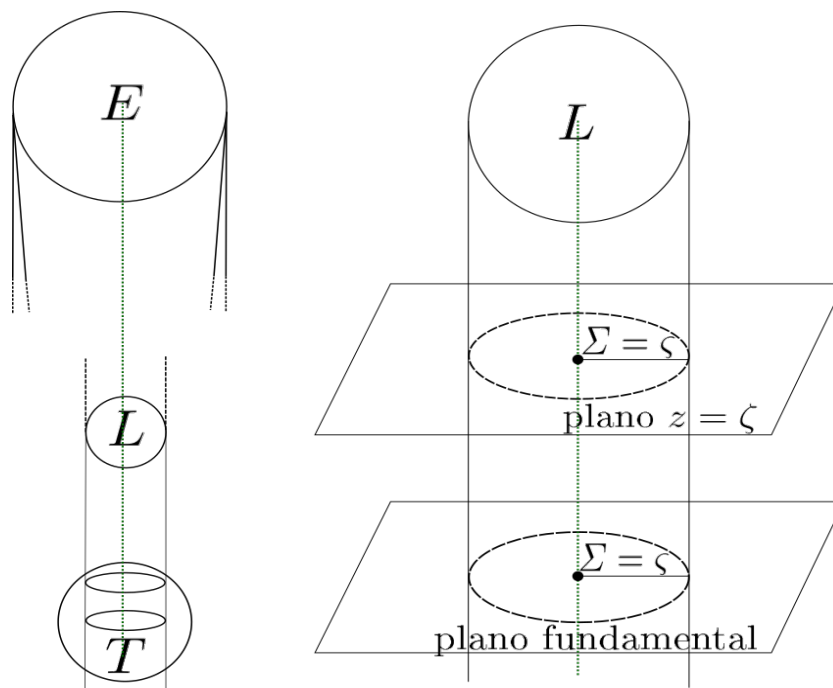


Figura 1.5: Geometría de la ocultación de una estrella ( $E$ ). Considerando que la distancia a la estrella es infinita, nos queda un cilindro de sombra, que corta a los planos fundamental y  $z = \zeta$  en circunferencias de radio  $\Sigma = \zeta$ .

Comenzamos definiendo los elementos Besselianos de las ocultaciones de estrellas por la Luna, que son los datos necesarios para los cálculos, algunos de los cuales pueden obtenerse directamente de las efemérides[18].

- $a, d$ : ascensión recta y declinación de la estrella en un instante determinado.
- $\alpha, \delta$ : ascensión recta y declinación de la Luna en un instante determinado.
- $T_0$ : hora de la *conjunción* en ascensión recta de la Luna y la estrella (*UTC*). Se puede estimar a partir de los valores de  $a$  y  $\alpha$ , tomando como  $T_0$  el instante en que estas coordenadas coinciden.
- $\theta$ : el tiempo sidéreo local en un instante determinado.

La importancia de estos datos que acabamos de citar se debe a que nos permiten hacer una predicción de la ocultación para cualquier lugar del planeta. Dado que se trata de un fenómeno visible desde regiones muy concretas, no sería posible dar predicciones para todas ellas; sin embargo, basta con conocer los parámetros anteriores para que podamos hacer las predicciones para el lugar de observación concreto que nos interese.

Vamos a asumir que la variación en la declinación y la ascensión recta de la Luna es constante (las variaciones reales se pueden estimar por interpolación), y despreciamos la variación de paralaje. Dado que se trata de valores muy pequeños, suponerlos constantes no provocará un error excesivo en nuestros cálculos, pero sí una gran simplificación conceptual. La idea consiste en calcular las circunstancias de la ocultación para un único instante, y aprovechar las hipótesis de variación constante para “trasladar” esos cálculos. La condición del momento de inmersión o emersión viene dada por la ecuación fundamental de los eclipses de Sol,  $\Delta = \Sigma$ , que en este caso conviene escribir en forma paramétrica, teniendo en cuenta que  $\Sigma = k$ :

$$\begin{cases} k \operatorname{sen}(Q) = x - \xi \\ k \operatorname{cos}(Q) = y - \eta \end{cases}$$

El uso de la ecuación fundamental de los eclipses de Sol en este caso queda justificado al entender el significado de la misma. Se afirma que la distancia del observador al eje de sombra,  $\Delta$ , coincide con el radio de la Luna,  $k$ , si lo expresamos en radios terrestres, de modo que el observador se encuentra en la frontera del cilindro de sombra. Así, la línea visual del observador con la estrella ocultada coincidirá con una generatriz de dicho cilindro, y como esta es también tangente a la Luna, entonces el observador verá el contacto aparente de la estrella con el disco lunar en el punto de tangencia con la generatriz.

Si tenemos las coordenadas  $x$  e  $y$  para un cierto instante inicial, entonces basta con sumarles el producto de las correspondientes tasas de variación  $x'$  e  $y'$  por el intervalo de tiempo que va del instante inicial al final, llamémoslo  $\tau$ . Planteamos las ecuaciones:

$$k \operatorname{sen}(Q) = x - \xi + (x' - \xi')\tau$$

$$k \operatorname{cos}(Q) = y - \eta + (y' - \eta')\tau$$

Definimos ahora los cambios de variable:

$$\begin{cases} x - \xi = m \operatorname{sen}(M) & x' - \xi' = n \operatorname{sen}(N) \\ y - \eta = m \operatorname{cos}(M) & y' - \eta' = n \operatorname{cos}(N) \end{cases}$$

y reescribimos las ecuaciones anteriores:

$$k \operatorname{sen}(Q) = m \operatorname{sen}(M) + \tau n \operatorname{sen}(N) \quad (1.4)$$

$$k \operatorname{cos}(Q) = m \operatorname{cos}(M) + \tau n \operatorname{cos}(N) \quad (1.5)$$

De estas ecuaciones, se siguen las siguientes expresiones:

$$k \operatorname{sen}(Q - N) = m \operatorname{sen}(M - N) \quad (1.6)$$

$$k \operatorname{cos}(Q - N) = m \operatorname{cos}(M - N) + \tau n$$

donde la primera se obtiene multiplicando (1.4) por  $\cos(N)$ , (1.5) por  $\sen(N)$ , restando la primera expresión resultante menos la segunda, y aplicando la fórmula del seno de la diferencia de ángulos, y la segunda se obtiene multiplicando (1.4) por  $\sen(N)$ , (1.5) por  $\cos(N)$ , sumando las expresiones resultantes y aplicando la fórmula del coseno de la resta de ángulos.

Por último, llamando  $\Psi = Q - N$ , se tiene:

$$\sen(\Psi) = \frac{m\sen(M - N)}{k} \quad (1.7)$$

$$\tau = \frac{k\cos(\Psi)}{n} - \frac{m\cos(M - N)}{n} \quad (1.8)$$

de modo que, para resolver el problema, ahora basta con determinar unos valores de referencia para  $x$  e  $y$ , y las tasas de variación  $x'$ ,  $y'$ ,  $\xi'$  y  $\eta'$ .

Para  $x$  e  $y$ , denotamos tales valores por  $x_0$  e  $y_0$ , y serán los valores que toman en el instante de la conjunción en ascensión recta ( $T_0$ ). En ese momento, se tiene que  $x_0 = 0$ ; para ver esto, basta con fijarse en que el eje  $y$  de nuestro sistema de referencia está en el plano que contiene al círculo de declinación que pasa por la estrella. Por otro lado, se tiene aproximadamente que  $y_0 = \frac{\delta - d}{P_L}$ , donde  $\delta$  y  $P_L$  son la declinación y el paralaje horizontal de la Luna, y  $d$  la declinación de la estrella. Esta expresión se sigue de la fórmula que hemos dado para calcular  $y$  (1.1), teniendo en cuenta las circunstancias que se dan en el instante  $T_0$ ; como la Luna y la estrella están en conjunción en ascensión recta, se tiene que  $\cos(\alpha - a) = 1$ , y podemos reescribir:

$$y = r(\sen(\delta)\cos(d) - \cos(\delta)\sen(d)) = r\sen(\delta - d)$$

Así, si las declinaciones de la Luna y la estrella son también muy parecidas en el instante  $T_0$ , podemos hacer la aproximación  $\sen(\delta - d) \approx \delta - d$ , y la fórmula aproximada que hemos dado para  $y_0$  se sigue de la relación entre la distancia a la Luna y la paralaje horizontal  $P_L$  (figura 1.4), teniendo en cuenta que tomamos como unidad de distancia el radio ecuatorial terrestre y, por tanto,  $\rho = 1$ .

Para las tasas de variación, tenemos que  $x' = \frac{\Delta\alpha}{P_L}\cos(\delta)$  e  $y' = \frac{\Delta\delta}{P_L}$ , donde los numeradores son las variaciones horarias en la ascensión recta y la declinación de la Luna. También es posible calcularlas por interpolación, derivando el polinomio interpolador en la forma de Lagrange para  $x$  e  $y$  y evaluando en el instante  $T_0$ .

Sea  $H$  el ángulo horario de la estrella. Entonces, se tiene que:

$$H = \theta - a = H_0 - \lambda$$

donde  $\theta$  es nuevamente el tiempo sidéreo local,  $a$  la ascensión recta de la estrella,  $H_0$  el ángulo horario de la estrella en Greenwich y  $\lambda$  la longitud oeste del lugar. Por otro lado,

para calcular la tasa de variación de  $H$ , basta con tener en cuenta que un *día sidéreo* dura  $23h56min$ , que en horas es  $23,93h$ , entonces:

$$H' = \frac{2\pi}{23,93} = 0,2625.$$

Con estos datos, ya podemos calcular las tasas de variación de  $\xi$  y  $\eta$ ; como  $\rho$  y  $\psi$  son datos conocidos, basta con derivar respecto a  $H = \theta - a$ , obteniendo:

$$\xi' = \rho H' \cos(\psi) \cos(H)$$

$$\eta' = \rho H' \cos(\psi) \operatorname{sen}(d) \operatorname{sen}(H)$$

Por tanto, ya podemos resolver nuestro problema. De la ecuación (1.7) se obtienen dos posibles valores para  $\Psi$ , llamémoslos  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , tales que  $\cos(\Psi_1) < 0$  y  $\cos(\Psi_2) > 0$ . Si lo que nos interesa es calcular el instante de la inmersión, sustituimos  $\Psi_1$  en la ecuación (1.8) obteniendo un valor para  $\tau$  que llamaremos  $\tau_1$ , mientras que para la emersión usaremos en su lugar  $\Psi_2$ , obteniendo un valor distinto que denotaremos por  $\tau_2$ . Nuestra predicción concluirá teniendo en cuenta que  $T_0 + \tau_1$  se corresponde con el inicio de la ocultación (inmersión), y  $T_0 + \tau_2$  con el instante final de la misma (emersión). Como última observación, destacar que, en caso de haber elegido un instante inicial  $T_0$  en el que ya está teniendo lugar la ocultación (por ejemplo, el instante de conjunción en ascensión recta, como hemos señalado anteriormente), ocurrirá que  $\tau_1 < 0$ , dado que la inmersión ha tenido lugar en un instante anterior a  $T_0$ ; análogamente,  $\tau_2 > 0$  porque la emersión tendrá lugar en un instante posterior.

#### 1.4. Puntos de contacto con el limbo lunar

A la hora de observar una ocultación de una estrella por la Luna conviene hallar los puntos del limbo lunar en los que tendrán lugar la inmersión y la emersión, para centrar en ellos nuestra atención y facilitar la observación. Esto es especialmente importante para poder ver el final de la ocultación, ya que durante el transcurso de la misma no podremos hacer un seguimiento visual de la trayectoria que describe la estrella por detrás del disco lunar.

Para ello, basta con recordar el significado del ángulo  $Q$  que hemos visto para los eclipses solares, y extrapolar la interpretación geométrica del mismo para situar el correspondiente punto de contacto. Razonando de nuevo a partir de un eclipse solar, en la figura 1.6 se muestra el ángulo  $Q$  medido sobre el limbo del Sol (en el instante inicial o final del eclipse, donde los limbos se intersecan en un único punto); si ahora particularizamos para el caso de una ocultación, donde el Sol ha sido desplazado a una distancia infinita y manteniendo

el mismo punto de contacto entre limbos, los ángulos representados se conservan. En este caso, como el ángulo lo medimos sobre el disco de la Luna, basta con sumar  $180^\circ$ , de modo que el ángulo de posición viene dado por  $Q + 180^\circ = \Psi + N + 180^\circ$ .

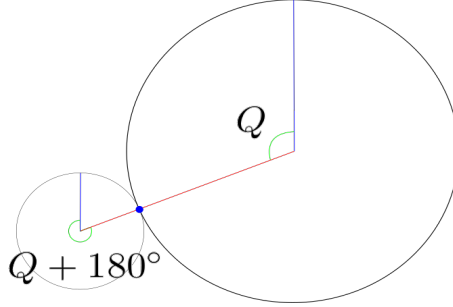


Figura 1.6: Ángulos de posición del punto de contacto medidos sobre la Luna y el Sol.

## 1.5. Distancia mínima e instante central

Tenemos también que la distancia mínima entre los centros de la estrella y de la Luna coincidirá en este caso con la distancia del observador al eje de sombra, y se tiene:

$$\Delta = \pm m \operatorname{sen}(M - N) \quad (1.9)$$

tomando el signo de manera que  $\Delta > 0$ . Para llegar a esta expresión, se repiten los cálculos de la sección 1.3, pero para  $\Delta$  en vez de  $k$ . De las ecuaciones (1.6) se sigue que:

$$\Delta^2 = (m \operatorname{sen}(M - N))^2 + (m \operatorname{cos}(M - N) + n\tau)^2$$

Se considera constante el primer sumando, de modo que  $\Delta$  es mínimo cuando el segundo término vale cero, y de ahí la expresión  $\Delta = \pm m \operatorname{sen}(M - N)$ . Por otro lado, para hallar el instante en que tiene lugar este máximo acercamiento, basta con calcular el valor de  $\tau$  que anula el segundo sumando, llamémoslo  $\tau_c$ . En este caso, se puede comprobar inmediatamente que el instante  $T$  donde la distancia es mínima viene dado por:

$$T = T_0 + \tau_c = T_0 - \frac{m \operatorname{cos}(M - N)}{n} \quad (1.10)$$

Además, obsérvese que, si  $\Delta > k$ , entonces  $\operatorname{sen}(\Psi) > 1$ , lo cual es imposible, implicando que no hay ocultación. Esto tiene sentido, ya que lo que estamos diciendo es que el punto de observación se encuentra fuera del cilindro de sombra.

## 1.6. Paralelos límite de la ocultación

Introducimos aquí dos conceptos nuevos. En primer lugar, definimos la **curva límite** de una ocultación como la línea que delimita las regiones del planeta donde se puede observar el fenómeno, o una determinada fase del mismo. Por otro lado, definimos los **paralelos límite** como las latitudes más extremas donde se puede observar. Evidentemente, en estas regiones más extremas se observará una ocultación rasante, que es el caso más extremo en el que podemos hablar de ocultación.

Es importante tener en cuenta que las curvas límite y los paralelos límite no coinciden, ya que las curvas cortan a los meridianos en ángulos variables, mientras que los paralelos lo hacen en ángulos rectos. En este apartado nos centraremos únicamente en el cálculo de los paralelos límite, ya que los cálculos de curvas límite quedan reservados a los eclipses; se trata de procedimientos más complejos que harían inviable su cálculo para la gran cantidad de estrellas que son ocultadas por la Luna.

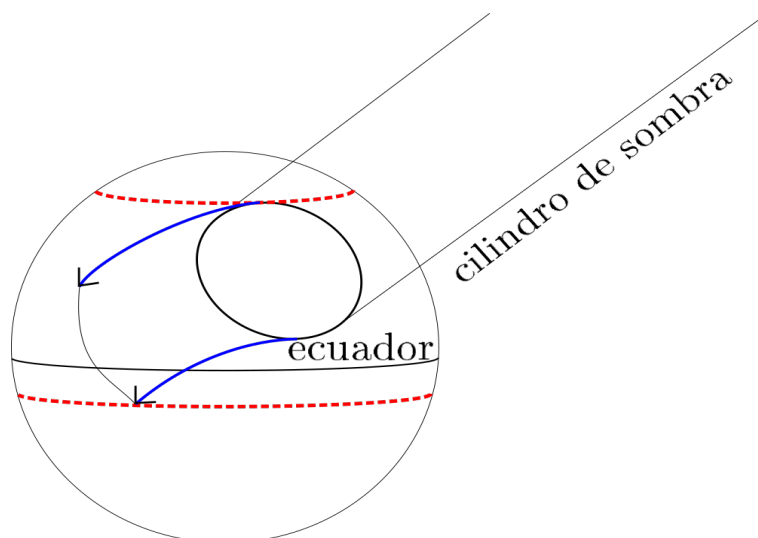


Figura 1.7: Paralelos límite (en rojo) en comparación con las curvas límite (en azul). El cilindro de sombra se va desplazando debido a los movimientos de la Tierra y la Luna, determinando así las curvas límite. Las latitudes más extremas que alcanzan estas últimas determinan los paralelos límite.

