



ESCUELA DE DOCTORADO
INTERNACIONAL DE LA USC

Álvaro
Carballido Costas

Tesis doctoral

Dinámica del flujo horocíclico
para foliaciones hiperbólicas
transversalmente homogéneas

Santiago de Compostela, 2023

Programa de doctorado en Matemáticas

TESIS DOCTORAL

DINÁMICA DEL FLUJO HOROCÍCLICO PARA FOLIACIONES HIPERBÓLICAS TRANSVERSALMENTE HOMOGÉNEAS

Autor

Álvaro Carballido Costas

Director: Fernando Alcalde Cuesta

Tutor/a: Fernando Alcalde Cuesta

D./Dña. **Fernando Alcalde Cuesta**

En condición de: **Director/a**

Título de la tesis: **Dinámica del flujo horocíclico para foliaciones hiperbólicas transversalmente homogéneas**

INFORMA:

Que la presente tesis, se corresponde con el trabajo realizado por D/Dña **Álvaro Carballido Costas**, bajo mi dirección/tutorización, y autorizo su presentación, considerando que reúne los requisitos exigidos en el Reglamento de Estudios de Doctorado de la USC, y que como director/tutor de esta no incurre en las causas de abstención establecidas en la Ley 40/2015.

En Santiago de Compostela, 11 de septiembre de 2023

Firma electrónica

Esta tesis ha sido realizada con la financiación del *Programa de axudas á etapa predoutoral 2020 – Modalidade B*, convocadas en la orden del 20 de diciembre de 2019, y publicadas en el *Diario Oficial de Galicia* el 6 de febrero de 2020, por la *Consellería de Educación, Universidade e Formación Profesional* de la *Xunta de Galicia*.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	5
INTRODUCCIÓN	7
OBJETIVOS	15
METODOLOGÍA	17
RESULTADOS	19
1. Preliminares de geometría hiperbólica	23
1.1. El plano hiperbólico	23
1.2. Clasificación de las isometrías	25
1.3. Grupos fuchsianos no elementales	27
1.4. Conjunto límite de un subgrupo normal	29
1.5. Acciones proyectiva y lineal	30
1.6. Órbitas densas de la acción lineal	33
1.7. Superficies de curvatura negativa	35
2. Teorema de Hedlund clásico	39
2.1. Fibrado tangente unitario	39
2.2. Flujos geodésico y horocíclico	40
2.3. Teorema de Hedlund y principio de dualidad	42
2.4. Conjunto no errante del flujo horocíclico	43
2.5. Teorema de Eberlein	46
2.6. Pruebas de los teoremas de Hedlund y Eberlein	47
2.7. Dinámica del flujo horocíclico en superficies	49
2.7.1. Caso geométricamente finito	50
2.7.2. Caso geoméricamente infinito	51
3. Variedades y fibrados foliados	55
3.1. Foliaciones	55
3.2. Suspensiones	59
3.3. Holonomía de una suspensión	62

3.4. Foliaciones por superficies hiperbólicas	63
3.5. Flujos foliados	64
3.6. Hipótesis de minimalidad de la foliación	65
3.7. Principio de dualidad foliado	65
4. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie homogéneas	67
4.1. Foliaciones de Lie	67
4.2. Uniformización de las foliaciones de Lie	69
4.3. Foliaciones de Lie homogéneas	70
4.4. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie homogéneas	73
4.5. Foliaciones de Lie homogéneas no minimales	78
5. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie	79
5.1. Foliaciones no homogéneas	79
5.2. Casi-acción	80
5.3. Acción sobre el borde	84
5.4. Conjugación	85
5.5. Círculo universal de una foliación de Lie	87
5.6. Minimalidad de la acción afín	89
5.7. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie	94
6. Representaciones lineales y proyectivas	99
6.1. Atractores del flujo horocíclico	99
6.1.1. Caso de una superficie	99
6.1.2. Caso foliado	101
6.2. Acciones proximales	101
6.3. Representaciones no inyectivas	102
6.4. Representaciones inyectivas en $PSL(2, \mathbb{R})$	104
6.5. Caso general: dinámica de la acción afín	108
6.6. Caso general: dinámica del flujo horocíclico	112
6.7. Minimales y atractores	114
6.8. Representaciones kleinianas	118
APÉNDICES	123
A. Acciones propiamente discontinuas	123
CONCLUSIONES	127
BIBLIOGRAFÍA	129

Agradecimientos

Quisiera dedicar unas palabras de agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho posible que esta tesis salga a la luz.

Es de rigor comenzar con mi director de tesis, Fernando Alcalde. Su ayuda a lo largo de toda la tesis ha sido excepcional. En los momentos complicados, en los que no me sentía capaz de probar los resultados que buscábamos, su tenacidad ha sido la clave para que lo siguiera intentando. Esta tesis es fruto de esa insistencia.

Las personas que menciono a continuación han sido fundamentales en mi vida estos últimos años. Su principal aportación a este trabajo ha sido no hacerme pensar en matemáticas cuando he estado en su compañía. Desde mis amigos de siempre: Ángel, Daniel, Eva, Nicolas, Tatiana, etc.; pasando por los que he hecho durante la carrera: Diego, Noelia, Santiago, etc.; hasta mis compañeros de piso: Clara, Rodrigo, Gabriel, Nacho y los dos Álex, queda por escrito mi aprecio por todos ellos.

Ya por último, una mención especial a mi familia. A ella le debo todo lo que soy. Los buenos momentos con mi hermana han sido muchos estos años, aunque haya sido mi crítica más implacable. Imposible no mencionar a mis padres, de los que destacar algo en concreto desmerecería todo lo que han hecho por mí desde siempre. Creo que mis abuelos nunca llegaron a entender a lo que me dedicaba y aun así siempre me apoyaron, con eso queda todo dicho. Infinitas gracias a todos ellos.

Álvaro

Resumen

En esta tesis estudiamos la dinámica del flujo horocíclico en foliaciones transversalmente homogéneas, centrándonos en dos tipos: las foliaciones transversalmente de Lie y las suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos.

La minimalidad del flujo horocíclico es conocida en foliaciones de Lie homogéneas bajo las hipótesis naturales de minimalidad de la foliación y de compacidad de la variedad ambiente. A partir de la casi-acción del grupo fundamental de la variedad ambiente, construimos el círculo universal en el sentido de Thurston a una foliación de Lie. Usamos el círculo universal para probar la minimalidad del flujo horocíclico en foliaciones de Lie no homogéneas bajo la hipótesis adicional de no trivialidad de las hojas de la foliación.

En el caso de suspensiones de representaciones lineales, nos interesamos por la existencia y unicidad de conjuntos minimales de la acción afín y del flujo horocíclico, independientemente de la compacidad de la variedad ambiente. En función de las características de la representación, estudiamos diferentes casos particulares que nos permiten obtener resultados generales sobre la existencia y unicidad de minimales bajo ciertas condiciones de irreducibilidad fuerte y proximalidad de la representación.

Introducción

El estudio de la dinámica del flujo geodésico en superficies se remonta a finales del siglo XIX. Autores como J. Hadamard [43] y H. Poincaré [73] se interesaron por el estudio de geodésicas en superficies de curvatura negativa, la existencia de geodésicas recurrentes y no periódicas en superficies de curvatura negativa fue probada por M. Morse [67] con técnicas que iniciaron el campo hoy conocido como dinámica simbólica. Por otro lado, las geodésicas densas, también llamadas *transitivas*, fueron estudiadas por G. D. Birkhoff [13] en el caso de superficies compactas de curvatura negativa.

Las superficies de curvatura constante igual a -1 se llaman *superficies hiperbólicas* y se obtienen como cociente $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ del plano de Poincaré \mathbb{H} por la acción de un subgrupo discreto y sin torsión Γ del grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ de las isometrías de \mathbb{H} que conservan la orientación. Estos grupos se llaman *fuchsianos* y sus propiedades determinan propiedades dinámicas del flujo geodésico como mostraron autores como E. Artin [7], G. A. Hedlund [53], P. Koebe [57], J. Nielsen [69, 70], etc.

Sobre las superficies hiperbólicas se puede definir otro flujo cuyas propiedades despertaron gran interés en la década de 1930: el *flujo horocíclico*. Los horociclos son la familia de curvas en \mathbb{H} formada por las rectas horizontales y las circunferencias (euclidianas) tangentes al borde en el infinito $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dado un vector en el tangente unitario $T^1\mathbb{H}$, su transporte paralelo a lo largo del horociclo que determina define un flujo sobre $T^1\mathbb{H}$ llamado *flujo horocíclico*. Su paso al cociente define un nuevo flujo sobre el tangente unitario a la superficie $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ que se sigue llamado *flujo horocíclico* y se denota por

$$h_{\mathbb{R}} : T^1S \rightarrow T^1S.$$

Fueron G. A. Hedlund [52] y E. Hopf [54] los primeros en estudiar las propiedades dinámicas de este nuevo flujo. El auge de la teoría ergódica en aquellos años hizo que los autores se centraran principalmente por el estudio de la transitividad, destacando el artículo seminal de Hedlund [52], en el que prueba su conocido teorema:

Teorema de Hedlund. *Si S es una superficie hiperbólica compacta, entonces el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ sobre T^1S es minimal, es decir, todas sus órbitas son densas.*

Es más, en ese mismo artículo, Hedlund se interesa por un caso más general que el compacto: el caso de superficies hiperbólicas de área finita. Para este tipo de superficies el autor prueba que las órbitas del flujo horocíclico, o bien son periódicas, o bien son densas en T^1S .

Las pruebas que presenta Hedlund en su artículo son puramente geométricas, estudiando las propiedades de los horociclos en el plano de Poincaré \mathbb{H} bajo la acción del grupo fuchsiano Γ . Sin embargo, ya utiliza las propiedades de los puntos límite de Γ para deducir propiedades dinámicas del

flujo horocíclico. En particular, relaciona las órbitas periódicas del flujo horocíclico con los puntos fijos de transformaciones parabólicas en Γ .

Cuatro décadas más tarde, en un artículo de 1977, P. Eberlein usa la misma aproximación que Hedlund para generalizar sus resultados (véase [31]). Eberlein define los puntos *horocíclicos* en $L(\Gamma)$ como los puntos en el infinito $u(+\infty)$ de geodésicas $u(t) \in \mathbb{H}$ que se proyectan sobre la superficie S en geodésicas casi-minimizantes. Al restringir el flujo horocíclico al conjunto no errante $\Omega_h(S)$ prueba la siguiente caracterización:

Teorema de Eberlein. *Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica y $x = \Gamma.u \in T^1S$. Entonces, la órbita $h_{\mathbb{R}}(x)$ es densa en $\Omega_h(S)$ si y sólo si el punto $u(+\infty)$ es horocíclico en $L(\Gamma)$.*

Una vez conocida la dinámica correspondiente a los puntos límite parabólicos y horocíclicos, restaba estudiar si hay más tipos de puntos límite y las propiedades de sus $h_{\mathbb{R}}$ -órbitas. Las superficies geoméricamente finitas no admiten otros tipos de puntos límite que los citados, por lo que la dinámica del flujo horocíclico está completamente determinada. El caso geoméricamente infinito es más complejo y todavía hay cuestiones abiertas sobre la dinámica del flujo horocíclico en este tipo de superficies. En particular, la existencia de conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales es un campo de estudio fértil del cual presentamos los resultados más importantes en la sección 2.7.

Volviendo a la década de 1970, H. Furstenberg prueba en [35] la unicidad ergódica del flujo horocíclico. En este trabajo, Furstenberg se sirve de la idea de *equivalencia* o *dualidad* entre el flujo horocíclico sobre $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ y la acción lineal de Γ . El difeomorfismo $T^1\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})$ permite identificar el tangente unitario $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ con la variedad homogénea $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. De este modo, el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ se reduce a la acción natural por la derecha $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ del grupo unipotente

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

La acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ es equivalente o dual a la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \{\pm Id\}$ inducida por la acción natural $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La equivalencia de Furstenberg es un caso particular de la *equivalencia de pseudogrupos* introducida por A. Haefliger en [47], aunque presente en [45], y de la *equivalencia de grupoides* introducida en [68], ambas usadas en teoría de foliaciones durante varias décadas por autores como R. Sacksteder [77], J. F. Plante [71] o G. Hector y U. Hirsch [50]. Este tipo de equivalencia también ha sido usada de modo más o menos explícito para el estudio topológico y medible de los flujos geodésico y horocíclico por autores como M. Burger [19], T. Roblin [76], V. A. Kaimanovich [55] o M. Babillot, F. Ledrappier y O. Sarig [8, 9, 59]. La dualidad de Furstenberg aparece explícitamente descrita por F. Dal'Bo en [27] bajo el nombre *aproximación vectorial*. La usaremos a lo largo de todo este trabajo.

Una variedad foliada (M, \mathcal{F}) es una variedad M junto con una descomposición \mathcal{F} de M en subvariedades inmersas llamadas hojas de la foliación que verifican una condición de trivialidad local. Su fibrado tangente unitario (Y, \mathcal{F}_Y) es una nueva variedad foliada cuyas hojas son los tangentes unitarios a las hojas de \mathcal{F} . Si se dota a las hojas de una métrica riemanniana completa, se puede definir el flujo geodésico foliado $g_{\mathbb{R}}$ sobre Y sin más que hacerlo hoja a hoja.

Si todas las hojas de la foliación \mathcal{F} son superficies hiperbólicas, las hojas de la foliación \mathcal{F}_Y son variedades homogéneas $T^1L = \Gamma_L \backslash T^1\mathbb{H}$, donde Γ_L es un grupo fuchsiano, en principio distinto para cada hoja L de \mathcal{F} . De nuevo, el *flujo horocíclico foliado* $h_{\mathbb{R}} : Y \rightarrow Y$ se obtiene pegando los flujos horocíclicos hoja a hoja.

Fueron M. Martínez y A. Verjovsky los primeros en interesarse por la dinámica del flujo horocíclico foliado. El objetivo principal era obtener un resultado análogo al teorema de Hedlund clásico en el caso foliado asumiendo dos hipótesis naturales: la compacidad de la variedad M y la minimalidad de la foliación \mathcal{F} .

En 2016 aparecieron tres trabajos [3, 61, 64] en los que se aborda el estudio de la minimalidad del flujo horocíclico foliado:

(1) En [61], M. Martínez, S. Matsumoto y A. Verjovsky muestran condiciones sobre la foliación \mathcal{F} que garantizan la existencia de una órbita densa del flujo horocíclico. La primera condición es la minimalidad de la acción del grupo afín

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre el tangente unitario Y . La minimalidad de la foliación \mathcal{F} no es suficiente para garantizar la B -minimalidad, como bien se demuestra en [61], sino que depende de la naturaleza de la foliación \mathcal{F} . En el mismo artículo, los autores dan condiciones suficientes que garantizan la B -minimalidad.

(2) En [3], F. Alcalde, F. Dal'Bo, M. Martínez y A. Verjovsky prueban la minimalidad del flujo horocíclico para foliaciones que poseen una hoja con un lazo esencial sin holonomía. En este caso la B -minimalidad no es suficiente para probar la $h_{\mathbb{R}}$ -minimalidad y es necesario usar la condición sobre la hoja para encontrar una $h_{\mathbb{R}}$ -órbita densa y obtener el resultado.

(3) En [64], S. Matsumoto muestra que la minimalidad del flujo horocíclico es equivalente a la B -minimalidad bajo una hipótesis adicional sobre la topología de las hojas de \mathcal{F} .

Una característica común a los tres trabajos es la necesidad de suponer que las hojas de la foliación \mathcal{F} poseen una topología no trivial. En particular, los resultados de B -minimalidad y U -minimalidad no se aplican a foliaciones por planos hiperbólicos. Como vemos, al igual que ocurre con las superficies, no es esperable un teorema general que garantice la minimalidad del flujo horocíclico foliado para cualquier variedad foliada y es por ello que se buscan pruebas de dicha minimalidad para ciertas familias.

En [1], F. Alcalde y F. Dal'Bo prueban la minimalidad del flujo horocíclico en foliaciones de Lie homogéneas y compactas sin hipótesis adicionales sobre la topología de las hojas. De acuerdo con E. Ghys en [66, Appendix E], este tipo de foliaciones se construyen del siguiente modo: dado un grupo de Lie G y un subgrupo discreto Γ del grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$, la foliación horizontal sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ define una foliación \mathcal{F}_Γ sobre la variedad cociente

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G).$$

La variedad foliada (Y, \mathcal{F}_Γ) es el fibrado tangente unitario a la foliación de Lie \mathcal{F} sobre la variedad

$$M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G)$$

inducida por \mathcal{F}_Γ . De hecho, Γ es un grupo fuchsiano en $PSL(2, \mathbb{R})$ que actúa diagonalmente sobre $\mathbb{H} \times G$ por medio de una representación $h : \Gamma \rightarrow G$ llamada *representación de holonomía*. La estructura algebraica de Y permite caracterizar el flujo horocíclico como la acción por la derecha sobre el primer factor

$$\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U$$

del grupo unipotente U . Esta caracterización algebraica del flujo horocíclico es clave en la prueba de su minimalidad presentada en [1] y lo será en nuestro estudio en el caso de las foliaciones de Lie no homogéneas.

Al considerar sobre la variedad Y la métrica inducida por la métrica de Haar de $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$, las hojas de la foliación \mathcal{F}_Y están todas a una distancia localmente constante. Esto significa que las foliaciones de Lie homogéneas forman parte de las foliaciones riemannianas introducidas por S. Reinhart [75] (véase también [40, 66]). Un resultado reciente [4] prueba que el flujo horocíclico definido sobre cualquier foliación riemanniana es minimal y únicamente ergódico (lo que Furstenberg llama únicamente ergódico en [34]). La demostración usa un teorema de Y. Coudène [26] basado en el teorema ergódico de Von Neumann y plantea naturalmente la cuestión de una prueba elemental similar a la de [1] en el caso homogéneo.

Recientemente C. Bonatti, A. Eskin y A. Wilkinson han estudiado en [15] otro tipo de suspensión

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$$

definida por una representación lineal $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$. En concreto, han demostrado la unicidad ergódica del flujo horocíclico. Otros ejemplos *transversalmente proyectivos* habían sido estudiados en [1].

Las foliaciones transversalmente de Lie y transversalmente proyectivas forman parte de la familia de las foliaciones *transversalmente homogéneas*, estudiadas por R. A. Blumenthal quien demuestra un teorema de estructura en [14].

La idea inicial de la tesis era estudiar la dinámica del flujo horocíclico en las foliaciones transversalmente homogéneas, pero ha sido necesario reducirse al caso transversalmente de Lie, homogéneo o no, y a las suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos cocompactos o no.

La tesis contiene tres bloques diferentes. Un primer bloque, formado por los tres primeros capítulos, está dedicado a generalidades sobre la geometría hiperbólica, el flujo horocíclico sobre superficies y las variedades foliadas.

En el primer capítulo, una vez presentadas propiedades básicas de los grupos fuchsianos Γ y su conjunto límite $L(\Gamma)$, se estudian la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ y la acción lineal

$$\Gamma \curvearrowright E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \{\pm Id\},$$

para la que se prueba la existencia de una órbita densa. La equivalencia de Furstenberg permitirá traducir más tarde este resultado mostrando que el flujo horocíclico en una superficie hiperbólica es transitivo si el grupo Γ es no elemental. La noción de superficie hiperbólica y su relación con las superficies de curvatura negativa se presentan al final de este capítulo.

En el segundo capítulo se recuerda la definición geométrica y algebraica de los flujos geodésico y horocíclico sobre una superficie hiperbólica. En concreto, definimos el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ sobre el tangente unitario $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ a una superficie hiperbólica $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, como la acción por la derecha

$$\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$$

del grupo unipotente U . Bajo el nombre de *principio de dualidad*, se explicita, en el contexto topológico, la equivalencia usada por Furstenberg. Como se ha comentado, esto permite probar que el flujo horocíclico de una superficie hiperbólica es transitivo si su grupo fundamental es no

elemental, pero sobre todo nos va a permitir obtener demostraciones elementales de los teoremas de Hedlund y Eberlein mencionados antes.

El tercer capítulo está dedicado a generalidades sobre variedades foliadas y en concreto al concepto de foliación \mathcal{F} por superficies hiperbólicas. En este caso, gracias a los teoremas de uniformización de A. Candel [22] y A. Verjovsky [87], los tangentes unitarios a las hojas de \mathcal{F} son variedades homogéneas $\Gamma_L \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, donde Γ_L es un grupo fuchsiano sin torsión. Esto nos permite definir el flujo horocíclico foliado como acción global

$$Y = T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$$

del grupo unipotente U sobre el tangente unitario Y a la foliación \mathcal{F} . Presentamos en este capítulo el principio de dualidad foliado, clave en lo que resta de tesis, y que asegura que las propiedades de minimalidad del flujo horocíclico foliado están en correspondencia con las propiedades de minimalidad de la acción

$$\Gamma \curvearrowright Y/U.$$

En general, la acción $\Gamma \curvearrowright Y/U$ es tan difícil de estudiar como el flujo horocíclico, pero bajo ciertas condiciones esta acción admite una descripción más sencilla.

El segundo bloque está dedicado al estudio de la dinámica del flujo horocíclico en foliaciones (transversalmente) de Lie.

Dedicamos el cuarto capítulo a la presentación de este tipo de foliaciones junto con sus propiedades básicas y a recordar la demostración del teorema de Hedlund foliado para las foliaciones de Lie homogéneas probado en [1]. La demostración se basa en la prueba de la B -minimalidad y el uso de la compacidad para obtener la U -minimalidad usando argumentos algebraicos. Como se ha dicho antes, el objetivo de este bloque es extender esta prueba a una foliación de Lie arbitraria \mathcal{F} sobre una variedad compacta M sin necesidad de recurrir a los argumentos ergódicos usados en [4]

En [51], G. Hector, S. Matsumoto y G. Meigniez introducen el concepto de *casi-acción* del grupo fundamental $\Gamma = \pi_1(M)$ para obtener una acción sobre el espacio de finales de la hoja tipo. En el quinto capítulo demostramos que la casi-acción proporciona una acción de Γ sobre el borde en el infinito $\partial\mathbb{H}$ que combinada con la representación de holonomía $h : \Gamma \rightarrow G$ define una acción diagonal

$$* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

conjugada a la acción inducida

$$\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

por la acción natural

$$\cdot : \Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G.$$

De este modo obtenemos el *círculo universal* en el sentido de W. P. Thurston de una foliación de Lie.

Esta construcción es clave para demostrar el teorema de Hedlund foliado en lo que resta de capítulo. El principio de dualidad foliado nos dice que la B -acción sobre $Y = T^1\mathcal{F}$ es minimal. Como Γ no es un grupo fuchsiano, el estudio de la dinámica del flujo horocíclico es más difícil que en el caso homogéneo. Por ello, la demostración de la U -minimalidad exige suponer que la topología de la hoja tipo, al igual que en [3, 61, 64], es no trivial. No obstante, la ventaja de esta aproximación es que podría aplicarse al estudio de foliaciones de Lie sobre variedades no necesariamente compactas.

En realidad, el paso de variedades compactas a variedades de volumen finito o infinito será habitual en el tercer bloque de la tesis. Este bloque está dedicado al estudio de la dinámica del flujo horocíclico en un tipo particular de foliaciones transversalmente proyectivas, a saber, las suspensiones de representaciones lineales $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ de grupos fuchsianos no elementales.

En el sexto capítulo nos interesamos por la existencia y unicidad de conjuntos B -minimales y U -minimales en la variedad foliada

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1}),$$

donde Γ actúa de modo diagonal por medio de la representación h . La dualidad de Furstenberg reduce el problema a la existencia y unicidad de minimales para las acciones de Γ sobre $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ y $E \times \mathbb{R}P^{n-1}$ respectivamente.

La existencia y unicidad de un minimal para la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1}$ ha sido demostrada por J.-P. Conze y Y. Guivarc'h en [25] bajo dos condiciones:

(H1) irreducibilidad fuerte,

(H2) proximalidad.

Algunas ideas de dicha prueba van a ser útiles en el contexto foliado.

A continuación abordamos el estudio de varios casos en función de las características de la representación $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$:

(1) **Representaciones no inyectivas:** probamos de modo elemental que existe un conjunto U -minimal \mathcal{M}_U en Y si Γ es un grupo convexo-cocompacto y h verifica las condiciones (H1) y (H2). Si además el conjunto minimal $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces \mathcal{M}_U es de hecho el único U -minimal en el conjunto no errante del flujo horocíclico.

(2) **Representaciones inyectivas en $PSL(2, \mathbb{R})$:** distinguimos dos casos dependiendo de si la imagen de la representación $h(\Gamma)$ es discreta o densa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

(2.1) Si Γ es convexo-cocompacto y el grupo $h(\Gamma)$ es discreto, existe una aplicación continua

$$\varphi : L(\Gamma) \rightarrow L(h(\Gamma))$$

llamada *aplicación de Nielsen*, que nos permite construir el único conjunto U -minimal que hay en Y .

(2.2) Si el grupo $h(\Gamma)$ es denso, $h(\Gamma)$ contiene un elemento elíptico de orden infinito, que permite deducir la existencia y unicidad de un conjunto B -minimal. Con la hipótesis añadida de la cocompacidad de Γ , probamos la minimalidad del flujo horocíclico en Y aplicando un resultado de S. Matsumoto [64].

A partir de estos casos particulares es posible obtener varios resultados generales sobre existencia y unicidad de minimales para las acciones de B y de U .

En primer lugar, usando ideas similares a las de [25], si la representación $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ verifica las condiciones (H1) y (H2), podemos construir explícitamente el único conjunto B -minimal de Y , suponiendo que la representación es no inyectiva o indiscreta. En realidad, probamos que existe un único conjunto B -minimal si h satisface únicamente (H1) y (H2). No obstante, este resultado no proporciona una descripción explícita del conjunto B -minimal como en los casos particulares. Esta

descripción, necesaria para demostrar que es U -minimal si Γ es convexo-cocompacto, se debe a F. Alcalde y F. Dal'Bo [2].

La cuestión de la unicidad es tratada en cada caso analizando si el conjunto U -minimal es un U -atractor. Si la representación h es no inyectiva o indiscreta, el conjunto U -minimal es un U -atractor si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Luego tendremos unicidad o no dependiendo de que $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$ o no.

El caso de las representaciones fuchsianas y kleinianas nos interesa particularmente. En concreto, siguiendo un trabajo de J. W. Cannon y W. P. Thurston [82], construimos una 3-variedad hiperbólica que fibra sobre el círculo y una aplicación de Nielsen continua y sobreyectiva

$$\varphi : L(\Gamma) = \partial\mathbb{H} \rightarrow L(\Lambda) = \partial\mathbb{H}^3,$$

donde Γ es un grupo fuchsiano y Λ un grupo kleiniano. El grafo de la aplicación de Nielsen determina por dualidad un conjunto B -minimal en $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}^3)$ que es un U -atractor y por consiguiente el único U -minimal de Y .

Objetivos

La idea inicial de la tesis era estudiar la dinámica del flujo horocíclico en las foliaciones transversalmente homogéneas, pero ha sido necesario reducirse al caso transversalmente de Lie, homogéneo o no, y a las suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos cocompactos o no.

Para el caso de foliaciones de Lie, el objetivo principal es probar la minimalidad del flujo horocíclico en el caso no homogéneo, bajo las condiciones habituales de minimalidad de la foliación y compacidad de la variedad ambiente.

Para el caso de representaciones lineales, el objetivo es el estudio de la existencia y unicidad de conjuntos minimales para la acción afín y para el flujo horocíclico, independientemente de la compacidad de la variedad ambiente.

Metodología

La metodología usada para la elaboración de esta tesis ha sido la habitual en trabajos de investigación puramente teóricos.

Un primer periodo lo he dedicado al estudio y comprensión del objetivo de la tesis a través de conversaciones con mi director de tesis y la lectura de la bibliografía básica sobre el tema. Esto me ha permitido conocer las ideas y técnicas que otros autores han usado para resolver cuestiones similares a las planteadas en esta tesis.

Los resultados obtenidos han sido fruto de la combinación de ideas propias y ajenas, a partir de una investigación individual continuamente apoyada por las discusiones con mi director de tesis.

Resultados

La tesis contiene tres bloques diferentes. Un primer bloque, formado por los tres primeros capítulos, está dedicado a generalidades sobre la geometría hiperbólica, el flujo horocíclico sobre superficies y las variedades foliadas.

En el primer capítulo, una vez presentadas propiedades básicas de los grupos fuchsianos Γ y su conjunto límite $L(\Gamma)$, se estudian la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ y la acción lineal

$$\Gamma \curvearrowright E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \{\pm Id\},$$

para la que se prueba la existencia de una órbita densa. La equivalencia de Furstenberg permitirá traducir más tarde este resultado mostrando que el flujo horocíclico en una superficie hiperbólica es transitivo si el grupo Γ es no elemental. La noción de superficie hiperbólica y su relación con las superficies de curvatura negativa se presentan al final de este capítulo.

En el segundo capítulo se recuerda la definición geométrica y algebraica de los flujos geodésico y horocíclico sobre una superficie hiperbólica. En concreto, definimos el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ sobre el tangente unitario $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ a una superficie hiperbólica $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, como la acción por la derecha

$$\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$$

del grupo unipotente U . Bajo el nombre de *principio de dualidad*, se explicita, en el contexto topológico, la equivalencia usada por Furstenberg. Como se ha comentado, esto permite probar que el flujo horocíclico de una superficie hiperbólica es transitivo si su grupo fundamental es no elemental, pero sobre todo nos va a permitir obtener demostraciones elementales de los teoremas de Hedlund y Eberlein mencionados antes.

El tercer capítulo está dedicado a generalidades sobre variedades foliadas y en concreto al concepto de foliación \mathcal{F} por superficies hiperbólicas. En este caso, gracias a los teoremas de uniformización de A. Candel [22] y A. Verjovsky [87], los tangentes unitarios a las hojas de \mathcal{F} son variedades homogéneas $\Gamma_L \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, donde Γ_L es un grupo fuchsiano sin torsión. Esto nos permite definir el flujo horocíclico foliado como acción global

$$Y = T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$$

del grupo unipotente U sobre el tangente unitario Y a la foliación \mathcal{F} . Presentamos en este capítulo el principio de dualidad foliado, clave en lo que resta de tesis, y que asegura que las propiedades de minimalidad del flujo horocíclico foliado están en correspondencia con las propiedades de minimalidad de la acción

$$\Gamma \curvearrowright Y/U.$$

En general, la acción $\Gamma \curvearrowright Y/U$ es tan difícil de estudiar como el flujo horocíclico, pero bajo ciertas condiciones esta acción admite una descripción más sencilla.

El segundo bloque está dedicado al estudio de la dinámica del flujo horocíclico en foliaciones (transversalmente) de Lie.

Dedicamos el cuarto capítulo a la presentación de este tipo de foliaciones junto con sus propiedades básicas y a recordar la demostración del teorema de Hedlund foliado para las foliaciones de Lie homogéneas probado en [1]. La demostración se basa en la prueba de la B -minimalidad y el uso de la compacidad para obtener la U -minimalidad usando argumentos algebraicos. Como se ha dicho antes, el objetivo de este bloque es extender esta prueba a una foliación de Lie arbitraria \mathcal{F} sobre una variedad compacta M sin necesidad de recurrir a los argumentos ergódicos usados en [4]

En [51], G. Hector, S. Matsumoto y G. Meigniez introducen el concepto de *casi-acción* del grupo fundamental $\Gamma = \pi_1(M)$ para obtener una acción sobre el espacio de finales de la hoja tipo. En el quinto capítulo demostramos que la casi-acción proporciona una acción de Γ sobre el borde en el infinito $\partial\mathbb{H}$ que combinada con la representación de holonomía $h : \Gamma \rightarrow G$ de la foliación de Lie define una acción diagonal

$$* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

conjugada a la acción inducida

$$\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

por la acción natural

$$\cdot : \Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G.$$

De este modo obtenemos el *círculo universal* en el sentido de W. P. Thurston de una foliación de Lie.

Esta construcción es clave para demostrar el teorema de Hedlund foliado en lo que resta de capítulo. El principio de dualidad foliado nos dice que la B -acción sobre $Y = T^1\mathcal{F}$ es minimal. Como Γ no es un grupo fuchsiano, el estudio de la dinámica del flujo horocíclico es más difícil que en el caso homogéneo. Por ello, la demostración de la U -minimalidad exige suponer que la topología de la hoja tipo, al igual que en [3, 61, 64], es no trivial. No obstante, la ventaja de esta aproximación es que podría aplicarse al estudio de foliaciones de Lie sobre variedades no necesariamente compactas.

En realidad, el paso de variedades compactas a variedades de volumen finito o infinito será habitual en el tercer bloque de la tesis. Este bloque está dedicado al estudio de la dinámica del flujo horocíclico en un tipo particular de foliaciones transversalmente proyectivas, a saber, las suspensiones de representaciones lineales $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ de grupos fuchsianos no elementales.

En el sexto capítulo nos interesamos por la existencia y unicidad de conjuntos B -minimales y U -minimales en la variedad foliada

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1}),$$

donde Γ actúa de modo diagonal por medio de la representación h . La dualidad de Furstenberg reduce el problema a la existencia y unicidad de minimales para las acciones de Γ sobre $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ y $E \times \mathbb{R}P^{n-1}$ respectivamente.

La existencia y unicidad de un minimal para la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1}$ ha sido demostrada por J.-P. Conze y Y. Guivarc'h en [25] bajo dos condiciones:

(H1) irreducibilidad fuerte,

(H2) proximalidad.

Algunas ideas de dicha prueba van a ser útiles en el contexto foliado.

A continuacion abordamos el estudio de varios casos en función de las características de la representación $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$:

(1) **Representaciones no inyectivas:** probamos de modo elemental que existe un conjunto U -minimal \mathcal{M}_U en Y si Γ es un grupo convexo-cocompacto y h verifica las condiciones (H1) y (H2). Si además el conjunto minimal $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces \mathcal{M}_U es de hecho el único U -minimal en el conjunto no errante del flujo horocíclico.

(2) **Representaciones inyectivas en $PSL(2, \mathbb{R})$:** distinguimos dos casos dependiendo de si la imagen de la representación $h(\Gamma)$ es discreta o densa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

(2.1) Si Γ es convexo-cocompacto y el grupo $h(\Gamma)$ es discreto, existe una aplicación continua

$$\varphi : L(\Gamma) \rightarrow L(h(\Gamma))$$

llamada *aplicación de Nielsen*, que nos permite construir el único conjunto U -minimal que hay en Y .

(2.2) Si el grupo $h(\Gamma)$ es denso, $h(\Gamma)$ contiene un elemento elíptico de orden infinito, que permite deducir la existencia y unicidad de un conjunto B -minimal. Con la hipótesis añadida de la cocompacidad de Γ , probamos la minimalidad del flujo horocíclico en Y aplicando un resultado de S. Matsumoto [64].

A partir de estos casos particulares es posible obtener varios resultados generales sobre existencia y unicidad de minimales para las acciones de B y de U .

En primer lugar, usando ideas similares a las de [25], si la representación $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ verifica las condiciones (H1) y (H2), podemos construir explícitamente el único conjunto B -minimal de Y , suponiendo que la representación es no inyectiva o indiscreta. En realidad, probamos que existe un único conjunto B -minimal si h satisface únicamente (H1) y (H2). No obstante, este resultado no proporciona una descripción explícita del conjunto B -minimal como en los casos particulares. Esta descripción, necesaria para demostrar que es U -minimal si Γ es convexo-cocompacto, se debe a F. Alcalde y F. Dal'Bo [2].

La cuestión de la unicidad es tratada en cada caso analizando si el conjunto U -minimal es un U -atractor. Si la representación h es no inyectiva o indiscreta, el conjunto U -minimal es un U -atractor si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Luego tendremos unicidad o no dependiendo de que $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$ o no.

El caso de las representaciones fuchsianas y kleinianas nos interesa particularmente. En concreto, siguiendo un trabajo de J. W. Cannon y W. P. Thurston [82], construimos una 3-variedad hiperbólica que fibra sobre el círculo y una aplicación de Nielsen continua y sobreyectiva

$$\varphi : L(\Gamma) = \partial\mathbb{H} \rightarrow L(\Lambda) = \partial\mathbb{H}^3,$$

donde Γ es un grupo fuchsiano y Λ un grupo kleiniano. El grafo de la aplicación de Nielsen determina por dualidad un conjunto B -minimal en $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}^3)$ que es un U -atractor y por consiguiente el único U -minimal de Y .

Capítulo 1

Preliminares de geometría hiperbólica

1.1. El plano hiperbólico

Sea $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ el *plano hiperbólico*, es decir, el semiplano complejo superior dotado de la métrica de Riemann

$$g_0 \equiv ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2,$$

cuyas geodésicas son las rectas verticales y los semicírculos con centro en el eje real.

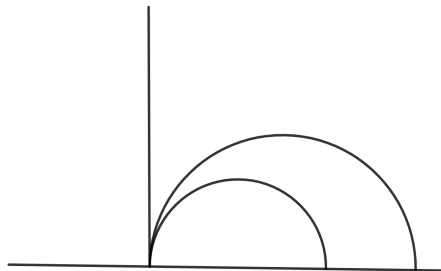


Figura 1.1: Plano hiperbólico

El semiplano de Poincaré es un modelo de geometría no euclidiana: a la vista de la figura 1.1, por un punto exterior a una recta del plano hiperbólico pasan infinitas rectas que no cortan a la recta fijada.

Si denotamos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ el disco abierto unidad, la transformación conforme

$$\Psi : z \in \mathbb{H} \longrightarrow \Psi(z) = i \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D} \quad (1.1)$$

nos proporciona un modelo de geometría equivalente al del plano hiperbólico, cuyo espacio subyacente es el disco abierto unidad, dotado de la métrica de Riemann

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2},$$

que se sigue denotando por \mathbb{D} y cuyas geodésicas son los diámetros y los arcos de círculo que cortan ortogonalmente a la frontera del disco.

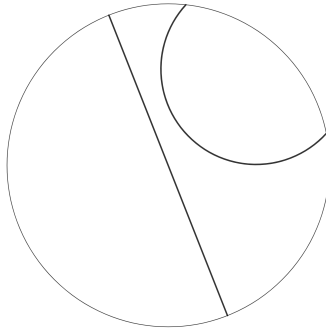


Figura 1.2: Disco de Poincaré

Definición 1.1. Se define el *borde del semiplano de Poincaré* como

$$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

que se identifica con el borde usual $\partial\mathbb{D}$ en el modelo del disco.

El grupo de isometrías de \mathbb{H} que conservan la orientación coincide con el grupo

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm Id\},$$

véase [56, Theorem 1.3.1], al identificar la clase representada por una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

con la transformación lineal fraccional

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1.2}$$

Aunque la notación

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es habitual a la hora de representar los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, pese al abuso de lenguaje, habitualmente prescindiremos del signo \pm .

Definición 1.2. Los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ se denominan *grupos fuchsianos*.

Definición 1.3. Una *superficie hiperbólica* es el cociente $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ del semiplano de Poincaré \mathbb{H} por un grupo fuchsiano sin torsión $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$.

La relación con otros conceptos de superficie hiperbólica y sobre todo la terminología correspondiente se comenta en la última sección de este capítulo.

1.2. Clasificación de las isometrías

En las siguientes secciones nos vamos a interesar por algunas propiedades de los grupos fuchsianos. Para ello empezaremos por recordar la clasificación de sus posibles elementos:

Definición 1.4. Un elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ se dice:

- (1) *elíptico* si γ fija un punto en \mathbb{H} ,
- (2) *parabólico* si γ no fija ningún punto en \mathbb{H} , pero fija un único punto en $\partial\mathbb{H}$,
- (3) *hiperbólico* si γ no fija ningún punto en \mathbb{H} , pero fija dos puntos en $\partial\mathbb{H}$.

Definición 1.5. Dada una transformación hiperbólica $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *eje* de γ a la única geodésica de \mathbb{H} determinada por los dos puntos fijos $\gamma^+, \gamma^- \in \partial\mathbb{H}$ de γ . Como γ lleva geodésicas en geodésicas, γ deja invariante su eje.

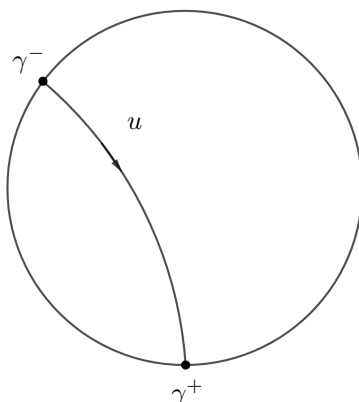


Figura 1.3: Eje de una transformación hiperbólica

Si la isometría $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ está dada por:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $ad - bc = 1$, llamamos *traza* al número

$$tr(\gamma) = |a + d|.$$

El siguiente resultado se sigue de forma inmediata de las definiciones:

Proposición 1.6. Sea $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$, se verifica:

- (1) $tr(\gamma) > 2 \iff \gamma$ es hiperbólica.
- (2) $tr(\gamma) < 2 \iff \gamma$ es elíptica.
- (3) $tr(\gamma) = 2 \iff \gamma$ es parabólica. \square

En lo que sigue, dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, denotaremos por (z_1, z_2) a la geodésica que los une, sin tener en cuenta ninguna orientación particular de la geodésica. También denotaremos por $\gamma.z$ la traslación $\gamma(z)$ de un punto $z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ por un elemento γ de Γ y por $\Gamma.z$ la órbita correspondiente. Por otra parte, para probar los siguientes resultados, necesitaremos usar las fórmulas de las distancias hiperbólicas, tanto en el modelo del semiplano \mathbb{H} , como en el disco \mathbb{D} . Recordemos que:

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_2y_2}$$

y

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

si $x = x_1 + ix_2$ e $y = y_1 + iy_2$.

Proposición 1.7. *Sea $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ una transformación hiperbólica con puntos fijos $\gamma^{\pm} \in \partial\mathbb{H}$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{H}$, la sucesión $\{\gamma^n.z\}$ converge a un punto $\xi = \gamma^{\pm}$.*

Demostración. En este caso será más cómodo usar el modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} . Sea $L = (\gamma^-, \gamma^+)$ la geodésica que une γ^- con γ^+ . Como γ fija estos puntos, tenemos que $\gamma(L) = L$. Si $z \in L$, entonces $\gamma^2.z \neq z$, ya que en otro caso γ^2 fijaría tres puntos, luego γ^2 sería la identidad lo que contradice el hecho de que γ sea hiperbólica. Como γ actúa por isometrías, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z) = d_{\mathbb{D}}(\gamma.z, \gamma^2.z),$$

es decir, al incrementar n estamos avanzando por la geodésica L siempre en la misma dirección. Como los puntos de la sucesión $\{\gamma^n.z\}$ pertenecen a la geodésica L , entonces

$$d_{\mathbb{D}}(z, \gamma^n.z) = n.d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z)$$

y usando la fórmula de la distancia hiperbólica obtenemos que:

$$\cosh n.d_{\mathbb{D}}(z, \gamma.z) = 1 + \frac{|z - \gamma^n.z|^2}{(1 - |\gamma^n.z|^2)(1 - |z|^2)}.$$

El término de la izquierda tiende a infinito cuando $n \rightarrow +\infty$, luego necesariamente la sucesión $\{|\gamma^n.z|\}$ converge a 1 cuando $n \rightarrow +\infty$. Entonces deducimos que $\{\gamma^n.z\} \rightarrow \xi = \gamma^{\pm}$.

Dado un punto cualquiera $z \in \mathbb{D}$, sea $w \in L$ un punto de la geodésica del párrafo anterior. Como γ es una isometría, tenemos que:

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = d_{\mathbb{D}}(\gamma.z, \gamma.w) = \dots = d_{\mathbb{D}}(\gamma^n.z, \gamma^n.w), \quad \text{para cada } n \geq 0$$

Haciendo uso de nuevo de la fórmula de la distancia hiperbólica, deducimos que:

$$\cosh d_{\mathbb{D}}(z, w) = 1 + \frac{|\gamma^n.z - \gamma^n.w|^2}{(1 - |\gamma^n.z|^2)(1 - |\gamma^n.w|^2)}.$$

En este caso, como el término de la izquierda es constante y la sucesión $\{1 - |\gamma^n.w|^2\}$ converge a 0, entonces la sucesión $\{|\gamma^n.z - \gamma^n.w|\}$ también debe converger a 0. Luego $\{\gamma^n.z\} \rightarrow \xi = \gamma^{\pm}$ como antes. \square

Proposición 1.8. Sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un subgrupo y $K \subset \partial\mathbb{H}$ un conjunto no vacío, cerrado y Γ -invariante. Sea $\gamma \in \Gamma$ una transformación hiperbólica con puntos fijos $\gamma^\pm \in \partial\mathbb{H}$. Entonces $\gamma^\pm \in K$.

