



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Centros nilpotentes en sistemas polinomiais

Antonio Iglesias Varela

Curso Académico 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Centros nilpotentes en sistemas polinomiais

Antonio Iglesias Varela

Xullo, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Centros nilpotentes en sistemas polinomiais
Breve descrición do contido
Trátase de estudar algún tipo de singularidades non hiperbólicas en sistemas de ecuacións diferenciais polinomiais no plano. Caracterizaranse os sistemas onde ten lugar e estudarase o comportamento cualitativo das súas órbitas.
Recomendacións
Outras observacións
Este traballo comezouse no marco dunhas prácticas curriculares no Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CIT-MAga).

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Preliminares	1
2. Clasificación de centros en sistemas polinomiais	9
2.1. Estrutura local de centros e focos	9
2.2. Tipos de centros en sistemas polinomiais	10
3. Definición do problema: polinomios homoxéneos, simetrías e hamiltonianos	13
3.1. Sistemas polinomiais homoxéneos	13
3.2. Simetrías e o problema centro-foco	13
3.3. Sistemas hamiltonianos	19
4. Carácter global dos centros	21
4.1. Unicidade da singularidade	21
4.2. Órbitas no infinito	24
4.2.1. Compactificación de Poincaré	25
4.2.2. Singularidades no infinito	29
4.2.3. Transformacións blow-up	34

Resumo

Neste traballo de fin de grao, enmarcado na área de coñecemento da Análise Matemática, abórdase o problema aberto da caracterización de centros globais en sistemas dinámicos polinomiais. Tras unha recopilación de resultados básicos da análise cualitativa de ecuacións diferenciais introdúcese o concepto de centro local e global, clasificándoos en función do seu sistema linealizado. Dado que o problema é moi amplo, centrouse o estudo na busca de centros nilpotentes en sistemas homoxéneos de grao 5 que presentasen certas propiedades de simetría. Tamén se consideraron sistemas hamiltonianos.

Comprobar o carácter global dos centros require coñecer o comportamento das órbitas no infinito do plano euclídeo. Para afrontalo recórrese á compactificación de Poincaré, que proxecta o campo definido en \mathbb{R}^2 nunha esfera e permite identificar os puntos no infinito coa liña do ecuador. Finalmente, para comprender a estrutura local dalgunhas singularidades, utilizáronse as denominadas transformacións *blow up*, que expanden o punto singular ao longo dunha recta e facilitan o seu estudo.

Abstract

In this bachelor's final thesis, conducted within the field of Mathematical Analysis, we tackle the typification of global centers at bidimensional polynomial dynamic systems, which is an open problem. After gathering a collection of fundamental results about dynamic systems theory, local and global centers are introduced by a classification attending to their linearization. Owing to the problem's complexity, we confine the study to find nilpotent centers at systems with quintic homogeneous polynomials and under certain symmetries. Hamiltonian systems were considered too.

Studying global centers requires a analysis into orbit behaviour near the infinity of the eu-

clidean plane. To face it, we draw on the Poincaré compactification. This technique projects the vector field defined in \mathbb{R}^2 onto a sphere, where points at infinity are identified with its equator line. Finally, in order to understand the local structure of some singularities, we use blow up transformations that expand the singular point along a whole straight line, making them easier to manage.

Introdución

Dende o nacemento do cálculo infinitesimal no século XVII, os sistemas de ecuacións diferenciais desempeñaron un papel protagonista no paradigma das matemáticas modernas, converténdose nunha ferramenta transversal no desenvolvemento científico actual. Mediante os sistemas dinámicos descríbense fenómenos en campos tan diversos como a Astrofísica, a Bioquímica, a Ecoloxía, a Demografía ou a Economía; dende o movemento dos astros no espazo ata o crecemento de poboacións nos ecosistemas.

Resolver ecuacións diferenciais é, en xeral, un problema difícil. Fóra dos exemplos máis elementais e certos casos para os que existen algoritmos de resolución, atopar a solución exacta dunha ecuación diferencial ordinaria pode ser complexo, así como calcular as curvas integrais nun sistema de varias dimensións. Afortunadamente, esta non é a única forma de enfrontarse aos sistemas dinámicos.

