



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# A Integral de Bochner

Airas Vázquez Quintela

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# A Integral de Bochner

Airas Vázquez Quintela

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Análise Matemática</b>
<b>Título: A Integral de Bochner</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
Neste traballo xeralizarase o concepto de integral de Lebesgue visto no grao e analizaremos as súas propiedades. Do mesmo modo, xeralizaranse os coñecidos espazos $L^p$ , esenciais no campo da análise funcional.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares de análise funcional</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares de espazos de Banach . . . . .	1
1.2. Converxencia forte e débil . . . . .	5
<b>2. Preliminares de teoría da medida</b>	<b>9</b>
2.1. Medida de Lebesgue . . . . .	9
2.2. Funcións medibles . . . . .	11
2.3. Integral de Lebesgue . . . . .	14
2.4. Os espazos $L^p$ . . . . .	18
<b>3. A Integral de Bochner</b>	<b>21</b>
3.1. Medibilidade forte e débil. . . . .	21
3.2. O Teorema de Pettis. . . . .	23
3.3. A Integral de Bochner . . . . .	29
<b>4. Os espazos <math>L^p(X, \Sigma, \mu; Y)</math></b>	<b>39</b>
4.1. Introdución aos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . . . . .	39
4.2. Propiedades dos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . . . . .	40
4.2.1. Desigualdades Básicas . . . . .	40
4.2.2. Propiedades fundamentais dos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . . . . .	41
4.2.3. O espazo $L_w^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



## Resumo

O propósito do traballo é a xeralización da coñecida integral de Lebesgue, que a estenderemos a funcións que toman valores nun espazo de Banach  $B$  arbitrario. Esta integral xoga un papel moi importante á hora de estudar as solucións de determinadas EDPs, pois os espazos onde se buscarán estarán formados por funcións integrables neste novo sentido. Do mesmo modo, xeralizaremos os famosos espazos de Lebesgue  $L^p$ , estendéndoos de maneira natural a funcións que toman valores nun espazo de Banach. Para facer isto, é importante estar familiarizado con algunhas nocións básicas da análise funcional e a teoría da medida de Lebesgue, polo que os dous primeiros capítulos estarán dedicados a recordar certos conceptos e resultados que axuden a comprender mellor o resto do traballo.

## Abstract

The aim of this work is to generalise the well known Lebesgue integral, which we will extend to functions that take values on an arbitrary Banach space  $B$ . This new integral plays a major role when studying solutions of some partial differential equations, as we will search them in spaces formed by these new integrable functions. Similarly, we will generalise the famous  $L^p$  spaces, extending them naturally to Banach valued functions. To study this, it's important to be familiar with some basic notions about functional analysis and Lebesgue measure theory, so the first chapters will be dedicated to recall certain concepts that may help the understanding of this work.



# Introdución

É ben sabido que a integral de Lebesgue vista no grao desenvolve un papel moi importante en numerosos campos das matemáticas, como o son a teoría da medida, a teoría de probabilidades, a búsqueda de solucións de EDPs, etc. Polo tanto, ten un gran interese intentar xeralizar este tipo de integral a unha clase de funcións máis amplo que as funcións Lebesgue medibles. Con esta idea en mente nace a integral de Bochner, que será a extensión natural da integral de Lebesgue a un espazo de funcións que toman valores nun espazo de Banach  $B$ . Será este o tema central do traballo.

Deste modo, comezaremos analizando as funcións para as que se poderá construír a integral de Bochner, denominadas fortemente medibles. Unha vez construída a integral de Bochner, estudaremos as súas propiedades básicas, que proceden de xeralizar as súas análogas no caso escalar. Tamén veremos que esta nova integral admite a extensión de dous resultados clásicos da integral de Lebesgue: O Teorema da Convergencia Dominada e o Lema de Fatou.

Recordemos que os espazos  $L^p$  clásicos supoñen o exemplo máis importante de espazo vectorial normado no contexto da teoría da medida e da integral de Lebesgue. Polo tanto, é natural que tras introducir a integral de Bochner e as súas propiedades, tratemos de xeralizar estes importantes espazos funcionais. En efecto, o último capítulo corresponderase coa introducción dos espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ , onde  $(X, \Sigma, \mu)$  é un espazo de medida e  $B$  un espazo de Banach arbitrario. Así, comentaremos as súas propiedades máis importantes destes e daremos unha xeralización do Teorema de Representación de Riesz, para rematar cun resultado de gran importancia nos espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  que non conta cun análogo no caso escalar.

É importante destacar que para unha comprensión adecuada deste traballo é necesario estar familiarizado con distintos conceptos vistos no grao sobre a teoría de integración e sobre análise funcional. É por eso que no primeiro capítulo repasaremos noções básicas de análise funcional, como o que se entende por espazo de Banach ou polo espazo dual deste; mentres que no segundo capítulo recordaremos como se construía a integral de Lebesgue clásica e os seus resultados máis importantes, así como unha breve mención aos espazos

$L^p$ , as súas propiedades e as súas aplicacións.

# Capítulo 1

## Preliminares de análise funcional

Neste capítulo repásanse os conceptos e resultados da análise funcional que se viron durante o grao, e cos que hai que estar familiarizados para comprender os capítulos centrais do traballo. Dado que se trata dun capítulo de repaso, non se incluírán as demostracións. Estas pódense atopar, na súa maioría, nos capítulos 12 e 13 do libro [Bruckner, 2008]. Deste modo, convén comezar recordando o que entendemos cando falamos de espazos de Banach. Este tipo de espazos teñen unha gran importancia na análise funcional, e será onde nos desenvolveremos nos capítulos posteriores, polo que é importante comprender que son mais as súas propiedades.

### 1.1. Preliminares de espazos de Banach

Dado que se trata dun capítulo de repaso, non se incluírán as demostracións. As demostracións dos resultados desta sección aparecen, na súa maioría, nos capítulos 12 e 13 do libro [Bruckner, 2008].

**Definición 1.1.** Sexa  $X$  un espazo linear. Unha norma en  $X$  é unha función  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$  que cumpre:

1.  $\|x\| \geq 0$ , e  $\|x\| = 0$  se e só se  $x = 0$ .
2.  $\|ax\| = |a|\|x\|$  para todo  $a \in \mathbb{R}$  e  $x \in X$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Desigualdade triangular).

A un espazo linear  $X$  cunha norma  $\|\cdot\|$  en  $X$  chamarémolo espazo vectorial normado (EVN).

**Definición 1.2.** Un conxunto  $X$  dise un espazo métrico coa métrica  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  se  $d$  verifica:

1.  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se e só se  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Destas definicións podemos ver que calquera espazo normado dá lugar a unha métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

que se denomina métrica inducida pola norma  $\|\cdot\|$ .

**Definición 1.3.** Sexa  $(X, d)$  un espazo métrico. Diremos que é completo se toda sucesión de Cauchy contida en  $X$  converge a un elemento de  $X$ .

Cando traballamos con sucesións, é bastante recorrente na análise funcional estudar que ocorre cos seus límites. É, polo tanto, importante asegurar que estes se atopan dentro do espazo no que estamos considerando as sucesións, polo que definimos:

**Definición 1.4.** Un espazo de Banach é un espazo vectorial normado completo.

**Exemplo 1.5.** Un exemplo coñecido de espazo de Banach é o espazo das funcións reais continuas definidas no intervalo  $[0, 1]$ , denotado por  $\mathcal{C}[0, 1]$ , xunto coa norma infinito  $\|\cdot\|$ . En efecto, si consideramos unha sucesión de Cauchy  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{C}$ , temos que:

- Para  $x \in [0, 1]$  fixado, para  $n, m \in \mathbb{N}$  suficientemente grandes, temos que  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon$ , pola definición de norma infinito e por ser  $\{f_n\}$  de Cauchy. Polo tanto, cada  $\{f_n(x)\}$  é de Cauchy en  $\mathbb{R}$ .
- Como  $\mathbb{R}$  é completo, existirá, para cada  $x \in [0, 1]$ , o límite

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

- $\{f_n\}$  converge a  $f$  en norma infinito, pois

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

E como  $\{f_n\}$  é unha sucesión de Cauchy, existirá un valor de  $N$  independente de  $x$  tal que:

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon, \forall m \geq N.$$

Polo que  $f_n \rightarrow f$ .

Como imos estar traballando en espazos de Banach, que son, en particular, espazos lineais, teñen un especial interese os operadores lineais definidos nestes espazos. Procedemos polo tanto dando a definición do que entendemos por un operador nun espazo linear:

**Definición 1.6.** Sexan  $X$  e  $Y$  espazos lineais. Sexa  $T : X \rightarrow Y$ . Se

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \quad (1.1)$$

para todo  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  e  $x_1, x_2 \in X$ , diremos que  $T$  é un operador linear de  $X$  en  $Y$ .

**Exemplo 1.7.** Tomemos o espazo de Banach visto no exemplo anterior  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ . Un exemplo de operador linear neste espazo é a aplicación  $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  definida por:

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(u) du.$$

En particular, é sinxelo demostrar que se trata ademais dun operador acotado.

**Definición 1.8.** Un operador linear  $T : X \rightarrow Y$  dise acotado se existe  $M \geq 0$  tal que

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

**Exemplo 1.9.** Un exemplo dun operador linear acotado é o visto anteriormente. Porén, é habitual atoparse con operadores lineais que non están acotados. Un exemplo ben coñecido é o seguinte:

Consideremos o espazo  $X = (\mathcal{C}[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , e a aplicación dada por

$$\alpha : f \in X \rightarrow \alpha(f) = f'(0) \in \mathbb{R}.$$

Claramente é linear. Para ver que efectivamente non é acotado, recordamos o seguinte teorema, que relaciona isto coa continuidade:

**Teorema 1.10.** *Un operador linear é acotado se e só se é continuo.*

**Exemplo 1.11.** Consideremos o mesmo operador que o exemplo anterior. Se tomamos entón a sucesión de elementos  $\{\frac{1}{n} \sin nt\}$ , temos que converxe uniformemente a 0. Pero  $\alpha(f_n) = \cos nt$ , que claramente non converxe a 0, polo que  $\alpha$  non é un operador continuo e, polo tanto, non acotado.

Ao conxunto de operadores lineais acotados  $T : X \rightarrow Y$  denotarémolo por  $B(X, Y)$ . Este conxunto, se o consideramos coas operacións

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \text{ para todo } x \in X$$

e para  $\alpha \in \mathbb{R}$  definimos  $\alpha T_1$  como

$$(\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Tense que  $B(X, Y)$  é pechado baixo a suma e a multiplicación por escalares, polo que se trata dun espazo linear. Ademais, se lle asignamos a norma en  $B(X, Y)$  dada por:

$$\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in X\}$$

teremos entón que o par  $(B(X, Y), \|\cdot\|_{B(X, Y)})$  é un espazo métrico, que abreviaremos, se non da lugar a confusión, por  $B(X, Y)$ . Existe un caso particular que ten unha gran importancia: o caso onde  $Y = \mathbb{R}$ . A este espazo  $B(X, \mathbb{R})$  chamáremolo espazo dual de  $X$  e denotáremolo  $X'$ . Se o dotamos coa norma

$$\|x'\| = \sup\{\langle x', x \rangle : \|x\| = 1\}$$

temos que se trata dun espazo vectorial normado, onde  $\langle x', x \rangle = x'(x)$  se denomina par dualidade. Do mesmo modo, ao espazo  $(X')'$  chamáremolo bidual de  $X$ .

**Teorema 1.12.** *Sexa  $B(X, Y)$  o espazo de operadores lineais acotados dun espazo normado  $X$  nun Banach  $Y$ . Entón  $B(X, Y)$  é un espazo de Banach.*

**Teorema 1.13.** *Se  $X$  é un espazo linear normado, entón o dual  $X'$  é un espazo de Banach.*

Agora preséntase unha das ferramentas máis importantes da análise moderna: o teorema de Hahn-Banach. Como o nome indica, existen dúas versións deste resultado: Hahn demostra que un funcional linear continuo definido nun subespazo dun EVN pode ser estendido ao espazo total. De maneira independente a este, Banach proba unha versión máis xeral deste para funcionais que están acotados por outro funcional subaditivo. Unicamente formalizaremos a versión de Hahn, xa que é na que nos apoiaremos nalgúns resultados posteriores. Se se quere ver con máis formalidade a versión de Banach e as súas diferencias, aparece ben explicado na sección 12.5 de [Bruckner, 2008].