Comencemos situando nuestro punto de observación en un paralelo límite. Lo que ocurre en este caso es que observamos una ocultación rasante, por lo que estamos situados en una generatriz del cono (cilindro) de sombra. Es decir, la distancia del observador al eje de sombra coincide con el radio del cilindro, que a su vez coincide con el radio de la Luna,  $k$ .

Entonces, la situación queda caracterizada por la expresión:

$$k = \pm m \operatorname{sen}(M - N);$$

o equivalentemente,  $\pm k = m \operatorname{sen}(M - N)$ .

Observemos que estamos considerando el caso más favorable, es decir, la situación de máxima aproximación aparente de la estrella y el centro de la Luna, que hemos calculado en el apartado anterior (1.9).

Repitiendo los cambios de variable  $m \operatorname{sen}(M) = x - \xi$ ,  $m \operatorname{cos}(M) = y - \eta$ , podemos desarrollar la expresión:

$$\pm k = m \operatorname{sen}(M - N) = m[\operatorname{sen}(M)\operatorname{cos}(N) - \operatorname{cos}(M)\operatorname{sen}(N)] = (x - \xi)\operatorname{cos}(N) - (y - \eta)\operatorname{sen}(N) \quad (1.11)$$

donde el ángulo  $N$  se obtiene de las ecuaciones  $x' - \xi' = n \operatorname{sen}(N)$ ,  $y' - \eta' = n \operatorname{cos}(N)$ , aunque en este caso podemos despreciar las variaciones de  $\xi$  y  $\eta$ .

Ahora, como en el momento de conjunción en ascensión recta se tiene que  $x = 0$ , entonces sustituyendo este valor de  $x$  en (1.11) obtenemos la siguiente expresión:

$$\pm k = -\xi \operatorname{cos}(N) - (y - \eta)\operatorname{sen}(N) \quad (1.12)$$

Supongamos ahora que la Tierra es una esfera perfecta, es decir, despreciamos el achatamiento. En tal caso, se verifican las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}(\phi) = \eta \operatorname{cos}(d) + \zeta \operatorname{sen}(d), \quad \zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \quad (1.13)$$

donde  $\phi$  es la latitud geográfica del punto de observación. En realidad, al estar considerando una esfera perfecta, la latitud geográfica ( $\phi$ ) y la latitud geocéntrica ( $\psi$ ) coinciden.

La expresión de  $\zeta$  es clara por la definición geométrica de la esfera. Para una justificación detallada de la expresión de  $\operatorname{sen}(\phi)$ , se recomienda consultar el libro de Chauvenet[4], *A Manual of Spherical and Practical Astronomy*, Art. 298, pp. 456-458. Con estas tres ecuaciones, ya tenemos planteadas las condiciones para hallar los paralelos límite; entonces, para resolver nuestro problema, queremos hallar los valores máximo y mínimo de la latitud  $\phi$  que verifican el sistema.

Vamos a efectuar cambios de variable que simplifiquen el problema. Primero introducimos las variables:

$$a = -\xi \operatorname{cos}(N) + \eta \operatorname{sen}(N)$$

$$b = \xi \operatorname{sen}(N) + \eta \operatorname{cos}(N)$$

Podemos escribir las coordenadas del punto de observación en función de  $a$  y  $b$ :

$$\xi = -a \operatorname{cos}(N) + b \operatorname{sen}(N)$$

$$\begin{aligned}\eta &= a\operatorname{sen}(N) + b\operatorname{cos}(N) \\ \zeta &= \sqrt{1 - a^2 - b^2}\end{aligned}$$

Reescribimos también la ecuación (1.12):

$$\pm k = -\xi\operatorname{cos}(N) - y\operatorname{sen}(N) + \eta\operatorname{sen}(N) = a - y\operatorname{sen}(N) \Rightarrow a = y\operatorname{sen}(N) \pm k \quad (1.14)$$

Obsérvese que esta cantidad es constante, ya que habíamos supuesto que  $x'$  e  $y'$  lo son, y en este caso, el ángulo  $N$  viene determinado por  $x'$  si despreciamos la variación de  $\xi$ , como habíamos dicho.

De la ecuación para  $\zeta$  en (1.13) es evidente que  $a^2 + b^2 + \zeta^2 = 1$ , así que podemos basarnos en el sistema de coordenadas esféricas para definir un par de nuevas variables  $\gamma$  y  $\varepsilon$  tales que  $\operatorname{sen}(\gamma) > 0$ , y:

$$\begin{aligned}a &= \operatorname{cos}(\gamma) \\ b &= \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{cos}(\varepsilon) \\ \zeta &= \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{sen}(\varepsilon)\end{aligned}$$

De la primera ecuación podemos obtener el valor de  $\gamma$  porque el valor de  $a$  ya lo hemos calculado en (1.14), pero sin embargo, ni la segunda ni la tercera nos permiten obtener el valor de  $\varepsilon$ . Definimos ahora nuevas variables  $\beta$  y  $\lambda$  tales que  $\operatorname{cos}(\beta) > 0$ , y:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\beta) &= \operatorname{sen}(N)\operatorname{cos}(d) \\ \operatorname{cos}(\beta)\operatorname{cos}(\lambda) &= \operatorname{cos}(N)\operatorname{cos}(d) \\ \operatorname{cos}(\beta)\operatorname{sen}(\lambda) &= \operatorname{sen}(d)\end{aligned}$$

Con estas últimas ecuaciones sí que se pueden determinar  $\beta$  y  $\lambda$  porque los valores de  $N$  y  $d$  ya los conocemos. Con estos cambios de variable, desarrollamos la condición sobre el seno de la latitud geográfica  $\phi$  de (1.13):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi) &= \eta\operatorname{cos}(d) + \zeta\operatorname{sen}(d) = \\ &= [a\operatorname{sen}(N) + b\operatorname{cos}(N)]\operatorname{cos}(d) + [\operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{sen}(\varepsilon)]\operatorname{sen}(d) \\ &= \operatorname{cos}(\gamma)\operatorname{sen}(N)\operatorname{cos}(d) + \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{cos}(\varepsilon)\operatorname{cos}(N)\operatorname{cos}(d) + \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{sen}(\varepsilon)\operatorname{sen}(d) = \\ &= \operatorname{cos}(\gamma)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{cos}(\beta)[\operatorname{cos}(\varepsilon)\operatorname{cos}(\lambda) + \operatorname{sen}(\varepsilon)\operatorname{sen}(\lambda)] = \\ &= \operatorname{cos}(\gamma)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{cos}(\beta)\operatorname{cos}(\lambda - \varepsilon)\end{aligned}$$

Como en la definición de los cambios de variable hemos impuesto que  $\operatorname{sen}(\gamma) > 0$  y  $\operatorname{cos}(\beta) > 0$ , y las únicas variables en la expresión anterior son  $\phi$  y  $\varepsilon$ , entonces el máximo se alcanza cuando  $\operatorname{cos}(\lambda - \varepsilon) = 1$  (es decir,  $\lambda = \varepsilon$ ), y el mínimo cuando  $\operatorname{cos}(\lambda - \varepsilon) = -1$

(es decir,  $\lambda - \varepsilon = 180^\circ$ ). Por tanto, los valores máximo y mínimo de la función son, respectivamente:

$$\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\beta)\cos(\gamma) \pm \text{sen}(\gamma)\cos(\beta) = \text{sen}(\beta \pm \gamma),$$

de donde se sigue inmediatamente que las latitudes límites son  $\phi = \beta + \gamma$  hacia el Norte, y  $\phi = \beta - \gamma$  hacia el Sur.

Es necesario tener en cuenta un detalle adicional. Hemos hablado del observador situado en una generatriz del cilindro de sombra, pero sin embargo, una generatriz que no sea tangente al planeta lo corta en dos puntos. Por eso, añadimos la restricción de que  $\zeta > 0$ , ya que en caso contrario, el observador no podría ver la Luna por estar en el hemisferio opuesto del planeta y, claramente, no podría observar la ocultación. Además, dado que  $\zeta = \text{sen}(\gamma)\text{sen}(\varepsilon)$  y habíamos exigido que  $\text{sen}(\gamma) > 0$ , entonces también se tiene que  $\text{sen}(\varepsilon) > 0$ .



## Capítulo 2

# Tránsitos

### 2.1. Introducción a los tránsitos

Estudiaremos ahora un fenómeno similar a las ocultaciones, y cuyo desarrollo recordará bastante a los cálculos que hemos hecho hasta este punto. Como ya hemos dicho en la introducción, lo que caracteriza a un tránsito es que el astro “ocultado” tiene en realidad un tamaño aparente mayor.

Existen varios tipos de tránsitos en el Sistema Solar. Los ejemplos más destacados, y aquellos en los que centraremos nuestra atención, son los tránsitos de los planetas interiores (Mercurio y Venus) por delante del Sol. Otro caso lo encontramos en los tránsitos de los satélites de Júpiter y Saturno por delante de sus respectivos planetas; en el caso de Júpiter, se trata de fenómenos muy frecuentes, aunque no por ello menos llamativos. Sin embargo, en el caso de Saturno no son tan frecuentes debido a la inclinación del eje de rotación del planeta, además de que sus satélites son más difíciles de ver si no se cuenta con el equipo apropiado. Un último ejemplo, y probablemente el de más interés en la actualidad, lo encontramos en los tránsitos de exoplanetas por delante de la estrella que orbitan, ya que la observación de estos fenómenos es nuestra mayor herramienta en la búsqueda de estos cuerpos que han despertado tanto interés en los últimos años. Su tamaño aparente es muy pequeño debido a la gran distancia a la que se encuentran, lo que generalmente impide el uso de técnicas de observación visual. Así, los tránsitos tienen una gran aplicación en este ámbito, ya que son eventos que podemos registrar mediante fotometría (midiendo la caída en la cantidad de luz que recibimos de la estrella cuando se produce el tránsito).

Conviene mencionar unas breves cuestiones geométricas antes de proceder con el desarrollo teórico. Los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol, pero hay que tener en cuenta que no todas esas órbitas están en el mismo plano. Llamamos **plano de la eclíptica** a aquel que contiene a la órbita de la Tierra. En el caso de los planetas inte-

riores, como ya hemos indicado, se produce un tránsito cuando uno de ellos se interpone entre la Tierra y el Sol. Por tanto, para que tenga lugar el tránsito, el correspondiente planeta interior debe estar en un punto de su órbita suficientemente cercano al plano de la eclíptica; de lo contrario, lo veríamos pasando por encima o por debajo del disco solar, y no habría tránsito. Los puntos de corte de las órbitas de los planetas con el plano de la eclíptica reciben el nombre de **nodos** (respecto a la eclíptica), entonces lo que estamos diciendo es que el planeta tiene que estar suficientemente cerca de uno de los dos nodos de su órbita para que haya un tránsito. Con respecto a los nodos, uno de ellos es ascendente y el otro descendente, en función de la dirección que siga el planeta en su órbita.

Durante el transcurso del tránsito, podemos distinguir varias fases que son de especial interés. Por orden cronológico, destacan el contacto exterior durante la inmersión (**Contacto I**), el contacto interior durante la inmersión (**Contacto II**), el instante central o de máximo acercamiento, el contacto interior durante la emersión (**Contacto III**) y el contacto exterior durante la emersión (**Contacto IV**). Por contactos exteriores nos referimos a los instantes en que los discos del planeta y el Sol son tangentes en un punto y no están superpuestos, marcando el inicio y el final del tránsito, mientras que en los contactos interiores también son tangentes en un punto, pero el disco del planeta se superpone sobre el del Sol, como se puede ver más adelante, en la figura 2.2. Por otra parte, el instante central es aquel donde los centros del Sol y el planeta están a una distancia aparente mínima.

Hay mucha historia detrás de las observaciones de los tránsitos, sobre todo en el caso de los de Mercurio y Venus. Ya hemos hablado acerca de la “obsesión” con la cuantización de nuestro Sistema Solar, en particular, los múltiples intentos de medir la distancia al Sol de la forma más precisa posible, y los tránsitos eran uno de los posibles medios para efectuar esta medición. Las discrepancias entre la elección de los tránsitos de Mercurio (más frecuentes, aunque más difíciles de observar por su menor tamaño y mayor cercanía al Sol) o los de Venus (más fáciles de observar, pero mucho más infrecuentes), junto con los conflictos políticos y la falta de instrumentos de observación adecuados, complicaron bastante los estudios entre los siglos XVII y XIX, en los que se llegaron a involucrar astrónomos de renombre como Edmund Halley.

## 2.2. Predicción para el centro de la Tierra

Igual que hemos hecho en el caso de las ocultaciones de estrellas por la Luna, vamos a calcular los instantes de inmersión y emersión para el tránsito.

Primero consideraremos que el punto de observación está situado en el centro de la Tierra. Comenzamos dando nombre a las variables que vamos a utilizar en los cálculos.

Sean  $(\alpha, \delta)$  la ascensión recta y la declinación del planeta, y  $(\alpha', \delta')$  las correspondientes coordenadas ecuatoriales absolutas del Sol, en ambos casos para un mismo instante  $T_0$ . Sea  $m$  la distancia aparente entre los dos astros,  $P$  el polo norte celeste,  $S'$  y  $S$  los centros del Sol y el planeta respectivamente. Tenemos entonces el triángulo esférico  $PSS'$ , y llamamos a los ángulos  $\widehat{PSS'}$  y  $\widehat{PS'S}$  como se muestra en la figura.

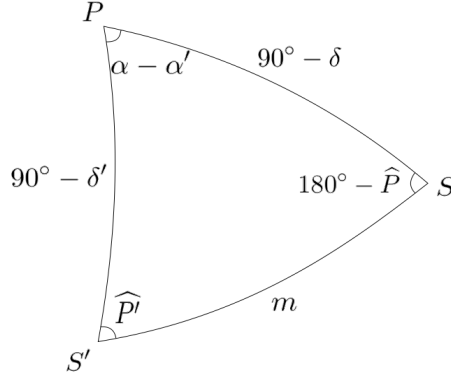


Figura 2.1: Triángulo esférico determinado por el Sol, el planeta y el Polo Norte Celeste.

Aplicamos a este triángulo las analogías de Gauss-Delambre<sup>2</sup>, obteniendo que:

$$\text{sen} \left( \frac{m}{2} \right) \cos \left( \frac{\widehat{P}' - (180^\circ - \widehat{P})}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{90^\circ - \delta + 90^\circ - \delta'}{2} \right)$$

$$\text{sen} \left( \frac{m}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\widehat{P}' - (180^\circ - \widehat{P})}{2} \right) = \cos \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{90^\circ - \delta - 90^\circ + \delta'}{2} \right)$$

de donde se siguen las ecuaciones:

$$\text{sen} \left( \frac{m}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\widehat{P} + \widehat{P}'}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) \cos \left( \frac{\delta + \delta'}{2} \right)$$

$$\text{sen} \left( \frac{m}{2} \right) \cos \left( \frac{\widehat{P} + \widehat{P}'}{2} \right) = \cos \left( \frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\delta - \delta'}{2} \right)$$

<sup>2</sup>En este caso, las fórmulas que usamos son:

$$\text{sen} \left( \frac{c}{2} \right) \cos \left( \frac{A - B}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{C}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{a + b}{2} \right)$$

$$\text{sen} \left( \frac{c}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{A - B}{2} \right) = \cos \left( \frac{C}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{a - b}{2} \right)$$

En el instante de contacto, el valor de  $\frac{m}{2}$  es de unos  $8'$  (minutos de arco); dado que el Sol tiene un tamaño aparente mucho mayor, podemos desprestigiar el semidiámetro del planeta y aproximar la distancia aparente entre los dos astros en ese instante por el semidiámetro del Sol, que a una distancia de 1  $UA$  toma un valor de  $959''5$ [19] (es decir, 959,5 segundos de arco), luego consideramos  $\frac{m}{2} = \frac{959''5}{2} = 479''75 = 7'9958$ . Por tanto, por tratarse de un ángulo pequeño, podemos hacer la aproximación  $\text{sen}(\frac{m}{2}) \approx \frac{m}{2}$ . Usamos la misma aproximación para el ángulo  $\alpha - \alpha'$ , que también toma un valor pequeño, y haciendo los cambios de variable  $M = \frac{\hat{P} + \hat{P}'}{2}$ ,  $\delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2}$ , podemos reescribir el sistema equivalente y suficientemente aproximado:

$$\begin{cases} m \text{sen}(M) = (\alpha - \alpha') \cos(\delta_0) \\ m \cos(M) = \delta - \delta' \end{cases} \quad (2.1)$$

Con estas ecuaciones, podemos determinar los valores de  $m$  y  $M$ .

Sea  $T = T_0 + \tau$  el instante de contacto; entonces, si  $a$  y  $d$  son las velocidades relativas en ascensión recta y declinación del planeta respecto al Sol (es decir, el movimiento horario del planeta menos el del Sol), podemos calcular las variaciones en las coordenadas suponiendo que  $a$  y  $d$  son constantes, como ya hemos hecho en otras ocasiones. Así, las diferencias en ascensión recta y declinación entre los astros en el instante  $T$  serán, respectivamente,  $(\alpha - \alpha' + a\tau)$  y  $(\delta - \delta' + d\tau)$ .