A Análise Cualitativa para Ecuacións Diferenciais ten por obxecto de estudo os sistemas de ecuacións diferenciais autónomas. A diferenza doutras abordaxes, en lugar de integrar as solucións exactas ou calcular aproximacións con métodos numéricos, pretende comprender o comportamento cualitativo do sistema atendendo ao coñecemento dalgunhas propiedades do seu diagrama de fases, é dicir, ao conxunto de órbitas orientadas que describen todas as solucións que pasan por cada punto do espazo de definición. A información que se pode obter mediante os métodos da análise cualitativa abrangue a presenza de puntos de equilibrio ou singularidades, a súa estabilidade respecto as órbitas nas súas veciñanzas, o seu carácter atractor ou repulsor, a existencia de órbitas periódicas ao seu redor... así como o comportamento das órbitas cando o tempo tende a infinito ou a existencia de conxuntos límite. En certas ocasións, estes datos permiten coñecer propiedades do retrato de fases a nivel local ou global, que ilustran a natureza do sistema sen necesidade de resolvelo. Isto converte á teoría cualitativa nunha ferramenta moi útil para aplicar á ampla colección de modelos que se basean en sistemas dinámicos e inferir conclusións sobre os fenómenos que describen.

Este traballo de fin de grao enfócase na caracterización de centros globais en sistemas polinomiais. Existe unha gran variedade de modelos en diversos campos da ciencia baseados en sistemas

dinámicos nos que aparecen centros globais ou locais. Un dos exemplos máis coñecidos son as ecuacións de Lotka-Volterra. Trátase dun sistema de dúas ecuacións diferenciais de primeira orde da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\alpha - \beta y), \\ \dot{y} &= -y(\gamma - \delta y),\end{aligned}$$

que describe a dinámica de poboacións dun sistema depredador-presa, onde x e y son o número de presas e depredadores. Saber cando un modelo como este presenta centros locais e globais infire un coñecemento máis profundo dos procesos que representa.

A caracterización de centros é un problema aberto na análise de sistemas dinámicos debido á presenza de varias dificultades. En primeiro lugar, as singularidades hiperbólicas e semihiperbólicas, cuxas estruturas locais xa son coñecidas, non son compatibles coa estrutura local dos centros. En segundo lugar, diferenciar entre centros e focos é en xeral difícil para calquera tipo de singularidade, pois non existen resultados que permitan, en xeral, diferenciar entre ambas estruturas, a pesar de teren unha natureza esencialmente distinta. Ademais, comprobar o carácter global dos centros require estudar o comportamento das órbitas en todo o plano euclídeo, incluído o infinito, e técnicas como a busca de funcións de Liapunov non permiten facer unha distinción xeral neste sentido.

Existen caracterizacións de centros globais para certo tipo de sistemas polinomiais homoxéneos. Para grao 1 e 3 o problema está pechado [5] e no artigo *Reversible global centers with quintic homogeneous non linearities* [8] realízase unha caracterización de centros globais de tipo linear para sistemas polinomiais homoxéneos de grao 5. Baseándonos na súa metodoloxía, faremos unha aproximación ao problema análogo para centros de tipo nilpotente.

No tratamento do problema recorreremos a distintas técnicas para abordar cada dificultade. Para o estudo da estrutura local dos puntos singulares nilpotentes remitirémonos ao Teorema de Clasificación de Singularidades Nilpotentes 1.12. Consideraremos simetrías temporais que nos permitirán distinguir entre centros e focos, para así acadar unha caracterización de centros locais.

Con respecto ao carácter global, co obxectivo de examinar se o comportamento periódico das órbitas se mantén cara ao infinito, introduciremos a compactificación de Poincaré: unha proxección do plano euclídeo na esfera unidade que permite identificar o infinito de \mathbb{R}^2 coa circunferencia do ecuador. Obteremos un campo vectorial definido en cada hemisferio topoloxicamente equivalente ao asociado ao sistema orixinal que poderemos estender aos puntos identificados co infinito. En virtude dun teorema de caracterización de centros globais, reduciremos a comprobación do carácter global dos centros ao estudo da estrutura local das singularidades que presente no infinito.

