materia

Matemáticas III

unidade didáctica 3

Ecuacións diferenciais de orde superior

Juan Bosco Ferreiro Darriba
Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación

Grao en Enxeñaría Civil

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

unidade **didáctica 3**

Ecuacións diferenciais de orde superior

Juan Bosco Ferreiro Darriba
Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostela

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 273-2013
ISBN 978-84-9887-989-6

MATERIA: Matemáticas III
TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Civil
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución ás ecuacións diferenciais
- Motivación e exemplos
- Concepto e clasificación das ecuacións diferenciais
- Xeneralidades sobre as solucións
- Problemas de valor inicial
- Problemas de valores na fronteira

Unidade II. Ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde
- Ecuacións en variables separables
- Ecuacións lineares
- Ecuacións homoxéneas
- Ecuacións exactas
- Algúns modelos na enxeñería

Unidade III. Ecuacións diferenciais ordinarias de orde superior
- Introdución
- Ecuacións lineares de segunda orde
- Solución xeral da ecuación homoxénea
- A ecuación non homoxénea
- Aplicacións a diversos tipos de modelos na enxeñería
- Ecuacións lineares de orde superior

Unidade IV. A transformada de Laplace
- Introdución. Un problema de natureza descontinua e impulsiva
- Transformada e transformada inversa de Laplace. Propiedades
- Resolución de problemas de valor inicial
- Convolución
- A delta de Dirac e a función de Heaviside
- Aplicación a modelos na enxeñería

Unidade V. Resolución numérica de ecuacións diferenciais ordinarias
- Introdución. Un modelo unidimensional para o fluxo de calor
- Problemas de valor inicial de primeira orde. Métodos de Euler
- Problemas de valor inicial con ecuacións de orde superior
- Problemas de valores na fronteira. Método de diferencias finitas

Unidade VI. Ecuacións diferenciais en derivadas parciais
- Introdución. Un modelo unidimensional para o fluxo de calor
- Resolución analítica. Separación de variables
- Resolución numérica. Discretización espacial e temporal
- Modelos en enxeñería con ecuacións en derivadas parciais
- Ecuacións de segunda orde. Resolución numérica con MATLAB

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica é unha das seis correspondentes á materia de formación básica *Matemáticas III*, que consta de seis créditos e impártese no primeiro cuadrimestre do segundo curso do *Grao en Enxeñería Civil* [1]. Esta materia, xunto con *Matemáticas I* e *Matemáticas II* —ámbalas dúas materias de primeiro curso, de formación básica e seis créditos cada unha—, forma o módulo ou bloque de *Matemáticas*, cuxo papel é o de contribuír a acadar tanto as competencias[2] xerais do grado como as específicas de resolver problemas matemáticos que poidan aparecer no ámbito da enxeñería.

Nesta unidade didáctica, que foi deseñada para ser desenvolvida en aproximadamente dez horas de docencia presencial, abordarase o estudo das ecuacións diferenciais de orde superior. Cando acometa a preparación desta unidade didáctica, cada estudante xa terá coñecementos básicos de álxebra linear e cálculo diferencial e integral de funcións dunha e varias variables reais —obtidos nas materias *Matemáticas I* e *II*—. Tamén estará familiarizado cos diversos tipos de ecuacións diferenciais, coñecerá o que é un problema de valor inicial, saberá modelar varios problemas en termos de ecuacións de primeira orde, e será capaz de resolver algúns deles, competencias adquiridas nas unidades didácticas previas da materia *Matemáticas III*.

Nas unidades precedentes téñense estudado diversos tipos de ecuacións diferenciais de primeira orde resolubles en termos de funcións elementais. Os métodos desenvolvidos para calcular as solucións fundaméntanse principalmente no manexo das técnicas integración, e preséntanse moitas aplicacións de aparencia interesante, e bastante doadas de deducir sempre que se teña ben asimilado o concepto de derivada.

Desafortunadamente, calcular solucións de ecuacións diferenciais de orde superior é bastante máis difícil, e terémonos que restrinxir, case por completo, ao estudo das ecuacións lineares con coeficientes constantes. Desenvolveremos un algoritmo para achar a solución xeral das ecuacións diferenciais lineares de orde dous, atopando primeiramente a solución xeral dunha ecuación homoxénea —unha estrutura bastante simple baseada en principios alxébricos elementais—, para pasar a calcular solucións concretas ou particulares das ecuacións non homoxéneas.

A utilidade e o interese deste tipo de ecuacións diferenciais quedará patente cando se presenten modelos aplicados a problemas derivados, sobre todo, da física, como o estudo das vibracións en sistemas masa-amortecedor.

Porén, hai que recoñecer que durante gran parte do desenvolvemento desta unidade didáctica é frecuente que flote no ambiente unha sensación de *maxia matemática*, como se os problemas se resolvesen unicamente grazas á concorrencia dunha *idea feliz*.

[1] O plano de estudos do grao pode consultarse no BOE de 16/04/2011.

[2] O grao de *Enxeñería Civil* habilita para a profesión de *Ingeniero Técnico en Obras Públicas*, polo que as competencias que cada estudante ten que adquirir veñen determinadas na orde ministerial CIN/307/2009 (BOE de 19/02/2009).

Para rematar, sinalaremos que a maior parte das ideas desenvolvidas para as ecuacións lineares de segunda orde seguen a ser válidas cando consideramos ecuacións lineares de orde superior, sen cambios na estrutura básica, mais cun nivel moi superior de complexidade na notación.

Así mesmo, amosaremos o xeito de propor un sistema de ecuacións diferenciais lineares de primeira orde a partir dunha ecuación diferencial de orde superior, que utilizaremos en unidades didácticas posteriores para resolver estas ecuacións numericamente. Tamén veremos que o anterior método é útil para propor unha ecuación diferencial linear de orde superior partindo dun sistema de ecuacións lineares de primeira orde, o que nos proporcionará un xeito de resolver ditos sistemas.

OS OBXECTIVOS

Procurarase que, cando remate a unidade didáctica, cada estudante sexa capaz de:

— Comprender o concepto de solución xeral dunha ecuación de orde superior, como tamén o concepto de solución dun problema de valor inicial de orden superior.
— Comprender o concepto de solución xeral dunha ecuación linear de segunda orde para os casos homoxéneo e non homoxéneo.
— Entender e manexar o concepto de solución dun problema de valor inicial de segunda orde.
— Atopar a solución xeral dunha ecuación diferencial linear homoxénea de segunda orde con coeficientes constantes.
— Calcular, seleccionando o método máis axeitado, unha solución particular dunha ecuación diferencial linear non homoxénea con coeficientes constantes.
— Atopar a solución, autonomamente e/ou coa axuda do programa MATLAB, de problemas de valor inicial formulados en termos de ecuacións diferenciais de orde superior. Representar graficamente estas solucións.
— Modelar algúns problemas de enxeñería como problemas de valor inicial con ecuacións diferenciais lineares de segunda orde.
— Resolver algúns problemas de enxeñería modelados como problemas de valor inicial con ecuacións diferenciais lineares de segunda orde. Interpretar as solucións obtidas no contexto do problema.
— Atopar, partindo do coñecemento obtido sobre as ecuacións lineares de segunda orde, a solución xeral dunha ecuación diferencial linear de calquera orde, como tamén a solución de problemas de valor inicial lineares de calquera orde.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Para desenvolver esta unidade didáctica empregarase unha metodoloxía activa, na que será de importancia capital a participación de cada estudante, dirixida á que o alumnado acade unha aprendizaxe significativa.

Esta metodoloxía coordinará a exposición maxistral dos contidos teóricos do tema, por parte do docente, co traballo do alumnado, que será fundamentalmente individual e apoiado e complementado cun *curso virtual*.

Está previsto desenvolver esta unidade didáctica en 10 horas de actividades presenciais, distribuídas como segue:

— Docencia expositiva (6 horas): clases dirixidas ao grupo completo de estudantes. Nelas o profesor presentará (en formato *lección maxistral*, utilizando tanto o clásico encerado como diversos medios audiovisuais) os contidos teóricos e máis conceptuais que se detallan na seguinte sección. Non hai que entender o emprego da lección maxistral coma un método excesivamente ríxido e non realimentado: cada explicación conceptual debe ir acompañada de exemplos que contribúan á súa asimilación por parte do alumnado, como tamén de preguntas e consultas encamiñadas a establecer unha canle de comunicación fluída estudante/profesor, que permitirá establecer que grado de aprendizaxe significativo se acada. Cada clase terá unha duración de 60 minutos, dos que os últimos 10 se dedicarán a reforzar a comunicación estudante/profesor antes mencionada.

— Seminarios (4 horas): clases dirixidas a grupos reducidos de estudantes (aproximadamente vinte por grupo) nas que o persoal docente (en ocasións, calquera estudante ou grupo de estudantes orientados e dirixidos polo persoal docente) realizará unha selección de exercicios propostos previamente nas clases expositivas e/ou recollidos en *boletíns de exercicios*. Sinalaremos que unha ferramenta moi importante será o programa MATLAB, que utilizaremos, sobre todo a modo de *supercalculadora*, como axuda para a realización destes exercicios. O alumnado coñecerá, con antelación suficiente, os exercicios sobre os que se traballará en cada seminario, e deberá preparalos e debatelos co resto dos e das estudantes antes de que se realicen na clase. Terá, ademais, a posibilidade de propoñer que exercicios desexa que se resolvan para, deste xeito, poder analizar con maior profundidade aqueles problemas que resulten de especial dificultade.

Cada estudante aínda pode utilizar outro recurso presencial: as titorías clásicas, que se desenvolven habitualmente nos gabinetes do persoal docente. Nestas titorías —que o alumnado utiliza só cando o considera necesario, polo que non se contabilizan como as anteriores actividades— ofrécese unha atención máis individualizada aos alumnos e alumnas que o solicitan.

Como complemento á docencia presencial, cada estudante terá á súa disposición un curso virtual, implementado na plataforma que ofreza a universidade. Neste curso poderá obter material complementario e de apoio: a propia unidade didáctica, o programa da materia, boletíns de exercicios propostos, probas de autoavaliación da aprendizaxe, enlaces a recursos que se poden atopar na rede...; como tamén ferramentas de comunicación, tanto co persoal docente coma cos seus compañeiros e compañeiras: correo electrónico, foros, sás de *chat*...

OS CONTIDOS BÁSICOS

1. Introdución

Unha ecuación diferencial de orde n é unha ecuación do tipo

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \phi\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right). \tag{1}$$

Por exemplo, para o caso $n = 3$, tomando $\phi(a, b, c, d) = e^b + c^3 + d \ln a$, a ecuación (1) convértese na seguinte ecuación diferencial de orde tres:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = e^y + \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + \frac{d^2 y}{dt^2} \ln t.$$

Un exemplo aplicable, e moi coñecido, de ecuación do tipo (1) é a *segunda lei de Newton* do movemento:

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = F\big(t, y, \frac{dy}{dt}\big), \tag{2}$$

que determina, nun intre t, a posición $y(t)$ dun obxecto de masa m que se move baixo a acción dunha forza F. Entón dy/dt representa a velocidade do obxecto, d^2y/dt^2 é a aceleración, e a forza F total que actúa sobre o obxecto pode depender tanto do tempo como da súa posición e a súa velocidade.

En xeral, non imos dispor dun algoritmo para calcular a solución deste tipo de ecuacións. En realidade, as únicas que poderemos resolver dun xeito xenérico son as que definimos a continuación.

Definición 1. Diremos que unha ecuación diferencial de orde n é unha *ecuación diferencial linear* se adopta a forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)\, y = R(t), \tag{3}$$

onde $R(t)$ e $P_i(t)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, son funcións reais definidas nun certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

No caso de que $R(t)$ sexa a función constante $R \equiv 0$, a ecuación denomínase *homoxénea*:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)\, y = 0, \tag{4}$$

As funcións $P_i(t)$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, denomínanse *coeficientes*.

Observación 1. En principio, o intervalo I pode ser de calquera tipo: pechado, aberto ou semipechado. Tamén se contempla que sexa todo $\mathbb{R}$. Sempre que sexa un intervalo pechado nalgún dos seus extremos, está claro que nese extremo temos que interpretar as derivadas como derivadas laterais.

É frecuente que, ademais da ecuación (3), se impoñan certas *condicións iniciais* sobre a función $y(t)$, condicións do tipo

$$y(t_0) = y_0,\, y'(t_0) = y_1, \ldots,\, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \tag{5}$$

onde $t_0 \in I$ e $y_0,\, y_1, \ldots,\, y_{n-1}$ son números reais.

A ecuación (3), xunto coas condicións iniciais (5), coñécese como *problema de valor inicial*.

Pasamos a presentar un teorema de existencia e unicidade de solución para problemas de valor inicial con ecuacións do tipo (3), acompañado dalgúns corolarios. Non se inclúe a demostración, que pode verse en numerosos libros de introdución ás ecuacións diferenciais, como por exemplo, Simmons (1993).