Demostración. Sea $\xi \in K$ y $z \in (\gamma^-, \xi)$ un punto en la geodésica que une γ^- con ξ . Por el lema anterior sabemos que $\{\gamma^n \cdot z\} \rightarrow \xi' = \gamma^\pm$. Supongamos que $\xi' = \gamma^+$ (pues en el otro caso basta cambiar γ por la transformación hiperbólica γ^{-1}). Veamos que $\{\gamma^n \cdot \xi\} \rightarrow \gamma^+$. Como K es cerrado y Γ -invariante, esto implicará que $\gamma^+ \in K$, con lo que el lema quedará probado. En efecto, en primer lugar, observemos que, para cada $n \geq 1$, $\gamma^n \cdot z \in (\gamma^-, \gamma^n \cdot \xi)$ puesto que $\gamma^n \cdot \gamma^- = \gamma^-$. Luego

$$|\gamma^n \cdot \xi - \gamma^+| \leq |\gamma^n \cdot \xi - \gamma^n \cdot z| + |\gamma^n \cdot z - \gamma^+|.$$

Los dos términos de la derecha convergen a cero: el primero porque $\{\gamma^n \cdot z\} \rightarrow \gamma^+$ y $\gamma^n \cdot z \in (\gamma^-, \gamma^n \cdot \xi)$, el segundo por hipótesis. Luego deducimos que $\{\gamma^n \cdot \xi\} \rightarrow \gamma^+$ como queríamos. \square

Definición 1.9. Para cada subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *conjunto límite* de Γ al conjunto

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma z} \cap \partial\mathbb{H}.$$

formado por los puntos límite $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \cdot z \in \partial\mathbb{H}$ asociados a sucesiones no estacionarias de elementos de Γ aplicadas a un punto $z \in \mathbb{H}$. De hecho, este conjunto es independiente de la elección del punto $z \in \mathbb{H}$. Por construcción, $L(\Gamma)$ es un subconjunto cerrado y Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$, que contiene los puntos fijos γ^\pm de cualquier elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ según la proposición 1.8.

Definición 1.10. Un grupo fuchsiano Γ se dice *elemental* si $L(\Gamma)$ es finito o equivalentemente si la acción de Γ sobre $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ posee una órbita finita.

Como puede verse en [56, Theorem 3.4.6], el conjunto límite de un grupo fuchsiano elemental contiene a lo sumo dos elementos. De esta forma, podemos clasificar los grupos elementales de acuerdo al número de elementos de su conjunto límite:

Definición 1.11. Sea Γ un subgrupo discreto elemental de $PSL(2, \mathbb{R})$. El grupo se dice

- (1) *elíptico* si su conjunto límite es vacío,
- (2) *parabólico* si su conjunto límite tiene solo un punto y
- (3) *hiperbólico* si su conjunto límite tiene dos puntos.

Es inmediato que un subgrupo discreto elemental es elíptico, parabólico o hiperbólico si y solo si todos sus elementos son de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico, fijando todos los mismos puntos en la frontera respectivamente.

1.3. Grupos fuchsianos no elementales

El siguiente resultado nos proporciona una primera condición que deben satisfacer los grupos fuchsianos no elementales. Su prueba puede encontrarse en [56, Theorem 2.4.4].

Teorema 1.12. Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental entonces contiene al menos una transformación hiperbólica.

Demostración. Supongamos que Γ no contiene elementos hiperbólicos y distingamos dos casos:

(1) Supongamos que Γ solo contiene transformaciones elípticas, excepto la identidad. En este caso, salvo conjugación por un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ y usando la transformación de Cayley (1.1), podemos suponer que $\gamma \in \Gamma$ determina una transformación elíptica del disco de Poincaré \mathbb{D} que fija el origen 0. Entonces $\gamma(z) = az/\bar{a}$ con $|a|^2 = 1$. Fijemos otra transformación

$$\eta(z) = \frac{bz + \bar{c}}{cz + \bar{b}}, \quad |b|^2 - |c|^2 = 1,$$

que pertenezca a Γ y sea distinta de γ . Como Γ solo contiene elementos elípticos, tenemos que:

$$\text{tr}(\gamma\eta\gamma^{-1}\eta^{-1}) = 2 + 4|c|^2 \text{Im}(a)^2 \leq 2.$$

Luego $c = 0$ ó $\text{Im}(a) = 0$. Si $\text{Im}(a) = 0$, entonces $a = \bar{a} \in \mathbb{R}$ y $\gamma = Id$ en contra de lo supuesto. Por tanto $c = 0$ y $\eta(z) = bz/\bar{b}$ que también fija el $0 \in \mathbb{D}$. Por consiguiente la órbita del origen se reduce al propio origen y Γ es elemental.

(2) Supongamos que Γ tiene un elemento parabólico γ . Conjugando como antes, podemos suponer que $\gamma(z) = z + 1$ de modo que fija el punto $\infty \in \partial\mathbb{H}$. Si

$$\eta(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

es otro elemento de Γ , distinto de γ , entonces

$$\gamma^n \eta(z) = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d}$$

y

$$\text{tr}(\gamma^n \eta)^2 = (a + b + nc)^2.$$

Como todos los elementos de Γ son elípticos o parabólicos, deducimos que:

$$0 \leq (a + b + nc)^2 \leq 4$$

para todo $n \geq 1$. Luego $c = 0$ y por tanto η también fija el punto del infinito. En este caso, la órbita de ∞ se reduce a ∞ y Γ es otra vez elemental. \square

La siguiente propiedad es fundamental desde un punto de vista dinámico y puede consultarse en [27, Ch. I, Proposition 3.6].

Teorema 1.13. *Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental, entonces $L(\Gamma)$ es minimal para la acción de $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$, es decir, $L(\Gamma)$ es el menor subconjunto cerrado, Γ -invariante y no vacío de $\partial\mathbb{H}$.*

Demostración. Usaremos por comodidad el modelo del disco \mathbb{D} . Sabemos que el conjunto límite $L(\Gamma)$ es un cerrado no vacío Γ -invariante y debemos comprobar que es minimal. Consideremos un subconjunto no vacío $F \subset L(\Gamma)$ cerrado y Γ -invariante. Puesto que Γ es no elemental, por el teorema 1.12, Γ contiene al menos una transformación hiperbólica γ . Por la proposición 1.8, los puntos fijos γ^+ y γ^- de la transformación γ son elementos de F . Tomemos un punto $z \in (\gamma^-, \gamma^+)$ en el eje de γ . Sea $\xi \in L(\Gamma)$ y sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de elementos de Γ tal que $\{\gamma_n \cdot z\} \rightarrow \xi$. Como $F \subset S^1$ es compacto, tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que

$$\{\gamma_n \cdot \gamma^-\} \rightarrow \xi^- \quad \text{y} \quad \{\gamma_n \cdot \gamma^+\} \rightarrow \xi^+$$

en F . Argumentando como en la demostración de la proposición 1.8, concluimos que $\xi = \xi^\pm$ y por consiguiente $\xi \in F$. Luego $L(\Gamma) = F$. \square

Corolario 1.14. Si Γ es un grupo fuchsiano no elemental, entonces la acción inducida $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma)$ es minimal, es decir, para cada $\xi \in L(\Gamma)$, la órbita $\Gamma.\xi$ es densa en $L(\Gamma)$. \square

Corolario 1.15. Un grupo fuchsiano Γ no elemental contiene infinitas transformaciones hiperbólicas con puntos fijos distintos dos a dos. \square

1.4. Conjunto límite de un subgrupo normal

Nos proponemos demostrar que si Γ es un grupo fuchsiano no elemental y N es un subgrupo normal infinito de Γ , entonces $L(N) = L(\Gamma)$. Esta sección está basada en resultados que se pueden encontrar en [74, §12.2].

Definición 1.16. Dado un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, se llama *conjunto de puntos fijos de Γ* al conjunto

$$Fix(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Fix(\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H} \mid \gamma.z = z\},$$

donde recordemos $Fix(\gamma)$ se reduce a un punto de \mathbb{H} si γ es elíptico, a un punto de $\partial\mathbb{H}$ si γ es parabólico o a dos puntos de $\partial\mathbb{H}$ si γ es hiperbólico.

Proposición 1.17. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano. Si todos los elementos de Γ tienen el mismo conjunto de puntos fijos (es decir, $Fix(\gamma) = Fix(\gamma')$ para cada par $\gamma, \gamma' \in \Gamma$), entonces Γ es cíclico.

Demostración. Como los puntos fijos de un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ determinan su tipo (elíptico, parabólico o hiperbólico), todos los elementos de Γ son del mismo tipo y podemos distinguir tres casos:

(1) Si los elementos de Γ son hiperbólicos, entonces podemos conjugar por un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ para suponer que $Fix(\Gamma) = \{0, \infty\}$. Luego Γ es un subgrupo discreto del grupo de homotecias $\{h_y \mid y > 0\}$, isomorfo al grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^* de los reales positivos (imagen por la aplicación exponencial del grupo aditivo \mathbb{R}). Deducimos que Γ es cíclico infinito.

(2) Si todos los elementos de Γ son parabólicos, al igual que antes, podemos suponer que $Fix(\Gamma) = \{\infty\}$. Luego Γ es subgrupo discreto del grupo de traslaciones $\{t_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ y por la misma razón Γ es cíclico infinito.

(3) Si los elementos de Γ son elípticos, conjugando por la transformación de Cayley (1.1), podemos pasar al modelo del disco de Poincaré \mathbb{D} que $Fix(\Gamma) = \{0\}$. Luego Γ es un subgrupo discreto del grupo de rotaciones $SO(2)$ y deducimos que Γ es cíclico finito. \square

Corolario 1.18. Si Γ es un grupo fuchsiano con todos sus elementos elípticos, entonces Γ es elemental, cíclico y finito.

Demostración. Basta combinar el teorema 1.12 y la proposición 1.17 \square

Proposición 1.19. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano y F el conjunto de los elementos de $\partial\mathbb{H}$ fijados por elementos no elípticos de Γ . Entonces $\overline{F} = L(\Gamma)$.

Demostración. Como $F \subset L(\Gamma)$ y $L(\Gamma)$ es un cerrado de $\partial\mathbb{H}$, entonces $\overline{F} \subset L(\Gamma)$. Dado $\xi \in F$, por definición, existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ no elíptico que fija el punto ξ . Así, para cualquier elemento $\gamma' \in \Gamma$, tenemos que $\gamma'\gamma(\gamma')^{-1}$ sigue siendo elíptico y fija $\gamma'(\xi)$. Luego tanto F como su clausura \overline{F} son Γ -invariantes. Si Γ es no elemental, entonces $L(\Gamma) = \overline{F}$ según el teorema 1.13. En otro caso, el conjunto límite $L(\Gamma)$ contiene a lo sumo dos puntos y según su número de elementos se denomina elíptico, parabólico o hiperbólico (según se ha indicado en la definición 1.11). En cualquier caso, como consecuencia del teorema 1.13 y por finitud, el conjunto $F = L(\Gamma)$. \square

Con todo esto, ya estamos en condiciones de probar el resultado que anunciábamos al principio de la sección:

Proposición 1.20. *Sean Γ un grupo fuchsiano no elemental y $N \triangleleft \Gamma$ un subgrupo normal infinito. Entonces $L(N) = L(\Gamma)$.*

Demostración. Sea

$$F_N = \{x \in \text{Fix}(\gamma) \mid \gamma \in N \text{ no elíptico}\}$$

el conjunto de los puntos fijados por elementos no elípticos de N . Observemos en primer lugar que $F_N \neq \emptyset$ como consecuencia del corolario 1.18. Al igual que en la prueba del resultado anterior, para cada $\gamma \in N$ y cada $\gamma' \in \Gamma$, tenemos que:

$$\text{Fix}(\gamma'\gamma(\gamma')^{-1}) = \gamma' \cdot \text{Fix}(\gamma).$$

Por tanto, como N es normal, deducimos que F_N y \overline{F}_N son Γ -invariantes. Por la proposición anterior, $L(N) = \overline{F}_N$ y por fin

$$L(\Gamma) \subset L(N)$$

como consecuencia de la minimalidad de $L(\Gamma)$. \square

1.5. Acciones proyectiva y lineal

La acción transitiva $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}$ se extiende de modo natural en una acción transitiva $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ ya que la expresión (1.2) es válida para cualquier elemento de $\partial\mathbb{H}$. Por otra parte, para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, hay un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g(i) = z$ y $g_{*i}(\vec{e}_2) = \vec{u}$. Eso significa que la acción natural $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ también es transitiva.

Definición 1.21. Para cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$, existe una única geodésica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\alpha(0) = z$ y $\dot{\alpha}(0) = \vec{u}$. Definimos

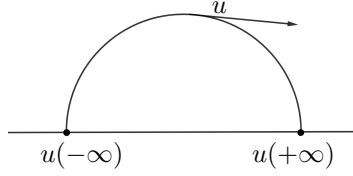
$$u(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \in \partial\mathbb{H}$$

y tenemos así una aplicación

$$\Phi : T^1\mathbb{H} \longrightarrow \partial\mathbb{H}$$

dada por $\Phi(u) = u(+\infty)$. Análogamente, se define

$$u(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) \in \partial\mathbb{H}.$$


 Figura 1.4: Extremos de un vector $u \in T^1\mathbb{H}$

Proposición 1.22. *La aplicación Φ es equivariante respecto de las acciones $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ y $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$, es decir, dado $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene que*

$$g(\Phi(u)) = \Phi(g(u)).$$

Demostración. Para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, se tiene que:

$$g(\Phi(u)) = g(u(+\infty)) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(\alpha(t)) = \Phi(g(u)),$$

ya que $g \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ es la geodésica asociada por $g(u) = (g(z), g_{*z}(\vec{u})) \in T^1\mathbb{H}$. \square

Como la acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es transitiva, el borde

$$\partial\mathbb{H} \cong PSL(2, \mathbb{R})/B,$$

siendo B el subgrupo de isotropía del punto ∞ . Este grupo B coincide con el grupo de transformaciones afines

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

Se dice que B es el *grupo afín* o *grupo de Borel* y la acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre $\partial\mathbb{H}$ se denomina *acción proyectiva*.

El grupo unipotente U que introduciremos a continuación definirá el flujo horocíclico como se verá secciones posteriores. Nos interesa estudiar el cociente $PSL(2, \mathbb{R})/U$ y caracterizarlo de una forma sencilla. Para ello necesitamos introducir en primer lugar el concepto de *cociclo de Busemann* siguiendo [27] (véase Theorem I.1.18):

Teorema 1.23. *Sea $(r(t))_{t \geq 0}$ un arco geodésico parametrizado por longitud de arco que tenga como punto límite $\xi \in \partial\mathbb{H}$. Para cada par de puntos $z, z' \in \mathbb{H}$, existe el límite*

$$B_\xi(z, z') = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(z, r(t)) - d(z', r(t))$$

que no depende del punto inicial $r(0)$ del rayo geodésico r . Se dice que $B_\xi(z, z')$ es el valor del cociclo de Busemann centrado en ξ para z y z' .

Definición 1.24. Denotaremos por $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \{\pm Id\}$ y por $\text{vect} : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ a la aplicación dada por:

$$\text{vect}(u) = \text{vect}(z, \vec{u}) = \begin{cases} \pm \frac{e^{B_{u(+\infty)}(i, z)/2}}{\sqrt{1+u^2(+\infty)}} \begin{pmatrix} u(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) \neq \infty \\ \pm e^{B_{u(+\infty)}(i, z)/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } u(+\infty) = \infty. \end{cases}$$

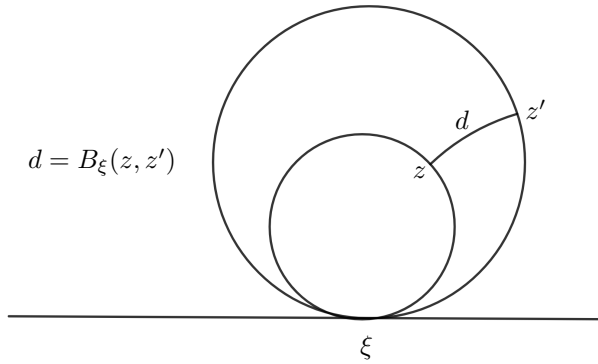


Figura 1.5: Cocilo de Busemann

Como puede verse en la figura 1.6, el vector $vect(u)$ es paralelo al vector $(1, 0)$ si $u(+\infty) = \infty$ y ambos son iguales cuando $z = i$. Observemos además que la aplicación $vect : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ es sobreyectiva.

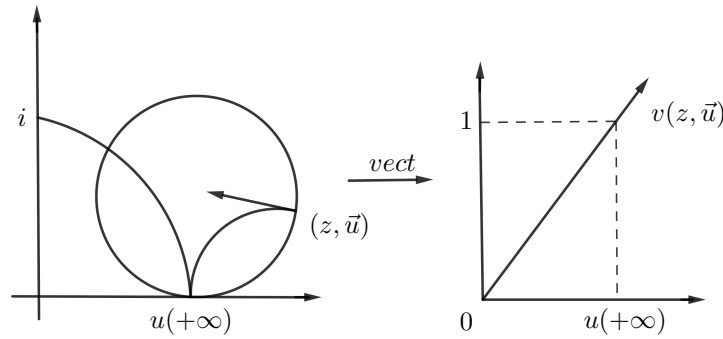


Figura 1.6: La aplicación $vect$

Definición 1.25. La acción natural $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ induce una acción $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright E$ llamada *acción lineal*.

Según [27, Proposition V.1.7], la aplicación $vect : T^1\mathbb{H} \rightarrow E$ es $PSL(2, \mathbb{R})$ -equivariante respecto de las acciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre $T^1\mathbb{H}$ y E . Luego E es isomorfo al cociente de $PSL(2, \mathbb{R})$ por la isotropía de $(1, 0)$.

Definición 1.26. El grupo de isotropía de $(1, 0)$ es el grupo de traslaciones

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

y se denomina *grupo unipotente*.

Observación 1.27. Si llamamos *grupo diagonal* al grupo de homotecias

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, \right\}.$$

entonces $B = DU$.

1.6. Órbitas densas de la acción lineal

Al igual que los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ se identifican con las matrices en $SL(2, \mathbb{R})$, cada clase de $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \{\pm Id\}$ se identifica de modo abusivo con el vector v que la genera (en lugar de usar la notación habitual $\pm v$ para denotar esa clase).

Definición 1.28. Dado un grupo fuchsiano no elemental $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ definimos

$$E(\Gamma) = \{vect(u) \in E \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

La proyección canónica $\pi : PSL(2, \mathbb{R})/U \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})/B$ se identifica con una aplicación $dir : E \rightarrow \partial\mathbb{H}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & u \in T^1\mathbb{H} = PSL(2, \mathbb{R}) & \\ \swarrow vect & & \searrow \Phi \\ vect(u) \in E & \xrightarrow{dir} & \partial\mathbb{H} \ni u(+\infty). \end{array}$$

Por construcción se verifica que

$$E(\Gamma) = dir^{-1}(L(\Gamma)).$$

El siguiente resultado demuestra que la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E(\Gamma)$ posee una órbita densa si Γ es no elemental. Nos guiaremos por [27, Proposition V.2.5] para su prueba.

Proposición 1.29. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano no elemental. Entonces existe un elemento $v \in E(\Gamma)$ tal que $\overline{\Gamma.v} = E(\Gamma)$.*

La demostración se basa en el siguiente lema:

Lema 1.30. *Sea Γ un grupo fuchsiano no elemental. Si B_1 y B_2 son dos abiertos básicos de E que cortan a $E(\Gamma)$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Si identificamos B_1, B_2 y $E(\Gamma)$ con sus preimágenes en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, basta probar que existen elementos $v \in B_1$ y $\gamma \in \Gamma$ tales que $\gamma.v \in B_2$.

Sea $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ la proyección canónica. La acción lineal

$$SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

induce una acción proyectiva $SL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}P^1$. Según la definición 1.25, la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ proviene de la acción de Γ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y define por paso al cociente una acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^1$ conjugada a la acción como grupo fuchsiano $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$. Por comodidad, vamos a pensar en Γ como subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ o como subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ sin hacer distinción. Por hipótesis,

como Γ es un grupo fuchsiano no elemental, la acción $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma)$ es minimal. Cuando identificamos el borde $\partial\mathbb{H}$ con la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$, los puntos fijos de las transformaciones hiperbólicas de Γ determinan direcciones propias pensadas como elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ que actúan linealmente sobre \mathbb{R}^2 . Así, como $p(B_1) \subset \partial\mathbb{H}$ es un abierto, existe una transformación hiperbólica $\gamma_1 \in \Gamma$ con uno de sus puntos fijos perteneciente a $p(B_1)$. Esto significa que γ_1 es una transformación lineal con autovector dominante u_1^+ con autovalor asociado $\lambda_1^+ > 1$. Observemos que u_1^+ pertenece al cono generado por B_1 , pero multiplicando por un escalar siempre podemos suponer que pertenece a B_1 .

Sea $\gamma \in \Gamma$ otra transformación hiperbólica con autovectores u^+ y u^- distintos de los de γ_1 . Como u_1^+ representa la dirección estable de la transformación γ_1 , existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\gamma_1^n \cdot u^+$ y $\gamma_1^n \cdot u^-$ pertenecen al cono generado por B_1 . Ahora, sustituyendo γ_1 por γ_1^n y modificando las longitudes de u^+ y u^- , podemos suponer que $\gamma_1 \cdot u^+$ y $\gamma_1 \cdot u^-$ están en B_1 .

Repitiendo el argumento, sea $\gamma_2 \in \Gamma$ una transformación hiperbólica cuya dirección estable (correspondiente a un autovalor mayor que 1) está generada por un vector u_2^+ que pertenece a B_2 . De nuevo, cambiando γ_2 por γ_2^n , para n suficientemente grande, podemos suponer que $\gamma_2 \cdot u^+$ pertenece al cono generado por B_2 . Ahora bien, cuando $n \rightarrow \infty$, el segmento $[\gamma_2 \gamma^n \cdot u^-, \gamma_2 \gamma^n \cdot u^+]$ se aproxima a la semirecta abierta Δ de origen en $(0, 0)$ y generada por la dirección de $\gamma_2 \cdot u^+$. Para finalizar, como

$$[\gamma_2 \gamma^n \cdot u^-, \gamma_2 \gamma^n \cdot u^+] = \gamma_2 \gamma^n \gamma_1^{-1} [\gamma_1 \cdot u^-, \gamma_1 \cdot u^+]$$

y $[\gamma_1 \cdot u^-, \gamma_1 \cdot u^+] \subset B_1$, existe $v \in [\gamma_1 \cdot u^-, \gamma_1 \cdot u^+] \subset B_1$ tal que $\gamma_2 \gamma^n \gamma_1^{-1} \cdot v \in B_2$, como buscábamos. \square

Demostración de la proposición 1.29. Veamos que existe un elemento $v \in E(\Gamma)$ tal que $\overline{\Gamma \cdot v} = E(\Gamma)$. Sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de abiertos básicos de E que cortan $E(\Gamma)$. Fijemos un abierto U de E que corte a $E(\Gamma)$. Por el lema 1.30 existe un elemento $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $\gamma_1(U) \cap B_1 \neq \emptyset$. Tomemos U_1 un abierto relativamente compacto incluido en U , que interseque a $E(\Gamma)$ y verifique $\gamma_1(U_1) \subset B_1$.

En el argumento anterior, reemplazando U por U_1 y B_1 por B_2 , obtenemos un nuevo abierto $U_2 \subset U_1$ y un nuevo elemento $\gamma_2 \in \Gamma$ tales que $\gamma_2(U_2) \subset B_2$.

Repitiendo construimos una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ y una sucesión $\{U_n\}$ de abiertos relativamente compactos y encajados que cortan a $E(\Gamma)$ y verifican $\gamma_n(U_n) \subset B_n$.

Tomemos un punto $v \in (\bigcap_{n \geq 1} \overline{U_n}) \cap E(\Gamma)$. Para cada $n \geq 1$ el punto $\gamma_n \cdot v \in B_n$. Tomemos un elemento arbitrario $v' \in E(\Gamma)$ y una sucesión $\{D_n\}$ de discos centrados en v' con radios convergentes a cero. Así, cada disco D_n contiene un abierto B_{i_n} y consecuentemente $\gamma_{i_n} \cdot v \in D_n$. De aquí se sigue inmediatamente que $v' \in \overline{\Gamma \cdot v}$ y por tanto $\overline{\Gamma \cdot v} = E(\Gamma)$. \square

Entre los grupos fuchsianos no elementales hay tres tipos que nos interesarán especialmente en el estudio de la dinámica del flujo horocíclico: los *grupos de superficie*, los *retículos* y los *grupos convexos-cocompactos*.

Los grupos convexos-cocompactos se suelen definir de modo geométrico usando la región de Nielsen y el dominio de Dirichlet del grupo, véase [27, Definition I.4.5]. Como nuestro punto de vista es dinámico, es preferible usar la siguiente caracterización, que se puede encontrar en [27, Chapter V, Proposition 4.3].

Definición 1.31. Un grupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es convexo-cocompacto si y sólo si para cada $v \in E(\Gamma)$ se tiene que $\overline{\Gamma \cdot v} = E(\Gamma)$. Es decir, si la acción $\Gamma \curvearrowright E(\Gamma)$ es minimal.

Por otra parte, los retículos, se definen a partir del área de su dominio fundamental en \mathbb{H} y veremos a su debido tiempo que son los grupos que usa G. A. Hedlund cuando prueba su famoso teorema en [52].

Definición 1.32. Un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es un *retículo* si el área de su dominio fundamental en \mathbb{H} es finita. Equivalentemente, el área de la superficie hiperbólica $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es finita.

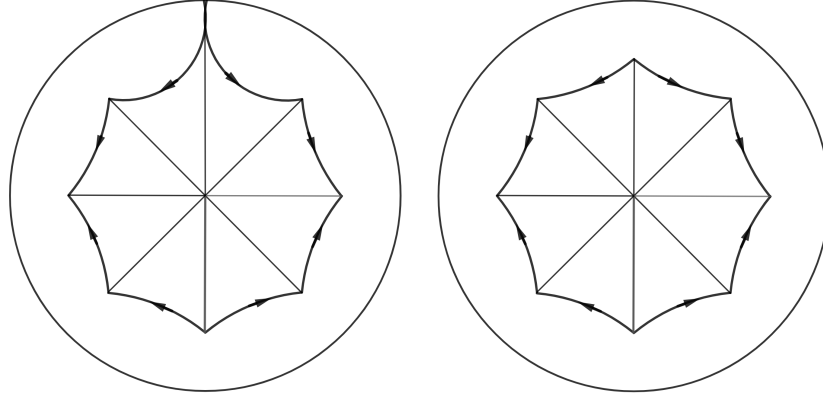


Figura 1.7: Dominio fundamental de un retículo y de un grupo cocompacto

Finalmente, tenemos los grupos de superficie que son los que tendrán propiedades dinámicas más sencillas.

Definición 1.33. Un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ se llama *grupo de superficie* si $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie compacta.

El estudio de la *región de Dirichlet* de un grupo fuchsiano (que puede verse en [56, Ch. 3] y en [27, Chapter I]) permite caracterizar los grupos de superficie como grupos fuchsianos *cocompactos* y sin torsión. La primera condición garantiza que Γ no contiene elementos parabólicos, mientras que la segunda muestra que tampoco contiene elementos elípticos. El siguiente resultado se puede encontrar en [56, Theorem 4.5.2] y caracteriza el conjunto límite de un grupo de superficie.

Teorema 1.34. Si Γ es un grupo de superficie, entonces $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$.

Demostración. Como $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie compacta, la acción propiamente discontinua de Γ sobre \mathbb{H} admite un dominio fundamental compacto K , cuya frontera no corta a $\partial\mathbb{H}$. Además, ninguno de los trasladados de K por elementos de Γ corta a $\partial\mathbb{H}$. Ahora bien, como la familia de trasladados $\{\gamma.K \mid \gamma \in \Gamma\}$ define un mosaico de \mathbb{H} , para cada punto $\xi \in \partial\mathbb{H}$ y cada entorno abierto U de ξ en $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma.K \subset U$. Esto permite construir un punto $z \in K$ y una sucesión de elementos $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{\gamma_n.z\} \rightarrow \xi$, lo que prueba que $\xi \in L(\Gamma)$. \square

1.7. Superficies de curvatura negativa

El objetivo de esta sección es aclarar la relación que hay entre las superficies hiperbólicas y las superficie de curvatura negativa. Cuando en capítulos posteriores se definan las foliaciones por superficies hiperbólicas, se hará referencia a las definiciones de esta sección.

Dada una superficie hiperbólica $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, la proyección canónica $q : \mathbb{H} \rightarrow S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es la cubierta universal y Γ es el grupo fundamental de S . Como Γ actúa sobre \mathbb{H} por isometrías, la métrica de

Poincaré g_0 induce una métrica g sobre S . En efecto, como $q : \mathbb{H} \rightarrow S$ es una cubierta, la diferencial en cada punto

$$q_{*z} : T_z \mathbb{H} \rightarrow T_{q(z)} S$$

es un isomorfismo. Así, para cada punto $x \in S$ definimos la métrica $g(x) : T_x S \times T_x S \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x)(v_x, w_x) = g_0(z)(q_{*z}^{-1}(v_x), q_{*z}^{-1}(w_x)),$$

para algún $z \in \mathbb{H}$ tal que $q(z) = x$. La independencia del punto z viene garantizada porque Γ actúa por isometrías.

Por construcción, la cubierta universal $q : (\mathbb{H}, g_0) \rightarrow (S, g)$ es una isometría local y por el teorema egregio de Gauss [36], la superficie S tiene curvatura de Gauss constante e igual a -1. Luego una superficie hiperbólica es una superficie de curvatura negativa, constante e igual a -1 .

(1) Superficies de curvatura constante igual a -1 .

Si (S, g) es una superficie completa de curvatura constante igual a -1, entonces su cubierta universal es el plano de Poincaré y $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ con $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$. En efecto, si $q : \tilde{S} \rightarrow S$ es la cubierta universal y $\tilde{g} = q^*g$ la métrica levantada, de nuevo por el teorema egregio de Gauss, la curvatura de \tilde{S} es igual a -1 en todos sus puntos. El teorema de uniformización de Poincaré [72, 78] asegura que la única superficie completa y simplemente conexa que admite tal curvatura es el plano de Poincaré, con lo que concluimos que $(\tilde{S}, \tilde{g}) = (\mathbb{H}, g_0)$ y $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie hiperbólica.

Para estudiar el caso en el que S es una superficie riemanniana de curvatura constante negativa no necesariamente igual a -1 y el caso de curvatura negativa variable necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.35. Sean S una superficie y g y g' dos métricas riemannianas sobre S . Decimos que g y g' son *conformemente equivalentes* si existe una función diferenciable $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g' = e^{2u}g.$$

En tal caso, las superficies riemannianas (S, g) y (S, g') se dicen *conformemente equivalentes*.

(2) Superficies de curvatura negativa, constante e igual a $-k$.

Sea (S, g) una superficie completa de curvatura negativa, constante e igual a $-k$. Argumentando como en el caso de curvatura -1, la cubierta universal \tilde{S} dotada de la métrica levantada \tilde{g} es una superficie riemanniana simplemente conexa, completa y con curvatura constante igual a $-k$. El teorema de uniformización de Poincaré asegura que en tales circunstancias (\tilde{S}, \tilde{g}) y (\mathbb{H}, g_0) son conformemente equivalentes. Luego existe una métrica g' conformemente equivalente a g tal que (S, g') es una superficie hiperbólica.

(3) Superficies de curvatura negativa variable.

En el caso de las superficies con curvatura negativa variable no siempre podemos garantizar que la superficie sea conformemente equivalente a una superficie hiperbólica. En \mathbb{C} la métrica euclidiana g_0 está dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

La métrica conforme dada por

$$g = e^{2x}g_0$$

dota a \mathbb{C} de estructura de superficie con curvatura negativa e igual a

$$\begin{aligned}\kappa_g &= -e^{-2e^x}(\kappa_{g_0} - \Delta e^x) = \\ &= -e^{-2e^x}e^x < 0.\end{aligned}$$

Es decir, aunque \mathbb{C} admite una métrica de curvatura negativa, de acuerdo con el teorema de uniformización de Poincaré, \mathbb{C} no es conformemente equivalente a una superficie hiperbólica. Dicho de otro modo, lo esencial para que una superficie riemanniana (S, g) sea conformemente equivalente a una superficie hiperbólica no es el signo de su curvatura, sino la clase conforme de su cubierta universal (\tilde{S}, \tilde{g}) .

Si suponemos que la superficie (S, g) es compacta, entonces la curvatura está uniformemente acotada entre valores negativos. Es decir, si $\kappa : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de curvatura, existen números $k_1, k_2 > 0$ tales que para cualquier punto $x \in S$,

$$-k_1 \leq \kappa(x) \leq -k_2 < 0.$$

Ahora bien, por el teorema de Gauss-Bonnet, se tiene que

$$2\pi\chi(S) = \int_S \kappa d\text{vol}_g \leq -k_2 \text{vol}(S) < 0.$$

En particular $\chi(S) < 0$. Lo interesante es que, en el caso compacto, esta propiedad topológica garantiza la uniformización de la métrica g (véase [78, Théorème X.3.1]).

Teorema 1.36. *Sea S una superficie compacta orientable con característica de Euler $\chi(S) < 0$. Dada cualquier métrica g sobre S , podemos encontrar una métrica g' conformemente equivalente a g tal que (S, g') es una superficie hiperbólica.*

El teorema anterior es de hecho más general, ya que podemos escoger la curvatura que le queramos dar a la superficie:

Teorema 1.37 (Prescripción de curvatura). *Sean S una superficie compacta orientable con característica de Euler $\chi(S) < 0$ y $\kappa : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva. Dada cualquier métrica riemanniana g sobre S , podemos encontrar otra métrica g' , conforme a g tal que (S, g) tenga curvatura igual a $-\kappa$.*

El caso no compacto es diferente como muestra el caso del cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R}$. Aunque $\chi(C) = 0$, el cilindro admite una métrica hiperbólica, ya que podemos obtener C como el cociente $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{H}$, donde $\mathbb{Z} < PSL(2, \mathbb{R})$ es el subgrupo generado por la isometría hiperbólica $\gamma(z) = z + 1$.

No obstante, sabemos que C es también el cociente $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}^2$ de \mathbb{R}^2 por el subgrupo cíclico de isometrías de \mathbb{R}^2 generado por $f(x, y) = (x + 1, y)$. En tal caso, C admite una métrica de curvatura constante e igual a 0.

Capítulo 2

Teorema de Hedlund clásico

2.1. Fibrado tangente unitario

El fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}$ es una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión 3, que está dotada de tres flujos importantes: el flujo geodésico $g_{\mathbb{R}}$, el flujo horocíclico estable $h_{\mathbb{R}}$ y el flujo horocíclico inestable $h_{\mathbb{R}}^-$. Estos flujos están relacionados por las siguientes *condiciones de hiperbolicidad*:

$$g_t \circ h_s = h_{se^{-t}} \circ g_t \quad \text{y} \quad g_t \circ h_s^- = h_{se^t}^- \circ g_t \quad (2.1)$$

y combinándolos definen sendas acciones de los grupos afines

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$$

y

$$B^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

El *flujo geodésico* se define del siguiente modo (descrito en la figura 2.1): a cada vector $u \in T^1\mathbb{H}$, le asocia el vector $g_t(u) \in T^1\mathbb{H}$ definido como el vector tangente a la geodésica determinada por u en el instante t .

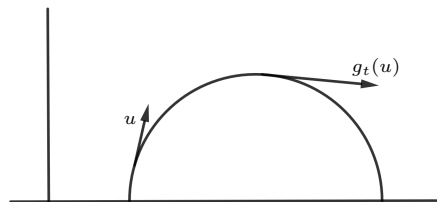


Figura 2.1: Flujo geodésico

Los horociclos en el plano hiperbólico \mathbb{H} son las circunferencias tangentes al borde $\partial\mathbb{H}$ y las líneas horizontales. Un vector $u \in T^1\mathbb{H}$ determina dos horociclos para los que u es un vector ortogonal a

ambos. En uno de ellos, llamado *horociclo estable*, el vector apunta hacia el interior, mientras que en el otro, llamado *horociclo inestable*, apunta hacia el exterior. La figura 2.2 describe exactamente la situación.

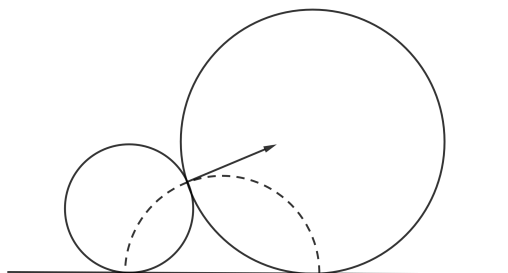


Figura 2.2: Horociclos

La definición del *flujo horocíclico estable* puede verse en la figura 2.3: a cada vector $u \in T^1\mathbb{H}$, se le asocia el vector $h_s(u) \in T^1\mathbb{H}$ obtenido desplazando u una distancia hiperbólica $|s|$ a lo largo del horociclo estable que define. Se desplaza en sentido horario si $s < 0$ y antihorario si $s > 0$.

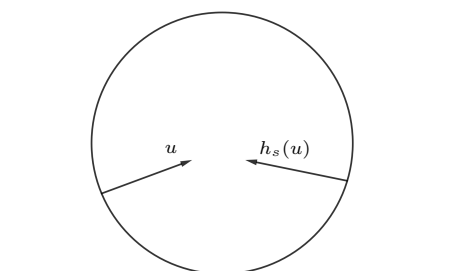


Figura 2.3: Flujo horocíclico

El flujo horocíclico inestable se define de forma análoga al estable desplazando el vector por el horociclo inestable que define.

2.2. Flujos geodésico y horocíclico

La descripción geométrica de los flujos geodésico y horocíclico admite una reformulación algebraica que será de gran utilidad más adelante.

Consideremos la acción natural $PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright T^1\mathbb{H}$ descrita al inicio de la sección 1.5. Recordemos que viene dada por:

$$g.u = g.(z, \vec{u}) = (g(z), g_{*z}(\vec{u})) \tag{2.2}$$

para cada $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y cada $u = (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H}$. Esta acción es libre y transitiva, es decir, para cada $u \in T^1\mathbb{H}$ existe un único elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $u = g.(i, \vec{e}_2)$. Luego podemos identificar canónicamente el fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}$ con el grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R})$.

A partir de esta caracterización, los flujos geodésico, horocíclico estable y horocíclico inestable sobre $T^1\mathbb{H}$ se corresponden con las acciones por la derecha de los grupos D , U y U^- definidas de la siguiente forma:

$$g_t(u) = g_t(g \cdot (i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \cdot (i, \vec{e}_2).$$

$$h_s(u) = h_s(g \cdot (i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (i, \vec{e}_2).$$

$$h_s^-(u) = h_s^-(g \cdot (i, \vec{e}_2)) = g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \cdot (i, \vec{e}_2).$$

En lo que sigue identificaremos los flujos correspondientes prescindiendo siempre del punto (i, \vec{e}_2) .

Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica compacta obtenida como cociente de la acción de un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ sin torsión. Recordemos que la proyección canónica $q : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H} = S$ es la cubierta universal de S y el grupo de superficie Γ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(S)$. De hecho, como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ es libre y propiamente discontinua, también lo es la acción inducida $\Gamma \curvearrowright T^1\mathbb{H}$. Luego el cociente $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ es una variedad C^∞ diferenciable dotada de una estructura de fibrado localmente trivial de base S y de fibra S^1 isomorfo al fibrado tangente unitario T^1S . En efecto, la relación de equivalencia orbital coincide con la relación de equivalencia definida por el morfismo de fibrados

$$q_* : (z, \vec{u}) \in T^1\mathbb{H} \longrightarrow (q(z), q_*(z)(\vec{u})) \in T^1S$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^1\mathbb{H} & \xrightarrow{q_*} & T^1S \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{q} & S. \end{array} \quad (2.3)$$

Luego pasa al cociente en un isomorfismo de fibrados entre $\Gamma \backslash T^1\mathbb{H}$ y T^1S . Si identificamos $T^1\mathbb{H}$ con $PSL(2, \mathbb{R})$ como antes, entonces también podremos identificar el fibrado tangente unitario T^1S con la variedad homogénea $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Esto nos permitirá extender fácilmente las definiciones de g_t , h_s y h_s^- a cualquier superficie compacta:

Definición 2.1. Dada una superficie hiperbólica compacta $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ y su fibrado tangente unitario $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, se define:

(1) el *flujo geodésico* g_t como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright D$ dada por:

$$g_t(\Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

(2) el *flujo horocíclico (estable)* h_s como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ dada por:

$$h_s(\Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(3) el flujo horocíclico (inestable) h_s^- como la acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U^-$ dada por:

$$h_s^-(\Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix},$$

donde prescindimos de la notación \pm e identificamos cada elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ con un representante en $SL(2, \mathbb{R})$.

2.3. Teorema de Hedlund y principio de dualidad

El enunciado original de Hedlund publicado en 1936 proporciona una caracterización de las órbitas densas del flujo horocíclico en el caso de un grupo fuchsiano Γ de primera especie, es decir, con conjunto límite $L(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$. Los retículos tal como los definimos en 1.32 son un ejemplo de grupos de primera especie (véase [27, Proposition I.4.10]). Como corolario, se obtiene el siguiente resultado, conocido como *teorema de Hedlund*:

Teorema 2.2 (Teorema de Hedlund, [52]). *Si $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie hiperbólica compacta, entonces las órbitas del flujo horocíclico son densas en T^1S .*

De hecho, el recíproco también es cierto, es decir, si S es una superficie hiperbólica obtenida como cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ de un grupo fuchsiano no elemental Γ y las órbitas del flujo horocíclico son densas en T^1S , entonces Γ es cocompacto y $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es compacta.

En las condiciones del teorema 2.2, hemos visto que sobre $T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ el flujo $h_{\mathbb{R}}$ está definido por la acción natural por la derecha $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$. Estas descripciones algebraicas dan pie a introducir una formulación dual.

El *principio de dualidad*, formulado por H. Furstenberg al demostrar la unicidad ergódica del flujo horocíclico en [35], proporciona un criterio general para comparar las dinámicas topológicas de acciones que conmutan. Lo mismo ocurre con la dinámica medible si los grupos son unimodulares. El siguiente resultado ilustra la aplicación de este principio en el contexto topológico y será útil para obtener una formulación equivalente del teorema de Hedlund. El mismo principio será fundamental para extender estos resultados al caso foliado.

Proposición 2.3 (Principio de dualidad). *La acción $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ es minimal si y solo si la acción lineal $\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/U$ es minimal.*

Demostración. Dado $g.U \in PSL(2, \mathbb{R})/U$, veamos que la órbita

$$\Gamma(g.U) = \{(\gamma g).U \mid \gamma \in \Gamma\}$$

es densa. Para ello, fijemos otra clase $g'.U \in PSL(2, \mathbb{R})/U^+$ arbitraria. Si consideramos las clases $\Gamma g, \Gamma g' \in \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, por hipótesis, existe una sucesión $\{s_n\}$ tal que

$$\left\{ \Gamma \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\} \rightarrow \Gamma g'$$

Como la aplicación cociente $q_* : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ es abierta, una sucesión $\{\Gamma g_n\}$ en $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ converge a una clase $\Gamma g \in \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ si y solo si existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de

elementos de Γ tal que $\{\gamma_n g_n\} \rightarrow g$. Lo mismo ocurre con la convergencia en $PSL(2, \mathbb{R})/U$. Aplicando esto a nuestro caso, tenemos que existe una sucesión $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ tal que

$$\{\gamma_n \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)\} \rightarrow g'$$

Por asociatividad, deducimos que

$$\gamma_n \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (\gamma_n \cdot g) \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y concluimos que:

$$\{(\gamma_n g)U\} \rightarrow g' \cdot U$$

en $PSL(2, \mathbb{R})/U$, como queríamos probar. El recíproco es completamente análogo. \square

Los argumentos de la proposición 2.3 siguen siendo válidos para comparar las clausuras de las órbitas del flujo horocíclico y de las órbitas de la acción lineal. Por dualidad, la proposición 1.29 es equivalente al siguiente resultado:

Proposición 2.4. *Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica obtenida como cociente de un grupo fuchsiano no elemental. Entonces el flujo $h_{\mathbb{R}}$ es transitivo, es decir, la acción $T^1 S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \curvearrowright U$ posee una órbita densa.*

Usando el principio de dualidad 2.3, el teorema de Hedlund clásico se puede reformular de la siguiente forma:

Teorema 2.5 (Teorema de Hedlund). *Si Γ es un grupo de superficie, entonces la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$ es minimal.*

El teorema 2.5 será probado más adelante junto con un teorema más general, demostrado por Hedlund en el caso de volumen finito y por Eberlein en general y hará uso de modo esencial de la dualidad. De hecho, el teorema mencionado se puede obtener como corolario del teorema 4.9 suponiendo que $G = \{e\}$.