**Teorema 1.14** (Teorema de Hahn-Banach, versión de Hahn). *Sexa  $X$  un espazo linear normado,  $Y$  un subespazo de  $X$ , e  $f$  un funcional linear acotado en  $Y$ . Entón existe unha extensión de  $\bar{f}$  de  $f$  a  $X$  tal que  $\|\bar{f}\| = \|f\|$ .*

Unha consecuencia directa deste teorema é o seguinte corolario que nos servirá de axuda máis adiante:

**Corolario 1.15.** *Sexa  $X$  un espazo normado e  $x_0 \neq 0$  un elemento de  $X$ . Entón, existe un funcional linear  $f_0$  en  $X$  tal que*

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \quad e \quad \|f_0\| = 1.$$

## 1.2. Converxencia forte e débil

Unha vez vistos os conceptos básicos sobre os espazos normados e de Banach, imos ver un novo tipo de converxencia distinto do usual que chamaremos converxencia débil, e analizaremos que relación existe entre estes. Ao igual que na sección anterior, as demostracións non se inclúen, pero poden atoparse no capítulo 5 do [Yosida, 1995].

Deste modo, comezamos definindo:

**Definición 1.16** (Converxencia débil). Sexa  $X$  un espazo vectorial normado e denotemos por  $X'$  ó seu dual, diremos que:

- Unha sucesión  $\{x_n\} \subset X$  é **débilmente converxente** se existe un límite finito  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  para cada  $f \in X'$ .
- $\{x_n\}$  converxe debilmente a un elemento  $x_\infty \in X$  se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_\infty)$  para cada  $f \in X'$ . Neste último caso,  $x_\infty$  está unicamente determinado, en virtude do corolario do teorema de Hahn-Banach 1.15.

Cabe destacar que non todas as sucesións debilmente converxentes converxen debilmente a un elemento do espazo. Para isto, basta considerar o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.17.** Sexa  $X = \mathcal{C}([0, 1])$  e  $f_n(x) = x^n$ . Polo teorema de Riesz, temos que se  $g$  é un elemento do dual de  $X$  podemos escribir:

$$g(f_n) = \int_0^1 f_n dx.$$

Polo que é sinxelo ver que existe o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f_n)$ , logo  $\{f_n\}$  é debilmente converxente. Pola contra, temos que a función límite desta sucesión é a dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Que é claramente discontinua, logo a sucesión non é converxente.

Como é de esperar, se unha sucesión converxe no sentido usual, entón tamen converxerá debilmente.

**Proposición 1.18.** Sexa  $\{x_n\}$  unha sucesión nun espazo normado  $X$ . Entón, se  $\{x_n\}$  converxe a  $x_\infty$  no sentido usual,  $\{x_n\}$  converxe a  $x_\infty$  debilmente.

Porén, non todas as sucesións que converxen debilmente o van facer no sentido usual. Un exemplo é a seguinte:

**Exemplo 1.19.** Tomemos a sucesión de funcións dadas por, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \text{sign} \text{sen}(2^n \pi x)$$

con  $x \in [0, 1]$ . Temos que converxen debilmente a 0 no espazo  $L^2$ , pero claramente non pode converxer a 0, pois  $\|f_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Enunciamos agora o un teorema que necesitaremos para demostracións posteriores.

**Teorema 1.20** (Teorema de Mazur). *Sexa  $x_\infty$  o límite débil dunha sucesión  $\{x_n\}$  nun espazo normado  $X$  e sexa  $\epsilon > 0$ . Entón existe unha combinación convexa*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$$

de  $x_j$  tal que  $\|x_\infty - \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j\| \leq \epsilon$ .

**Teorema 1.21** (caracterización das sucesións debilmente converxentes). *Unha sucesión  $(x_n)$  nun espazo linear normado  $X$  converxe debilmente a un elemento  $x_\infty \in X$  se e só se:*

- i)  $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$ .
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_\infty)$  para todo  $f$  dun subconxunto denso calquera  $D' \subset X'$ .

Para finalizar este capítulo, introduciremos un tipo de converxencia novo que se da no espazo dual  $X'$ , e veremos que relación teñen as sucesións que converxen deste novo modo coas que converxen no sentido usual. Desta maneira, definimos:

**Definición 1.22.** Sexa  $X$  espazo normado e  $X'$  o seu espazo dual.

- Unha sucesión  $(f_n) \subset X'$  dise debilmente\* converxente se, para cada  $x \in X$ , existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  e é finito.
- Diremos que  $(f_n)$  converxe debilmente\* a  $f_\infty \in X'$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ , para todo  $x \in X$ . Neste caso, poremos que  $f_n \rightarrow f_\infty$  debilmente\*.

**Teorema 1.23.**

- i) Se  $f_n \rightarrow f_\infty$  fortemente, entón  $f_n \rightarrow f_\infty$  debilmente\*.
- ii) Se  $X$  é un espazo de Banach, entón toda sucesión debilmente converxente  $\{f_n\} \subset X'$  converxe debilmente a un elemento  $f_\infty \in X'$ , e  $\|f_\infty\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$ .

Da mesma maneira que as sucesións debilmente converxentes, temos a seguinte caracterización das sucesións debilmente\* converxentes.

**Teorema 1.24** (caracterización das sucesións debilmente\* converxentes nun espazo de Banach). *Se  $B$  é un espazo de Banach, unha sucesión  $\{f_n\} \subset X'$  converge debilmente\* a un elemento  $f_\infty \in X'$  se e só se:*

- i)  $\{\|f_n\|\}$  está acotada.*
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$  nun subconxunto denso de  $X$ .*



## Capítulo 2

# Preliminares de teoría da medida

Neste capítulo preséntanse os conceptos e resultados utilizados ao longo do traballo que están relacionados coa teoría da medida e a integral de Lebesgue. Explicase aquí, polo tanto, o que entendemos cando falamos dun espazo de medida, que son os espazos nos que traballaremos nos seguintes capítulos. Veremos tamén o caso particular da medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ , xa visto no grao, pero necesario para introducir os espazos Lebesgue-medibles e o concepto de integral de Lebesgue, cuxa xeralización a espazos de Banach é o punto central deste traballo. Por último, recordaremos os espazos de Lebesgue  $L^p$  e algunhas propiedades destes, dado que se xeralizarán máis adiante a un espazo máis amplo de funcións.

Do mesmo xeito que o capítulo anterior, non se profundizará demasiado no tema nin se incluírán demostracións. Para unha lectura máis detallada destes conceptos, convén acudir ao [Bartle, 1995] e ao [Rudin, 1986], onde se recollen todos os conceptos tratados neste capítulo.

### 2.1. Medida de Lebesgue

Comezamos entón recordando o que se entende por espazo medible, para o que necesitamos as seguintes definicións básicas:

**Definición 2.1.** Dado un conxunto  $X$ , diremos que  $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$  é unha  $\sigma$ -álgebra en  $X$  se verifica:

- $\emptyset, X \in \Sigma$ .
- Se  $E \in \Sigma$ , entón  $E^c \in \Sigma$ .
- Se  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ , entón  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \Sigma$ .

**Definición 2.2.** Dado un conxunto  $X$  e unha  $\sigma$ -álgebra en  $X$ , chamamos espazo medible ao par  $(X, \Sigma)$ .

**Definición 2.3.** Sexa  $(X, \Sigma)$  un espazo medible. Unha función  $\mu : \Sigma \rightarrow [-\infty, \infty]$  dise que é unha medida en  $\Sigma$  se verifica:

- $\mu(\emptyset) = 0$ .
- $0 \leq \mu(E) \leq \infty$ ; para todo  $E \in \Sigma$ .
- Se  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  disxuntos dous a dous, entón

$$\mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

**Definición 2.4.** Se  $(X, \Sigma)$  un espazo medible. Se  $\mu$  é unha medida en  $\Sigma$ , chamamos a  $(X, \Sigma, \mu)$  espazo de medida.

Agora que sabemos o que é un espazo medible, vexamos a medida que deu Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$  (realmente, Lebesgue deu esta medida para  $\mathbb{R}$ , pero a xeralización a  $\mathbb{R}^n$  é inmediata, polo que será esta a que usaremos). Para iso, construiremos a medida exterior dun conxunto de  $\mathbb{R}^n$ , polo que convén antes recordar o concepto de celda en  $\mathbb{R}$  e a súa lonxitude:

**Definición 2.5.** Unha celda en  $\mathbb{R}$  é un intervalo acotado. Polo tanto, son conxuntos da forma

1.  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (celda aberta),
2.  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  (celda pechada),
3.  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  (celda semi-aberta ou semi-pechada),
4.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  (celda semi-aberta ou semi-pechada).

Se consideramos unha celda  $I$  de extremos  $a$  e  $b$ , definimos a súa lonxitude como:

$$l(I) = b - a.$$

**Definición 2.6.** Unha celda  $I$  en  $\mathbb{R}^n$  é o produto cartesiano de  $n$  celdas  $I_1, \dots, I_n$  en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.7.** Se  $I$  é unha celda de  $\mathbb{R}^n$ , definimos o seu volume  $l(I)$  como o produto das lonxitudes das celdas  $I_1, \dots, I_n$ . Así, se  $a_i \leq b_i$  son os extremos das celdas  $I_i$ , entón o volume de  $I$  ven dado por:

$$l(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

**Definición 2.8.** Dado  $E \subset \mathbb{R}^n$ , definimos a medida exterior de  $E$  como:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \text{ con } I_k \text{ celda de } \mathbb{R}^n \right\}.$$

*Observación 2.9.* Nótese que a definición de medida exterior non depende de si as celdas consideradas son abertas ou pechadas. Poden consultarse no capítulo 12 de [Bartle, 1995] unhas notas onde se explica con máis detalle este feito.

**Teorema 2.10.** A medida exterior  $m^*$  cumpre as seguintes propiedades:

- $m^*(\emptyset) = 0$ .
- $0 \leq m^*(E) \leq \infty$ , para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$ .
- Se  $E \subset F$ , entón  $m^*(E) \leq m^*(F)$ .
- Se  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entón

$$m^* \left( \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k). \quad (2.1)$$

**Definición 2.11.** Sexa  $m^*$  a medida exterior definida anteriormente e sexa  $\mathcal{M}$  a  $\sigma$ -álgebra de conxuntos de  $\mathbb{R}^n$  que verifican a condición de Carathéodory:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \quad \forall A \in \mathbb{R}^n.$$

Ao conxunto de todos os subconxuntos que cumpren a condición anterior denotarémolo por  $\mathcal{L}$ .

Este conxunto  $\mathcal{L}$  é unha  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}^n$ , que denominaremos  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue, e cuxos elementos se chamarán conxuntos Lebesgue-medibles. Ademais, a restrcción de  $m^*$  a  $\mathcal{L}$  é unha medida sobre  $\mathcal{L}$ , que se chamará medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2. Funcións medibles

O concepto de función medible xorde de maneira natural cando Lebesgue intenta xeneralizar a integral de Riemann a unha clase de funcións maior, e que teña, en xeral, un mellor comportamento. Esta clase de funcións son as coñecidas como funcións medibles, e defínense como segue.

**Definición 2.12.** Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ .

A función  $f$  dise medible se para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o conxunto

$$E_a(f) = \{x \in E : f(x) > a\}$$

é un conxunto medible.

**Teorema 2.13.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida, e  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ . Equivalen:*

- *$f$  é medible.*
- *Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o conxunto  $\{x \in X : f(x) \geq a\}$  é medible.*
- *Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o conxunto  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  é medible.*
- *Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , o conxunto  $\{x \in X : f(x) < a\}$  é medible.*

**Teorema 2.14.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ . Entón  $f$  é medible se e só se*

- *$f^{-1}(\infty), f^{-1}(-\infty) \in \Sigma$ .*
- *Para todo aberto  $G$  de  $X$ ,  $f^{-1}(G) \in \Sigma$ .*

Vexamos agora algunhas propiedades interesantes das funcións medibles.