Teorema 1. *Sexan $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ e $R(t)$ funcións continuas nun certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $y_0,\, y_1, \ldots,\, y_{n-1}$ números reais. Entón a ecuación diferencial linear* (3) *ten unha e só unha solución $y(t)$, definida no intervalo I, que cumpra $y(t_0) = y_0,\, y'(t_0) = y_1, \ldots,\, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.*

Corolario 1. *Sexan $f(t)$ e $g(t)$ dúas solucións da ecuación diferencial linear* (3) *no intervalo I. Se nalgún $t_0 \in I$ se cumpre que $f(t_0) = g(t_0)$, $f'(t_0) = g'(t_0), \ldots,\, f^{(n-1)}(t_0) = g^{(n-1)}(t_0)$, entón $f \equiv g$ en I.*

Corolario 2. *Sexa $f(t)$ unha solución da ecuación diferencial linear homoxénea* (4) *no intervalo I. Se nalgún $t_0 \in I$ se cumpre que $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) = 0, \ldots,\, f^{(n-1)}(t_0) = 0$, entón $f \equiv 0$ en I.*

Observación 2. Hai que resaltar que, igual que nas ecuacións diferenciais de primeira orde precisábase unha condición inicial para que o problema de valor inicial tivese solución única, agora precísanse n condicións iniciais para garantir a existencia e unicidade da solución.

O Teorema 1 proporciona una ferramenta moi poderosa, xa que garante que os problemas de valor inicial teñen unha única solución cando os coeficientes da ecuación linear e a función $R(t)$ son funcións continuas. Porén, aínda no caso de que (3) teña solución, xeralmente non vai estar expresada explicitamente en termos de funcións elementais coñecidas. A miúdo é necesario recorrer a diversos procesos infinitos, como series infinitas (series de potencias...), para atopar solucións a este tipo de ecuacións.

Ao longo da unidade didáctica daremos por suposto, a non ser que se indique o contrario, que se cumpren as hipóteses do Teorema 1, como tamén que as solucións das ecuacións diferenciais lineares están definidas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

2. Ecuacións lineares de segunda orde

A partir de agora, por comodidade de notación, imos traballar coa ecuación diferencial linear de segunda orde, tanto homoxénea como non homoxénea. Como veremos ao final da unidade, calquera consideración que fagamos sobre elas será extensible ás ecuacións diferenciais lineares de orde superior homoxénea ou non homoxénea respectivamente, coa tradución de notación que, en cada caso, sexa pertinente.

Sexan

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = R(t) \tag{6}$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = 0, \tag{7}$$

as ecuacións diferenciais lineares de segunda orde non homoxénea e homoxénea respectivamente.

Supoñamos que coñecemos y_h, a solución xeral de (7), é lóxico pensar que adoitará a forma $y_h = y_h(t, c_1, c_2)$, é dicir, que conterá dúas constantes, xa que para cada problema de valor inicial impóñense dúas condicións.

Supoñamos tamén que coñecemos $y_p(t)$, unha solución particular de (6), e sexa $y(t)$ unha solución calquera de (6). Substituíndo $y - y_p$ na ecuación (7), obtemos que

$$\begin{aligned}(y-y_p)'' + P(t)(y-y_p)' + Q(t)(y-y_p) &= \\ \big(y'' + P(t)y' + \mathrm{Q}(t)y\big) + \big(y_p'' + P(t)y_p' + Q(t)y_p\big) &= \\ R(t) - R(t) &= 0,\end{aligned}$$

é dicir, $y - y_p$ é solución de dita ecuación. Polo tanto, elixindo axeitadamente dúas constantes c_1 e c_2, obtemos que $y(t) - y_p(t) = y_h(t, c_1, c_2)$ ou, o que é o mesmo, que $y(t) = y_h(t, c_1, c_2) + y_p(t)$.

Con estes sinxelos cálculos queda demostrado o seguinte teorema:

Teorema 2. *Se $y_h(t, c_1, c_2)$ é a solución xeral da ecuación (7) e $y_p(t)$ é unha solución calquera da ecuación (6), entón*

$$y_x(t, c_1, c_2) = y_h(t, c_1, c_2) + y_p(t)$$

é a solución xeral da ecuación (6).

Vese claro que é fundamental a determinación da solución xeral da ecuación diferencial linear homoxénea para coñecer a solución xeral da non homoxénea. Ademais existen procedementos xerais para obtermos $y_p(t)$ se xa se coñece y_h.

3. Solución xeral da ecuación homoxénea

O feito básico no estudo da solución xeral da ecuación homoxénea, é o resultado que se expón a continuación.

Teorema 3. *As solucións de* (7) *forman un espazo vectorial real de dimensión dous.*

Demostración. Non é difícil decatarse de que a función constante $y \equiv 0$ é unha solución de (7), chamada *solución trivial*, polo que o conxunto de solucións de (7) non é o conxunto baleiro. Esta solución será o cero do espazo vectorial.

Ademais, dadas súas solucións de (7), $y_1(t)$ e $y_2(t)$, e dous números reais c_1 e c_2, temos que

$$(c_1\, y_1 + c_2\, y_2)'' + P(t)(c_1\, y_1 + c_2\, y_2)' + Q(t)(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) = \\ c_1\big(y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1\big) + c_2\big(y_2'' + P(t)y_2' + Q(t)y_2\big) = 0.$$

Entón, calquer combinación linear de solucións de (7) tamén é unha solución e, polo tanto, as solucións de (7) son un espazo vectorial real.

Veremos agora que existen bases formadas por dous elementos. Dado calquera $t_0 \in I$, o Teorema 1 garante a existencia da única solución de (7) que verifica as condicións iniciais $y(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = 0$, que denominaremos y_1, como tamén a existencia da única solución de (7) que verifica as condicións iniciais $y(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = 1$, que denominaremos y_2.

Comprobemos que o conxunto $\{y_1, y_2\}$ é unha base para o conxunto de solucións de (7). Para isto, verificaremos que y_1 e y_2 son linearmente independentes, e que xeran todo o o conxunto de solucións, é dicir, que calquera solución de (7) pódese escribir como combinación linear de y_1 e y_2.

Para probar a independencia linear de y_1 e y_2, supoñamos que son linearmente dependentes, é dicir, que existe un número real k tal que $y_1(t) = ky_2(t)$ para todo $t \in I$. Entón, necesariamente $1 = y_1(t_0) = ky_2(t_0) = 0$, que é imposible.

Vexamos agora que calquer solución de (7) pódese escribir como combinación linear de y_1 e y_2. Dada unha solución $y(t)$ de (7), entón a función $g(t) = y(t_0)y_1(t) + y'(t_0)y_2(t)$ tamén é solución de (7) por ser unha combinación linear das solucións y_1 e y_2. Ademais, é claro que

$$g(t_0) = y(t_0)y_1(t_0) + y'(t_0)y_2(t_0) = y(t_0),$$

e que

$$g'(t_0) = y(t_0)y_1'(t_0) + y'(t_0)y_2'(t_0) = y'(t_0).$$

A partir de aquí, como consecuencia directa do Corolario 1, resulta que $y(t) = y(t_0)y_1(t) + y'(t_0)y_2(t)$ en todo I, ou sexa, que $y(t)$ é combinación linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. $\square$

O problema de coñecer a solución xeral da ecuación homoxénea (7) redúcese, como consecuencia do Teorema 3, a calcular dúas solucións linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de dita ecuación. Non imos dispor dun método xeral que dea solución a este problema, pero poderémolo conseguir nalgún caso particular.

3.1. Uso dunha solución coñecida para atopar outra

En ocasións é doado atopar unha solución $y_1(t)$ da ecuación (7), ben sexa por simple inspección ou dalgún outro xeito. O método que imos desenvolver vainos servir para atopar outra solución $y_2(t)$ de (7) linearmente independente con $y_1(t)$.

Supoñamos que coñecemos unha solución $y_1(t)$ da ecuación (7), sabemos que $cy_1(t)$, para calquera $c \in \mathbb{R}$, tamén é solución de (7), aínda que —desafortunadamente— é linearmente dependente con $y_1(t)$. O método vai consistir en substituír a constante c por unha función non constante $w(t)$, e tratar de determinar dita función $w(t)$ para que $y_2(t) = w(t)y_1(t)$ sexa solución de (7).

Hai que resaltar que nese caso $y_1(t)/y_2(t) = w(t)$, función non constante de t, co que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ serán linearmente independentes.

Sexa $y_2(t) = w(t)y_1(t)$, entón

$$y_2' = w'y_1 + wy_1' \quad \text{e} \quad y_2'' = w''y_1 + 2w'y_1' + wy_1''. \tag{8}$$

Para que $y_2(t)$ sexa solución de (7), necesariamente tense que cumprir

$$y_2'' + P(t)y_2' + Q(t)y_2 = 0,$$

polo que, sen máis que substituír $y_2 = wy_1$ e as fórmulas (8) nesta expresión, chégase a

$$w''y_1 + 2w'y_1' + wy_1'' + P(t)(w'y_1 + wy_1') + Q(t)wy_1 = 0,$$

de onde, reordenando os sumandos, pasamos a

$$w\big(y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1\big) + w''y_1 + w'(2y_1' + P(t)y_1) = 0,$$

o que, por ser $y_1(t)$ é solución de (7), convértese en

$$w''y_1 + w'(2y_1' + P(t)y_1) = 0,$$

ou sexa,

$$\frac{w''(t)}{w'(t)} = -2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} - P(t).$$

Integrando esta última expresión respecto de t obtemos

$$\ln|w'(t)| = -2\ln|y_1(t)| - \int P(t)dt,$$

de aí que[3]

$$w'(t) = \frac{1}{(y_1(t))^2}e^{-\int P(t)dt},$$

[3]En realidade temos infinitas opcións para a expresión de $w'(t)$, iso si, todas iguais á expresión que escollemos aquí multiplicada por un número real. Tamén ocorre o mesmo coa expresión de $w(t)$ unhas liñas despois.

e, integrando de novo respecto de t, finalmente atopamos que

$$w(t) = \int \frac{1}{(y_1(t))^2} e^{-\int P(t)dt} dt.$$

En resumo, se $y_1(t)$ é unha solución da ecuación (7), entón

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{(y_1(t))^2} e^{-\int P(t)dt} dt$$

é unha solución da ecuación (7) linearmente independente con $y_1(t)$.

Exemplo 1. Atopar a solución xeral da ecuación

$$(1+t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Se reescribimos a ecuación como

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2t}{1+t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{1+t^2}y = 0,$$

é doado decatarse de que $y_1(t) = t$ é unha solución desta ecuación. Aplicando o método anterior

$$w(t) = \int \frac{1}{t^2} e^{-\int \frac{-2t}{1+t^2}dt} dt = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{-1}{t} + t.$$

Entón

$$y_2(t) = w(t)y_1(t) = t(\frac{-1}{t} + t) = -1 + t^2$$

é unha nova solución da ecuación diferencial. Ademais, é unha solución linearmente independente con $y_1(t)$. Polo tanto, a solución xeral desta ecuación diferencial será

$$y_x(t) = c_1 t + c_2(t^2 - 1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3.2. A ecuación homoxénea con coeficientes constantes

Imos ocuparnos agora de calcular a solución xeral da ecuación diferencial homoxénea (7) no caso de que as funcións $P(t)$ e $Q(t)$ sexan funcións constantes, digamos por exemplo P e Q:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{dy}{dt} + Qy = 0. \tag{9}$$

Partiremos da base de que a función exponencial $y(t) = e^{at}$ verifica que

$$y'(t) = ae^{at} = ay(t) \quad \text{e} \quad y''(t) = a^2e^{at} = a^2y(t),$$

ou sexa, tódalas súas derivadas son *múltiplos* da propia función. Este feito induce a pensar que $y(t) = e^{at}$ pode ser solución da ecuación (9) se eliximos axeitadamente a constante a.

Se substituímos a función $y(t) = e^{at}$ na ecuación (9), vemos que

$$a^2e^{at} + Pae^{at} + Qe^{at} = (a^2 + Pa + Q)e^{at} = 0,$$

debido ao cal, e^{at} será solución de (9) se e só se a é solución da ecuación auxiliar

$$x^2 + Px + Q = 0,$$

que denominaremos *ecuación característica*.