Podemos caracterizar los contactos en función de las distancias entre los centros del Sol y el planeta. Si llamamos  $s'$  y  $s$  a sus respectivos semidiámetros, tenemos que la distancia es  $m = s' + s$  para el contacto exterior, y  $m = s' - s$  para el interior. Esto se ve de forma sencilla representando los dos discos unidos por el correspondiente punto de contacto.

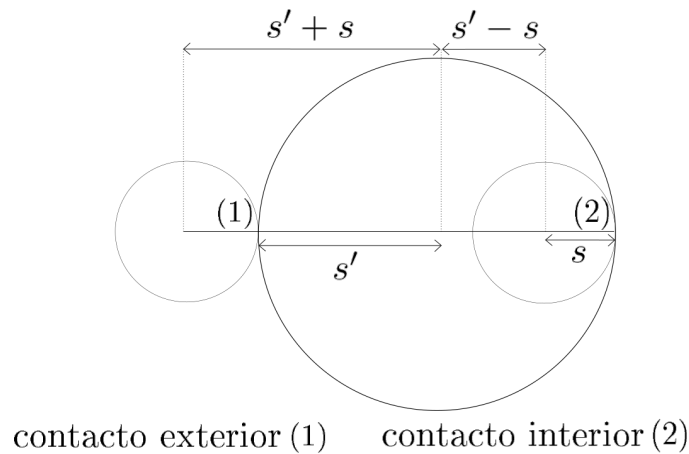


Figura 2.2: Distancias aparentes entre los centros del Sol y el planeta según el tipo de contacto.

Si  $Q$  es el valor del ángulo  $M$  en el instante del contacto  $T = T_0 + \tau$ , entonces basándonos en las ecuaciones (2.1):

$$\begin{aligned} m\text{sen}(Q) &= (s' \pm s)\text{sen}(Q) = (\alpha - \alpha' + a\tau)\cos(\delta_0) = (\alpha - \alpha')\cos(\delta_0) + a\tau\cos(\delta_0) \\ m\cos(Q) &= (s' \pm s)\cos(Q) = \delta - \delta' + d\tau \end{aligned}$$

Si ahora definimos los cambios de variable

$$\begin{cases} n\text{sen}(N) = a\cos(\delta_0) \\ n\cos(N) = d \end{cases} \quad (2.2)$$

entonces podemos reescribir el sistema anterior como:

$$\begin{aligned} (s' \pm s)\text{sen}(Q) &= m\text{sen}(M) + \tau n\text{sen}(N) \\ (s' \pm s)\cos(Q) &= m\cos(M) + \tau n\cos(N) \end{aligned}$$

De esta forma, podemos usar el mismo método que hemos empleado para la predicción de una ocultación. Así, nuestro problema será resuelto a partir de las ecuaciones:

$$\text{sen}(\Psi) = \frac{m\text{sen}(M - N)}{s' \pm s} \quad (2.3)$$

$$\tau = \frac{s' \pm s}{n}\cos(\Psi) - \frac{m}{n}\cos(M - N) \quad (2.4)$$

donde  $Q = N + \Psi$ , y el signo de  $\cos(\Psi)$  determina el instante de inmersión (negativo) o emersión (positivo); por eso, hay que prestar atención al hecho de que (2.3) nos dará dos soluciones distintas con cosenos de signo opuesto. Además, el ángulo  $Q$  vuelve a tener la misma interpretación geométrica que vimos en el caso de los eclipses, es decir, nos da el ángulo de posición del punto de contacto.

A pesar de que hemos desarrollado la teoría de predicción de tránsitos por una vía distinta, el método iterativo que acabamos de presentar guarda claras similitudes con el que vimos para eclipses y ocultaciones. De hecho, la geometría de un tránsito es comparable a la de un eclipse solar, donde la Luna se ha desplazado a una distancia (finita) tal que su tamaño aparente pasa a ser mucho menor que el del Sol. Como consecuencia, podemos mantener las expresiones (1.9) y (1.10) para calcular en el caso de un tránsito la distancia mínima y el instante de máxima aproximación o instante central.

### 2.3. Predicción para un punto de observación en la superficie

Introducimos la notación para los próximos cálculos; sean:

- $m$ : distancia aparente geocéntrica entre los centros del Sol y el planeta en un instante dado.
- $m'$ : distancia aparente desde el punto de observación en el mismo instante.
- $\phi, \lambda$ : latitud y longitud del punto de observación.
- $\pi, \pi'$ : paralajes ecuatoriales horizontales del planeta y del Sol, respectivamente.
- $\zeta, \zeta'$ : distancias cenitales geocéntricas del planeta y del Sol, respectivamente.
- $\rho$ : radio de la Tierra en latitud  $\phi$ .
- $\Delta$ : distancia entre los centros de la Tierra y el planeta que transita.
- $\xi$ : ángulo que forma la recta que pasa por el centro de la Tierra y el punto de observación con la recta que une los centros de la Tierra y el planeta que transita.
- $L$ : ángulo que forma la recta que pasa por el centro del planeta que transita y el punto de observación con la recta que une los centros de la Tierra y el planeta que transita.

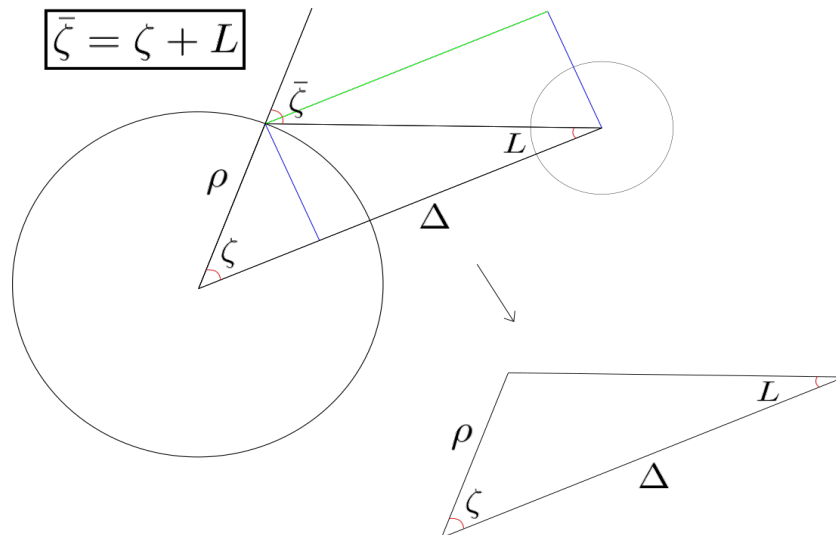


Figura 2.3: A la izquierda, la Tierra; a la derecha, el planeta que transita.

Podemos aplicar el teorema del seno al triángulo de la figura anterior, teniendo en cuenta que la distancia de la Tierra al otro planeta ( $\Delta$ ) es el inverso del seno del paralaje

horizontal del mismo ( $\pi$ ), de modo que:

$$\frac{\rho}{\text{sen}(L)} = \frac{\Delta}{\text{sen}(180^\circ - \bar{\zeta})} = \frac{1}{\text{sen}(\pi)\text{sen}(180^\circ - \bar{\zeta})} \Rightarrow L = \text{arcsen}(\rho\text{sen}(\pi)\text{sen}(\bar{\zeta}))$$

Si el paralaje es lo suficientemente pequeño, podemos tomar  $L = \rho\pi\text{sen}(\zeta)$ , de modo que las distancias cenitales desde el punto de observación vienen dadas por  $\zeta + \rho\pi\text{sen}(\zeta)$  y  $\zeta' + \rho\pi\text{sen}(\zeta')$ . Es decir, los sumandos  $\rho\pi\text{sen}(\zeta)$  y  $\rho\pi\text{sen}(\zeta')$  son las diferencias entre las distancias cenitales geocéntricas y las distancias cenitales aparentes en el punto de observación.

Llamemos ahora  $S$  y  $S'$  a los centros del planeta y el Sol respectivamente, y  $P$  al Polo Norte Celeste. Consideremos el triángulo esférico  $ZSS'$ , donde  $Z$  es el zenit geocéntrico del observador. Si prolongamos los lados  $ZS$  y  $ZS'$  como se muestra en la figura 2.4, podemos hacer que el lado que mide  $m$  pase a medir  $m'$ ; basta con sumar a las distancias cenitales de los puntos  $S$  y  $S'$  las diferencias que hemos calculado en el párrafo anterior (respectivamente,  $\rho\pi\text{sen}(\zeta)$  y  $\rho\pi\text{sen}(\zeta')$ ). Ahora, si interpretamos la diferencia  $m' - m$  como una diferencial ( $da = m' - m$ ), dado que se trata de un valor muy pequeño, podemos aplicar a este triángulo la primera fórmula diferencial<sup>3</sup>. Como  $dA = 0$  porque el ángulo  $A$  no varía, como se puede observar en la figura 2.4, entonces se tiene:

$$m' - m = \cos(\widehat{ZSS'})\rho\pi\text{sen}(\zeta) + \cos(\widehat{ZS'S})\rho\pi'\text{sen}(\zeta') = \cos(180^\circ - \widehat{S})\rho\pi\text{sen}(\zeta) + \cos(\widehat{S'})\rho\pi'\text{sen}(\zeta')$$

utilizando la notación empleada en la figura 2.4 para los ángulos representados. Así, podemos reescribir la expresión anterior de forma equivalente como:

$$m' - m = -\rho\pi\text{sen}(\zeta)\cos(\widehat{S}) + \rho\pi'\text{sen}(\zeta')\cos(\widehat{S'})$$

Llamamos ahora  $S_0$  al punto medio del arco  $S'S$ ,  $\widehat{S}_0$  al ángulo  $\widehat{ZS_0S}$  y  $\zeta_0$  al arco  $ZS_0$ . Por ser el punto medio, podemos dar las coordenadas de  $S_0$  muy aproximadamente como  $\alpha_0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$  y  $\delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2}$ . Consideramos los triángulos  $ZS'S_0$  y  $ZS_0S$  (figura 2.5), y aplicando

<sup>3</sup>Podemos escribir la primera fórmula diferencial de las dos formas siguientes:

$$da = \cos(C)db + \cos(B)dc + \text{sen}(b)\text{sen}(C)dA$$

$$da = \cos(C)db + \cos(B)dc + \text{sen}(c)\text{sen}(B)dA$$

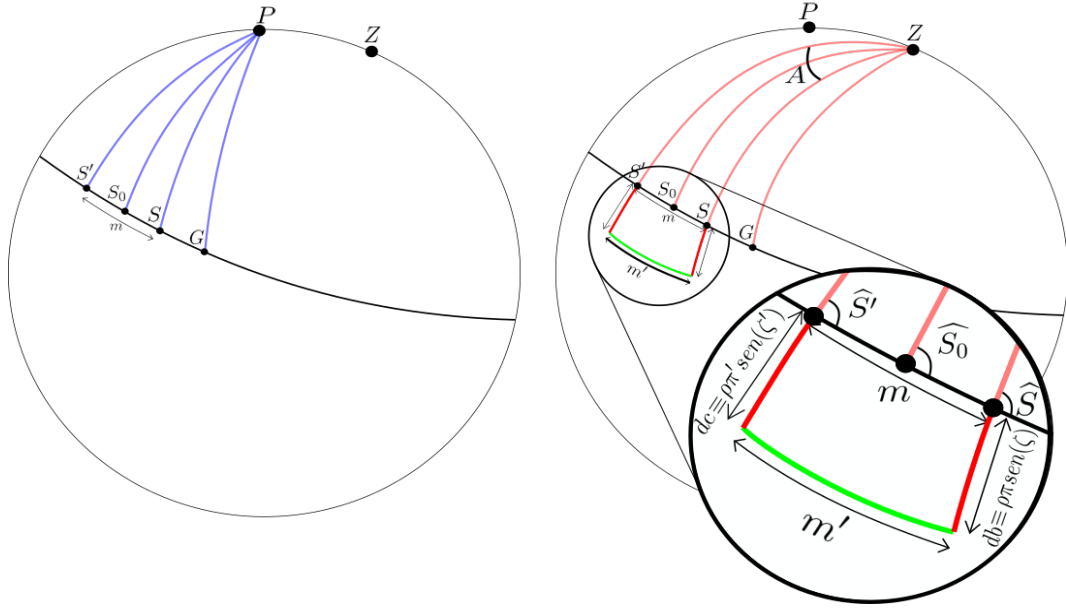


Figura 2.4: Representación de la situación descrita. En rojo, los círculos verticales que pasan por los puntos que destacamos a lo largo de la explicación, y en azul los círculos horarios. Se añade la notación utilizada con las fórmulas diferenciales del pie de página.

a cada uno de ellos la tercera fórmula de Bessel<sup>4</sup>, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\text{sen}(\zeta')\cos(\widehat{S}') = \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\zeta_0) + \text{sen}(\zeta_0)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\widehat{S}_0)$$

$$\text{sen}(\zeta)\cos(180^\circ - \widehat{S}) = -\text{sen}(\zeta)\cos(\widehat{S}) = \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\zeta_0) - \text{sen}(\zeta_0)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\widehat{S}_0)$$

Con estas expresiones para  $-\text{sen}(\zeta)\cos(\widehat{S})$  y  $\text{sen}(\zeta')\cos(\widehat{S}')$ , podemos sustituir en la expresión de  $m' - m$ , obteniendo:

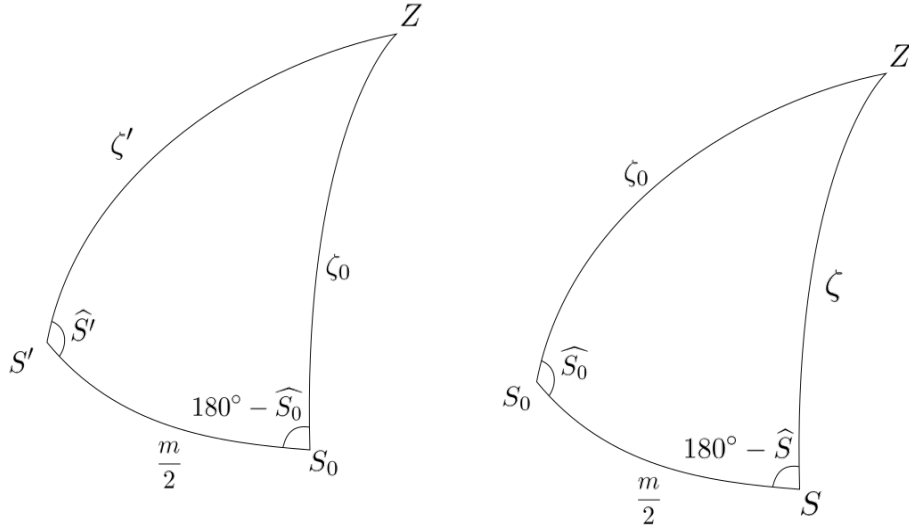
$$\begin{aligned} m' - m &= \rho\pi \left( \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\zeta_0) - \text{sen}(\zeta_0)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\widehat{S}_0) \right) \\ &\quad + \rho\pi' \left( \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\zeta_0) + \text{sen}(\zeta_0)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\widehat{S}_0) \right) \\ &= \rho \left[ (\pi + \pi')\text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\zeta_0) - (\pi - \pi')\text{sen}(\zeta_0)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos(\widehat{S}_0) \right] \end{aligned}$$

Introducimos ahora un cambio de variable definido por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} g\text{sen}(\gamma) = (\pi + \pi')\text{sen}\left(\frac{m}{2}\right) \\ g\cos(\gamma) = (\pi - \pi')\cos\left(\frac{m}{2}\right) \end{cases}$$

<sup>4</sup>La fórmula en cuestión, salvo permutaciones, es la siguiente:

$$\text{sen}(a)\cos(B) = \text{sen}(c)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(c)\cos(A)$$


 Figura 2.5: Elementos de los triángulos  $ZS'S_0$  y  $ZS_0S$ .

de modo que el valor de la variable  $\gamma$ , que usaremos en cálculos posteriores, se obtiene resolviendo la expresión siguiente:

$$\tan(\gamma) = \frac{\pi + \pi'}{\pi - \pi'} \tan\left(\frac{m}{2}\right) \quad (2.5)$$

Además, se sigue también que  $g = \pi - \pi'$ .