**Teorema 2.15.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida. Sexan  $f$  e  $g$  funcións medibles. Sexa  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $c \in \mathbb{R}$ . Entón as funcións*

$$cf, \quad f + g, \quad \phi \circ f, \quad fg$$

*son medibles.*

As funcións medibles son especialmente interesantes cando estamos traballando con pasos ao límite polo seu comportamento, como, por exemplo, na teoría da integración. Veremos polo tanto os tipos de converxencia que se dan cando estamos nun espazo de medida, e que propiedades teñen as sucesións de funcións medibles nestes espazos.

**Teorema 2.16.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida, e sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións medibles.*

*Entón as funcións*

$$\sup f_n, \quad \inf f_n, \quad \limsup f_n, \quad \liminf f_n$$

*son medibles.*

Recordamos agora os cinco tipos de converxencia que se poden dar nun espazo de medida e que relación hai entre estes.

**Definición 2.17.** *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións definidas sobre un conxunto  $E$ . Entón*

- *$\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  en  $E$  se, para todo  $x \in E$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

- $\{f_n\}$  converge case por doquier (cpd) a  $f$  en  $E$  se, para todo  $x \in E'$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ onde } E' = E \setminus E_1 \text{ con } \mu(E_1) = 0.$$

- $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  en  $E$  se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) : n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in X.$$

- $\{f_n\}$  converge case uniformemente a  $f$  en  $E$  se converge uniformemente en  $E$  menos un conxunto de medida nula.
- $\{f_n\}$  converge en medida a unha función medible  $f$  se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0,$$

para cada  $\epsilon > 0$ .

**Teorema 2.18.** *se  $f_n \rightarrow f$  en medida, entón existe unha subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $f_{n_k} \rightarrow f$  case por doquier.*

Un importante resultado sobre as relacións entre converxencias é o teorema de Egoroff, que di o seguinte:

**Teorema 2.19** (Teorema de Egoroff). *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida finito. Sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións medibles que converge case por doquier a  $f$ . Entón  $f_n \rightarrow f$  case uniformemente.*

Temos entón que se estamos nun espazo de medida finito, a converxencia case por doquier e case uniforme coinciden.

É sinxelo comprobar que se unha sucesión converge case uniformemente, entón tamén converge en medida. Obtense así, como consecuencia deste teorema, que nun espazo de medida finito, a converxencia case por doquier implica a converxencia en medida.

Na análise, cando estamos traballando con obxectos complicados, unha maneira recorrente de afrontalo é atopando aproximacións por obxectos máis simples. Deste modo, buscamos facer o mesmo para as funcións medibles. Introdúcese así o concepto de función simple, que é aquela que se obtén como combinación linear das funcións características de conxuntos medibles.

**Definición 2.20.** Dado un elemento  $E \in \Sigma$ , dise que unha función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función simple se existen :

1.  $\{A_k\}_{k=1}^n$ , tales que os  $A_i$  son disxuntos dous a dous e  $\bigcup_{k=1}^n A_k = E$ .
2.  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ .

tales que:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x).$$

A representación  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$  denomínase representación canónica de  $f$ .

**Teorema 2.21.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e  $f$  medible en  $X$ . Entón existe unha sucesión  $\{f_n\}$  de funcións simples tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

*Se a  $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ , a sucesión  $\{f_n\}$  pode escollerse crecente. Se  $f$  está acotada en  $X$ , entón a sucesión converge uniformemente en  $X$ .*

O seguinte resultado mostra que as funcións medibles que limitadas en case todo punto se poden aproximar por funcións medibles acotadas. Polo resultado anterior, poderemos entón aproximalas uniformemente por funcións simples, o que nos permite deducir como é a estrutura dunha función medible arbitraria.

**Teorema 2.22.** *Supoñamos que  $f$  é unha función finita en case todo punto e medible en  $X$ , sendo  $\mu(X) < \infty$ . Sexa  $\epsilon > 0$ . Entón existe unha función medible acotada  $g$  tal que:*

$$\mu(\{x : g(x) \neq f(x)\}) < \epsilon.$$

### 2.3. Integral de Lebesgue

Temos agora o necesario para poder construír o que se coñece como a integral de Lebesgue. Comezaremos definindo a integral para unha función simple medible non negativa. a partir da cal iremos dando paso ás definicións da integral para unha función medible non negativa e, logo, para unha función medible acotada arbitraria.

**Definición 2.23.** Sexa  $\phi$  unha función simple medible non negativa con representación canónica:

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$$

onde, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $A_i = \{x \in E : \phi(x) = a_i\}$  son disxuntos e medibles, e  $a_i \geq 0$ . Definimos a integral de  $\phi$  con respecto a  $\mu$  como o número da recta real extendida:

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Se  $A \in \Sigma$  é un conxunto medible, definimos a integral de  $\phi$  en  $A$  con respecto a  $\mu$  como o número da recta real extendida:

$$\int_A \phi \, d\mu = \int_A \phi \cdot \chi_A \, d\mu.$$

**Teorema 2.24.** *Sexan  $\phi$  e  $\theta$  dúas funcións simples non negativas en  $X$ , e  $c \geq 0$ . Entón:*

- *Se  $\phi = \theta$  case en todo punto, entón  $\int_X \phi \, d\mu = \int_X \theta \, d\mu$ .*
- *$\int_X c\phi \, d\mu = c \int_X \phi \, d\mu$ .*
- *$\int_X (\phi + \theta) \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu + \int_X \theta \, d\mu$ .*
- *Se  $\phi \leq \theta$  en  $X$ , entón  $\int_X \phi \, d\mu \leq \int_X \theta \, d\mu$ .*

Ata aquí, só definimos a integral para unha función simple medible. Vexamos que podemos estender esta definición a unha función medible arbitraria non negativa.

**Definición 2.25.** Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida. Dada unha función  $f$  medible non negativa, a integral de  $f$  con respecto a  $\mu$  é o número da recta real extendida:

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu : \phi \in \Phi_f \right\}$$

onde  $\Phi_f$  denota o conxunto de funcións simples medibles non negativas que son menores que  $f$  en todo  $X$ . Dado  $E \in \Sigma$ , definimos a integral de  $f$  sobre o conxunto  $E$  como o número da recta real extendida:

$$\int_E f \, d\mu = \int f \cdot \chi_E \, d\mu.$$

**Definición 2.26.** Unha función medible non negativa  $f$  definida nun espazo de medida dise integrable sobre un conxunto  $E$  se  $\int_E f \, d\mu < \infty$ .

Na teoría de integración é de sumo interese saber que ocorre cando se traballa con sucesións e os seus límites. Deste modo, recordaremos nesta sección tres importantes teoremas que nos mostran cando podemos pasar ao límite nunha integral.

O primeiro é o lema de Fatou, que é un resultado básico para obter as propiedades das integrais de funcións non negativas:

**Teorema 2.27** (Lema de Fatou). *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións medibles non negativas. Entón,*

$$\int \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Do Lema de Fatou podemos obter un importante resultado sobre converxencia, denominado Teorema da converxencia monótona, que veremos a continuación:

**Teorema 2.28** (Teorema da converxencia monótona). *Sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións medibles non negativas tal que converxen a  $f$  case por doquier en  $X$ . Supoñamos ademais que  $f_n(x) \leq f(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ . Entón,*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Estes resultados permiten xeralizar as propiedades vistas anteriormente a calquera función medible non negativa. En efecto, vexamos o seguinte teorema:

**Teorema 2.29** (Propiedades das integrais de funcións non negativas). *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida.*

- *Se  $f, g$  son funcións medibles non negativas en  $X$ , entón*

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

- *Sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións medibles non negativas en  $X$ . Entón*

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

- *Sexa  $f$  unha función medible non negativa en  $X$ . Definimos  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  como*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

*Temos entón que  $\nu$  é unha medida en  $\mathcal{M}$ .*

Ata aquí, a integral foi definida e estudada para funcións medibles non negativas. Imos finalizar esta sección estendendoa a unha integral máis xeral para funcións medibles arbitrarias, e mostrando, ao igual que antes, as súas propiedades. Definimos entón o que é a parte positiva e negativa dunha función:

**Definición 2.30.** Sexan  $f^+$  e  $f^-$  as partes positiva e negativa dunha función  $f$ , dadas por:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Temos entón que  $f = f^+ - f^-$ , polo que se  $f$  é medible e non negativa, cada unha destas tamén o será.

**Definición 2.31.** Unha función medible  $f$  dise integrable en  $E$  se tanto  $f^+$  como  $f^-$  son integrables. Nese caso, definimos a integral de  $f$  en  $X$  como:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Denotaremos á clase de funcións integrables en  $X$  como  $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ , que escribiremos, se non da lugar a confusión, como  $L^1$ . Pola definición, vemos que se  $f$  é integrable tamén o será  $|f|$ , cousa que non ocurría coa integral de Riemann. Cabe destacar que esta definición de función integrable require que a seguinte expresión sexa finita:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Porén, pódese dar un significado aínda que algunha das expresións da dereita sexa infinita. Algúns autores usan 'sumable' en vez de integrable, reservando este termo para referirse a aquelas funcións que teñen a integral de  $f^+$  ou de  $f^-$  finita. Deste modo, unha función integrable pode non ter integral finita, aínda que a súa integral si que teña un significado ben definido.

Vexamos a xeralización das propiedades vistas para funcións non negativas:

**Teorema 2.32.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida, e sexan  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in L_1$ . Entón:*

1.  $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu.$
2.  $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu.$
3.  $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$
4. *Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ , entón  $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$*

Enunciamos agora un importante teorema sobre a integral de Lebesgue, que, baixo certas restriccións, nos permite intercambiar pasar ao límite as integrais de funcións medibles.

**Teorema 2.33** (Teorema da converxencia dominada). *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións medibles tales que  $f_n \rightarrow f$  en case todo punto. Se existe unha función  $g \in L_1$  tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ , entón  $f \in L_1$ , e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Corolario 2.34.** *O teorema da converxencia dominada cúmprese se a converxencia é en medida en vez de case por doquier.*

## 2.4. Os espazos $L^p$

Por último, imos recordar os espazos de Lebesgue  $L^p$  e as súas propiedades máis interesantes.

Os espazos  $L^p$  son os espazos vectoriais normados máis importantes na teoría da medida, polo seu papel en gran parte da análise moderna, como é a análise de Fourier, teoría de operadores ou ecuacións diferenciais. Antes de finalizar este capítulo, imos recordar como se constrúen e ver que efectivamente se tratan de espazos normados, e en particular, de espazos de Banach, pois será a base para construír no capítulo 4 espazos  $L^p$  máis xerais. Da mesma maneira que no resto de seccións, as demostracións poden atoparse na bibliografía, neste caso, pódese consultar o capítulo 13 de [Bruckner, 2008].

Consideremos  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida.

Definimos o espazo vectorial, para  $1 \leq p < \infty$ :

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$$

como o espazo das funcións medibles  $f$  que cumpren que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Do mesmo modo, defínese o espazo vectorial  $\mathcal{L}^\infty$  como o espazo das funcións medibles  $f$  que verifican:

$$\inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0\} < \infty.$$

É dicir, as que están acotadas excepto nun conxunto de medida nula. Se queremos convertilos en espazos vectoriais normados, xorde de maneira natural a norma dada por:

$$\|f\|_p = \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty),$$

e

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0\}.$$

Porén,  $\|f\|_p = 0$  non necesariamente implica que  $f = 0$  (basta tomar a función  $x \in X \rightarrow f(x) = \chi_{\{1\}}(x)$ ), co que esta aplicación non é unha norma. Co obxectivo de obter un espazo normado, definimos a relación de equivalencia en  $\mathcal{L}^p$  dada por:

$$f \mathcal{R} g \iff f(x) = g(x) \text{ case para todo } x \in X.$$

É sinxelo probar que se trata dunha relación de equivalencia, e definimos o espazo cociente  $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{R}$ , formado polas clases de equivalencia da relación  $\mathcal{R}$ . Neste espazo, temos que a aplicación  $\|\cdot\|$  si que é unha norma, é dicir, que  $L^p$  é un espazo normado. Recordamos agora unha propiedade moi importante dos espazos  $L^p$ :

**Teorema 2.35.** *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida. Entón o espazo  $L^p$ , con  $1 \leq p \leq \infty$  é un espazo de Banach coa norma  $\|f\|_p$ .*

Por último, enunciaremos dúas ferramentas esenciais dos espazos  $L^p$ : As desigualdades de Hölder e de Minkowski. Son moi usadas na teoría destes espazos, e dado que as xeralizaremos máis adiante, convén recordalas neste capítulo.