Preséntanse tres casos distintos, en función do valor do termo $P^2 - 4Q$ e, consecuentemente, das raíces da ecuación característica,

$$a_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}.$$

- $P^2 - 4Q > 0$. Entón a ecuación característica ten dúas raíces reais distintas $a_1 \neq a_2$. Neste caso

  $$y_1(t) = e^{a_1t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{a_2t}$$

  son solucións. Ademais, como o cociente $y_1(t)/y_2(t) = e^{(a_1-a_2)t}$ non é unha función constante, esas solucións son linearmente independentes e a solución xeral de (9) é

  $$y_x(t) = c_1e^{a_1t} + c_2e^{a_2t}.$$

- $P^2 - 4Q < 0$. Agora a ecuación característica ten dúas raíces complexas conxugadas

  $$a_1 = \frac{-P}{2} + \frac{\sqrt{4Q - P^2}}{2} = c + di \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{-P}{2} - \frac{\sqrt{4Q - P^2}}{2} = c - di.$$

  Entón[4]

  $$y_s(t) = e^{(c+di)t} = e^{ct}e^{dit} = e^{ct}(\cos dt + i \operatorname{sen} dt)$$

  e

  $$y_s(t)e^{(c-di)t} = e^{ct}e^{-dit} = e^{ct}(\cos dt - i \operatorname{sen} dt)$$

  cumpren a ecuación (9), mais son funcións con valores complexos, e o noso concepto de solución dunha ecuación diferencial refírese unicamente a funcións reais de variable real. Atoparemos solucións con valores reais como combinacións lineares de y_r e y_s:

  $$y_1(t) = \frac{y_s}{2} + \frac{y_r}{2} = e^{ct}\cos dt \quad \text{e} \quad y_2(t) = \frac{-iy_s}{2} - \frac{iy_r}{2} = e^{ct}\operatorname{sen} dt.$$

  Debido a que o cociente $y_2(t)/y_1(t) = \tan dt$ non é unha función constante, as solucións y_1 e y_2 son linearmente independentes e a solución xeral será

  $$y_x(t) = c_1e^{ct}\cos dt + c_2e^{ct}\operatorname{sen} dt = e^{ct}(c_1\cos dt + c_2\operatorname{sen} dt).$$

[4]Lembremos a *fórmula de Euler*: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

- $P^2 - 4Q = 0$. A ecuación característica ten unha raíz real,

$$a_1 = -\frac{P}{2},$$

de multiplicidade dous, polo que

$$y_1(t) = e^{\frac{-Pt}{2}}$$

é unha solución de (9). Como a ecuación característica non ten máis raíces diferentes, procedendo deste xeito non seremos capaces de atopar solucións da ecuación diferencial que sexan linearmente independentes con y_1. Para arranxar este problema, utilizaremos o método explicado na Subsección 3.1 para calcular $y_2(t) = w(t)y_1(t)$, onde

$$w(t) = \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int P dt} dt = \int \frac{1}{(e^{-\frac{Pt}{2}})^2} e^{-Pt} dt = \int \frac{e^{-Pt}}{e^{-Pt}} dt = t.$$

Entón $y_2(t) = w(t)y_1(t) = te^{-Pt/2}$ é a nova solución, linearmente independente con $y_1(t)$, e a solución xeral de (9) será

$$y_x(t) = c_1 e^{\frac{-Pt}{2}} + c_2 t e^{\frac{-Pt}{2}} = (c_1 + c_2 t) e^{\frac{-Pt}{2}}.$$

Exemplo 2. Atopar a solución xeral de:

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0.$

   Ecuación característica: $x^2 + x - 6 = 0$. Raíces: $a_1 = -3$ e $a_2 = 2$.
   Solución xeral:
   $$y_x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0.$

   Ecuación característica: $x^2 + 2x + 1 = 0$. Raíces: $a_1 = -1$.
   Solución xeral:
   $$y_x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0.$

   Ecuación característica: $x^2 + 1 = 0$. Raíces: $a_1 = i$ e $a_2 = -i$.
   Solución xeral:
   $$y_x(t) = e^{0t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

4. A ecuación non homoxénea

Consideremos de novo a ecuación non homoxénea (6)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = R(t).$$

Como explicabamos na Sección 1, se coñecemos a solución xeral de (7), só necesitamos calcular unha solución particular de (6) para coñecer a solución xeral de (6).

Nesta sección imos explicar dous métodos para calcular esa solución particular da ecuación non homoxénea.

4.1. Método de variación de parámetros

Este método baséase na utilización do coñecemento que se ten da solución xeral da ecuación homoxénea (7) para intentar atopar unha solución particular $y_p(t)$ da non homoxénea (6).

Partindo de que $c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ é a solución xeral da ecuación homoxénea (7), imos supoñer que a solución $y_p(t)$ da ecuación diferencial (6) adoita a forma[5] $y_p(t) = v_1(t)y_1(t) + v_2(t)y_2(t)$, e intentaremos calcular $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

Aínda que pareza que trocamos o problema de atopar unha función $y_p(t)$ polo problema máis complexo de atopar dúas funcións $v_1(t)$ e $v_2(t)$, temos certa liberdade para impoñer algunha condición sobre estas funcións que nos simplifique os cálculos, xa que o feito de que $y_p(t)$ sexa solución de (6) non é excesivamente limitativo.

Cando calculamos

$$y_p'(t) = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2' = (v_1y_1' + v_2y_2') + (v_1'y_1 + v_2'y_2),$$

observamos que, se

$$v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t) = 0 \tag{10}$$

para todo t, entón $y_p''(t)$ non conterá termos con derivadas de segunda orde de $v_1(t)$ e $v_2(t)$. Imos impoñer, polo tanto, a condición (10) ás funcións $v_1(t)$ e $v_2(t)$, e así temos que

$$y_p''(t) = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''.$$

[5] De aquí provén o nome deste método, *varíanse* os parámetros c_1 e c_2.

Outra condición obterémola ao supoñer que $y_p(t)$ é solución da ecuación (6). Por unha parte obtemos que

$$\begin{aligned} y_p'' + P(t)y_p{}' + Q(t)y_p =& v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'' \\ & + P(v_1y_1' + v_2y_2') + Q(v_1y_1 + v_2y_2) \\ =& v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) \\ & + v_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) \\ =& v_1'y_1' + v_2'y_2', \end{aligned}$$

xa que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son solucións de (7).

Entón, para que $y_p(t)$ sexa solución de (6) necesariamente ten que cumprir

$$v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t) = R(t). \tag{11}$$

Unindo as condicións(10) e (11)) propomos, para todo $t \in I$, un sistema linear de dúas ecuacións e con dúas incógnitas, $v_1'(t)$ e $v_2'(t)$:

$$\begin{aligned} v_1'(t)y_1(t) + v_2'(t)y_2(t) = 0, \\ v_1'(t)y_1'(t) + v_2'(t)y_2'(t) = R(t). \end{aligned} \tag{12}$$

A partir do determinante da matriz do sistema (12) imos definir unha función.

Definición 2. Dadas dúas funcións reais y_1 e y_2 definidas nun intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denominaremos *wronskiano* de y_1 e y_2, e denotarémolo por $W(y_1, y_2)$, á función real definida no intervalo I por

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t). \tag{13}$$

O seguinte resultado vainos servir para garantir que o sistema (12) ten solución.

Lema 1. *Sexan $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dúas solucións de* (7). *Entón, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son linearmente independentes, o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é distinto de cero en todo o intervalo I.*

Demostración. Faremos esta demostración por *paso ao contrarrecíproco*, é dicir, suporemos que o resultado non se cumpre e chegaremos a unha contradición.

Supoñamos, pois, que existe $t_0 \in I$ para o que

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Entón a primeira e a segunda columnas deste determinante teñen que ser vectores linearmente dependentes. Noutras palabras, ten que existir un número real k tal que

$$y_1(t_0) = ky_2(t_0) \quad \text{e} \quad y_1'(t_0) = ky_2'(t_0). \tag{14}$$

Ademais, resulta que $ky_2(t)$ é solución de (7), porque o é $y_2(t)$. Daquela $y_1(t)$ e $ky_2(t)$ son ámbalas dúas solucións de (7), e as condicións (14) revelan que resolven o mesmo problema de valor inicial, polo que o Corolario 1 garante que son a mesma función, ou sexa, que $y_1(t) = ky_2(t)$ no intervalo I.

Pero entón $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son linearmente dependentes. $\square$

As funcións $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que aparecen no sistema de ecuacións (12) son solucións de (7) linearmente independentes, de modo que o Lema 1 garante que o determinante da matriz do sistema non se anula en todo o intervalo I e, por conseguinte, que o sistema (12) é compatible determinado para todo $t \in I$.

Resolvendo o sistema, por exemplo polo método de Cramer, calculamos expresións para $v_1'(t)$ e $v_2'(t)$:

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ R(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{-y_2(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)},$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & R(t) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(t)} = \frac{y_1(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

Para obtermos as fórmulas para $v_1(t)$ e $v_2(t)$ só temos que integrar estas expresións respecto de t:

$$v_1(t) = \int \frac{-y_2(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt, \tag{15}$$

$$v_2(t) = \int \frac{y_1(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt. \tag{16}$$

En resumo, unha solución particular da ecuación non homoxénea (6) é

$$y_p(t) = y_1(t)\int \frac{-y_2(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)R(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt. \tag{17}$$

Este método de variación de parámetros resolve o problema de calcular unha solución particular da ecuación linear de segunda orde non homoxénea para o caso xeral, xa que non impón ningunha condición[6] sobre as funcións $P(t)$, $Q(t)$ e $R(t)$ fóra das que xa teñen que verificar estas para que exista solución da ecuación diferencial.

Porén temos que sinalar que as primitivas que aparecen nas expresións (15) e (16) resultan, en moitos casos, moi complexas de calcular. Incluso pode ocorrer que non sexan expresables en termos de combinacións de funcións elementais coñecidas, co que non poderíamos atopar unha fórmula manexable para v_1 e v_2 e, polo tanto, para $y_p(t)$.

[6] Fixémonos en que o método é válido aínda que as funcións $P(t)$ e $Q(t)$ non sexan constantes.

4.2. Método dos coeficientes indeterminados

O método que imos expoñer é moito menos xeral que o anterior, xa que só o poderemos aplicar cando a ecuación diferencial sexa da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{dy}{dt} + Qy = R(t),$$

onde P e Q son funcións constantes, e a función $R(t)$ sexa unha función exponencial, un seno, un coseno, un polinomio na variable t, ou ben unha combinación de produtos de funcións dos tipos anteriores. Non obstante, nestes casos adoita a ser moito máis sinxelo calcular a solución particular da ecuación diferencial con este método que non co método anterior de variación de parámetros.

Un exemplo sinxelo sería

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{dy}{dt} + Qy = e^{at}. \qquad (18)$$

√â lóxico pensar que que a solución $y(t)$ da ecuación (18) sexa da forma Ae^{at}, xa que ao derivar a función exponencial sempre se obtén unha nova exponencial, só varía o coeficiente que multiplica ao termo e^{at}.

Imos supoñer, polo tanto, que a solución é da forma $y_p(t) = Ae^{at}$, co que $y'_p(t) = Aae^{at}$, $y''_p(t) = Aa^2e^{at}$ e $y''_p + Py'_p + Qy_p = A(a^2 + aP + Q)e^{at}$.

Xa que logo, para que y_p sexa solución de (18), necesariamente ten que cumprirse que $y''_p + Py'_p + Qy_p = e^{at}$, é dicir, y_p é solución da ecuación diferencial (18) se e só se

$$A = \frac{1}{a^2 + aP + Q}.$$

Obtivemos unha solución particular $y_p(t)$ da ecuación diferencial determinando o coeficiente A, sempre que a non sexa raíz da ecuación característica $x^2 + Px + Q = 0$.

Por analoxía coa resolución da ecuación homoxénea con coeficientes constantes, se a é raíz da ecuación característica, imos probar cunha solución $y_p(t) = Ate^{at}$, así pois $y'_p(t) = Ae^{at} + Aate^{at}$, $y''_p(t) = Aa^2te^{at} + 2Aae^{at}$ e

$$\begin{aligned} y''_p + Py'_p + Qy_p &= (Aa^2te^{at} + 2Aae^{at}) + P(Ae^{at} + Aate^{at}) + QAte^{at} \\ &= A(a^2 + aP + Q)te^{at} + A(2a + P)e^{at} \\ &= A(2a + P)e^{at} \end{aligned}$$

Se $y_p(t)$ é solución da ecuación, entón $y''_p + Py'_p + Qy_p = e^{at}$, polo tanto, $y_p(t)$ é solución se e só se $A = 1/(2a + P)$.

Temos resolto o problema sempre que a non sexa raíz da ecuación característica ($a^2 + aP + Q \neq 0$), ou se a é raíz de multiplicidade un da ecuación característica ($a^2 + aP + Q = 0$ e $2a + P \neq 0$).

No caso de a sexa unha raíz da ecuación característica de multiplicidade dous, próbase cunha solución $y_p(t)$=At^2e^{at} e, procedendo de xeito análogo aos casos anteriores, determínase que $y_p(t)$ é solución se e só se $A = 1/2$.

Poderiamos ir dando solución ós casos en que a función $R(t)$ sexa un seno, un coseno ou un polinomio na variable t. Non obstante, imos presentar un algoritmo máis xenérico.

Definición 3. As funcións

$$1.- \ t^n \quad n \in \mathbb{N}. \qquad 3.- \ \operatorname{sen}(bt+c) \quad b \neq 0.$$

$$2.- \ e^{at} \quad a \neq 0. \qquad 4.- \ \cos(bt+c) \quad b \neq 0.$$

e os produtos de funcións de calquera dos catro tipos anteriores denomínanse funcións tipo *coeficientes indeterminados* (CI).

O método dos coeficientes indeterminados pódese aplicar cando $R(t)$ é combinación linear de funcións tipo CI.

Definición 4. Se f é unha función tipo CI, o *conxunto fundamental de* f, S_f, é o conxunto formado polo mínimo número de funcións linearmente independentes tales que f e as súas derivadas pódense escribir como combinación linear delas.