Neste último paso atoparémonos con puntos singulares dexenerados. Dado que para este

INTRODUCCIÓN

tipo de singularidades non existe ningún teorema de clasificación, precisaremos técnicas que nos permitan reducir o problema ao estudo de estruturas locais que saibamos describir. Mediante a implementación de transformacións tipo *blow up* expandiremos a singularidade ao longo dunha recta onde, tras a eliminación de factores comúns, aparecerán novos puntos singulares. Unha vez estea analizada a súa estrutura local e desfeitos os cambios de variable, poderemos dar unha descrición da estrutura local da singularidade dexenerada.

A realización deste traballo comezou durante un período de prácticas no Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga). Chegouse a unha caracterización parcial de centros globais en sistemas polinomiais homoxéneos de grao 5 baixo condicións de simetrías temporais. Completouse para o caso de que non existise ningunha singularidade no infinito, e deuse unha condición necesaria para sistemas con dúas singularidades no infinito. En [6] tamén se acadou unha caracterización completa para o primeiro caso, onde se obteñen condicións necesarias e suficientes equivalentes. Cómpre sinalar que os resultados presentados neste traballo foron obtidos de forma completamente independente ao estudo de [6], o cal resalta o interese do problema abordado.

Capítulo 1

Preliminares

Sexa U un subconxunto aberto de \mathbb{R}^2 . Consideremos un campo vectorial $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $X \in C^r(U)$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Chamaremos *curvas integrais de $X = (X_1, X_2)$* ás parametrizacións $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$, que sexan solucións do sistema de ecuacións diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X_1(x, y), \\ \dot{y} &= X_2(x, y),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde \dot{x} e \dot{y} denotan $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ respectivamente. Nótese que o sistema de ecuacións diferenciais é autónomo ao non depender o campo da variable t . Con frecuencia traballaremos co campo vectorial asociado en lugar do sistema de ecuacións diferenciais.

Os seguintes dous resultados son de relevancia para entender o concepto de órbita como peza fundamental do análise cualitativo de ecuacións diferenciais:

Proposición 1.1. Existencia e unicidade de solución maximal

Dado calquera punto $(x_0, y_0) \in U$ existe unha única solución maximal $\varphi_{(x_0, y_0)}$ do sistema (1.1) tal que $\varphi_{(x_0, y_0)}(0) = (x_0, y_0)$, que está definida no intervalo maximal $I_{(x_0, y_0)}$. Calquera outra solución $\psi : J \rightarrow U$ tal que $\psi(0) = (x_0, y_0)$ cumprirá que $J \subset I$ e $\psi \equiv \varphi|_J$.

Proposición 1.2. *Consideremos unha solución maximal do sistema (1.1) $\varphi_{(x_0, y_0)}$ e tomemos o punto $(x_t, y_t) = \varphi_{(x_0, y_0)}(t)$, onde $t \in I_{(x_0, y_0)}$. Tense que a solución maximal $\varphi_{(x_t, y_t)}$ está definida no intervalo maximal $I_{(x_t, y_t)} = \{r - t : r \in I_{(x_0, y_0)}\}$ e é da forma $\varphi_{(x_t, y_t)}(s) = \varphi_{(x_0, y_0)}(s + t)$.*

Esta última propiedade é consecuencia de que o sistema (1.1) sexa autónomo. Ademais, a proxección da gráfica das solucións en U é a mesma para todas as que acadan un mesmo valor, sexa cal sexa o instante no que o fagan.

Definición 1.3. Sexa $(x_0, y_0) \in U$. Diremos que (x_0, y_0) é un *punto singular de X* ou unha *singularidade de X* se o campo se anula en dito punto. Noutro caso diremos que (x_0, y_0) é un *punto regular*.

Sexa $\varphi : I_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ unha solución maximal do sistema asociado a X tal que $\varphi(0) = (x_0, y_0)$. Chamaremos *órbita* á imaxe de dita solución, $\gamma_\varphi = \{\varphi(t) : t \in I_{(x_0, y_0)}\}$, dotada da orientación inducida pola curva φ se (x_0, y_0) é un punto regular. Denotaremos $\gamma_\varphi^+ = \{\varphi(t) : t \in I_{(x_0, y_0)}, t > 0\}$ e $\gamma_\varphi^- = \{\varphi(t) : t \in I_{(x_0, y_0)}, t < 0\}$.