Observación 2.6. El principio de dualidad sigue siendo válido si sustituimos el grupo U por cualquier otro subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. En particular, la minimalidad de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial \mathbb{H}$ probada en el teorema 1.13 es equivalente a la minimalidad de la acción afín $T^1 S \curvearrowright B$.

2.4. Conjunto no errante del flujo horocíclico

El teorema de Hedlund clásico que acabamos de enunciar en la sección anterior se aplica sólo a superficies compactas. De hecho, como hemos comentado antes, la densidad de las $h_{\mathbb{R}}$ -órbitas caracteriza a las superficies hiperbólicas compactas.

Sin embargo, el comportamiento de las $h_{\mathbb{R}}$ -órbitas no es igual cuando la superficie no es compacta. En este caso, el conjunto no errante del flujo horocíclico jugará un papel primordial y por eso recordamos su definición:

Definición 2.7. Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica. Un punto $x \in T^1 S$ se dice *no errante* para el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ si para cualquier entorno abierto W de x y para cada número $S > 0$, existe otro número $s > S$ tal que $h_s(W) \cap W \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega_h(S)$ al conjunto de todos los puntos no errantes y lo llamamos *conjunto no errante* (del flujo $h_{\mathbb{R}}$).

Probaremos que $L(\Gamma)$ es el conjunto no errante de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$, de modo que por dualidad veremos que el conjunto no errante $\Omega_h(S)$ es igual al conjunto

$$F(\Gamma) = \{\Gamma.u \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

Comencemos estudiando algunas propiedades del conjunto no errante:

Proposición 2.8. *El conjunto no errante $\Omega_h(S)$ es cerrado y $h_{\mathbb{R}}$ -invariante.*

Demostración. Probemos ambas propiedades por separado:

(1) El conjunto $\Omega_h(S)$ es cerrado. En efecto, sea $\Gamma.u_n \in \Omega_h(S)$ tal que $\Gamma.u_n \rightarrow \Gamma.u \in T^1S$. Dado un entorno abierto W de $\Gamma.u$, existe un elemento $\Gamma.u_n \in W$. Como $\Gamma.u_n \in \Omega_h(S)$ existe una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tal que $h_{s_n}(W) \cap W \neq \emptyset$, de donde se sigue que $\Gamma.u \in \Omega_h(S)$.

(2) El conjunto $\Omega_h(S)$ es $h_{\mathbb{R}}$ -invariante. En efecto, sean $\Gamma.u \in \Omega_h(S)$ y $s \in \mathbb{R}$ y veamos que $h_s(\Gamma.u) \in \Omega_h(S)$. Dado un entorno abierto W de $h_s(\Gamma.u)$, el conjunto $h_{-s}(W)$ es un entorno abierto de $\Gamma.u \in \Omega_h(S)$ y por tanto existe una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tal que $h_{s_n}(h_{-s}(W)) \cap h_{-s}(W) \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $h_{s_n}(W) \cap W \neq \emptyset$ y por tanto $h_s(\Gamma.u) \in \Omega_h(S)$. □

Lema 2.9. *La acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$ es propiamente discontinua.*

Demostración. Supongamos por el contrario que la acción no es propiamente discontinua. Sean $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$ dos puntos arbitrarios y tomemos V_1, V_2 entornos abiertos, relativamente compactos y disjuntos de ξ_1 y ξ_2 respectivamente. Consideremos el conjunto

$$\Gamma_{\xi_1, \xi_2} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.U_1 \cap U_2 \neq \emptyset\}$$

y supongamos que es infinito. Tomando $K_1 = \overline{V_1}$ y $K_2 = \overline{V_2}$, tenemos que el conjunto

$$\Gamma_{K_1, K_2} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

es infinito. Luego existe una sucesión no estacionaria $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_n.K_1 \cap K_2 \neq \emptyset.$$

Para cada $n > 0$, existen $\xi_n^1 \in K_1$ y $\xi_n^2 \in K_2$ tales que

$$\gamma_n.\xi_n^1 = \xi_n^2.$$

Por compacidad de K_1 y K_2 , podemos suponer que $\xi_n^1 \rightarrow \xi_1 \in K_1$ y $\xi_n^2 \rightarrow \xi_2 \in K_2$, de modo que

$$\lim_n \gamma_n.\xi_n^1 = \lim_n \gamma_n.\xi_1 = \xi_2.$$

Ahora bien, como γ_n es no estacionaria, existe un punto $z_0 \in \mathbb{H}$ tal que $\gamma_n.z_0 \rightarrow \xi^+ \in L(\Gamma)$. Si llamamos $\xi^- = \lim_n \gamma_n^{-1}.z_0 \in L(\Gamma)$ se da la siguiente dicotomía: o bien $\xi_1 = \xi^- \in L(\Gamma)$, o bien $\xi_1 \neq \xi^-$, en cuyo caso $\xi_2 = \xi^+ \in L(\Gamma)$ por el lema 1. En ambos casos se contradice la condición $\xi_1, \xi_2 \notin L(\Gamma)$, probando que la acción es propiamente discontinua. □

Proposición 2.10. *El conjunto límite $L(\Gamma)$ es el conjunto no errante de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$.*

Demostración. Aplicando la proposición A.6 del apéndice A, el lema 2.9 implica que $\Omega_\Gamma(\partial\mathbb{H}) \subset L(\Gamma)$. Para probar el otro contenido, tomemos un punto $\xi \in L(\Gamma)$ y un entorno abierto V de ξ y estudiemos la cardinalidad del conjunto

$$\Gamma_V = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V \neq \emptyset\}.$$

Como el conjunto límite $L(\Gamma)$ es minimal, la clausura $\overline{\Gamma.V} = L(\Gamma)$ y existe una sucesión no estacionaria $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_n.\xi \rightarrow \xi$. En particular $\gamma_n \in \Gamma_V$ para todo $n > 0$ concluyendo que Γ_V es infinito y por tanto $\xi \in \Omega_\Gamma(\partial\mathbb{H})$. \square

Veamos ahora algunas propiedades del conjunto

$$F(\Gamma) = \{\Gamma.u \in T^1S \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

Proposición 2.11. *El conjunto $F(\Gamma)$ es cerrado y $h_{\mathbb{R}}$ -invariante.*

Demostración. (1) El conjunto $F(\Gamma)$ es cerrado. En efecto, sea $\Gamma.u_n \in F(\Gamma)$ tal que $\Gamma.u_n \rightarrow \Gamma.u$. Existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_n(u_n) \rightarrow u$ y por tanto $\gamma_n(u_n(+\infty)) \rightarrow u(+\infty)$. Como $u_n(+\infty) \in L(\Gamma)$ y $L(\Gamma)$ es cerrado Γ -invariante, se sigue que $u(+\infty) \in L(\Gamma)$.

(2) El conjunto $F(\Gamma)$ es $h_{\mathbb{R}}$ -invariante. En efecto, sea $\Gamma.u \in F(\Gamma)$ y $s \in \mathbb{R}$. Como $h_s(u)(+\infty) = u(+\infty)$, se sigue que $h_s(\Gamma.u) \in F(\Gamma)$. \square

Conviene tener presente el siguiente diagrama que facilitará la comprensión de las aplicaciones y conjuntos consideramos.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Phi^{-1}(L(\Gamma)) \subset T^1\mathbb{H} & \xrightarrow{\Phi} & L(\Gamma) \subset \partial\mathbb{H} \\
 & \swarrow q_* & & \searrow \text{vect} & \nearrow \text{dir} \\
 F(\Gamma) \subset T^1S & & & & E(\Gamma) \subset E
 \end{array}$$

De hecho, al identificar $\partial\mathbb{H}$ con $\mathbb{R}P^1$, la aplicación $\text{dir} : E \rightarrow \partial\mathbb{H}$ es la proyección de los vectores sobre el círculo unidad en E . Con esto, ya estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Proposición 2.12. *El conjunto no errante*

$$\Omega_h(S) = F(\Gamma) = \{\Gamma.u \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

Demostración. Probemos ambos contenidos. Primero, veamos que $\Omega_h(S) \subset F(\Gamma)$. En efecto, si $x = \Gamma.u \in \Omega_h(S)$, entonces $\xi = u(+\infty) \in L(\Gamma)$, es decir, ξ es un punto no errante de $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$. Para ello, sea V un entorno abierto de ξ y veamos como antes que

$$\Gamma_V = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V \neq \emptyset\}$$

es infinito. Tomemos $\tilde{W} = \Phi^{-1}(V)$ y $W = q_*(\tilde{W})$. Como $x \in \Omega_h(S)$, existe una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$h_{s_n}(W) \cap W \neq \emptyset.$$

Por tanto existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_n(h_{s_n}(\tilde{W})) \cap \tilde{W} \neq \emptyset.$$

Como la aplicación Φ es Γ -equivariante, se tiene que

$$\gamma_n \cdot V \cap V \neq \emptyset.$$

La sucesión γ_n no es estacionaria, ya que si $\gamma_n = \gamma$ para n suficientemente grande, entonces

$$h_{s_n}(\gamma(\tilde{W})) \cap \tilde{W} \neq \emptyset,$$

lo cual no es posible porque $s_n \rightarrow +\infty$.

Para probar que $F(\Gamma) \subset \Omega_h(S)$, recordemos que existe un punto $\Gamma.u \in F(\Gamma)$ tal que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)} = F(\Gamma)$. En efecto, por dualidad, esto equivale a que exista $v \in E(\Gamma)$ tal que $\overline{\Gamma.v} = E(\Gamma)$ según hemos probado en la proposición 1.29.

De hecho, el punto $\Gamma.u \in F(\Gamma)$ verifica que $\Gamma.u \in \Omega_h(S)$ ya que, en caso contrario, existiría un abierto W en T^1S tal que $h_s(W) \cap W = \emptyset$, para todo $s \in \mathbb{R}$, lo que contradice la densidad de la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$.

Como $\Omega_h(S)$ y $F(\Gamma)$ son cerrados $h_{\mathbb{R}}$ -invariantes, deducimos que $F(\Gamma) = \overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)} \subset \Omega_h(S)$. \square

2.5. Teorema de Eberlein

Hemos visto que el conjunto no errante $\Omega_h(S)$ es dual del conjunto límite $L(\Gamma)$ y cabe esperar que las propiedades de las órbitas del flujo horocíclico puedan formularse a partir de las propiedades de los puntos límite. De hecho, esa es la idea original de Hedlund.

En lo que sigue, $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ será una superficie hiperbólica obtenida como cociente de un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ sin torsión. En $\partial\mathbb{H}$ nos podemos encontrar los siguientes tipos de puntos límite.

Definición 2.13. (i) Un punto $\xi \in L(\Gamma)$ se dice *horocíclico* si existe un punto $z \in \mathbb{H}$ tal que la órbita $\Gamma.z$ interseca a todo horodisco centrado en ξ . Esta definición no depende del punto $z \in \mathbb{H}$ escogido y denotamos por $L_h(\Gamma)$ al conjunto de puntos horocíclicos.

(ii) Un punto $\xi \in L(\Gamma)$ se dice *parabólico* si es el punto fijo de una transformación parabólica de Γ . Denotamos por $L_p(\Gamma)$ al conjunto de puntos parabólicos.

(iii) Un punto $\xi \in L(\Gamma)$ se dice *especial* si no es ni horocíclico ni parabólico. Los denotamos por $L_e(\Gamma)$.

Nos centraremos en esta sección en los puntos horocíclicos, dejando para la sección 2.7 el resto de puntos.

El estudio de la dinámica de las órbitas $h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$ cuando $u(+\infty)$ es un punto horocíclico se debe a P. Eberlein [31]. Es de hecho una generalización del teorema del Hedlund clásico al caso no compacto. La prueba que presentamos aquí se basa en la prueba dada en [27, Theorem V.3.1]. Para ello, lo primero que necesitamos es una caracterización dual de los puntos horocíclicos, la cual nos la proporciona el siguiente lema que se puede encontrar en [27, Lemma V.3.2].

Lema 2.14. *Un punto $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ es horocíclico si y sólo si existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\|\gamma_n \cdot \text{vect}(u)\| \rightarrow 0$ en E .*

Teorema 2.15 (de Eberlein). *Sea $\Gamma \cdot u \in T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ un punto tal que $u(+\infty)$ es horocíclico. Entonces la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u)$ es densa en $\Omega_h(S)$.*

2.6. Pruebas de los teoremas de Hedlund y Eberlein

En esta sección nos proponemos dar demostraciones elementales de los teoremas de Hedlund y Eberlein. Ambas prueban se basan en la siguiente proposición relativa a los puntos límite horocíclicos presentados en la sección anterior:

Proposición 2.16. *Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica y $x = \Gamma \cdot u \in T^1S$. Si el punto $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ es horocíclico, entonces la órbita $h_{\mathbb{R}}(x)$ es densa en $\Omega_h(S)$.*

Demostración. Por dualidad, debemos probar que $\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)} = E(\Gamma)$. La clave de la prueba está en el siguiente lema:

Lema 2.17. *El conjunto $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)})$ es un cerrado en $\partial \mathbb{H}$.*

Demostración. Para probar que $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)})$ es un cerrado veamos que

$$\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)}) = \overline{\Gamma \cdot u(+\infty)}.$$

Como $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)}) \subset \overline{\Gamma \cdot u(+\infty)}$, basta probar el otro contenido. Para ello, sea $\xi \in \overline{\Gamma \cdot u(+\infty)}$ y veamos que $\xi \in \text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)})$. La prueba consta de dos etapas: en la primera probaremos que $\xi = \text{dir}(v)$ pertenece a $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot v^+})$, siendo v^+ la dirección dominante de cualquier transformación hiperbólica de Γ . La segunda etapa muestra que $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot v^+}) \subset \text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)})$. Sea entonces $\gamma \in \Gamma$ una transformación hiperbólica arbitraria con autovectores v^+ y v^- , es decir,

$$\gamma \cdot v^+ = \lambda v^+, \quad \gamma \cdot v^- = \lambda^{-1} v^- \quad (\lambda > 1).$$

(I) El punto $\xi \in \text{dir}(\overline{\Gamma \cdot v^+})$. En efecto, como $\text{dir}(v^+)$ y ξ están en $L(\Gamma)$, existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_n \cdot \text{dir}(v^+) \rightarrow \xi$. La sucesión $\gamma_n \cdot v^+$ se aproxima a la recta generada por ξ , posiblemente de modo asintótico. Siempre podemos encontrar una sucesión $p_n \in \mathbb{Z}$ de modo que la sucesión

$$\gamma_n \gamma^{p_n} \cdot v^+ \rightarrow tv \in \overline{\Gamma \cdot v^+},$$

con $\text{dir}(v) = \xi$, concluyendo que $\xi \in \text{dir}(\overline{\Gamma \cdot v^+})$.

(II) El conjunto $\text{dir}(\overline{\Gamma \cdot v^+}) \subset \text{dir}(\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)})$. En efecto, sea $\gamma_n \in \Gamma$ la sucesión tal que nos proporciona el lema 2.14 y escribamos

$$\gamma_n \cdot \text{vect}(u) = a_n v^+ + b_n v^-,$$

con $a_n, b_n \rightarrow 0$. Luego

$$\gamma^n \gamma_n \cdot \text{vect}(u) = a_n \lambda^n v^+ + b_n \lambda^{-n} v^-,$$

de modo que existe una sucesión $p_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma^{p_n} \gamma_n \cdot \text{vect}(u) = a_n \lambda^{p_n} v^+ + b_n \lambda^{-p_n} v^- \rightarrow tv^+ \in \overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)},$$

de donde se deduce lo que buscábamos.

□

Continuando con la demostración de la proposición, como $u(+\infty) \in L(\Gamma)$, entonces $\text{dir}(\overline{\Gamma.\text{vect}(u)}) \subset L(\Gamma)$. Por el lema anterior, el conjunto $\text{dir}(\overline{\Gamma.\text{vect}(u)})$ es un cerrado Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$, de modo que

$$\text{dir}(\overline{\Gamma.\text{vect}(u)}) = L(\Gamma).$$

Luego deducimos que

$$\text{dir}^{-1}(\text{dir}(\overline{\Gamma.\text{vect}(u)})) = \mathbb{R}_+^* \overline{\Gamma.\text{vect}(u)} = E(\Gamma).$$

Por otra parte, la proposición 1.29 garantiza la existencia de un vector $v \in E(\Gamma)$ tal que $\overline{\Gamma.v} = E(\Gamma)$. Es decir, existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $tv \in \overline{\Gamma.\text{vect}(u)}$, de donde se deduce que

$$E(\Gamma) = t\overline{\Gamma.v} = \overline{\Gamma.tv} \subset \overline{\Gamma.\text{vect}(u)} \subset E(\Gamma),$$

con lo que queda probada la proposición. □

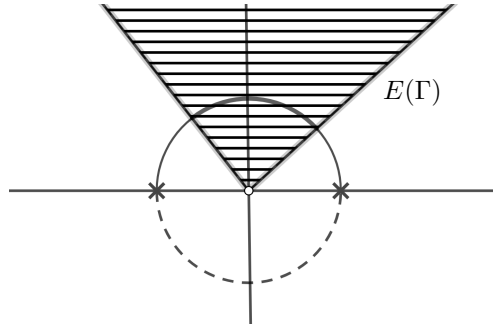


Figura 2.4: Esbozo de $E(\Gamma)$ en E

Ya estamos en condiciones de presentar las pruebas elementales de los teoremas de Hedlund y Eberlein.

Desmotración del teorema de Hedlund 2.5. Como T^1S es compacto, sabemos que existe un conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal \mathcal{M}_U dual de un conjunto minimal \mathcal{M} de la acción lineal $\Gamma \curvearrowright E$. Nuestro objetivo es ver que $\mathcal{M} = E$. La clave es el siguiente resultado:

Lema 2.18. *En las condiciones del teorema de Hedlund, si F es un conjunto cerrado y $h_{\mathbb{R}}$ -invariante de T^1S , entonces los conjuntos*

$$g_{\mathbb{R}_+}(F) = \bigcup_{t \geq 0} g_t(F) \quad \text{y} \quad g_{\mathbb{R}_-}(F) = \bigcup_{t \leq 0} g_t(F)$$

son cerrado en T^1S .

Demotración. Sea $y_n = g_{t_n}(x_n)$ una sucesión en $g_{\mathbb{R}_+}(F)$ (resp. en $g_{\mathbb{R}_-}(F)$) convergente a un punto $y \in T^1S$. Como F es compacto, la sucesión x_n converge a un punto $x \in F$. Hay dos posibilidades:

(a) Si t_n converge a un número t , entonces $y = g_t(x) \in g_{\mathbb{R}_+}(F)$ (resp. $y \in g_{\mathbb{R}_-}(F)$).

(b) Si t_n diverge, por compacidad de T^1S , la sucesión $g_{t_n}(x)$ (resp. $g_{-t_n}(x)$) también converge (no necesariamente a y). En tal caso, se dice que x no es positivamente divergente. Los puntos no positivamente divergentes se caracterizan porque el punto $u(+\infty)$ es cónico ([27, Proposition III.2.8]). Así, aplicando la proposición 2.16 obtenemos que $\overline{h_{\mathbb{R}}(x)} = T^1S$ y se sigue que $F = g_{\mathbb{R}_+}(F) = T^1S$ (resp. $g_{\mathbb{R}_-}(F) = T^1S$). \square

Continuando con la demostración del teorema, procedemos en dos pasos:

Paso I: El conjunto $\text{dir}(\mathcal{M})$ es un cerrado de $\partial\mathbb{H}$. En efecto, esto significa que

$$\text{dir}^{-1}(\text{dir}(\mathcal{M})) = \mathbb{R}_+^* \mathcal{M}$$

es cerrado en E . A su vez, esto es equivalente a que el conjunto $g_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_U)$ sea cerrado en T^1S lo cual es cierto por el lema 2.18.

Paso II: El conjunto minimal $\mathcal{M} = E$. En efecto, por el paso I, $\text{dir}(\mathcal{M})$ es un conjunto cerrado y Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$. Luego $\text{dir}(\mathcal{M}) = \partial\mathbb{H}$ por la minimalidad de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$, De donde deducimos que

$$\text{dir}^{-1}(\text{dir}(\mathcal{M})) = \mathbb{R}_+^* \mathcal{M} = E.$$

Por la proposición 1.29 sabemos que existe $v \in E$ tal que $\overline{\Gamma \cdot v} = E$, de modo que existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $tv \in \mathcal{M}$ y por consiguiente

$$E = \overline{t\Gamma \cdot v} = \overline{\Gamma \cdot tv} \subset \mathcal{M},$$

finalizando la prueba. \square

Desmotración del teorema de Eberlein. La proposición 2.16 nos proporciona la condición suficiente del teorema, luego sólo resta probar que si $x = \Gamma \cdot u \in T^1S$ verifica que $h_{\mathbb{R}}(x)$ es densa en T^1S , entonces $u(+\infty)$ es horocíclico. Por dualidad sabemos que la órbita $\Gamma \cdot \text{vect}(u)$ es densa en E , luego existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\|\gamma_n \text{vect}(u)\| \rightarrow 0$. Así, la caracterización de los puntos horocíclicos presentada en el lema 2.14 garantiza que $u(+\infty)$ es un punto horocíclico en $L(\Gamma)$. \square

2.7. Dinámica del flujo horocíclico en superficies

Los teoremas de Hedlund y Eberlein anteriores finalizan el estudio de la dinámica del flujo horocíclico correspondiente a los puntos horocíclicos en $L(\Gamma)$. Dedicamos esta sección al estudio del resto de puntos límite presentados en la definición 2.13. Recordemos que tenemos la siguiente descomposición en conjuntos disjuntos:

$$L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma) \cup L_e(\Gamma).$$

En primer lugar resolvemos la cuestión de que a un punto $x = \Gamma \cdot u \in T^1S$ le corresponda un punto límite que no está en $L(\Gamma)$.

Proposición 2.19. *Si $\Gamma \cdot u \in T^1S$ verifica $u(+\infty) \in \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$, la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u)$ es cerrada y no compacta en $T^1S \setminus \Omega_h(S)$.*

Demotración. Como la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$ es propiamente discontinua (véase el lema 2.9), es inmediato que $\overline{\Gamma \cdot \text{vect}(u)} = \Gamma \cdot \text{vect}(u)$ si $u(+\infty) \in \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$. Por dualidad, esto equivale a que $\overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u)} = h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u)$. Además, como $u(+\infty) \in \partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$, entonces $h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u) \subset T^1S \setminus \Omega_h(S)$, de modo que $h_{\mathbb{R}}(\Gamma \cdot u)$ no es compacta. \square

Estudiando ya los puntos límite en $L(\Gamma)$, empezamos por el caso más sencillo: el caso parabólico.

Proposición 2.20. *Sea $\Gamma.u \in T^1S$. El punto límite $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$ es parabólico si y sólo si la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$ es periódica en $\Omega_h(S)$. Dicho de otro modo, la órbita es cerrada y compacta.*

Demostración. Seguiremos la prueba dada en [11, Proposition 2.4.1].

(\Rightarrow) Supongamos que $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$, es decir, existe $\gamma \in \Gamma$ una transformación parabólica tal que $\gamma.u(+\infty) = u(+\infty)$. La transformación γ mueve al vector u por el horociclo que caracterizan el dicho vector y el punto en el infinity $u(+\infty)$. Es decir, existe un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma.u = h_t(u)$. Al pasar al cociente obtenemos que $\Gamma.u = h_t(\Gamma.u)$ como buscábamos.

(\Leftarrow) Supongamos que la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$ es periódica, es decir, existe un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\Gamma.u = h_t(\Gamma.u)$. Equivalentemente, existe $\gamma \in \Gamma$ una isometría tal que $\gamma.u = h_t(u)$. Por tanto deducimos inmediatamente que $\gamma.u(+\infty) = u(+\infty)$, es decir, $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$. \square

Ya sólo resta estudiar los puntos límite especiales $L_e(\Gamma)$. Este tipo de puntos no aparecen en cualquier superficie hiperbólica, sino que son característicos de las superficies geoméricamente infinitas.

2.7.1. Caso geoméricamente finito

Sea S una superficie hiperbólica. Una *cúspide* en S es una subvariedad de S que es isométrica a la *cúspide canónica* definida como el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, donde $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ es el grupo fuchsiano generado por la transformación $\gamma.z = z + 1$. En el modelo del disco se corresponde con la figura 2.5.

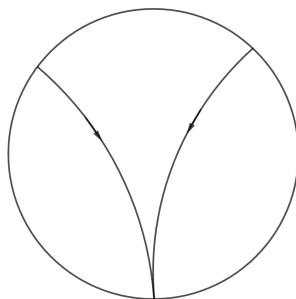


Figura 2.5: Cúspide

Una *trompeta* en S es una subvariedad de S isométrica a la *trompeta canónica* definida como el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, donde $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ es el grupo fuchsiano generado por la transformación $\gamma.z = (2z + 1)/(z + 1)$. En el modelo del disco se corresponde con la figura 2.6.

Definición 2.21. Una superficie hiperbólica se dice *geoméricamente finita* si tiene género finito y contiene, a lo sumo, un número finito de cúspides y trompetas.

Si una superficie $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es geoméricamente finita, entonces el número de lados de su dominio fundamental en \mathbb{H} es finito, de donde se sigue que

$$S \text{ es geoméricamente finita} \iff \Gamma = \pi_1(S) \text{ es finitamente generado.}$$

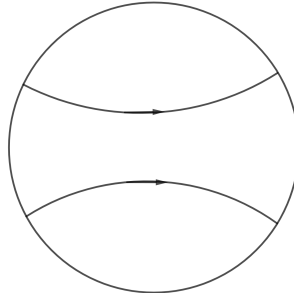


Figura 2.6: Trompeta

En [27, Theorem I.4.13] se prueba que las superficies geoméricamente finitas no tienen puntos límite especiales, es decir

$$L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma).$$

De esto se deduce lo siguiente:

Proposición 2.22. *En las superficies hiperbólicas geoméricamente finitas siempre hay conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales.*

Demostración. Como acabamos de decir, $L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$.

- (i) Si $L_p(\Gamma) \neq \emptyset$, la proposición 2.20 garantiza que hay órbitas $h_{\mathbb{R}}$ -periódicas que son $h_{\mathbb{R}}$ -minimales.
- (ii) Si $L_p(\Gamma) = \emptyset$ entonces $L(\Gamma) = L_h(\Gamma)$. Luego para cada $\Gamma.u \in \Omega_h(S)$ el punto $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$. El teorema de Eberlein 2.15 garantiza que

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)} = \Omega_h(S)$$

y $\Omega_h(S)$ es un conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal.

□

2.7.2. Caso geoméricamente infinito

Definición 2.23. Una superficie hiperbólica S es *geoméricamente infinita* si no es geoméricamente finita.

Una superficie $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es geoméricamente si y sólo si $L_e(\Gamma) \neq \emptyset$ y por tanto

$$L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma) \cup L_e(\Gamma).$$

Para el estudio de la dinámica del flujo horocíclico en superficies geoméricamente infinitas es necesario distinguir dos clases de puntos dentro de $L_e(\Gamma)$:

Definición 2.24. (i) Un punto $\xi \in L_e(\Gamma)$ se dice *discreto* si cada horodisco centrado en ξ contiene un número finito de puntos de la órbita $\Gamma.i \subset \mathbb{H}$. Denotaremos por $L_d(\Gamma)$ al conjunto de puntos discretos.

(ii) Un punto $\xi \in L_e(\Gamma)$ se dice irregular si no es discreto, es decir:

$$L_{irr}(\Gamma) = L_e(\Gamma) \setminus L_d(\Gamma) = L(\Gamma) \setminus (L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma) \cup L_d(\Gamma)).$$

El siguiente teorema caracteriza la dinámica de las órbitas correspondientes a puntos límites especiales en el caso geoméricamente infinito. Estas afirmaciones pueden verse en [30].

Teorema 2.25. Sean $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica geoméricamente infinita y $\Gamma.u \in T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Entonces,

$$(1) u(+\infty) \in L_d(\Gamma) \iff h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u) \text{ es cerrada y no compacta en } \Omega_h(S)$$

$$(2) u(+\infty) \in L_{irr}(\Gamma) \iff h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u) \text{ no es ni densa ni cerrada en } \Omega_h(S).$$

Aunque está bien determinado el tipo de $h_{\mathbb{R}}$ -órbitas, al contrario de lo que pasaba en el caso geoméricamente finito, la cuestión de la existencia de $h_{\mathbb{R}}$ -minimales sigue abierta. De hecho, hay ejemplos de superficies hiperbólicas geoméricamente infinitas que no poseen $h_{\mathbb{R}}$ -minimales. El primer ejemplo de superficies de este tipo se debe a M. Kulikov [58].

Posteriormente, en [65], S. Matsumoto usa el siguiente criterio:

Teorema 2.26 (Lemma 4.1, [65]). Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica. Si para cada $\Gamma.u \in T^1S$ existe un número $t_0 \neq 0$ tal que

$$g_{t_0}(\Gamma.u) \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)},$$

entonces no hay conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales en T^1S .

S. Matsumoto encuentra toda una familia de superficies hiperbólicas que verifican las condiciones del teorema anterior, las llama superficies *estrechas* (*tight* en el original):

Definición 2.27. Una superficie hiperbólica $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ se dice *estrecha* si:

- (i) todos los elementos de Γ son hiperbólicos,
- (ii) la superficie S es no compacta y admite una sucesión creciente de subsuperficies compactas, $S_n \subset S$ tales que:
 - (a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = S$,
 - (b) existe una cota C para las longitudes de las componente de los bordes geodésicos de las superficies S_n .

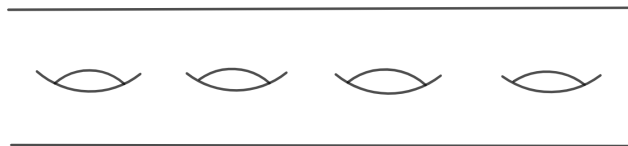


Figura 2.7: Ejemplo de superficie estrecha: escalera de Jacob

Teorema 2.28 (Theorem 1.2, [65]). *Si S es una superficie hiperbólica estrecha, entonces para cada $\Gamma.u \in T^1S$ existe un número no nulo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$g_{t_0} \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)}.$$

Como consecuencia del teorema 2.26 estas superficies no admiten conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales.

En realidad, la propiedad importante de las superficies estrechas y que utiliza el propio autor en [65, Lemma 4.2] es la siguiente: sea $\Gamma.u \in T^1S$ un vector tal que el punto límite $u(+\infty) \in L_h(\Gamma)$ es un punto horocíclico; entonces el rayo geodésico $g_{\mathbb{R}^+}(\Gamma.u)$, al proyectarlo sobre la superficie S , corta una infinidad de geodésicas cerradas de longitud acotada. Es de hecho así como lo formula A. Bellis en [11, Théorème 3.2.5].

En particular, esto garantiza que las superficies *tame* y *weakly tame* introducidas por O. Sarig en [79] no admiten conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales. Antes de dar las definiciones de este tipo de superficies, recordemos que un *pantalón* es una superficie hiperbólica homeomorfa a una esfera a la que se le han quitado tres discos. Véase la figura 2.8.

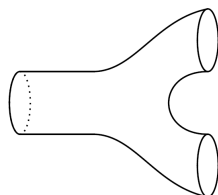


Figura 2.8: Pantalón

Definición 2.29. Una superficie hiperbólica se dice *tame* si admite una descomposición $\{P_i\}$ en pantalones tales que las longitudes de las componentes de su frontera están uniformemente acotadas por una constante C . Véase la figura 2.9.

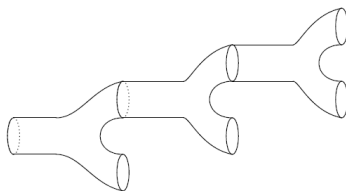


Figura 2.9: Ejemplo de superficie *tame*

Supongamos que tenemos una superficies S descompuesta en pantalones $\{P_i\}$. Decimos que un rayo geodésico sobre la superficie *traspasa* un pantalón P_i si el rayo entra y sale de P_i por dos componentes de la frontera distintas. Podría pasar que el rayo quede atrapado en un asa o entre dos pantalones adyacentes como se muestra en la figura 2.10.

Definición 2.30. Una superficie hiperbólica S se dice *weakly tame* si admite una descomposición en pantalones $\{P_i\}$ tal que todo rayo geodésico sobre S , que no quede atrapado entre dos pantalones adyacentes, traspasa una infinidad de pantalones, todos con longitudes de frontera uniformemente acotadas.

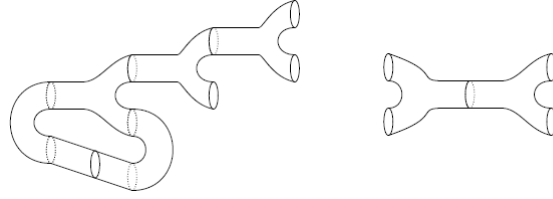


Figura 2.10: Situaciones en las que el flujo geodésico puede quedar atrapado

Más tarde, M. Gaye y C. Lo en [37] dan un resultado sobre la no existencia de $h_{\mathbb{R}}$ -minimales en función de los tipos de puntos límite en $L(\Gamma)$:

Teorema 2.31 (Corollaire 4.2, [37]). *Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica geoméricamente infinita. Si $L_p(\Gamma) \cup L_d(\Gamma) = \emptyset$ y $L_{irr}(\Gamma)$ es numerable entonces el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ restringido al conjunto no errante $\Omega_h(S)$ no admite conjuntos minimales.*

El último paso en esta dirección lo dio A. Bellis en su tesis [11].

Definición 2.32. Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica y $x = \Gamma.z \in S$ un punto. Se define el *radio de inyectividad* de S en x como:

$$Inj(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}} d(z, \gamma.z).$$

Tomemos $\alpha : [0, +\infty] \rightarrow S$ un rayo geodésico en S . Llamamos *delgadez asintótica* al límite inferior

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} Inj(\alpha(t)).$$

Teorema 2.33 (Théorème 3.2.5, [11]). *Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica geoméricamente infinita. Si la delgadez asintótica de todo rayo geodésico de S es finita, entonces no hay conjuntos $h_{\mathbb{R}}$ -minimales en T^1S salvo las órbitas periódicas.*

Capítulo 3

Variedades y fibrados foliados

3.1. Foliaciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^r con $0 \leq r \leq \infty$. Una *foliación* de dimensión $p \leq n$ y de clase C^r sobre M es una descomposición de M en subvariedades inmersas, llamadas *hojas*, de dimensión p y dispuestas de modo que localmente se parece a la descomposición canónica de \mathbb{R}^n por subespacios \mathbb{R}^p .

De esta forma, el primer ejemplo de foliación se obtiene al considerar \mathbb{R}^n y definir la hoja que pasa por $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ como el plano

$$L_y = \{ (x', y) \in \mathbb{R}^n \mid x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p \} = \mathbb{R}^p \times \{y\}$$

de dimensión p . Se dice que la familia $\mathcal{F} = \{L_y \mid y \in \mathbb{R}^q\}$ es una *foliación de dimensión p y codimensión q* de \mathbb{R}^n y el par $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})$ es una *variedad foliada*.

Definición 3.1. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n y clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, se llama *atlas foliado* de dimensión p y clase C^r a un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ formado por C^r -difeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$$

definidos sobre abiertos U_α que recubren M , siendo B^p y B^q bolas abiertas de radio unidad centradas en el origen en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q con $n = p + q$, que verifica la siguiente condición: si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

está dado por:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (g_{\alpha\beta}(x, y), h_{\alpha\beta}(y)).$$

A los elementos $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ del atlas foliado se les llama *cartas foliadas* y a los abiertos U_α *abiertos foliados* o *distinguidos*. Las subvariedades embebidas $P_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B^p \times \{y\})$ de dimensión p y $T_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\{x\} \times B^q)$ de dimensión q se llaman *placas* y *transversales* (locales) respectivamente. La unión disjunta $T = \bigsqcup_{\alpha \in A} T_\alpha$ se llama *transversal completa*. Por definición, si dos abiertos foliados U_α y U_β se cortan, la unión de dos placas P_α y P_β que pasan por un punto de la intersección sigue siendo una subvariedad embebida y conexa de dimensión p .

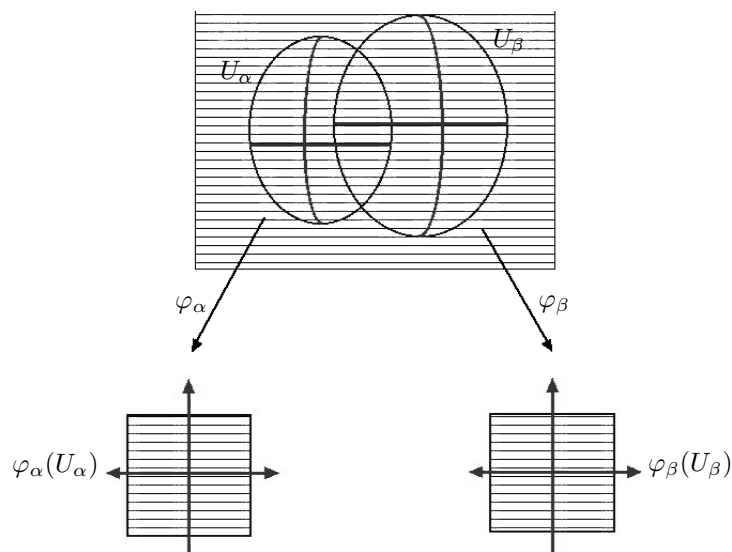


Figura 3.1: Cambio de cartas foliadas

Definición 3.2. Se llama *hoja* a una unión conexas y maximal de placas. Por construcción, cada hoja es una subvariedad débilmente embebida de dimensión p de M . Por cada punto $x \in M$ (resp. $y \in T$) pasa exactamente una hoja que denotaremos por L_x (resp. L_y).

Definición 3.3. La descomposición $\mathcal{F} = \{L_x\}_{x \in M} = \{L_y\}_{y \in T}$ de M se llama *foliación* (de dimensión p , codimensión q y clase C^r) de M definida por el atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Al igual que en el caso de las variedades, dos atlas foliados definen la misma foliación \mathcal{F} , en cuyo caso se dicen *equivalentes*, si la unión sigue siendo un atlas foliado. Suele ser habitual representar las variedades foliadas por atlas con buenas propiedades:

Definición 3.4. Un atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sobre M un *buen atlas foliado* si A es numerable y

- (1) el recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finito (resp. finito si la variedad M es compacta),
- (2) cada abierto foliado U_α es relativamente compacto,
- (3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces existe un abierto foliado $U_{\alpha\beta}$ (que no pertenece necesariamente al atlas) tal que $U_\alpha \cup U_\beta \subset U_{\alpha\beta}$.

La condición (3) garantiza que una placa de U_α corta a lo sumo a una placa de U_β , evitando situaciones como la que se muestra en la figura 3.2.

Ejemplos 3.5. (1) Si $M = B \times F$ es el producto de una variedad B de dimensión p y una variedad F de dimensión q , entonces $\mathcal{H} = \{B \times \{y\} \mid y \in F\}$ es una foliación de dimensión p y $\mathcal{V} = \{\{x\} \times F \mid x \in B\}$ es una foliación de dimensión q . Se llaman foliación *horizontal* y *vertical* de M .

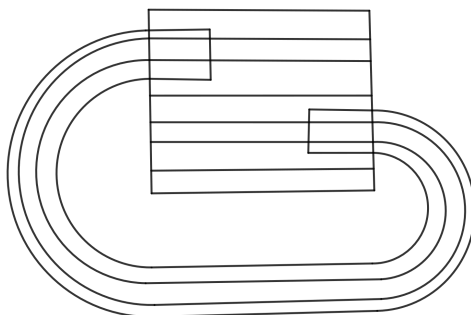


Figura 3.2: Abiertos foliados de un atlas que no es bueno

(2) Si $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} B$ es un fibrado localmente trivial, entonces la partición $\mathcal{V} = \{\pi^{-1}(x) \mid x \in B\}$ es una foliación de M . En efecto, si $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas de trivialidad local del fibrado, entonces $\{V_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de B y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & F \times V_\alpha \\ & \searrow \pi & \swarrow p_2 \\ & & V_\alpha \end{array}$$

es conmutativo para cada $\alpha \in A$. Esto muestra que los cambios de trivialización son de la forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x, y) \in F \times (V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow (g_{\alpha\beta}(x), y) \in F \times (V_\alpha \cap V_\beta).$$

Sustituyendo el recubrimiento abierto $\{V_\alpha\}$ de B por un refinamiento por abertos difeomorfos a bolas de \mathbb{R}^q con $q = \dim B$, que seguiremos denotando $\{V_\alpha\}$, y restringiendo el rango de las cartas de trivialidad local al producto por los abertos V_α de entornos abiertos U_y de puntos $y \in F$ difeomorfos a bolas en \mathbb{R}^p con $p = \dim F$, entonces los abertos $\varphi_\alpha^{-1}(U_y \times V_\alpha)$ y las restricciones de las cartas de trivialidad φ_α a dichos abertos forman un atlas foliado sobre M . La clase de diferenciabilidad es obviamente la de la fibriación.

(3) Dado un número irracional $\theta \notin \mathbb{Q}$, la acción $\mathbb{R} \curvearrowright T^2$ definida por el flujo

$$\Phi_t(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) = (e^{2\pi i(x+t)}, e^{2\pi i(y+t\theta)})$$

determina una foliación de dimensión 1 con hojas densas (descrita en la figura 3.3). En efecto, el flujo levantado a \mathbb{R}^2 determina una foliación del plano por rectas de pendiente irracional θ y basta restringirse a bolas de radio estrictamente menor que 1 (con la distancia del máximo) para obtener por paso al cociente una atlas foliado sobre el toro. En realidad, las hojas de la foliación son las órbitas de la acción de un subgrupo de Lie denso (a saber, la órbita del elemento neutro) del grupo de Lie T^2 .