Definimos ahora sobre la prolongación del arco  $S'S$  un punto  $G$  tal que  $S_0G = 90^\circ + \gamma$ , y denotamos por  $\omega$  a la distancia  $ZG$ . Llamemos  $A$  y  $D$  a la ascensión recta y la declinación, respectivamente, del punto  $G$ . Tenemos entonces el nuevo triángulo  $ZS_0G$  (figura 2.6), y aplicándole la primera fórmula de Bessel<sup>5</sup>, se tiene:

$$\cos(\omega) = \cos(\zeta_0)\cos(90^\circ + \gamma) + \sin(\zeta_0)\sin(90^\circ + \gamma)\cos(\widehat{S_0}) = -\cos(\zeta_0)\sin(\gamma) + \sin(\zeta_0)\cos(\gamma)\cos(\widehat{S_0})$$

Aplicando esto a la expresión de  $m' - m$ , tenemos:

$$m' = m - g\cos(\omega) \quad (2.6)$$

Consideremos el triángulo  $PS_0G$ , con los datos que se muestran en la figura 2.7. Llamemos  $M$  al ángulo  $\widehat{PS_0G}$  y podemos aproximarlo como  $M = \frac{\widehat{PSG} + \widehat{PS'G}}{2}$ , por ser  $S_0$  el punto

<sup>5</sup>La expresión que usamos en este caso, de acuerdo con la notación de la figura 2.6, es:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

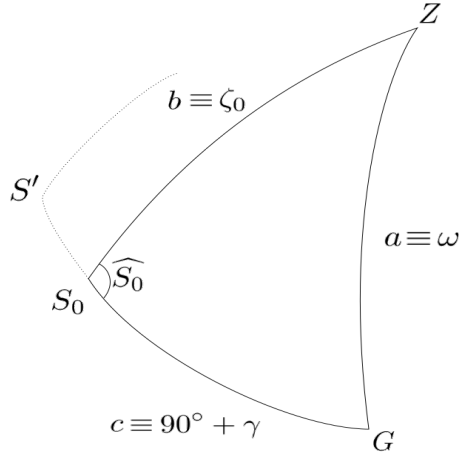


Figura 2.6: Elementos del triángulo esférico  $ZS_0G$ .

medio del arco  $S'S$ . Aplicando a ese triángulo cada una de las tres fórmulas de Bessel<sup>6</sup>, obtendremos ecuaciones que nos permitirán hallar las coordenadas de  $G$ :

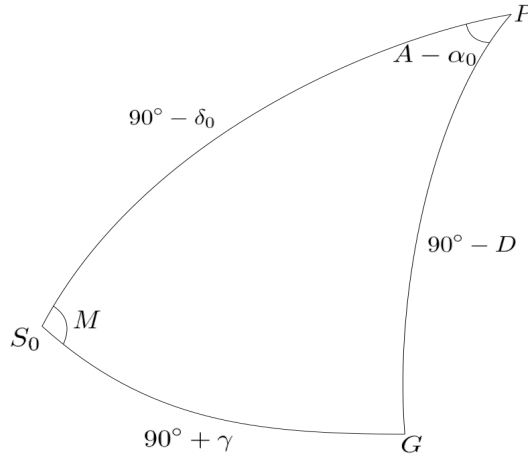


Figura 2.7: Triángulo esférico  $PS_0G$  y sus correspondientes elementos.

$$\cos(90^\circ - D) = \cos(90^\circ - \delta_0)\cos(90^\circ + \gamma) + \operatorname{sen}(90^\circ - \delta_0)\operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)\cos(M)$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - D)\operatorname{sen}(A - \alpha_0) = \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)\operatorname{sen}(M)$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - D)\cos(A - \alpha_0) = \cos(90^\circ + \gamma)\operatorname{sen}(90^\circ - \delta_0) - \operatorname{sen}(90^\circ + \gamma)\cos(90^\circ - \delta_0)\cos(M)$$

<sup>6</sup>La segunda fórmula de Bessel, que todavía no hemos introducido, es la siguiente (salvo permutaciones):

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(B) = \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(A)$$

Las reescribimos de forma más simplificada como:

$$\text{sen}(D) = -\text{sen}(\delta_0)\text{sen}(\gamma) + \cos(\delta_0)\cos(\gamma)\cos(M)$$

$$\cos(D)\text{sen}(A - \alpha_0) = \cos(\gamma)\text{sen}(M) \quad (2.7)$$

$$\cos(D)\cos(A - \alpha_0) = -\text{sen}(\gamma)\cos(\delta_0) - \cos(\gamma)\text{sen}(\delta_0)\cos(M)$$

Una vez hallados los valores de  $A$  y  $D$ , ya tenemos una forma de hallar el valor de  $\cos(\omega)$  para sustituirlo en (2.6) y calcular  $m'$ . El método consiste en aplicar la primera fórmula de Bessel al triángulo esférico  $PGZ$  (figura 2.8), como veremos ahora.

Sea  $\theta_0$  el tiempo sidéreo (en el meridiano de Greenwich) correspondiente al instante  $T$ . Entonces, el ángulo horario del punto  $G$  en el lugar de observación es  $H = \theta_0 - \lambda - A$ , y de aquí se sigue el valor del ángulo  $\widehat{GPZ}$ . Nuevamente, denotamos por  $\psi$  la latitud geocéntrica del lugar de observación. Tras estas consideraciones, ya tenemos todos los valores necesarios para el cálculo, de modo que:

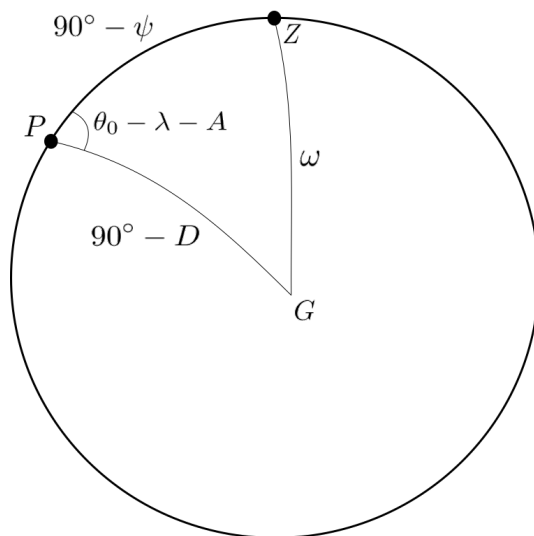


Figura 2.8: Representación del triángulo esférico  $PGZ$ .

$$\cos(\omega) = \cos(90^\circ - \psi)\cos(90^\circ - D) + \text{sen}(90^\circ - \psi)\text{sen}(90^\circ - D)\cos(\theta_0 - \lambda - A)$$

o simplificando:

$$\cos(\omega) = \text{sen}(\psi)\text{sen}(D) + \cos(\psi)\cos(D)\cos(\theta_0 - \lambda - A) \quad (2.8)$$

Denotamos por  $T$  el instante de contacto geocéntrico, y por  $T'$  el de contacto medido desde nuestro lugar de observación en la superficie de la Tierra (en ambos casos, considerando el tiempo en el meridiano de Greenwich). Vamos a despreciar las variaciones en los semidiámetros del Sol y el planeta, de modo que consideramos  $s$  y  $s'$  tanto en el centro de la Tierra como en la superficie. Así, en los instantes de contacto  $T$  y  $T'$ , se tiene que  $m = s' \pm s$  y  $m' = s' \pm s$  respectivamente. Si consideramos que la tasa de variación de  $m$  es constante, entonces calculamos la distancia geocéntrica  $m$  en el instante  $T'$  como:

$$m = s' \pm s + (T' - T) \frac{dm}{dt}$$

Entonces, en el instante  $T'$ , y usando la fórmula (2.6):

$$s' \pm s = m' = m - \rho g \cos(\omega) = s' \pm s + (T' - T) \frac{dm}{dt} - \rho g \cos(\omega)$$

de donde:

$$(T' - T) \frac{dm}{dt} = \rho g \cos(\omega) \quad (2.9)$$

Recordemos que habíamos llamado  $a$  al movimiento relativo de los astros en ascensión recta, y  $d$  al correspondiente en declinación. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones (2.1) y aplicando las fórmulas del cambio de variable (2.2), se tiene:

$$\frac{d}{dt}(m \operatorname{sen}(M)) = \frac{d}{dt}((\alpha - \alpha') \cos(\delta_0)) \Rightarrow \frac{dm}{dt} \operatorname{sen}(M) + m \cos(M) \frac{dM}{dt} = a \cos(\delta_0) = n \operatorname{sen}(N)$$

$$\frac{d}{dt}(m \cos(M)) = \frac{d}{dt}((\delta - \delta')) \Rightarrow \frac{dm}{dt} \cos(M) - m \operatorname{sen}(M) \frac{dM}{dt} = d = n \cos(N)$$

Multiplicando en la primera expresión por  $\operatorname{sen}(M)$ , la segunda por  $\cos(M)$  y sumando las dos ecuaciones resultantes, obtenemos la expresión:

$$\frac{dm}{dt} = n(\operatorname{sen}(N) \operatorname{sen}(M) + \cos(N) \cos(M)) = n \cos(N - M) \quad (2.10)$$

Como en el instante  $T$  se tiene que  $s' \pm s = m$ , entonces por (2.3) se tiene que  $M - N = \Psi$ . Despejando en (2.9) y sustituyendo  $\frac{dm}{dt}$  y  $\cos(\omega)$  mediante (2.8) y (2.10) obtenemos ya la expresión que queríamos para determinar el instante  $T'$ :

$$T' = T + \frac{\rho g \cos(\omega)}{\frac{dm}{dt}} = T + \frac{\pi - \pi'}{n \cos(\Psi)} \rho [\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(D) + \cos(\psi) \cos(D) \cos(\theta_0 - \lambda - A)] \quad (2.11)$$

Las constantes  $T$ ,  $\pi - \pi'$ ,  $n$ ,  $\Psi$ ,  $D$  y  $A$  ya las hemos calculado; por tanto, la expresión anterior ya permite determinar el instante de contacto en un lugar determinado de la superficie de la Tierra, únicamente sustituyendo los correspondientes valores de latitud geocéntrica y longitud  $(\psi, \lambda)$  del lugar.



## Capítulo 3

# La observación del fenómeno

Hasta ahora nos hemos dedicado a explicar brevemente las ocultaciones y los tránsitos, y hemos dado algunas pautas para predecir los instantes en que tendrán lugar. Con los conocimientos básicos adquiridos y una predicción más o menos precisa, es hora de pasar a la observación del fenómeno. La **observación** constituye un pilar fundamental de los estudios astronómicos, ya que nos permite obtener información para llevar a cabo un estudio empírico en profundidad, y poner a prueba todas las formulaciones teóricas desarrolladas. Lo que haremos ahora será exponer los procedimientos que hemos seguido para preparar dos observaciones: la de una ocultación de una estrella por la Luna (que, desafortunadamente, no hemos podido llevar a cabo) y la del tránsito de Mercurio del 11 de noviembre de 2019.

Existe una enorme diversidad de consideraciones a tener en cuenta para estas actividades en función de lo que queramos hacer. En este capítulo expondremos algunos detalles importantes de cara a una observación útil y segura, y hacia el final del mismo hablaremos en profundidad sobre la observación del tránsito de Mercurio, poniendo a prueba también el método iterativo expuesto en el capítulo anterior.

### 3.1. Generalidades de nuestras observaciones

#### 3.1.1. Telescopios

Para nuestras observaciones hemos podido contar con dos telescopios: un Celestron C14 (figura 3.1) para la observación del tránsito, y un Meade LX600-ACF<sup>7</sup> (figura 3.2) para la ocultación. Se recogen en la tabla 3.1 algunas especificaciones técnicas de los mismos.

Gracias al observatorio astronómico Ramón María Aller (OARMA) por permitirnos el uso de este material.

---

<sup>7</sup>ACF: Advanced Coma-Free



Figura 3.1: Telescopio Celestron 14 preparado para la observación en el OARMA.



Figura 3.2: Telescopio Meade LX600-ACF preparado para la observación en el OARMA.

TELESCOPIO	Celestron C14	Meade LX600-ACF
DISEÑO ÓPTICO	Schmidt-Cassegrain	Schmidt-Cassegrain ACF
APERTURA	350.0mm (14")	406.4mm (16")
DISTANCIA FOCAL	3910mm	3251mm
RELACIÓN FOCAL	f/11	f/8
RESOLUCIÓN (DAWES)	0.30 segundos de arco	0.285 segundos de arco
BUSCADOR	8x50mm	8x50mm

Cuadro 3.1: Comparativa de especificaciones técnicas de los telescopios.

### 3.1.2. Medida del tiempo y coordenadas

Buena parte de la teoría que hemos desarrollado en este trabajo gira en torno a estimar los instantes en que ocurrirán estos fenómenos. Sin embargo, este enfoque aproximativo, junto con las simplificaciones hechas durante el desarrollo teórico, las perturbaciones producidas por la interacción entre diferentes astros y otros factores que puedan afectar a la precisión de nuestras predicciones, provocan algunos errores en nuestros resultados finales. Las observaciones son las que nos permiten determinar con mayor exactitud los instantes descritos, y por ello la medida del tiempo con la máxima precisión posible es fundamental. Por supuesto, hay que tener también en cuenta la localización del lugar de observación, ya que también es un factor que afecta a la medida del tiempo.

Lo ideal para garantizar una buena medida es disponer de herramientas dedicadas a ello. En caso de no contar con equipo especializado, podemos usar señales horarias emitidas en diferentes frecuencias de radio, o sincronizar los relojes de nuestro ordenador con relojes atómicos para asegurar una precisión adecuada (a veces, los ordenadores asignan una prioridad baja al proceso de sincronización de la hora, lo que provoca la acumulación de errores), así como otras vías que aseguren un mínimo de precisión. En estos casos en los que el tiempo se toma de forma más manual hay que tener en cuenta la llamada **ecuación personal**, que consiste en sumarle un cierto retraso (habitualmente de 2 o 3 décimas de segundo) a cada instante medido, relacionado con el tiempo de reacción desde que la persona observa el fenómeno hasta que detiene el cronómetro para marcar el instante en que ocurre.

## 3.2. Observación: ocultación de una estrella por la Luna

Comenzamos recordando las dos clases de ocultaciones de estrellas por la Luna: normales y rasantes. La naturaleza de las ocultaciones rasantes ya nos da una idea de que se

trata de fenómenos difíciles de observar y medir: requieren unas predicciones muy precisas, y en ocasiones un cuidado especial a la hora de la observación, según qué clase de datos queremos analizar. Pero vayamos por partes y comencemos por las ocultaciones normales.

Una vez hecha una predicción aceptable para una ocultación de este tipo, basta con tener un telescopio, así como instrumentos apropiados de geolocalización y medida del tiempo, en caso de querer tomar más datos. A veces puede ser difícil ver la ocultación y medir el instante exacto de inmersión o emersión, especialmente cuando el punto donde tienen lugar se encuentra en la región iluminada de la Luna; por eso, es recomendable registrar la observación con un detector electrónico, cámara electrónica, cámara de vídeo o fotómetro para su análisis posterior. Con la configuración apropiada de este material, ya estamos listos para la toma de datos.

Si lo que nos interesa es únicamente la inmersión o la emersión, entonces lo ideal es que la Luna se encuentre en una fase que facilite la observación:

- El punto de inmersión se encuentra en la mitad oeste del disco lunar; por tanto, si lo que nos interesa es únicamente esta fase de la ocultación, conviene que la Luna esté en fase creciente para que la inmersión ocurra por la región no iluminada de la Luna, y lo más cerca posible de la luna nueva para evitar una luminosidad excesiva que dificulte la correcta localización de la estrella.
- El punto de emersión está en la mitad este del disco lunar; entonces, si solo nos interesa esta fase, conviene que la Luna esté en fase menguante y cerca de la luna nueva, por las mismas razones expuestas anteriormente. Otro factor a tener en cuenta es que la observación de la emersión requiere un conocimiento preciso del punto donde se va a producir, ya que no podemos hacer un seguimiento visual de la estrella hasta que finalice la ocultación.

Las ocultaciones rasantes son mucho menos frecuentes y sus predicciones están sujetas a imprecisiones que pueden dificultar la observación; por ello, es conveniente situar a varios observadores en la franja de visibilidad (normalmente de 1 o 2 kilómetros de anchura), para que al menos uno consiga llevarlo a cabo. Debido a que la estrella puede aparecer y desaparecer varias veces por el relieve lunar, se requiere un telescopio lo suficientemente potente. La ventaja es que este tipo de observaciones, en caso de tener éxito, nos permiten conocer mejor el perfil de la Luna.

Con todas estas consideraciones, pasaremos a describir el equipo que hemos preparado en el OARMA.

### 3.2.1. Otros materiales para la observación de ocultaciones

Como hemos comentado anteriormente, durante la observación de una ocultación conviene registrar el evento para asegurar una mayor precisión en el momento de determinar los instantes de inmersión y emersión, y permitir un análisis posterior de la información obtenida. En el OARMA contamos con un fotómetro SSP-7 específicamente diseñado para el registro de ocultaciones lunares, aunque por razones de complejidad hemos optado finalmente por el uso de cámaras de vídeo para grabar la ocultación. Para ello, hemos preparado el siguiente equipo:

- Cámaras de vídeo:

Watec 910HX-RC (figura 3.3): ver tabla 3.2 para características técnicas. Gracias a Ramón Iglesias Marzoa por el préstamo de esta cámara.

Webcam Logitech C270 HD: resolución 1280x720 (720p), 30fps, FOV de 60°. Gracias a Rubén Díez Lázaro por el préstamo de esta cámara.

- Reductor de focal de 2" a 1.25" (pulgadas).