**Teorema 2.36** (Desigualdade de Hölder). *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida, e  $p, q$  conxugados (ie,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $p, q \in (1, \infty)$ ) Sexan  $f \in L_p$  e  $g \in L_q$ . Entón o produto  $fg$  é integrable e*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Teorema 2.37** (Desigualdade de Minkowski). *Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e  $p \in (1, \infty)$ . Se  $f, g \in L_p$ , entón*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$



## Capítulo 3

# A Integral de Bochner

Este é o capítulo central do traballo, onde se vai xeralizar a integral de Lebesgue vista no grao, que xa sabemos que ten un importante papel tanto na teoría da medida como noutros campos das matemáticas como son a teoría de probabilidades ou as EDP's. Polo tanto, é natural intentar estender este tipo de integral a funcións que tomen valores noutros espazos, non só polo seu interés teórico, senon, ao igual que a integral de Lebesgue, polas aplicacións que poida ter. Este é o caso da integral de Bochner, que será a que estudemos neste capítulo, basándonos no [Leoni, 2017] á hora de facer a xeralización.

Recordemos que no caso escalar, antes de definir a integral de Lebesgue, era moi importante saber que tipo de funcións íamos querer integrar, pasando así polo concepto de función medible. Agora que imos traballar con funcións con valores nun espazo de Banach arbitrario, é importante destacar que, en oposición ao caso escalar, diferéncianse dous tipos de medibilidade. Polo tanto, antes de tratar a integral de Bochner, é necesario explicar estes dous conceptos, ver que diferencias hai entre eles, e que tipo de 'funcións medibles' serán as que admitan a nova integral.

### 3.1. Medibilidade forte e débil.

Comezaremos entón definindo o que é unha función simple medible que, neste caso, toma valores nun espazo de Banach  $B$ .

**Definición 3.1.** Sexa  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espazo de medida e sexa  $B$  un espazo de Banach. Unha función  $s : X \rightarrow B$  é dise simple medible se existen  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset B$  tales que :

- $s$  toma unha cantidade finita de valores, ie,  $\{s(x) : s(x) \neq 0\} = \{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset B$ .
- $A_k = s^{-1}(\{\alpha_k\}) \in \Sigma$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

- $\mu(A_k) < \infty$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

Polo que pode ser representada da forma

$$s : x \in X \longmapsto s(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \chi_{A_k}(x) \in B \quad (3.1)$$

con  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset B$  e  $A_k \in \Sigma$  tales que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , si  $i \neq j$ .

Como comentábamos antes, viramos no caso escalar que unha función era medible cando a imaxe recíproca de determinados subconxuntos de  $\mathbb{R}$  era un conxunto medible. No caso que abordamos agora, diferenciaremos dous tipos de medibilidade: un primeiro máis relacionado co concepto usual de función medible, que chamaremos medibilidade débil, e outro algo máis estricto denominado medibilidade forte.

**Definición 3.2.** Unha función  $f : X \longrightarrow B$  dise debilmente medible se para todo  $T \in B'$  a función dada por

$$x \in X \mapsto \langle T, f(x) \rangle_{B',B} = T(f(x)) \in \mathbb{R}$$

é medible no sentido usual

**Definición 3.3.** Unha función  $f : X \longrightarrow B$  dise fortemente medible se existe unha sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funcións simples medibles tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - f(x)\|_B = 0, \quad \text{case para todo } x \in X.$$

É interesante estudar as diferenzas entre estes tipos de medibilidade e a relación entre elas. Cabe esperar que a medibilidade forte implique a débil. En efecto,

**Lema 3.4.** *Sexa  $f : X \rightarrow B$  unha función fortemente medible. Entón  $f$  é debilmente medible.*

*Demostración.* Por ser  $f : X \rightarrow B$  fortemente medible, temos por definición que existe  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de funcións simples medibles e  $E \in \Sigma$  con  $\mu(E) = 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - f(x)\|_B = 0, \quad \forall x \in X \setminus E. \quad (3.2)$$

Por unha parte, se para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{M(n)} x_k^n \chi_{A_k^n}(x), \quad \forall x \in X \setminus E \quad (3.3)$$

temos que

$$\langle g, s_n(x) \rangle_{B',B} = \sum_{k=1}^{M(n)} \langle g, x_k^n \rangle_{B',B} \chi_{A_k^n}(x), \quad \forall x \in X \setminus E. \quad (3.4)$$

Polo que as funcións  $x \in X \mapsto g \circ s_n(x) \in \mathbb{R}$  son simples medibles.

Ademais, para  $g \in B'$ , a continuidade de  $g$  garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, s_n(x) \rangle_{B',B} = \langle g, f(x) \rangle_{B',B}, \quad \forall x \in X \setminus E, \quad (3.5)$$

polo que concluímos que  $x \in X \mapsto g \circ f(x) \in \mathbb{R}$  será medible por ser límite de funcións simples medibles.

□

En xeral, unha función debilmente medible non ten por que ser fortemente medible. Consideremos a función do seguinte exemplo:

**Exemplo 3.5.** Sexa  $u$  a función dada por

$$u : x \in [0, 1] \rightarrow u(x) = \chi_{\{x\}} \in l^2([0, 1]).$$

Temos que a función é debilmente medible, xa que, se  $g \in l^2([0, 1])$ , entón

$$x \in [0, 1] \rightarrow \langle g, u(x) \rangle = g(\chi_{\{x\}}(x)) \in \mathbb{R}$$

é linear, e en particular medible. Polo tanto,  $u$  é debilmente medible, pero non fortemente medible, como veremos a continuación co Teorema de Pettis.

## 3.2. O Teorema de Pettis.

Por unha banda, sabemos que se unha función é fortemente medible, entón tamén o será fortemente. É, polo tanto, natural pensar se existen unhas condicións baixo as cales ambas medibilidades coincidan. Co obxectivo de responder a esta pregunta, enunciámos e demostramos o Teorema de Pettis.

Antes disto, desenvolveremos tres lemas que nos servirán de apoio para a súa demostración.

**Lema 3.6** (Lema 1). *Sexa  $B$  un espazo de Banach separable. Entón existe unha sucesión  $\{g_n\}$  en  $B'$  tal que para todo  $g_0 \in B'$  con  $\|g_0\|_{B'} \leq 1$ , existe unha subsucesión  $\{g_{n_k}\} \subset \{g_n\}$  con  $\|g_{n_k}\|_{B'} \leq 1$  tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle g_{n_k}, f \rangle_{B',B} = \langle g_0, f \rangle_{B',B}, \quad \forall f \in B.$$

*Demostración.* Como  $B$  é separable, existe  $\{f_n\} \subset B$  tal que  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n} = B$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos a aplicación que vai ao espazo de Hilbert  $l_2^n$  dada por:

$$\phi_n : g \in S' \mapsto \phi_n(g) = (g(f_1), \dots, g(f_n)) \in l_2^n \quad (3.6)$$

onde  $S' = \{g \in B' : \|g\|_{B'} \leq 1\}$ . Como cada  $l_2^n$  é separable, vai existir, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión  $\{g_{n,k}\} \subset S'$  tal que  $\{\phi_n(g_{n,k})\}$  é denso en  $\{\phi_n(S')\}$ .

Sexa agora  $g_0 \in S'$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , existirá un elemento  $m_n \in \mathbb{N}$  que cumpre

$$\|\phi_n(g_{n,m_n}) - \phi_n(g_0)\| < \frac{1}{n} \quad (3.7)$$

polo que se cumprirá tamén que

$$|\langle g_{n,m_n}, f_k \rangle_{B',B} - \langle g_0, f_k \rangle_{B',B}| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Tomando límites cando  $n \rightarrow \infty$ , temos que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_{n,m_n}, f_k \rangle_{B',B} = \langle g_0, f_k \rangle_{B',B} \quad (3.9)$$

e como as  $\{f_k\}$  son densas en  $B$ , podemos afirmar logo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_{n,m_n}, f \rangle_{B',B} = \langle g_0, f \rangle_{B',B} \quad (3.10)$$

que é o que queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 3.7** (Lema 2). *Sexa  $f : X \rightarrow B$  unha función debilmente medible. Tense logo que a función real*

$$x \in X \rightarrow \|f(x)\|_B \in \mathbb{R}$$

*é unha función medible.*

*Demostración.* Para demostralo, veremos que, dado un elemento real arbitrario  $a$ , se ten que

$$A = \{x \in X : \|f(x)\|_B \leq a\} \in \Sigma.$$

Para isto, imos obter a igualdade

$$A = \bigcap_{g \in S'} A_g = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{g_n}$$

onde, dado  $g \in B'$ , se define

$$A_g = \{x \in X : |\langle g, f(x) \rangle_{B',B}| \leq a\},$$

que é un conxunto medible, pois  $f$  é debilmente medible. Así, teremos que  $A$  é a intersección numerable de conxuntos medibles e será, polo tanto, medible.

$$1. A = \bigcap_{g \in S'} A_g.$$

"  $\subset$  "

Utilizando a definición de norma, que  $\|g\|_{B'} \in S'$  e que  $x \in A$ , temos que

$$|\langle g, f(x) \rangle_{B',B}| \leq \|g\| \cdot \|f(x)\| \leq 1 \cdot a \leq a \quad \forall g \in S' \quad (3.11)$$

polo que  $A \subset \bigcap_{g \in S'} A_g$ .

"  $\supset$  "

Sabemos por un corolario 1.15 do teorema de Hahn-Banach que dado un  $x \in X$ , existe  $g_0 \in B'$  unitario tla que  $\langle g_0, f(x) \rangle_{B',B} = \|f(x)\|_B$ . Polo tanto, dado un  $x \in \bigcap_{g \in S'} A_g$ , existe un  $g_0 \in B'$ , con  $\|g_0\|'_B = 1$ , tal que:

$$\|f(x)\|_B = \langle g_0, f(x) \rangle_{B',B} \leq a.$$

É dicir,  $x \in A$ .

$$2. \bigcap_{g \in S'} A_g = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{g_n}.$$

"  $\subset$  "

Dado  $x \in \bigcap_{g \in S'} A_g$ , como  $|\langle g, f(x) \rangle_{B',B}| \leq a$ , tense en particular

$$|\langle g_n, f(x) \rangle_{B',B}| \leq a, \forall n \in \mathbb{N},$$

polo que  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{g_n}$ .

"  $\supset$  "

Sexa  $g_0 \in S'$ . Polo lema anterior, vai existir  $\{g_{n_k}\} \subset \{g_n\}$  tal que  $g_n \rightarrow g_0$  debilmente\*, é dicir:

$$\langle g_0, f(x) \rangle_{B',B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_{n_k}, f(x) \rangle_{B',B} \quad (3.12)$$

polo que se cumpre

$$|\langle g_0, f(x) \rangle_{B',B}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle g_{n_k}, f(x) \rangle_{B',B}| \leq a. \quad (3.13)$$

□

**Lema 3.8** (Lema 3). *Sexa  $\{g_n\}$  sucesión de funcións simples medibles da forma*

$$g_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,n} \chi_{A_{k,n}} \quad (3.14)$$

onde  $\alpha_{k,n} \in B$  e  $A_{k,n} \in \Sigma, \forall k, n \in \mathbb{N}$ . Ademais, os  $A_{k,n}$  cumpren que

1.  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n} = X, \forall n \in \mathbb{N}.$
2.  $A_{i,n} \cap A_{j,n} = \emptyset$  se  $i \neq j$ , para todo  $n \in \mathbb{N}.$

Entón, se  $\{g_n\}$  converge uniformemente na norma de  $B$  a  $f$  en  $X$  menos un conxunto de medida nula  $E$ ,  $f$  é unha función fortemente medible.