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada de dimensión p , codimensión q y clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$. Para cada hoja $L \in \mathcal{F}$, denotamos por TL al fibrado tangente a L , es decir, $TL = \bigsqcup_{x \in L} T_x L$ dotado de la estructura de C^{r-1} fibrado vectorial usual. Por construcción, como la inclusión de L en M

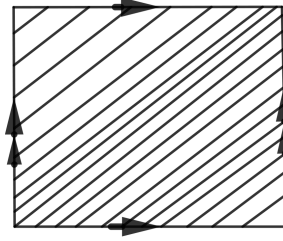


Figura 3.3: Foliación lineal del toro

es una C^r inmersión, TL es un subfibrado vectorial de TM . De hecho, dada una carta foliada $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^p \times B^q$, si consideramos la *aplicación distinguida*

$$\pi_\alpha = p_2 \circ \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow B^q,$$

entonces las placas de U_α coinciden con las fibras de π_α . Por consiguiente, si denotamos $T\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ a la unión de los fibrados tangentes a las placas de U_α , entonces $T\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ coincide con el núcleo de la aplicación tangente

$$(\pi_\alpha)_* : TU_\alpha \rightarrow TB^q = B^q \times \mathbb{R}^q,$$

es decir, un vector $v \in TU_\alpha \subset TM$ es *tangente a \mathcal{F}* si $(\pi_\alpha)_*(v) = 0$ en TB^q . Las aplicaciones tangentes

$$(\varphi_\alpha)_* : TU_\alpha \rightarrow TB^p \oplus TB^q = B^p \times B^q \times \mathbb{R}^n$$

definen por restricción C^{r-1} difeomorfismos

$$\tau_\alpha : T\mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow TB^p = B^p \times \mathbb{R}^p.$$

Definición 3.6. Se llama *fibrado tangente a la foliación \mathcal{F}* a la unión

$$T\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} TL$$

dotada de la estructura de C^{r-1} fibrado vectorial que definen las cartas de trivialidad

$$\tau_\alpha : T\mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow TB^p = B^p \times \mathbb{R}^p.$$

Fijada una métrica riemanniana g sobre la variedad M se define el *fibrado tangente unitario a la foliación \mathcal{F}* como la unión

$$Y = T^1\mathcal{F} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{F}} T^1L$$

con la estructura de fibrado localmente trivial correspondiente. De hecho para definir este espacio es suficiente con tener una métrica hoja a hoja:

Definición 3.7. Dada una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , una *métrica foliada* es una familia de métricas $g = \{g_L\}_{L \in \mathcal{F}}$ de métricas riemannianas sobre las hojas que varía localmente de modo C^r -diferenciable ($r \geq 0$) al pasar de una hoja a otra.

Luego, Y es también una variedad foliada cuyas hojas son los tangentes unitarios T^1L a las hojas L de la foliación \mathcal{F} . Denotaremos por \mathcal{F}_Y a dicha foliación.

Notemos que $T\mathcal{F} \subset TM$ es un subfibrado vectorial de rango p del fibrado tangente a M y en particular una variedad de dimensión $n + p$. De igual modo, $T^1\mathcal{F}$ es una variedad de dimensión $n + p - 1$ dotada de una estructura de subfibrado del fibrado T^1M . Además el fibrado $T\mathcal{F}$ es *involutivo*, es decir, el corchete de Lie de dos campos de vectores sobre $T\mathcal{F}$ sigue estando en $T\mathcal{F}$ en restricción a un entorno abierto de cada punto de M . De hecho, el teorema de Frobenius [49, Ch. II, Theorem 2.3.5] nos asegura que si $E \subset TM$ es un C^r subfibrado vectorial integrable de rango p , entonces M admite una foliación \mathcal{F} de dimensión p y clase C^r tal que $E = T\mathcal{F}$.

Cociclos foliados

Otra forma habitual de definir una foliación sobre una variedad M es mediante cociclos foliados. Denotamos por $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ al pseudogrupo de difeomorfismos locales de \mathbb{R}^n .

Definición 3.8. Sea M una variedad de dimensión m y sea $n \leq m$. Llamamos *cociclo foliado con valores en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$* a un par $(\{U_\alpha, \pi_\alpha\}, \{g_{\alpha\beta}\})$ donde $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de M , las aplicaciones $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ son submersiones y siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ las aplicaciones

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$$

son localmente constantes y verifican

$$\pi_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)(\pi_\beta(x)) \quad \text{para cada } x \in U_\alpha \cap U_\beta. \quad (3.1)$$

Notemos que si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ se verifica la *condición de cociclo*:

$$g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x).$$

En efecto, cada submersión π_α genera una foliación en el correspondiente U_α . La condición 3.1 nos asegura que estas foliaciones se pegan bien en las intersecciones de los abiertos generando así una foliación \mathcal{F} sobre la variedad M . Para ver los detalles remitimos a [49, Chapter II, §2.1.5]

3.2. Suspensiones

Nos vamos a interesar por un tipo particular de foliaciones, llamadas *suspensiones*, que se construyen de modo especialmente simple. Como puede verse en [49, Ch. II, §1] el concepto de *suspensión* es equivalente al aparentemente más general de *fibrado foliado*.

Sea F una variedad de dimensión p y clase C^r con $0 \leq r \leq \infty$ y $h : F \rightarrow F$ un C^r difeomorfismo. Se llama *acción diagonal* de \mathbb{Z} sobre el producto $\mathbb{R} \times F$ a la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times F$ generada por

$$H(t, x) = (t + 1, h(x)).$$

Como la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ es libre y propiamente discontinua, la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times F$ lo es también. Luego la proyección canónica $q : \mathbb{R} \times F \rightarrow M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times F)$ es una cubierta regular de grupo \mathbb{Z} . Como la fibrición trivial $p_1 : \mathbb{R} \times F \rightarrow \mathbb{R}$ es equivariante respecto de ambas acciones, induce por paso al cociente una fibrición localmente trivial $\pi : M \rightarrow S^1$ de fibra F . Por su parte, la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\mathbb{R} \times \{y\}\}$ (definida por la proyección canónica $p_2 : \mathbb{R} \times F \rightarrow F$) también es invariante por H y

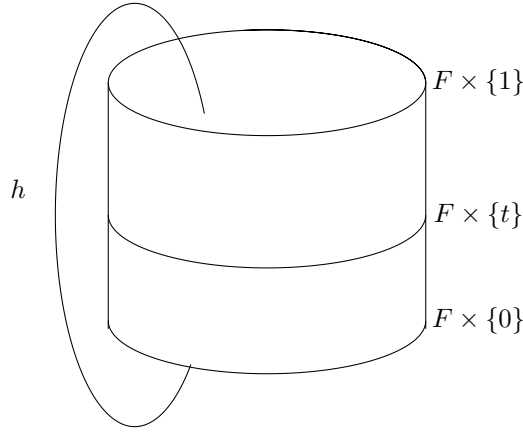


Figura 3.4: Suspensión de un homeomorfismo

pasa al cociente en una foliación \mathcal{F} sobre M . La hoja $\mathbb{R} \times \{y\}$ de \mathcal{H} se proyecta sobre una hoja L_y de \mathcal{F} obtenida como cociente de \mathbb{R} por la acción del subgrupo

$$\Gamma_y = \{n \in \mathbb{Z} \mid h^n(y) = y\}$$

de $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Definición 3.9. Se dice que la variedad foliada (M, \mathcal{F}) es *suspensión* del difeomorfismo h .

Ejemplo 3.10. La foliación del toro T^2 por rectas de pendiente irracional presentada en el ejemplo 3.5.(3) es un ejemplo de suspensión de un difeomorfismo. Basta considerar $F = S^1$ y tomar como difeomorfismo $R_\theta : \zeta \in S^1 \rightarrow e^{2\pi i\theta}\zeta \in S^1$ la rotación de ángulo irracional θ .

Para generalizar la construcción anterior, consideremos una variedad diferenciable S de dimensión p y clase C^r , $0 \leq r \leq \infty$, y denotemos $\Gamma = \pi_1(S)$ su grupo fundamental. Fijemos una representación $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ en el grupo de los C^r difeomorfismos de la variedad F . Recordemos que Γ es isomorfo al grupo de automorfismos de la cubierta universal $q : \tilde{S} \rightarrow S$ y define por consiguiente una acción libre y propiamente discontinua $\Gamma \curvearrowright \tilde{S}$.

En la nueva situación, se llama *acción diagonal* a la acción $\Gamma \curvearrowright \tilde{S} \times F$ definida por

$$\gamma \cdot (\tilde{x}, y) = (\gamma \cdot \tilde{x}, h(\gamma)(y))$$

para cada $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{x} \in \tilde{S}$ e $y \in F$. Como antes, la acción diagonal es libre y propiamente discontinua (ya que Γ actúa de ese modo sobre \tilde{S}) y define una cubierta regular $\pi : \tilde{S} \times F \rightarrow M = \Gamma \backslash (\tilde{S} \times F)$ de grupo Γ . La proyección canónica $p_1 : \tilde{S} \times F \rightarrow \tilde{S}$ es equivariante respecto de las acciones $\Gamma \curvearrowright \tilde{S} \times F$ y $\Gamma \curvearrowright \tilde{S}$ y por consiguiente induce por paso al cociente una fibración localmente trivial $\pi : M \rightarrow S$ de fibra F que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{S} \times F & \xrightarrow{p_1} & \tilde{S} \\
 \downarrow \tilde{q} & & \downarrow q \\
 M = \Gamma \backslash (\tilde{S} \times F) & \xrightarrow{\pi} & S.
 \end{array} \tag{3.2}$$

En efecto, si V es un abierto contráctil de S y \tilde{V} es una componente conexa de $q^{-1}(V)$, entonces la restricción $\tilde{q}|_{\tilde{V} \times S^1} : \tilde{V} \times S^1 \rightarrow \pi^{-1}(V)$ es un C^r difeomorfismo y define una trivialización local de π al componer su inversa con la proyección $q|_{\tilde{V}} \times id : \tilde{V} \times S^1 \rightarrow V \times S^1$.

Por otra parte, la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{\tilde{S} \times \{y\}\}$ es invariante por la Γ -acción y pasa al cociente en una foliación \mathcal{F} de M . El argumento es similar al empleado con la fibración π . Si definimos

$$\Gamma_y = \{\gamma \in \Gamma \mid h(\gamma)(y) = y\}$$

entonces la hoja $\tilde{S} \times \{y\}$ de \mathcal{H} se proyecta en la hoja L_y de \mathcal{F} obtenida al cocientar por la acción libre y propiamente discontinua de Γ_y y tenemos el siguiente diagrama de cubiertas:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{S} \times \{y\} & \xrightarrow{\tilde{q}|_{\tilde{S} \times \{y\}}} & \\
 \downarrow q & & \searrow \\
 & & L_y = \Gamma_y \backslash (\tilde{S} \times \{y\}). \\
 & \swarrow & \\
 S & \xleftarrow{\pi|_{L_y}} &
 \end{array} \tag{3.3}$$

Como la foliación horizontal \mathcal{H} es transversa a la fibración trivial $p_1 : \tilde{S} \times F \rightarrow \tilde{S}$, la foliación \mathcal{F} es transversa a la fibración inducida $\pi : M \rightarrow B$. Luego $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} S$ es un fibrado foliado en el sentido de [49, Chapter II, §1].

Definición 3.11. Se dice que (M, \mathcal{F}) es la *suspensión de la representación h* .

Ejemplo 3.12. Sea $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ una matriz no singular con entradas enteras. Esta condición garantiza que la matriz A induce un automorfismo lineal del toro $T^2 = \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$, que seguiremos denotando del mismo modo y actúa sobre T^2 de modo natural.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T^2 \\
 \downarrow A & & \downarrow A & & \downarrow A \\
 \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T^2.
 \end{array} \tag{3.4}$$

De esta forma, obtenemos una acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \times T^2$ generada por el automorfismo

$$f(t, [x, y]) = (t + 1, [A(x, y)]),$$

donde $[x, y]$ denota el punto de T^2 de coordenadas angulares (x, y) . La variedad

$$T_A^3 = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times T^2)$$

es una variedad compacta de dimensión 3 dotada de una estructura natural de fibrado sobre S^1 con fibra T^2 :

$$\begin{array}{ccccc}
 T^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times T^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 \parallel & & \downarrow \mathbb{Z} & & \downarrow \mathbb{Z} \\
 T^2 & \longrightarrow & T_A^3 & \longrightarrow & S^1.
 \end{array} \tag{3.5}$$

y de una foliación \mathcal{F} transversa de dimensión 1. Si la matriz A es hiperbólica (es decir, si $|trA| > 2$), la foliación \mathcal{F} se denomina *flujo de Anosov*, véase [20, Ch. 1].

3.3. Holonomía de una suspensión

Consideremos la suspensión de una representación $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ descrita mediante el diagrama (3.2). Hemos visto en la sección anterior que la aplicación

$$\pi_y = \pi|_{L_y} : L_y = \Gamma_y \backslash \tilde{S} \longrightarrow S$$

es una cubierta. Por tanto, fijados puntos $\tilde{x} \in \tilde{S}$ y $x = q(\tilde{x}) \in S$, dicha aplicación induce un monomorfismo de grupos

$$i = (\pi_y)_* : \Gamma_y = \pi_1(L_y, z) \longrightarrow \Gamma = \pi_1(S, x)$$

donde el punto $z = \tilde{q}(\tilde{x}, y) \in L_y$ se identificará en lo sucesivo con el punto $y \in F$. Con este abuso de lenguaje, la aplicación $hol_y : \Gamma_y \rightarrow \text{Difeo}^r(F, y)$ definida mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_y & \xrightarrow{hol_y} & \text{Difeo}^r(F, y) \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 \Gamma & \xrightarrow{h} & \text{Difeo}^r(F),
 \end{array} \tag{3.6}$$

se llama *representación de holonomía de L_y* . En el diagrama anterior, denotamos por $\text{Difeo}_+(F, y)$ al grupo de los C^r difeomorfismos de F que dejan fijo el punto y . El grupo de gérmenes

$$hol(L_y) = \{ \langle h \rangle_y \mid h \in \text{Im } hol_y \}$$

se llama *grupo de holonomía de la hoja L_y* .

En el caso de suspensiones, la imagen de la representación $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ se denomina *grupo de holonomía de \mathcal{F}* y se denota por $hol(\mathcal{F})$ de modo que la imagen del homomorfismo hol_y es la isotropía de $hol(\mathcal{F})$ en y . En general, la dinámica de una variedad foliada (M, \mathcal{F}) es descrita mediante un pseudogrupo de transformaciones de la transversal T , llamado *pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F}* , descrito en [49, Ch. III]. El grupo de holonomía de la hoja L que pasa por un punto de $T \subset M$ está formado por los gérmenes de los elementos del pseudogrupo que fijan ese punto. En el caso de las suspensiones el pseudogrupo de holonomía se reduce al grupo de holonomía $hol(\mathcal{F})$. El principio de dualidad puede formularse en este contexto mediante la equivalencia de pseudogrupos o grupoides introducida por A. Haefliger [45, 46]. Esta propiedad es compartida por las foliaciones de Lie y las foliaciones transversalmente homogéneas completas.

3.4. Foliaciones por superficies hiperbólicas

Para extender el teorema de Hedlund clásico al contexto foliado, necesitamos introducir un tipo de variedades foliadas análogas a las superficies hiperbólicas en las que sea posible definir el flujo horocíclico. Dicho flujo se definirá de modo natural sobre el tangente unitario $T^1\mathcal{F}$ de foliaciones cuyas hojas sean hiperbólicas en el sentido que vamos a precisar a continuación.

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad compacta foliada por superficies y tomemos g una métrica riemanniana sobre M . Dada una hoja L de \mathcal{F} , la métrica g induce una métrica $g|_L$ sobre L tal que $(L, g|_L)$ es una superficie riemanniana completa.

Definición 3.13. En las condiciones anteriores, diremos que la foliación \mathcal{F} es una *foliación por superficies hiperbólicas* si para cada hoja $(L, g|_L)$ de \mathcal{F} su cubierta universal $(\tilde{L}, \tilde{g}|_{\tilde{L}})$ es conformemente equivalente a (\mathbb{H}, g_0) según la definición 1.35.

De acuerdo con lo expuesto en la sección 1.7 del primer capítulo, cada hoja L de la foliación \mathcal{F} admite una métrica g'_L conformemente equivalente a $g|_L$ tal que (L, g'_L) es una superficie hiperbólica.

La primera cuestión es saber si existe una métrica global g' sobre M , conformemente equivalente a g y tal que $(L, g'|_L)$ sea una superficie hiperbólica. El siguiente resultado, debido originalmente a Ghys [39] y que puede verse en [5, Theorem B], da una respuesta parcial a esta cuestión.

Teorema 3.14. *Sea (M, \mathcal{F}, g) una foliación compacta por superficies hiperbólicas. Entonces existe una métrica g' conformemente equivalente a g tal que la curvatura de las hojas $(L, g'|_L)$ está uniformemente acotada entre dos constantes negativas.*

Si queremos que todas las hojas tengan curvatura constante igual a -1, tenemos que recurrir al teorema de uniformización de Candel [22] y Verjovsky [87], que también se puede consultar en [6]. Este resultado proporciona una uniformización hoja a hoja transversalmente continua, lo cual es suficiente para nuestros propósitos.

Teorema 3.15. *Sea (M, \mathcal{F}, g) una foliación compacta por superficies hiperbólicas. Entonces existe una métrica hoja a hoja g' sobre M , transversalmente continua, conformemente equivalente a g en cada hoja y tal que las hojas (L, g'_L) son superficies hiperbólicas.*

De hecho, en [6, Théorème A], se prueba que la prescripción de curvatura de las superficies (véase el teorema 1.37) sigue siendo válida para foliaciones compactas por superficies hiperbólicas.

Teorema 3.16 (Prescripción de curvatura). *Sea (M, \mathcal{F}, g) una foliación compacta por superficies hiperbólicas y $\kappa : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva, diferenciable sobre las hojas y transversalmente continua. Entonces existe una métrica foliada g' sobre M , transversalmente continua, conformemente equivalente a g en cada hoja y tal que la curvatura de las hojas en cada punto viene dada por la función $-\kappa$.*

Hay ciertas foliaciones para las que la métrica foliada g' es transversalmente diferenciable. Una condición suficiente para esto es la existencia de un sistema completo de tubos normales (véase [6, Théorème 5.8]). En particular, los siguientes tipos de foliaciones admiten una uniformización transversalmente diferenciable:

- (1) las suspensiones de representaciones de grupos de superficie,
- (2) las foliaciones de Lie, que presentaremos más adelante,

(3) las foliaciones riemannianas, que también aparecerán posteriormente.

De hecho, la uniformización diferenciable en el caso de suspensiones es inmediata. En efecto, sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano sin torsión, F una variedad y $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}(F)$ una representación. Recordemos la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times F$ dada por

$$\gamma \cdot (z, f) = (\gamma(z), h(\gamma)(f)),$$

determina una variedad $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times F)$ junto a una foliación \mathcal{F} donde las hojas son $L_f = \Gamma_f \backslash \mathbb{H}$, con $\Gamma_f < \Gamma$ el subgrupo de isotropía de $f \in F$.

La métrica foliada \tilde{g} sobre la variedad producto $\mathbb{H} \times F$ obtenida a partir de la métrica de Poincaré g_0 sobre \mathbb{H} varía de modo claramente diferenciable. Por construcción pasa al cociente en una métrica foliada g , transversalmente diferenciable tal que cada hoja $(L, g|_L)$ de \mathcal{F} es una superficie hiperbólica.

A partir de este momento, salvo que se diga lo contrario, siempre que digamos que (M, \mathcal{F}) es una foliación por superficies hiperbólicas, vamos a suponerla ya uniformizada por una métrica hoja a hoja que haga de cada hoja una superficie hiperbólica. La métrica uniformizante variará transversalmente de modo continuo en general y de modo diferenciable en los casos en los que se puede garantizar.

3.5. Flujos foliados

Consideremos (M, \mathcal{F}) una variedad compacta foliada por superficies hiperbólicas. Recordemos que el fibrado tangente unitario a la foliación $Y = T^1\mathcal{F}$ es una variedad foliada, donde las hojas \mathcal{F}_Y son los tangentes unitarios a las hojas de la foliación \mathcal{F} . Es decir, identificamos cada hoja con $T^1L = \Gamma_L \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ para cierto grupo fuchsiano $\Gamma_L < PSL(2, \mathbb{R})$ en general distinto para cada hoja.

Esto nos permite definir de modo natural una acción

$$T^1\mathcal{F} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$$

sin más que definirla hoja a hoja.

Definición 3.17. A partir de la acción anterior se define el *flujo horocíclico foliado* como la acción por la derecha $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$ del grupo unipotente $U < PSL(2, \mathbb{R})$. Análogamente, el *flujo geodésico* será la acción natural $T^1\mathcal{F} \curvearrowright D$ del grupo diagonal D .

La combinación del flujo horocíclico y geodésico define la *acción afín* como la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$ del grupo afín B .

Con estas sencillas definiciones ya estamos en condiciones de preguntarnos lo siguiente:

Cuestión 3.18. Dada (M, \mathcal{F}) una variedad foliada por superficies hiperbólicas, ¿es el flujo horocíclico $T^1\mathcal{F} \curvearrowright U$ minimal?

Esta cuestión tan general está lejos de ser respondida. El objetivo de la tesis es estudiar esta cuestión en ciertos casos particulares pero lo suficientemente generales. En particular, se estudiarán las foliaciones de Lie y cierto tipo de suspensiones. Una primera condición necesaria para la minimalidad del flujo horocíclico es la minimalidad de la propia foliación.

3.6. Hipótesis de minimalidad de la foliación

Ejemplo 3.19. Supongamos que $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ es una superficie hiperbólica compacta y sea F una variedad cualquiera. La variedad producto $M = S \times F$ está trivialmente foliada por la foliación horizontal $\mathcal{H} = \{S \times \{f\} \mid f \in F\}$. El tangente unitario a dicha foliación se corresponde con $T^1\mathcal{H} = T^1S \times F$. Como el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ está definido hoja a hoja, el teorema de Hedlund clásico 2.2 nos asegura que $\overline{h_{\mathbb{R}}(x, f)} = S \times \{f\}$ para cada $x \in S$ y $f \in F$.

Este ejemplo pone de manifiesto que sin hipótesis adicionales sobre la foliación, no es posible garantizar la minimalidad del flujo horocíclico.

Hipótesis general 3.20. Supondremos siempre que la foliación \mathcal{F} sobre la variedad M es minimal, es decir, todas sus hojas son densas. Equivalentemente, la foliación \mathcal{F}_Y sobre el tangente unitario a la foliación Y es minimal.

Una vez fijada la condición de minimalidad de la foliación, es conveniente formular un principio de dualidad foliado, análogo al presentado para superficies 2.3, que será clave posteriormente.

3.7. Principio de dualidad foliado

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad compacta foliada por superficies hiperbólicas y $q : (\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow (M, \mathcal{F})$ su cubierta universal. Luego $M = \Gamma \backslash \tilde{M}$ para cierto grupo $\Gamma < \text{Isom}(\tilde{M})$.

Con estas notaciones se sigue inmediatamente que $T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash T^1\tilde{\mathcal{F}}$, donde Γ actúa sobre $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ mediante la diferencial. Como la foliación la suponemos por superficies hiperbólicas, tenemos una acción natural

$$T^1\tilde{\mathcal{F}} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$$

definida hoja a hoja.

Proposición 3.21 (Principio de dualidad). *El flujo horocíclico $T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash T^1\tilde{\mathcal{F}} \curvearrowright U$ es minimal si y solo si la acción inducida $\Gamma \curvearrowright T^1\tilde{\mathcal{F}}/U$ es minimal.*

Notemos en primer lugar que el principio de dualidad anterior funciona igual si sustituimos el grupo U por cualquier otro subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$. En particular nos interesaremos por la acción afín $T^1\mathcal{F} \curvearrowright B$, cuya dinámica será equivalente a la acción $\Gamma \curvearrowright T^1\tilde{\mathcal{F}}/B$.

Apliquemos este principio de dualidad al caso de una suspensión para manifestar su importancia.

Ejemplo 3.22. En el caso de la suspensión de una representación $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}(F)$ de un grupo fuchsiano, tenemos una descripción algebraica de la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$. En efecto, como

$$T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash T^1\mathcal{H} = \Gamma \backslash (T^1\mathbb{H} \times F),$$

donde la acción $\Gamma \curvearrowright T^1\mathbb{H} \times F = PSL(2, \mathbb{R}) \times F$ viene dada por

$$\gamma \cdot (u, f) = (\gamma(u), h(\gamma)(f)),$$

entonces la acción $T^1\mathcal{F} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ es la multiplicación por la derecha sobre el primer factor.

En particular, el *flujo horocíclico foliado*, definido como la acción

$$T^1\mathcal{F} = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times F) \curvearrowright U$$

quedaría definido por

$$h_s(\Gamma(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, f)) = \Gamma(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f).$$

Por dualidad, este flujo horocíclico es dual a la acción diagonal

$$\Gamma \curvearrowright E \times F.$$

Luego, la minimalidad del flujo horocíclico se traduce en la minimalidad de la acción $\Gamma \curvearrowright E \times F$, lo que implica que la acción $\Gamma \curvearrowright F$ debe ser minimal, lo que nos da una condición necesaria para la minimalidad del flujo horocíclico. De hecho, esta condición no es más que la minimalidad de la foliación tal como la expresamos en la hipótesis general 3.20. Es más, en el caso de suspensiones esta condición se puede expresar de cualquiera de las siguientes maneras:

- (1) la foliación \mathcal{F} sobre M es minimal,
- (2) la foliación \mathcal{F}_Y sobre $Y = T^1\mathcal{F}$ es minimal,
- (3) la acción $\Gamma \curvearrowright F$ es minimal,
- (4) la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times F) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ es minimal.

Como ya dijimos, la B -acción sobre $T^1\mathcal{F}$ será clave en el estudio del flujo horocíclico. Por dualidad, su dinámica es dual a la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times F$ dada por

$$\gamma \cdot (\xi, f) = (\gamma(\xi), h(\gamma)(f)).$$

Capítulo 4

Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie homogéneas

4.1. Foliosaciones de Lie

Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Las G -foliaciones de Lie se suelen definir usando cociclos foliados con valores en el propio grupo [49] o mediante formas diferenciales [33]. Sin embargo, en nuestro contexto es más conveniente usar la siguiente caracterización de E. Fedida [33] como punto de partida:

Definición 4.1. Una foliación \mathcal{F} sobre una variedad compacta M es una G -foliación de Lie si existen:

- (1) un grupo discreto Γ que actúa diferenciablemente y de manera libre y propiamente discontinua sobre una variedad \tilde{M} ,
- (2) un homomorfismo de grupos $h : \Gamma \rightarrow G$,
- (3) una fibración localmente trivial Γ -equivariante $D : \tilde{M} \rightarrow G$:

$$D(\gamma.\tilde{x}) = h(\gamma)D(\tilde{x}),$$

tal que $M = \Gamma \backslash \tilde{M}$ y \mathcal{F} es la foliación inducida por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ definida por D sobre \tilde{M} .

A la cubierta $q : \tilde{M} \rightarrow M$ se le llama *cubierta de holonomía* de M , al grupo Γ *grupo de holonomía*, a h *representación de holonomía* y a D *aplicación de desarrollo*.

Observación 4.2.

- (1) Como D es un fibrado localmente trivial, todas las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ son difeomorfas entre sí. Por tanto todas las hojas difeomorfas entre sí y difeomorfas al cociente $L = \text{Ker}h \backslash \tilde{L}$ siendo $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{F}}$ una hoja cualquiera.
- (2) Sustituyendo \tilde{M} por la cubierta universal podemos suponer que $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ y $\Gamma \cong \pi_1(M)$.

Como la variedad M es compacta, podemos tomar una métrica riemanniana g que hace a M una variedad riemanniana completa. Una métrica así permite una descomposición

$$TM = T\mathcal{F} \oplus N\mathcal{F}.$$

De esta forma, la cubierta \tilde{M} es también una variedad riemanniana completa dotada de la métrica levantada $\tilde{g} = q^*g$. De nuevo se tiene una descomposición

$$T\tilde{M} = T\tilde{\mathcal{F}} \oplus N\tilde{\mathcal{F}},$$

donde $N\tilde{\mathcal{F}} \cong TG$. Es de hecho ésto lo que permite probar a M. E. Fedida el teorema de estructura usado al comienzo de la sección. El punto clave es que podemos modificar la métrica $\tilde{g} = q^*g$ para que la aplicación $D : \tilde{M} \rightarrow G$ sea una submersión riemanniana dotando a G la métrica invariante por la izquierda.

La modificación explícita de la métrica \tilde{g} es exactamente la que hace P. Molino en [66, Chapter 3, Proposition 3.3], de modo que la nueva métrica será una *métrica casi-fibrada*, y aplicando [66, pp. 79-80], se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3. *Toda foliación de Lie es una foliación riemanniana.*

Supongamos ahora que la foliación de Lie \mathcal{F} sobre M es por superficies hiperbólicas tal como lo describimos en 3.4. En este caso, para cada $g \in G$, la hoja $(\tilde{L}_g, \tilde{g}|_{\tilde{L}_g})$ está en la misma clase conforme que el plano de Poincaré (\mathbb{H}, g_0) , dicho de otro modo la superficie $(\tilde{L}_g, \tilde{g}|_{\tilde{L}_g})$ tiene curvatura constante negativa.

Como \tilde{M} y G son simplemente conexos, si consideramos la sucesión exacta larga de homotopía asociada a D ,

$$\dots \rightarrow \pi_2(G) \rightarrow \pi_1(\tilde{L}) \rightarrow \pi_1(\tilde{M}) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \dots,$$

deducimos que $\pi_1(\tilde{L}) = 0$ ya que $\pi_2(G) = 0$ según con E. Cartan [23]. Es decir, las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ están todas en la misma clase conforme que el plano de Poincaré \mathbb{H} . Recalquemos que no decimos que todas las hojas sean planos de Poincaré, sino que todas tienen curvatura constante negativa. De la misma manera, las hojas de \mathcal{F} son todas biholomorfas al cociente $\text{Ker}h \backslash \mathbb{H}$ del plano de Poincaré por el núcleo de la representación de holonomía.

Denotamos por comodidad $\tilde{Y} = T^1\tilde{\mathcal{F}}$ y $Y = T^1\mathcal{F}$ a los fibrados tangentes unitarios a las foliaciones $\tilde{\mathcal{F}}$ y \mathcal{F} respectivamente, obteniendo una nueva G -foliación de Lie sobre Y determinada por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \tilde{Y} \xrightarrow{D_Y} G \\ & & \downarrow \\ & & Y = \Gamma \backslash \tilde{Y} \end{array}$$

con representación de holonomía $h : \Gamma \rightarrow G$. Aquí estamos denotando por $D_Y : \tilde{Y} \rightarrow G$ a la composición del fibrado tangente unitario $\tilde{p} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{M}$ seguido de la aplicación de desarrollo original $D : \tilde{M} \rightarrow G$.

A las G -foliaciones de Lie que acabamos de definir sobre \tilde{Y} y Y las denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}_Y$ y \mathcal{F}_Y respectivamente. Por construcción, las hojas son, respectivamente, los tangente unitarios a las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ y \mathcal{F} . Dicho de otra forma, las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}_Y$ son todas difeomorfas a $PSL(2, \mathbb{R})$ y las hojas de \mathcal{F}_Y son todas difeomorfas al cociente $\text{Ker}h \backslash PSL(2, \mathbb{R})$.

4.2. Uniformización de las foliaciones de Lie

Según se prueba en [6, §5], las foliaciones de Lie admiten una uniformización diferenciable (basada en la existencia de *tubos normales* de [4]).

Siguiendo la demostración de la proposición 3.2 de [1], probamos a continuación que la variedad ambiente de una foliación de Lie por superficies hiperbólicas es cubierta por un único tubo normal y deducimos el siguiente resultado:

Proposición 4.4. *Si \mathcal{F} es una foliación de Lie por superficies hiperbólicas sobre una variedad compacta M , dotada de una métrica casi fibrada g_M , entonces existe una métrica riemanniana casi fibrada g'_M sobre M conformemente equivalente a g_M y tal que cada hoja es una superficie hiperbólica de curvatura constante -1 .*

Demostración. Como decimos, es suficiente probar la existencia de un tubo normal recubridor sobre M . La acción natural $\tilde{Y} \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ dota al fibrado $D_Y : \tilde{Y} \rightarrow G$ de estructura de fibrado $PSL(2, \mathbb{R})$ -principal. Ahora bien, $PSL(2, \mathbb{R})$ es homótopamente equivalente a $PSO(2, \mathbb{R}) \cong S^1$, y por [17, §11], sabemos que estos fibrados principales están clasificados por la clase de Euler $e(\tilde{Y}) \in H^2(G; \mathbb{Z})$. La condición $\pi_2(G) = 0$ implica que $H_2(G; \mathbb{Z}) = 0$ aplicando el teorema de Hurewicz [48, Theorem 4.32] y deducimos que

$$H^2(G; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0.$$

Por tanto el fibrado

$$PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{Y} \xrightarrow{D_Y} G$$

es trivial, es decir, $\tilde{Y} = PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ y $D_Y = p_2$ salvo difeomorfismo.

Así, el fibrado asociado $\tilde{M} = \tilde{Y}/PSO(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H} \times G$ es trivial y proporciona el tubo normal $q : \mathbb{H} \times G \rightarrow M$ que estábamos buscando. □

Por tanto, el fibrado tangente unitario \tilde{Y} es difeomorfo a $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$. Por consiguiente la cubierta universal

$$\tilde{M} = PSL(2, \mathbb{R})/PSO(2, \mathbb{R}) \times G \cong \mathbb{H} \times G$$

y la proyección recubridora

$$q : \tilde{M} = \mathbb{H} \times G \rightarrow M$$

determinan un tubo normal.

Aplicando el teorema [6, Théorème 5.7], obtenemos una uniformización diferenciable de g_M . La restricción

$$q|_{\mathbb{H} \times \{g\}} : (\mathbb{H} \times \{g\}, g_{\tilde{M}}|_{\mathbb{H} \times \{g\}}) \rightarrow (L_g, g_M|_{L_g})$$

es la cubierta universal de la hoja $L_g = q(\mathbb{H} \times \{g\})$ dotada de la métrica $g_M|_{L_g}$ de curvatura -1 (salvo sustitución de g_M por g'_M). La superficie $(\mathbb{H} \times \{g\}, g_{\tilde{M}}|_{\mathbb{H} \times \{g\}})$ es conformemente equivalente a $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$, pero nada garantiza que las métricas sean iguales. Para cada $g \in G$, denotaremos por

$$\varphi_g : \mathbb{H} \times \{g\} \rightarrow \mathbb{H}$$

la equivalencia conforme que transforma una métrica en otra. Para $g = e$, podemos suponer que $\varphi_g = id$ y $g_{\tilde{M}}|_{\mathbb{H} \times \{e\}} = g_{\mathbb{H}}$.

Definición 4.5. Diremos que una foliación de Lie por superficies hiperbólicas es *homogénea* si el fibrado \tilde{Y} dotado de la métrica de Sasaki (deducida de $g_{\tilde{M}}$) es isomorfo al grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ dotado de la métrica invariante por la izquierda $g_{PSL(2, \mathbb{R})} \oplus g_G$.

Considerando de nuevo la acción $\tilde{Y} \curvearrowright PSO(2, \mathbb{R})$, la cubierta universal $\tilde{M} = \mathbb{H} \times G$ está dotada de la métrica producto $g_{\tilde{M}} = g_{\mathbb{H}} \times g_G$.

Esta noción es equivalente a la noción general de foliación de Lie homogénea que se describe a continuación siguiendo a E. Ghys en [66, Appendix E] y [51] en el caso particular de hojas hiperbólicas.

4.3. Foliaciones de Lie homogéneas

Dados dos grupos de Lie H y G , $\Gamma < H$ un subgrupo discreto uniforme y $D : H \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos sobreyectivo, la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre H definida por D es Γ -invariante. Pasando al cociente, obtenemos una foliación \mathcal{F} sobre la variedad $\Gamma \backslash H$.

Notemos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es la foliación definida por las órbitas de la acción por la derecha del núcleo $K = \text{Ker} D$ sobre H . Así, todas las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ son difeomorfas a K y por consiguiente todas las hojas de \mathcal{F} son difeomorfas a $\Gamma \cap K \backslash K$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Gamma \cap K & \hookrightarrow & \Gamma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & H & \xrightarrow{D} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Gamma \cap K \backslash K & \hookrightarrow & \Gamma \backslash H & &
 \end{array} \tag{4.1}$$

Más aun, si tomamos un subgrupo compacto $K_0 < K$ entonces la variedad $\Gamma \backslash H / K_0$ admite una foliación \mathcal{F} inducida por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre H / K_0 cuyas hojas son las fibras de la aplicación $D : H / K_0 \rightarrow G$. Por tanto las hojas de la foliación \mathcal{F} sobre H / K_0 son todas difeomorfas a $\Gamma \cap K \backslash (K / K_0)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Gamma \cap K & \hookrightarrow & \Gamma & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K / K_0 & \longrightarrow & H / K_0 & \xrightarrow{D} & G \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Gamma \cap K \backslash (K / K_0) & \hookrightarrow & \Gamma \backslash (H / K_0) & &
 \end{array} \tag{4.2}$$

Definición 4.6. [66, Appendix E] A las foliaciones construidas de las dos formas anteriores se las conoce como *G-foliaciones de Lie homogéneas*. Observemos que los diagramas 4.1 y 4.2 muestran que las foliaciones sobre $\Gamma \backslash H$ y $\Gamma \backslash H / K_0$ son foliaciones de Lie en el sentido de la definición 4.1. La aplicación D es *aplicación de desarrollo* y la restricción $h = D|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow G$ es la *representación de holonomía*.

Ejemplos 4.7.

(1) Dados $H \triangleleft G$ dos grupos de Lie, la foliación en G dada por $\tilde{\mathcal{F}} = \{gH \mid g \in G\}$ es una G/H -foliación de Lie. Es exactamente la inducida por la submersión $\pi : G \rightarrow G/H$.

Más aun, si $\Gamma < G$ es un subgrupo discreto y $M = \Gamma \backslash G$, la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ es Γ -invariante y pasa al cociente en una G/H -foliación de Lie sobre M .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/H \\ \downarrow & & \\ M = \Gamma \backslash G & & \end{array}$$

La foliación \mathcal{F} sobre M tiene como representación de holonomía la restricción de la aplicación cociente $\pi : \Gamma \rightarrow G/H$.

(2) Como caso particular de lo anterior, si $G = \mathbb{R}^m$ y $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ los subespacios vectoriales de dimensión $m - q$ de \mathbb{R}^m nos proporcionan ejemplos de \mathbb{R}^q -foliaciones de Lie del toro T^m .

Sea $K = PSL(2, \mathbb{R})$ y $H = PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ con $D = p_2 : H \rightarrow G$. Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ es un subgrupo discreto uniforme, por la construcción anterior, tenemos una G -foliación de Lie homogénea $\hat{\mathcal{F}}$ con la siguiente estructura:

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) \times G & \xrightarrow{p_2} & G \\ \downarrow & & \\ Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) & & \end{array}$$

y con representación de holonomía $p_2 : \Gamma \rightarrow G$.

Consideremos como subgrupo compacto $K_0 = PSO(2, \mathbb{R})$ actuando sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ mediante multiplicación por la derecha sobre el primer factor. Siguiendo la construcción anterior y teniendo en cuenta que $PSL(2, \mathbb{R})/PSO(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$ obtenemos una nueva foliación de Lie homogénea \mathcal{F} esta vez por superficies hiperbólicas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times G & \xrightarrow{p_2} & G \\ \downarrow & & \\ M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G) & & \end{array}$$

con la misma representación de holonomía que la anterior $p_2 : \Gamma \rightarrow G$. Notemos además que $Y = T^1 \mathcal{F}$.

Ejemplos 4.8.

(1) Consideremos una representación fiel $h : \Gamma \rightarrow SO(3)$ de un grupo fuchsiano $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ como subgrupo denso de $SO(3)$ [18]. La suspensión de h nos proporciona una $SO(3)$ -foliación de Lie

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) \times SO(3) & \xrightarrow{p_2} & SO(3) \\ \downarrow & & \\ Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times SO(3)). & & \end{array}$$

Insistiendo en lo ya dicho, al cocientar por la acción natural por la derecha de $PSO(2, \mathbb{R})$ sobre $PSL(2, \mathbb{R}) \times SO(3)$ obtenemos una $SO(3)$ -foliación de Lie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times SO(3) & \xrightarrow{p_2} & SO(3) \\ \downarrow & & \\ M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times SO(3)) & & \end{array}$$

esta vez por superficies hiperbólicas. De hecho, como la representación h es fiel, las hojas en M son planos hiperbólicos \mathbb{H} .

(2) Sea $\Gamma < H = PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ un subgrupo discreto, cocompacto e irreducible. Es decir, las acciones inducidas $p_1(\Gamma) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ y $p_2(\Gamma) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ son ambas minimales. Véase [16, Theorem C].

Al considerar la foliación de Lie correspondiente

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{p_2} & PSL(2, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \\ \Gamma \backslash H, & & \end{array}$$

el grupo $p_1(\Gamma)$ no es un grupo fuchsiano como sucedía antes. Para obtener un grupo fuchsiano, tenemos que dotar al núcleo de la aplicación de holonomía de la topología discreta y obtenemos así el siguiente diagrama que describe las variedades consideradas, así como las hojas de las foliaciones correspondientes :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma \cap (PSL(2, \mathbb{R}) \times \{Id\}) & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{p_2} & p_2(\Gamma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ PSL(2, \mathbb{R}) & \longleftarrow & H & \xrightarrow{p_2} & PSL(2, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ (\Gamma \cap (PSL(2, \mathbb{R}) \times \{Id\})) \backslash PSL(2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \Gamma \backslash H & & \end{array}$$

Para completar el ejemplo, al cocientar H por la derecha por $PSO(2, \mathbb{R})$ obtenemos la correspondiente foliación de Lie por superficies hiperbólicas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times PSL(2, \mathbb{R}) & \xrightarrow{p_2} & PSL(2, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \\ M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times PSL(2, \mathbb{R})), & & \end{array}$$

cuyas hojas son todas difeomorfas a $(\Gamma \cap (PSL(2, \mathbb{R}) \times \{Id\})) \backslash \mathbb{H}$.

Estos dos ejemplos nos muestran dos situaciones en las que podremos aplicar el teorema principal de la siguiente sección y garantizar así la minimalidad de la U -acción.

4.4. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie homogéneas

El objetivo de esta sección es recordar la demostración del teorema de Hedlund para foliaciones de Lie homogéneas presentado en de [1].

Teorema 4.9. *Sean G un grupo de Lie y $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ un subgrupo discreto cocompacto del grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$. Entonces la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U$ es minimal si y solo si la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ es minimal.*

Para probar este teorema, comencemos con la siguiente proposición:

Proposición 4.10. *Sean G un grupo de Lie y $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ un subgrupo discreto. Entonces la B -acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright B$ es minimal si y solo si se verifican las dos siguientes propiedades:*

- (1) *La acción $p_1(\Gamma) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})/B = \partial\mathbb{H}$ es minimal,*
- (2) *la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R})$ es minimal, o equivalentemente $\overline{p_2(\Gamma)} = G$.*

Para probarla usaremos el siguiente lema fundamental:

Lema fundamental . *Sea f_n una sucesión de elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$. Si para algún $z \in \mathbb{H}$, existen puntos ξ^+ y ξ^- en $\partial\mathbb{H}$ tales que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \xi^+ \quad y \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{-1}(z) = \xi^-,$$

entonces para cualquier otro punto $\xi \neq \xi^-$ en $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi) = \xi^+.$$

Demostración. Dado un punto $\xi \in \mathbb{H}$, como $d(f_n(\xi), f_n(z)) = d(\xi, z)$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi) = \xi^+$. Sea ahora $\xi \neq \xi^-$ en $\partial\mathbb{H}$. Escojamos $\xi' \in \partial\mathbb{H}$ distinto de ξ y de ξ^- y denotemos por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ a la geodésica que une ξ con ξ' . Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \xi' \quad y \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = \xi.$$

Si denotamos por $\alpha_n = f_n \circ \alpha$ a la geodésica que une $f_n(\xi)$ con $f_n(\xi')$ entonces

$$d(f_n^{-1}(z), \alpha(t)) = d(z, \alpha_n(t))$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{-1}(z) = \xi^-$ y ξ^- es distinto de ξ y de ξ' concluimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(z, \alpha_n(t)) = +\infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De aquí se sigue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n(t) = \zeta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $\alpha(t) \in \mathbb{H}$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha(t)) = \xi^+$ y por tanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi) = \zeta = \xi^+$. \square

Demostración de la Proposición 4.10. Consideremos la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ dada por

$$\gamma \cdot (\xi, g) = (p_1(\gamma)(\xi), p_2(\gamma)g).$$

Por dualidad hay que probar que esta acción es minimal si y sólo si la acción $p_1(\Gamma) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ sea minimal y $\overline{p_2(\Gamma)} = G$. La condición necesaria es obvia, así que supongamos que $p_1(\Gamma) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es

minimal y $\overline{p_2(\Gamma)} = G$. Esta segunda condición nos permite escoger una sucesión $g_n \in G$ tal que $\{g_n\} \rightarrow e \in G$. Existe entonces una sucesión $f_n \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $\gamma_n = (f_n, g_n) \in \Gamma$. Como Γ es discreto, la sucesión $\{f_n\}$ no está acotada y no perdemos generalidad al suponer que existe un $z \in \mathbb{H}$ de modo que las sucesiones $\{f_n(z)\}$ y $\{f_n^{-1}(z)\}$ convergen a puntos ξ^+ y ξ^- en $\partial\mathbb{H}$ respectivamente.