Exemplo 3. Calcular os conxuntos fundamentais das seguintes funcións:

1. $f(t) = t^3$. Temos que $f'(t) = 3t^2$, $f''(t) = 6t$, $f'''(t) = 6$ e $f^{(n)}(t) = 0$ para todo $n \geq 4$. Polo tanto

$$S_f = \{t^3, \, t^2, \, t, \, 1\}.$$

2. $g(t) = \operatorname{sen} 2t$. Calculemos algunhas derivadas:

$$g'(t) = 2\cos 2t, \qquad g''(t) = -4\operatorname{sen} 2t,$$
$$g'''(t) = -8\cos 2t, \qquad g^{(4)}(t) = 16\operatorname{sen} 2t.$$

Continuando coa derivación chegamos a que, dependendo do valor n,

$$g^{(n)}(t) = \pm 2^n \cos 2t \quad \text{ou} \quad g^{(n)}(t) = \pm 2^n \operatorname{sen} 2t.$$

Entón, o conxunto fundamental será

$$S_g = \{\operatorname{sen} 2t, \, \cos 2t\}.$$

3. $h(t) = t^2 \operatorname{sen} t$. Procedendo como nos exemplos anteriores, temos que

$$h'(t) = 2t\operatorname{sen} t + t^2 \cos t, \qquad h''(t) = 2\operatorname{sen} t + 4t\cos t - t^2 \operatorname{sen} t,$$
$$h'''(t) = 6\cos t - 6t\operatorname{sen} t - t^2\cos t, \qquad h^{(4)}(t) = -12\operatorname{sen} t - 8t\cos t + t^2 \operatorname{sen} t,$$

de onde se deduce

$$h^{(n)}(t) = \pm\big((n(n-1)\operatorname{sen} t - 2nt\cos t - t^2\operatorname{sen} t\big)$$

ou

$$h^{(n)}(t) = \pm\big((n(n-1)\cos t - 2nt\operatorname{sen} t - t^2\cos t\big).$$

Xa que logo, o conxunto fundamental será

$$S_h = \{\operatorname{sen} t, \, \cos t, \, t\operatorname{sen} t, \, t\cos t, \, t^2\operatorname{sen} t, \, t^2\cos t\}.$$

Supoñamos, pois, que

$$R(t) = \lambda_1 u_1(t) + \ldots + \lambda_k u_k(t)$$

é unha función tipo CI, o método dos coeficientes indeterminados consta dos seguintes pasos:

1. Calcúlanse os conxuntos $S_{u_1}, \ldots, S_{u_k}$.
2. Se para algún par de índices $i \neq j$ acontece que $S_{u_i} \subset S_{u_j}$, entón elimínase o conxunto S_{u_i}.
3. Se algún dos conxuntos S_{u_i} contén funcións que sexan solución da correspondente ecuación homoxénea, multiplícanse tódalas funcións dese conxunto pola menor potencia de t que garanta que ningunha das novas funcións sexan solución da antedita ecuación homoxénea.
4. Fórmase unha combinación linear de tódalas funcións dos conxuntos que resultan de aplicar os pasos anteriores. Esta combinación será a que conxecturaremos como posible solución y_p da ecuación diferencial.
5. Determínanse os coeficientes da anterior combinación linear, impoñéndolle a y_p que verifique a ecuación diferencial.

Exemplo 4. Atopar a solución xeral da seguinte ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2t^2 + 2te^t + e^t + 4e^{3t}.$$

O primeiro que faremos será calcular a solución xeral da ecuación homoxénea, para o que previamente calcúlanse as raíces da ecuación característica:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

que son $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$. A solución xeral da ecuación homoxénea é, polo tanto,

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t.$$

O termo non homoxéneo

$$R(t) = 2t^2 + 2te^t + e^t + 4e^{3t}$$

é combinación linear de $u_1 = t^2$, $u_2 = e^t$, $u_3 = te^t$ e $u_4 = e^{3t}$, funcións tipo CI. Estamos, polo tanto, en condicións de aplicar o método dos coeficientes indeterminados.

1. $S_{u_1} = \{t^2, t, 1\}$, $S_{u_2} = \{e^t\}$, $S_{u_3} = \{te^t, e^t\}$ e $S_{u_4} = \{e^{3t}\}$.
2. Elimínase S_{u_2}, xa que $S_{u_2} \subset S_{u_3}$.
3. S_{u_3} contén a función e^t, que é solución da ecuación homoxénea, polo que multiplícanse tódalas funcións de S_{u_3} por t. Así, S_{u_3} pasa a ser

$$S_{u_3} = \{t^2 e^t, te^t\},$$

que xa non contén ningunha solución da ecuación homoxénea.

4. Como resultado dos pasos anteriores, só hai que ter en conta os conxuntos

$$S_{u_1} = \{t^2,\, t,\, 1\}, \quad S_{u_3} = \{t^2e^t,\, te^t\} \quad \text{e} \quad S_{u_4} = \{e^{3t}\},$$

de modo que constrúo a función

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C + Dt^2e^t + Ete^t + Fe^{3t}.$$

Daquela, temos que

$$\begin{aligned} y_p' &= 2At + B + Dt^2e^t + (2D+E)te^t + Ee^t + 3Fe^{3t}, \\ y_p'' &= 2A + Dt^2e^t + (4D+E)te^t + 2(D+E)e^t + 9Fe^{3t}. \end{aligned}$$

5. Para rematar, substituíndo $y_p(t)$ na ecuación diferencial chegamos a que

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= 2At^2 + (-6A+2B)t + (2A-3B+2C) \\ &\quad - 2Dte^t + (2D-E)e^t + 2Fe^{3t} \\ &= 2t^2 + 2te^t + e^t + 4e^{3t}, \end{aligned}$$

logo $y_p(t)$ será solución da ecuación diferencial se e só se A, B, C, D, E e F son as raíces do seguinte sistema linear de ecuacións alxébricas:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2A & & & & & & & & & & & = & 2, \\ -6A & + & 2B & & & & & & & & & = & 0, \\ 2A & - & 3B & + & 2C & & & & & & & = & 0, \\ & & & & & - & 2D & & & & & = & 2, \\ & & & & & & 2D & - & E & & & = & 1, \\ & & & & & & & & & & 2F & = & 4. \end{array}$$

Por conseguinte,

$$y_p(t) = t^2 + 3t + \frac{7}{2} - t^2e^t - 3te^t + 2e^{3t},$$

e a solución xeral buscada é:

$$y_x(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t + t^2 + 3t + \frac{7}{2} - t^2e^t - 3te^t + 2e^{3t}.$$

5. Aplicacións a diversos modelos na enxeñería

Pasaremos a presentar —e tratar de resolver— agora algúns modelos matemáticos, propostos en termos de ecuacións diferenciais ordinarias de segunda orde, que teñen diversas aplicacións no ámbito da enxeñería.

Varios deles teñen como obxectivo calcular a ecuación do movemento dun obxecto, é dicir, unha función $x(t)$ que determine a súa posición —a distancia percorrida por el—, respecto dunha posición orixinal, en cada intre t de tempo. Algúns dos modelos máis utilizados son os coñecidos como *sistemas masa-resorte-amortecedor*.

5.1. Sistemas masa-resorte-amortecedor

Consideremos un obxecto de masa m suxeito ao extremo dun resorte elástico de lonxitude l que se atopa pendurado dun soporte ríxido horizontal (ver a Figura 1). O comportamento destes resortes axústase á *lei de Hooke*: se a lonxitude natural do resorte é modificada nunha cantidade Δl, entón o resorte exerce unha forza de restitución de magnitude $k\Delta l$, onde a constante $k > 0$ depende tanto do material co que está construído o resorte, como tamén do deseño deste. Esta forza actúa de tal xeito que o resorte recupere sempre a súa lonxitude natural.

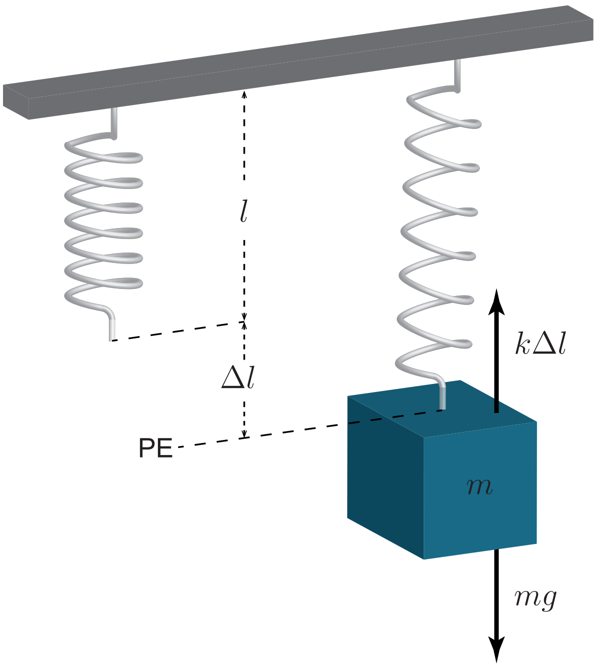


Figura 1: Sistema masa-resorte. Na posición de equilibrio (PE) a forza que exerce o resorte sobre a masa equilíbrase co peso do corpo

A posición que ocupa a masa cando sistema está en repouso coñécese como *posición de equilibrio* (PE), e será o punto que elixamos coma orixe ($x(t) = 0$) para medir a distancia $x(t)$ percorrida polo obxecto nun intre de tempo t. Nesta posición ocorre que o peso do corpo equilíbrase coa forza que exerce o resorte debido a que está alongado, é dicir, que

$$mg = k\Delta l. \tag{19}$$

Ademais, consideraremos que $x(t) < 0$ sempre que o obxecto estea por riba da posición de equilibrio, mentres que $x(t) > 0$ no caso de que estea por baixo dela.

Parece claro que o peso do obxecto e a forza recuperadora do resorte son forzas que sempre temos que ter en conta nun modelo deste tipo, mais hai outro tipo de forzas (a forza de rozamento co medio onde se atopa o obxecto, forzas debidas a movementos residuais no soporte, forzas debidas a campos magnéticos...) que poderemos ter en conta ou obviar a súa existencia, obtendo diversos tipos de modelos máis ou menos complexos.

Así mesmo, sinalaremos que imos utilizar o Sistema Internacional de Unidades, polo que as forzas mediranse en newtons (N), as distancias en metros (m), e o tempo en segundos (s). En tal caso, a unidade da constante k será N/m, e a masa medirase en kilogramos (kg), que corresponde a N·s^2/m.

5.1.1. Vibracións libres

Imos supoñer, inicialmente, que en calquera intre t no sistema só actúan dúas forzas[7]: o peso do obxecto, cuxo valor é mg, e a forza do resorte. A lei de Hooke dinos que esta segunda forza é a constante k multiplicada polo alongamento do resorte, que vale $x(t) + \Delta l$.

Agora ben, aplicando a segunda lei de Newton do movemento obtemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x(t) + \Delta l), \tag{20}$$

co que, tendo en conta (19), chegamos finalmente a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0, \quad \text{ou ben,} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x(t) = 0, \tag{21}$$

onde $\alpha = \sqrt{k/m}$.

Xa que logo, calquera solución de (21) será da forma

$$x(t) = c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t, \tag{22}$$

onde o valor dos parámetros c_1 e c_2 dependerá das condicións iniciais co que se propoña o correspondente problema de valor inicial. De feito, o valor de c_1 virá determinado por $x(0)$, a posición do obxecto no intre inicial, mentres que o valor de c_2 será a velocidade do obxecto nese intre, $x'(0)$.

Por exemplo, se no intre inicial desprazamos o obxecto x_0 metros por baixo da PE, e o soltamos sen velocidade inicial, as condicións iniciais serán $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, polo que (22) neste caso convértese en

$$x(t) = x_0 \cos \alpha t. \tag{23}$$

Esta función é *periódica*[8], e o seu período vale $T = 2\pi/\alpha$. Polo tanto, o obxecto repetirá a súa posición cada $2\pi/\alpha$ segundos, aínda máis, tamén repetirá a súa velocidade, e a súa aceleración.

[7]Vaia por diante que esta é unha situación que non se axusta completamente á realidade, na que sempre aparece, por pequena que poida ser, unha forza de rozamento do obxecto co medio que o rodea.

[8]Unha función $f(t)$ dise *periódica* se existe un valor T, denominado *período*, tal que se cumpre que $f(t) = f(t+T)$ para todo t. √â dicir, a función ciclicamente repite o seu valor, e o tempo que tarda en repetilo é o período.

Por outra parte, o valor absoluto da función coseno é sempre máis pequeno ou igual que 1, así que o obxecto nunca estará máis lonxe de x_0 metros da PE, iso si: pode estar x_0 metros por baixo da PE (por exemplo, $x(0) = x(2\pi/\alpha) = x_0$), ou x_0 metros por riba ($x(\pi/\alpha) = -x_0$).

Hai que resaltar que a solución xeral (22) sempre se pode expresar dunha forma similar[9] a (23):

$$c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t = A \cos (\alpha t - \varphi), \tag{24}$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\varphi = \arctan (c_2/c_1)$.

Polo tanto, sempre que despracemos o obxecto da PE (e/ou modifiquemos a súa velocidade) este comezará a se mover, e a ecuación do seu movemento virá dada pola expresión (24), cuxa gráfica amósase na Figura 2.