- Medida de tiempo y coordenadas:

IOTA-VTI<sup>8</sup> (figura 3.3): dispositivo que superpone en un vídeo una etiqueta indicando el instante en que fue tomado cada fotograma, para una medida del tiempo suficientemente precisa.

Antena GPS: se conecta al IOTA-VTI para obtener información precisa de geolocalización y la hora en formato UTC.

- Software (predicción): Occult v4.10.5.0[10]
- Software (grabación): HandyAvi 5.0[1]
- Software (fotometría): Limovie 0.9.98.5[14]

### 3.2.2. Montaje del equipo para la observación de una ocultación

Acoplamos la cámara Watec 910HX-RC y el reductor de focal al ocular del telescopio. A continuación, conectamos mediante el cable correspondiente la salida de la cámara con el puerto de entrada del IOTA-VTI, y la salida de este dispositivo con el ordenador mediante

---

<sup>8</sup>VTI: Video Time Inserter.

TIPO DE SENSOR	CCD
MEGAPÍXELES	0.4
SENSIBILIDAD A LA LUZ (lx)	0.000005
RELACIÓN SEÑAL/RUIDO (dB)	52
TIEMPO DE EXPOSICIÓN MÍNIMO (s)	0.04
TIEMPO DE EXPOSICIÓN MÁXIMO (min)	1/6
RESOLUCIÓN DE VÍDEO	752x582

Cuadro 3.2: Especificaciones técnicas de la cámara Watec 910HX-RC.

un adaptador USB. Conectamos la antena satélite en el puerto del IOTA-VTI destinado a ello, y finalmente enchufamos los cables de alimentación para la cámara y el IOTA-VTI, teniendo en cuenta que el voltaje suministrado sea el adecuado y que, cuanto más ligero sea el cable de alimentación de la cámara de vídeo, menos probable es que esta se mueva durante la grabación.

Tras estos preparativos, ya podemos trabajar desde el software que tengamos instalado en nuestro ordenador para controlar la grabación. En nuestro caso, hemos elegido HandyAvi 5.0, que nos permitirá registrar la ocultación en un vídeo en formato .avi. Se nos mostrará también en pantalla una vista previa de lo que está captando la cámara de vídeo en cada instante, junto con una interfaz superpuesta suministrada por el IOTA-VTI.

Dicha interfaz cuenta con dos modos distintos (posición y tiempo), intercambiables mediante un interruptor localizado en el propio dispositivo. Antes de comenzar la grabación, es importante consultar la interfaz de posición, donde nos aseguraremos de que el GPS recibe información de un número suficiente de satélites (preferiblemente un mínimo de cinco, para obtener información precisa de geolocalización y la hora en formato UTC). Este proceso de búsqueda de satélites puede durar unos minutos; en caso de que el número no sea suficiente, se recomienda llevar la antena satélite al exterior, donde se pueda establecer una mejor conexión.

Una vez nos hayamos asegurado de que todo funciona correctamente y el IOTA-VTI recibe información de un número suficiente de satélites, activamos el modo de tiempo para que se superponga en el vídeo una etiqueta que muestra el instante en que se ha tomado cada fotograma. De este modo, tras la grabación de la ocultación, podremos consultar dicha etiqueta y dar con suficiente precisión los instantes de inmersión y emersión.



Figura 3.3: IOTA-VTI y cámara Watec 910HX-RC acoplada al ocular del telescopio para grabar la ocultación.

#### **Nota final sobre nuestro plan de observación de una ocultación**

Desafortunadamente, debido a las condiciones meteorológicas adversas durante el primer cuatrimestre del curso, y a las medidas establecidas por las autoridades sanitarias para frenar la expansión de la COVID-19 en los últimos meses, no hemos podido realizar ninguna observación de ocultaciones de estrellas por la Luna.

### **3.3. Observación: tránsitos**

Los tránsitos más observados son los de Mercurio y Venus por delante del Sol. Dada su naturaleza, a la hora de la observación, es necesario tener siempre en cuenta las siguientes medidas de seguridad:

- NUNCA mirar directamente al Sol, ni a simple vista ni a través de cualquier instrumento que no esté especialmente dedicado a la observación y debidamente preparado, como telescopios o prismáticos sin filtros homologados, o cualquier tipo de gafas de sol convencionales.
- Evitar la exposición excesiva a la luz solar de los instrumentos de observación utilizados.

En el caso de la observación de tránsitos, podemos clasificar los diferentes métodos en dos tipos: directos e indirectos.

Los métodos directos, como su nombre indica, se basan en observar directamente el fenómeno con las medidas de protección adecuadas (ya que estaremos mirando directamente al Sol). En el caso de los eclipses de Sol, son muy populares las gafas especiales con polímero negro; para los tránsitos, como necesitamos un telescopio debido al tamaño aparente del cuerpo celeste involucrado, podemos aplicar una idea similar: basta con tener un filtro homologado para el telescopio. Es muy importante asegurar la calidad y la integridad de los filtros empleados; cualquier desperfecto puede repercutir en su correcto funcionamiento, provocando daños graves en la visión del observador. Otro factor a tener en cuenta es que existen filtros dedicados a astrofotografía que dejan pasar una cantidad ligeramente mayor de luz, lo que impide su uso para la observación directa.

Por otro lado, los métodos indirectos son aquellos en los que no hay una observación directa del Sol, sino que se proyecta una imagen del fenómeno sobre una pantalla, de ahí que reciban el nombre de observaciones por proyección. Existen algunos métodos muy económicos que permiten hacer observaciones a cualquier persona que no disponga de instrumental especializado, sobre todo en el caso de los eclipses de Sol. Por analogía, podemos usar estos mismos métodos para observar un tránsito, aunque debido a que el tamaño aparente de los planetas es mucho menor, sí que conviene disponer de un telescopio debidamente preparado para la actividad. Comentamos este método más a fondo porque es el que hemos usado para observar el tránsito de Mercurio.

Comenzamos acoplando la pantalla de proyección por el extremo del telescopio donde se encuentra el ocular, teniendo en cuenta a qué distancia del mismo queda situada la pantalla: cuanto más cerca esté, más pequeña y nítida será la imagen, y cuanto más lejos, más grande y difusa. A continuación, debemos orientar el telescopio de forma que su sombra sea mínima, ya que eso significa que está orientado perpendicularmente con respecto al Sol; en nuestro caso, este paso es mucho más sencillo, ya que la montura ecuatorial del telescopio nos permite hacer un seguimiento del movimiento del Sol de forma suave. Finalmente, buscamos el mejor enfoque tratando de ajustar la imagen a una circunferencia de 25cm de diámetro sobre una hoja de papel, utilizada habitualmente para el registro de manchas solares en el observatorio. Es conveniente también diafragmar el telescopio mediante un dispositivo que se coloca en la parte superior del tubo óptico, con el fin de evitar una entrada excesiva de luz solar.

Con esto ya estamos preparados para la observación del tránsito, tomando las correspondientes medidas de precaución: no mirar nunca a través del telescopio, no ponerse en la trayectoria de la luz hasta la pantalla de proyección, y tapar el tubo óptico cada cierto



Figura 3.4: Sistema de proyección acoplado al telescopio Celestron 14 del OARMA para la observación del tránsito de Mercurio.

tiempo para impedir una entrada continuada de la luz del Sol en los espejos del telescopio, para evitar daños en el mismo a causa de una exposición excesiva.

Un último detalle a tener en cuenta durante la observación de un tránsito, ya sea de forma directa o por proyección como en nuestro caso, es el fenómeno conocido como **gota negra** (en inglés, **black drop**), que puede impedir la determinación del instante exacto de contacto interior, tanto durante la inmersión como la emersión, debido fundamentalmente a turbulencias en la atmósfera terrestre. Se muestra en la figura 3.5 un ejemplo de este fenómeno.

### 3.4. El tránsito de Mercurio del 11/11/2019

#### 3.4.1. Generalidades sobre los tránsitos de Mercurio

De media, tienen lugar unos 13.3 tránsitos de Mercurio por siglo, y los tiempos entre tránsitos consecutivos pueden ser 3.5, 6, 7, 9.5 o 13 años (terrestres). La razón de esta periodicidad está en que se corresponden muy aproximadamente con un múltiplo entero del *año sidéreo* de Mercurio, o bien con un múltiplo entero de la mitad de su año sidéreo, lo que determina si Mercurio está pasando por un nodo de su órbita o el otro. Así, ocurre

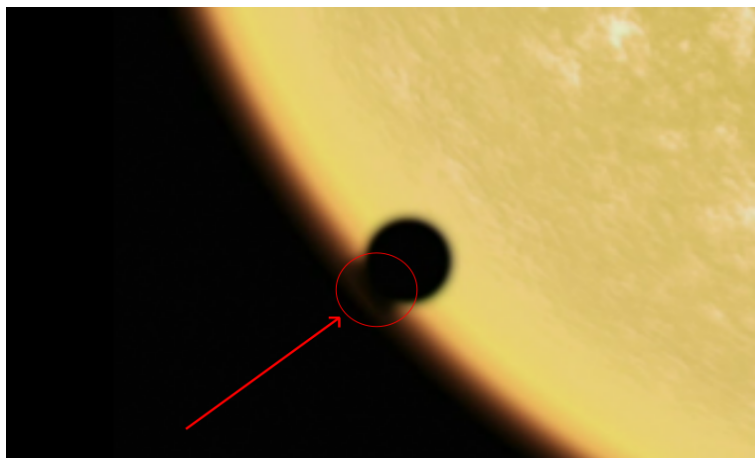


Figura 3.5: Gota negra durante la observación directa del tránsito de Venus del 8 de junio de 2004. Fuente: ESA.

también que las fechas en que se puede observar este tránsito se sitúan en mayo (cuando Mercurio está en el nodo descendente de su órbita) o en noviembre (cuando se encuentra en el nodo ascendente).

Dentro de los planetas del Sistema Solar, Mercurio y Venus son los que tienen una órbita más inclinada, lo que provoca que muchas veces pasen por encima o por debajo del disco solar. De hecho, ocurre que Mercurio tiene la mayor inclinación con respecto al plano de la eclíptica ( $7^\circ$  frente a los  $3,4^\circ$  de Venus); sin embargo, el hecho de que Venus esté más cerca de la Tierra hace que pase muchas más veces por encima o por debajo desde nuestra línea de visión, de modo que no se produce el tránsito. Además, el *período sinódico* de Mercurio también es menor (esto significa que las *conjunciones inferiores* de Mercurio son más frecuentes, aumentando más la diferencia de frecuencia respecto a Venus). Por todo esto, se puede estimar que los tránsitos de Mercurio son unas diez veces más frecuentes que los de Venus.

La órbita de Mercurio tiene una *excentricidad* alta (0,2056), lo que provoca una diferencia notable en su tamaño aparente; concretamente, en los tránsitos de mayo (nodo descendente) el planeta está un 20% más cerca de la Tierra, lo que hace que su tamaño aparente sea un 20% mayor que en los tránsitos que ocurren en noviembre. En cifras, esto se traduce en que el tamaño aparente medio de Mercurio en un tránsito de mayo es de  $12''$ , mientras que en uno de noviembre es de  $10''$ . También hay diferencias en la duración máxima de un tránsito central según la fecha: si el tránsito ocurre en noviembre, Mercurio está cerca de su *perihelio*; entonces, sabemos por la segunda ley de Kepler que su velocidad orbital es mayor, haciendo que la duración del evento sea menor. Así, un tránsito que

ocurre en mayo puede llegar a durar ocho horas, pero si ocurre en noviembre solo puede llegar a durar unas cinco horas y media por esta razón.

### 3.4.2. Predicciones para la observación: primera iteración paso a paso

La estimación de los instantes destacados del tránsito es fundamental para prepararse apropiadamente para la observación. En el capítulo anterior hemos descrito un método iterativo para aproximar cada uno de los cuatro contactos, y ahora lo aplicaremos a este tránsito de Mercurio. Concretamente, desarrollaremos paso a paso los cálculos para el instante de contacto exterior durante la inmersión (inicio del tránsito). Para el resto de instantes, se resuelve el problema de forma análoga, por lo que solamente mencionaremos las estimaciones obtenidas.

Siguiendo el orden de la teoría, comenzaremos con una predicción para un observador situado en el centro de la Tierra. A partir de esos resultados, podremos estimar también el instante central o de máximo acercamiento, el ángulo de contacto y el instante de contacto exterior durante la inmersión para un punto de observación en la superficie (en nuestro caso, Santiago de Compostela).

En primer lugar, llamamos  $T_0$  a un instante cercano a la conjunción en ascensión recta entre Mercurio y el Sol. En este caso, consideraremos  $T_0 = 15^h 30^m (UTC) = 15,5h$ . Entonces, para resolver el problema, tomamos los datos necesarios de las efemérides[18] para este instante.

Recuperando la notación usada anteriormente, llamamos  $(\alpha, \delta)$  a las coordenadas de Mercurio, y  $(\alpha', \delta')$  a las del Sol, en el instante  $T_0$ . Entonces:

$$\alpha = 15^h 4^m 49^s 03, \delta = -17^\circ 21' 15'' 8$$

$$\alpha' = 15^h 4^m 50^s 84, \delta' = -17^\circ 22' 46'' 5$$

Calculamos ahora las velocidades relativas en ascensión recta y declinación ( $a$  y  $d$ ). Para ello, vamos a buscar las coordenadas de los dos astros en el instante  $T_0 + 1h$  para ver la variación horaria de las mismas. Así, para las  $16^h 30^m (UTC)$  tenemos:

$$\alpha_{+1} = 15^h 4^m 36^s 50, \delta_{+1} = -17^\circ 19' 30'' 4$$

$$\alpha'_{+1} = 15^h 5^m 0^s 89, \delta'_{+1} = -17^\circ 23' 27'' 6$$

De estos valores se siguen las variaciones horarias<sup>9</sup>:

---

<sup>9</sup>Los símbolos  $\mercury$  y  $\odot$  se usan para designar a Mercurio y al Sol, respectivamente. De hecho, existe un símbolo astronómico para cada planeta del sistema solar y otros cuerpos celestes destacados.

$$a_{\text{☿}} = \alpha_{+1} - \alpha = -187''95, \quad d_{\text{☿}} = \delta_{+1} - \delta = +105''4$$

$$a_{\text{☉}} = \alpha'_{+1} - \alpha' = +150''75, \quad d_{\text{☉}} = \delta'_{+1} - \delta' = -41''1$$

Entonces, las velocidades relativas en ascensión recta ( $a$ ) y declinación ( $d$ ) son:

$$a = a_{\text{☿}} - a_{\text{☉}} = -338''7$$

$$d = d_{\text{☿}} - d_{\text{☉}} = +146''5$$

Por último, para el instante  $T_0$ , los valores de los semidiámetros en segundos de arco son  $s = 4''9767795$  y  $s' = 969''3185$ , de modo que usaremos  $s' + s = 974''2952795$  para calcular los contactos exteriores, y  $s' - s = 964''3417205$  para los interiores, como hemos explicado en el capítulo anterior.

Con estos datos, ya tenemos todos los ingredientes para proceder con los cálculos de la predicción. La solución del problema viene determinada por las ecuaciones (2.3) y (2.4), que resolveremos una vez determinados los valores de las variables  $m$ ,  $M$ ,  $n$  y  $N$ .

Para resolver el sistema (2.1) solo nos falta calcular  $\delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2} = -17^\circ 22' 1''15$ . Con este valor, y con las coordenadas  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\alpha'$  y  $\delta'$ , resolvemos:

$$m = 94''32883746, \quad M = -15^\circ 56' 39''06$$

Del mismo modo, como conocemos  $a$  y  $d$ , podemos resolver 2.2 para hallar  $n$  y  $N$ :

$$n = 354''9069714, \quad N = -65^\circ 37' 12''52$$

Comenzaremos tomando  $s' + s$  para predecir los contactos exteriores. En tal caso, de sustituir en (2.3) obtenemos los ángulos  $\Psi_1 = 4^\circ 13' 58''96$  y  $\Psi_2 = 175^\circ 46' 1''04$ . Si en (2.4) usamos el valor de  $\Psi_2$ , como es el que tiene el coseno negativo, obtendremos el valor de  $\tau$  correspondiente a la inmersión, de modo que  $\tau = -2,909716248h$ . Por tanto, la primera estimación que tenemos para el contacto externo durante la inmersión es:

$$T = T_0 + \tau = 15,5 - 2,909716248 = 12,59028375 \text{ h} = 12^h 35^m 25^s (UTC)$$

que en Santiago de Compostela se corresponde con las  $13^h 35^m 25^s (UTC + 1)$ .