Para cada punto $\xi \neq \xi^-$ de $\partial\mathbb{H}$, el lema fundamental garantiza que

$$(\xi^+, g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(\xi), g_n g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(\xi, g) \in \overline{\Gamma.(\xi, g)}$$

para cualquier $g \in G$. De forma más general, asumiendo que $\xi \neq f(\xi^-)$ por algún $f \in \Gamma$ y reemplazando γ_n por $\gamma' \gamma_n (\gamma')^{-1}$ donde $\gamma' = (f, g') \in \Gamma$, tenemos que

$$(f(\xi^+), g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f f_n (f^{-1}(\xi)), g' g_n (g')^{-1} g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma' \gamma_n (\gamma')^{-1}(\xi, g) \in \overline{\Gamma.(\xi, g)}.$$

Es decir, si $\xi \in \partial\mathbb{H}$ no está en la órbita $p_1(\Gamma).\xi^-$, entonces $\overline{p_1(\Gamma).\xi^+ \times \{g\}} \subset \overline{\Gamma.(\xi, g)}$. Como la acción $p_1(\Gamma) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es minimal, tenemos que $\partial\mathbb{H} \times \{g\} \subset \overline{\Gamma.(\xi, g)}$ para cada $g \in G$. Ahora, como $\overline{p_2(\Gamma)} = G$, se sigue que $\overline{\Gamma.(\xi, g)} = \partial\mathbb{H} \times G$.

Falta ver el caso en el que $\xi \in p_1(\Gamma).\xi^-$, pongamos $\xi = f(\xi^-)$. Entonces, como la acción $p_1(\Gamma) \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es minimal y $p_1(\Gamma)$ contiene sucesiones no acotadas $\{f_n\}$, o bien $p_1(\Gamma)$ es denso en $PSL(2, \mathbb{R})$ o bien el conjunto límite de $p_1(\Gamma)$ es todo el borde $\partial\mathbb{H}$.

Esto significa que existe un elemento $\gamma' = (f', g') \in \Gamma$ tal que la sucesión $(f')^k(\xi^+)$ converge a un punto $\xi' \notin p_1(\Gamma).\xi^-$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $(f')^k(\xi^-) \neq \xi$ para todo $k \geq 0$. Así la sucesión $(\gamma')^k = ((f')^k, (g')^k) \in \Gamma$ verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma')^k \gamma_n (\gamma')^{-k}(\xi, g) = ((f')^k(\xi^+), g)$$

y por tanto $(\xi', g) \in \overline{\Gamma.(\xi, g)}$. Puesto que $\xi' \notin p_1(\Gamma).\xi^-$, usando el paso anterior, la órbita $\Gamma.(\xi', g)$ es densa en $\partial\mathbb{H} \times G$ y por tanto $\Gamma.(\xi, g)$ también lo es. \square

Notemos que esta proposición no utiliza la cocompacidad del grupo Γ . Sin embargo, sí se usará en la demostración del teorema 4.9 por medio de la siguiente noción:

Definición 4.11 ([1]). Sea G un grupo de Lie. Un elemento $(f, g) \in PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ se dice *semiparabólico* si f es conjugado en $PSL(2, \mathbb{R})$ a un elemento $u \in U \setminus \{Id\}$.

La existencia de elementos semiparabólicos están relacionados con las propiedades de la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright D$, y más propiamente del semigrupo

$$D^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda > 1 \right\}.$$

Lema 4.12. Si Γ contiene un elemento semiparabólico, entonces hay semiórbitas positivas divergentes de la acción $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright D^+$.

Demostración. Supongamos que Γ contiene un elemento semiparabólico $\gamma = (f u f^{-1}, g) \in \Gamma$ con $u \in U \setminus \{Id\}$ y $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $g \in G$. Dado $g' \in G$ escribimos $x = \Gamma.(f, g') \in \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ y vamos a probar que la órbita $x D^+$ diverge. Supongamos por el contrario que existe una sucesión no acotada $d_n \in D^+$ tal que la sucesión $\{x d_n\}$ converge. Escribamos

$$d_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

con $\lambda_n \rightarrow +\infty$ y

$$u = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $t \neq 0$. Por hipótesis existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_n(f, g')d_n$ converge a cierto elemento $(f'', g'') \in PSL(2, \mathbb{R}) \times G$. Notemos que

$$\gamma_n(f, g')d_n = \gamma_n \gamma^{-1} \gamma(f, g')d_n = \gamma_n \gamma^{-1}(fud_n, gg') = \gamma_n \gamma^{-1}(fd_n d_n^{-1} u d_n, gg')$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n^{-1} u d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & t \lambda_n^{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Deducimos así que la sucesión $\gamma_n \gamma^{-1}(fd_n, gg')$ converge también al punto (f'', g'') . Ahora bien, puesto que

$$\gamma_n \gamma^{-1}(fd_n, gg') = \gamma_n \gamma^{-1} \gamma_n^{-1} (\gamma_n(f, g')d_n)(Id, (g')^{-1} gg')$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(f, g')d_n = (f'', g''),$$

se sigue que $\gamma_n \gamma^{-1} \gamma_n^{-1}$ converge a $(Id, g''(g')^{-1} g^{-1} g'(g'')^{-1})$ en $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$. Como el grupo Γ es discreto, para n suficientemente grande, tenemos que $p_1(\gamma_n \gamma^{-1} \gamma_n^{-1}) = Id$ concluyendo así que $u = Id$ en contra de la hipótesis. \square

Utilizando este lema se sigue inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 4.13. *Si $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ es compacto, entonces Γ no contiene elementos semiparabólicos.*

La demostración de la siguiente proposición requiere del siguiente lema de clasificación:

Lema 4.14 (de clasificación). *Sea Δ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ y denotemos por $\overline{\Delta}_0$ la componente conexa de la identidad de su clausura $\overline{\Delta}$. Si Δ no es ni discreto ni denso, entonces $\overline{\Delta}_0$ es conjugado a $PSO(2, \mathbb{R})$ o a un subgrupo de Lie de B .*

Proposición 4.15. *En las hipótesis del teorema 4.9, la B -acción*

$$\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright B$$

es minimal si y solo si $\overline{p_2(\Gamma)} = G$.

Demostración. Basta probar la condición suficiente y de acuerdo con la proposición 4.10 basta con probar que la acción $\Delta = p_1(\Gamma) \curvearrowright \partial \mathbb{H}$ es minimal. Para ello distinguiremos dos casos, dependiendo de si el grupo es discreto o no.

(1) Si Δ es discreto, entonces la superficie $\Delta \backslash \mathbb{H}$ es compacta ya que $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ lo es. Es decir, Δ es un grupo de superficie y $L(\Delta) = \partial \mathbb{H}$ por el teorema 1.34. Como consecuencia $\Delta \curvearrowright \partial \mathbb{H}$ es minimal.

(2) Si Δ es no discreto, pero denso en $PSL(2, \mathbb{R})$, la acción $\Delta \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ sigue siendo minimal. En el caso en el que Δ sea no discreto y no denso, teniendo en cuenta que Δ normaliza $\overline{\Delta}_0$, el lema de clasificación 4.14 implica que Δ es conjugado a un subgrupo de $PSO(2, \mathbb{R})$ o B . Como $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ es compacto, el primer caso no es posible. Entonces $\Delta \subset fBf^{-1}$ para algún $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ y por tanto $[\Delta, \Delta] \subset fUf^{-1}$. Luego Δ es abeliano como consecuencia de la proposición 4.13. Se sigue entonces que Δ es conjugado a un subgrupo de D , lo que contradice la compacidad de $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$. □

Demostración del Teorema 4.9. De acuerdo con la proposición 4.10 es suficiente con probar que si la B -acción es minimal, entonces la U -acción es minimal. Como el tangente unitario a la foliación $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ es compacto, la U -acción posee un minimal no vacío que denotaremos por \mathcal{M} . Basta probar que \mathcal{M} es B -invariante para concluir que $\mathcal{M} = Y$. De hecho, como $B = DU$, es suficiente con probar que \mathcal{M} es D -invariante.

Sea $h = (f, g) \in PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ tal que $x = \Gamma.h \in \mathcal{M}$. Como $\overline{x.U} = \mathcal{M}$ existen sucesiones $\gamma_n = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}) \in \Gamma$ y $u_n = \begin{pmatrix} 1 & s_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $s_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot (f, g) \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_{1n} f u_n, \gamma_{2n} g) = (f, g) = h.$$

Tomando

$$f_n = f^{-1} \gamma_{1n} f u_n, \quad g_n = g^{-1} \gamma_{2n} g \quad \text{y} \quad h_n = (f_n, g_n)$$

la sucesión

$$hh_n = (f f_n, g g_n) = \gamma_n h u_n$$

converge a h y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, g_n) = (Id, e).$$

Notemos también que la sucesión $\{\gamma_{1n}\}$ no admite ninguna subsucesión convergente ya que $s_n \rightarrow +\infty$. Por otra parte, como $hh_n = \gamma_n h u_n$ representa la clase xu_n en la órbita $x.U$, el elemento $h_n = (f_n, g_n) \in PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ pertenece al conjunto

$$H_{\mathcal{M}} = \{h' \in PSL(2, \mathbb{R}) \times G \mid \mathcal{M}h' \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}.$$

Lema 4.16. *El conjunto $H_{\mathcal{M}}$ es un cerrado de $H = PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ que es invariante bajo las acciones a izquierda y derecha de U .*

Demostración. Sea $h'_n \in H_{\mathcal{M}}$ una sucesión convergente a cierto elemento $h' \in H$. Por definición, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n = \Gamma.h_n \in \mathcal{M}$ tal que $x_n h'_n = \Gamma.h_n h'_n \in \mathcal{M}$. Por compacidad de \mathcal{M} , sustituyendo la sucesión por una subsucesión si fuese necesario, podemos asumir que la sucesión x_n converge a un elemento $x = \Gamma.h \in \mathcal{M}$. Entonces $xh' = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n h'_n \in \mathcal{M}$ y por tanto $h' \in H_{\mathcal{M}}$.

Vamos a probar que $H_{\mathcal{M}}$ es U -invariante a derecha e izquierda. Como $\mathcal{M}u^{-1} = \mathcal{M}$ por minimalidad, tenemos que:

$$\mathcal{M}uh \cap \mathcal{M} = \mathcal{M}u^{-1}uh \cap \mathcal{M} = \mathcal{M}h \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$$

para cada $u \in U$ y para cada $h \in H_{\mathcal{M}}$. Análogamente tenemos

$$\mathcal{M}hu \cap \mathcal{M} = (\mathcal{M}h \cap \mathcal{M}u^{-1})u = (\mathcal{M}h \cap \mathcal{M})u \neq \emptyset,$$

lo que prueba la U -invarianza a derecha. □

Volviendo a la prueba del teorema, necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.17. *Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \notin B$ para cada $n \geq k$.*

Demostración. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \geq k$ tal que $f_{n_k} \in B$. Entonces $f^{-1}\gamma_{1n_k}f = f_{n_k}u_{n_k}^{-1} \in B$ y por tanto $\gamma_{1n_k} \in fBf^{-1}$. Se sigue así que el conmutador

$$[\gamma_{1n_k}, \gamma_{1n_{k'}}] \in \Gamma \cap fUf^{-1}$$

para cada $k, k' \geq 0$. Ahora bien, la proposición 4.13 garantiza que Γ no tiene elementos semiparabólicos y por tanto $[\gamma_{1n_k}, \gamma_{1n_{k'}}] = Id$. Luego existe $u \in U$ tal que

$$f^{-1}\gamma_{1n_k}f = u \begin{pmatrix} \lambda_{n_k} & 0 \\ 0 & \lambda_{n_k}^{-1} \end{pmatrix} u^{-1}$$

para todo $k \geq 0$. Como la sucesión $\{\gamma_{1n_k}\}$ no converge, la sucesión λ_{n_k} no está acotada, lo cual es imposible porque la sucesión de matrices $f_{n_k} = f^{-1}\gamma_{1n_k}f u_{n_k}$ converge a Id y por tanto los vectores $f_{n_k}e_1 = (\lambda_{n_k}, 0)$ convergen a $e_1 = (1, 0)$. \square

Para concluir que \mathcal{M} es D -invariante, escribamos $f_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ con $c_n \neq 0$ de acuerdo con el lema 4.17. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tomemos

$$u'_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha - a_n}{c_n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u''_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha}(b_n + d_n \frac{\alpha - a_n}{c_n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ambos en U . Como $h_n = (f_n, g_n)$ el lema 4.16 garantiza que

$$u'_n h_n u''_n = (u'_n f_n u''_n, g_n) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ c_n & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, g_n \right) \in H_{\mathcal{M}}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = e$ concluimos que

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, e \right) \in H_{\mathcal{M}}.$$

Esto significa que

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Ahora bien, como

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix},$$

el conjunto \mathcal{M}_α es un cerrado de \mathcal{M} y U -invariante. Por la condición de minimalidad concluimos que $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}$ y por tanto \mathcal{M} es D -invariante, es decir,

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{M}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Por tanto \mathcal{M} es B -invariante y concluimos que $\mathcal{M} = Y$, es decir, el flujo horocíclico es minimal. \square

4.5. Foliaciones de Lie homogéneas no minimales

Sea \mathcal{F} una G -foliación de Lie por superficies hiperbólicas definida por la fibración equivariante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \tilde{M} = \mathbb{H} \times G \xrightarrow{p_2} G \\ & & \downarrow p \\ & & (M, \mathcal{F}) \end{array}$$

con representación de holonomía $h : \pi_1(M) = \Gamma \rightarrow G$. Hasta ahora nos hemos interesado por el caso de una foliación minimal, es decir, $h(\Gamma) = G$. Ahora suponemos que la clausura de $H = h(\Gamma)$ es un subgrupo propio $\overline{H} < G$. Las clausuras de las hojas de \mathcal{F} forman una foliación definida por la fibración localmente trivial

$$w : M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G) \rightarrow W = \overline{H} \backslash G.$$

La foliación inducida sobre $\overline{L}_e = w^{-1}(\overline{H})$ es una foliación de Lie cuyo grupo estructural es isomorfo a la componente conexa K de \overline{H} que contiene al elemento neutro $e \in G$.

Tenemos así una K -foliación de Lie

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times K & \xrightarrow{p_2} & K \\ \downarrow & & \\ \overline{L}_e = \Gamma_K \backslash (\mathbb{H} \times K), & & \end{array}$$

donde $\Gamma_K = h^{-1}(K)$ y $h_K = h|_{\Gamma_K} : \Gamma_K \rightarrow K$. Notemos que ahora la representación de holonomía tiene imagen densa, de modo que podemos aplicar el teorema 4.9 para garantizar que el flujo horocíclico $T^1\overline{L}_e \curvearrowright U$ es denso sobre el tangente unitario de cada una de las hojas de la foliación $\overline{\mathcal{F}}$.

Cada elemento de $K = \overline{H} \backslash G$ proporciona una hoja de $\overline{\mathcal{F}}$ de modo que el flujo horocíclico global $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U$ tiene tantos conjuntos minimales como elementos haya en K .

Teorema 4.18. *Sea \mathcal{F} una G -foliación de Lie por superficies hiperbólicas con holonomía $H = h(\Gamma)$ densa en un subgrupo cerrado \overline{H} de G . Hay una correspondencia biunívoca entre los conjuntos minimales del flujo horocíclico foliado*

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U$$

y los elementos de $K = \overline{H} \backslash G$.

Capítulo 5

Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie

El teorema de Hedlund foliado es válido para cualquier foliación de Lie: la demostración de [4] se basa en un resultado de Y. Coudène [26], relacionado con el teorema ergódico de Von Neumann, y prueba que el flujo horocíclico es minimal y únicamente ergódico.

Nuestro propósito es dar una demostración elemental usando la noción de casi-acción del grupo de holonomía sobre la hoja tipo descrita en [51]. Mientras que G. Hector, S. Matsumoto y G. Meigniez usan la cas-acción para definir una acción sobre el espacio de finales, en nuestro caso, usaremos la casi-acción para definir una acción sobre el borde en el infinito y construir un círculo universal en el sentido de Thurston [81].

5.1. Foliosiones no homogéneas

Sea \mathcal{F} una G -foliación de Lie por superficies hiperbólicas sobre una variedad compacta M . Según la descripción del capítulo 4, el grupo fundamental $\Gamma = \pi_1(M)$ actúa como grupo de isometrías de la variedad producto $\tilde{M} = \mathbb{H} \times G$ dotada de una métrica $g_{\tilde{M}} = q^*g_M$. De igual modo, Γ actúa sobre $\tilde{Y} = PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ como grupo de isometrías de la métrica de Sasaki $g_{\tilde{Y}}$ deducida de $g_{\tilde{M}}$.

Las acciones

$$\gamma.(z, g) = (\varphi(\gamma, g)(z), h(\gamma)g)$$

y

$$\gamma.(u, g) = (\varphi(\gamma, g)u, h(\gamma)g),$$

con $z \in \mathbb{H}$, $u \in T^1\mathbb{H}$, $g \in G$ y $\gamma \in \Gamma$, están asociadas a un cociclo

$$\varphi : \Gamma \times G \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

que verifica

$$\varphi(\gamma_1\gamma_2, g) = \varphi(\gamma_1, h(\gamma_2)g)\varphi(\gamma_2, g) \tag{5.1}$$

para cada $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ y $g \in G$.

Si \mathcal{F} es homogénea, el cociclo $\varphi(\gamma, g)$ no depende de G y se factoriza en un homomorfismo $\varphi : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 PSL(2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & PSL(2, \mathbb{R}) \times G & \xrightarrow{D} & G \\
 & \searrow \varphi & \uparrow (\varphi, h) & \nearrow h & \\
 & & \Gamma & &
 \end{array}$$

La idea central que se desarrollará en la sección es que, aunque la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G$ no es diagonal, al pasar al borde en el infinito, la acción inducida $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ será topológicamente conjugada a una acción diagonal, lo que nos permitirá el estudio de la B -acción sobre Y . Finalizaremos adaptando los argumentos usados en el caso no homogéneo para probar la minimalidad de flujo horocíclico foliado en el caso de una representación no inyectiva.

5.2. Casi-acción

Sea

$$\text{Bilips}(\mathbb{H}) = \{f \in \text{Homeo}(\mathbb{H}) \mid f \text{ y } f^{-1} \text{ son lipschitzianos}\}$$

el grupo de los difeomorfismos bilipschitzianos de la hoja tipo $\mathbb{H} \times \{e\}$ de $\mathbb{H} \times G$ y

$$\text{Bilips}_0(\mathbb{H}) = \{f \in \text{Bilips}(\mathbb{H}) \mid \sup_{z \in \mathbb{H}} d_{\mathbb{H}}(f(z), z) < \infty\}$$

el subgrupo de los difeomorfismos bilipschitz a distancia acotada de la identidad. Como se ha comentado antes, adaptamos la construcción de [51] a nuestro contexto: tomemos $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ un camino con $\sigma(0) = e$ y sea $(z, g) \in \mathbb{H} \times G$. Vamos a definir un nuevo camino $\sigma_{(z,g)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \times G$ determinado por:

(i) la proyección $p_2(\sigma_{(z,g)}(t)) = g\sigma(t)$ para cada $t \in [0, 1]$, es decir, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene que

$$\sigma_{(z,g)}(t) = (p_1(\sigma_{(z,g)}(t)), g\sigma(t)),$$

(ii) el vector tangente $\dot{\sigma}_{(z,g)}(t) \in N\tilde{\mathcal{F}}$, $\forall t \in [0, 1]$,

(iii) el punto inicial $\sigma_{(z,g)}(0) = (z, g)$.

Luego $\sigma_{(z,g)}$ es el (único) levantamiento horizontal de σ relativo al subfibrado $N\tilde{\mathcal{F}}$.

Lema 5.1. Sean $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow G$ con $\sigma(0) = e = \tau(0)$ y $\gamma \in \Gamma$. Entonces

$$(1) \sigma_{\gamma \cdot (z,g)} = \gamma \cdot \sigma_{(z,g)},$$

$$(2) (\sigma * \sigma(1)\tau)_{(z,g)} = \sigma_{(z,g)} * \tau_{\sigma_{(z,g)}(1)}.$$

Demostración. Para probar el apartado (1), veamos que el camino $\gamma\sigma_{(z,g)}$ verifica las tres condiciones (i)-(iii) que determinan a la curva $\sigma_{\gamma \cdot (z,g)}$. En primer lugar, tenemos (i):

$$\begin{aligned}
 p_2(\gamma\sigma_{(z,g)}(t)) &= h(\gamma)p_2(\sigma_{(z,g)}(t)) = h(\gamma)p_2((z, g))\sigma(t) = \\
 &= p_2(\gamma \cdot (z, g))\sigma(t) = p_2(\sigma_{\gamma \cdot (z,g)}).
 \end{aligned}$$

Para ver (ii), notemos que como la acción de Γ deja invariante $\tilde{\mathcal{F}}$, la diferencial γ_* de cada elemento $\gamma \in \Gamma$ deja invariante el fibrado tangente $T\tilde{\mathcal{F}}$. Además, γ_* también deja invariante $N\tilde{\mathcal{F}}$, y como por construcción $\dot{\sigma}_{(z,g)} \in N\tilde{\mathcal{F}}$, concluimos que $\gamma_*\dot{\sigma}_{(z,g)}(t) \in N\tilde{\mathcal{F}}$.

Por último, para probar (iii) basta notar que $\gamma_{\sigma(z,g)}(0) = \gamma \cdot (z, g)$ y podemos concluir que ambos caminos coinciden.

El mismo argumento prueba de forma inmediata el apartado (2). □

Ahora, dado $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ con $\sigma(0) = e$, definimos

$$\tilde{f}_\sigma : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$$

por

$$\tilde{f}_\sigma((z, g)) = \sigma_{(z,g)}(1).$$

La aplicación \tilde{f}_σ verifica las siguientes propiedades:

Proposición 5.2. (1) la aplicación \tilde{f}_σ es Γ -equivariante,

(2) $\tilde{f}_{\sigma * \sigma(1)\tau} = \tilde{f}_\tau \circ \tilde{f}_\sigma$,

(3) la aplicación \tilde{f}_σ es un difeomorfismo de $\mathbb{H} \times G$ que deja invariante la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$.

Demostración. Para probar (1), sean $\gamma \in \Gamma$ y $(z, g) \in \mathbb{H} \times G$. Usando la propiedad (1) del lema anterior, deducimos que:

$$\tilde{f}_\sigma(\gamma \cdot (z, g)) = \sigma_{\gamma \cdot (z,g)}(1) = \gamma \sigma_{(z,g)}(1) = \gamma \tilde{f}_\sigma((z, g)).$$

Para probar el apartado (2), escribimos la definición de ambas aplicaciones:

$$\tilde{f}_{\sigma * \sigma(1)\tau}((z, g)) = (\sigma * \sigma(1)\tau)_{(z,g)}(1) = (\sigma_{(z,g)} * \tau_{\sigma_{(z,g)}(1)})(1) = \tau_{\sigma_{(z,g)}(1)}(1),$$

$$\tilde{f}_\tau(\tilde{f}_\sigma((z, g))) = \tilde{f}_\tau(\sigma_{(z,g)}(1)) = \tau_{\sigma_{(z,g)}(1)}(1),$$

luego coinciden. Finalmente, probemos el apartado (3). Para ver que es un difeomorfismo consideremos la curva $\tau : [0, 1] \rightarrow G$ definida por

$$\tau(t) = \sigma(1)^{-1} \sigma(1 - t).$$

Entonces

$$(\sigma * \sigma(1)\tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2 - 2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y desarrollando obtenemos que

$$\tilde{f}_{\sigma * \sigma(1)\tau}((z, g)) = \sigma(0) = (z, g).$$

Según la propiedad (2) $\tilde{f}_{\sigma * \sigma(1)\tau} = \tilde{f}_\tau \circ \tilde{f}_\sigma$ y por tanto la aplicación \tilde{f}_σ tiene inversa por la izquierda. Para probar que también tiene inversa por la derecha basta considerar la curva $\tau * \tau(1)\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ y argumentar como antes.

Veamos por último que el difeomorfismo \tilde{f}_σ conserva la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$. Como \tilde{f}_σ es un difeomorfismo, dados $(z, g), (w, g) \in \mathbb{H} \times \{g\}$ basta ver que $\tilde{f}_\sigma((z, g)), \tilde{f}_\sigma((w, g)) \in \mathbb{H} \times \{h\}$, para algún $h \in G$. En efecto, si $(z, g) \in \mathbb{H} \times \{g\}$, entonces

$$p_2(\tilde{f}_\sigma((z, g))) = p_2(\sigma_{(z,g)}(1)) = p_2((z, g)\sigma(1)) = g\sigma(1) \Rightarrow \tilde{f}_\sigma((z, g)) \in \mathbb{H} \times \{g\sigma(1)\}.$$

Por otra parte, si $(w, g) \in \mathbb{H} \times \{g\}$, entonces

$$p_2(\tilde{f}_\sigma((w, g))) = p_2(\sigma_{(w, g)}(1)) = p_2((w, g))\sigma(1) = g\sigma(1) \Rightarrow \tilde{f}_\sigma((w, g)) \in \mathbb{H} \times \{g\sigma(1)\}.$$

□

Puesto que $\tilde{f}_\sigma : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$ es un difeomorfismo Γ -equivariante que deja invariante la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$, induce un difeomorfismo

$$f_\sigma : M \longrightarrow M$$

que deja invariante la foliación \mathcal{F} y hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times G & \xrightarrow{\tilde{f}_\sigma} & \mathbb{H} \times G \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{f_\sigma} & M. \end{array} \quad (5.2)$$

Proposición 5.3. *El difeomorfismo restringido*

$$\tilde{f}_\sigma|_{\mathbb{H} \times \{g\}} : \mathbb{H} \times \{g\} \longrightarrow \mathbb{H} \times \{g\sigma(1)\}$$

es un difeomorfismo lipschitziano.

Demostración. La proyección $q|_{\mathbb{H} \times \{g\}} : \mathbb{H} \times \{g\} \rightarrow L_g = q(\mathbb{H} \times \{g\})$ corresponde a la cubierta universal de la hoja $L_g \in \mathcal{F}$ y es una isometría local. Por tanto, basta probar que el difeomorfismo asociado

$$f_\sigma|_{L_g} : L_g \longrightarrow L_{g\sigma(1)}$$

es un difeomorfismo lipschitziano. Ahora bien, ya que la variedad M es compacta, la norma

$$\|(f_\sigma|_{L_g})_*\| \leq \|(f_\sigma)_*\| < K$$

está acotada, lo que implica directamente que la aplicación es lipschitziana. □

Recordemos que cada hoja $\mathbb{H} \times \{g\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ es conformemente equivalente a \mathbb{H} . Es decir, existe una equivalencia conforme $\varphi_g : \mathbb{H} \times \{g\} \rightarrow \mathbb{H}$ que lleva la métrica de $\mathbb{H} \times \{g\}$ en la métrica de Poincaré de \mathbb{H} . Denotaremos por

$$f_\sigma(g) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

a la aplicación inducida por el difeomorfismo lipschitziano $\tilde{f}_\sigma|_{\mathbb{H} \times \{g\}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} \times \{g\} & \xrightarrow{\tilde{f}_\sigma} & \mathbb{H} \times \{g\sigma(1)\} \\ \varphi_g \downarrow & & \downarrow \varphi_{g\sigma(1)} \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{f_\sigma(g)} & \mathbb{H}. \end{array}$$

Definición 5.4 ([51]). La construcción anterior proporciona un homomorfismo de grupos

$$\Psi : \Gamma \rightarrow \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H})$$

dado por

$$\Psi(\gamma) = \gamma \circ \tilde{f}_{\sigma_\gamma} \quad (5.3)$$

y decimos que Ψ es la *casi-acción* de Γ sobre \mathbb{H} .

Para comprobar la afirmación anterior, probamos primero que la aplicación Ψ está bien definida. Dado un camino $\eta : [0, 1] \rightarrow G$ tal que $\eta(0) = e$ y $\eta(1) = h(\gamma)^{-1}$, tenemos que probar que existe una aplicación $g \in \text{Bilips}_0(\mathbb{H})$ tal que

$$\gamma \circ \tilde{f}_{\sigma_\gamma} = \gamma \circ \tilde{f}_\eta \circ g.$$

Para ello basta con probar el siguiente resultado:

Proposición 5.5. *Si $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ es un lazo en G con punto base $e \in G$ entonces la aplicación asociada $\tilde{f}_\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ pertenece al subgrupo $\text{Bilips}_0(\mathbb{H})$, es decir,*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} d(\tilde{f}_\sigma(z), z) < \infty,$$

donde identificamos cualquier hoja $\mathbb{H} \times \{g\}$ con \mathbb{H} .

Demostración. La aplicación inducida $f_\sigma : L \rightarrow L$ está a distancia acotada de la identidad por ser M una variedad compacta. Es decir, existe $M > 0$ tal que $d(f_\sigma(x), x) < M$ para todo $x \in L$. Veamos que $d(\tilde{f}_\sigma(z), z) < 2M$ para todo $z \in \mathbb{H}$.

Para ello consideremos el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{H} \mid d(\tilde{f}_\sigma(z), z) \leq 2M\}$$

y notemos que $A \neq \emptyset$ ya que el teorema del punto fijo de Brouwer (módulo la identificación de \mathbb{H} con el disco de Poincaré \mathbb{D}) nos asegura que existe un punto $z_0 \in \mathbb{H}$ tal que $\tilde{f}_\sigma(z_0) = z_0$.

Además A es cerrado en \mathbb{H} al estar definido por una condición cerrada. Veamos que también es un abierto de \mathbb{H} . En efecto, dados $z \in \mathbb{H}$ y $x = q(z) \in L$ sabemos que $d(f_\sigma(x), x) < M$ y podemos tomar $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ verificando

$$0 < \varepsilon \leq \frac{M - d(f_\sigma(x), x)}{2} < \frac{M}{2}, \quad 0 < \delta \leq \frac{M - d(f_\sigma(x), x)}{2} < \frac{M}{2},$$

de forma que si $d(x', x) < \delta$ entonces $d(f_\sigma(x'), f_\sigma(x)) < \varepsilon$ por continuidad de f_σ .

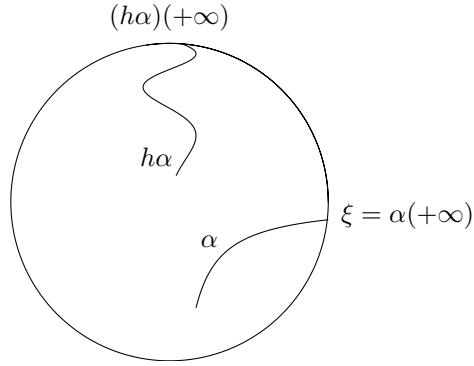
Por tanto, si $x' \in B(x, \delta)$ entonces

$$\begin{aligned} d(x', f_\sigma(x')) &\leq d(x', x) + d(x, f_\sigma(x)) + d(f_\sigma(x), f_\sigma(x')) < \\ &< \frac{M - d(f_\sigma(x), x)}{2} + d(f_\sigma(x), x) + \frac{M - d(f_\sigma(x), x)}{2} = \\ &= M - d(f_\sigma(x), x) + d(f_\sigma(x), x) = M. \end{aligned}$$

Tomamos ε y δ lo suficientemente pequeños para que las bolas centradas en x y $f_\sigma(x)$ trivialicen $q : \mathbb{H} \rightarrow L$. Como q es una isometría local, $B(z, \delta) \subset A$ ya que dado $z' \in B(z, \delta)$ tenemos

$$\begin{aligned} d(z', \tilde{f}_\sigma(z')) &\leq d(z', z) + d(z, \tilde{f}_\sigma(z)) + d(\tilde{f}_\sigma(z), \tilde{f}_\sigma(z')) = \\ &= d(x', x) + d(\tilde{f}_\sigma(z), z) + d(f_\sigma(x), f_\sigma(x')) \leq \\ &\leq \delta + \varepsilon + d(\tilde{f}_\sigma(z), z) \leq M - d(f_\sigma(x), f_\sigma(x')) + d(\tilde{f}_\sigma(z), z) \leq \\ &\leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} + M = 2M \end{aligned}$$

pues $z \in A$. Como \mathbb{H} es conexo, concluimos que $A = \mathbb{H}$ concluyendo la prueba. \square


 Figura 5.1: Homeomorfismo inducido sobre $\partial\mathbb{H}$

Proposición 5.6. *La aplicación Ψ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Dados $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, tenemos que

$$\Psi(\gamma\gamma') = \gamma' \circ \tilde{f}_{\sigma_{\gamma'}} \circ \gamma \tilde{f}_{\sigma_{\gamma}} = \gamma' \circ \gamma \circ \tilde{f}_{\sigma_{\gamma'}} \circ \tilde{f}_{\sigma_{\gamma}} = (\gamma'\gamma) \circ \tilde{f}_{\tau},$$

siendo $\tau = \sigma_{\gamma} * \sigma_{\gamma'}(1)\sigma_{\gamma'}$. Como

$$\tau(1) = \sigma_{\gamma}(1)\sigma_{\gamma'}(1) = \gamma^{-1}\gamma'^{-1} = (\gamma'\gamma)^{-1}$$

se obtiene el resultado. \square

5.3. Acción sobre el borde

La idea consiste en probar que los difeomorfismos bilipschitzianos f_{σ} inducen homeomorfismos sobre el borde $\partial\mathbb{H}$. El siguiente teorema, válido en un contexto más general de espacios δ -hiperbólicos, puede verse en [38, Ch. 7, §4, Proposition 14].

Teorema 5.7. *Un difeomorfismo lipschitziano $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ induce un homeomorfismo $\partial h : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$. Además, si $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ está a distancia acotada de la identidad, i.e.,*

$$\sup_{z \in \mathbb{H}} \{d(h(z), z)\} < \infty$$

entonces el homomorfismo inducido es la identidad.

Dado un difeomorfismo lipschitziano $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ el homomorfismo ∂h que proporciona el teorema anterior se construye del siguiente modo: dado un punto $\xi \in \partial\mathbb{H}$, sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ una geodésica tal que $\xi = \alpha(+\infty)$. Definimos

$$\partial h(\xi) = (h \circ \alpha)(+\infty).$$

Tenemos así definida un homomorfismo de grupos inyectivo $p : \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Homeo}(\partial\mathbb{H})$ que combinado con la casi-acción definida en el apartado anterior, nos permite definir una acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ como la composición

$$\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Homeo}(\partial\mathbb{H}).$$

Explícitamente,

$$\Phi(\gamma) = \partial\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ \partial f_\sigma(e), \quad (5.4)$$

con $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$, $\sigma(0) = e$ y $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$. El siguiente diagrama explica el significado de la notación anterior:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} \times \{e\} & \xrightarrow{f_\sigma(e)} & \mathbb{H} \times \{h(\gamma)^{-1}\} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H} \times \{e\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{f_\sigma(e)} & \mathbb{H} & \xrightarrow{\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1})} & \mathbb{H} \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ \partial\mathbb{H} & \xrightarrow{\partial f_\sigma(e)} & \partial\mathbb{H} & \xrightarrow{\partial\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1})} & \partial\mathbb{H}. \end{array}$$

Simplificaremos la notación cambiando $f_\sigma(e)$ por f_σ y ∂h por h , entendiendo por el contexto si una aplicación cualquiera h la pensamos en el plano de Poincaré \mathbb{H} o en su borde $\partial\mathbb{H}$. Con estos cambios, la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ tiene la siguiente expresión simplificada:

$$\Phi(\gamma) = \varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ f_\sigma$$

donde $\sigma(0) = e$ y $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$.

Esta acción la combinamos con la acción por holonomía $\Gamma \curvearrowright G$ para obtener una acción diagonal

$$* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

dada por

$$\gamma * (\xi, g) = (\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1})(f_\sigma(\xi)), h(\gamma)g), \quad (5.5)$$

donde $\sigma(0) = e$ y $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$.

5.4. Conjugación

La B -acción $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright B$ es dual a la acción

$$\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$$

dada por

$$\gamma \cdot (\xi, g) = (\varphi(\gamma, g)(\xi), h(\gamma)g).$$

Dedicamos esta sección a probar que la acción $\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ es topológicamente conjugada a la acción diagonal $* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ construida en la sección anterior. Por tanto buscamos un homeomorfismo

$$H : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$$

que conjugue ambas acciones, es decir,

$$\gamma * H(\xi, g) = H(\gamma \cdot (\xi, g))$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in \partial\mathbb{H}$ y $g \in G$.

Para ello, recordemos que cuando definimos la casi-acción $\Psi : \Gamma \rightarrow \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H})$, identificamos $\mathbb{H} \times \{e\}$ con \mathbb{H} . Sin embargo, ahora nos conviene hacer explícita la hoja de referencia $\mathbb{H} \times \{e\}$. Así, la acción diagonal $*$: $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ se escribe de la forma

$$\gamma * (\xi, g) = (\gamma(f_\sigma(\xi, e)), h(\gamma)g), \quad (5.6)$$

donde $\sigma(0) = e$ y $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$.

Además la aplicación $\tilde{f}_\sigma : \mathbb{H} \times \{g\} \rightarrow \mathbb{H} \times \{g\sigma(1)\}$ descrita en el diagrama (5.2) (véase también la proposición 5.3) proviene de la aplicación $f_\sigma : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$ que escribimos como

$$\tilde{f}_\sigma(z, g) = (F_\sigma(z, g), g\sigma(1)).$$

Teorema 5.8. *Sea $H : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$ el homeomorfismo dado por*

$$H(\xi, g) = g \cdot f_\tau(\xi, g) = (F_\tau(\xi, g), g)$$

con $\tau : [0, 1] \rightarrow G$, $\tau(0) = e$ y $\tau(1) = g^{-1}$. Entonces H conjuga las dos acciones definidas sobre $\partial\mathbb{H} \times G$.

Demostración. Veamos que para cada $\gamma \in \Gamma$ se verifica que $\gamma * (H(\xi, g)) = H(\gamma \cdot (\xi, g))$. Esta igualdad es equivalente a

$$(\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ F_\sigma)(F_\tau(\xi, g), e) = F_\omega(\varphi(\gamma, g)(\xi), h(\gamma)g),$$

con $\sigma, \tau, \omega : [0, 1] \rightarrow G$ caminos empezando en el elemento neutro de G y terminando en $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$, $\tau(1) = g^{-1}$ y $\omega(1) = g^{-1}h(\gamma)^{-1}$. Trabajamos ambos lados de la igualdad, comenzando por el izquierdo. El siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} \times \{g\} & \xrightarrow{\tilde{f}_\tau} & \mathbb{H} \times \{e\} & \xrightarrow{F_\sigma} & \mathbb{H} & \xrightarrow{\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1})} & \mathbb{H} \\ & & \downarrow \tilde{f}_\sigma & & & & \uparrow p_1 \\ & & \mathbb{H} \times \{h(\gamma)^{-1}\} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H} \times \{e\}, & & \end{array}$$

garantiza que

$$(\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ F_\sigma)(F_\tau(\xi, g), e) = p_1 \left((\gamma \circ \tilde{f}_\sigma \circ \tilde{f}_\tau)(\xi, g) \right) = p_1 \left(\gamma \circ \tilde{f}_{\tau * \tau(1)\sigma}(\xi, g) \right).$$

Como los caminos $\tau * \tau(1)\sigma$ y ω tienen los mismos puntos inicial y final, las aplicaciones $\tilde{f}_{\tau * \tau(1)\sigma}$ y \tilde{f}_ω están a distancia acotada de la identidad. Esto significa que al pasar al borde, las aplicaciones coinciden de modo que

$$(\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ F_\sigma)(F_\tau(\xi, g), e) = p_1 \left((\gamma \circ f_\omega)(\xi, g) \right).$$

De modo análogo, usando el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} \times \{g\} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{H} \times \{h(\gamma)g\} & \xrightarrow{F_\omega} & \mathbb{H} \\ & & \downarrow \tilde{f}_\omega & \nearrow p_1 & \\ & & \mathbb{H} \times \{e\}, & & \end{array}$$

podemos reescribir el lado derecho de la igualdad como

$$F_\omega(\varphi(\gamma, g)(\xi), h(\gamma)g) = p_1\left((f_\omega \circ \gamma)(\xi, g)\right).$$

Es decir, la conjugación se reduce a probar que

$$p_1((\gamma \circ f_\omega)(\xi, g)) = p_1((f_\omega \circ \gamma)(\xi, g)),$$

o equivalentemente,

$$(\gamma \circ f_\omega)(\xi, g) = (f_\omega \circ \gamma)(\xi, g).$$

Esta condición es exactamente la Γ -equivarianza de la aplicación $f_\omega : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$ que se sigue inmediatamente de la Γ -equivarianza de la aplicación $\tilde{f}_\omega : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$ probada en la proposición 5.2. □

5.5. Círculo universal de una foliación de Lie

El teorema 5.8 nos va a permitir construir el *círculo universal* de una foliación de Lie en el sentido introducido por William P. Thurston en [82, 83] para foliaciones de 3-variedades. Una versión medible del círculo universal ha sido introducida por S. Matsumoto en [63].

Sea (M, \mathcal{F}) una foliación por superficies hiperbólicas y $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ su cubierta universal. Cada hoja \tilde{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$ es conformemente equivalente al plano de Poincaré \mathbb{H} , luego tiene asociado un círculo en el infinito que denotaremos por $S_\infty^1(\tilde{L})$. Dado un elemento $\gamma \in \pi_1(M)$, la acción $\pi_1(M) \curvearrowright M$ induce una aplicación

$$\gamma : S_\infty^1(\tilde{L}) \rightarrow S_\infty^1(\gamma(\tilde{L})),$$

distinta para cada hoja \tilde{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$. La idea del círculo universal es caracterizar estas aplicaciones a través de un único círculo S_{univ}^1 y una acción $\pi_1(M) \curvearrowright S_{\text{univ}}^1$.

La definición de círculo universal que da D. Calegari en [20] se aplica a foliaciones *taut* de 3-variedades, pero aquí la adaptamos a nuestro contexto:

Definición 5.9. En las condiciones anteriores, un *círculo universal* es un círculo S_{univ}^1 que satisface las siguientes propiedades:

(1) Existe una representación inyectiva

$$\rho_{\text{univ}} : \pi_1(M) \rightarrow \text{Homeo}(S_{\text{univ}}^1).$$

(2) Para cada hoja \tilde{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$, hay una aplicación monótona

$$T_{\tilde{L}} : S_{\text{univ}}^1 \rightarrow S_\infty^1(\tilde{L}).$$

Además, si $H(\tilde{\mathcal{F}})$ es el espacio de hojas de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$, la aplicación

$$T : S_{\text{univ}}^1 \times H(\tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow E_\infty = \bigcup_{\tilde{L} \in H(\tilde{\mathcal{F}})} S_\infty^1(\tilde{L})$$

definida por $T(\cdot, \tilde{L}) = T_{\tilde{L}}(\cdot)$, es continua.

(3) Para cada hoja \tilde{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$ y cada $\gamma \in \pi_1(M)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S_{\text{univ}}^1 & \xrightarrow{\rho_{\text{univ}}(\gamma)} & S_{\text{univ}}^1 \\ T_{\tilde{L}} \downarrow & & \downarrow T_{\gamma(\tilde{L})} \\ S_{\infty}^1(\tilde{L}) & \xrightarrow{\gamma} & S_{\infty}^1(\gamma(\tilde{L})) \end{array}$$

W. Thurston probó que toda foliación *taut* sobre una 3-variedad atoroidal admite un círculo universal. Posteriormente, D. Calegari y N. M. Dunfield en [21] estudiaron otros tipos de foliaciones sobre 3-variedades en las que también se puede definir un círculo universal. Veamos aquí que las foliaciones de Lie admiten dicho círculo.