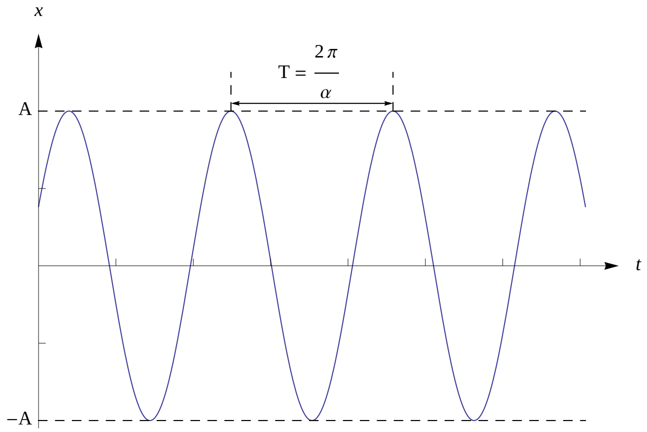


Figura 2: Vibracións libres. Gráfica da función $x(t) = A \cos (\alpha t - \varphi)$

Así pois, o movemento do obxecto será un movemento periódico ou cíclico coñecido como *movemento harmónico simple*:

- A cantidade A coñécese como *amplitude* do movemento, e marca o máximo desprazamento do obxecto respecto da PE, tanto por arriba como por abaixo. Canto máis despracemos inicialmente o obxecto da PE, máis grande será a amplitude do movemento resultante. Tamén se incrementará segundo creza a velocidade inicial do obxecto.
- O *período natural* do movemento é

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{25}$$

e o seu valor determina canto tarda o obxecto en completar un ciclo de movemento. √â claro que canta máis masa ten o obxecto, máis

[9]Só temos que aplicar a fórmula trigonométrica $\cos (\beta - \delta) = \cos \beta \cos \delta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \delta$ para comprobar a igualdade (24).

tardará en completar un período de movemento. Asemade, canto máis grande sexa a constante k do resorte —e con ela a forza restauradora do mesmo—, o período será máis pequeno.

- A *frecuencia natural* do sistema é a inversa do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{26}$$

e mide cantos ciclos ou períodos de movemento se producen por unidade de tempo. Canto maior sexa a frecuencia, o obxecto pasará máis veces pola PE no mesmo intervalo de tempo. A frecuencia diminuirá a medida que creza a masa do obxecto, e crecerá segundo creza a constante k do resorte —xusto ao revés que o período—.

- φ denomínase *ángulo de fase*. Dependendo do seu valor, o máximo desprazamento respecto da PE producirase no intre inicial ou máis tarde. O ángulo de fase depende unicamente da posición e a velocidade iniciais do obxecto.

5.1.2. Vibracións libres amortecidas

Suporemos agora que, ademais do peso do obxecto e a forza do resorte, actúa sobre o sistema unha *forza amortecedora* debida ao rozamento do obxecto co medio no que se move (o aire, auga ou outro líquido, etc.). Resultados experimentais dinnos que esta forza amortecedora é proporcional á velocidade do obxecto (tomaremos a constante de proporcionalidade cun valor $c > 0$, e unidade N·s/m), e de sentido contrario ao movemento deste, ou sexa, que terá un valor de $-c(dx/dt)$.

Así pois, neste caso, aplicar a segunda lei de Newton condúcenos a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x(t) + \Delta l) - c\frac{dx}{dt}, \tag{27}$$

e de aí á ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx(t) = 0 \quad \text{ou}^{10} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = 0, \tag{28}$$

cuxa ecuación característica asociada ten raíces

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Debido a isto, para calcular a solución da ecuación (28) teremos que considerar tres casos, dependendo do valor de $c^2 - 4km$.

[10] Nunca se considera, por motivos evidentes, o caso no que m vale cero.

5.1.2.1. Vibracións sobreamortecidas

Consideraremos, en primeiro lugar, que $c^2 - 4km > 0$, de xeito que a ecuación característica ten dúas raíces reais $r_2 < r_1 < 0$ e, por tanto, toda solución da ecuación (28) será da forma

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{29}$$

Como r_1 e r_2 son ámbalas dúas negativas, independentemente do valor de c_1 e c_2, non é difícil ver que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \right) = 0,$$

o que significa que, sempre que pase suficiente tempo, o obxecto —como a intuición parece indicarnos— volverá sempre á PE.

A ecuación (29) describe, pois, o movemento dun obxecto que acada unha posición diferente da PE, e regresa lentamente a ela. Dependendo do desprazamento e velocidade iniciais do obxecto, é posible que este pase unha vez pola PE, pero só unha —ou ningunha—. Podemos ver exemplos das dúas situacións nas figuras 3 e 4.

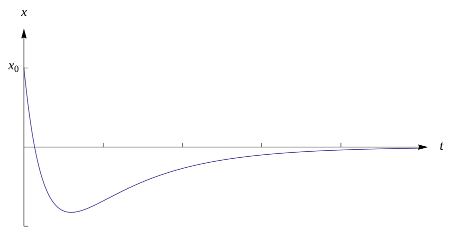


Figura 3: Vibracións sobreamortecidas. O obxecto pasa pola PE

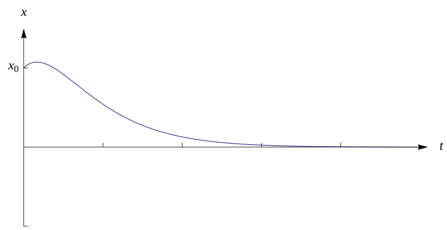


Figura 4: Vibracións sobreamortecidas. O obxecto non pasa pola PE

5.1.2.2. Vibracións criticamente amortecidas

Estudaremos agora o caso $c^2 - 4km = 0$, no que a ecuación característica ten unha raíz real de multiplicidade dous $r = -c/2m < 0$, polo que toda solución da ecuación (28) adoitará a forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}. \tag{30}$$

Como queira que r é negativo, claramente

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} (c_1 + c_2 t) e^{rt} = 0,$$

calquera que sexa o valor de c_1 e c_2.

Este caso é case igual ao anterior, polo que a ecuación do movemento describe a un obxecto que acada unha posición distinta da PE e lentamente diminúe a súa velocidade para retornar a ela.

5.1.2.3. Vibracións subamortecidas

Para finalizar, analizaremos que acontece cando $c^2 - 4km < 0$. Neste caso a ecuación característica ten dúas raíces complexas conxugadas, $r_1 = a + \beta i$ e $r_2 = a - \beta i$, onde $a = -c/2m$ e $\beta = \sqrt{k - c^2/4m^2}$. Daquela, toda solución de (28) pódese escribir da seguinte forma

$$x(t) = e^{-ct/2m}(c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t),$$

ou, do mesmo xeito que fixemos coa expresión (24), da forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-ct/2m} \cos(\beta t - \varphi), \tag{31}$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\varphi = \arctan(c_2/c_1)$.

O movemento do obxecto é case que periódico, no senso de que o obxecto pasa pola PE a intervalos de tempo regulares, pero a súa amplitude decrece exponencialmente (ver Figura 5). O «caseperíodo» deste movemento viría dado por

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}, \tag{32}$$

e a «casefrecuencia» sería

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}, \tag{33}$$

aínda que é habitual chamarlle *frecuencia natural* do sistema, igual que no caso das vibracións libres. Se o rozamento co medio desaparece ($c = 0$) é inmediato comprobar que (32) e (33) convértense en (25) e (26).

Tamén neste caso se cumpre que

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(Ae^{-ct/2m} \cos(\beta t - \varphi)\right) = 0,$$

así que o obxecto irá diminuíndo a súa velocidade ata se deter na PE.

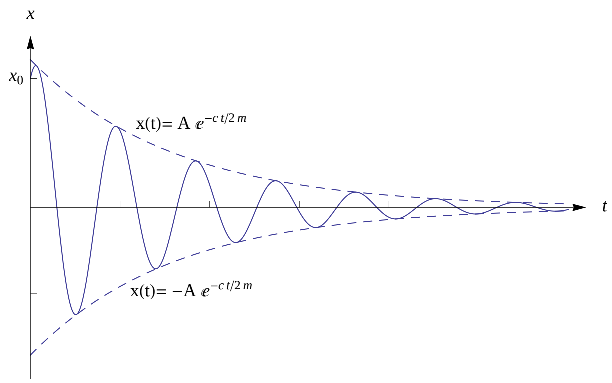


Figura 5: Vibracións subamortecidas. Gráfica da función $x(t) = Ae^{-ct/2m} \cos(\beta t - \varphi)$

Nos tres casos analizados nesta subsección podemos ver que o movemento provocado por calquera perturbación inicial do sistema acaba por desaparecer —a diferenza do que acontece nas vibracións libres— debido ao amortecemento. E o fai máis ou menos rapidamente en función das constantes c (amortecemento) e k (forza do resorte), como tamén da masa do obxecto e das condicións iniciais.

√â o funcionamento, por exemplo, do sistema de suspensión dos automóbiles.

5.1.3. Vibracións forzadas amortecidas

Ata o momento temos considerado modelos nos que só interviñan forzas internas ao propio sistema masa-resorte-amortecedor. Analizaremos agora o caso no que, ademais da forza do resorte e da forza de amortecemento, unha forza externa $f(t)$ actúa sobre o obxecto. Este tipo de forzas aparecen en diversas situacións: ben debido a movementos do soporte, ben debido a acción dun campo magnético sobre o obxecto...

O caso máis interesante preséntase cando a forza externa actúa periodicamente, digamos $f(t) = A_0 \cos \omega t$, polo que a aplicación da lei de Newton lévanos ata a ecuación diferencial non homoxénea

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx(t) = A_0 \cos \omega t \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x(t) = \frac{A_0}{m}\cos \omega t. \qquad (34)$$

A súa solución xeral será a suma da solución xeral da correspondente ecuación homoxénea (28) ($x_h(t)$, que xa foi calculada con anterioridade) e unha solución particular de (34), que se pode calcular co método dos coeficientes indeterminados:

$$x(t) = \frac{A_0}{(k-\omega^2 m)^2 + w^2c^2}\big((k-\omega^2 m)\cos \omega t + \omega c \operatorname{sen} \omega t)\big). \qquad (35)$$

Por tanto, operando de novo como en (24), calquera solución de (34) adoitará a forma

$$x(t) = x_h(t) + \frac{A_0}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + w^2c^2}}\cos{(\omega t - \phi)}, \qquad (36)$$

onde $\phi = \arctan\big(wc/(k-\omega^2 m)\big)$.

O primeiro dos sumandos denomínase parte *transitoria* da solución, xa que vai desaparecendo[11] segundo crece t. Por tanto, co paso do tempo a solución vai adoitando a forma do segundo sumando ou parte *estacionaria*, e podemos asumir que, para valores grandes de t, a solución de (34) é igual á súa solución particular, é dicir, unha función periódica de frecuencia $\omega/2\pi$ e de amplitude

$$\frac{A_0}{\sqrt{(k-\omega^2 m)^2 + \omega^2c^2}}. \qquad (37)$$

[11] O comportamento da solución xeral de (28) xa foi analizado, e en tódolos casos cumpríase que $\lim_{t\to+\infty} x_h(t) = 0$.

A expresión (37) da amplitude amósanos que esta depende tanto da amplitude (A_0) e a frecuencia ($\omega/2\pi$) da forza externa, coma dos coeficientes k e c, e tamén da masa m do obxecto.

Supoñamos, por exemplo, que o valor de c é moi pequeno, ou sexa, que o movemento está moi pouco amortecido, o que corresponderá en xeral cun movemento subamortecido —ver a fórmula (31)— como parte transitoria da solución, polo que (36) será

$$x(t) = e^{-ct/2m}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\beta t - \varphi) + \frac{A_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + w^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi).$$

Como c é moi pequeno, a frecuencia natural do sistema é aproximadamente igual que no caso sen amortecemento:

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

de modo que, sempre que a frecuencia da forza externa $\omega/2\pi$ estea preto da frecuencia natural $\beta/2\pi$, os termos $c^2\omega^2$ e $(k - \omega^2 m)$ serán moi pequenos tamén, polo que a amplitude da parte estacionaria será moito máis grande que a amplitude da forza externa.

Este fenómeno coñécese como *resonancia*[12], e podemos ver un exemplo na seguinte Figura 6, onde tomamos $k = 0.001$ N/m, $c = 0.02$ N·s/m e $m = 0.25$ kg, a forza externa é $f(t) = 0.01\cos(t/16)$ e supoñemos que o obxecto inicialmente está parado (sen velocidade) na PE.

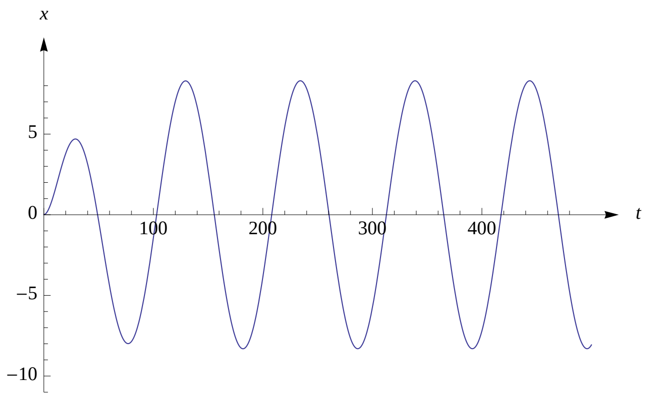


Figura 6: Vibracións forzadas amortecidas. Fenómeno da resonancia

Aínda que a amplitude da forza externa é de só 1 cm, o movemento estacionario resultante ten unha amplitude de máis de 8 m.