*Demostración.* Imos construír unha sucesión de funcións simples medibles que converxa puntualmente a función  $f$ .

Podemos supoñer que a converxencia uniforme se dá en todo  $X$ . Noutro caso, tomamos  $X$  como  $X \setminus E$ , sen perder xeralidade. Supoñamos ademais que, para cada  $N \in \mathbb{N}$  existe un natural  $M \geq N$  tal que:

$$\bigcup_{k=M}^{\infty} \left( \bigcup_{k=1}^n A_{k,n} \right) = X. \quad (3.15)$$

(Reordeando os  $A_{k,n}$  sempre podemos facer que se cumpra isto)

Construímos entón a sucesión de funcións simples medibles dada por:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \sum_{k=1}^1 \alpha_{k,1} \chi_{A_{k,1}}(x) \\ s_2(x) &= \sum_{k=1}^2 \alpha_{k,2} \chi_{A_{k,2}}(x) + s_1(x) \chi_{B_2}(x) \\ &\vdots \\ s_n(x) &= \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} \chi_{A_{k,n}}(x) + s_{n-1}(x) \chi_{B_n}(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $B_n = X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_{k,n}$ . Sexa  $\epsilon > 0$  fixado.

Por unha banda, como  $\{g_n\}$  converge uniformemente a  $f$ , temos que  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq N_1$ , entón  $\|g_n(x) - g(x)\|_B < \epsilon, \forall x \in X$ . Fixemos agora  $x \in X$  e vexamos que  $\{s_n(x)\}$  converge a  $f(x)$ . Grazas á reordenación dada en 3.15, existirá un elemento  $N_2 \geq N_1$  tal que:

$$x \in \bigcup_{k=1}^{N_2} A_{k,N_2}. \quad (3.17)$$

Entón, pola construción de  $\{s_n\}$ , se  $n \geq N_2$  entón:

$$\|s_n(x) - f(x)\|_B \leq \epsilon. \quad (3.18)$$

En efecto, se  $x \in \bigcup_{k=1}^{N_2} A_{k,n}$ , entón  $s_n(x) = g_n(x)$ , polo que se ten o resultado.

Se  $x \in B_n$ , temos que  $s_n(x) = s_{n-1}(x)$ , e repetimos o razonamento con  $n - 1$ . Retrocede-

remos, como moito, ata o índice  $N_2$ . Neste índice temos garantizado que  $x \in \bigcup_{k=1}^{N_2}$ , polo que  $s(x) = g(x)$ . Ao ter  $N_2 \geq N_1$ , temos a acotación buscada.  $\square$

Estamos agora en condicións de demostrar o Teorema de Pettis:

**Teorema 3.9** (Teorema de Pettis). *Unha función  $f : X \longrightarrow B$  é fortemente medible se e só se se cumpre:*

1.  *$f$  é separable case por doquier, é dicir, existe  $E \in \Sigma$  de medida nula tal que  $\{f(x) : x \in X \setminus E\}$  é separable.*
2.  *$f$  é debilmente medible.*

*Demostración.* Demostraremos as implicacións por separado.

- ”  $\implies$  ” Supoñamos que  $f$  é fortemente medible, e vexamos que é separable case por doquier. Por definición, existe unha sucesión  $\{s_n\}$  de funcións simples medibles tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \forall x \in X \setminus E \quad (3.19)$$

sendo  $E$  un conxunto de medida nula. De aquí deducimos que

$$\{f(x) : x \in X \setminus E\} \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Rg(s_n)} \quad (3.20)$$

e, como  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Rg(s_n)}$  é separable, pois as funcións simples teñen rango finito, tense que  $\{f(x) : x \in X \setminus E\}$  tamén o é.

- ”  $\impliedby$  ” Sexa  $f : X \longrightarrow B$  debilmente medible e con  $Rg(f) = \{f(x) : x \in X\}$  separable. Noutro caso, basta definir  $X$  como  $X \setminus E$  e restrinxir a  $\sigma$ -algebra a este conxunto. Tamén suporemos que  $B$  é separable (noutro caso, tomamos  $B$  como  $Rg(f)$ ). Temos entón que existe  $\{f_n\} \subset B$  tal que son densas en  $Rg(f)$ , polo que dados  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ , existirá  $f_{i,n} \in \{f_n\}$  tal que  $\|f(x) - f_{i,n}(x)\|_B < \frac{1}{n}$ . Así, podemos recubrir  $Rg(f)$  por unha colección numerable de bolas abertas de raio  $\leq \frac{1}{n}$  e centro  $f_{i,n} \in \{f_n\}$ :

$$Rg(f) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_{i,n}. \quad (3.21)$$

Polo lema 3.7, sabemos que a aplicación  $x \in X \mapsto \|f(x) - f_{i,n}(x)\|_B$  é medible, polo que

$$B_{i,n} = f^{-1}(S_{i,n}) = \{x \in X : f(x) \in S_{i,n}\} \quad (3.22)$$

é medible para todo  $i \in \mathbb{N}$ , e cumpre que  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{i,n}$ .

Definamos agora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ;

$$h_n : x \in X \mapsto h_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,n} \cdot \chi_{B'_{i,n}}(x) \quad (3.23)$$

onde, para  $i \in \mathbb{N}$ ,  $B'_{i,n} = B_{i,n} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{j,n}$  son conxuntos que verifican as condicións do lema 3.8.

Ademais, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos aproximar a función  $h_n$  pola sucesión de funcións simples medibles dada por

$$h_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^m f_{i,n} \cdot \chi_{B'_{i,n}}(x) \quad (3.24)$$

polo que cada  $h_n$  é fortemente medible. Ademais,

$$\|f(x) - h_n(x)\|_B < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in X \quad (3.25)$$

e concluímos así que  $f$  é fortemente medible.

□

Utilizando o anterior, podemos ver que efectivamente a función do exemplo non pode ser fortemente medible, xa que o rango de  $u$  non é separable.

Da demostración do teorema deducimos o seguinte corolario, que é unha caracterización das funcións fortemente medibles.

**Corolario 3.10.** *Unha función  $f : X \mapsto B$  é fortemente medible se e só se pode ser aproximada casi uniformemente por unha sucesión de funcións simples medibles.*

E do Teorema de Pettis dedúcese directamente que se  $B$  é separable, entón os conceptos de función debilmente medible e fortemente medible coinciden.

**Corolario 3.11.** *Sexa  $B$  un espazo de Banach separable e  $f : X \mapsto B$ . entón,  $f$  é fortemente medible se e só se  $f$  é debilmente medible.*

Xa mencionamos noutra ocasión que o estudo das sucesións e saber que ocorre cos seus límites é unha parte moi importante da análise funcional. Polo tanto, ten interese saber que ocorre cunha función  $f$  se é o límite dunha sucesión de funcións medibles. Enunciamos así estes dous lemas que dan resposta a iso.

**Lema 3.12** (Límite de funcións debilmente medibles). *Sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de funcións debilmente medibles que converge debilmente a  $f$  case para todo punto de  $X$ . Entón  $f$  é debilmente medible.*

*Demostración.* Supoñemos que converge en todos os puntos de  $X$ . Noutro caso, poñemos  $X = X \setminus E$  sendo  $E$  o conxunto de medida nula onde non converge. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por ser  $f_n$  debilmente medible, terase que a función  $x \in X \rightarrow \langle g, f_n(x) \rangle_{B',B}$  é medible para todo  $g \in B'$ . Como  $\{f_n\}$  converge debilmente a  $f$ , tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, f_n(x) \rangle_{B',B} = \langle g, f(x) \rangle_{B',B}, \forall g \in B' \quad \forall x \in X,$$

o que nos permite concluír que  $x \in X \rightarrow \langle g, f(x) \rangle_{B',B}$  é unha función medible, ou equivalentemente, que  $f$  é debilmente medible.  $\square$

**Lema 3.13** (Límite de funcións fortemente medibles). *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións fortemente medibles que converge debilmente a unha función  $f$ . Entón  $f$  é fortemente medible.*

*Demostración.* Da mesma maneira que no lema anterior, suporemos que a converxencia se da en todo  $X$ . Sexa, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n \subset B$  o conxunto separable que contén a  $Rg(f_n)$ . Sexa  $D = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n}$ , e  $x \in X$ . Pola converxencia débil de  $\{f_n\}$  a  $f$  e o Teorema de Mazur, podemos obter unha sucesión formada por combinacións lineais convexas de  $\{f_n(x)\}$  que converge fortemente a  $\{f(x)\}$ , polo que  $f(x) \in D$ . Así, en virtude do Teorema de Pettis, temos o resultado.  $\square$

Recordando que a converxencia case por doquier implicaba a converxencia débil, deducimos o seguinte corolario do Lema anterior:

**Corolario 3.14.** *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións fortemente medibles que converge case por doquier a unha función  $f$  en  $B$ . Entón  $f$  é fortemente medible.*

### 3.3. A Integral de Bochner

Comentamos antes que no caso escalar, antes de definir a integral, houbo que restrinxila primeiramente ao que chamaron funcións medibles. No noso caso, acabamos de ver que existen dous tipos de medibilidade, polo que é natural preguntarse se a integral de Bochner vai estar definida para ambas, e a resposta é que non. Unicamente consideraremos funcións fortemente medibles. Existe outra teoría de integración que non abarcaremos neste traballo, chamada Integral de Pettis, que da resposta ás limitacións da integral de Bochner.

Logo de ver os distintos tipos de medibilidade e ver que ocorre coas sucesións de funcións medibles, podemos introducir a xeralización da integral de Lebesgue a funcións que toman valores nun espazo de Banach. Esta denomínase integral no sentido de Bochner, e ao igual que na integral de Lebesgue, comezaremos definíndoa para funcións simples medibles.

**Definición 3.15.** Dada unha función simple medible

$$x \in X \rightarrow s(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}(x) \in B$$

como as que definimos na sección anterior, definimos a Integral de Bochner dunha función simple medible como o elemento de  $B$  dado por:

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k) \in B.$$

Ao igual que na integral de Lebesgue, dado un elemento  $E \in \Sigma$ , definimos a integral sobre  $E$  como

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E) \in B.$$

É sinxelo comprobar que a integral para funcións simples medibles é linear, pois basta observar como está definida.

Agora que sabemos o que é a integral de Bochner dunha función simple medible, definimos a integral para unha clase de funcións máis xeral como segue:

**Definición 3.16.** Unha función fortemente medible  $f : X \rightarrow B$  é Bochner integrable se existe unha sucesión de funcións simples medibles  $\{s_n\}$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(x) - f(x)\|_B = 0$$

para case todo  $x \in X$ , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|s_n - f\|_B d\mu = 0. \quad (3.26)$$

Neste caso, definimos a Integral de Bochner de  $f$  sobre  $E \in \Sigma$  como

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu.$$

Para que a definición teña sentido, é importante comprobar que o límite anterior existe.

*Demostración.* En efecto, polo lema (lema 2) temos que a función

$$x \in X \rightarrow \|s_n(x) - f(x)\|_B$$

é medible. Ademais, tense que a sucesión  $\{\int s_n d\mu\}$  é de Cauchy en  $B$ , xa que

$$\begin{aligned} \left\| \int s_n d\mu - \int s_m d\mu \right\|_B &= \left\| \int (s_n - s_m) d\mu \right\|_B \\ &\leq \int \|s_n - s_m\|_B d\mu \leq \int \|s_n - f\|_B d\mu + \int \|s_m - f\|_B d\mu. \end{aligned}$$

Polo tanto, como  $B$  é completo, existirá o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\int s_n d\mu\}$ , que era o que buscábamos.  $\square$

Ata aquí, explicamos o que se entende por integral de Bochner dunha función fortemente medible e vimos que está ben definida. Vexamos agora algunhas das súas propiedades básicas que tamén se dan no caso escalar.