Sea pues \mathcal{F} una G -foliación de Lie sobre una variedad compacta $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G)$. La foliación \mathcal{F} viene inducida por la foliación horizontal sobre $\tilde{M} = \mathbb{H} \times G$ cuyas hojas son de la forma $\mathbb{H} \times \{g\}$. Llamamos $\tilde{\mathcal{F}}$ a dicha foliación sobre \tilde{M} . Así, dada una hoja \tilde{L}_g de $\tilde{\mathcal{F}}$, su círculo en el infinito no es más que

$$S_{\infty}^1(\tilde{L}_g) = \partial\mathbb{H} \times \{g\},$$

y el espacio

$$E_{\infty} = \partial\mathbb{H} \times G.$$

De hecho, el espacio de hojas $H(\tilde{\mathcal{F}})$ se identifica de modo natural con el grupo G .

El círculo universal a una foliación de Lie es el borde del plano de Poincaré $S_{\text{univ}}^1 = \partial\mathbb{H}$, identificado como el borde $\partial\mathbb{H} \times \{e\}$ de la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ que pasa por el elemento neutro de G . En efecto, S_{univ}^1 verifica las siguientes propiedades:

(1) En primer lugar, tomamos como representación ρ_{univ} la representación

$$\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(\partial\mathbb{H})$$

definida por (5.4) y determinada por la casi-acción.

(2) Dada una hoja $\mathbb{H} \times \{g\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$, tomamos la aplicación continua

$$f_{\sigma} : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H} \times \{g\},$$

donde σ es un camino en G con punto inicial $\sigma(0) = e$ y punto final $\sigma(1) = g$. Además, la aplicación global

$$f : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$$

definida por $f(\xi, g) = f_{\sigma}(\xi)$ es continua.

(3) Dado un elemento $g \in G$ y una transformación $\gamma \in \Gamma$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathbb{H} & \xrightarrow{\Phi(\gamma)} & \partial\mathbb{H} \\ f_{\sigma} \downarrow & & \downarrow f_{\tau} \\ \partial\mathbb{H} \times \{g\} & \xrightarrow{\gamma} & \partial\mathbb{H} \times \{h(\gamma)g\} \end{array}$$

conmuta por construcción de la casi-acción, donde σ y τ son caminos en G empezando en el elemento neutro y con puntos finales g y $h(\gamma)g$ respectivamente.

Hemos probado así que toda foliación de Lie admite un círculo universal en el sentido de Thurston.

5.6. Minimalidad de la acción afín

Vamos a utilizar la existencia de un círculo universal para estudiar la dinámica del flujo horocíclico foliado. En esta sección probaremos que la acción de B es minimal y en la siguiente que la acción de U lo es también bajo una condición adicional.

Dada una G -foliación de Lie \mathcal{F} sobre M definida por una representación de holonomía $h : \pi_1(M) \rightarrow G$, consideramos el fibrado tangente

$$Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$$

obtenido a partir de la acción libre y propiamente discontinua $\Gamma \curvearrowright PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ definida por

$$\gamma \cdot (u, g) = (\varphi(\gamma, g)(u), h(\gamma)g),$$

donde $\varphi : \Gamma \times G \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ verifica la propiedad de cociclo ya descrita en la identidad (5.1). Recordemos que la foliación \mathcal{F} es minimal si y sólo si $\overline{h(\Gamma)} = G$.

Sabemos que la acción afín $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright B$ es dual a la acción $\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ definida por

$$\gamma \cdot (\xi, g) = (\varphi(\gamma, g)(\xi), h(\gamma)g).$$

También hemos visto que esta acción es topológicamente conjugada a la acción diagonal $*$: $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ inducida por la casi-acción $\Gamma \rightarrow \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H})$ y definida por

$$\gamma * (\xi, g) = (\varphi(\gamma, h(\gamma)^{-1}) \circ f_\sigma(\xi), h(\gamma)g),$$

con $\sigma(0) = e$ y $\sigma(1) = h(\gamma)^{-1}$. Luego el estudio de la B -acción sobre Y se reduce al estudio de esta acción diagonal:

Teorema 5.10. *La acción diagonal $*$: $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ es minimal si y sólo si*

- (1) *la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ definida por la casi-acción es minimal y*
- (2) *la acción $\Gamma \curvearrowright G$ es minimal o equivalentemente $\overline{h(\Gamma)} = G$.*

Comenzaremos probando tres lemas:

Lema 5.11. *Dada una sucesión $f_n \in \text{Bilips}(\mathbb{H})$ y un punto $z \in \mathbb{H}$ tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \xi^+ \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(z) = \xi^-.$$

Entonces, para cualquier punto $\xi \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ tal que $\xi \neq \xi^-$ se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = \xi^+.$$

Demostración. Comencemos suponiendo que $\xi^+ \neq \xi^-$. En primer lugar, si $\xi \in \mathbb{H}$, como las aplicaciones f_n son bilipschitz entonces

$$d(d_n(\xi), f_n(z)) \leq Kd(\xi, z).$$

Por tanto, el límite de las sucesiones $f_n(\xi)$ y $f_n(z)$ coincide, concluyendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = \xi^+.$$

Si $\xi \in \partial\mathbb{H}$ y $\xi \neq \xi^-$, tomemos un punto $\xi' \in \partial\mathbb{H}$ distinto de ξ y ξ^- y llamemos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ a la geodésica que une los puntos $\alpha(-\infty) = \xi$ y $\alpha(+\infty) = \xi'$.

Denotemos por $\alpha_n = f_n \circ \alpha$ a la curva que une $\alpha_n(-\infty) = f_n(\xi)$ y $\alpha_n(+\infty) = f_n(\xi')$, de modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$0 \leq d(f_n^{-1}(z), \alpha(t)) \leq K^{-1}d(x, \alpha_n(t)).$$

Como $f_n^{-1}(z) \rightarrow \xi^-$ y $\xi' \neq \xi, \xi^-$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n^{-1}(z), \alpha(t)) = +\infty,$$

de donde deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, \alpha_n(t)) = +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$, la sucesión $\alpha_n(t) \rightarrow \xi_t \in \partial\mathbb{H}$. Ahora, para cada $t \in \mathbb{R}$, como $\alpha_n(t) \in \mathbb{H}$, ya hemos probado que $\alpha_n(t) \rightarrow \xi^+$, de donde concluimos que $\xi_t = \xi^+$ y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = \xi^+.$$

El caso en que $\xi^+ = \xi^-$ se prueba de modo completamente análogo pero considerando el horociclo centrado en ξ en lugar de la geodésica α considerada anteriormente. \square

Lema 5.12. *Sea $\gamma_n \in \Gamma$ una sucesión tal que $h(\gamma_n) \rightarrow e \in G$. Si denotamos por $\tilde{\Psi}(\gamma_n)$ a un representante en $\text{Bilips}(\mathbb{H})$ de $\Psi(\gamma_n) \in \text{Bilips}(\mathbb{H})/\text{Bilips}_0(\mathbb{H})$, entonces para cada $z \in \mathbb{H}$ se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(\gamma_n)(z) = \xi^+ \in \partial\mathbb{H} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(\gamma_n^{-1})(z) = \xi^- \in \partial\mathbb{H}.$$

Demostración. Por definición de la casi-acción,

$$\tilde{\Psi}(\gamma_n) = \varphi(\gamma_n, h(\gamma_n)^{-1}) \circ f_{\sigma_n},$$

con $\sigma_n : [0, 1] \rightarrow G$, camino con punto inicial en $e \in G$ y punto final $\sigma_n(1) = h(\gamma_n)^{-1}$.

Como $h(\gamma_n) \rightarrow e$, entonces la sucesión de caminos σ_n converge al camino constante sobre el elemento neutro $e \in G$. Por tanto $f_{\sigma_n} \rightarrow f_0 \in \text{Bilips}_0(\mathbb{H})$ y podemos suponer $f_0 = Id$. Es decir, para n suficientemente grande, $\tilde{\Psi}(\gamma_n)$ está tan próximo como queramos a $\varphi(\gamma_n, h(\gamma_n^{-1}))$. Como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G$ es propiamente discontinua, dado $z \in \mathbb{H}$, la sucesión

$$\varphi(\gamma_n, h(\gamma_n))(z, e) \rightarrow \xi \in \partial\mathbb{H} \times \{e\}$$

de donde concluimos que $\tilde{\Psi}(\gamma_n)(z) \rightarrow \xi \in \partial\mathbb{H}$. \square

Lema 5.13. *Supongamos que la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ definida por la casi-acción es minimal y sean $\xi, \xi^-, \xi^+ \in \partial\mathbb{H}$ tres puntos arbitrarios. Existe una sucesión $\gamma_k \in \Gamma$ tal que*

$$(i) \Phi(\gamma_k)(\xi^+) \rightarrow \xi' \notin \Phi(\Gamma).(\xi^-) \text{ y}$$

$$(ii) \Phi(\gamma_k)(\xi^-) \neq \xi, \quad \forall k \geq 0.$$

Demostración. Como Γ es un grupo numerable entonces siempre puedo encontrar un punto $\xi' \notin \Phi(\Gamma).(\xi^-)$. Por la minimalidad de la acción, existe una sucesión $\gamma_k \in \Gamma$ tal que $\Phi(\gamma_k)(\xi^+) \rightarrow \xi'$.

Para garantizarnos la condición (ii) observemos que podemos modificar γ_k de modo que no exista ninguna subsucesión γ_{s_k} tal que $\Phi(\gamma_{s_k})(\xi^-) = \xi$ para todo $k \geq 0$. En efecto, hay dos posibilidades:

(a) Si la sucesión original $\Phi(\gamma_k)(\xi^-)$ no es estacionaria, basta con suprimir los términos γ_{s_k} para garantizar la condición (ii).

(b) Si la sucesión $\Phi(\gamma_k)(\xi^-)$ es estacionaria e igual a ξ' , sustituimos γ_k por $\gamma\gamma_k$ con $\gamma \in \Gamma$ un elemento cualquiera del grupo. De este modo $\Phi(\gamma\gamma_k)(\xi^-) = \gamma(\xi) \neq \xi$ y se sigue cumpliendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\gamma\gamma_k)(\xi^+) = \Phi(\gamma)(\xi') \neq \Phi(\Gamma).(\xi^-).$$

□

Demostración del teorema 5.10. Si la acción $* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ es minimal, entonces se verifican las condiciones (1) y (2). Luego sólo hay que probar el recíproco.

Por la condición (2), sabemos que existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $h(\gamma_n) \rightarrow e \in G$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $\tilde{\Psi}(\gamma_n)$ una aplicación en $\text{Bilips}(\mathbb{H})$ que se proyecte sobre el homeomorfismo $\Phi(\gamma_n) \in \text{Homeo}(\partial\mathbb{H})$.

Por el lema 5.12, existe un punto $z \in \mathbb{H}$ tal que las sucesiones $\tilde{\Psi}(\gamma_n)(z)$ y $\tilde{\Psi}(\gamma_n^{-1})(z)$ convergen a puntos ξ^+ y ξ^- en $\partial\mathbb{H}$ respectivamente. Así, dado $\xi \in \partial\mathbb{H}$ tal que $\xi \neq \xi^-$, por el lema 5.11 sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(\gamma_n)(\xi) = \xi^+$$

y por tanto el punto

$$(\xi^+, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\gamma_n)(\xi), h(\gamma_n)g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n * (\xi, g) \in \overline{\Gamma.(\xi, g)}, \quad \forall g \in G.$$

Más aún, si $\xi \neq \Phi(\gamma)(\xi^-)$, entonces

$$\begin{aligned} (\Phi(\gamma)(\xi^+), g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\gamma)\Phi(\gamma_n)\Phi(\gamma^{-1})(\xi), g) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\gamma)\Phi(\gamma_n)\Phi(\gamma^{-1})(\xi), h(\gamma)h(\gamma_n)h(\gamma^{-1})g) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\gamma_n\gamma^{-1} * (\xi, g) \in \overline{\Gamma.(\xi, g)}, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Dicho de otra forma, si $\xi \notin \Phi(\Gamma)\xi^-$, entonces

$$\overline{\Phi(\Gamma).(\xi^+)} \times \{g\} \subset \overline{\Gamma.(\xi, g)},$$

para cada $g \in G$. Ahora, como $\overline{\Phi(\Gamma).(\xi^+)} = \partial\mathbb{H}$ por hipótesis, deducimos que:

$$\partial\mathbb{H} \times \{g\} \subset \overline{\Gamma.(\xi, g)};$$

y como $\overline{h(\Gamma)} = G$ concluimos que:

$$\partial\mathbb{H} \times G = \overline{\Gamma \cdot (\xi, g)},$$

para cada $g \in G$.

Falta ver el caso en que $\xi \in \Phi(\Gamma) \cdot (\xi^-)$. Escribamos $\xi = \Phi(\gamma)(\xi^-)$ y sea $\gamma_k \in \Gamma$ la sucesión que nos proporciona el lema 5.13, es decir:

- (i) $\Phi(\gamma_k)(\xi^+) \rightarrow \xi' \notin \Psi(\Gamma) \cdot (\xi^-)$ y
- (ii) $\Phi(\gamma_k)(\xi^-) \neq \xi, \quad \forall k \geq 0$.

Usando de nuevo el lema 5.11, el límite

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k \gamma_n \gamma_k^{-1} * (\xi, g) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(\gamma_k) \Phi(\gamma_n) \Phi(\gamma_k^{-1})(\xi), h(\gamma_k) h(\gamma_n) h(\gamma_k^{-1})g) = (\Phi(\gamma_k)(\xi^+), g). \end{aligned}$$

Cuando $k \rightarrow \infty$, la sucesión $(\Phi(\gamma_k)(\xi^+), g) \rightarrow (\xi', g) \in \overline{\Gamma \cdot (\xi, g)}$. Como $\xi' \notin \Phi(\Gamma) \cdot (\xi^-)$ entonces por el caso anterior,

$$\partial\mathbb{H} \times G = \overline{\Gamma \cdot (\xi', g)} \subset \overline{\Gamma \cdot (\xi, g)}$$

concluyendo que $\overline{\Gamma \cdot (\xi, g)} = \partial\mathbb{H} \times G$. □

Teorema 5.14. *La acción $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright B$ es minimal.*

Demostración. Teniendo en cuenta la hipótesis de la minimalidad de la foliación y el teorema 5.10, sólo falta comprobar que la acción $* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ es minimal. Para ello, suponemos que no lo es y llegamos a una contradicción con la compacidad de Y .

Supongamos entonces que la acción $* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H}$ no es minimal, es decir, existen dos puntos $\xi, \xi' \in \partial\mathbb{H}$ tales que para cualquier sucesión $\gamma_n \in \Gamma$, la sucesión de puntos $\gamma_n * \xi$ no converge a ξ' . Deducimos inmediatamente que la acción diagonal $* : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ no es minimal, ya que basta tomar los puntos $(\xi, g), (\xi', g') \in \partial\mathbb{H} \times G$ en g y g' elementos arbitrarios en G .

En el teorema 5.8 hemos probado que la acción inducida original $\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ es topológicamente conjugada a la acción diagonal a través del homeomorfismo

$$H : (\xi, g) \in \partial\mathbb{H} \times G \mapsto H(\xi, g) = g \cdot f_\tau(\xi, g) \in \partial\mathbb{H} \times G.$$

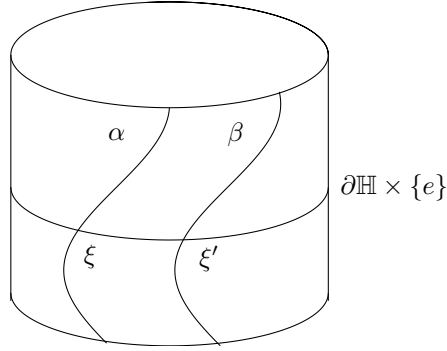
Es decir, la acción inducida original $\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times G$ tampoco es minimal y los puntos conflictivos son de la forma $H^{-1}(\xi, g)$ y $H^{-1}(\xi', g')$, y con $g, g' \in G$ arbitrarios. Es decir, los conjuntos

$$\alpha = \{H^{-1}(\xi, g) \mid g \in G\} \quad \text{y} \quad \beta = \{H^{-1}(\xi', g) \mid g \in G\}$$

verifican que ningún punto de β es punto límite del resultado de aplicar una sucesión γ_n a un punto de α .

Sea D un dominio fundamental compacto de la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G$ que define la variedad compacta $M = \Gamma \backslash (\mathbb{H} \times G)$ y tomemos un punto $(z_0, g_0) \in D$ y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_n \cdot (z_0, g_0) \rightarrow (\xi', e) \in \partial\mathbb{H} \times G$. Sabemos que existe tal sucesión porque Γ es cocompacto.

Si probamos que la sucesión $\gamma_n \cdot (\xi, e)$ converge a un punto del conjunto β habremos llegado a una contradicción y por tanto probado el teorema.


 Figura 5.2: Conjuntos α y β

A pesar de que la conjugación $H : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$ no se extiende a $\mathbb{H} \times G$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $H_n : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H} \times G & \xrightarrow{H_n} & \mathbb{H} \times G \\
 \gamma_n \cdot \downarrow & & \downarrow \gamma_n^* \\
 \mathbb{H} \times G & \xrightarrow{H_n} & \mathbb{H} \times G.
 \end{array} \tag{5.7}$$

En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\gamma_n^* : \mathbb{H} \times G \rightarrow \mathbb{H} \times G$$

por

$$\gamma_n^*(z, g) = (\tilde{\Psi}(z), h(\gamma_n)g),$$

siendo $\tilde{\Psi}(\gamma) \in \text{Bilips}(\mathbb{H})$ una aplicación bilipschitziana que se proyecta sobre $\Phi(\gamma) \in \text{Homeo}(\partial\mathbb{H})$. Ahora definimos H_n por

$$H_n((z, g)) = g \cdot f_\tau(z, g),$$

con $\tau_n(0) = e$ y $\tau_n(1) = g^{-1}$, donde ahora los caminos τ están fijados para obtener la conmutatividad (véase la demostración del teorema 5.8).

Por construcción sabemos que el diagrama (5.7) conmuta para cada $n \in \mathbb{N}$ y que además cada H_n induce sobre $\partial\mathbb{H} \times G$ el homeomorfismo $H : \partial\mathbb{H} \times G \rightarrow \partial\mathbb{H} \times G$ que conjuga las dos acciones de Γ sobre $\partial\mathbb{H} \times G$ (véase teorema 5.8).

Sea ahora $c : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H} \times \{e\}$ un rayo geodésico con $c(+\infty) = (\xi, e)$ de modo que para cada $t \in [0, +\infty)$ se tiene que

$$\gamma_n^* H_n(c(t)) = H_n(\gamma_n \cdot c(t)) \rightarrow H(\tilde{\xi}, g_0^{-1}),$$

para cierto $\tilde{\xi} \in \partial\mathbb{H}$. Falta comprobar que $(\tilde{\xi}, g_0^{-1}) \in \beta$. Por construcción, $\gamma_n \cdot (z_0, g_0) \rightarrow (\xi', e)$, y por tanto

$$\gamma_n^* H_n(z_0, g_0) = H_n(\gamma_n \cdot (z_0, g_0)) \rightarrow H(\xi', e) = (\xi, e).$$

Pero como $\gamma_n * H_n(z_0, g_0) = \gamma_n * f_{\tau_n}(z_0, g_0)$, deducimos que

$$\gamma_n * f_{\tau_n}(z_0, g_0) \rightarrow (\xi', e).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación f_{τ_n} está a distancia acotada de f_τ y concluimos que

$$\gamma_n * f_\tau(z_0, g_0) \rightarrow (\xi', e).$$

Quedándonos con la primera componente y aplicando el lema 5.11, deducimos que para cada $z \in \mathbb{H}$, la sucesión $\gamma_n * z \rightarrow \xi'$. En particular,

$$\gamma_n * H_n(c(t)) \rightarrow (\xi', g_0^{-1}) = H(\tilde{\xi}, g_0^{-1}),$$

concluyendo que $(\tilde{\xi}, g_0^{-1}) = H^{-1}(\xi', g_0^{-1}) \in \beta$ lo que completa la demostración. \square

5.7. Teorema de Hedlund para foliaciones de Lie

Finalizaremos esta sección probando la minimalidad del flujo horocíclico, $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G) \curvearrowright U$. Supondremos además que la representación $h : \Gamma \rightarrow G$ es no inyectiva. Esta condición de no trivialidad de las hojas ya estaba presente en trabajos anteriores sobre el tema [3, 61, 64]. La idea es adaptar los argumentos del caso homogéneo presentados en la sección 4.4.

Teorema 5.15. *Sea (M, \mathcal{F}) una foliación de Lie minimal con representación de holonomía $h : \Gamma \rightarrow G$ no inyectiva. Entonces, el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}} : Y \curvearrowright U$ sobre la variedad $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G)$ es minimal.*

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{R}) \times G & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \hat{Y} = \ker h \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times G), & & \\ \swarrow q & & \\ Y & & \end{array}$$

donde las hojas de \hat{Y} son difeomorfas a las de Y y corresponden al tangente unitario $T^1 \hat{S} = \ker h \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ de la superficie hiperbólica $\hat{S} = \ker h \backslash \mathbb{H}$. Observemos que $\ker h < PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano que verifica:

Lema 5.16. *El conjunto límite $L(\ker h) = \partial \mathbb{H}$.*

Demostración. Por dualidad de la B -acción sobre Y sabemos que la acción inducida $\cdot : \Gamma \curvearrowright \partial \mathbb{H} \times G$ es minimal. Por el teorema 5.8 también lo es la acción diagonal inducida por la casi-acción $*$: $\Gamma \curvearrowright \partial \mathbb{H} \times G$. En particular, la acción $*$: $\Gamma \curvearrowright \partial \mathbb{H}$ es minimal. Ahora bien, la acción $\cdot : \ker h \curvearrowright \mathbb{H}$ coincide con la acción $*$: $\ker h \curvearrowright \mathbb{H}$ y como $\ker h \triangleleft \Gamma < \text{Bilips}(\mathbb{H})$ entonces $L(\ker h) = L(\Gamma) = \partial \mathbb{H}$. \square

Lema 5.17. *El grupo fuchsiano $\ker h < PSL(2, \mathbb{R})$ no contiene elementos parabólicos.*

Demostración. Supongamos que $\gamma \in \ker h$ es un elemento parabólico. Esto implica que $\varphi(\gamma, e) \in PSL(2, \mathbb{R})$ es parabólico, luego existe un punto $\xi \in \partial \mathbb{H} \times \{e\}$ que es un atractor en \mathbb{H} de las sucesiones $\varphi(\gamma^n, e)$ y $\varphi(\gamma^{-n}, e)$. Dado $z \in \mathbb{H} \times \{e\}$ se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\gamma^n, e)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\gamma^{-n}, e)(z) = \xi.$$

Sea $D \subset \mathbb{H} \times G$ un dominio fundamental compacto de la acción $\cdot : \Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G$ y consideremos el conjunto compacto $D_e = D \cap (\mathbb{H} \times \{e\})$. Por compacidad de D_e sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\gamma^n, e)(D_e) = \xi \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\gamma^{-n}, e)(D_e) = \xi.$$

Dicho de otra forma, para n suficientemente grande, tenemos que:

$$\varphi(\gamma^n, e)(D_e) \cap \varphi(\gamma^{-n}, e)(D_e) \neq \emptyset,$$

lo que no es posible porque D es el dominio fundamental de la acción. Concluimos así que $\ker h$ no hay elementos parabólicos. \square

Demostración del teorema 5.15. El objetivo es probar que si \mathcal{M} un conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal en Y , entonces $\mathcal{M} = Y$. Observemos que el grupo $\ker h$ puede ser finitamente generado o no, es decir, que la hoja tipo $\ker h \setminus \mathbb{H}$ de \mathcal{F} puede ser geoméricamente finita o no. Para demostrar el teorema, vamos a distinguir estos dos casos:

Caso geoméricamente finito.

Consideremos el conjunto cerrado y U -invariante en \hat{Y} dado por $\hat{\mathcal{M}} = q^{-1}(\mathcal{M})$. En este caso, todos los puntos del conjunto límite $L(\ker h)$ son horocíclicos, luego dado un punto $\hat{y} = \ker h(u, g) \in \hat{\mathcal{M}}$, existe una sucesión $u_{s_n} \in U$ tal que $\hat{y} \cdot u_{s_n} \rightarrow \hat{y}$ y por tanto una sucesión $\gamma_n \in \ker h$ tal que

$$\gamma_n(u, g)u_{s_n} = (\varphi(\gamma_n, g)uu_{s_n}, g) \rightarrow (u, g).$$

Si llamamos $f_n = u^{-1}\varphi(\gamma_n, g)uu_{s_n}$, entonces $f_n \rightarrow Id \in PSL(2, \mathbb{R})$. Además, esta sucesión f_n verifica lo siguiente:

Lema 5.18. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n \notin B$.*

Demostración. Supongamos que $f_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$f_n u_{s_n}^{-1} = u^{-1}\varphi(\gamma_n, g)u \in B,$$

y así $\varphi(\gamma_n, g) \in uBu^{-1}$. Para $n \neq m$ se verifica que

$$[\gamma_n, \gamma_m] = \gamma_n \gamma_m \gamma_n^{-1} \gamma_m^{-1} \in \ker h$$

y

$$\varphi([\gamma_n, \gamma_m], g) \in uUu^{-1},$$

ya que $[B, B] = U$. Por el lema 5.17, sabemos que en $\ker h$ no hay elementos parabólicos, y por tanto

$$\varphi([\gamma_n, \gamma_m], g) = Id$$

lo que implica que $[\gamma_n, \gamma_m] = Id$. Es decir, existe $u_s \in U$ tal que

$$u^{-1}\varphi(\gamma_n, g)u = u_s \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix} u_s^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H} \times G$ es propiamente discontinua, entonces la sucesión $\varphi(\gamma_n, g)$ no converge y la sucesión α_n es no acotada, lo cual es imposible. En efecto, la sucesión de matrices $u\varphi(\gamma_n, g)uu_{s_n} = f_n$ converge a $Id \in PSL(2, \mathbb{R})$, de modo que, si llamamos $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$f_n(e_1) = u_s \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix} u_s^{-1} u_{s_n}(e_1) = (\alpha_n, 0) \rightarrow (1, 0),$$

concluyendo la prueba del lema. \square

Continuando con la demostración del teorema, consideremos el difeomorfismo de $PSL(2, \mathbb{R}) \times G$ dado por

$$F_n(u, g) = (f_n u, g).$$

Notemos en primer lugar que F_n determina sendos difeomorfismos en \hat{Y} e Y , que seguiremos llamando F_n . Además, según el lema 5.18, podemos escribir

$$f_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad \text{con } c_n \neq 0.$$

Como la sucesión F_n verifica que

$$F_n(\hat{y}) = \ker h.(\varphi(\gamma_n, g)uu_{s_n}, g) = (\ker h.\gamma_n.(u, g))u_{s_n} = \hat{y}.u_{s_n} \in \hat{y}.U \subset \hat{\mathcal{M}},$$

entonces F_n pertenece al conjunto

$$H_{\hat{\mathcal{M}}} = \{F \in \text{Difeo}(Y) \mid F(\hat{\mathcal{M}}) \cap \hat{\mathcal{M}} \neq \emptyset\}$$

que tiene las siguientes propiedades:

Lema 5.19. *El conjunto $H_{\hat{\mathcal{M}}}$ es cerrado U -invariante a izquierda y derecha.*

Demostración. (1) El conjunto $H_{\hat{\mathcal{M}}}$ es cerrado. En efecto, sea $F_n \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$ una sucesión convergente a un elemento F y veamos que $F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$.

Como $F_n \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$, existen sucesiones $\hat{y}_n, \hat{y}'_n \in \hat{\mathcal{M}}$ tales que $\hat{y}'_n = F(\hat{y}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Al proyectar sobre Y , como \mathcal{M} es compacto, las sucesiones $y_n = q(\hat{y}_n)$ e $y'_n = q(\hat{y}'_n)$ convergen a puntos y e y' en \mathcal{M} respectivamente. Luego, al tomar puntos $\hat{y} \in q^{-1}(y)$ e $\hat{y}' \in q^{-1}(y')$ sobre una misma hoja en \hat{Y} , deducimos que $y' = F(y) \in \hat{\mathcal{M}}$ y concluimos que $F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$.

(2) El conjunto $H_{\hat{\mathcal{M}}}$ es U -invariante a derecha. En efecto, sean $F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$ y $u_s \in U$ y veamos que $Fu_s \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$. Como $F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$, existen puntos $\hat{y} = \ker h(u, g)$ e $\hat{y}' = \ker h(u', g)$ en $\hat{\mathcal{M}}$ tales que $\hat{y}' = F(\hat{y})$, luego $\hat{y}u_s^{-1} \in \hat{\mathcal{M}}$. Así, el punto

$$(Fu_s)(\hat{y}u_s^{-1}) = \ker h(uu_s u_s^{-1} f, g) = F(\hat{y}) = \hat{y}' \in \hat{\mathcal{M}},$$

concluyendo que $Fu_s \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$.

(3) El conjunto $H_{\hat{\mathcal{M}}}$ es U -invariante a izquierda. En efecto, sean de nuevo $F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$ y $u_s \in U$ y veamos ahora que $u_s F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$. Como en el apartado anterior, existen puntos $\hat{y}, \hat{y}' \in \hat{\mathcal{M}}$ tales que $\hat{y}' = F(\hat{y})$. Se deduce entonces que

$$(u_s F)(\hat{y}) = F(\hat{y}) \cdot u_s = \hat{y}' \cdot u_s \in \hat{\mathcal{M}}$$

concluyendo que $u_s F \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$. □

Para finalizar con la prueba del teorema recordemos que tenemos que probar que \mathcal{M} es $g_{\mathbb{R}}$ -invariante. Para ello, fijemos $t \in \mathbb{R}$ y veamos que $g_t \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$. Tomemos elementos unipotentes

$$u'_n = \begin{pmatrix} 1 & e^{t/2} - a_n \\ 0 & c_n \end{pmatrix}, \quad u''_n = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-t/2}(b_n + d_n \frac{e^{t/2} - a_n}{c_n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De este modo, la sucesión de elementos

$$u'_n f_n u''_n = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ c_n & e^{-t/2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

El lema 5.19 garantiza que $u'_n f_n u''_n \in H_{\hat{\mathcal{M}}}$ y al tomar límite obtenemos que el homeomorfismo dado por

$$F(u, g) = \left(u \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, g \right)$$

está en $H_{\hat{\mathcal{M}}}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Esto garantiza que $\hat{\mathcal{M}}$ es $g_{\mathbb{R}}$ invariante. Como la aplicación $q : \hat{Y} \rightarrow Y$ es $g_{\mathbb{R}}$ -equivariante, deducimos que \mathcal{M} es $g_{\mathbb{R}}$ -invariante y por consiguiente B -invariante. Concluimos que $\mathcal{M} = Y$ sin más que aplicar el teorema 5.14.

Observación 5.20. Independientemente de la topología de las hojas, si consideramos un punto $y = \Gamma(u, g) \in Y$ tal que $u(+\infty)$ sea un punto límite horocíclico en el conjunto límite $L(\ker h)$, sustituyendo \mathcal{M} por $\overline{h_{\mathbb{R}}(y)}$, la prueba anterior garantiza que

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(y)} = Y.$$

Dicho de otro modo, el flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ sobre Y es siempre transitivo.

Caso geoméricamente infinito.

En este caso, la prueba del teorema 1.3 de [64] implica que el subgrupo cerrado

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid g_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\}$$

de \mathbb{R} es no trivial de \mathbb{R} . Luego T es isomorfo a \mathbb{Z} o a \mathbb{R} .

(i) Si $T = \mathbb{R}$, entonces el conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal \mathcal{M} es $g_{\mathbb{R}}$ -invariante, de donde se deduce que $\mathcal{M} = Y$ usando la B -minimalidad en Y .

(ii) Si $T \cong \mathbb{Z}$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$g_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} g_t(\mathcal{M}) = \bigcup_{t \in [0, t_0]} g_t(\mathcal{M}),$$

de donde deducimos que $g_{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ es cerrado y B -invariante y por tanto $g_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) = Y$. Ahora tomemos un punto $y_0 \in Y$ tal que $\overline{h_{\mathbb{R}}(y_0)} = Y$, ya que $h_{\mathbb{R}}$ es transitivo como se ha dicho en la observación 5.20. Luego $y_0 = g_t(y)$ para cierto $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathcal{M}$ y por tanto

$$Y = \overline{h_{\mathbb{R}}(y_0)} = g_t(\overline{h_{\mathbb{R}}(y)}) = g_t(\mathcal{M}),$$

concluyendo finalmente que $\mathcal{M} = Y$. □

Capítulo 6

Representaciones lineales y proyectivas

En este capítulo vamos a considerar suspensiones de representaciones $h : \Gamma \rightarrow G = PSL(n, \mathbb{R})$. Sin embargo, en vez de tratarlas como foliaciones de Lie, vamos a tratarlas como foliaciones transversalmente proyectivas. Es decir, la acción natural $PSL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*$ nos permite definir, a través de la representación, una acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1}$.

Teniendo presente el resumen de la sección 2.5 sobre la minimalidad del flujo horocíclico en superficies hiperbólicas, es natural que ahora nos limitemos al caso geoméricamente finito.

En el caso foliado, veremos que podemos construir $h_{\mathbb{R}}$ -minimales; a veces lo haremos de forma directa y otras a partir de un conjunto B -minimal.

En cualquier caso, además de construirlo, nos interesaremos por probar su unicidad y por conocer la dinámica del flujo horocíclico fuera de ese minimal. En general éste es un problema difícil, pero se simplifica si el conjunto minimal es un atractor. Empezamos describiendo este concepto en el caso particular de una superficie hiperbólica como paso previo para su generalización en el contexto foliado.

6.1. Atractores del flujo horocíclico

6.1.1. Caso de una superficie

Sea $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ una superficie hiperbólica obtenida al cocientar \mathbb{H} por la acción de un grupo fuchsiano Γ no elemental.

Definición 6.1. Un conjunto $\mathcal{A} \subset T^1S$ es un *atractor* del flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ si dados $\Gamma.u \in T^1S$ y $s_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$h_{s_n}(\Gamma.u) \rightarrow \Gamma.u',$$

entonces $u' \in \mathcal{A}$.

En tal caso, la dinámica del flujo horocíclico se simplifica, pudiendo determinar todos los tipos de minimales como muestra el siguiente resultado para el caso de superficies:

Proposición 6.2. *Sea $\mathcal{M} \subset T^1S$ un conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Si \mathcal{M} es un atractor y $h_{\mathbb{R}}$ no tiene órbitas periódicas, entonces los únicos minimales del flujo horocíclico son \mathcal{M} y las órbitas cerradas no compactas.*

Demostración. Probemos en primer lugar que si \mathcal{M} es un atractor se tiene que

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)} \subset h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u) \cup \mathcal{M},$$

para cada $\Gamma.u \in T^1S$. Sea $\Gamma.u \in T^1S$ un punto arbitrario e $\Gamma.u' \in \overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)}$. Así, existe una sucesión $s_n \in \mathbb{R}$ tal que $h_{s_n}(\Gamma.u) \rightarrow \Gamma.u'$.

(i) Si s_n está acotada, entonces $\Gamma.u' \in h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$.

(ii) Si s_n no está acotada, entonces $\Gamma.u' \in \mathcal{M}$ por ser \mathcal{M} un atractor.

Sea \mathcal{M}' otro conjunto minimal y $\Gamma.u' \in \mathcal{M}'$ un punto arbitrario. Por minimalidad y lo dicho anteriormente, tenemos que:

$$\mathcal{M}' = \overline{h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u')} \subset h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u) \cup \mathcal{M}.$$

Como no hay órbitas periódicas por hipótesis, se sigue que o bien \mathcal{M}' es una órbita cerrada no compacta o bien corta a \mathcal{M} , en cuyo caso \mathcal{M} y \mathcal{M}' son iguales. \square

Como la dinámica de las órbitas cerradas no compactas carece de interés, nosotros nos interesaremos por encontrar minimales y saber cuándo son únicos. Por ejemplo, si Γ convexo-cocompacto, ya hemos visto que $\Omega_h(S)$ es un minimal. El siguiente resultado muestra que es un atractor.

Proposición 6.3. *El conjunto no errante*

$$\Omega_h(S) = \{\Gamma.u \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

es un atractor del flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$ sobre T^1S .

Demostración. Sean $\Gamma.u \in T^1S$ y $s_n \rightarrow +\infty$ una sucesión tal que

$$h_{s_n}(\Gamma.u) \rightarrow \Gamma.u'.$$

Luego existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_n h_{s_n}(u) \rightarrow u'.$$

Al proyectivizar obtenemos que

$$\gamma_n(u(+\infty)) \rightarrow u'(+\infty)$$

y nos encontramos la siguiente dicotomía:

(i) Si $u(+\infty) \in L(\Gamma)$ entonces $u'(+\infty) \in L(\Gamma)$ obteniendo lo que queríamos.

(ii) Si $u(+\infty) \notin L(\Gamma)$, puesto que la acción de Γ sobre $\partial\mathbb{H} \setminus L(\Gamma)$ es propiamente discontinua, la órbita $h_{\mathbb{R}}(\Gamma.u)$ es cerrada. Tampoco es compacta porque en ese caso $u(+\infty) \in L_p(\Gamma)$. Pero entonces $h_{s_n}(\Gamma.u)$ no puede ser convergente contradiciendo la hipótesis. \square

Corolario 6.4. *Si Γ es convexo-cocompacto, entonces el conjunto no errante $\Omega_h(S)$ es el único conjunto minimal exceptuando las órbitas cerradas no compactas fuera de $\Omega_h(S)$.*

6.1.2. Caso foliado

En el caso foliado, la definición del conjunto no errante del flujo horocíclico sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$ es completamente análoga al caso de superficies:

Definición 6.5. Se dice que un punto $y \in Y$ es un *punto no errante de $h_{\mathbb{R}}$* si para cada entorno W de y en Y existe una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$h_{s_n}(W) \cap W \neq \emptyset.$$

Se define el conjunto no errante de $h_{\mathbb{R}}$ como el conjunto $\Omega_h(Y)$ formado por todos los puntos no errantes de $h_{\mathbb{R}}$.

Por construcción, si $\Omega_h(S)$ es el conjunto no errante del flujo horocíclico sobre $X = T^1S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ y $\pi : Y \rightarrow X$ es la proyección canónica, entonces

$$\Omega_h(Y) \subset \Omega_Y = \pi^{-1}(\Omega_h(S)) = \{\Gamma \cdot (u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

Definición 6.6. Un subconjunto $\mathcal{A} \subset Y$ es un *atractor* del flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ si dado un punto $y \in Y$ y una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$h_{s_n}(y) \rightarrow y',$$

entonces $y' \in \mathcal{A}$.

Al igual que ocurre en el caso de superficies, la existencia de atractores minimales para el flujo horocíclico foliado implica su unicidad en restricción al conjunto no errante. En efecto, si \mathcal{M}_U es un atractor del flujo horocíclico foliado, entonces

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(y)} \subset h_{\mathbb{R}}(y) \cup \mathcal{M}_U$$

para cada $y \in Y$. La prueba es completamente análoga a la dada en la proposición 6.2 para el caso de superficies.

Proposición 6.7. *El conjunto $\Omega_Y = \pi^{-1}(\Omega_h(S))$ es un atractor del flujo horocíclico foliado. En particular, los únicos conjuntos minimales fuera de Ω_Y son órbitas cerradas no compactas de $h_{\mathbb{R}}$.*

Demostración. En efecto, sean $y \in Y$ y $s_n \rightarrow +\infty$ tales que $h_{s_n}(y) \rightarrow y'$. Si $y = \Gamma \cdot (u, x)$ e $y' = \Gamma \cdot (u', x')$, entonces $h_{s_n}(\Gamma \cdot u) \rightarrow \Gamma \cdot u'$. Ahora bien, por la proposición 6.3, $\Gamma \cdot u' \in \Omega_h(S)$, es decir, $u(+\infty) \in L(\Gamma)$. Luego $y' \in \Gamma \cdot (u', x') \in \Omega_Y = \pi^{-1}(\Omega_h(S))$. \square

6.2. Acciones proximales

Como hemos dicho, vamos a estudiar la minimalidad de la B -acción y de la U -acción para suspensiones de representaciones $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$. Ambas acciones son duales a las acciones diagonales $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ y $\Gamma \curvearrowright E \times \mathbb{R}P^{n-1}$ respectivamente. De hecho, en [25] J.-P. Conze e Y. Guivarc'h han mostrado condiciones para la existencia y unicidad de conjuntos minimales acciones proyectivas.

Definición 6.8. Una matriz $A \in PSL(n, \mathbb{R})$ se dice *proximal* si posee un autovalor dominante λ_0 , es decir, $|\lambda_0| > |\lambda|$ para cualquier otro autovalor λ de A .

Definición 6.9. Sea Γ un grupo fuchsiano no elemental, una representación $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ se dice:

- (H1) *fuertemente irreducible* si no existe ningún subespacio vectorial propio no trivial de \mathbb{R}^n que sea invariante por la acción de un subgrupo de índice finito de Γ ,
- (H2) *proximal* si $h(\Gamma)$ contiene un elemento proximal $A = h(\gamma)$.

Teorema 6.10. *Bajo las condiciones (H1) y (H2), la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1}$ posee un único minimal $L(h(\Gamma))$ que coincide con la clausura del conjunto de direcciones principales $x_A \in \mathbb{R}P^{n-1}$ de las matrices proximales $A = h(\gamma)$.*

Demostración. Es suficiente probar que, dado un cerrado Γ -invariante F de $\mathbb{R}P^{n-1}$, cualquier dirección principal $x_A \in F$. Sean $v_A \in \mathbb{R}^n$ el vector dominante de la matriz proximal $A = h(\gamma)$ y λ_A su autovalor dominante. Consideremos la descomposición

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v_A + W,$$

donde $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_A^{-n} A^n w \rightarrow 0\}$.

Tomemos un punto arbitrario $x \in F$ y un representante $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Por la condición (H1) de irreducibilidad, sabemos que existe un elemento $\gamma' \in \Gamma$ tal que $h(\gamma')\tilde{x} \notin W$, es decir,

$$h(\gamma')\tilde{x} = \alpha v_A + w$$

con $\alpha \neq 0$. Así, la sucesión

$$\lambda_A^{-n} A^n h(\gamma')\tilde{x} = \alpha v_A + \lambda_A^{-n} A^n w \longrightarrow \alpha v_A.$$

Al proyectivizar, sustituyendo vectores por direcciones, como F es cerrado y Γ -invariante, concluimos que $x_A \in F$ finalizando la prueba. \square

Antes de abordar el estudio general de las representaciones proyectivas que verifican las condiciones de Conze-Guivarc'h, empezamos por un estudio específico de varias situaciones particulares. Distinguiremos primero entre acciones no inyectivas e inyectivas y después entre acciones discretas e indiscretas. Como en el caso de las foliaciones de Lie, nos interesamos por la minimalidad de las acciones del grupo afín B y del flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$.

6.3. Representaciones no inyectivas

Comenzaremos estudiando las representaciones no inyectivas $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ suponiendo que el grupo Γ es convexo-cocompacto.

Teorema 6.11. *Sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano convexo-cocompacto y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación no inyectiva verificando (H1) y (H2). Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M}_U = \{\Gamma \cdot (u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

es un conjunto minimal del flujo horocíclico foliado $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1}) \curvearrowright U$.

Además, si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, salvo las órbitas cerradas no compactas fuera del conjunto no errante, el conjunto \mathcal{M}_U es el único minimal de $h_{\mathbb{R}}$.

Demostración. Razonamos por dualidad sustituyendo \mathcal{M}_U por $E(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) \subset E \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Como Γ es no elemental y el núcleo $N = \ker h$ es un subgrupo normal e infinito de Γ , por el teorema 1.20, los conjuntos límite $L(\Gamma) = L(N)$. Por tanto, N es no elemental y por la proposición 1.29 existe un elemento $v \in E(\Gamma)$ tal que $\overline{N.v} = E(\Gamma)$. Procederemos ahora en tres pasos:

(1) Para cada $x \in L(h(\Gamma))$, tenemos que $E(\Gamma) \times \{x\} \subset \overline{\Gamma.(v, x)}$. En efecto, como $E(\Gamma) = \overline{N.v}$, para cada $w \in E(\Gamma)$, existe una sucesión de elementos $\gamma_n \in N$ tal que $\{\gamma_n.v\} \rightarrow w$. Por tanto, la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v, x) = (\gamma_n.v, h(\gamma_n)x) = (\gamma_n.v, x)$$

converge al punto (w, x) y consecuentemente $(w, x) \in \overline{\Gamma.(v, x)}$.