Se $\varphi(t) = \varphi_{(x_0, y_0)}(t)$ está definida $\forall t < 0$, chamamos *conxunto α -límite* de (x_0, y_0) a $\alpha(x_0, y_0) = \{(x, y) \in U : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow (x, y)\}$. Se $\varphi(t) = \varphi_{(x_0, y_0)}(t)$ está definida $\forall t > 0$, chamamos *conxunto ω -límite* de (x_0, y_0) a $\omega(x_0, y_0) = \{(x, y) \in U : \exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow (x, y)\}$

Como consecuencia da proposición anterior, cada $(x_0, y_0) \in U$ comparte órbita co resto de puntos da imaxe de $\varphi_{(x_0, y_0)}$, o que induce en U a relación de equivalencia *pertencer a unha órbita*. Chamaremos *retrato ou diagrama de fases* ao conxunto de órbitas dun sistema dotadas da orientación inducida polas solucións que as parametrizan.

Definición 1.4. Diremos que $\varphi(t)$ é unha *solución periódica do sistema asociado a X* se existe un valor real $c > 0$, ao que chamaremos *período*, tal que $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dúas órbitas só poden coincidir ou ser disxuntas. Ademais, en virtude dos seguintes resultados, tense que unha órbita ou forma unha curva pechada ou non se autointeresea.

Proposición 1.5. *Consideremos unha solución maximal do sistema (1.1) φ tal que, dados dous instantes $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Entón $I = \mathbb{R}$ e a solución φ ou é periódica con período mínimo $\frac{t_2 - t_1}{m}$, para certo $m \in \mathbb{N}$, ou é constante.*

Proposición 1.6. *Sexa φ unha solución maximal do sistema (1.1) con $X \in C^r(U)$ e γ_φ a súa órbita asociada. Entón, cumpre algunha das seguintes afirmacións:*

1. φ é inxectiva e γ_φ é C^r -difeomorfa a \mathbb{R} . γ_φ componse na súa totalidade de puntos regulares.
2. φ é constante definida en todo \mathbb{R} e $\gamma_\varphi = \{(x_0, y_0)\}$, con $(x_0, y_0) \in U$ singularidade.
3. φ é periódica con período mínimo $c > 0$ de tal forma que $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ se $|t_2 - t_1| < c$. γ_φ é C^r -difeomorfa a \mathbb{S}^1 e conformada unicamente por puntos regulares.

Unha das cuestións a abordar na análise cualitativa dun sistema de ecuacións diferenciais é a estrutura local que presenta o seu retrato de fases en cada punto; é dicir, como se comportan as órbitas nas proximidades de cada elemento de U . Neste contexto, son fundamentais os conceptos de equivalencia e conxugación topolóxica:

Definición 1.7. Dados $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\hat{X} : \hat{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dous campos vectoriais (con cadanseu sistema de ecuacións diferenciais asociado), diremos que X é *topoloxicamente equivalente* a \hat{X} se existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow \hat{U}$ que preserva as órbitas e mantén a súa orientación. Diremos que ademais X e \hat{X} son *topoloxicamente conxugados* se dito homeomorfismo preserva os fluxos dos sistemas, é dicir, se $\varphi_x : I \rightarrow U$ e $\hat{\varphi}_{h(x)} : \hat{I}_{h(x)} \rightarrow \hat{U}$ son solucións maximais de X e \hat{X} respectivamente entón $h(\varphi_x(t)) = \hat{\varphi}_{h(x)}(t)$ para todo $t \in I_x = \hat{I}_{h(x)}$ (as solucións asociadas a órbitas conxugadas presentan parametrizacións coa mesma orientación e os mesmos intervalos maximais).

En virtude do Teorema do fluxo tubular (enunciado e probado en [4]), existe unha veciñanza V para cada punto regular dun campo X onde $X|_V$ é topoloxicamente conxugado a un campo $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ constante, $Y \equiv (1, 0)$. Polo tanto, só será de interese a estrutura local dun digrama de fases nos seus puntos singulares que, a diferenza dos regulares, presentan unha gran variedade de configuracións a nivel local que non son equivalentes entre si.