Con el ángulo  $\Psi_2$  podemos estimar también el ángulo de posición del punto de contacto, que viene dado por

$$Q = N + \Psi_2 = 110^\circ 8' 48''52$$

Una vez finalizada una iteración del método, podemos dar también una primera aproximación de la distancia aparente mínima entre Mercurio y el Sol ( $\Delta_{min}$ ) y el instante

central del tránsito ( $T_c$ ). Tomando los valores que hemos calculado para  $m$ ,  $M$ ,  $n$  y  $N$ , y retomando las expresiones (1.9) y (1.10), se tiene:

$$\Delta_{min} = m \operatorname{sen}(M - N) = 94''32883746 \operatorname{sen}(49^\circ 40' 33,46'') = 71''91601297$$

$$T_c = T_0 - \frac{m \cos(M - N)}{n} = 15,5 - \frac{94,32883746 \operatorname{sen}(49^\circ 40' 33,46'')}{354,9069714} = 15,32800815 h = 15^h 19^m 41^s$$

Ya tenemos una primera aproximación para el instante de contacto exterior en la inmersión. Ahora, queremos usar ese resultado para hacer una predicción para un observador situado en Santiago de Compostela, siguiendo el procedimiento que hemos descrito en la sección 2.3.

Partimos del instante  $T = 12,59028375$  ( $UTC$ ) que hemos calculado, y necesitamos las coordenadas de Mercurio y el Sol en  $T$ . Las efemérides que hemos consultado [18] nos dan las coordenadas para minutos exactos, pero no para segundos; por eso, para una mayor precisión, vamos a estimar las coordenadas por interpolación de Lagrange con Maple 18[15], obteniendo:

$$\alpha = 15^h 5^m 25^s 69, \delta = -17^\circ 26' 21'' 36$$

$$\alpha' = 15^h 4^m 21^s 69, \delta' = -17^\circ 20' 46'' 29$$

De aquí se siguen los valores:

$$\delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2} = -17^\circ 23' 33'' 83, \alpha_0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2} = 15^h 4^m 53^s 69$$

Otro dato que necesitamos son las paralajes ecuatoriales horizontales de Mercurio ( $\pi$ ) y el Sol ( $\pi'$ ). En nuestras efemérides no tenemos el dato directamente, pero como sí que tenemos la distancia a la que se encuentran del centro de la Tierra, podemos aplicar la relación de la figura 1.4, donde  $\rho = 6378,137 km$ [19] es el radio ecuatorial terrestre, de modo que:

$$\pi = \operatorname{arcsen} \left( \frac{6378,137}{101075801,3} \right) = 13'' 02, \pi' = \operatorname{arcsen} \left( \frac{6378,137}{148111585,9} \right) = 8'' 88$$

donde los denominadores son la distancia que hay del centro de la Tierra al centro del correspondiente astro, en kilómetros. Como en las efemérides[11] nos dan dicho valor en UA, basta con aplicar la equivalencia  $1UA = 149597870,7 km$ .

Con esto, podemos calcular  $\gamma$  mediante la expresión (2.5):

$$\gamma = \operatorname{arctan} \left( \frac{\pi + \pi'}{\pi - \pi'} \tan \left( \frac{m}{2} \right) \right) = 4' 9'' 87$$

Ahora, ya estamos en condiciones de resolver el sistema (2.7) para obtener la ascensión recta ( $A$ ) y la declinación ( $D$ ) de  $G$ :

$$A = 12^h 9^m 37^s 11, D = +66^\circ 37' 30'' 27$$

Por último, basta con resolver (2.11) con los datos del lugar de observación. Algunos de esos datos tenemos que calcularlos, concretamente el radio de la tierra en el punto de observación ( $\rho$ ) y la latitud geocéntrica ( $\psi$ ), y lo haremos de la forma siguiente. Sean  $a = 6378,137km$  y  $b = 6356,752km$ [19] los radios ecuatorial y polar de la Tierra respectivamente, y  $\phi = +42^\circ 52' 31'' 8$  la latitud geográfica del observatorio astronómico Ramón María Aller (Santiago de Compostela). Entonces:

$$\rho^2 = \frac{a^4 \cos^2(\phi) + b^4 \operatorname{sen}^2(\phi)}{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \operatorname{sen}^2(\phi)} \Rightarrow \rho = 6368,281346km$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{b^2}{a^2} \tan(\phi)\right) = +42^\circ 41' 1'' 14$$

Así, de (2.11) se sigue que el instante de contacto exterior durante la inmersión para un observador en Santiago de Compostela tiene lugar a las  $12,58076400 h$  (UTC), es decir, a las  $12^h 34^m 51^s$  (UTC).

### 3.4.3. Predicciones para la observación: aplicación completa del método iterativo

Los cálculos del apartado anterior suponen una primera aproximación de los instantes deseados. Conociendo los pasos a seguir en la aplicación de este método, basta con repetir lo que acabamos de hacer hasta alcanzar la convergencia.

En primer lugar, tenemos que establecer un límite de aproximación; cuando dicha condición sobre una de las variables se verifique, significa que hemos alcanzado la convergencia, y tomaremos el resultado de la correspondiente iteración como aproximación definitiva. Supongamos que queremos una precisión de centésimas de segundo (es decir,  $2,77 \cdot 10^{-6}$  horas). Entonces, usaremos como criterio de parada la condición  $|\tau| < 2,77 \cdot 10^{-6}$ . En el momento que se cumpla esto, significará que la diferencia entre el nuevo instante calculado y el de la iteración anterior será inferior a la centésima de segundo, por lo que no afectará a nuestro resultado final y consideraremos que hay convergencia.

Una vez definida la condición sobre  $\tau$ , ya podemos aplicar el método iterativo como hemos hecho en el apartado anterior, aunque con ciertos matices. Las efemérides [18] que hemos usado nos dan las coordenadas de Mercurio y el Sol para minutos exactos, pero no nos sirven para instantes intermedios (por ejemplo, sabemos las coordenadas a las 12:35 y a

las 12:36, pero tenemos que calcularlas por interpolación para las 12:35:25); por tanto, para una mayor precisión, vamos a calcular las coordenadas en cada instante por interpolación de Lagrange. Por otro lado, aunque las velocidades en ascensión recta y declinación y los semidiámetros tampoco son constantes, podemos despreciar sus variaciones y tomar como fijos los valores de  $a$ ,  $d$ ,  $s$  y  $s'$  que ya hemos utilizado.

Es importante recordar que este método iterativo nos da estimaciones de los instantes de cada contacto para un observador situado en el centro de la Tierra. Las predicciones para Santiago de Compostela (y más concretamente, para un observador situado en el OARMA) las daremos en la siguiente sección, aplicando en todo caso el método expuesto en los cálculos de la sección anterior.

Se mostrarán a continuación las tablas con los resultados de aplicar el algoritmo para calcular cada uno de los cuatro contactos. La primera columna de cada tabla recoge los nombres de las variables utilizadas, junto con las abreviaturas entre paréntesis de las unidades en que se expresan. Entre estas variables se incluyen las coordenadas ecuatoriales absolutas de Mercurio y el Sol tomadas de las efemérides[18], variables intermedias usadas en el algoritmo, o los instantes obtenidos como resultado en cada iteración. Por ello, la solución que consideramos definitiva para cada contacto será el valor de  $T$  en la columna correspondiente a la última iteración. Así, los resultados obtenidos son los siguientes (UTC):

- Contacto I (tabla 3.3): 12,59356952  $h$ .
- Contacto II (tabla 3.4): 12,62226747  $h$ .
- Contacto III (tabla 3.5): 18,03866118  $h$ .
- Contacto IV (tabla 3.6): 18,06700886  $h$ .

Los cálculos han sido realizados con Maple 18[15], por lo que hemos trabajado con los ángulos expresados en radianes.

Iteración	1	2	3	4
$T_0$ (h)	15,5	12,59028375	12,59361171	12,59356858
$\alpha$ (rad)	3,948009671	3,950675841	3,950672790	3,950672831
$\delta$ (rad)	-0,3028912258	-0,3043726182	-0,3043708666	-0,3043708893
$\alpha'$ (rad)	3,948141298	3,946021555	3,946024028	3,946023996
$\delta'$ (rad)	-0,3033309518	-0,3027481774	-0,3027488551	-0,3027488463
$\delta_0$ (rad)	-0,3031110888	-0,3035603978	-0,3035598608	-0,3035598678
$m$ (arcsec)	94,32883746	975,4729409	974,2800177	974,2956110
$M$ (rad)	-0,2782785181	1,921426550	1,921326741	1,921328010
$n$ (arcsec/h)	354,9069714	354,8655681	354,8656176	354,8656170
$N$ (rad)	-1,145287568	-1,145234691	-1,145234755	-1,145234754
$\Psi$ (rad)	3,067712099	3,066570499	3,066562674	3,066562739
$\tau$ (h)	-2,909716249	0,003327961	-0,000043130	$9,36 \cdot 10^{-7}$
$T$ (h)	12,59028375	12,59361171	12,59356858	12,59356952

Cuadro 3.3: Resultados para el contacto exterior durante la inmersión.

Iteración	1	2	3	4	5
$T_0$ (h)	15,5	12,61840681	12,62201104	12,62224671	12,62226643
$\alpha$ (rad)	3,948009671	3,950650070	3,950646765	3,950646555	3,950646539
$\delta$ (rad)	-0,3028912258	-0,3043585093	-0,3043571244	-0,3043570408	-0,3043570338
$\alpha'$ (rad)	3,948141298	3,946041504	3,946043817	3,946043967	3,946043983
$\delta'$ (rad)	-0,3033309518	-0,3027539084	-0,3027546928	-0,3027547451	-0,3027547495
$\delta_0$ (rad)	-0,3031110888	-0,3035562089	-0,3035559086	-0,3035558929	-0,3035558917
$m$ (arcsec)	94,32883746	965,6170709	974,2800177	964,3486987	964,3420878
$M$ (rad)	-0,2782785181	1,920647192	1,921326741	1,920602218	1,920602136
$n$ (arcsec/h)	354,9069714	354,8659544	354,8656176	354,8659835	354,8659837
$N$ (rad)	-1,145287568	-1,145235185	-1,145234755	-1,145235222	-1,145235222
$\Psi$ (rad)	3,066948120	3,065782058	3,065836891	3,066562739	3,065837329
$\tau$ (h)	-2,881593194	0,003604232	0,000235670	0,000019721	0,000001038
$T$ (h)	12,61840681	12,62201104	12,62224671	12,62226643	12,62226747

Cuadro 3.4: Resultados para el contacto interior durante la inmersión.

Iteración	1	2	3
$T_0$ (h)	15,5	18,03760948	18,03866267
$\alpha$ (rad)	3,948009671	3,945704795	3,945703827
$\delta$ (rad)	-0,3028912258	-0,3015941324	-0,3015936074
$\alpha'$ (rad)	3,948141298	3,950001077	3,950001862
$\delta'$ (rad)	-0,3033309518	-0,3038354523	-0,3038356390
$\delta_0$ (rad)	-0,3031110888	-0,3027147923	-0,3027146232
$m$ (arcsec)	94,32883746	963,9689398	964,3422481
$M$ (rad)	-0,2782785181	-1,070614177	-1,070652259
$n$ (arcsec/h)	354,9069714	354,9434412	354,9434567
$N$ (rad)	-1,145287568	-1,145334132	-1,145334152
$\Psi$ (rad)	0,07388055544	0,07469101704	0,07468193393
$\tau$ (h)	2,537609484	0,001053192	-0,000001491
$T$ (h)	18,03760948	18,03866267	18,03866118

Cuadro 3.5: Resultados para el contacto interior durante la emersión.

Iteración	1	2	3	4
$T_0$ (h)	15,5	18,06573254	18,06702510	18,06700981
$\alpha$ (rad)	3,948009671	3,945679716	3,945678632	3,945678644
$\delta$ (rad)	-0,3028912258	-0,3015798629	-0,3015791089	-0,3015791180
$\alpha'$ (rad)	3,948141298	3,950021915	3,950022889	3,950022879
$\delta'$ (rad)	-0,3033309518	-0,3038407378	-0,3038410694	-0,3038410656
$\delta_0$ (rad)	-0,3031110888	-0,3027103004	-0,3027100892	-0,3027100918
$m$ (arcsec)	94,32883746	973,8377453	974,3006913	974,2956140
$M$ (rad)	-0,2782785181	-1,071432475	-1,071429868	-1,071430140
$n$ (arcsec/h)	354,9069714	354,9438543	354,9438737	354,9438734
$N$ (rad)	-1,145287568	-1,14533466	-1,145334685	-1,145334684
$\Psi$ (rad)	0,07388055544	0,07386741687	0,07390522826	0,07390456942
$\tau$ (h)	2,565732539	0,001292559	-0,000015289	$-9,45 \cdot 10^{-7}$
$T$ (h)	18,06573254	18,06702510	18,06700981	18,06700886

Cuadro 3.6: Resultados para el contacto exterior durante la emersión.

### 3.4.4. Predicciones para la observación: resultados finales

Finalmente, teniendo los instantes de contacto geocéntricos y otras variables intermedias calculadas durante el método iterativo, se pueden calcular los ángulos de contacto para un supuesto observador en el centro de la Tierra, así como las predicciones de los instantes de contacto para un observador situado en un punto de la superficie de la Tierra. Concretamente, consideraremos un observador en el OARMA, cuyas coordenadas geográficas son  $\phi = +42^\circ 52' 31'' 8$ ,  $\lambda = -0^h 34^m 14^s$ . En la tabla 3.7 se muestran todos esos instantes junto con los correspondientes ángulos de contacto geocéntricos.

Contacto	I	II	III	IV
Centro de la Tierra	12 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup> 85	12 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> 16	18 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 19 <sup>s</sup> 18	18 <sup>h</sup> 4 <sup>m</sup> 1 <sup>s</sup> 23
OARMA	12 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup> 82	12 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 28 <sup>s</sup> 35	18 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 5 <sup>s</sup> 58	18 <sup>h</sup> 3 <sup>m</sup> 47 <sup>s</sup> 56
Ángulo de contacto	110° 5' 2''34	110° 2' 32''62	298° 39' 22''13	298° 36' 41''67

Cuadro 3.7: Resultados finales de la predicción.

Para la predicción final del instante central del tránsito y la distancia mínima, podemos tomar los valores de  $m$ ,  $M$ ,  $n$  y  $N$  de la última iteración para el primer contacto. Entonces, por (1.9) y (1.10), nos queda que el instante central tiene lugar a las 15<sup>h</sup>19<sup>m</sup>52<sup>s</sup>96, y la distancia entre los centros del Sol y Mercurio es de 73''03272432.

Es importante tener en cuenta que estos resultados horarios los estamos dando en formato UTC. Para conocer la hora local en Santiago de Compostela, basta con sumar una hora (horario de invierno).

### 3.4.5. Particularidades de este tránsito y resultados de la observación

Dada la baja frecuencia con que tienen lugar estos fenómenos, en el OARMA ( $\phi = +42^\circ 52' 31'' 8$ ,  $\lambda = -0^h 34^m 14^s$ ) hemos sido muy afortunados al ser de los pocos lugares de Galicia donde hemos podido observar este tránsito de Mercurio. Se trata de una oportunidad que no volverá a darse hasta el 13 de noviembre del año 2032, cuando volvamos a ver al pequeño planeta pasando por delante del disco solar.

Este tránsito del 11 de noviembre de 2019 se trata del cuarto tránsito de Mercurio del siglo XXI, precedido por el que tuvo lugar el 9 de mayo de 2016, que también se pudo observar desde el OARMA.

El tránsito fue visible en cualquier punto de la Península, excepto el final del mismo, ya que siguió su transcurso después de la puesta de sol; concretamente, en el OARMA (Santiago de Compostela), la puesta de sol del 11 de noviembre de 2019 tuvo lugar a las 18:15, mientras que nuestra predicción sitúa el final del tránsito a las 19:03 (hora local).

La figura 3.6 indica las regiones de visibilidad del tránsito en todo el mundo. Como último apunte, las Islas Canarias son el único lugar de España donde el tránsito fue visible de principio a fin.

De acuerdo con nuestras predicciones, su duración total es de  $5^h28^m24^s$ , resultado que es coherente con lo que habíamos indicado acerca de la duración máxima de un tránsito de Mercurio en noviembre al final de la sección 3.4.1. De hecho, se acerca mucho a la duración máxima que habíamos establecido, y es que, como hemos visto en la sección 3.4.4, se trata de un tránsito muy central, donde la distancia aparente entre los centros de Mercurio y el Sol llega a ser de tan solo 73 segundos de arco.