(2) Para cada $x \in L(h(\Gamma))$, tenemos que $E(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) = \overline{\Gamma.(v, x)}$. En efecto, sea $(v', x') \in E(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ un punto arbitrario. Como la acción $\Gamma \curvearrowright L(h(\Gamma))$ es minimal, existe una sucesión de elementos $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{h(\gamma_n)(x)\} \rightarrow x'$. Por el apartado (1), los puntos

$$(\gamma_n^{-1}.v', x) \in \overline{\Gamma.(v, x)}.$$

Como $\overline{\Gamma.(v, x)}$ es Γ -invariante, los puntos

$$\gamma_n.(\gamma_n^{-1}.v', x) = (v', h(\gamma_n)x) \in \overline{\Gamma.(v, x)}.$$

Luego el punto límite (v', x') también pertenece a $\overline{\Gamma.(v, x)}$, probando la afirmación (2).

(3) Finalmente, para cada $(v', x') \in E(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$, tenemos que $E(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) = \overline{\Gamma.(v', x')}$. En efecto, como Γ es convexo-cocompacto, la acción $\Gamma \curvearrowright E(\Gamma)$ es minimal y podemos garantizar la existencia de una sucesión de elementos $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{\gamma_n.v'\} \rightarrow v$. Por compacidad de $\mathbb{R}P^{n-1}$ podemos suponer que $\{\gamma_n.x'\} \rightarrow x$ para cierto $x \in L(h(\Gamma))$. Así la sucesión de puntos

$$\gamma_n.(v', x') = (\gamma_n.v', h(\gamma_n)x') \in \Gamma.(v', x')$$

converge al punto (v, x) y consecuentemente $(v, x) \in \overline{\Gamma.(v', x')}$. Por el apartado (2) tenemos que

$$E(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) = \overline{\Gamma.(v, x)} \subset \overline{\Gamma.(v', x')}$$

concluyendo por tanto que $E(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) = \overline{\Gamma.(v', x')}$ es un minimal.

Para finalizar, si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces el conjunto minimal $\mathcal{M}_U = \Omega_Y$ y la proposición 6.7 nos garantiza que \mathcal{M}_U es un atractor. En tal caso, el conjunto \mathcal{M}_U es el único minimal de $h_{\mathbb{R}}$ en Ω_Y . □

De hecho, teniendo en cuenta que $E(\Gamma) = E$ si Γ es un grupo de superficie y usando de nuevo el principio de dualidad, se tiene inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 6.12 (Teorema de Hedlund foliado). *Si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo de superficie y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ es una representación no inyectiva que verifica (H1) y (H2), entonces el flujo horocíclico foliado $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1}) \curvearrowright U$ es minimal si y sólo si la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{R}P^{n-1}$ es minimal.*

Observación 6.13. El teorema así como el corolario siguen siendo válidos para cualquier representación $h : \Gamma \rightarrow \text{Difeo}^r(F)$ en los difeomorfismos de clase C^r , $r \geq 0$ de una variedad compacta F .

6.4. Representaciones inyectivas en $PSL(2, \mathbb{R})$

En este apartado nos interesamos por las representaciones inyectivas $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ de modo que Γ actúa sobre la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$ identificada con $\partial\mathbb{H} = PSL(2, \mathbb{R})/B$.

Representaciones fuchsianas

Llamamos *representaciones fuchsianas* a representaciones inyectivas y discretas $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ de grupos fuchsianos Γ .

Nos restringimos en un primer momento al caso cocompacto considerado en [1]. Sea Γ un grupo de superficie y $h : \Gamma \hookrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ la inclusión canónica. La acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$ viene dada por

$$\gamma \cdot (\xi_1, \xi_2) = (\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2)).$$

La diagonal

$$\Delta = \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \partial\mathbb{H}\} \subsetneq \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$$

es un subconjunto minimal propio de $\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$ y por dualidad concluimos que el conjunto

$$\mathcal{M}_Y = \left\{ \Gamma \cdot \left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \frac{a}{c} \right) \mid \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

es un minimal para la acción afín $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}) \curvearrowright B$. Veamos que este minimal es de hecho el único minimal para el flujo horocíclico foliado.

Teorema 6.14. *En las condiciones anteriores, el conjunto \mathcal{M}_U es un $h_{\mathbb{R}}$ -minimal atractor. En particular,*

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(y)} \subset h_{\mathbb{R}}(y) \cup \mathcal{M}_Y$$

para cada $y \in Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H})$, lo que garantiza que \mathcal{M}_U es el único conjunto minimal del flujo horocíclico foliado.

Demostración. Comencemos probando la minimalidad de \mathcal{M}_U . Por dualidad, esto es equivalente a probar que el conjunto

$$\Delta^* = \{(v, \xi) \in E \times \partial\mathbb{H} \mid \text{dir}(v) = \xi\}$$

es un minimal de la acción $\Gamma \curvearrowright E \times \partial\mathbb{H}$.

Para ello basta probar que $\Delta^* \subset \overline{\Gamma \cdot (v, \xi)}$ para cualquier punto $(v, \text{dir}(v)) \in \Delta^*$. Dado $(v', \text{dir}(v')) \in \Delta^*$, por el teorema de Hedlund clásico 2.5, sabemos que existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_n(v) \rightarrow v'$. Como la aplicación $\text{dir} : E \rightarrow \partial\mathbb{H}$ es Γ -equivariante obtenemos que $\gamma_n(v, \text{dir}(v)) \rightarrow (v', \text{dir}(v'))$ garantizando la minimalidad de Δ^* .

Por dualidad, esta condición equivale a probar que

$$\overline{\Gamma \cdot (v, \xi)} \subset \Gamma \cdot (v, \xi) \cup \Delta^*$$

para cada $(v, \xi) \in E \times \partial\mathbb{H}$. Dada una sucesión $\{\gamma_n \cdot (v, \xi)\}$ en $\Gamma \cdot (v, \xi)$ convergente a (v_1, ξ_1) , tenemos que probar que $\text{dir}(v_1) = \xi_1$. Si $\text{dir}(v) = \xi$, entonces $(v, \xi) \in \Delta^*$, que es un cerrado Γ -invariante y por tanto $(v_1, \xi_1) \in \Delta^*$.

Supongamos que $\text{dir}(v) \neq \xi$ y $\text{dir}(v_1) \neq \xi_1$. En este caso $(\text{dir}(v), \xi) \in \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \setminus \Delta$ se identifica con la única geodésica en el disco de Poincaré que une $\text{dir}(v)$ y ξ . Tenemos por tanto una sucesión de geodésicas

$$\gamma_n \cdot (\text{dir}(v), \xi)$$

convergentes a la geodésica $(\text{dir}(v_1), \xi_1)$. Como las distancias

$$d(0, \gamma_n \cdot (\text{dir}(v), \xi))$$

convergen a la distancia $d(0, (\text{dir}(v_1), \xi_1))$, las distancias

$$d(\gamma_n^{-1}(0), (\text{dir}(v), \xi))$$

también convergen a $d(0, (\text{dir}(v_1), \xi_1))$. De esta forma, la distancia de $\gamma_n^{-1}(0)$ a la geodésica $(\text{dir}(v), \xi)$ está acotada, es decir, todos los puntos $\gamma_n^{-1}(0)$ están en un entorno cerrado de la geodésica $(\text{dir}(v), \xi)$.

Por otra parte, como la sucesión $\{\gamma_n(v)\}$ de puntos de E converge al punto v_1 , si escribimos $v = \text{vect}(u) = \text{vect}(z, \vec{u})$, entonces la sucesión

$$\{e^{B_{\gamma_n \text{dir}(v)}(i, \gamma_n(z))}\} \longrightarrow \|v_1\|^2$$

de acuerdo con la definición 1.24. Ahora bien, como puede verse en [27, I, Property 1.9, (i)], tenemos que:

$$B_{\gamma_n \text{dir}(v)}(i, \gamma_n(z)) = B_{\text{dir}(v)}(\gamma_n^{-1}(i), z)$$

y por consiguiente

$$\{B_{\text{dir}(v)}(\gamma_n^{-1}(i), z)\} \longrightarrow \log \|v_1\|^2.$$

En el modelo del disco de Poincaré esto significa que todos los puntos $\gamma_n^{-1}(0)$ están en la región acotada por dos horociclos centrados en $\text{dir}(v)$. Deducimos así que los puntos $\gamma_n(0)$ están en un subconjunto compacto del disco de Poincaré, lo que no es posible porque la acción de Γ es propiamente discontinua.

Finalmente, una vez probado que \mathcal{M}_U es un atractor, deducimos que \mathcal{M}_U es el único conjunto minimal del flujo horocíclico foliado por la proposición 6.7. □

Consideremos ahora una representación inyectiva y discreta $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Según [60, §3.3], esta representación es topológicamente conjugada a la inclusión canónica, es decir, existe un homeomorfismo $\varphi : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$, llamado *aplicación de Nielsen*, tal que

$$h(\gamma)(\varphi(\xi)) = \varphi(\gamma(\xi)).$$

Este homeomorfismo nos permite transportar los conjuntos minimales y obtener el siguiente resultado:

Teorema 6.15. *Sea Γ un grupo fuchsiano cocompacto, $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación fuchsiana y $\varphi : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$ la aplicación de Nielsen asociada. Entonces*

$$\mathcal{M}_U = \left\{ \Gamma \cdot \left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\left(\frac{a}{c}\right) \right) \mid \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}) \right\},$$

es el único subconjunto minimal para el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H})$.

Demostración. Por dualidad, si

$$\mathcal{G}(\varphi) = \{(\xi, \varphi(\xi)) \mid \xi \in \partial\mathbb{H}\} \subset \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$$

es el grafo de la aplicación de Nielsen, tenemos que probar que el levantado

$$\mathcal{G}^*(\varphi) = \{(v, \xi) \mid \text{dir}(v) = \varphi(\xi)\} \subset E \times \partial\mathbb{H}$$

es el único conjunto minimal de la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times \partial\mathbb{H}$.

La aplicación de Nielsen φ conjuga la representación h con la inclusión canónica $i : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ estudiada anteriormente. Por tanto, el único conjunto minimal atractor Δ^* de la acción canónica $\Gamma \curvearrowright E \times \partial\mathbb{H}$ se corresponde con el único conjunto minimal atractor $\varphi(\Delta^*) = \mathcal{G}^*(\varphi)$ de la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright E \times \partial\mathbb{H}$. \square

Observación 6.16. Si Γ y $h(\Gamma)$ son grupos fuchsianos convexos-cocompactos, según [84, 86] sigue existiendo una aplicación de Nielsen continua

$$\varphi : L(\Gamma) \rightarrow L(h(\Gamma)).$$

Por tanto, los argumentos anteriores permiten concluir que el conjunto \mathcal{M}_U es un $h_{\mathbb{R}}$ -minimal atractor. No obstante, la unicidad del minimal se limita al conjunto no errante del flujo horocíclico no foliado. Es decir, la condición

$$\overline{h_{\mathbb{R}}(y)} \subset h_{\mathbb{R}}(y) \cup \mathcal{M}_Y$$

para cada $y \in Y$ nos dice que los otros minimales son órbitas cerradas no compactas.

Representaciones indiscretas

Ahora damos una prueba directa de la existencia y unicidad de un conjunto B -minimal para representaciones indiscretas en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 6.17. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano no elemental y $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación inyectiva e indiscreta. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M}_B = \Omega_Y = \{\Gamma.(u, \xi) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

es el único conjunto minimal de la B -acción sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H})$.

Demostración. Por dualidad, tenemos que probar que $L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$ es el único conjunto minimal de la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. Como $h(\Gamma)$ es un subgrupo indiscreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, de acuerdo con [56, Theorem 2.4.5], existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $h(\gamma) \in PSL(2, \mathbb{R})$ es un elemento elíptico de orden infinito. Procederemos de nuevo en tres pasos:

(1) Si $\xi \in L(\Gamma)$ es uno de los puntos fijos de γ , entonces $\{\xi\} \times \partial\mathbb{H} \subset \overline{\Gamma.(\xi, \eta)}$ para cualquier $\eta \in \partial\mathbb{H}$. En efecto, sea $\eta' \in \partial\mathbb{H}$ arbitrario. Por lo que acabamos de decir, existe una sucesión de enteros n_k tal que $\{h(\gamma^{n_k})(\eta)\} \rightarrow \eta'$. Así, la sucesión de puntos

$$\gamma^{n_k}.(\xi, \eta) = (\gamma^{n_k}(\xi), h(\gamma^{n_k})(\eta)) = (\xi, h(\gamma^{n_k})(\eta)) \in \Gamma.(\xi, \eta)$$

converge a (ξ, η') y consecuentemente $(\xi, \eta') \in \overline{\Gamma.(\xi, \eta)}$.

(2) Para cada $\eta \in \partial\mathbb{H}$, tenemos que $\overline{\Gamma \cdot (\xi, \eta)} = L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$. En efecto, sea (ξ', η') un punto arbitrario de $L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$. Como la acción $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma)$ es minimal, existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{\gamma_n(\xi)\} \rightarrow \xi'$. Por el apartado (1) los puntos

$$(\xi, h(\gamma_n^{-1})(\eta')) \in \{\xi\} \times \partial\mathbb{H} \subset \overline{\Gamma \cdot (\xi, \eta)}.$$

Así los puntos

$$\gamma_n \cdot (\xi, h(\gamma_n^{-1})(\eta')) = (\gamma_n(\xi), \eta) \in \overline{\Gamma \cdot (\xi, \eta)}$$

y por tanto el punto límite $(\xi', \eta') \in \overline{\Gamma \cdot (\xi, \eta)}$.

(3) Finalmente, para cada $(\xi', \eta') \in L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$, tenemos que $\overline{\Gamma \cdot (\xi', \eta')} = \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. En efecto, de nuevo, existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\{\gamma_n(\xi')\} \rightarrow \xi$. Por compacidad de $\partial\mathbb{H}$ podemos suponer que $\{\gamma_n(\eta')\} \rightarrow \eta$ para cierto $\eta \in \partial\mathbb{H}$. Así la sucesión de puntos

$$\gamma_n \cdot (\xi', \eta') = (\gamma_n(\xi'), h(\gamma_n)(\eta')) \in \Gamma \cdot (\xi', \eta')$$

y su límite $(\xi, \eta) \in \overline{\Gamma \cdot (\xi', \eta')}$.

Por el apartado (2) sabemos que

$$L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H} = \overline{\Gamma \cdot (\xi, \eta)} \subset \overline{\Gamma \cdot (\xi', \eta')}$$

concluyendo que $\overline{\Gamma \cdot (\xi', \eta')} = L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$.

Para probar la unicidad veamos que \mathcal{M}_B es un conjunto B -atractor, lo que equivale a que $L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$ sea un Γ -atractor en $\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. Sea $\gamma_n \in \Gamma$ una sucesión no acotada tal que

$$\gamma_n \cdot (\xi, \eta) \rightarrow (\xi', \eta')$$

y veamos que $\xi' \in L(\Gamma)$. Se nos presenta la siguiente dicotomía:

- (1) Si $\xi \in L(\Gamma)$, entonces $\xi' \in L(\Gamma)$ como queríamos.
- (2) Si $\xi \notin L(\Gamma)$, sea $z_0 \in \mathbb{H}$; como γ_n es no acotada, sabemos que:

$$\gamma_n(z_0) \rightarrow \xi_0 \in L(\Gamma).$$

Por el lema 1, si $\xi \neq \xi_0^-$, entonces

$$\gamma_n(\xi) \rightarrow \xi_0 = \xi' \in L(\Gamma).$$

Si $\xi = \xi_0^-$, entonces $\xi = \lim \gamma_n^{-1}(z_0) \in L(\Gamma)$ en contra de lo supuesto.

Sea \mathcal{M} un subconjunto minimal en $\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$. La compacidad de la segunda componente garantiza que la primera proyección $p_1 : \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$ es cerrada. Por tanto $p_1(\mathcal{M})$ es un subconjunto cerrado Γ -invariante de $\partial\mathbb{H}$ y $L(\Gamma) \subset p_1(\mathcal{M})$. De aquí deducimos que los conjuntos minimales \mathcal{M} y $L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$ se cortan y por tanto coinciden, probando la unicidad. \square

Observación 6.18. Notemos que, en la prueba anterior, al igual que ocurría con la demostración del teorema 6.11, la unicidad del minimal se obtiene porque $L(h(\Gamma)) = \partial\mathbb{H}$, es decir, $\overline{h(\Gamma)} = PSL(2, \mathbb{R})$ en el caso indiscreto. Esta propiedad es particular de las representaciones indiscretas en $PSL(2, \mathbb{R})$.

En efecto, si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano libre con dos generadores, consideramos la representación indiscreta en $PSL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$h : \Gamma = \langle \gamma_a, \gamma_b \rangle \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C}), \quad h(\gamma_a) = Id, \quad h(\gamma_b) = R_\theta, \quad \theta \notin \mathbb{Q},$$

obteniendo que $\overline{h(\Gamma)} = PSL(2, \mathbb{R}) \neq PSL(2, \mathbb{C})$. De hecho, en este caso, el conjunto límite $L(h(\Gamma)) \cong \partial\mathbb{H}$ es un círculo en la esfera en el infinito $\partial\mathbb{H}^3$. Véase en la sección 6.8 dedicada a representaciones kleinianas.

Con todo, en la sección siguiente veremos que la unicidad del B -minimal sigue siendo válida para las representaciones indiscretas en $PSL(n, \mathbb{R})$.

Corolario 6.19. *En las hipótesis del teorema anterior, si Γ es un grupo de superficie, entonces la B -acción sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H})$ es minimal.*

Combinado con un resultado de Matsumoto [64] para foliaciones de codimensión uno como las que estamos considerando el resultado anterior implica inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 6.20 (Teorema de Hedlund para representaciones inyectivas no discretas). *Sea Γ un grupo de superficie y $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación inyectiva e indiscreta. Entonces el flujo horocíclico $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}) \curvearrowright U$ es minimal.*

6.5. Caso general: dinámica de la acción afín

En las dos secciones anteriores hemos estudiado casos particulares de representaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$. En el caso no inyectivo es sencillo encontrar un conjunto U -minimal y en el caso inyectivo es sencillo encontrar un conjunto B -minimal. Ahora estudiamos estas dos acciones por separado de modo general.

Comencemos estudiando la B -acción sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$. Por dualidad, esto es equivalente a estudiar la dinámica de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Puesto que el espacio $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ es compacto, esta acción siempre posee un conjunto minimal [53, Theorem 2.22]. El siguiente resultado es una extensión del teorema 6.10 al caso foliado.

Teorema 6.21. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano no elemental y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación no inyectiva o indiscreta verificando las condiciones (H1) y (H2). Entonces*

$$\mathcal{M}_B = \overline{\{\Gamma \cdot (u, x_A) \mid u(+\infty) = \text{dir}(v_a) \text{ y } A = h(\gamma_a) \text{ proximal}\}}$$

es el único conjunto minimal de la B -acción sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$.

Demostración. Por dualidad, tenemos que probar que

$$\mathcal{M} = \overline{\{(\text{dir}(v_a), x_A) \mid A = h(\gamma_a) \text{ es proximal}\}}$$

es el único conjunto minimal de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$.

En efecto, cualquier conjunto cerrado, Γ -invariante y no vacío, $F \subset \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$, contiene al conjunto \mathcal{M} . Para comprobarlo tomemos un punto $(\text{dir}(v_a), x_A) \in \mathcal{M}$ y veamos que está en F . Consideremos las descomposiciones,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v_a + W \tag{6.1}$$

con $W = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid a^{-k}\gamma^k w \rightarrow 0\}$ y

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v_A + \tilde{W} \tag{6.2}$$

con $\tilde{W} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_A^{-k} A^k \tilde{y} \rightarrow 0\}$.

Lema 6.22. *En las hipótesis del teorema, si $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que*

$$\gamma \notin \langle \gamma_a \rangle \quad \text{y} \quad h(\gamma)\tilde{x} \notin \tilde{W}.$$

Demostración. Por la hipótesis (H1) de irreducibilidad sabemos que existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $h(\gamma)\tilde{x} \notin \tilde{W}$. Hay dos posibilidades:

(1) Si $\tilde{x} \in \tilde{W}$ entonces deducimos inmediatamente que $\gamma \notin \langle \gamma_a \rangle$ ya que la matriz A deja invariante el subespacio \tilde{W} .

(2) Si $\tilde{x} \notin \tilde{W}$ entonces volvemos a dividir el problema en dos casos:

(a) Si $\ker h \neq 0$ cualquier elemento $\gamma \in \ker h$ nos sirve. En efecto, puesto que $A = h(\gamma_a)$ es proximal, deducimos que $\gamma_a \notin \ker h$.

(b) Si h es indiscreta, podemos encontrar una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $h(\gamma_n) \rightarrow Id$. Alguno de los elementos $\gamma_n \in \Gamma$ verifica que $h(\gamma_n)\tilde{x} \notin \tilde{W}$. En efecto, en caso contrario, el punto \tilde{x} sería límite de puntos en el cerrado \tilde{W} y por tanto $\tilde{x} \in \tilde{W}$ en contra de lo supuesto. Luego existe un $\gamma_{n_0} \in \Gamma$ tal que $h(\gamma_{n_0})\tilde{x} \notin \tilde{W}$.

Además podemos suponer que $\gamma_{n_0} \notin \langle \gamma_a \rangle$. En efecto, si toda la sucesión γ_n a partir de un punto fuese de la forma $\gamma_n = \gamma_a^n$ entonces $h(\gamma_a^n) = A^n \tilde{x} \rightarrow \tilde{x}$, lo cual es contradictorio con que A sea una matriz proximal. □

Continuando con la demostración del teorema, procedemos en tres etapas:

(1) Existe un punto $(dir(w), x) \in F$ tal que $a^{-k}\gamma_a^k w \rightarrow 0$. En efecto, como F es un cerrado Γ -invariante, entonces $L(\Gamma) \subset p_1(F) \subset \partial\mathbb{H}$. Si llamamos $v_{a^{-1}}$ al autovector asociado al autovalor $a^{-1} < 1$ de la transformación hiperbólica γ_a , entonces tenemos que $dir(v_{a^{-1}}) \in L(\Gamma) \subset p_1(F)$. Podemos encontrar así un punto $x \in \mathbb{R}P^{n-1}$ tal que $(dir(v_{a^{-1}}), x) \in F$.

Antes de pasar a la siguiente etapa, consideremos la descomposición 6.2 y denotemos por $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ un representante del punto $x \in \mathbb{R}P^{n-1}$ que acabamos de encontrar.

(2) Existe un elemento $\gamma \in \Gamma \setminus \langle \gamma_a \rangle$ tal que $h(\gamma)\tilde{x} \notin \tilde{W}$. En efecto, aplicamos sin más el lema 6.22

(3) El punto $(dir(v_a), x_A) \in F$. En efecto, la acción lineal del elemento $\gamma \in \Gamma$ de la etapa anterior fija las rectas $\mathbb{R}v_a$ y $\mathbb{R}v_{a^{-1}} = W$. Es decir, $\gamma(v_{a^{-1}}) \notin W$ y la sucesión de puntos

$$a^{-k}\gamma_a^k\gamma(v_{a^{-1}}) = a^{-k}\gamma_a^k(\alpha v_a + w) \longrightarrow \alpha v_a.$$

Por tanto, al proyectivizar,

$$\gamma_a^k\gamma(dir(v_{a^{-1}})) \longrightarrow dir(v_a).$$

De modo análogo, la sucesión

$$\lambda_A^{-k}A^k h(\gamma)\tilde{x} = \lambda_A^{-k}A^k(\beta v_A + \tilde{w}) \longrightarrow \beta v_A.$$

De nuevo, al proyectivizar,

$$A^k h(\gamma)x \longrightarrow x_A.$$

De todo esto deducimos que la sucesión

$$\gamma_a^k\gamma.(dir(v_{a^{-1}}), x) \longrightarrow (dir(v_a), x_A)$$

y concluimos que $(dir(v_a), x_A) \in F$ finalizando la prueba. □

Este resultado puede combinarse con los obtenidos en las dos secciones anteriores para obtener mejores descripciones del conjunto B -minimal \mathcal{M}_B :

Ejemplos 6.23.

(1) Si $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ es una representación no inyectiva que verifica (H1) y (H2), el teorema 6.11 muestra que $L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ es un conjunto minimal de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Acabamos de probar que $\mathcal{M} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ y por consiguiente

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}.$$

(2) Si $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ es indiscreta y $n = 2$, el teorema 6.17 muestra que el conjunto $L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$ es el único conjunto minimal para la acción proyectiva y por tanto

$$\mathcal{M}_B = \Omega_Y = \{\Gamma.(u, \xi) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}.$$

(3) Es natural preguntarse aquí si hay una descripción análoga de \mathcal{M}_B para las representaciones indiscretas $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ verificando (H1) y (H2). Pues bien, presentamos a continuación una prueba de que $\mathcal{M} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ es un minimal de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Por la unicidad del teorema 6.21 concluimos que

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

es el único subconjunto B -minimal de Y .

Veamos pues que $L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ es un conjunto Γ -minimal. Dividiremos la prueba en dos etapas:

(i) Existe un punto $\xi \in L(\Gamma)$ tal que $\overline{\Gamma.(\xi, x)} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ para cualquier $x \in L(h(\Gamma))$. En efecto, como $h(\Gamma)$ es no discreto, existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ en Γ tal que $\{h(\gamma_n)\} \rightarrow Id$ en $PSL(n, \mathbb{R})$. Por otra parte hay dos puntos ξ^+ y ξ^- en $\partial\mathbb{H}$ tales que $\{\gamma_n(\xi)\} \rightarrow \xi^+$ siempre que $\xi \neq \xi^-$ de acuerdo con el lema 1. Por tanto, la sucesión

$$\gamma_n.(\xi, x) = (\gamma_n(\xi), h(\gamma_n)x) \in \Gamma.(\xi, x)$$

converge al punto (ξ^+, x) para cualquier $x \in L(h(\Gamma))$. De forma mas general, si $\gamma^{-1}(\xi) \neq \xi^-$ entonces la sucesión de puntos

$$(\gamma\gamma_n\gamma^{-1}).(\xi, x) = ((\gamma\gamma_n\gamma^{-1})(\xi), h(\gamma\gamma_n\gamma^{-1})x) \in \Gamma.(\xi, x)$$

converge al punto $(\gamma(\xi^+), x)$. Por tanto, si $\xi \notin \Gamma.\xi^-$ entonces $(\gamma(\xi^+), x) \in \overline{\Gamma.(\xi, x)}$ para cualesquiera $\gamma \in \Gamma$ y $x \in L(h(\Gamma))$. Como la acción $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma)$ es minimal se sigue que $L(\Gamma) \times \{x\} \subset \overline{\Gamma.(\xi, x)}$. Análogamente, como $\Gamma \curvearrowright L(h(\Gamma))$ es minimal entonces $L(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) \subset \overline{\Gamma.(\xi, x)}$ y por tanto $L(\Gamma) \times L(h(\Gamma)) = \overline{\Gamma.(\xi, x)}$

(ii) La acción $\Gamma \curvearrowright L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ es minimal. En efecto, por lo visto en la etapa (1) solo falta comprobar que $\overline{\Gamma.(\xi, x)} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ para los puntos $\xi \in \Gamma.\xi^-$. En tal caso, podemos tomar una sucesión $\{\gamma'_n\}$ en Γ tal que $\{\gamma'_n(\xi)\} \rightarrow \xi' \notin \Gamma.\xi^-$. Por compacidad de $L(h(\Gamma))$ podemos asumir que la sucesión $\{h(\gamma'_n)x\}$ converge a un punto $x' \in L(h(\Gamma))$. Así la sucesión de puntos

$$\gamma'_n.(\xi, x) = (\gamma'_n(\xi), h(\gamma'_n)x) \in \Gamma.(\xi, x)$$

converge al punto (ξ', x') . Como construimos la sucesión para que $\xi' \notin \Gamma.\xi^-$, podemos usar el paso (1) para concluir que $\overline{\Gamma.(\xi', x')} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$. Se sigue entonces que $\overline{\Gamma.(\xi, x)} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ lo que prueba que es un conjunto minimal.

Acabamos esta sección presentando un teorema que garantiza la existencia y unicidad de conjuntos B -minimales para cualquier representación h verificando las hipótesis (H1) y (H2).

Teorema 6.24. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano no elemental y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación que verifique las condiciones (H1) y (H2). Entonces existe un único subconjunto B -minimal \mathcal{M}_B de $\Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$.*

Demostración. Como siempre, por dualidad, nos basta probar que la acción proyectiva

$$\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$$

posee un único conjunto minimal $\mathcal{M} \subset L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$. La prueba combina argumentos del teorema 6.10 (usados en la demostración del teorema 6.21) con argumentos del ejemplo anterior.

La existencia del minimal está garantizada por la compacidad de $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ por tanto la demostración se reduce a la unicidad. Sea γ_0 un elemento de Γ tal que $A_0 = h(\gamma_0)$ es una matriz proximal. Denotemos por $v_0 \in \mathbb{R}^n$ al autovector dominante y por $x_0 = \text{dir}(v_0) \in \mathbb{R}P^{n-1}$ la dirección dominante. Para garantizar la unicidad del minimal es suficiente con encontrar un punto $\xi_0 \in \partial\mathbb{H}$ tal que (ξ_0, x_0) esté en cualquier minimal \mathcal{M} . Por compacidad de $\partial\mathbb{H}$ la imagen $p_2(\mathcal{M})$ del minimal por la segunda proyección es $L_\Gamma(\mathbb{R}P^{n-1})$ y por tanto existe un punto $\xi \in \partial\mathbb{H}$ tal que $(\xi, x_0) \in \mathcal{M}$. Por proximalidad, $A_0^k \neq I$ de donde se sigue que el elemento γ_0 o bien es parabólico o bien hiperbólico. Definimos

$$\xi_0^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_0^k(i).$$

Si $\xi \neq \xi_0^-$, la sucesión

$$\gamma_0^k \cdot (\xi, x_0) = (\gamma_0^k(\xi), A_0^k x_0) = (\gamma_0^k(\xi), x_0) \longrightarrow (\xi_0^+, x_0)$$

con lo cual $(\xi_0^+, x_0) \in \mathcal{M}$. Si $\xi = \xi_0^-$, consideremos la descomposición

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v_0 + W$$

donde $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_0^{-k} A_0^k w \rightarrow 0\}$. La condición (H1) de irreducibilidad garantiza la existencia de un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $h(\gamma)v_0 \notin W$. Como γ no pertenece al subgrupo cíclico de Γ generado por γ_0 , tenemos que $\gamma(\xi_0^-) \neq \xi_0^-$. Así, la sucesión de puntos

$$(\gamma_0^k \gamma) \cdot (\xi_0^-, x_0) = (\gamma_0^k(\gamma(\xi_0^-)), A_0^k(h(\gamma)x)) \in \mathcal{M}$$

converge a (ξ_0^+, x_0) ya que $\gamma(\xi_0^-) \neq \xi_0^-$ y $h(\gamma)v_0 \notin W$. De hecho, si escribimos $h(\gamma)v_0 = av_0 + w$ con $a \neq 0$ y $w \in W$ entonces

$$\lambda_0^{-k} A_0^k(h(\gamma)v_0) = av_0 + \lambda_0^{-k} A_0^k w \longrightarrow av_0$$

y al proyectivizar $A_0^k(h(\gamma)x)$ converge a x_0 . En cualquier caso, tenemos que $(\xi_0^+, x_0) \in \mathcal{M}$ concluyendo la prueba. □

6.6. Caso general: dinámica del flujo horocíclico

En esta sección nos interesamos por la existencia y unicidad de minimales para el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$. Este resultado puede verse en [2]. Como viene siendo habitual en la prueba de todos los resultados, usaremos dualidad y probaremos que si denotamos por \mathcal{M} al único minimal de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces

$$\mathcal{M}^* = \{(v, x) \in E \times \mathbb{R}P^{n-1} \mid (\text{dir}(v), x) \in \mathcal{M}\}$$

es un conjunto minimal para la acción $\Gamma \curvearrowright E \times \mathbb{R}P^{n-1}$ y el único subconjunto B -minimal \mathcal{M}_B de Y es también minimal para el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$.

En toda esta sección, $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano no elemental y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación verificando las condiciones (H1) y (H2).

Proposición 6.25 ([2]). *Existen dos transformaciones hiperbólicas $\gamma_a, \gamma_b \in \Gamma$ tales que:*

(1) *los autovalores a y b de γ_a y γ_b respectivamente generan un subgrupo denso de (\mathbb{R}_+, \cdot) , es decir,*

$$\langle a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{Z} \rangle = \mathbb{R}_+,$$

(2) *las matrices $A = h(\gamma_a)$ y $B = h(\gamma_b)$ son proximales.*

Demostración. Por la condición (H2) existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $M = h(\gamma) \in PSL(n, \mathbb{R})$ es proximal. Usando la condición (H1) de irreducibilidad junto con [12, Lemme 3.9, pp.18], sabemos que existen $M_1, M_2 \in h(\Gamma)$ y un entero $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces las matrices $M^n M_1 M^{-n} M_2$ son proximales. Tomamos

$$M_1 = h(h_1), \quad M_2 = h(h_2) \quad \text{y} \quad g_n = \gamma^n h_1 \gamma^{-n} h_2.$$

Además, podemos escoger γ, h_1 y h_2 de modo que g_{n_1} y g_{n_2} sean hiperbólicas y

$$\langle \lambda_{g_{n_1}}^n \lambda_{g_{n_2}}^m \mid n, m \in \mathbb{Z} \rangle = \mathbb{R}_+.$$

□

Proposición 6.26 ([2]). *Sean $(v_a, x_A), (v, x) \in \mathcal{M}^*$. Si $\overline{\Gamma \cdot v} = E(\Gamma)$, entonces existe un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $(\alpha v_a, x_A) \in \overline{\Gamma \cdot (v, x)}$.*

Demostración. Sea $(v, x) \in \mathcal{M}^*$ tal que $\overline{\Gamma \cdot v} = E(\Gamma)$. Esta condición es equivalente a que exista una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $\|\gamma_n v\| \rightarrow 0$ (véase [27, §V, Lemma 3.2]). Por compacidad, podemos suponer que $\{h(\gamma_n)x\} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}P^{n-1}$. Si descomponemos $\gamma_n v$ en función de la base $\{v_a, v_{a^{-1}}\}$ de \mathbb{R}^2 , obtenemos:

$$\gamma_n v = \alpha_n v_a + \beta_n v_{a^{-1}},$$

con $\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0$. Si tomamos una sucesión $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{k_n} \alpha_n \rightarrow \alpha \neq 0$, entonces

$$\gamma_a^{k_n} \gamma_n v = a^{k_n} \alpha_n v_a + a^{-k_n} \beta_n v_{a^{-1}} \longrightarrow \alpha v_a.$$

Recordando la descomposición

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v_A + \tilde{W},$$

con $\tilde{W} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_A^{-k} A^k \tilde{y} \rightarrow 0\}$, abusando de la notación, se nos presenta la siguiente dicotomía :

(1) El punto $x_0 \notin \tilde{W}$, con lo que $A^n x_0 \rightarrow x_A$. Por [42, pp. 497–499] sabemos que existe un entorno abierto U de x_A en $\mathbb{R}P^{n-1}$ tal que:

- (i) Para cada $x' \in U$ se tiene que $A^n x' \in U$ para todo $n \geq 0$.
(ii) Para cada $x', x'' \in U$ y para cada $n \geq 0$,

$$d(A^n x', A^n x'') \leq k^n d(x', x''),$$

con $0 < k < 1$ y d la distancia natural sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Por la convergencia de $A^n x_0$, sabemos que existe un número natural $p > 0$ tal que $A^p x_0 \in U$ y por tanto existe otro número natural $N_1 > 0$ tal que si $n > N_1$ entonces $A^p h(\gamma_n)x \in U$. Aplicamos (i) para obtener $N_2 > 0$ tal que si $n > N_2$ entonces

$$A^{k^n} A^p h(\gamma_n)x \in U.$$

Llamamos $x_n = A^p h(\gamma_n)x \in U$ y usamos (ii) para obtener que:

$$d(A^{k^n} x_n, x_A) \leq k^{k^n} d(x_n, x_A) \rightarrow 0.$$

Deducimos que $A^{k^n} \rightarrow x_A$. Para terminar con este caso, renombramos $\gamma_n = \gamma_a^{k^n+p} \gamma_n$ y concluimos que:

$$\gamma_n.(v, x) = (\gamma_n v, h(\gamma_n)x) \rightarrow (\alpha' v_a, x_A).$$

(2) El punto $x_0 \in \tilde{W}$. Por la condición (H1) de irreducibilidad, sabemos que existe un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $h(\gamma)x_0 \notin \tilde{W}$, ya que en caso contrario el subespacio propio $V = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} h(\gamma)\tilde{W}$ de \mathbb{K}^n sería $h(\Gamma)$ -invariante.

Si consideramos la sucesión $\gamma'_n = \gamma \gamma_n$, entonces

$$\|\gamma \gamma_n v\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad h(\gamma \gamma_n)x \rightarrow h(\gamma)x_0 \notin \tilde{W}.$$

Así, podemos aplicar el razonamiento del caso (1) para la sucesión γ'_n y el punto $h(\gamma)x_0$ para obtener de nuevo que existe un $\alpha' \neq 0$ tal que $(\alpha' v_a, x_A) \in \overline{\Gamma.(v, x)}$ concluyendo la prueba. \square

Ya estamos en condiciones de probar el siguiente criterio:

Teorema 6.27 ([2]). Sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ un grupo fuchsiano no elemental y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación verificando las condiciones (H1) y (H2). Sea \mathcal{M} el único conjunto minimal de la acción proyectiva $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{M}^* = \{(v, x) \in E(\Gamma) \times \mathbb{R}P^{n-1} \mid (dir(v), x) \in \mathcal{M}\}.$$

Entonces, dado un punto $(v, x) \in \mathcal{M}^*$, se verifica que $\overline{\Gamma.(v, x)} = \mathcal{M}^*$ si y sólo si $\overline{\Gamma.v} = E(\Gamma)$.

Demostración. Sea $(v, x) \in \mathcal{M}^*$ tal que $\overline{\Gamma.(v, x)} = E(\Gamma)$. Tenemos que probar que $\mathcal{M}^* \subset \overline{\Gamma.(v, x)}$.

Por el lema 6.25, sabemos que existe dos transformaciones hiperbólicas $\gamma_a, \gamma_b \in \Gamma$ con autovalores dominantes a y b respectivamente que forman un subgrupo denso de \mathbb{R}_+ . Además, $A = h(\gamma_a)$ y $B = h(\gamma_b)$ son matrices proximales de $PSL(n, \mathbb{R})$.

Ahora, por el lema 6.26, existe un escalar $\beta > 0$ tal que $(\beta v_a, x_A) \in \overline{\Gamma.(v, x)}$ de donde se sigue que

$$\overline{\Gamma.(\beta v_a, x_A)} \subset \overline{\Gamma.(v, x)}. \quad (6.3)$$

Ahora bien, $\text{dir}(\beta v_a) = \text{dir}(v_a) \in L(\Gamma)$ y por tanto $\beta v_a \in E(\Gamma)$. Por minimalidad, $\overline{\Gamma \cdot (\beta v_a)} = E(\Gamma)$ y aplicando de nuevo el lema 6.26 obtenemos que existe $\beta' > 0$ tal que

$$(\beta' v_b, x_B) \in \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)}.$$

Es decir, existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\{(\gamma_n(\beta v_a), h(\gamma_n)x_A)\} \rightarrow (\beta' v_b, x_B).$$

Fijado un entero $k \in \mathbb{Z}$, la sucesión

$$\{(\gamma_n \gamma_a^k(\beta v_a), h(\gamma_n)A^k x_A)\} \rightarrow (a^k \beta' v_b, x_B).$$

Luego

$$(a^k \beta' v_b, x_B) \in \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. De aquí se sigue inmediatamente que, para cualquier $k' \in \mathbb{Z}$,

$$(\gamma_b^{k'} a^k \beta' v_b, B^{k'} x_B) = (b^{k'} a^k \beta' v_b, x_B) \in \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)},$$

y puesto que los autovalores generan un subgrupo denso de \mathbb{R}_+ concluimos que

$$\mathbb{R}_+ v_b \times \{x_B\} \subset \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)}. \quad (6.4)$$

Veamos que, en efecto, $\mathcal{M}^* \subset \overline{\Gamma \cdot (v, x)}$. Tomemos $(v', x') \in \mathcal{M}^*$. Como $(\text{dir}(v'), x'), (\text{dir}(v_b), x_B) \in \mathcal{M}$, que es un minimal, podemos encontrar una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\{(\gamma_n \text{dir}(v_b), h(\gamma_n)x_B)\} \rightarrow (\text{dir}(v'), x').$$

De aquí deducimos que existe una sucesión $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\{(\gamma_n \alpha_n v_b, h(\gamma_n)x_B)\} \rightarrow (v', x').$$

Por la ecuación (6.4) sabemos que $(\alpha_n v_b, x_B) \in \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)}$ y por tanto concluimos que

$$(v', x') \in \overline{\Gamma \cdot (\beta v_a, x_A)} \subset \overline{\Gamma \cdot (v, x)},$$

finalizando la prueba. □

Corolario 6.28. *En las condiciones anteriores, si Γ es convexo-cocompacto, entonces el único subconjunto B -minimal \mathcal{M}_B es un conjunto minimal del flujo horocíclico contenido en el atractor Ω_Y y las órbitas cerradas no compactas son conjuntos minimales fuera del atractor Ω_Y .*

6.7. Minimales y atractores

Veremos en esta sección la relación que existe entre los conjuntos minimales obtenidos en la sección anterior con los atractores del flujo horocíclico. Probaremos que muchos de los minimales son en efecto atractores lo que garantiza su unicidad.

Representaciones no inyectivas.

Sea Γ un grupo fuchsiano convexo-cocompacto y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación no inyectiva. Aplicándole el teorema 6.27 al único minimal $\mathcal{M} = L(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$ de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}P^{n-1}$, deducimos que

$$\mathcal{M}^* = E(\Gamma) \times L(h(\Gamma))$$

es un subconjunto Γ -minimal de $E \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Esto significa que el conjunto B -minimal

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

es un conjunto minimal del flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ sobre Y .

Si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces el conjunto \mathcal{M}_B coincide con Ω_Y , luego coinciden con el conjunto no errante del flujo horocíclico foliado $\Omega_h(Y) = \Omega_Y = \mathcal{M}_B$. En particular, el conjunto minimal \mathcal{M}_B es un atractor y por consiguiente es el único conjunto minimal de $h_{\mathbb{R}}$.

Si $L(h(\Gamma)) \neq \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces \mathcal{M}_B no es un atractor y podría haber otros minimales dentro de Ω_Y .

Proposición 6.29. *Sean Γ un grupo fuchsiano y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación no inyectiva verificando (H1) y (H2). Si $L(h(\Gamma)) \neq \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces el conjunto B -minimal*

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

no es un $h_{\mathbb{R}}$ -atractor.

Demostración. Denotemos por $N = \ker h \triangleleft \Gamma$ y consideremos el espacio $T^1S_N = N \backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Como N es un subgrupo normal de Γ , por la proposición 1.20 se sabe que $L(\Gamma) = L(N)$. Luego el conjunto no errante

$$\Omega_h(S_N) = \{N.u \mid u(+\infty) \in L(N)\} \subset T^1S_N$$

es no vacío.

- (i) Si la superficie S_N es geoméricamente finita, según [27, §V, Theorem 4.1] las $h_{\mathbb{R}}$ -órbitas en $\Omega_h(T^1S_N)$ son densas o periódicas. En cualquiera de los dos casos, $\Omega_h(S_N)$ contiene punto de acumulación del flujo horocíclico $h_{\mathbb{R}}$. Es decir, siempre puedo encontrar un punto $N.u \in \Omega_h(T^1S_N)$ y una sucesión $s_n \rightarrow +\infty$ tal que $h_{s_n}(N.u) \rightarrow N.u'$.
- (ii) Si S_N es geoméricamente infinita, el conjunto $\Omega_h(S_N)$ siempre posee un punto u cuya órbita $h_{\mathbb{R}}(u)$ es no cerrada. Por tanto, obtenemos el mismo resultado que en el apartado (i) al tomar un punto $N.u' \in \overline{h_{\mathbb{R}}(N.u)}$.