Como cabe esperar, a integral de Bochner é linear:

**Lema 3.17.** *Sexan  $f, g : X \rightarrow B$  dúas funcións Bochner integrais e  $\alpha, \beta$  do corpo de escalares sobre o cal está definido  $B$ . Entón,*

- $\alpha f$  é Bochner integrable e

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu. \quad (3.27)$$

- $f + g$  é Bochner integrable e

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

*Demostración.* Dado que para  $\alpha = 0$  o resultado é trivial, suporemos  $\alpha \neq 0$ .

- Por ser  $f$  Bochner integrable, existe  $\{s_n\}$  sucesión de funcións simples medibles que verifican a definición 3.16. Consideremos agora a sucesión de funcións simples medibles  $\{\alpha s_n\}$ . Vexamos que  $\alpha f$  é Bochner integrable:

1. Primeiramente, temos que  $\alpha s_n(x) \rightarrow \alpha f(x)$  case por doquier.
2. Por outra banda, pola linealidade da integral de Lebesgue, tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|\alpha s_n - \alpha f\| d\mu = 0.$$

3. Por último, pola linealidade da integral de Bochner para funcións simples medibles, temos

$$\int \alpha f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \alpha s_n d\mu = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

- De maneira análoga, por ser  $f$  e  $g$  funcións Bochner integrais, existirán  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  sucesións de funcións simples medibles que verifican as condicións da definición 3.16. Vexamos que  $f + g$  é Bochner integrable:

1. Primeiramente, temos que  $f_n(x) + g_n(x) \rightarrow f(x) + g(x)$  case por doquier.
2. Por outra banda, polas propiedades da integral de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n + g_n - (f + g)\|_B d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n - f\|_B d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \|g_n - g\|_B d\mu = 0.$$

3. Por último, pola linealidade da integral de Bochner para funcións simples medibles, temos

$$\begin{aligned} \int (f + g)d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

□

A continuación, faremos a xeralización dunhas propiedades vistas para a integral de Lebesgue, que tamén resultan interesantes para a integral de Bochner.

**Teorema 3.18.** *Sexa  $f$  unha función Bochner integrable. Entón verifica que:*

1.  $\|\int_E f d\mu\| \leq \int_E \|f\| d\mu$ , para casi todo  $E \in \Sigma$ .
2.  $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E f d\mu = 0$ .
3. Se  $\{E_n\} \subset \Sigma$  son disxutos dous a dous e  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  tense:

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu < \infty. \quad (3.28)$$

4. A variación dunha función  $F : \Sigma \rightarrow X$  é a función non negativa dada por

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|_B$$

sendo  $\pi$  unha partición de  $E$  en subconxuntos finitos disxuntos.

Sexa  $F : E \in \Sigma \mapsto F(E) = \int_E f d\mu$ . Tense logo:

- a)  $F$  é de variación acotada.
- b)  $|F|(E) = \int_E \|f\| d\mu$ ,  $\forall E \in \Sigma$ .

*Demostración.* Vexamos cada punto por separado. Do último punto non incluiremos a demostración, pero darémolo por demostrado xa que o necesitaremos máis adiante.

1. Se  $s$  é unha función simple medible, este resultado é consecuencia da desigualdade triangular, polo que daremos isto por certo e o usaremos para demostrar o caso xeral. Sexa agora  $f$  unha función Bochner integrable. Existirá logo unha sucesión de funcións simples medibles  $\{\psi_n\}$  construída da mesma maneira que na demostración do Teorema de Bochner 3.20. Esta sucesión cumpre que :

- a) Converxe puntualmente a  $f$  en  $B$  en case todo punto de  $X$ .  
 b) É acotada, pois

$$\|\psi_n(x)\|_B \leq (1 + 1/2)\|f(x)\|_B, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|\psi_n(x) - f(x)\|_B d\mu = 0.$$

d) E pola desigualdade triangular,

$$\left\| \int \psi_n(x) d\mu \right\|_B \leq \int \|\psi_n(x)\|_B d\mu.$$

Utilizando o teorema da converxencia dominada de Lebesgue, podemos tomar límites na desigualdade anterior, obtendo

$$\left\| \int f(x) d\mu \right\|_B \leq \int \|f(x)\|_B d\mu$$

que é o resultado que se buscaba.

2. Sabemos que a integral de Lebesgue cumpre que:

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E \|f\|_B d\mu = 0.$$

Polo que, usando o apartado anterior, se ten o resultado.

3. Por unha banda, utilizando propiedades da integral de Lebesgue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{E_n} f d\mu \right\|_B \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\|_B d\mu = \int_E \|f\|_B d\mu \leq \int \|f\|_B d\mu < \infty.$$

Tense logo que a serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$  é absolutamente converxente, polo que só temos que ver que se cumpre o límite. Para isto, utilizando a aditividade finita da integral de Bochner, temos que

$$\left\| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^m \int_{E_n} f d\mu \right\|_B = \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\|_B.$$

Agora ben, dado que  $\mu(E) < \infty$  e os  $E_n$  son disxuntos dous a dous, temos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n) = 0$ , e xuntando isto co anterior, obtemos que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \right\|_B = 0.$$

Co que obtemos o resultado:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

□

Desta última propiedade dedúcese o seguinte corolario:

**Corolario 3.19.** *Sexan  $f$  e  $g$  dúas funcións integrables tales que*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu. \quad (3.29)$$

*Entón  $f=g$  case para todo  $x \in X$ .*

*Demostración.* Sexa  $F(E) = \int_E f - g d\mu$ . Por hipótese,  $F(E) = 0$  para todo  $E \in \Sigma$ , polo que  $|F|(E) = 0$  para todo  $E \in \Sigma$ . Deducimos do teorema anterior entón que

$$\int \|f - g\|_B d\mu = 0.$$

Polo que concluimos que  $\|f - g\|_B = 0$ , e tense o resultado. □

Antes de pasar á xeralización dos teoremas clásicos sobre a integral de Lebesgue, temos que falar do Teorema de Bochner. Este teorema é un importante resultado que nos da unha caracterización das funcións Bochner integrables utilizando a súa norma.

**Teorema 3.20** (Teorema de Bochner). *Unha función fortemente medible  $f : X \mapsto B$  é integrable no sentido de Bochner se e só se a función  $x \in X \mapsto \|f(x)\|_B$  é Lebesgue integrable.*

*Demostración.* Sexa  $f$  unha función fortemente medible.

- ”  $\implies$  ” Supoñamos que  $f$  é Bochner integrable. existirá entón unha sucesión de funcións simples medibles  $\{s_n\}$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|s_n - f\|_B d\mu = 0. \quad (3.30)$$

Polas propiedades da norma en  $B$ , temos que

$$\|f(x)\|_B \leq \|s_n(x) - f(x)\|_B + \|s_n(x)\|_B, \quad (3.31)$$

e pola monotonía da integral de Lebesgue, temos:

$$\int \|f(x)\|_B d\mu \leq \int \|s_n(x) - f(x)\|_B d\mu + \int \|s_n(x)\|_B d\mu. \quad (3.32)$$

Por outra banda, como:

$$\begin{aligned} \left| \int \|s_n(x)\|_B - \|s_k(x)\|_B d\mu \right| &\leq \int \|s_n(x)\|_B - \|s_k(x)\|_B d\mu \\ &\leq \int \|s_n(x) - s_k(x)\|_B d\mu \\ &\leq \int \|s_n(x) - f(x)\|_B d\mu + \int \|s_k(x) - f(x)\|_B d\mu. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Temos que  $\{\int \|s_n(x)\|_B d\mu\}$  é unha sucesión de Cauchy, e como  $B$  é completo, converxerá a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|s_n(x)\|_B d\mu. \quad (3.34)$$

Se tomamos límites en 3.32, teremos que

$$\int \|f(x)\|_B d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int \|s_n(x)\|_B d\mu < \infty. \quad (3.35)$$

Polo que a norma de  $f$  é integrable.

- ”  $\Leftarrow$  ” Supoñamos agora que  $f$  é unha función fortemente medible cuxa norma é integrable no sentido clásico. Sexa  $\{s_n\}$  a sucesión de funcións simples medibles que converxe a  $f$  case por doquier. Construímos a sucesión dada por:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} s_n(x), & \|s_n(x)\|_B \leq (1 + 1/2)\|f(x)\|_B \\ 0, & \|s_n(x)\|_B > (1 + 1/2)\|f(x)\|_B. \end{cases} \quad (3.36)$$

Pola propia construción da sucesión, tense que verifica:

1. Está acotada, pois:

$$\|\psi_n(x)\|_B \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\|f(x)\|_B, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n(x) - f(x)\|_B = 0$ , para case todo  $x \in X$ .
3.  $\|\psi_n(x) - f(x)\|_B \leq \|\psi_n(x)\|_B + \|f(x)\|_B \leq (2 + \frac{1}{2})\|f(x)\|_B$ , para case todo  $x \in X$ .

Polo tanto, como a función  $x \mapsto \|f(x)\|_B$  é integrable, aplicando o teorema da converxencia dominada temos que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|\psi_n(x) - f(x)\|_B d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n(x) - f(x)\|_B d\mu = 0. \quad (3.37)$$

Que era o que buscábamos. □

Para rematar este capítulo, faremos as xeralizacións á integral de Bochner de dous resultados clásicos sobre o paso ao límite na integral de Lebesgue: o Teorema da Converxencia Dominada e o Lema de Fatou. Ademais, como consecuencia deste último, obteremos un resultado moi importante sobre a integral de Bochner e o seu comportamento con elementos do dual.

Deste modo, temos:

**Teorema 3.21** (Teorema da converxencia dominada). *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións fortemente medibles tales que:*

1.  $\|f_n(x)\|_B \leq g(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e casi para todo  $x \in X$ , con  $g : X \mapsto [0, \infty)$  Lebesgue integrable.
2.  $f_n(x) \mapsto f(x)$  en  $B$  cpt  $x \in X$ .

Entón, cúmprese que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n - f\|_B d\mu = \int f d\mu. \quad (3.38)$$

*Demostración.* Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións fortemente medibles que converxe a  $f$  en  $B$  case por doquier. Polo lema 3.13,  $f$  é fortemente medible, polo que dado  $n \in \mathbb{N}$  temos que a función  $x \in X \rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_B$  é medible. Ademais, pola primeira condición do teorema, temos que para case todo  $x \in X$ :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_B \leq 2g(x).$$

Aplicamos entón o Teorema da Converxencia Dominada, co que obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n - f\|_B d\mu = 0.$$

Usando agora o primeiro apartado do teorema anterior, temos que

$$\left\| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right\|_B \leq \int \|f_n - f\|_B d\mu.$$

Polo que basta tomar límites en ambos lados para ter o resultado. □

**Teorema 3.22** (Lema de Fatou). *Sexa  $\{f_n\}$  sucesión de funcións fortemente medibles que converxen debilmente a unha función  $f$  case por doquier, e que se cumpre que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \|f_n\|_B d\mu < \infty. \quad (3.39)$$

Entón;

1.  $f$  é Bochner integrable.

2.  $\int \|f(x)\|_B d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n(x)\|_B d\mu$ .

*Demostración.* Do mesmo modo que no resto do capítulo, supoñamos que a converxencia se da en todo  $X$ . Dado que a integral da norma das funcións da sucesión está acotada, e estas son fortemente medibles, teremos que as funcións da sucesión son Bochner integrables. Agora ben, por resultados sobre converxencia débil, temos que:

$$\|f(x)\|_B \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\|_B, \forall x \in X.$$

Tendo en conta o anterior e que a integral de Lebesgue é monótona, obtemos que

$$\int \|f(x)\|_B d\mu \leq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\|_B d\mu < \infty,$$

é dicir, que  $f$  é Bochner integrable. Por último, aplicando o Lema de Fatou,

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\|_B d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \|f_n(x)\|_B d\mu.$$

□

Para rematar este capítulo, enunciaremos e demostramos un teorema moi importante sobre a integral de Bochner que, ademais, non vimos antes no caso escalar.