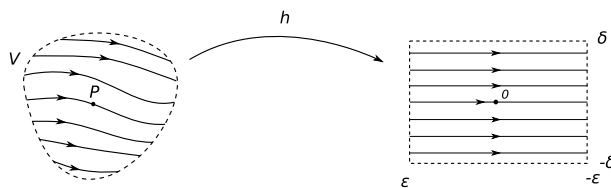


Figura 1.1: Idea da transformación do Teorema do fluxo tubular.

A continuación describimos algunhas estruturas locais relativas a puntos singulares de interese para este traballo.

Definición 1.8. Sexa X o campo vectorial asociado ao sistema (1.1) cunha singularidade (x_0, y_0) . Consideremos veciñanzas compactas de (x_0, y_0) , $V \subset U$, tales que as súas fronteiras ∂V sexan curvas pechadas imaxe dunha aplicación inxectiva, de clase C^2 e regular $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- Se existe V tal que o campo X é entrante ao longo de ∂V , $\forall (x, y) \in V - \{(x_0, y_0)\}$ $\omega(x, y) = \{(x_0, y_0)\}$ e todas as órbitas agás a do punto singular intersecan ∂V diremos que (x_0, y_0) é un *nó/foco atractor*.
- Se existe V tal que o campo X é saínte ao longo de ∂V , $\forall (x, y) \in V - \{(x_0, y_0)\}$ $\alpha(x, y) = \{(x_0, y_0)\}$ e todas as órbitas agás a do punto singular intersecan ∂V diremos que (x_0, y_0) é un *nó/foco repulsor*.
- Se existe V tal que ∂V é unha órbita periódica e todas as órbitas contidas en V , agás a da singularidade, son periódicas diremos que (x_0, y_0) é un *centro*.

Podemos facer unha clasificación das singularidades en función dos autovalores da matriz xacobiana do campo vectorial, DX , avaliada neses puntos. Posteriormente veremos que para certo tipo de puntos singulares a súa estrutura local vén rexida pola do seu *sistema linearizado*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = DX(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Definición 1.9. Sexa $DX(p)$ a matriz xacobiana de X en p , sendo p un punto singular do campo vectorial.

- A singularidade p dirase *non dexenerada* se ningún autovalor de $DX(p)$ é nulo. Se ambos teñen parte real non nula, dirase que a singularidade é *hiperbólica*.
- A singularidade p dirase *semihiperbólica* se só un dos autovalores de $DX(p)$ é nulo (e en consecuencia o outro é real non nulo).
- A singularidade p dirase *nilpotente* se os dous autovalores de $DX(p)$ son nulos, pero $DX(p)$ non é a matriz nula.
- p A singularidade p dirase *dexenerada* se $DX(p)$ é a matriz nula.

Teorema 1.10. Teorema de Hartman-Grobman.

Sexa (x_0, y_0) un punto singular hiperbólico do sistema (1.1). Entón, existe unha veciñanza V de (x_0, y_0) e \hat{V} da orixe tales que os campos $X|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $DX(x_0, y_0)|_{\hat{V}} : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ son topologicamente conxugados.

Como consecuencia deste resultado, a estrutura local nas singularidades hiperbólicas do retrato de fases de (1.1) é equivalente á da orixe do seu sistema linearizado (1.2). A caracterización dos retratos de fase de sistemas lineares de dúas ecuacións é un problema resolto. Procedemos a desglosala segundo os autovalores da matriz asociada, que denotamos por λ_1 e λ_2 , e a súa forma canónica de Jordan J .

- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ a forma canónica de Jordan da matriz asociada é $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
 - Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ entón a orixe é un *nó repulsor*.

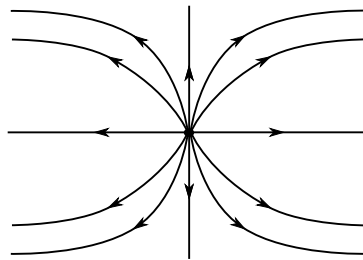


Figura 1.2: Nó repulsor.

- Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ entón a orixe é un *nó atractor*.

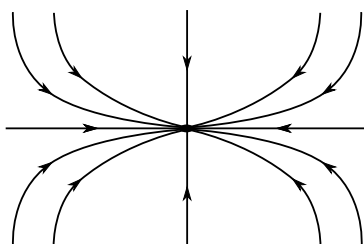


Figura 1.3: Nó atractor

- Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entón a orixe é un *punto de sela*.