Ahora, si tomamos el punto $y = \Gamma.(u, x) \in Y$ con $x \notin L(h(\Gamma))$, entonces

$$h_{s_n}(y) = h_{s_n}(\Gamma.(u, x)) = \Gamma.(h_{s_n}(u), x) \rightarrow \Gamma.(u', x).$$

Como $x \notin L(h(\Gamma))$, el punto $\Gamma.(u', x) \notin \mathcal{M}_B$ y por tanto \mathcal{M}_B no es un atractor. □

Como la proyección canónica $\pi : Y \rightarrow T^1S$ es propia, si Γ es convexo-cocompacto, entonces la clausura $h_{\mathbb{R}}(y)$ de cualquier órbita de Ω_Y se proyecta sobre el conjunto no errante $\Omega_h(S)$. Sin embargo, no podemos asegurar que el conjunto que determina en el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$ sea cerrado o corte al conjunto límite $L(h(\Gamma))$.

Representaciones fuchsianas.

Sea Γ un grupo de superficie, $h : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación fuchsiana y $\varphi : \partial\mathbb{H} \rightarrow \partial\mathbb{H}$ la aplicación de Nielsen asociada. En este caso en el teorema 6.14 ya habíamos probado que

$$\mathcal{M}_U = \left\{ \Gamma \cdot \left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\left(\frac{a}{c}\right) \right) \mid \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

es el único minimal para el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$.

De hecho, habíamos probado que \mathcal{M}_U es un atractor. Para completar nuestras observaciones, veamos que además se da la igualdad $\mathcal{M}_Y = \Omega_h$. En efecto, si $y = \Gamma \cdot (u, \xi) \in \Omega_h$, entonces $\xi = \varphi(u(+\infty))$.

Sea V_n una sucesión de bolas métricas de y con radio convergente a cero. Como $y \in \Omega_h$ sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ no acotada y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ no estacionaria tales que

$$\gamma_n h_{t_n}(V_n) \cap V_n \neq \emptyset.$$

Equivalentemente, existen sendas sucesiones $u_n = (z_n, \vec{u}_n) \rightarrow u = (z, \vec{u})$ y $\xi_n \rightarrow \xi$ tales que

$$\gamma_n h_{t_n}(u_n) \rightarrow u \quad \text{y} \quad h(\gamma_n)(\xi_n) \rightarrow \xi.$$

La convergencia del primer límite es equivalente a que

$$\gamma_n(u_n(+\infty)) \rightarrow u(+\infty) \quad \text{y} \quad B_{\gamma_n(u_n(+\infty))}(o, \gamma_n(z_n)) \text{ acotado,}$$

lo que a su vez es equivalente a

$$\gamma_n(u_n(+\infty)) \rightarrow u(+\infty) \quad \text{y} \quad B_{(u_n(+\infty))}(\gamma_n^{-1}(o), z_n) \text{ acotado.}$$

Ahora bien, como $z_n \rightarrow z$ y $u_n(+\infty) \rightarrow u(+\infty)$, entonces

$$\gamma_n^{-1}(o) \rightarrow u(+\infty).$$

Puesto que $B_{\gamma_n(u_n(+\infty))}(o, \gamma_n(z_n))$ está acotado deducimos que

$$\gamma_n z_n \rightarrow u(+\infty)$$

y por consiguiente

$$\gamma_n(o) \rightarrow u(+\infty).$$

Como siempre, por el lema 1, para cada $\xi \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ tal que $\xi \neq u(+\infty)$ se tiene que $\gamma_n(\xi) \rightarrow u(+\infty)$.

Estudiemos ahora la sucesión $\xi_n \rightarrow \xi$. En primer lugar, podemos suponer es que $\xi_n \neq \xi$, ya que los conjuntos $\gamma_n h_{t_n}(V_n) \cap V_n$ son abiertos. Si denotamos por (ξ_n, ξ) la geodésica en \mathbb{H} que une los puntos límite ξ_n y ξ , entonces deducimos que

$$d(o, (\xi_n, \xi)) \rightarrow +\infty.$$

Denotemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\gamma_n)\xi = \xi'$. Hay dos situaciones:

(i) Si $\xi' \neq \xi$ la distancia

$$d(o, (h(\gamma_n)(\xi_n), h(\gamma_n)(\xi)))$$

está acotada. Esto es equivalente a que la distancia

$$d(h(\gamma_n^{-1})(o), (\xi_n, \xi))$$

está acotada, de donde se sigue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\gamma_n^{-1})(o) = x$ y concluimos que $x = \varphi(u(+\infty))$.

(ii) Si $\xi' = \xi$ entonces $\xi \in \varphi(L(\Gamma))$ y podemos escribir $x = \varphi(\eta)$. Del límite $h(\gamma_n)\varphi(\eta) \rightarrow \varphi(\eta)$ e sigue que $\gamma_n(\eta) \rightarrow \eta$.

Si $\eta \neq u(+\infty)$ entonces por lo dicho anteriormente $\gamma_n(\eta) \rightarrow u(+\infty)$ y combinado con que $\gamma_n(\eta) \rightarrow \eta$ se deduce que $x = \varphi(u(+\infty))$.

Representaciones indiscretas en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Sea Γ un grupo fuchsiano convexo-cocompacto y $\Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ una representación inyectiva indiscreta. De nuevo, al aplicar el teorema 6.27 al minimal $\mathcal{M} = L(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$ se tiene que

$$\mathcal{M}^* = E(\Gamma) \times \partial\mathbb{H}$$

es un Γ -minimal. Luego

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, \xi) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

es un subconjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal de Y . Aquí también podemos garantizar que $\mathcal{M}_B = \Omega_h = \Omega_Y$ es un atractor y por consiguiente es el único minimal del flujo horocíclico foliado contenido en el conjunto no errante.

Representaciones indiscretas.

En el caso general de representaciones indiscretas verificando (H1) y (H2) de un grupo Γ convexo-cocompacto,

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

es un conjunto minimal del flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ sobre Y .

Si $L(h(\Gamma)) = \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces $\mathcal{M}_B = \Omega_h = \Omega_Y$ es también un atractor y los únicos conjuntos minimales son Ω_Y y las órbitas cerradas no compactas fuera de Ω_Y .

Si $L(h(\Gamma)) \neq \mathbb{R}P^{n-1}$, al igual que pasaba con las representaciones no inyectivas, el conjunto minimal no es un atractor al menos en el caso cocompacto:

Proposición 6.30. *Sean Γ un grupo fuchsiano cocompacto y $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ una representación indiscreta verificando (H1) y (H2). Si $L(h(\Gamma)) \neq \mathbb{R}P^{n-1}$, entonces el conjunto*

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma.(u, x) \mid u(+\infty) \in L(\Gamma), x \in L(h(\Gamma))\}$$

no es un $h_{\mathbb{R}}$ -atractor.

Demostración. Sea $\gamma_n \in \Gamma$ una sucesión tal que $h(\gamma_n) \rightarrow Id \in PSL(n, \mathbb{R})$.

Por compacidad de Y , para cada punto $\Gamma.(u, x) \in Y$ con $x \notin L(h(\Gamma))$, y tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que la sucesión

$$\Gamma.(u, x) = \Gamma.(\gamma_n(u), h(\gamma_n)x)$$

converge a un punto $\Gamma.(u', x)$. Ahora, como $x \notin L(h(\Gamma))$, el punto $\Gamma.(u', x) \notin \mathcal{M}_B$ y por tanto \mathcal{M}_B no es un atractor. □

6.8. Representaciones kleinianas

En la sección 6.4 hemos probado que el único conjunto minimal del flujo horocíclico foliado de la suspensión de una representación fuchsiana se obtiene usando la aplicación de Nielsen. Ahora vamos a ocuparnos de las representaciones kleinianas.

Caso compacto: aplicación de Cannon-Thurston

Sea M^3 una 3-variedad hiperbólica que fibra sobre S^1 . Por el teorema de geometrización de Thurston [81, Proposition 2.6], la fibra es una superficie hiperbólica compacta $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ y la monodromía $f : S \rightarrow S$ es pseudo-Anosov.

La fibración $S \rightarrow M^3 \rightarrow S^1$ induce una sucesión exacta de homotopía entre los grupos fundamentales

$$0 \rightarrow \Gamma \rightarrow \Lambda \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de forma que la inclusión natural $h : \Gamma \rightarrow \Lambda$ define una representación de Γ como grupo kleiniano Λ contenido en el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 que conservan la orientación $PSL(2, \mathbb{C}) = Isom_+(\mathbb{H}^3)$.

En estas condiciones, según [82, Main Theorem], existe una aplicación de Nielsen continua

$$\varphi : L(\Gamma) = \partial\mathbb{H} \rightarrow L(\Lambda) = \partial\mathbb{H}^3.$$

Es una curva que rellena la esfera $\partial\mathbb{H}^3$ llamada *aplicación de Cannon-Thurston*.

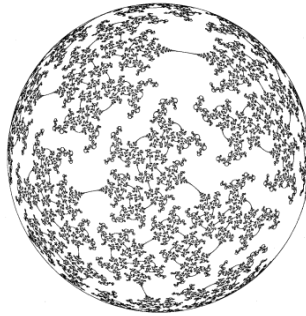


Figura 6.1: Aproximación de la curva recubridora. Imagen original de W. Thurston, extraída del artículo [81], alojado en el repositorio arxiv.org y con licencia *Open Access*

El grafo $\mathcal{G} = \{(\xi, \varphi(\xi)) \mid \xi \in \partial\mathbb{H}\} \subset \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}^3$ de la aplicación φ es un conjunto Γ -minimal de la acción diagonal $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}^3$. En efecto, está claro que \mathcal{G} es un cerrado no vacío Γ -invariante. Para probar la minimalidad es suficiente comprobar que para cada $\xi \in \partial\mathbb{H}$ se tiene que $\overline{\Gamma \cdot (\xi, \varphi(\xi))} = \mathcal{G}$, lo cual es inmediato gracias a la continuidad de la aplicación φ .

Por dualidad, el conjunto

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma \cdot (u, \theta) \mid \theta = \varphi(u(+\infty))\}$$

es minimal para la B -acción sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial\mathbb{H}^3)$.

El estudio de la $h_{\mathbb{R}}$ -minimalidad de \mathcal{M}_Y es similar al de las representaciones fuchsianas:

Teorema 6.31. *El conjunto \mathcal{M}_B es el único conjunto minimal del flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Dividiremos la prueba de este resultado en dos etapas:

(1) El conjunto \mathcal{M}_Y es $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. En efecto, dada la fibración

$$\pi : Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial \mathbb{H}^3) \rightarrow T^1 S = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}),$$

la aplicación de Nielsen φ define una sección continua $\sigma : T^1 S \rightarrow Y$, dada por

$$\sigma(\Gamma.u) = \Gamma.(u, \varphi(u(+\infty))).$$

La restricción de esta aplicación al conjunto no errante del flujo horocíclo en $T^1 S$,

$$\sigma : \Omega_h(S) \rightarrow \mathcal{M}_Y,$$

es un homeomorfismo $h_{\mathbb{R}}$ -equivariante. Luego, \mathcal{M}_B es un conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal en Y .

(2) El conjunto \mathcal{M}_Y es un $h_{\mathbb{R}}$ -atractor. En efecto, sean $y = \Gamma.(u, \theta) \in Y$ y $s_n \rightarrow +\infty$ tales que

$$h_{s_n}(y) \rightarrow y' = \Gamma.(u', \theta').$$

Supongamos que $\theta \neq \varphi(u(+\infty))$, ya que en caso contrario el resultado es inmediato por ser \mathcal{M}_B cerrado y $h_{\mathbb{R}}$ -invariante. Tenemos que probar que el punto $y' = \Gamma.(u', \theta')$ verifica que $\theta' = \varphi(u'(+\infty))$. Como $h_{s_n}(y) \rightarrow y'$, sabemos que existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ no estacionaria tal que

$$\gamma_n h_{s_n}(u) \rightarrow u' \quad \text{y} \quad h(\gamma_n)(\theta) \rightarrow \theta'.$$

Si escribimos $u = (z, \vec{u})$ y $u' = (z', \vec{u}')$, entonces (i) $\gamma_n(z) \rightarrow u'(+\infty)$,

(ii) $\gamma_n(u(+\infty)) \rightarrow u'(+\infty)$,

(iii) $h(\gamma_n)(\theta) \rightarrow \theta'$,

(iv) la sucesión $B_{\gamma_n(u(+\infty))}(o, \gamma_n(z))$ es acotada.

Sea $\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^{-1}(z) \in \partial \mathbb{H}$. Por el lema 1, para cada $w \in \mathbb{H} \cup \partial \mathbb{H}$ tal que $w \neq \eta$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(w) = u'(+\infty)$. Por tanto, si $\theta \neq \varphi(\eta)$, entonces $\theta = \varphi(w)$ con $w \neq \eta$ por ser φ sobreyectiva. Obtenemos así que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\gamma_n)(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma_n(w)) = \varphi(u'(+\infty)).$$

Es decir, si $\theta \neq \varphi(\eta)$, entonces $\theta' = \varphi(u'(+\infty))$ como queríamos.

Supongamos por el contrario que $\theta = \varphi(\eta)$. En este caso, aplicando la sucesión $h(\gamma_n)$ a la igualdad y tomando límites, tendremos que $\theta' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma_n \eta)$. De nuevo, si $\gamma_n(\eta) \rightarrow u'(+\infty)$ entonces $\theta' = \varphi(u'(+\infty))$ como queríamos.

Supongamos pues que $\gamma_n(\eta) \rightarrow \eta' \neq u'(+\infty)$. Tomemos $v \in h_{\mathbb{R}}(u)$ con $v(-\infty) = \eta$, escribamos $v = (z_v, \vec{v})$. Como

$$\gamma_n(\eta) \rightarrow \eta', \quad \gamma_n v(+\infty) \rightarrow u'(+\infty) \quad \text{y} \quad \eta' \neq u'(+\infty),$$

podemos escribir

$$v = (\eta, v(+\infty), B_{v(+\infty)}(o, z_v))$$

y

$$\gamma_n(v) = (\gamma_n(\eta), \gamma_n(v(+\infty)), B_{\gamma_n(v(+\infty))}(o, \gamma_n(z_v))).$$

Al escribir $v = (\eta, v(+\infty), B_{v(+\infty)}(o, z_v))$ estamos describiendo el vector v como el vector situado en la geodésica orientada que une η con $v(+\infty)$ y anclado en el punto de intersección de dicha geodésica con el horociclo $B_{v(+\infty)}(o, z_v) = 0$.

Ahora, como $v(+\infty) = u(+\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned} B_{\gamma_n(v(+\infty))}(o, \gamma_n(z_v)) &= B_{\gamma_n(u(+\infty))}(o, \gamma_n(z_v)) = \\ &= B_{\gamma_n(u(+\infty))}(o, \gamma_n(z)) + B_{\gamma_n(u(+\infty))}(\gamma_n(z), \gamma_n(z_v)) = \alpha_n + B_{u(+\infty)}(z, z_v). \end{aligned}$$

Como la sucesión α_n está acotada por el apartado (iv) del principio de la demostración, entonces la sucesión $\gamma_n(v)$ es acotada. Como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ es propiamente discontinua, la sucesión γ_n es estacionaria, en contra de lo supuesto. □

Caso no compacto: grupos de Schottky

La construcción de Cannon-Thurston anterior nos permite construir una gran familia de variedades no compactas $Y' = \Gamma' \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial \mathbb{H}^3)$ que admiten un único conjunto $h_{\mathbb{R}}$ -minimal. Para ello recurrimos a los grupos de Schottky, un tipo especial de grupos fuchsianos y kleinianos construidos de modo combinatorio [27, Ch. II].

Tomemos Γ un grupo fuchsiano cocompacto y $h : \Gamma \rightarrow \Lambda$ su realización en un grupo kleiniano siguiendo la construcción de Cannon-Thurston. Hay una infinidad de subgrupos de Schottky del grupo Γ , tomemos Γ' uno de ellos que sea finitamente generado y de índice infinito en Γ . Según un resultado de G. P. Scott [80], el grupo Γ' es de hecho un grupo geoméricamente finito.

La cubierta regular $q : S' = \Gamma' \backslash \mathbb{H} \rightarrow S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ induce un homomorfismo de grupos inyectivo $\iota : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xleftarrow{h} & \Lambda \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma' & \xrightarrow{\cong} & \Lambda' = h(\Lambda) \end{array}$$

En particular el grupo kleiniano $\Lambda' = h(\Gamma')$ es geoméricamente finito y sin elementos parabólicos, de donde se sigue que Λ' es de hecho un grupo kleiniano de Schottky de acuerdo con B. Maskit [62].

Tenemos así un isomorfismo entre los grupos de Schottky Γ' y Λ' y por tanto, siguiendo a P. Tukia [84, 85], existe un homeomorfismo

$$\varphi : L(\Gamma') \rightarrow L(\Lambda')$$

que llamamos aplicación de Nielsen.

Con esto, se aplican los argumentos presentados en el teorema 6.31 para garantizar que el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ sobre $Y' = \Gamma' \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \partial \mathbb{H}^3)$ admite un único conjunto minimal

$$\mathcal{M}'_B = \{\Gamma'.(u, \theta') \mid \theta' = \varphi'(u(+\infty))\},$$

dual al único minimal \mathcal{M}' de la acción $\Gamma' \curvearrowright \partial \mathbb{H} \times L(\Lambda')$.

Observación 6.32. Los argumentos del teorema 6.31 siguen siendo válidos para el caso de representaciones $h : \Gamma \rightarrow PSL(n, \mathbb{R})$ de un grupo fuchsiano Γ que admitan una aplicación de nielsen continua

$$\varphi : L(\Gamma) \rightarrow L(h(\Gamma)).$$

En tal caso, el flujo horocíclico foliado $h_{\mathbb{R}}$ sobre $Y = \Gamma \backslash (PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^{n-1})$ admite un conjunto minimal

$$\mathcal{M}_B = \{\Gamma \cdot (u, x) \mid x = \varphi(u(+\infty))\},$$

dual a un minimal \mathcal{M} de la acción $\Gamma \curvearrowright \partial\mathbb{H} \times L(h(\Gamma))$.

Apéndice A

Acciones propiamente discontinuas

El objetivo de este apéndice es estudiar las acciones propiamente discontinuas en un contexto general. En particular nos interesaremos por el conjunto no errante y atractores de una acción de un grupo discreto sobre un espacio topológico.

Sean X un espacio topológico y $\Gamma < \text{Homeo}(X)$ un grupo discreto que proporciona una acción continua $\Gamma \curvearrowright X$.

Definición A.1. (1) La acción $\Gamma \curvearrowright X$ es *propiamente discontinua* si dados dos puntos $x, x' \in X$, existen entornos abiertos V y V' de x y x' respectivamente tales que el conjunto

$$\Gamma_{V,V'} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V' \neq \emptyset\}$$

es finito.

(2) La acción $\Gamma \curvearrowright X$ es *discontinua en un punto* $x \in X$ si dada cualquier sucesión $\gamma_n \in \Gamma$, la sucesión $\gamma_n.x$ no converge. Equivalentemente, si $\gamma_n \in \Gamma$ es una sucesión tal que $\gamma_n(x) \rightarrow x'$ entonces γ_n es estacionaria. Diremos que la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es *discontinua* si es discontinua en todos los puntos de X .

Proposición A.2. (1) Si $\Gamma \curvearrowright X$ es *propiamente discontinua*, entonces las órbitas de la acción son *cerradas y discretas*.

(2) Si $\Gamma \curvearrowright X$ es *discontinua*, entonces las órbitas son *cerradas*.

Demostración. Sea $x \in X$ un punto arbitrario.

(1) Para ver que la órbita $\Gamma.x$ es cerrada veamos que $\overline{\Gamma.x} \subset \Gamma.x$. Si $x' \in \overline{\Gamma.x}$, entonces existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_n.x \rightarrow x'.$$

Tomemos V y V' entornos abiertos de x y x' respectivamente. Como la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es propiamente discontinua, el conjunto

$$\Gamma_{V,V'} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V' \neq \emptyset\}$$

es finito. En particular la sucesión $\gamma_n = \gamma$ es estacionaria, probando que $x' = \gamma.x \in \Gamma.x$.

Veamos que la órbita $\Gamma.x$ es discreta. Para ello, tomemos $x' \in \Gamma.x$ y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tales que

$$\gamma_n.x \rightarrow x'.$$

Un argumento igual al usado anteriormente garantiza que la sucesión $\gamma_n = \gamma$ es estacionaria. Luego en $\Gamma.x$ no hay puntos de acumulación.

(2) Para ver que la órbita $\Gamma.x$ es cerrada veamos que $\overline{\Gamma.x} \subset \Gamma.x$. Si $x' \in \overline{\Gamma.x}$, entonces existe una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_n.x \rightarrow x'.$$

Como la acción es discontinua, la sucesión $\gamma_n = \gamma$ es estacionaria, probando que $x' = \gamma.x \in \Gamma$.

□

Proposición A.3. *Una acción $\Gamma \curvearrowright X$ propiamente discontinua es discontinua.*

Demostración. Supongamos que la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es propiamente discontinua y sean $x \in X$ y $\gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_n.x \rightarrow x'$. Luego dado un entorno V' de x' , tenemos que $\gamma_n.x \in V'$ para todo n suficientemente grande. Por tanto, dado V un entorno de x , se tiene que

$$\gamma_n.V \cap V' \neq \emptyset.$$

Como la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es propiamente discontinua, sabemos que el conjunto Γ_{x_1, x_2} es finito y por tanto la sucesión γ_n es estacionaria. □

El recíproco de la anterior proposición no es cierto en general, pero podemos garantizarlo para acciones isométricas:

Proposición A.4. *Sea X es un espacio métrico y Γ un subgrupo discreto de isometrías. Si la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es discontinua entonces es propiamente discontinua.*

Es más, si un grupo discreto de isometrías Γ actúa sobre un espacio de Heine-Borel X , la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es siempre discontinua y por tanto propiamente discontinua. Véase [74, Theorem 5.3.5].

Una vez vista la relación entre acción propiamente discontinua y acción discontinua, comencemos con el estudio del conjunto no errante:

Definición A.5. Un punto $x \in X$ es Γ -errante si existe un entorno abierto V de x tal que el conjunto

$$\Gamma_V = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V \neq \emptyset\}$$

es finito. Denotamos por $\Omega_\Gamma(X)$ al conjunto de puntos *no errantes* de la acción, de modo que el conjunto de puntos errantes se corresponde con $X \setminus \Omega_\Gamma(X)$.

Proposición A.6. *Sea $V \subset X$ un abierto Γ -invariante y consideremos la acción inducida $\Gamma \curvearrowright V$. Si $\Gamma \curvearrowright V$ es propiamente discontinua, entonces $\Omega_\Gamma(X) \subset X \setminus V$.*

Demostración. Supongamos que la acción $\Gamma \curvearrowright V$ es propiamente discontinua y probemos que $V \subset X \setminus \Omega_\Gamma(X)$, es decir, cualquier punto x de V es errante. Como la acción $\Gamma \curvearrowright V$ es propiamente discontinua, sabemos que existe un entorno abierto V' de x en V tal que el conjunto

$$\Gamma_{V'} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V' \cap V' \neq \emptyset\}$$

es finito. Como V es abierto en X , se sigue inmediatamente que el punto x es errante. □

En lo que sigue, sea $\Gamma \curvearrowright X$ una acción de un grupo discreto sobre un espacio Hausdorff y 1-numerable.

Definición A.7. Dos puntos $x, x' \in X$ están Γ -relacionados si existe una sucesión $x_n \rightarrow x$ y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_n(x_n) \rightarrow x'$.

Proposición A.8. La acción $\Gamma \curvearrowright X$ es propiamente discontinua si y sólo si no hay puntos Γ -relacionados en X .

Demostración. (\Rightarrow) Por paso al contrarrecíproco, sean $x, x' \in X$ dos puntos Γ -relacionados, es decir, existe una sucesión $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$ no estacionaria tales que $\gamma_n(x_n) \rightarrow x'$.

Dado V entorno de x , como $x_n \rightarrow x$, entonces $x_n \in V$ para todo $n > N$. Análogamente, dado V' entorno de x' , como $\gamma_n(x_n) \rightarrow x'$, entonces $\gamma_n(x_n) \in V'$ para todo $n > N'$.

Se sigue entonces que $\gamma_n.V \cap V' \neq \emptyset$ para todo $n > \max\{N, N'\}$ y por tanto la acción $\Gamma \curvearrowright X$ no es propiamente discontinua.

(\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que $\Gamma \curvearrowright X$ no es propiamente discontinua. Es decir, dados $x, x' \in X$, para cualesquiera entornos abiertos V y V' de x y x' respectivamente, el conjunto

$$\Gamma_{V,V'} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V' \neq \emptyset\}$$

es infinito.

Sean $\{V_n\}$ y $\{V'_n\}$ bases locales de x y x' respectivamente y tomemos

$$\gamma_n \in \Gamma_{V_n, V'_n} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V_n \cap V'_n \neq \emptyset\}.$$

Podemos tomar la sucesión γ_n no estacionaria ya que todos los conjuntos en los que escogemos los términos de la sucesión son infinitos.

Se sigue entonces que existe una sucesión $x_n \in V_n$ tal que $\gamma_n.x_n \in V'_n$. Como $\{V_n\}$ y $\{V'_n\}$ son bases locales de x y x' , entonces $x_n \rightarrow x$ y $\gamma_n.x_n \rightarrow x'$ y por tanto x y x' están Γ -relacionados. \square

Esta caracterización de las acciones propiamente discontinuas permite reformular y probar de modo más sencillo la proposición A.3:

Proposición A.9. Si X no contiene puntos Γ -relacionados, entonces la acción $\Gamma \curvearrowright X$ es discontinua.

Demostración. Supongamos que $\Gamma \curvearrowright X$ no es discontinua, es decir, existe un punto $x \in X$ y una sucesión no estacionaria $\gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_n(x) \rightarrow x'$. De aquí se sigue inmediatamente que x y x' están Γ -relacionados sin más que tomar $x_n = x$. \square

Del mismo modo podemos reformular la proposición A.6 en términos de puntos Γ -relacionados:

Proposición A.10. Sea $V \subset X$ un abierto Γ -invariante y consideremos la acción inducida $\Gamma \curvearrowright U$. Si V no contiene puntos Γ -relacionados consigo mismos, entonces $\Omega_\Gamma(X) \subset X \setminus V$.

Demostración. Por paso al contrarrecíproco, supongamos que existe un punto $x \in V \cap \Omega_\Gamma(X)$. Entonces, cualquier entorno V' de x en X interseca a V en un conjunto $W = V \cap V'$ tal que

$$\Gamma_W = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.W \cap W \neq \emptyset\}$$

es infinito. Sea V_n base local encajada de entornos abiertos de x y tomemos

$$\gamma_n \in \Gamma_{W_n} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.W_n \cap W_n \neq \emptyset\}.$$

Podemos tomar la sucesión γ_n no estacionaria ya que todos los conjuntos en los que escogemos los términos de la sucesión son infinitos.

Por las elecciones hechas, existe una sucesión $x_n \in W_n$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $\gamma_n(x_n) \rightarrow x$, es decir, x está Γ -relacionado consigo mismo. □

Definición A.11. Un subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ es un Γ -atractor si dado un punto $x \in X$ y una sucesión no estacionaria $\gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_n(x) \rightarrow x'$, entonces $x' \in \mathcal{A}$.

Proposición A.12. Sea $V \subset X$ un abierto Γ -invariante y $\Gamma \curvearrowright V$ la acción inducida. Si la acción $\Gamma \curvearrowright V$ es discontinua, entonces $X \setminus V$ es un Γ -atractor.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\gamma_n \in \Gamma$ una sucesión no estacionaria tales que $\gamma_n.x \rightarrow x'$. Hay dos casos:

- (i) Si x pertenece al cerrado Γ -invariante $X \setminus V$, entonces $x' \in X \setminus V$.
- (ii) Si x pertenece al abierto V , entonces $x' \in X \setminus V$, ya que en caso contrario la acción $\Gamma \curvearrowright V$ no es discontinua. □

Conclusiones

La idea inicial de esta tesis era estudiar la dinámica del flujo horocíclico en las foliaciones transversalmente homogéneas por superficies hiperbólicas, pero ha sido necesario reducirse al caso transversalmente de Lie, homogéneo o no, y a las suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos cocompactos o no.

Destacamos en primer lugar las pruebas presentadas de dos teoremas clásicos sobre la dinámica del flujo horocíclico en superficies hiperbólicas: el teorema del Hedlund sobre la minimalidad del flujo horocíclico en superficies hiperbólicas compactas y el teorema del Eberlein que caracteriza las órbitas densas del flujo horocíclico en el caso no compacto. El interés de estas pruebas reside en los argumentos e ideas involucradas. Son demostraciones elementales del tipo que aparecerá a lo largo de toda la tesis en el caso foliado.

Centrándonos en el caso de variedades foliadas, en el caso transversalmente de Lie el objetivo era probar la minimalidad del flujo horocíclico bajo las hipótesis naturales de minimalidad de la foliación y compacidad de la variedad ambiente y sin necesidad de recurrir a los argumentos ergódicos usados en [4].

En el caso de una foliación de Lie homogénea, ya se había probado en [1] la minimalidad del flujo horocíclico siguiendo el siguiente esquema: se prueba primero la minimalidad de la acción afín para deducir de ahí la minimalidad del flujo horocíclico usando argumentos algebraicos. Nuestra idea fue seguir el mismo esquema en el caso no homogéneo.

Hemos usado la casi-acción introducida en [51] para construir el círculo universal en el sentido de Thurston de una foliación de Lie. A partir de este círculo universal hemos probado la minimalidad de la acción afín haciendo uso de la dualidad de Furstenberg. A partir de esto, hemos deducido la minimalidad del flujo horocíclico mediante argumentos algebraicos bajo la hipótesis adicional de la no trivialidad de las hojas de la foliación, ya presente en trabajos anteriores sobre el tema.

La ventaja de esta aproximación reside en que los argumentos usados son elementales y podrían aplicarse al estudio de la dinámica del flujo horocíclico en foliaciones de Lie no necesariamente compactas.

En el caso de foliaciones obtenidas como suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos, hemos comenzado con el estudio de la dinámica de la acción afín y del flujo horocíclico en varios casos particulares en función de las características de la representación. Obtuvimos en cada caso resultados de existencia y unicidad de conjuntos minimales para la acción afín y para el flujo horocíclico. Estos casos particulares nos han permitido obtener resultados generales sobre la existencia y unicidad de minimales bajo ciertas condiciones generales de irreducibilidad fuerte y proximalidad de la representación presentadas en [25]. De hecho, para estudiar la unicidad de los

minimales del flujo horocíclico, hemos estudiado cuándo el minimal es un atractor del flujo horocíclico, lo que no es cierto en todos los casos.

Finalmente, nos hemos interesado particularmente por los casos de representaciones fuchsianas y kleinianas. En estos casos, hemos obtenido la existencia y unicidad de conjuntos minimales para la acción afín y el flujo horocíclico si existe una aplicación de Nielsen continua, lo cual no está garantizado en general.

Bibliografía

- [1] Alcalde Cuesta, Fernando, Dal’Bo, Françoise, Remarks on the dynamics of the horocycle flow for homogeneous foliations by hyperbolic surfaces. *Expositiones Mathematicae*, **33** (2015), 431–451.
- [2] Alcalde Cuesta, Fernando, Dal’Bo Françoise, Horocycle flow on flat projective bundles: topological remarks and applications, 2022, [arXiv:2204.09778](https://arxiv.org/abs/2204.09778).
- [3] Alcalde, Fernando, Dal’Bo, Françoise, Martínez, Matilde, Verjovsky, Alberto, Minimality of the horocycle flow on laminations by hyperbolic surfaces with non-trivial topology. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36** (2016), 4619–4635.
- [4] Alcalde, Fernando, Dal’Bo, Françoise, Martínez, Matilde, Verjovsky, Alberto, Unique ergodicity of the horocycle flow on Riemannian foliations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **40** (2018), 1459–1479.
- [5] Alvarez, Sébastien, Yang, Jiagang, Physical measures for the geodesic flow tangent to a transversally conformal foliation. *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, **36** (2019), 1–51.
- [6] Alvarez, Sébastien, Smith, Graham, Prescription de courbure des feuilles des laminations: retour sur un théorème de Candel. *Annales de l’Institut Fourier*, **71** (2021), 2549–2593.
- [7] Artin, Emil, Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **3** (1924), 170–175.
- [8] Babillot, Martine, On the classification of invariant measures for horosphere foliations on nilpotent covers of negatively curved manifolds. En *Random Walks and Geometry*. De Gruyter, Berlin-New York, 2004, 319–336.
- [9] Babillot, Martine, Ledrappier, François, Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers. En *Lie Groups and Ergodic Theory (Proceedings of the International Colloquium, Mumbai, India, January 4–12, 1996)*. Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, 1998, 1–32.
- [10] Bachir Bekka, Mohammed, Mayer, Matthias, *Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces*. Cambridge University Press (London Mathematical Society Lecture Note Series 269), Cambridge, 2000.
- [11] Bellis, Alexandre, *Étude topologique du flot horocycle: le cas des surfaces géométriquement infinies*, Thèse Rennes, 2018.

- [12] Benoist, Yves, Sous-groupes discretés des groupes de Lie (Notas de curso). *European Summer School in Group Theory*, 1997.
- [13] Birkhoff, George David, *Dynamical Systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications, New York, 1927.
- [14] Blumenthal, Robert Allan, Transversely homogeneous foliations. *Annales de l'institut Fourier* **29** (1979), 143–158.
- [15] Bonatti, Christian, Eskin, Alex, Wilkinson, Amie, Projective cocycles over $SL(2, \mathbb{R})$ actions: measures invariant under the upper triangular group. *Astérisque*, **415** (2020), 157–180.
- [16] Borel, Armand, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. *Topology*, **2** (1963), 111–122.
- [17] Bott, Raoul, Tu, Loring Wuliang, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [18] Breuillard, Emmanuel, Gelander, Tsachik, Souto, Juan, Storm, Peter, Dense embeddings of surface groups. *Geometry & Topology*, **10** (2006), 1373–1389.
- [19] Burger, Marc, Horocycle flow on geometrically finite surfaces. *Duke Mathematical Journal*, **61** (1990), 779–803.
- [20] Calegari, Danny, *Foliations and the Geometry of 3-Manifolds*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [21] Calegari, Danny, Dunfield, Nathan M., Laminations and groups of homeomorphisms of the circle. *Inventiones Mathematicae*, **152** (2003), 149–204.
- [22] Candel, Alberto, Uniformization of surface laminations. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **26** (1993), 489–516.
- [23] Cartan, Élie, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie. *L'Enseignement Mathématique*, **35** (1936), 177–200.
- [24] Cannon, James Weldon, Thurston, William Paul, Group invariant Peano curves. *Geometry & Topology*, **11** (2007), 1315–1355.
- [25] Conze, Jean-Pierre, Guivarc'h, Yves, Limit sets of linear transformations. *The Indian Journal of Statistics* (Special issue on Ergodic Theory and Harmonic Analysis), **62** (2000), 367–385.
- [26] Coudène, Yves, A short proof of the unique ergodicity of horocyclic flows. *AMS Contemporary Mathematics*, **485** (2009), 85–89.
- [27] Dal'Bo, Françoise, *Geodesic and horocyclic trajectories*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [28] Dal'Bo, Françoise, Topologie du feuilletage fortement stable. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, **50** (2000), 981–993.
- [29] Dal'Bo, Françoise, Peigné, Marc, Sambusetti, Andrea, On the horoboundary and the geometry of rays of negatively curved manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, **259**, 55–100.

- [30] Dal’Bo, Françoise, Starkov, Aleksandr Nikolaevich, On a classification of limit points of infinitely generated Schottky groups. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6** (2000), 561–578.
- [31] Eberlein, Patrick, Horocycle flows on certain surfaces without conjugate points. *Transactions of the American Mathematical Society*, **233** (1977), 1–36.
- [32] Farb, Benson, Margalit, Dan, *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 2012.
- [33] Fedida, Edmond, Sur les feuilletages de Lie. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, **272** (1971), 999–1001.
- [34] Furstenberg, Hillel, Strict ergodicity and transformation of the torus. *American Journal of Mathematics*, **83** (1961), 573–601.
- [35] Furstenberg, Hillel, The unique ergodicity of the horocycle flow. En *Lecture Notes in Mathematics 318. Recent Advances in Topological Dynamics (Proceedings of the Conference on Topological Dynamics, Yale University, 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, Springer, Berlin, 1973, 95–115.
- [36] Gauss, Carl Friedrich, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores*, **6** (1828), 99–146.
- [37] Gaye, Masseye, Lo, Cheikh, Sur l’inexistence d’ensembles minimaux pour le flot horocyclique, *Confluents Mathematici*, **9** (2017), 95–104.
- [38] Ghys, Etienne, Harpe, Pierre de la, *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [39] Ghys, Etienne, Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional foliations. *Journal of Functional Analysis*, **77** (1988), 51–59.
- [40] Godbillon, Claude, *Feuilletages. Études géométriques*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1991.
- [41] Gottschalk, Walter Helbig, Hedlund, Gustav Arnold, *Topological Dynamics*. American Mathematical Society Colloquium Publications, XXXVI, 1995.
- [42] Guivarc’h, Yves, Produit de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **10** (1990), 483–512.
- [43] Hadamard, Jacques, Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **5** (1898), 27–74.
- [44] Haefliger, André, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **32** (1958), 248–329.
- [45] Haefliger, André, Variétés feuilletées, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **16** (1962), 367–397.
- [46] Haefliger, André, Foliations and compactly generated pseudogroups. *Foliations: Geometry and Dynamics (Proceedings of the Euroworkshop, Warsaw, 2000)*, (2002), 275–295.

- [47] Haefliger, André, Grupos d'holonomie et classificants. *Astérisque*, **116** (1984), 70–97.
- [48] Hatcher, Allen, *Algebraic topology*, 2001, <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/>.
- [49] Hector, Gilbert, Hirsch, Ulrich, *Introduction to the Geometry of Foliations, Part A*. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1981.
- [50] Hector, Gilbert, Hirsch, Ulrich, *Introduction to the Geometry of Foliations, Part B*. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1983.
- [51] Hector, Gilbert, Matsumoto, Shigenori, Meigniez, Gaël, Ends of leaves of Lie foliations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **57** (2005), 753–779.
- [52] Hedlund, Gustav Arnold, Fuchsian groups and transitive horocycles. *Duke Mathematical Journal*, **2** (1936), 530–542.
- [53] Hedlund, Gustav Arnold, The dynamics of geodesic flows. *Transactions of the American Mathematical Society* **40** (1939), 241–260.
- [54] Hopf, Eberhard, Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. *Berichte über die Verhandlungen Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, **91** (1939), 261–304.
- [55] Kaimanovich, Vadim Adol'fovich, Ergodic properties of the horocycle flow and classification of fuchsian groups. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6** (2000), 21–56.
- [56] Katok, Svetlana, *Fuchsian groups*. University of Chicago Press, Chicago, 1992.
- [57] Koebe, Paul, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. *Fünfte Mitteilung, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **I** (1927), 164–196; **II** y **III** (1928), 345–442; **IV** (1929) 414–457; **V** y **VI** (1930) 304–364, 504–541; **VII** (1931) 506–534.
- [58] Kulikov, Michael, The horocycle flow without minimal sets. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **338** (2004), 477–480.
- [59] Ledrappier, François, Sarig, Omri, Invariant measures for the horocycle flow on periodic hyperbolic surfaces. *Israel Journal of Mathematics*, **160**(1) (2007), 281–315.
- [60] Mann, Kathryn, Rigidity and flexibility of group actions on the circle, 2015, [arXiv:1510.00728](https://arxiv.org/abs/1510.00728).
- [61] Martínez, Matilde, Matsumoto, Shigenori, Verjovsky, Alberto, Horocycle flows for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund's theorem, *Journal of Modern Dynamics*, **10** (2016), 113–134.
- [62] Maskit, Bernard, On free Kleinian groups, *Duke Mathematical Journal*, **48** (1981), 755–765.
- [63] Matsumoto, Shigenori, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations. *Tohoku Mathematical Journal*, **64** (2012), 569–592.
- [64] Matsumoto, Shigenori, Remarks on the horocycle flow for foliations by hyperbolic surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145** (2017), 355–362.

- [65] Matsumoto, Shigenori, Horocycle flows without minimal sets, *Journal of Mathematical Sciences of Japan*, **23** (2016), 661–673.
- [66] Molino, Pierre, *Riemannian foliations*. Birkhäuser, Boston-Basel, 1988.
- [67] Morse, Marston, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, **22** (1921), 84–100.
- [68] Muhly, Paul Scott, Renault, Jean Nicolas, Williams, Dana Peter, Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras. *Journal of Operator Theory*, **1** (1987), 3–22.
- [69] Nielsen, Jakob, Om geodaetiske Linier i lukkede mangfoldigheder med konstant negativ Krümming. *Matematisk Tidsskrift*, **B** (1925), 37–44.
- [70] Nielsen, Jakob, Zur Topologie der geschlossenen Flächen. *Mathematikerkongresses i Kopenhagen* (1925), 263–276.
- [71] Plante, Joseph Franklin, Foliations with measure preserving holonomy. *Annal of Mathematics. Second Series* **102** (1975), 327–361.
- [72] Poincaré, Henri, Sur l’uniformisation des fonctions analytiques, *Acta Mathematica*, **31** (1908), 1–63.
- [73] Poincaré, Henri, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Transactions of the American Mathematical Society*, **17** (1905), 237–274.
- [74] Ratcliffe, John G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 149, Springer, New York, 2006.
- [75] Reinhart, Bruce Lloyd, Foliated manifolds with bundle-like metrics. *Annals of Mathematics*, **69** (1959), 119–132.
- [76] Roblin, Thomas, Ergodicité et équidistribution en courbure négative. *Société Mathématique de France*, **95** (2003).
- [77] Sacksteder, Richard, Foliations and pseudogroups. *American Journal of Mathematics*, **87** (1965), 79–102.
- [78] de Saint-Gervais, Henri Paul, *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, 2011.
- [79] Sarig, Omri, The horocycle flow and the laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus, *Geometric and Functional Analysis*, **19** (2010), 1757–1812.
- [80] Scott, Godfrey Peter, Swamp, Gadde Ananda, Geometric finiteness of certain Kleinian groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **109** (1990), 765–768.
- [81] Thurston, William Paul, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, 1986, [arXiv:math/9801045](https://arxiv.org/abs/math/9801045).
- [82] Thurston, William Paul, *Three manifolds, foliations and circles, I*, 1997, [arXiv:math/9712268](https://arxiv.org/abs/math/9712268).
- [83] Thurston, William Paul, *Three manifolds, foliations and circles, II*. (Inédito).

- [84] Tukia, Pekka, On isomorphisms of geometrically finite Möbius groups, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **61** (1985), 171–214.
- [85] Tukia, Pekka, A rigidity theorem for Möbius groups, *Inventiones Mathematicae*, **97** (1989), 405–431.
- [86] Tukia, Pekka, The limit map of a homomorphism of discrete möbius groups, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **82** (1995), 97–132.
- [87] Verjovsky, Alberto, A uniformization theorem for holomorphic foliations. En *Contemporary Mathematics 58 (Proceedings of the Lefschetz Centennial Conference, Mexico City, 1984)*, American Mathematical Society, 1987, 233–253.



En esta tesis estudiamos la dinámica del flujo horocíclico en dos tipos de foliaciones transversalmente homogéneas: las foliaciones transversalmente de Lie y las suspensiones de representaciones lineales de grupos fuchsianos.

La minimalidad del flujo horocíclico, bajo las condiciones de minimalidad de la foliación y compacidad ambiente, se conocía en el caso de Lie homogéneo. La casi-acción nos permite construir el círculo universal de Thurston a una foliación de Lie, que usamos para probar la minimalidad del flujo horocíclico en el caso no homogéneo bajo la condición adicional de no trivialidad de las hojas.

En las suspensiones de representaciones lineales estudiamos la existencia y unicidad de conjuntos minimales de la acción afín y del flujo horocíclico, independientemente de la compacidad de la variedad ambiente.