[12]En realidade a *resonancia pura* prodúcese en ausencia de amortecemento, e o movemento resultante é case que periódico pero con amplitude crecente —e non limitada— co tempo.

5.2. Circuítos eléctricos

Consideraremos nesta sección a aplicación das ecuacións diferenciais lineares de segunda orde aos circuítos eléctricos coñecidos como *circuítos RLC*, formados por fontes de voltaxe (baterías, xeradores...), resistencias, indutores e condensadores.

Na Figura 7 pódese ver un esquema dun circuíto RLC conectado en serie, no que hai un xerador ou batería que produce unha diferenza de potencial de $E(t)$ voltios (V), que fai fluír unha corrente de $I(t)$ amperios (A) polo circuíto. Tamén aparece unha resistencia de R ohmios (Ω) que se opón ao paso da corrente (podería ser unha lámpada de incandescencia, un secador do pelo...). Atopamos a continuación unha bobina ou indutor, de indutancia L henrios (H), que almacena enerxía eléctrica en forma de campo magnético. Por último, temos un condensador, de capacitancia C faradios (F), que almacena unha carga eléctrica de $q(t)$ culombios (C).

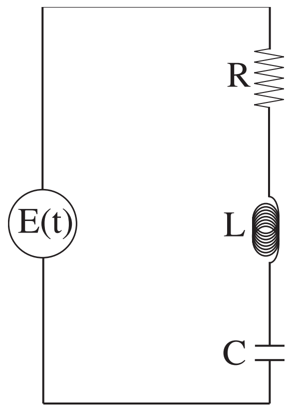


Figura 7: Circuíto RLC en serie.

Como non hai ningunha bifurcación no circuíto, a primeira lei de Kirchhoff (lei da corrente) dinos que a corrente $I(t)$ que pasa por cada elemento do circuíto é a mesma. A segunda lei de Kirchhoff (lei da voltaxe) establece que a suma das diferenzas de potencial en calquera circuíto pechado ten que ser cero, pero para poder aplicala teremos que coñecer canto valen esas variacións en cada elemento do circuíto:

- entre os bornes do xerador hai unha diferenza de potencial de $E(t)$ voltios.
- atendendo á lei de Ohm, a diferencia de potencial entre os puntos de conexión dunha resistencia de R ohmios é proporcional á corrente que pasa por dita resistencia, e vale $-RI(t)$.
- a partir das leis de Faraday e Lenz, dedúcese que a diferencia de potencial entre os puntos de conexión dunha bobina de indutancia L henrios é proporcional á variación da corrente, e vale $-L(dI/dt)$.
- a diferencia de potencial entre os puntos de conexión dun condensador, de capacitancia C faradios, é proporcional á carga eléctrica $q(t)$ que almacena, e vale $(-1/C)q(t)$.

Polo tanto,

$$E(t) - L\frac{dI}{dt} - RI(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0, \tag{38}$$

de onde, tendo en conta que $I(t) = dq/dt$, dedúcese directamente que

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q(t) = \frac{E(t)}{L}, \tag{39}$$

supoñendo, no segundo caso, que $L \neq 0$.

Podemos observar sen dificultade que a ecuación diferencial (39), que describe un circuíto RLC, é absolutamente similar á ecuación diferencial (34), que describe un sistema mecánico masa-resorte-amortecedor baixo a acción dunha forza externa. Onde nos sistemas mecánicos falamos de desprazamento $x(t)$ do obxecto, nos circuítos falamos da carga eléctrica $q(t)$. Asemade, a masa m do corpo, a constante k do resorte e a constante c do rozamento co medio, correspóndense, respectivamente, coa indutancia L, a inversa da capacitancia $1/C$ e a resistencia R.

De aí que todo o explicado en relación ao comportamento destes sistemas segue a ser válido para os circuítos RLC, en particular o coñecido fenómeno da resonancia, que adoita ter aplicacións desexables no caso dos circuítos eléctricos.

Cabe destacar o caso, non exposto no apartado de sistemas mecánicos, dun circuíto no que non haxa resistencia eléctrica[13] e o xerador produza unha diferencia de potencial que varíe periodicamente co tempo, por exemplo $E(t) = A_0 \cos \omega t$.

Entón a ecuación (39) pasa a ser

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \alpha^2 q(t) = \frac{A_0}{L}\cos \omega t, \tag{40}$$

con $\alpha^2 = 1/(CL)$. Para resolvela temos que coñecer a solución xeral da ecuación homoxénea, unha función periódica que temos xa calculada en (24):

$$c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t = A \cos(\alpha t - \varphi),$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\varphi = \arctan(c_2/c_1)$. A frecuencia natural do sistema toma un valor de $1/(2\pi\sqrt{CL})$.

Tamén temos que calcular unha solución particular de (40), por exemplo, polo método dos coeficientes indeterminados. Hai que considerar dous casos diferentes, segundo a frecuencia natural do sistema e a frecuencia coa que varía a diferencia de potencial producida polo xerador tomen o mesmo valor (é dicir, $\alpha = \omega$) ou valores distintos. Analizaremos unicamente o primeiro dos casos, no que aparece un comportamento pouco común da carga eléctrica e, con ela, da corrente.

Cando $\alpha = \omega$, resulta que $(A_0/L)\cos \omega t = (A_0/L)\cos \alpha t$ é solución da ecuación homoxénea, e utilizando o método dos coeficientes indeterminados

[13] Isto corresponderíase cun sistema masa-resorte no que non houbese ningún tipo de forza amortecedora. Son situacións virtuais que non se producen na realidade, nin no caso dos circuítos nin no dos sistemas mecánicos. Nun circuíto eléctrico os propios cables que o forman xa presentan unha resistencia ao paso da corrente. Pola súa parte, un sistema masa-resorte tería que estar situado nun baleiro total para que non se presentase unha forza de rozamento amortecedora do movemento.

obtemos que a función
$$\frac{A_0 t}{2L\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha t$$
é unha solución particular da ecuación (40).

Polo tanto, calquera solución da antedita ecuación (38) adoitará a forma

$$q(t) = A\cos(\alpha t - \varphi) + \frac{A_0 t}{2L\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha t. \tag{41}$$

onde A e φ dependen dos valores iniciais da carga e a corrente.

Se ben o primeiro sumando en (41) é unha función periódica, o segundo sumando representa unha función case que periódica, pero cunha amplitude que crece indefinidamente co tempo. Xa que logo, se a frecuencia de variación da diferencia de potencial producida polo xerador coincide coa frecuencia natural do sistema, diremos que esta é a *frecuencia de resonancia*, e que o circuíto *está en resonancia* —ou que é *resoante*—, o que provocará oscilacións non limitadas tanto na carga eléctrica como na corrente.

Podemos ver un exemplo da gráfica da carga nun circuíto RLC (en realidade un circuíto LC, xa que non temos en conta a resistencia) na Figura 8. Correspóndese cun circuíto cunha bobina de indutancia 1 henrio, un condensador de capacitancia de 0.25 faradios e un xerador que produce unha diferencia de potencial de $\cos 2t$ voltios, no que supoñemos que tanto a carga como a corrente iniciais son cero.

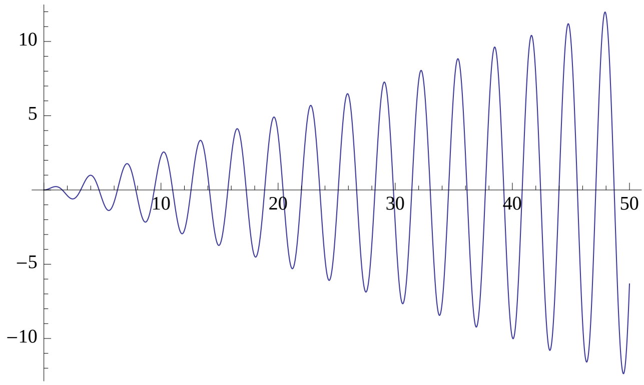


Figura 8: Fenómeno da resonancia nun circuíto LC

6. Ecuacións lineares de orde superior

Se ben na Sección 2 indicamos que nos centrariamos, por comodidade de notación, nas ecuacións diferenciais lineares de segunda orde —máis concretamente, nas que teñen coeficientes constantes—, a realidade é que a meirande parte dos resultados alí expostos pódense estender sen dificultade ás ecuacións lineares de orde n con coeficientes constantes, tanto non homoxénea:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = R(t), \tag{42}$$

como homoxénea:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0. \tag{43}$$

En primeiro lugar, o Teorema 3 pódese xeneralizar para ecuacións de orde n.

Teorema 4. *As solucións de* (43) *forman un espazo vectorial real de dimensión* n*.*

Entón a solución xeral da ecuación homoxénea (43) conterá n constantes ($y_h = y_h(t, c_1, \ldots, c_n)$), e podemos enunciar un resultado análogo ao Teorema 2.

Teorema 5. *Se* $y_h(t, c_1, \ldots, c_n)$ *é a solución xeral de* (43) *e* $y_p(t)$ *é unha solución calquera de* (42)*, entón*

$$y_x(t, c_1, \ldots, c_n) = y_h(t, c_1, \ldots, c_n) + y_p(t)$$

é a solución xeral de (42)*.*

Seguiremos, polo tanto, o guión da Sección 2 —aínda que non faremos ningún tipo de demostración—, é dicir: calcularemos a solución xeral da ecuación homoxénea (43) e unha solución particular da non homoxénea.

Para calcular a solución xeral da ecuación (43) procederemos como no caso da ecuación de segunda orde, polo que a función e^{at} será solución da ecuación diferencial se e só se a é solución da ecuación característica

$$x^n + P_1 x^{n-1} + \cdots + P_{n-1} x + P_n = 0.$$

Esta ecuación, segundo o teorema fundamental da álxebra, podémola escribir da forma

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = 0,$$

onde, obviamente, a_i son as raíces da ecuación para $i = 1, \ldots, n$ (non necesariamente distintas).

Preséntanse tres casos diferentes, ao igual que nas ecuacións de segunda orde, dependendo das raíces da ecuación característica.

- Se as raíces son números reais e todas distintas, entón teremos n solucións,

  $$e^{a_1 t},\ e^{a_2 t}, \ldots,\ e^{a_n t}, \tag{44}$$

  linearmente independentes da ecuación (43) e, debido ao Teorema 4, a solución xeral de (43) será

  $$y_h(t, c_1, \ldots, c_n) = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} + \cdots + c_n e^{a_n t}. \tag{45}$$

- Se unha raíz real, por exemplo a_1 ten multiplicidade[14] $k \leq n$, entón as solucións (44) non son linearmente independentes, así que (45) non será a solución xeral de (43). Cando estudamos a ecuación de segunda orde, aplicando o método explicado na Subsección 3.1 á solución $e^{a_1 t}$, obtiñamos unha nova solución $te^{a_1 t}$ linearmente independente coa anterior. Aplicando de novo dito método á solución $te^{a_1 t}$, obtemos $t^2 e^{a_1 t}$ como nova solución linearmente independente coas anteriores. Sen máis que aplicar tal método k veces sucesivas, teremos calculado k solucións linearmente independentes. Neste caso, os k primeiros sumandos da solución xeral (45) terían que ser substituídos pola seguinte expresión:

$$(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_k t^{k-1}) e^{a_1 t}.$$

  Para cada raíz real múltiple teriamos que obter unha expresión similar a esta, que substituiriamos á súa vez en (45).
- Se algunha das raíces son complexas puras, xa que os coeficientes da ecuación característica son números reais, é coñecido que ditas raíces complexas aparecen sempre como pares de números complexos conxugados. Supoñamos, por exemplo, que $a_1 = c + di$ e $a_2 = c - di$, con $d \neq 0$. Isto xa foi estudado no caso $n = 2$, e teriamos que substituír $c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t}$ en (45) pola expresión

$$e^{ct}(c_1 \cos dt + c_2 \operatorname{sen} dt).$$

  No caso de que $a_1 = c + di$ e $a_2 = c - di$ teñan multiplicidade k, habería que aplicar o método da Subsección 3.1 para obter máis solucións linearmente independentes, o que nos levaría a substituír os $2k$ primeiros sumandos de (45) por

$$e^{ct}\big((c_1 + c_3 t + \cdots + c_{2k-1} t^{k-1}) \cos dt + (c_2 + c_4 t + \cdots + c_{2k} t^{k-1}) \operatorname{sen} dt\big).$$

  Como no caso anterior, para cada par de raíces complexas múltiples teriamos que obter unha expresión similar para substituír en (45).

Exemplo 5. Atopar a solución xeral de:

1. $y''' - 4y'' - 11y + 30 = 0.$

   Ecuación característica: $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$
   Raíces: $a_1 = -3$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 5.$
   Solución xeral:
$$y_x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}.$$
2. $y''' + 9y'' + 27y + 27 = 0.$

   Ecuación característica: $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3 = 0.$
   Raíces: $a_1 = -3$, de multiplicidade $3.$
   Solución xeral:
$$y_x(t) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2).$$

[14] Coa notación que estamos a usar, isto quere dicir que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$

3. $y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 32y''' + 36y'' - 24y + 1 = 0$.