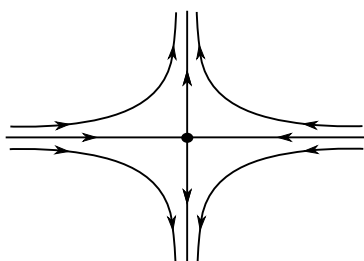


Figura 1.4: Punto de sela.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ a orixe é un *nó impropio*. Dependendo se a forma canónica de Jordan é diagonalizable ou non diagonalizable, presentará dous diagramas de fase distintos:

- Se $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ entón o retrato de fases é equivalente ao ilustrado na Figura 1.5.

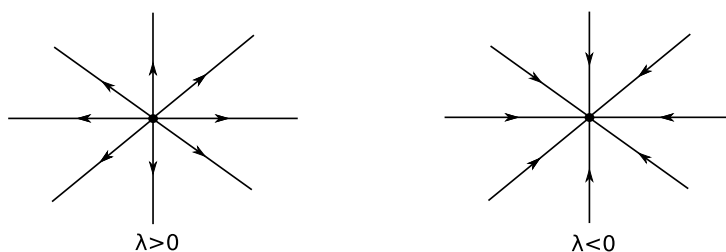


Figura 1.5: Nós impropios con matriz diagonalizable.

- Se $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ entón o retrato de fases é equivalente ao ilustrado na Figura 1.6.

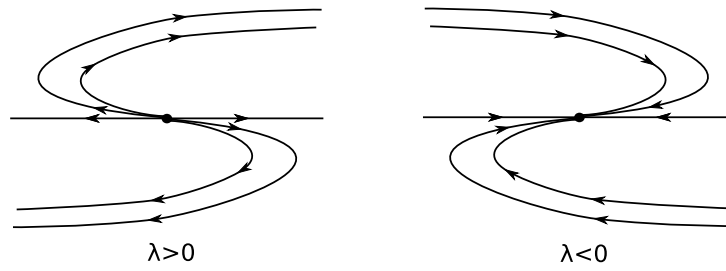


Figura 1.6: Nós improprios con matriz non diagonalizable.

- Se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ a orixe é un *foco*. Se $\alpha > 0$ é repulsor e se $\alpha < 0$. O signo de β determina o sentido de xiro. Dende o centro cara fóra, levará sentido horario se $\beta > 0$ e antihorario se $\beta < 0$, tal e como ilustra a Figura (1.7).

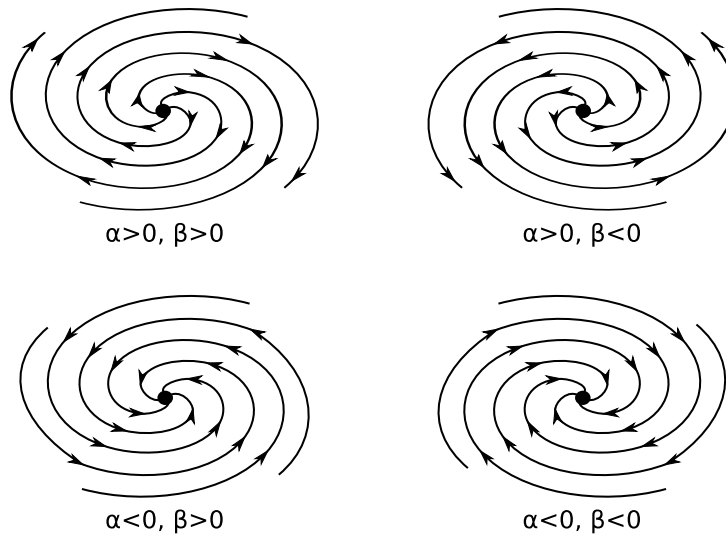


Figura 1.7: Focos.

Para caracterizar as singularidades semihiperbólicas en sistemas polinomiais dispoñemos do seguinte resultado, enunciado e probado en [4] (Teorema 2.19):

Teorema 1.11. Teorema das singularidades semihiperbólicas.