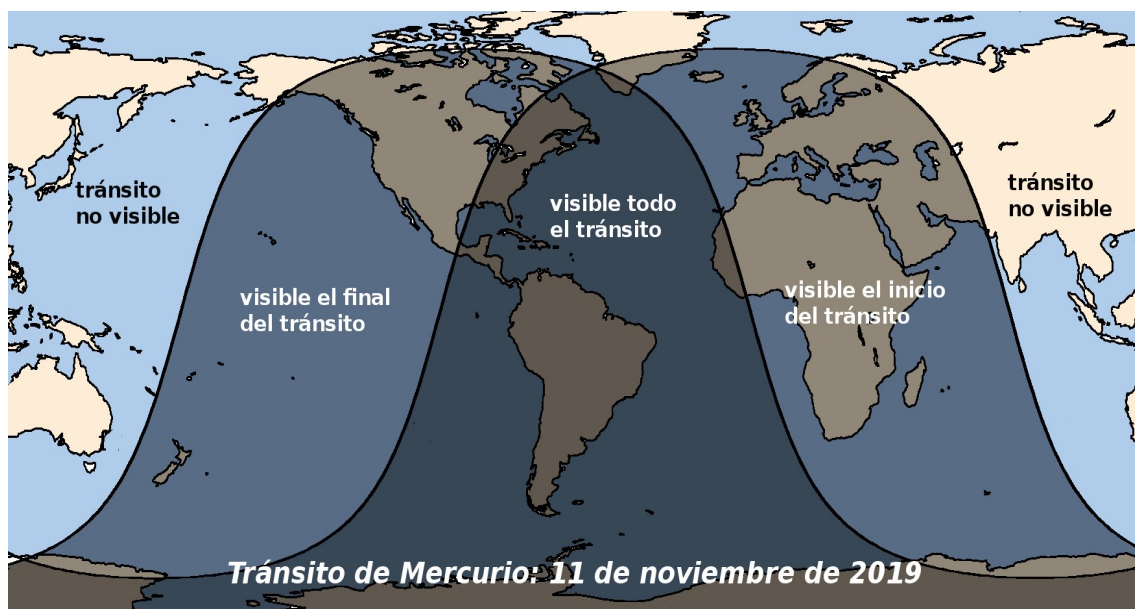


Figura 3.6: Información sobre la visibilidad del tránsito. Fuente: Instituto Geográfico Nacional

Para la observación hemos optado por el método de proyección con el telescopio Celestron 14 del OARMA. Las previsiones meteorológicas para el día de observación no eran favorables, presentándose un cielo bastante nublado que no nos permitió ver el inicio del tránsito. Afortunadamente, hemos podido tomar algunas fotografías del fenómeno aprovechando los claros ocasionales entre las 14:08:44 y las 15:30:04 (hora local), pero de nuevo las nubes impidieron observaciones posteriores.

En las figuras 3.7, 3.8 y 3.9 se muestran algunas de las fotografías que hemos podido tomar (Cámara: smartphone Xiaomi Redmi 4X). Lo que se observa en las mismas es el

disco solar proyectado sobre una pantalla, y prestando atención a la mitad derecha del disco, se puede ver una pequeña sombra, que no es más que Mercurio pasando por delante del Sol. A medida que pasa el tiempo, Mercurio se va desplazando, y como podemos ver en las imágenes, está cada vez más cerca del centro del disco solar. Esto es porque todas las fotografías las hemos tomado antes del instante central del tránsito, dado que las condiciones meteorológicas adversas nos han impedido observaciones posteriores.

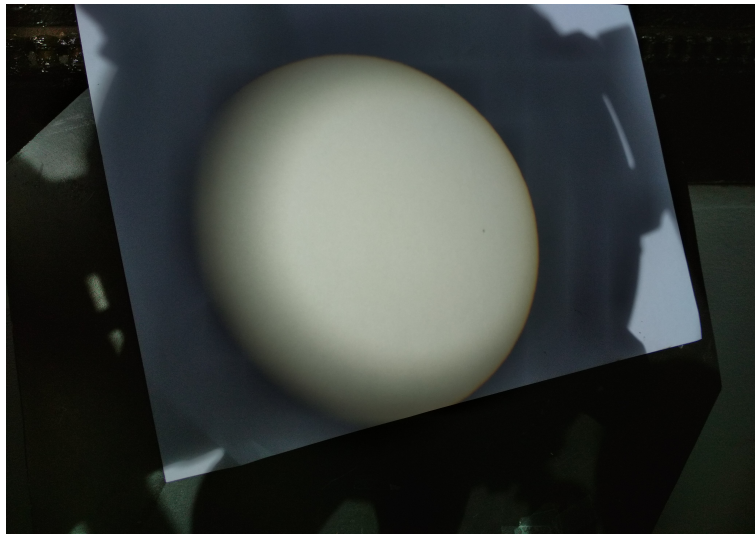


Figura 3.7: Tránsito de Mercurio observado por proyección. Hora (UTC): 13:33:08.

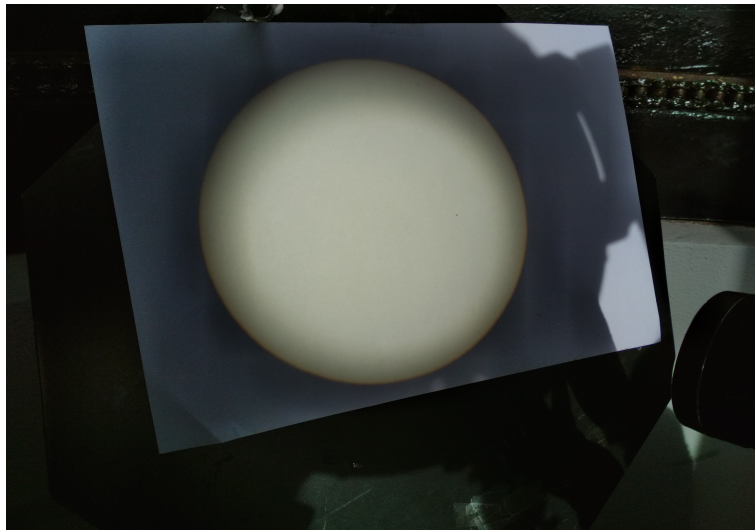


Figura 3.8: Tránsito de Mercurio observado por proyección. Hora (UTC): 13:53:55.

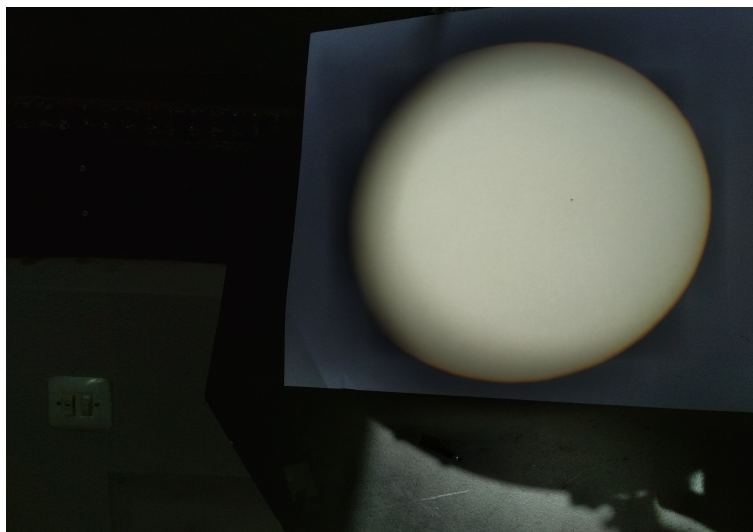


Figura 3.9: Tránsito de Mercurio observado por proyección. Hora (UTC): 14:20:56.

En la figura 3.10 se muestra un montaje hecho con las tres fotografías anteriores, utilizando el software de edición de imagen GIMP 2.10.18[12]. Lo que se ha hecho es recortar el disco solar de cada fotografía y elaborar una superposición donde se pueda apreciar que Mercurio ocupa en cada instante una posición distinta sobre el disco solar. Se trata de un proceso delicado y sometido a errores en la manipulación de las imágenes, puesto que se han hecho reajustes de perspectiva para cada una de ellas, tratando de hacer el menor número de modificaciones posible. El resultado final, aunque no refleje la realidad con exactitud, nos da una primera idea del movimiento de Mercurio con el paso del tiempo.

Finalmente, aprovechando los cálculos de la predicción, se ha elaborado una plantilla que permita hacer un montaje más preciso, aplicando posteriormente las transformaciones de perspectiva mencionadas para la elaboración de la figura 3.10. Para la creación de la plantilla hemos usado el software de edición de gráficos vectoriales Inkscape 1.0[5]. En primer lugar, dibujamos una circunferencia que hará el papel de limbo solar, y definimos una orientación para la misma (Norte, Sur, Este y Oeste). A continuación, con los valores que hemos hallado para los ángulos de contacto (en azul el ángulo del punto de inmersión, con un valor de unos  $110^\circ$  como hemos visto en la sección 3.4.4), localizamos sobre la circunferencia los puntos de inmersión (en verde) y emersión, y uniéndolos con una recta tendremos la trayectoria estimada para Mercurio. Como comprobación adicional, podemos asegurarnos de que la relación entre la distancia mínima del centro de la circunferencia a la trayectoria trazada en nuestro dibujo es la misma que la relación real entre la distancia aparente mínima calculada y el semidiámetro solar. Con esta plantilla, manipulamos otra vez la perspectiva de las imágenes 3.7, 3.8 y 3.9, de modo que el disco solar coincida con la

circunferencia dibujada, y Mercurio esté situado sobre la trayectoria que hemos trazado.  
El resultado final del montaje es el que se muestra en la figura 3.11.

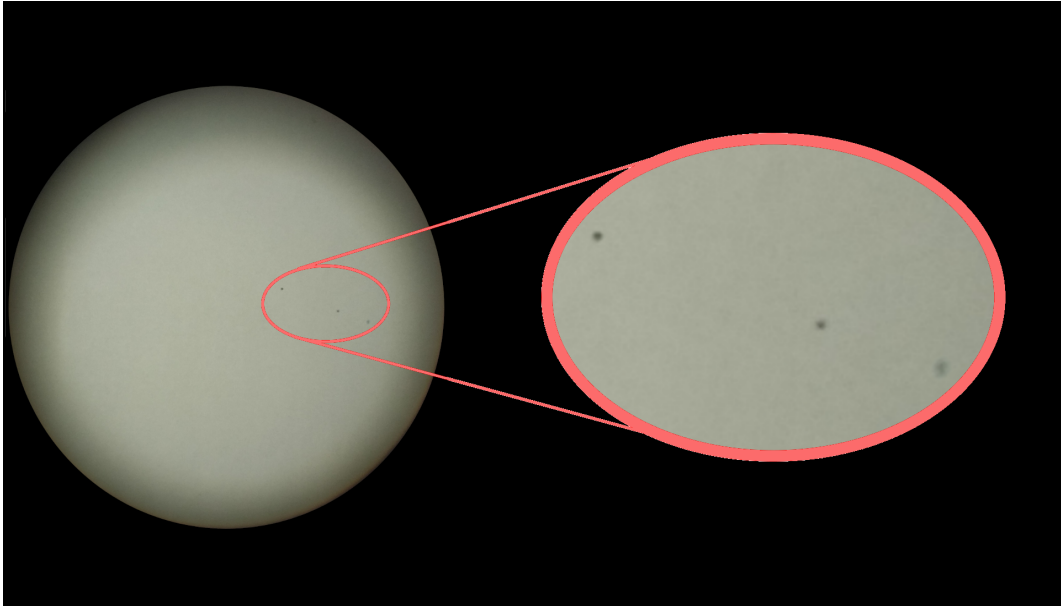


Figura 3.10: Composición del tránsito de Mercurio combinando las tres imágenes anteriores. En la proyección se ve el avance de la sombra de derecha a izquierda.

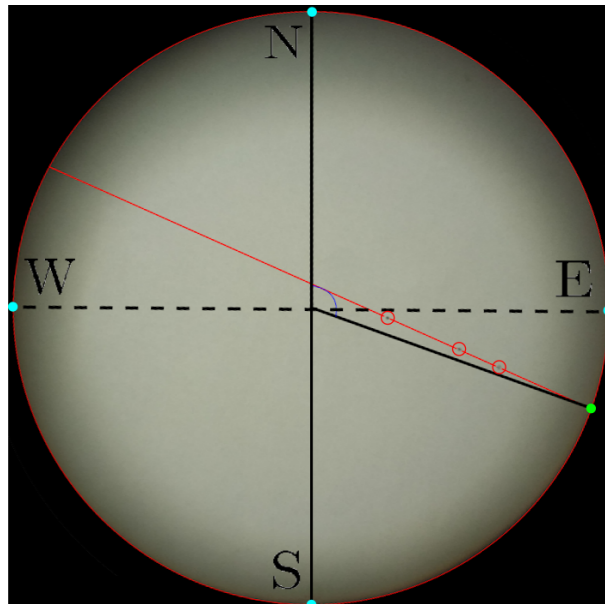


Figura 3.11: Corrección de la composición de imágenes sobre el disco solar orientado.

## Capítulo 4

# Principales aplicaciones astronómicas

Las observaciones de ocultaciones y tránsitos, además de su interés lúdico o divulgativo, también nos aportan información de gran interés científico que sigue sustentando numerosos descubrimientos de hoy en día. A lo largo de este trabajo, nos hemos centrado especialmente en ocultaciones de estrellas por la Luna y los tránsitos de los planetas interiores, que son aquellos que nos interesaba observar directamente con el instrumental del que disponíamos. Sin embargo, existen muchos más ejemplos de estos fenómenos que pueden darse incluso más allá de nuestro Sistema Solar. En este último capítulo, abordaremos las ocultaciones y los tránsitos desde un punto de vista más general, atendiendo especialmente a la información que podemos obtener de las correspondientes observaciones y la utilidad de las mismas.

### 4.1. Aplicaciones de la observación de ocultaciones

En su momento, hemos dado ya algunas pinceladas sobre la utilidad de las observaciones de ocultaciones de estrellas por la Luna. Nuestro satélite tiene una teoría muy compleja para describir su movimiento, muy perturbado especialmente por la influencia gravitatoria del Sol y, realmente, muy difícil de predecir. La correcta medida del instante en que se produce una ocultación en un lugar determinado nos permite precisar la posición de la Luna en ese instante. Al mismo tiempo, en el caso de una ocultación rasante, esta puede ser utilizada para estudiar el relieve lunar, con las sucesivas apariciones y desapariciones de la estrella por detrás de la Luna.

Entre algunas de las utilidades de estas observaciones que todavía no hemos mencionado se encuentran también la determinación de la posición de la estrella ocultada, la posición de fuentes de radiación en longitudes de onda no visibles (rayos X, infrarrojos...), el descubrimiento de sistemas estelares binarios, la medida de diámetros estelares, el estudio del

fenómeno de *atenuación* de estrellas gigantes y supergigantes, la medida del movimiento de rotación terrestre, la creación de un sistema de coordenadas para la *región zodiacal* que facilite el estudio del *movimiento propio* de las estrellas o, simplemente, la adquisición de experiencia práctica para nuevos observadores, dada la dificultad de observar una ocultación rasante.

A pesar de centrarnos en las ocultaciones de estrellas por la Luna, podemos irnos un poco más allá y encontrar más ejemplos de este tipo de fenómenos en otros lugares del Sistema Solar. Como hemos mencionado en la introducción, destacan también los eclipses entre los satélites de otros planetas, en especial los galileanos, de manera que sus observaciones pueden ser utilizadas también para mejorar las teorías sobre su movimiento.

Otro tipo importante que no hemos mencionado aún son las ocultaciones de estrellas por asteroides. Dado su pequeño tamaño, que puede ir de varios metros a cientos de kilómetros en algunos casos (muy pocos), se trata de observaciones complicadas de llevar a cabo y de predecir. Sin embargo, como son tan numerosos, estas ocultaciones se dan con una frecuencia muy alta, aproximadamente una vez por semana. La mayor parte de los asteroides que conocemos se encuentra entre Marte y Júpiter, en lo que conocemos como el **cinturón de asteroides** o **cinturón principal**, aunque también los podemos encontrar más allá de la órbita de Plutón, en el conocido como *Cinturón de Kuiper*.

El intervalo de tiempo que el asteroide cubre nuestra línea de visión con la estrella ocultada puede ir de una fracción de segundo hasta un minuto o más, y según la diferencia de brillo entre ambos, el fenómeno se puede percibir con una atenuación de la estrella que puede ir desde una fracción de magnitud hasta 8 o 10 magnitudes. Como esa diferencia es tan pequeña, es probable que a veces no pueda reconocerse con una simple observación directa, por lo que conviene también grabar en vídeo el fenómeno y/o registrarlo con un fotómetro. Cabe incluso la posibilidad de que la diferencia de magnitud sea tan pequeña que supere la magnitud límite del fotómetro, con lo que, en el momento de la ocultación, se apreciará una desaparición y posterior reaparición de la estrella.

En cuanto a la utilidad práctica de estas observaciones, sigue siendo muy importante medir bien los instantes de desaparición y reaparición porque, al igual que ocurre con la Luna, podemos mejorar nuestro conocimiento sobre el movimiento de los asteroides, determinando su posición con exactitud. También nos permiten estimar el tamaño y la forma de los mismos, y es aquí donde destaca el papel de las observaciones negativas. Explicamos esto ahora en más detalle.