   Ecuación característica: $(x^2 - 2x + 2)^3 = 0$.
   Raíces: $a_1 = 1 + i$ e $a_2 = 1 - i$, cada unha de multiplicidade 3.
   Solución xeral:
$$y_x(t) = e^t\big((c_1 + c_3 t + c_5 t^2)\cos t + (c_2 + c_4 t + c_6 t^2)\operatorname{sen} t\big).$$

4. $y^{(8)} + 4y^{(7)} - 16y^{(6)} - 100y^{(5)} - 170y^{(4)} - 212y^{(3)} - 288y'' - 108y - 135 = 0$.

   Ecuación característica: $(x-5)(x+3)^3(x^2+1)^2 = 0$.
   Raíces: $a_1 = 5$, $a_2 = -3$ (multiplicidade 3), $a_3 = i$ e $a_4 = -i$ (cada unha de multiplicidade 2).
   Solución xeral:
$$y_x(t) = c_1 e^{5t} + (c_2 + c_3 t + c_4 t^2)e^{-3t} + (c_5 + c_7 t)\cos t + (c_6 + c_8 t)\operatorname{sen} t.$$

Para calcular unha solución particular da ecuación non homoxénea (42) podemos xeneralizar os métodos xa empregados para as ecuacións de segunda orde.

O método de variación de parámetros non adoita a ser un método recomendable para este tipo de ecuacións. Aínda que é perfectamente adaptable para este tipo de problemas, ten un custo operacional —crecente coa orde da ecuación diferencial— que o convirte moitas veces en inaplicable.

O método dos coeficientes indeterminados segue a ser válido, e aplícase do mesmo xeito, nos mesmos casos que para as ecuacións de segunda orde: cando a parte non homoxénea é combinación linear de funcións tipo CI (ver a Sección 4.2).

Exemplo 6. Atopar a solución xeral de $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' = 24t^2 + 10\cos t$.

As raíces da ecuación característica $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a = 0$ son $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1 + i$ e $a_4 = 1 - i$, polo que a solución xeral da ecuación homoxénea será
$$y_h(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + e^t(c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t).$$

A parte non homoxénea é combinación linear de $u_1 = t^2$ e $u_2 = \cos t$, polo que o método dos coeficientes indeterminados pódese aplicar, e temos que $S_{u_1} = \{1, t, t^2\}$ e $S_{u_2} = \{\cos t, \operatorname{sen} t\}$. O conxunto S_{u_1} contén solucións da ecuación homoxénea, polo que pasamos a considerar $S_{u_1} = \{t, t^2, t^3\}$, que xa non contén ningunha.

Polo tanto, suporemos que unha solución particular da nosa ecuación adoitará a forma $y_p(t) = At + Bt^2 + Ct^3 + D\cos t + E\operatorname{sen} t$, co que
$$\begin{aligned}
y_p' &= A + 2Bt + 3Ct^2 - D\operatorname{sen} t + E\cos t,\\
y_p'' &= 2B + 6Ct - D\cos t - E\operatorname{sen} t,\\
y_p''' &= 6C + D\operatorname{sen} t - E\cos t,\\
y_p^{(4)} &= D\cos t + E\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Sen máis que substituír y_p na ecuación diferencial chegamos a que

$$\begin{aligned} y_p^{(4)} - 4y_p''' + 6y_p'' - 4y_p' &= -4A + 12B - 24C + (-8B + 36C)t - 12Ct^2 \\ &\quad - 5D\cos t + 5E \operatorname{sen} t \\ &= 24t^2 + 10\cos t, \end{aligned}$$

de onde, igualando coeficientes, obtemos que $A = -15$, $B = -9$, $C = -2$, $D = -2$ e $E = 0$. Daquela, a solución xeral que buscamos é

$$y_x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + e^t(c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t) - 15t - 9t^2 - 2t^3 - 2\cos t.$$

6.1. Osciladores harmónicos acoplados

Ecuacións diferenciais de orde superior a dous aparecen a míudo cando se aborda o estudo simultáneo de máis dunha ecuación diferencial, o que adoita a denominarse *sistemas de ecuacións diferenciais*. Noutras unidades didácticas poderá desenvolverse o estudo —totalmente independente— dos sistemas de ecuacións diferenciais, pero aquí exporemos un exemplo de como obter unha ecuación de orde superior a partir dun deses sistemas.

Consideremos unha carreta de masa m suxeita á parede por medio dun resorte elástico como a da Figura 9. O comportamento destes resortes foi xa explicado na Sección 5.2 e, asumindo que a constante do resorte vale k e tendo en conta unicamente a forza do resorte, da segunda lei de Newton do movemento podemos deducir a ecuación diferencial que rexe o movemento desa carreta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0, \qquad (46)$$

na que $x(t)$ mide o desprazamento da carreta respecto da posición de equilibrio, onde o resorte está sen alongar e, polo tanto, non exerce forza algunha sobre a carreta.

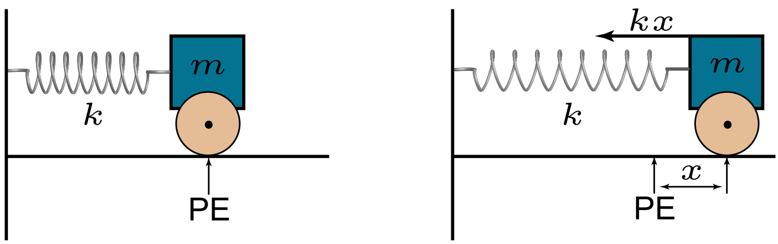


Figura 9: Oscilador harmónico

Cabe destacar que a ecuación (46) é exactamente a mesma que a (21) deducida na Sección 5.2, polo que, se desprazamos a carreta da posición de equilibrio (e/ou modificamos a súa velocidade) sabemos que se moverá periodicamente cun movemento harmónico simple. Diremos que a carreta é un *oscilador harmónico*.

Consideremos agora dúas carretas de masas m_1 e m_2 suxeitas cada unha a unha parede por medio de dous resortes de constantes k_1 e k_2. Se só temos en conta a forza dos resortes, cada unha delas será un oscilador harmónico cun movemento independente do outro, e coa súa propia posición de equilibrio.

Se conectamos as dúas carretas utilizando un resorte elástico de constante k_3 (Figura 6) obteremos dous *osciladores harmónicos acoplados*.

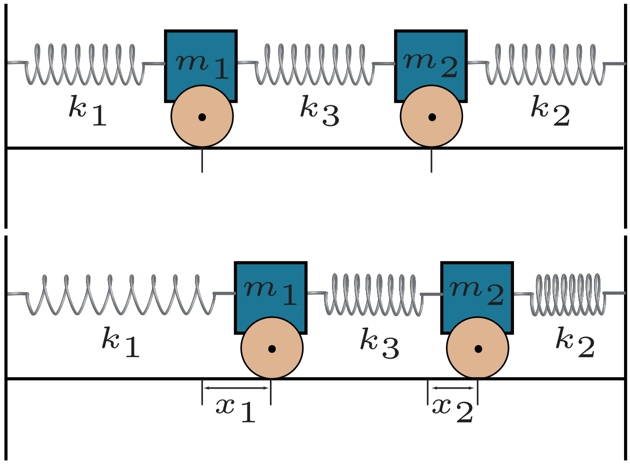


Figura 10: Osciladores harmónicos acoplados

Supoñendo que os tres resortes están sen alongar cando as dúas carretas están nas posicións de equilibrio, e que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ miden os desprazamentos das carretas respecto desas posicións (tomaremos distancias positivas cara á dereita), da segunda lei de Newton dedúcese que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ teñen que cumprir simultaneamente as seguintes ecuacións diferenciais:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_3(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3 x_2,$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3(x_2 - x_1) - k_2 x_2 = k_3 x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

Despexando x_2 na primeira ecuación obtemos que

$$x_2 = \frac{m_1 x_1'' + (k_1 + k_3)x_1}{k_3} \tag{47}$$

e, por conseguinte,

$$x_2' = \frac{m_1 x_1''' + (k_1 + k_3) x_1'}{k_3}, \tag{48}$$

$$x_2'' = \frac{m_1 x_1^{(4)} + (k_1 + k_3) x_1''}{k_3}. \tag{49}$$

Substituíndo estas expresións na segunda ecuación podemos escribir o sistema anterior como unha única ecuación de cuarta orde para a función x_1:

$$\frac{m_2}{k_3}(m_1 x_1^{(4)} + (k_1 + k_3) x_1'') = k_3 x_1 - \frac{k_2 + k_3}{k_3}(m_1 x_1'' + (k_1 + k_3) x_1),$$

ou ben

$$x_1^{(4)} + \frac{m_2(k_1 + k_3) + m_1(k_2 + k_3)}{m_1 m_2} x_1'' + \frac{(k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_3^2}{m_1 m_2} x_1 = 0. \tag{50}$$

Despois de resolvela coñeceremos $x_1(t)$ e, utilizando a fórmula (47), obteremos tamén a expresión de $x_2(t)$.

Exemplo 7. Consideremos dous osciladores harmónicos acoplados como os da Figura 10, nos que $m_1 = m_2 = 1$ kg e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ N/m. Se inicialmente levamos as carretas a 2 m e 1 m á dereita das súas respectivas posicións de equilibrio, e as soltamos sen velocidade inicial, calcula as ecuacións do movemento dos osciladores.

A ecuación (50) convértese en

$$x_1^{(4)} + 4x_1'' + 3x_1 = 0,$$

cuxa ecuación característica ten raíces $a_1 = i$, $a_2 = -i$, $a_3 = \sqrt{3}i$ e $a_4 = -\sqrt{3}i$, polo que a súa solución xeral será

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos \sqrt{3}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}t.$$

Por outra parte, sabemos que $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 1$, así que, a partir de (47), obtemos que $x_1''(0) = 0$. Asemade, como $x_1'(0) = x_2'(0) = 0$, de (48) resulta que $x_1'''(0) = 0$.

Das anteriores condicións iniciais dedúcese que $c_1 = 3/2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1/2$ e $c_4 = 0$, e de aí que

$$x_1(t) = \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t.$$

Para rematar, utilizando a fórmula (47) obtemos que

$$x_2(t) = \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t.$$

ANEXOS

Amosamos nesta sección dous exemplos de boletín de exercicios. Non debe interpretarse isto como que o estudantado só ten á súa disposición estes dous boletíns de exercicios, en realidade pode atopar moito máis material no curso virtual da materia. Incorporamos os dous documentos a modo de exemplo.

Ecuacións diferenciais ordinarias de orde superior. Boletín 1

1. Atopa a solución xeral das seguintes ecuacións diferenciais:

$$a)\ \ 16y'' - 8y' + y = 0. \qquad b)\ \ y'' + 2y' + y = 0. \qquad c)\ \ y'' + y' = 0.$$

$$d)\ \ 4y'' - 12y' + 9y = 0. \qquad e)\ \ y'' + y' - 6y = 0. \qquad f)\ \ y'' = 4y'.$$

2. Resolve os seguintes problemas de valor inicial:

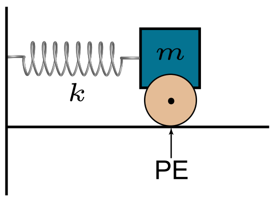
$$a)\ \ y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2. \qquad b)\ \ y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$$

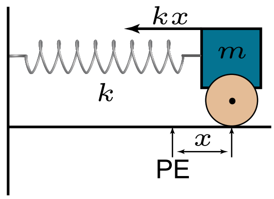
$$c)\ \ 2y'' - 12y' + 18y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \qquad d)\ \ y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$$

3. Unha carreta de masa 4 kg está suxeita a unha parede por medio dun resorte de constante $k = 8$ N/m. Supoñamos que levamos a carreta a tres metros da súa posición de equilibrio e a soltamos, no tempo $t = 0$ s, sen velocidade inicial. Calcular:

   a) A posición da carreta despois de $\pi/\sqrt{2}$ s, se temos en conta só a forza do resorte.

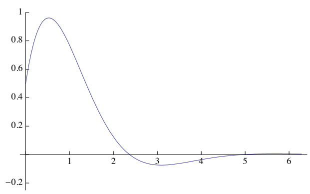
   b) A posiciíon da carreta despois de 1 s, supoñendo que o medio ofrece unha resistencia ao movemento proporcional á velocidade da carreta, cunha constante de proporcionalidade $c = 12$ N · s/m.



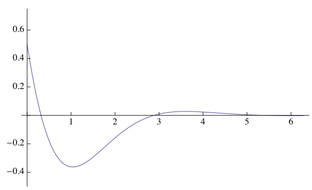


4. Unha masa de 2 kg está unida á parede por medio dun resorte cunha constante de rixidez de 5 kg/s^2. A resistencia que o medio ofrece ao movemento da masa é proporcional á velocidade da mesma, cunha constante de proporcionalidade de 4 kg/s. Supoñamos que desprazamos a masa 50 cm á esquerda da posición de equilibrio (PE) e a soltamos cunha velocidade inicial de 2 m/s cara á dereita. Suporemos que na posición de equilibrio $x = 0$, e que á dereita da mesma $x > 0$. Cal das seguintes gráficas é a de $x(t)$, a ecuación do movemento da masa?