Sexa $(0, 0)$ un punto singular semihiperbólico nun sistema da forma

$$\dot{x} = A(x, y), \quad (1.3)$$

$$\dot{y} = by + B(x, y), \quad (1.4)$$

onde A e B son analíticas nun entorno da orixe, $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ e $DA(0, 0) \equiv DB(0, 0) \equiv 0$ e $b \neq 0$. Sexa $y = f(x)$ solución de $by + B(x, y) = 0$ nun entorno da orixe. Se $A(x, f(x)) = a_m x^m + o(x^m)$, con $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$, existe unha curva invariante que pasa pola orixe tanxente

ao eixo y e onde o campo é conxugado ao da ecuación diferencial

$$\dot{y} = by.$$

Se $a_m = 0$, a curva invariante estará formada por puntos singulares.

Por último, enunciámos un teorema de clasificación de puntos singulares nilpotentes presentado en [4] (Teorema 3.5), no que nos basearemos para realizar a caracterización de centros globais.

Teorema 1.12. Teorema das singularidades nilpotentes

Consideremos un sistema da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + A(x, y), \\ \dot{y} &= B(x, y),\end{aligned}$$

cunha singularidade na orixe, con A e B funcións analíticas nunha veciñanza do $(0, 0)$ e tales que $DA(0, 0) \equiv 0 \equiv DB(0, 0)$. Denotamos por $f(x)$ á solución da ecuación $y + A(x, y) = 0$ na contorna da orixe, e definimos as aplicacións $F(x) = B(x, f(x))$ e $G(x) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) (x, f(x))$.

1. Se $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$ entón o diagrama de fases do sistema é como o ilustrado na Figura (1.8.a).
2. Se $F(x) \equiv 0$ e $G(x) = \mu_n x^n + o(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_n \neq 0$ entón o diagrama de fases do sistema é como o ilustrado nas Figuras (1.8.b) ou (1.8.c).
3. Se $G(x) \equiv 0$ e $F(x) = \lambda_m x^m + o(x^m)$, $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda_m \neq 0$ entón:
 - a) Se m é impar e $\lambda_m > 0$ o sistema ten un punto de sela na orixe, e o diagrama de fases é como o ilustrado na Figura (1.8.d).
 - b) Se m é impar e $\lambda_m < 0$ o sistema ten un centro ou un foco, ilustrados nas Figuras (1.8.e), (1.8.f) e (1.8.g).
 - c) Se m par, o sistema ten unha cúspide na orixe como se ilustra na Figura (1.8.h).
4. Se $F(x) = \lambda_m x^m + o(x^m)$ e $G(x) = \mu_n x^n + o(x^n)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ e $\lambda_m, \mu_n \neq 0$ entón:
 - a) Se m é par e $m < 2n + 1$ o sistema ten unha cúspide na orixe, como se ilustra na Figura (1.8.h).
 - b) Se m é par e $m > 2n + 1$ o diagrama de fases do sistema é equivalente ao ilustrado nas Figuras (1.8.i) ou (1.8.j).
 - c) Se m é impar e $\lambda_m > 0$ o sistema ten un punto de sela como se ilustra en

d) Se m é ímpar e $\lambda_m < 0$ tense que:

- 1) Se $m < 2n + 1$ ou, simultaneamente, $m = 2n + 1$ e $\mu_n^2 + 4\lambda_m(n + 1) < 0$, entón o sistema ten na orixe un centro ou un foco como ilustran as Figuras (1.8.e), (1.8.f), e (1.8.g).
- 2) Se n é ímpar e $m > 2n + 1$ ou, simultaneamente, $m = 2n + 1$ e $\mu_n^2 + 4\lambda_m(n + 1) \geq 0$, entón o sistema ten un retrato de fases arredor da orixe formado por un sector hiperbólico e outro elíptico, tal e como se ilustra na Figura (1.8.k).
- 3) Se n é par e $m > 2n + 1$ ou, simultaneamente, $m = 2n + 1$ e $\mu_n^2 + 4\lambda_m(n + 1) \geq 0$, entón o sistema presenta na orixe un nó, tal e como se ilustra nas Figuras (1.8.l) e (1.8.m), que é atractor se $\mu < 0$ e repulsor se $\mu > 0$.