Igual que con el resto de fenómenos descritos, podemos definir una región de visibilidad, que es una aproximación de los lugares de la Tierra desde donde se puede observar la ocultación. Al ser una aproximación, está sujeta a errores, y en este caso, al tratarse de

cuerpos celestes tan pequeños, es más difícil establecer unos límites con exactitud. Por eso, lo que se hace es situar a varios observadores a lo largo y ancho de la banda de visibilidad, de modo que algunos podrán observar el evento desde su posición, y otros no podrán hacerlo. Definimos así las observaciones positivas y negativas, respectivamente. Ambas son igual de importantes, ya que, combinando todos los resultados, es posible delimitar correctamente la región de visibilidad, y de ahí calcular el tamaño y la forma del asteroide en cuestión. Además, una observación positiva es muestra de una buena predicción, de modo que también estamos poniendo a prueba nuestros cálculos previos a la observación. Es necesario tener también en cuenta que la forma que podemos definir para el asteroide se corresponde con la proyección del mismo sobre nuestro plano de visión en ese mismo instante, por lo que, para un estudio más completo de su morfología tridimensional, hay que tener en cuenta la fase rotacional en que se encuentra en el momento de la ocultación y llevar a cabo varias observaciones; de todas formas, una sola ya es suficiente para acotar inferiormente el tamaño del asteroide.

Existen también asteroides binarios, donde uno es un satélite del otro, y aunque no es lo más habitual, sí que hay algunos casos donde han sido descubiertos debido a ocultaciones mutuas.

## 4.2. Aplicaciones de la observación de tránsitos

A lo largo de la historia, los tránsitos de Mercurio y, especialmente, los de Venus, dado su mayor tamaño aparente, han servido para saciar esas ansias de cuantización, por ejemplo, midiendo la distancia de la Tierra al Sol. Sin embargo, lo cierto es que hoy en día ya no tienen una gran aplicación, aunque sí que podemos destacar un éxito reciente. La observación del tránsito de Mercurio del 9 de mayo de 2016 ha servido como primer test experimental para la teoría de la relatividad general, publicada por Albert Einstein a principios del siglo XX y que ha servido para explicar la precesión anómala del perihelio de Mercurio. Las observaciones han permitido verificar empíricamente este hecho.

Al igual que hemos comentado en el caso de las ocultaciones, podemos encontrar otros ejemplos de tránsitos si nos alejamos un poco más. Nuevamente, destacamos los tránsitos de satélites por delante de sus respectivos planetas como otros ejemplos de estos fenómenos.

Sin embargo, quizás la aplicación más interesante de estas observaciones la encontramos mirando mucho más allá. La búsqueda de planetas fuera de nuestro sistema solar (los llamados **exoplanetas**) es uno de los principales campos de aplicación de la observación de tránsitos. Desde el descubrimiento del primer exoplaneta en 1995<sup>10</sup>, se ha llevado a cabo

---

<sup>10</sup> *Dimidio*, anteriormente conocido como *55 Pegasi b*, fue descubierto por Michel Mayor y Didier Queloz

una incansable búsqueda de estos lejanos cuerpos, alcanzando hoy en día una cifra superior a 4000, orbitando alrededor de más de 3000 estrellas distintas.

Existen muchas motivaciones que justifican este entusiasmo. En primer lugar, hace mucho tiempo que nos preguntamos si estamos solos en el Universo. La búsqueda de vida extraterrestre comienza por buscar un lugar apropiado, y dentro de la gran variedad existente de exoplanetas, es posible que encontremos alguno con condiciones aceptables para hallar vida. Es importante el concepto de **zona de habitabilidad**, que se refiere a aquella región en la que un planeta se encuentra a la distancia apropiada respecto a su estrella para poder tener en su superficie agua líquida, requisito indispensable para la vida tal y como la conocemos. Como hemos dicho, existen muchos tipos de exoplanetas, con gran variedad de tamaños, períodos orbitales, o incluso planetas que orbitan en torno a estrellas binarias; por eso, la búsqueda de nuevos exoplanetas es necesaria para una reformulación de nuestra definición actual de planeta. Además, estos conocimientos nos ayudarían también a comprender mejor los mecanismos de formación de los sistemas planetarios, tomando como base todo el conocimiento que hemos adquirido explorando nuestro sistema solar a lo largo de nuestra historia.

Por estas razones y muchas otras, nos hacemos una idea de la importancia de la búsqueda de planetas en otros sistemas estelares, y los tránsitos han demostrado ser uno de los métodos más eficaces para este propósito. El primer exoplaneta descubierto de este modo fue HD 209458 b, y los primeros indicios de su presencia datan del 5 de noviembre de 1999. Pese a las limitaciones de estas observaciones (por ejemplo, la necesidad de que el exoplaneta, la estrella que orbita y el punto de observación se encuentren aproximadamente en el mismo plano), es más fácil una detección por uno de estos métodos indirectos que una observación directa del exoplaneta. Actualmente disponemos de fotómetros lo suficientemente sensibles como para detectar la variación de magnitud producida por un tránsito de un exoplaneta por delante de su estrella, especialmente si este es lo suficientemente grande (algunos son mucho más grandes que Júpiter, lo que ha facilitado su detección).

En la figura 4.1 se muestra a modo de ejemplo la curva de luz resultante de un tránsito del exoplaneta CoRoT-Exo-1b, descubierto el 3 de mayo de 2007 por la misión CoRoT (*CO*nvection *RO*tation *e*t *T*ransits *pl*anétaires). Se trata de un planeta muy caliente y con un radio estimado de entre 1,5 y 1,8 veces el de Júpiter. El tiempo que tarda en completar una órbita en torno a su estrella (llamada COROT-1 en honor a la misión) es de tan solo 1,5 días[6]. Con estas características, el tránsito de este exoplaneta ha sido fácilmente detectable por fotometría, propiciando su descubrimiento. Se puede ver en la gráfica cómo

---

desde el *Observatoire de Haute-Provence*, Francia. Su descubrimiento fue publicado el 6 de octubre de 1995 en la revista *Nature* y les valió a ambos para recibir el Premio Nobel de Física en 2019.

hay una caída en la cantidad de luz recibida de la estrella durante el transcurso del tránsito.

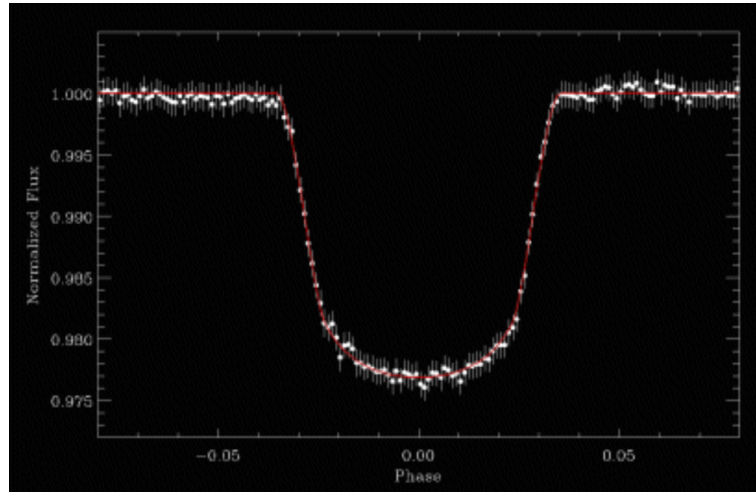


Figura 4.1: Curva de luz resultante de registrar un tránsito del exoplaneta CoRoT-Exo-1b. Fuente: CoRoT exo-team.

Supongamos que un análisis fotométrico de una estrella nos muestra una disminución de brillo. Aunque puede deberse a otra causa, podemos pensar que se debe a un tránsito y tenemos un candidato a exoplaneta<sup>11</sup>. Si un análisis fotométrico nos muestra disminuciones periódicas en el brillo de la estrella, se refuerza nuestra hipótesis, y el intervalo de tiempo entre picos consecutivos de la curva de luz sería su correspondiente período orbital. La disminución de brillo nos permite estimar también su tamaño. Como la inmersión es más rápida cuanto más central sea el tránsito, entonces una comparación entre la duración del fenómeno completo y el tiempo de inmersión total (es decir, el intervalo de tiempo que transcurre entre los dos contactos interiores) nos permite saber cuán central es, y de aquí podemos tratar de estimar la inclinación del plano orbital. Como vemos, los tránsitos fotométricos, además de permitirnos descubrir los exoplanetas, nos pueden aportar una gran cantidad de información acerca de los mismos por medio de análisis exhaustivos de la curva de luz obtenida. No solo eso: las irregularidades en los patrones que hemos descrito pueden ser indicio de que el exoplaneta está bajo la influencia gravitatoria de otro exoplaneta distinto.

<sup>11</sup>Los falsos positivos son comunes. Entre algunas de sus causas están las *binarias eclipsantes* o los tránsitos de estrellas pequeñas o *enanas marrones*.



# Glosario

- **Año sidéreo:** periodo de tiempo que tarda un planeta o satélite en completar una órbita completa medida con respecto al fondo estelar.
- **Atenuación:** disminución de la luminosidad visual o atenuación visual inherente.
- **Binaria eclipsante:** sistema formado por dos estrellas que, debido a la proximidad de su plano orbital con nuestra línea de visión, se eclipsan o transitan mutuamente en su movimiento en torno al centro de masas del sistema.
- **Cinturón de Kuiper:** región del Sistema Solar exterior con forma anular que contiene una gran cantidad de pequeños cuerpos celestes helados (con algunas excepciones de un tamaño algo mayor, por ejemplo, Plutón), y que se supone que es el lugar de procedencia de buena parte de los cometas periódicos.
- **Conjunción (en ascensión recta):** instante en que dos astros tienen la misma ascensión recta.
- **Conjunción inferior:** momento en que Mercurio (o Venus) se encuentra en una línea recta entre la Tierra y el Sol.
- **Día sidéreo:** intervalo de tiempo entre dos culminaciones consecutivas del punto Aries, es decir, entre dos pasos del punto Aries por el meridiano superior del lugar.
- **Efemérides:** valores que nos dan la posición predicha para un objeto celeste en un instante dado.
- **Enana marrón:** astro caracterizado por no ser lo suficientemente masivo como para que en su núcleo se produzcan las reacciones de fusión de hidrógeno propias de las estrellas. Se trata por tanto de un punto intermedio entre los planetas gigantes gaseosos más pesados y las estrellas más ligeras, de ahí que reciban la categoría de cuerpos *subestelares*.

- **Excentricidad ( $e$ ):** parámetro que describe la forma que toma una órbita. Cuando  $e = 0$ , se trata de una órbita perfectamente circular. Si  $e \in (0, 1)$ , es una órbita elíptica, como es el caso de planetas y satélites, con órbitas de excentricidad baja. Si  $e = 1$ , se trata de una parábola, y para  $e > 1$ , una hipérbola.
- **Limbo:** borde del disco de un cuerpo celeste visto desde la Tierra.
- **Movimiento propio:** cambio progresivo en la posición de una estrella sobre la esfera celeste debido a su movimiento real con respecto al Sol. Habitualmente, el movimiento propio se expresa mediante las variaciones en declinación y ascensión recta de una estrella por año o por siglo.
- **Paralaje:** El (o la) *paralaje* es el ángulo que forman dos líneas de visión relativas a la observación de un mismo objeto desde puntos distintos. Según la situación, se pueden definir distintos tipos de paralaje, pero nosotros usaremos fundamentalmente el horizontal; en caso de que el observador se sitúe en el ecuador, este tipo de paralaje recibe el nombre de *paralaje horizontal ecuatorial*.
- **Perihelio:** en cuerpos celestes que orbitan en torno al Sol, es el punto de la órbita que está más cerca del centro del Sol. Cuando hablamos de la precesión del perihelio nos referimos al desplazamiento de este punto con el paso del tiempo.
- **Período sinódico:** suponiendo un observador situado en la Tierra, es la media de tiempo que tarda un planeta en volver a ocupar la misma posición con respecto al Sol. Si se trata de un satélite, es la media de tiempo que tarda este en volver a estar en la misma posición con respecto al Sol, pero considerando a un observador situado en el planeta que orbita el satélite en cuestión.
- **Radiovector:** vector que va desde el origen del sistema de coordenadas hasta un determinado punto.
- **Región zodiacal:** Región del cielo en la que se pueden ver las órbitas de la Luna y los planetas principales, y que se extiende unos  $9^\circ$  a cada lado de la eclíptica. Recibe este nombre debido a que la denominación de la mayoría de constelaciones de esta región hace referencia a distintos animales.
- **Tiempo sidéreo local:** es el ángulo horario del punto Aries ( $\gamma$ ), es decir, el ángulo que forma el círculo horario que pasa por  $\gamma$  con el meridiano superior del lugar.
- **Tiempo universal coordinado (UTC):** El tiempo universal coordinado o *UTC* es el estándar utilizado para medir el tiempo, especialmente en el ámbito científico.

Se basa en el uso de señales de relojes atómicos con pequeños reajustes basados en el movimiento de rotación terrestre.

- **Unidad astronómica (UA):** La *unidad astronómica* (UA) es una medida de distancia muy utilizada en astronomía, especialmente al considerar medidas dentro del Sistema Solar. Una UA equivale a  $1,495978707 \times 10^8$  km.



# Referencias

- [1] AZcendant Software. (2013). HandyAvi (5.0) [Software].
- [2] Barry, T., Gault D. and Morgan, W. *IOTA-VTI v1.1.44 Operations Manual*. Consultado el 1 de septiembre de 2020 en [http://videotimers.com/OpsManual\\_Oct2012.pdf](http://videotimers.com/OpsManual_Oct2012.pdf)
- [3] Casado, J. C., Serra-Ricart, M. y Cuesta, L. (2004). *Unidad Didáctica: Ocultaciones*. Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC). Consultado el 4 de noviembre de 2019 en <https://www.iac.es/es/divulgacion/recursos-educativos/unidad-didactica-ocultaciones>
- [4] Chauvenet, W. (1891). *A Manual of Spherical and Practical Astronomy. Vol. I: Spherical Astronomy* (5th ed.). Philadelphia: J. B. Lippincott & Co.
- [5] Contribuyentes de Inkscape. (2017). Inkscape (1.0) [Software].
- [6] CoRoT exo-team, *Transit of exoplanet CoRoT-Exo-1b*. Consultado el 5 de septiembre de 2020 en <https://sci.esa.int/web/corot/-/40952-transit-of-exoplanet-corot-exo-1b>
- [7] Gil Chica, F. J. (1996). *Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos*. Alicante : Universidad de Alicante.
- [8] Gil Chica, F. J. (2011). *Nueva Teoría de Eclipses*. Consultado el 30 de mayo de 2020 en [https://kipdf.com/nueva-teoria-de-eclipses-francisco-javier-gil-chica\\_5b0613f88ead0e3e4f8b4582.html](https://kipdf.com/nueva-teoria-de-eclipses-francisco-javier-gil-chica_5b0613f88ead0e3e4f8b4582.html)
- [9] International Occultation Timing Association (2007). *Chasing the Shadow: The IOTA Occultation Observer's Manual*. Consultado el 30 de mayo de 2020 en [http://www.poyntsource.com/IOTAManual/IOTA\\_Observers\\_Manual\\_all\\_pages.pdf](http://www.poyntsource.com/IOTAManual/IOTA_Observers_Manual_all_pages.pdf)
- [10] International Occultation Timing Association. Occult (4.10.5.0) [Software]

- [11] Jubier, X. M. *Solar, Lunar and Planets Ephemerides*. Efemérides de Mercurio y el Sol obtenidas el 14 de agosto de 2020 en [http://xjubier.free.fr/en/site\\_pages/astronomy/ephemerides.html](http://xjubier.free.fr/en/site_pages/astronomy/ephemerides.html)
- [12] Kimball, S., Mattis, P. y el equipo de desarrollo de GIMP. (2020). GIMP (GNU Image Manipulation Program) (2.10.18) [Software].
- [13] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. and Donner, K. J. (Eds.). (2007). *Fundamental Astronomy* (5th ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [14] Limovie (0.9.98.5) [Software].
- [15] Maplesoft. (2014). Maple (18.0) [Software].
- [16] Mitton, J. (2008). *Cambridge Illustrated Dictionary of Astronomy*. Cambridge University Press.
- [17] Mobberley, M. (2007). *Total Solar Eclipses and How to Observe Them*. Springer-Verlag New York.
- [18] NASA Jet Propulsion Laboratory, *HORIZONS Web-Interface*. Efemérides de Mercurio y el Sol obtenidas el 20 de julio de 2020 en <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>
- [19] NASA, *Planetary Fact Sheet*. Parámetros de la Tierra, la Luna y el Sol obtenidos el 23 de julio de 2020 de <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>
- [20] Planesas, P. (2019). *Tránsitos: La medida del sistema solar y de otros sistemas planetarios*. Centro Nacional de Información Geográfica (CNIG). Consultado el 8 de noviembre de 2019 en <http://www.ign.es/web/resources/acercaDe/libDigPub/Transitos.zip>
- [21] Ridpath, I. (1998). *Dictionary of Astronomy*. Oxford University Press.
- [22] Smart, W. M. (1977). *Textbook on Spherical Astronomy* (6th ed.). Cambridge University Press.
- [23] Veiga Alonso, X. D. (2006). *Eclipses de Sol: Manual Didáctico*. Consultado el 27 de mayo de 2020 en <https://www.apea.es/wp-content/uploads/Eclipses-de-Sol-Manual-Didactico.pdf>
- [24] Westfall, J. and Sheehan, W. (2014). *Celestial Shadows: Eclipses, Transits and Occultations*. Springer-Verlag New York.