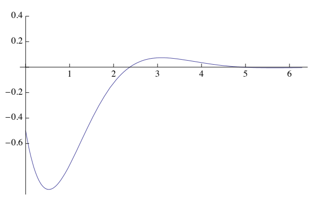
(*a*)



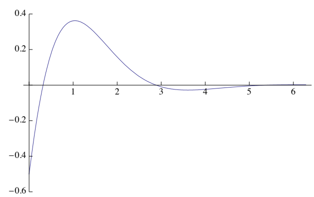
(*b*)



(*c*)



(*d*)



5. Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. No seu extremo libre cólgase unha masa de m kg. Se a masa se move cunha velocidade de v_0 m/s cando o resorte está sen alongar, calcula a velocidade v como función do alongamento x (medido en m).

6. Dende a superficie da terra lánzase cara enriba un foguete de masa 8 kg cunha velocidade inicial de 20 m/s. Se a resistencia que o aire ofrece ao movemento é proporcional á velocidade do foguete, con constante de proporcionalidade $k = 4$ N·s/m, e tomamos como aceleración da gravidade $g = 10$ m/s^2, cal é a máxima altura que acadará o foguete?.

7. Un corpo de masa 4 kg está colgado do teito por un resorte que se estira 32 cm baixo o seu peso. Dende a súa posición de equilibrio, estírase 66 cm e sóltase cunha velocidade de 5 m/s cara a abaixo (dirección positiva).

   a) Determina a posición do corpo en función do tempo.

   b) Determina a amplitude (A), o período (T) e a frecuencia da oscilación ($f = 1/T$) na ecuación do movemento do obxecto.

8. Un paquete suspendido dun paracaídas descende cara ao chan sometido á forza da gravidade. Se a resistencia do aire produce unha forza proporcional á velocidade do paquete, e este parte do repouso no intre $t = 0$, calcúlese a distancia que percorre o paquete nun tempo t.

9. Os grandes barcos (transatlánticos, petroleiros...) deteñen a súa propulsión varios quilómetros antes de chegar a porto para que a resistencia da auga reduza a súa velocidade ata a necesaria para poder manobrar con facilidade na dársena. Supón que un barco de masa m achégase en liña recta cara ao porto e, nun determinado intre (intre inicial), no que se move a unha velocidade v_0, para os seus motores. Asumindo que a auga presenta unha forza de resistencia ao movemento do barco proporcional á velocidade do mesmo, e desprezando a forzas do vento e do rozamento co aire:

   a) Escrebe, baseándote na segunda lei de Newton do movemento, un problema de valor inicial cuxa solución sexa a función que representa, dependendo do tempo, a velocidade do barco despois de parar os seus motores.

   b) Resolve o problema de valor inicial do apartado anterior.

   c) Calcula a distancia percorrida en función do tempo.

   d) Sabendo que e^{-1} ten un valor aproximado de 0.36, canto tempo pasará antes de que o barco vaia ao 36 % da velocidade inicial?

   e) A que distancia do porto debería parar o barco os motores para entrar na dársena co 36 % da velocidade inicial?

10. Atopa a solución xeral das seguintes ecuacións diferenciais polo método da variación dos parámetros:

   a) $\dfrac{d^2x}{dy^2} - 4\dfrac{dx}{dy} + 3x = \left(1 + e^{-y}\right)^{-2}$. *b*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$. *c*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{cosec} t$.

   d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = \left(1 + e^{-t}\right)^{-1}$. *d*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y(x) = 2x$. *e*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = e^{-t}$.

11. Atopa a solución xeral das seguintes ecuacións diferenciais polo método dos coeficientes indeterminados:

   a) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x + x^2$. *b*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = t^3 + \operatorname{sen} t$ *c*) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = e^t + 2$.

   d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = t^3e^{2t} + te^{2t}$. *e*) $\dfrac{d^2x}{dy^2} - 9x = y + e^{2y} - \operatorname{sen} 2y$. *f*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2 \operatorname{sen} 2x$.

1. Atopa a solución xeral das seguintes ecuacións diferenciais:

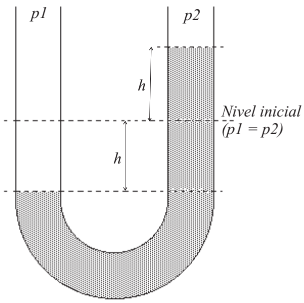
   a) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}=\operatorname{cosec} t$ *b*) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y(x)=2x$ *c*) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+2y=t^2+\operatorname{sen} t$

   d) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-6y=e^{-t}$ *e*) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=e^t+2$ *f*) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+3y=\left(1+e^{-t}\right)^{-1}$

   g) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+3y=t^3+\operatorname{sen} t$ *h*) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=e^x\operatorname{sen} x$ *i*) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+4y=t^3e^{2t}+te^{2t}$

   j) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x^2\operatorname{sen} 2x$ *k*) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-6\dfrac{dy}{dt}+9y=\dfrac{e^{3t}}{t^2}$ *l*) $\dfrac{d^2x}{dy^2}-9x=y+e^{2y}-\operatorname{sen} 2y$

2. Considera un tubo en forma de U (un manómetro simple) como o da figura. Os dous brazos teñen unha sección de A m^2. Cando as presións exercidas neles (p_1 e p_2) son iguais, tamén o son as alturas do líquido en cada un dos brazos.

   Cando se produce unha diferencia de presións,$\Delta\ p=p_1-p_2\neq 0$, daquela o líquido desprázase para acadar outra posición de equilibrio. Chamemos $h(t)$ á altura que ten o líquido no intre t respecto do nivel inicial. Debido á segunda lei de Newton do movemento, a aceleración está relacionada coas forzas aplicadas, que neste caso son:

   - Forza debida á diferencia de presión: $(p_1-p_2)A$.
   - Forza debida ao peso da columna de líquido desprazado: $\rho\, A\,(2h)g$, onde ρ é a densidade do líquido e g é a aceleración da gravidade.
   - Forza debida á fricción do fluído: pola ecuación de Poiseuille, é proporcional ao fluxo, $k\,A\dfrac{dh}{dt}$.

   Polo tanto:

   $$m\frac{d^2h}{dt^2}+k\,A\frac{dh}{dt}+2A\,\rho\,g\,h=(p_1-p_2)A.$$

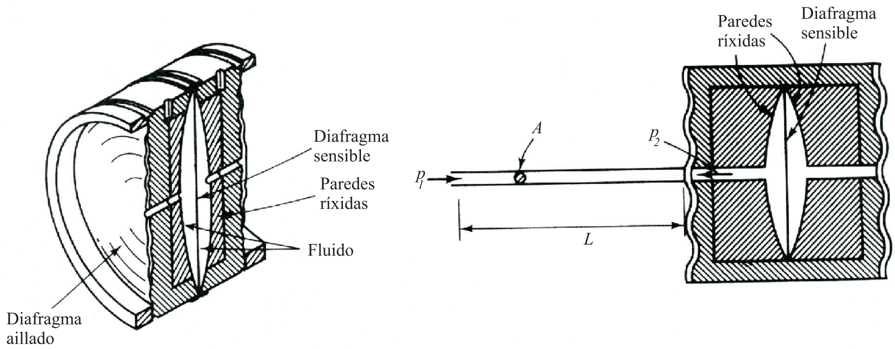
   Supoñamos que a constante k relacionada coa forza de fricción vale $8\,\mathrm{N{\cdot}s/m^3}$, que a sección de cada brazo do tubo é de 0,5 m^2 e que no tubo temos 0.33 kg de fluído de densidade 1.2 kg/m^3. Supoñamos ademais que inicialmente ámbolos dous brazos soportan a mesma presión (é dicir, $h=0$), pero que a partir dese momento a presión no primeiro brazo pasa a ser 4 N/m^2 maior que no segundo. Considerando que a velocidade inicial do líquido é nula, atopa a expresión de h en función do tempo (toma $g=10\,\mathrm{m/s^2}$).

3. Un obxecto de masa 1 kg proxéctase verticalmente cara arriba dende a superficie da Terra, cunha velocidade inicial de $(e-1)$ m/s. Supone que o aire ofrece unha resistencia ao movemento proporcional á velocidade, cunha constante de proporcionalidade de 10 N·s/m, e tomaremos como valor da aceleración da gravidade $g=10$ m/s^2.

   a) Cal será a altura máxima que acadará o obxecto?

   b) Expresa a distancia percorrida polo obxecto en función do tempo, dende que acada a súa altura máxima.

4. Outro aparato cun comportamento que pode ser modelado por unha ecuación diferencial linear é un transdutor de presión como o da seguinte figura. Un cambio na presión p_1 do fluído do tubo (debida a un cambio de presión nun recipiente ou polo cambio no nivel de líquido nun tanque conectado ao tubo) é transmitido polo tubo ata un diafragma sensible que está equilibrado polo outro lado con fluído a unha determinada presión de referencia. A posición do diagrama sensible pode ser medida e así p_1 pode ser estimado.



O desprazamento x do fluído no tubo é producido pola diferenza de presión nos seus extremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = A\,L\,\rho\frac{d^2x}{dt^2} = p_1 A - p_2 A,$$

onde A é a sección do tubo, L a súa lonxitude e ρ a densidade do fluído.

A forza p_2A está equilibrada con outras dúas:

- Coa forza de resistencia á deformación presentada polo diafragma sensible, que actúa coma un resorte: $-kx$.
- Coa forza de fricción debida á viscosidade do fluído, que é proporcional á velocidade: $-cx'(t)$.

é dicir, que $p_2A - k\,x - cx'(t) = 0$. Polo tanto, a ecuación finalmente queda:

$$A\,L\,\rho\frac{d^2x}{dt^2} = p_1 A - k\,x - c\frac{dx}{dt}.$$

Esta ecuación indica que a resposta do dispositivo, é dicir, o movemento da membrana sensible, axústase a unha EDO linear de segunda orde. Considera que o tubo ten 2 m de longo, unha sección de 0.05 m^2 e que está cheo de auga ($\rho = 100$ kg/m^3). As constantes de proporcionalidade son $k = 500$ N/m e $c = 400$ N·s/m. Calcula a solución xeral da ecuación resultante de aplicar unha presión de 40 N no comezo do tubo.

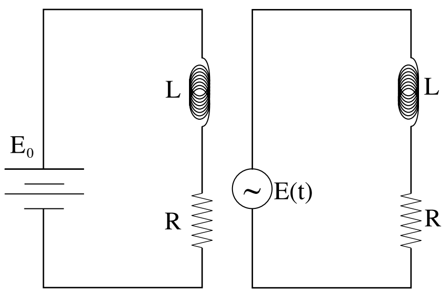
5. Unha das ecuacións fundamentais nos circuítos eléctricos é

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad (1)$$

onde L (henrios) denomínase indutancia, R (ohmios) resistencia, i (amperios) intensidade de corrente e E (voltios) a forza electromotriz o f.m.e. (Neste problema considéranse constantes R e L).

   a) Resolver (1) cando $E(t) = E_0$ e a intensidade de corrente inicial é i_0.

   b) Resolver (1) cando $R = 3$ henrios, $R = 15$ ohmios, $E(t)$ é unha onda sinusoidal de amplitude 110 voltios, ciclo 60, e $i = 0$ para $t = 0$.



AVALIACIÓN

Non está previsto realizar unha avaliación inicial para esta unidade didáctica —é a terceira das seis unidades que configuran a materia, polo que o grao de competencia dos e das estudantes en relación á materia debería xa ser coñecido—, como tampouco unha avaliación final específica para ela, alén, obviamente, da avaliación final da materia da que forma parte.

A avaliación procesual realizarase durante todo o tempo en que se imparta a unidade —incluso a materia no seu conxunto—, tanto ao longo de tódalas sesións presenciais (clases expositivas, seminarios e, se é o caso, titorías clásicas), como nas posibles consultas realizadas en liña, a participación nos foros...

O obxectivo será recabar, por unha parte, toda a información posible que permita esculcar o grado de asimilación, por parte do alumnado, dos contidos teórico-prácticos e os conceptos traballados, e por outra parte, a rapidez e a dificultade coas que se produce este proceso de aprendizaxe. Isto permitirá non só poder introducir, se é necesario, algunha modificación sobre o deseño inicialmente previsto —a temporalización da unidade, e con ela da materia, por exemplo—, senón tamén abordar, en cursos vindeiros, o deseño da unidade didáctica e a materia á que pertence cunha perspectiva cada vez máis axustada á realidade.

A avaliación final da materia levarase a cabo a partir dunha serie de probas escritas —exames— que consistirán na realización de exercicios completamente similares aos incluídos nos boletíns propostos. Non hai que dicir que os exercicios relacionados con esta unidade didáctica que se inclúan neses exames procurarán determinar se os obxectivos detallados na segunda sección desta guía foron acadados.

BIBLIOGRAFÍA

BRAUN, M. (1990): *Ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

NAGLE, R.K.; E.B. SAFF e A.D. SNIDER (2001): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, México: Pearson Education.

EDWARDS, C.H. e D.P. PENNEY (1985): *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*, Prentice-Hall.

PÉREZ,C. (2007): *MATLAB y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*, Prentice Hall.

SIMMONS, G.F. (1993): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. (2.ª ed.)*, McGraw-Hill.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

9 788498 879896