**Teorema 3.23** (Teorema de Hille). *Dada unha función  $f$  Bochner integrable, terase que*

$$\langle g, \int f d\mu \rangle_{B', B} = \int \langle g, f \rangle_{B', B} d\mu, \forall g \in B'. \quad (3.40)$$

*Demostración.* Sexa  $f$  unha función Bochner integrable. Existirá logo unha sucesión de funcións simples medibles  $\{\psi_n\}$  construída da mesma maneira que na demostración do Teorema de Bochner 3.20. Esta sucesión cumpre que :

1. Converxe puntualmente a  $f$  en  $B$  en case todo punto de  $X$ .

2. É acotada, pois

$$\|\psi_n(x)\|_B \leq (1 + 1/2)\|f(x)\|_B, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|\psi_n(x) - f(x)\|_B d\mu = 0.$$

Imos escribir agora cada termo da sucesión  $\{\psi_n\}$  co representación canónica:

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{k,n} \chi_{E_{k,n}}$$

e vexamos que se ten o resultado. Sexa  $g \in B'$  dado. Tense entón que:

$$\begin{aligned} \langle g, \int f d\mu \rangle_{B',B} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, \int \psi_n d\mu \rangle_{B',B} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \langle g, \alpha_{k,n} \rangle_{B',B} \mu(E_{k,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \langle g, \psi_n \rangle_{B',B} d\mu. \end{aligned}$$

Como ademais se ten que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|\langle g, \psi_n(x) \rangle_{B',B}| \leq \|g\|_{B'} \|\psi_n(x)\|_B \leq (1 + 1/2) \|g\|_{B'} \|f(x)\|_B.$$

Aplicando o Teorema da Convergencia Dominada clásico a  $\langle g, \psi_n \rangle_{B',B}$  tense o resultado.  $\square$

## Capítulo 4

# Os espazos $L^p(X, \Sigma, \mu; Y)$

### 4.1. Introducción aos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$

No capítulo de preliminares da análise funcional recordamos o que eran os espazos  $L^p$  e súa importancia, tanto na análise funcional como noutros campos das matemáticas. Agora que definimos un novo tipo de integral para funcións que toman valores nun espazo de Banach arbitrario, e esta provén de xeralizar a integral de Lebesgue, é natural tratar de xeralizar os espazos  $L^p$  clásicos a uns espazos máis xerais. Ademais, veremos que propiedades destes se poden estender para funcións que toman valores nun Banach, e que aplicacións teñen estes novos espazos.

Introducimos así os espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ , cuxa definición é análoga aos vistos anteriormente.

**Definición 4.1.** Sexa  $(X, \Sigma, \mu)$  un espazo de medida e  $B$  un espazo de Banach.

- Dado un elemento  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  denotará ao conxunto de todas as clases de equivalencia (asociadas á relación de equivalencia de ser iguais en case todo punto) das funcións  $f : X \rightarrow B$  fortemente medibles tales que :

$$\|f\|_p = \left( \int_X \|f\|_B^p \right)^{1/p} < \infty.$$

- Análogamente, defínese  $L^\infty(X, \Sigma, \mu, B)$  como o conxunto das clases de equivalencia (asociadas a ser iguais en case todo punto) das funcións  $f : X \rightarrow B$  tales que :

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \|f(x)\| := \inf\{t \geq 0 : \|f(x)\| \leq t \text{ para case todo } x \in X\}.$$

## 4.2. Propiedades dos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$

Estes espazos, ao igual que no caso escalar, trátanse de espazos vectoriais completos, o que os dota dunhas propiedades moi interesantes á hora de estudar diversos problemas da análise funcional. Antes de ver que efectivamente se tratan de espazos de Banach, xeralizaremos dúas coñecidas desigualdades vistas no caso escalar: a desigualdade de Hölder e a de Minkowski.

### 4.2.1. Desigualdades Básicas

**Teorema 4.2** (Desigualdade de Holder). *Sexa  $f \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  e  $g \in L^q(X, \Sigma, \mu, B)$  e  $(p, q)$  expoñentes conxugados. Entón a función*

$$x \in X \rightarrow \|f(x)\|_B \|g(x)\|_B$$

*é Lebesgue integrable, e ademais*

$$\int \|f(x)\|_B \|g(x)\|_B d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Demostración.* Supoñamos que  $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ . Tomemos

$$a = \frac{\|f(x)\|_B}{\|f\|_p}, b = \frac{\|g(x)\|_B}{\|g\|_q}.$$

Se aplicamos a desigualdade de Young, que non vimos neste traballo pero se pode consultar en [D.S., 1970], temos que para todo  $x \in X$  se cumpre que:

$$ab = \frac{\|f(x)\|_B \|g(x)\|_B}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f(x)\|_B^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{\|g(x)\|_B^q}{q \|g\|_q^q}.$$

Pola monotónia e a linealidade da integral de Lebesgue, tense:

$$\int \frac{\|f(x)\|_B \|g(x)\|_B}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \int \frac{\|f(x)\|_B^p}{p \|f\|_p^p} + \int \frac{\|g(x)\|_B^q}{q \|g\|_q^q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

E, polo tanto;

$$\int \|f(x)\|_B \|g(x)\|_B d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

**Corolario 4.3** (Desigualdade de Minkowski). *Se  $f, g \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ , entón*

1.  $f + g \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .
2.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

*Demostración.* Se  $p = 1$ , basta ver que se cumpre a desigualdade triangular e linealidade da integral de Bochner.

Sexa entón  $p > 1$ . Dado  $x \in X$ , sabemos que:

$$\|f(x) + g(x)\|_B^p \leq 2^p(\|f(x)\|_B^p + \|g(x)\|_B^p)$$

polo que  $f + g \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .

Por outra banda, dado  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} \|f(x) + g(x)\|_B^p &= \|f(x) + g(x)\|_B \|f(x) + g(x)\|_B^{p-1} \\ &\leq \|f(x)\|_B \|f(x) + g(x)\|_B^{p-1} + \|g(x)\|_B \|f(x) + g(x)\|_B^{p-1}. \end{aligned}$$

Se tomamos  $q$  o expoñente conxugado de  $p$  e aplicamos a desigualdade de Hölder aos sumandos da desigualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned} \int \|f\|_B \|f + g\|_B^{p-1} d\mu &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q}. \\ \int \|g\|_B \|f + g\|_B^{p-1} d\mu &\leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Polo que:

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_q) \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Supoñendo agora que  $\|f + g\|_p \neq 0$  e utilizando que  $p - p/q = 1$ , temos que :

$$\|f + g\|_p = \|f + g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

co que temos o resultado. □

#### 4.2.2. Propiedades fundamentais dos espazos $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$

Agora que vimos a definición dos espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  e estas desigualdades, estamos en condicións de xeralizar os resultados esenciais dos espazos  $L^p$  e as súas propiedades. Comecemos vendo que se tratan de espazos vectoriais normados completos, é dicir: espazos de Banach. Para isto, dado que a súa norma se define de distinta maneira, imos separar os casos nos que  $1 \leq p < \infty$  e  $p = \infty$ .

**Teorema 4.4.** *Se  $1 \leq p \leq \infty$ , o espazo  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  é un espazo vectorial normado.*

*Demostración.* Como comentábamos, demostraremos o caso  $p = \infty$  por separado.

- Se  $1 \leq p < \infty$ , temos:

1. Trivialmente,  $\|f\|_p \geq 0$ .
2. Da propia definición da norma, é claro que  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ ,  $\|0\|_p = 0$ .
- 3.

$$\|f\|_p = \left( \int_X \|f\|_B^p \right)^{1/p} = 0 \iff \|f\|_p = \left( \int_X \|f\|_B^p \right) = 0 \iff \|f\|_B = 0 \iff f = 0.$$

4. En virtude da desigualdade de Minkowski, temos que:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- Se  $p = \infty$ , tense que:

1.  $\|f\|_\infty$  é unha norma, pois:
  - a)  $\|f\|_\infty \geq 0$ .
  - b)  $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$ ,  $\|0\|_\infty = 0$ .
  - c)  $\|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$ . En efecto, sexa  $f$  con  $\|f\|_\infty = 0$ . Dado un natural  $n$  existirá  $A_n$  de medida nula tal que  $\|f(x)\|_\infty \leq \frac{1}{n}$  para  $x \in X \setminus A_n$ . Deste modo, temos que o conxunto  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  é de medida nula e ademais  $\|f(x)\| = 0$  para  $x \in X \setminus A$ , polo que  $f(x) = 0$  se  $x \in X \setminus A$ .
  - d) Por último, sexan  $f, g \in L^\infty(X, \Sigma, \mu, B)$ . Existirán logo  $N_1, N_2 \in \Sigma$  de medida nula tales que  $\|f(x)\| \leq \|f\|$  e  $\|g(x)\| \leq \|g\|$  para  $x \notin N_1$  e  $x \notin N_2$  respectivamente. Polo tanto, tense que

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\| + \|g\|$$

para  $x \notin N_1 \cup N_2$ , e como esta unión ten medida nula, temos que

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

□

Unha propiedade esencial dos espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  é que son espazos de Banach. Para probar isto, prodecemos de maneira similar a calquera demostración onde se queira ver a completitude dun espazo: tomamos unha sucesión de Cauchy, construímos un candidato para que sexa o límite, e comprobamos tanto que se atopa no espazo como que efectivamente a sucesión converge a dito elemento.

**Teorema 4.5.** *Se  $1 \leq p < \infty$ , o espazo  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  é un espazo de Banach.*

*Demostración.* Consideremos  $\{f_n\}$  unha sucesión de Cauchy en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . Por ser de Cauchy, existirá unha subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  que verifica que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k} \text{ para } k \geq 1.$$

Consideremos agora a función candidata a límite

$$f : x \in X \rightarrow f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

onde

$$E = \left\{ x \in X : \|g_1(x)\|_B + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_B < \infty \right\}$$

e a función medible non negativa dada por:

$$g(x) = \|f_{n_1}(x)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|.$$

Vexamos entón que  $f \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  e que  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .

1. Polo Lema de Fatou, temos que

$$\int g^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \left( \|f_{n_1}\|_B + \sum_{k=1}^n \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \right)^p d\mu$$

e tomando raíces p-ésimas a ambos lados da desigualdade:

$$\begin{aligned} \left[ \int g^p d\mu \right]^{1/p} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^n \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \right] \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \|f_{n_1}\|_p + 1. \end{aligned}$$

Polo que  $g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ , e como  $E \in \Sigma$  e  $\mu(X \setminus E) = 0$ , temos que  $f$  está ben definida. Ademais, como  $\{f_{n_k}\}$  converge a  $f$  case para todo  $x \in X$ ,

$$\|f_{n_k}\|_B \leq \|f_{n_1}\| + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| \leq g \in L^p(X, \Sigma, \mu, B).$$

Finalmente, temos polo Teorema da Convergencia Dominada que  $f \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .

2. Vexamos por último que  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .

Dado que  $f - f_{n_k}$  converxe a cero case por doquier e  $\|f - f_{n_k}\| \leq 2^p g^p$ , polo Teorema da Convergencia Dominada temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \|f - f_{n_k}\|_B^p d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| d\mu = 0.$$

Polo que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$ , é dicir,  $\{f_{n_k}\} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . Dado que  $\{f_n\}$  é unha sucesión de Cauchy, temos entón que  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . Tomando  $m$  e  $k$  suficientemente grandes, temos por definición que:

$$\int \|f_m - g_{n_k}\|_B^p d\mu < \epsilon^p.$$

Aplicando o Lema de Fatou,

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_m - g_{n_k}\|_B^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \|f_m - g_{n_k}\|_B^p d\mu < \epsilon^p.$$

Por último, tomando raíces p-ésimas, temos o resultado. □

**Teorema 4.6.** *O espazo  $L^\infty(X, \Sigma, \mu, B)$  é un espazo de Banach.*

*Demostración.* Sexa  $\{f_n\}$  unha sucesión de Cauchy en  $L^\infty(X, \Sigma, \mu, B)$ , tal que  $\|f_n(x)\| \leq \|f_n\|$  para todo  $x \in X$  excepto nun conxunto de medida nula  $M$ . Do mesmo modo, tense que:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_B \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad (4.1)$$

para  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $x \in X \setminus M$ . Temos entón que a sucesión de elementos de  $B$  dada por  $\{f_n(x)\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $B$ , e por ser  $B$  un Banach, temos que é converxente en  $B$ . Definimos entón a función medible dada por:

$$f : x \in X \rightarrow f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & x \notin M. \\ 0, & x \in M \end{cases}$$

Sexa  $\epsilon > 0$ . Dado que  $\{f_n\}$  é de Cauchy en  $X \setminus M$ , temos que existe un índice  $k$  tal que se  $n, m \geq k$  entón:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Tomando límites cando  $m$  tende a infinito e tendo en conta a desigualdade 4.1, temos que se  $n \geq k$ :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_B < \epsilon, \quad \forall x \in X \setminus E$$

polo que  $\|f_n - f\| < \epsilon, \quad \forall n \geq M_\epsilon$ . É dicir, que  $\{f_n\}$  converxe a  $f$  en norma infinito. □

Antes de pasar a falar do espazo dual, rematamos cunhas propiedades relacionadas coa separabilidade dos espazos  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ .

**Teorema 4.7.** *Sexa  $(X, \Sigma, \mu)$  un espazo de medida e sexa  $B$  un espazo de Banach. Entón a familia de funcións simples Bochner integrables é densa en  $L^p$ , para  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demostración.*

Sexa  $f \in L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ . Por ser  $f$  fortemente medible, existe unha sucesión de funcións simples medibles  $\{\phi_n\}$  que podemos construír como na demostración do teorema de Bochner. Esta sucesión converge puntualmente á función  $f$  en  $B$  en case todo punto  $x \in X$ , e a súa norma está acotada en  $B$ :

$$\|\phi_n(x)\|_B \leq (1 + 1/2)\|f(x)\|_B, \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como as funcións da sucesión están en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$ , temos que, para case todo  $x \in X$ :

$$\|\phi_n(x) - f(x)\|_B^p \leq (2 + 1/2)^p \|f(x)\|_B^p$$

e, polo Teorema da Convergencia Dominada, tense que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|\phi_n(x) - f(x)\|_B^p d\mu = 0.$$

é dicir, que  $\{\phi_n\} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \Sigma, \mu, B)$  □

Basándonos en que o conxunto das funcións simples Bochner integrables é denso, pode demostrarse que baixo algunhas condicións os espazos  $L^p(X; B)$  se tratan de espazos separables. Aínda que non se vai incluír aquí esta demostración, é interesante enunciálo debido a que se trata dunha propiedade importante á hora de estudar estes espazos.

**Teorema 4.8.** *Se  $X$  e  $B$  son espazos separables e  $\mu$  é unha medida finita, entón  $L^p(X; B)$  é separable para  $1 \leq p < \infty$ .*

### 4.2.3. O espazo $L_w^p(X, \Sigma, \mu, B)$

Unha parte importante da teoría dos espazos de Lebesgue  $L^p$  consiste no estudo dos seus funcionais lineais. No caso escalar existe un coñecido resultado que nos permite identificar o espazo dos funcionais lineais en  $L^p$  co espazo de Lebesgue  $L^q$ : o Teorema de Representación de Riesz. Así, é natural preguntarse se esta identificación segue dándose nos espazos  $L^\infty(X, \Sigma, \mu, B)$  e existe un teorema análogo ao de Riesz. En efecto, como veremos a continuación, isto vai darse baixo certas condicións sobre o espazo de chegada  $B$ . Para iso, definamos o seguinte espazo:

**Definición 4.9.** Sexa  $(X, \Sigma, \mu)$  un espazo de medida,  $B$  un espazo de Banach e  $1 \leq p \leq \infty$ . Chamamos entón  $L_w^p(X; B')$  ao espazo das clases de equivalencia das funcións debilmente estrela medibles  $f : X \rightarrow B$  que cumpren que  $x \in X \rightarrow \|f(x)\| \in L^p(X; \mathbb{R})$ . A este espazo dotámolo coa norma

$$\|f\| = \left( \int \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \text{ess} \|f(x)\|, \quad p = \infty.$$

**Teorema 4.10** (Teorema de representación de Riesz). *Sexa  $(X, \Sigma, \mu)$  un espazo de medida finito, e  $B$  un espazo de Banach. Sexa  $1 \leq p < \infty$ , e  $q$  o seu expoñente conxugado.*

1. *Supoñamos que  $B$  é separable. Se  $T \in (L^p(X; B))'$ , entón existe un único  $v \in L_w^q(X; B')$  tal que*

$$T(u) = \int_X \langle v, u \rangle d\mu \quad (4.2)$$

*para cada  $u \in L^p(X; B)$ , e a norma de  $T$  concide con  $\|v\|$ . Ademais, cada funcional da forma 4.2, onde  $v \in L_w^q(X; B')$ , é un funcional linear acotado en  $L^p(X; B)$ .*

2. *Supoñamos que  $B$  é reflexivo. Se  $T \in (L^p(X; B))'$ , entón existe un único  $v \in L^q(X; B')$  tal que*

$$T(u) = \int_X \langle v, u \rangle d\mu \quad (4.3)$$

*para cada  $u \in L^p(X; B)$ , e a norma de  $T$  concide con  $\|v\|$ . Ademais, cada funcional da forma 4.3, onde  $v \in L^q(X; B')$ , é un funcional linear acotado en  $L^p(X; B)$ .*

**Corolario 4.11.** *Sexa  $(X, \Sigma, \mu)$  un espazo de medida finito,  $B$  un espazo de Banach reflexivo e  $p \in (1, \infty)$ . Entón o espazo  $L^p(X; B)$  é reflexivo.*

Para finalizar o capítulo, expoñemos un interesante resultado que nos mostra a relación que hai entre o espazo  $L^p(I; L^p(E))$ , definido neste tema, e o espazo de Lebesgue  $L^p(E \times I)$ , sendo  $I$  un intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $E$  un subconxunto medible de  $\mathbb{R}^N$ .

**Teorema 4.12.** *Sexa  $I \in \mathbb{R}$  un intervalo aberto,  $E \in \mathbb{R}^N$  un conxunto Lebesgue medible, e  $1 \leq p < \infty$ . Entón podemos identificar os espazos  $L^p(I; L^p(E))$  e  $L^p(E \times I)$ .*

*Demostración.* ■ Dado  $u \in L^p(E \times I)$ , polo Teorema de Fubini, a función  $t \in I \rightarrow \int_E |u(x, t)|^p dx$  é Lebesgue medible, con

$$\int_I \left( \int_E |u(x, t)|^p dx \right) dt = \|u\|_{L^p(E \times I)}^p < \infty,$$

do que se segue que  $\int_E |u(x, t)|^p dx < \infty$ , case para todo  $t \in I$ . Polo tanto, definindo  $v(t) = u(\cdot, t)$ , temos, polo teorema de Bochner, que  $v \in I \rightarrow L^p(E)$  con

$$\|v\|_{L^p(I; L^p(E))}^p = \int \|v(t)\|_{L^p(E)}^p dt = \int_I \int_E |u(x, t)|^p dx dt = \|u\|_{L^p(E \times I)}^p < \infty$$

co que se ten que  $v \in L^p(I; L^p(E))$ , con  $\|v\|_{L^p(I; L^p(E))} = \|u\|_{L^p(E \times I)}$ .

Se consideramos agora o operador linear

$$\begin{aligned} T : L^p(E \times I) &\rightarrow L^p(I; L^p(E)) \\ u &\mapsto v \end{aligned}$$

xa vimos que conservaba a norma e, polo tanto, é inxectivo. Identificando deste modo  $u$  con  $T(u)$ , temos o contido  $L^p(E \times I) \subseteq L^p(I; L^p(E))$ .

- Vexamos agora o outro contido. Dado  $v \in L^p(I; L^p(E))$  existirá unha sucesión  $\{s_n\}$  de funcións simples Bochner integrables  $s_n : I \rightarrow L^p(E)$  tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t) - v(t)\|_{L^p(E)} = 0$$

para case todo  $t \in I$ , e ademais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|s_n(t) - v(t)\|_{L^p(E)}^p dt = 0.$$

Escribimos logo

$$s_n = \sum_{i=1}^{m_n} u_{i,n} \chi_{E_{i,n}}$$

onde  $u_{i,n} \in L^p(E)$  e  $E_{i,n} \subseteq I$  son conxuntos medibles disxuntos dous a dous. Definimos

$$g_n(x, t) := \sum_{i=1}^{m_n} u_{i,n}(x) \chi_{E_{i,n}}(t)$$

onde  $x \in E$  e  $t \in I$ . Deste modo, cada  $g_n : E \times I \rightarrow \mathbb{R}$  é Lebesgue medible, pois é suma e produto de funcións Lebesgue medibles. Ademais, tense que

$$\begin{aligned} \|s_n\|_{L^p(I; L^p(E))}^p &= \int_I \|s_n(t)\|_{L^p(E)}^p dt \\ &= \int_I \left( \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{E_{i,n}}(t) \int_E |u_{i,n}(x)|^p dx \right) dt \\ &= \|g_n\|_{L^p(E \times I)}^p. \end{aligned}$$

De maneira similar, podemos comprobar que  $\|s_n - s_m\|_{L^p(I; L^p(E))} = \|g_n - g_m\|_{L^p(E \times I)}$ . Como  $s_n \rightarrow v$  en  $L^p(I; L^p(E))$ , temos que  $\{s_n\}$  é unha sucesión de Cauchy en

$L^p(I; L^p(E))$ . Como consecuencia, tense que  $\{g_n\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $L^p(E \times I)$ , e por ser este completo, existirá  $u \in L^p(E \times I)$  tal que  $g_n \rightarrow u$  en  $L^p(E \times I)$ .

Agora ben, como  $T(g_n) = s_n$ , e da primeira parte do teorema temos que  $L^p(E \times I) \subseteq L^p(I; L^p(E))$ , podemos concluir que  $T(u) = v$ , co que remata a demostración.  $\square$

Toda a teoría de integración que vimos neste traballo, así como a xeralización dos coñecidos espazos  $L^p$ , adquire unha gran importancia á hora de estudar uns espazos coñecidos como espazos de Sobolev. Neste traballo non abarcamos este tema, pero é interesante mencionalos dado que serán os subespazos de  $L^p(X; B)$  onde se tratará de buscar solucións a problemas con ecuacións diferenciais.

Deste modo, unha posible maneira de continuar despois de estudar a Integral de Bochner e os Espazos  $L^p(X; B)$  é introducir o concepto de Espazo de Sobolev, e estudar que propiedades fundamentais dos espazos  $L^p(X; B)$  hereda, como a completitude ou a reflexividade. Isto permitirá desenvolver as ferramentas necesarias para estudar a existencia de solucións de problemas de ecuacións diferenciais. Un exemplo de ecuación cuxas solucións se buscan en espazos de Sobolev é o seguinte:

Sexa  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un dominio con fronteira suficientemente regular. Se consideramos  $B = H_0^1(\Omega)$  (espazo de Sobolev),  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2((0, T), \mathcal{L}, m, L^2(\Omega))$ , onde  $\mathcal{L}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue e  $m$  é a medida de Lebesgue en  $(0, T)$  e  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , podemos buscar a solución da ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = u_0, & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

en el espacio  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ , donde,  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) = L^2((0, T), \mathcal{L}, m, H_0^1(\Omega))$ .

# Bibliografía

- [Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley-Interscience, 1 edition.
- [Bruckner, 2008] Bruckner, Andrew M.; Bruckner, J. B. T. B. S. (2008). *Real Analysis: Second Edition*. 2008. ClassicalRealAnalysis.com; CreateSpace, 2ed. free web draft edition.
- [D.S., 1970] D.S., M. (1970). *Analytic inequalities*. Springer.
- [Leoni, 2017] Leoni, G. (2017). *A first course in Sobolev spaces*, volume 181 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.
- [Rudin, 1986] Rudin, W. (1986). *Real and complex analysis*. MGH, 3 edition.
- [Yosida, 1995] Yosida, K. (1995). *Functional analysis*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the sixth (1980) edition.