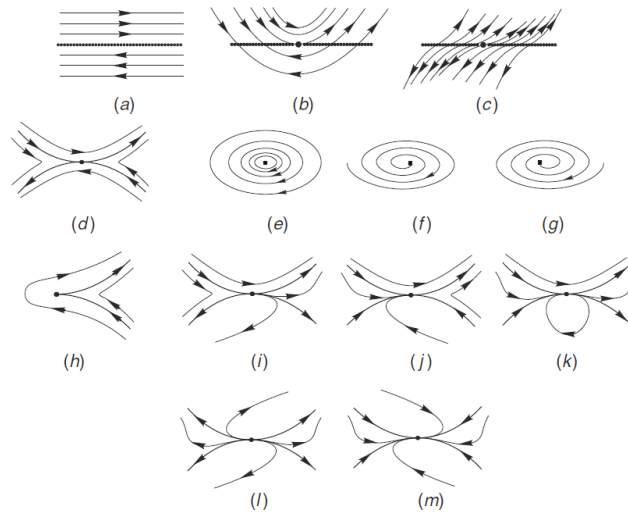


Figura 1.8: Diagramas de fase asociados a sistemas con singularidades nilpotentes. Imaxe extraída de [4].)

Capítulo 2

Clasificación de centros en sistemas polinomiais

2.1. Estrutura local de centros e focos

Recordemos que unha singularidade $p \in U$ do sistema de ecuacións diferenciais dado polo campo $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é un *centro* (Figura 2.1.a) se existe unha veciñanza aberta V de p onde todos os puntos agás o singular forman parte de órbitas periódicas. Se $V = U$ (en particular $V = \mathbb{R}^2$ se o campo vectorial está definido en todo o plano euclídeo) diremos que p é un *centro global*. Chamaremos *anel periódico* á máxima veciñanza que cumpra esta condición.

É claro que os centros sempre son estables, basta tomar como veciñanzas as delimitadas polas órbitas periódicas. Debido a que para calquera órbita pechada ao redor de p se poden atopar veciñanzas máis pequenas que a superficie que cercan, os centros nunca serán asintoticamente estables.

Son estas cualidades de estabilidade non asintótica as que diferencian aos centros das singularidades de tipo *foco*, que ou ben son inestables ou ben asintoticamente estables, e son topologicamente equivalentes a singularidades de tipo *nó*, aínda que non C^r -equivalentes.

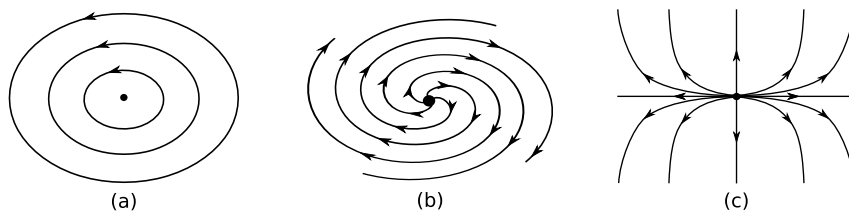


Figura 2.1: Diagrama de fases dun centro (a), dun foco (b) e un nó (c).

En virtude do teorema de Hartman-Grobman, e atendendo á caracterización de singularidades hiperbólicas en sistemas lineares, un punto singular hiperbólico nunca pode ser un centro. Do mesmo xeito, a estrutura local dun centro é incompatible coa curva invariante que interseca as singularidades semihiperbólicas. En consecuencia, podemos clasificar os centros en tres tipos: *centros lineares* cando a singularidade sexa non dexenerada con autovalores imaxinarios puros, *centros nilpotentes* e *centros dexenerados*.

2.2. Tipos de centros en sistemas polinomiais

A partir de agora centrarémonos nos sistemas diferenciais polinomiais, que están definidos en \mathbb{R}^2 . En xeral, todos os sistemas polinomiais cunha singularidade nin hiperbólica nin semihiperbólica presentan unha equivalencia topolóxica cun sistema cun punto singular na orixe e unha compoñente linear máis sinxela. Esta dependerá da natureza da matriz xacobiana do campo orixinal, como veremos no seguinte resultado.

Proposición 2.1. *Todo sistema diferencial polinomial cun centro na singularidade p é topologicamente equivalente a algún dos seguintes, onde P e Q son polinomios de graos n e m , respectivamente.*

1. *Se p é linear:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P(x, y), \\ \dot{y} &= x + Q(x, y).\end{aligned}\tag{2.1}$$

2. *Se p é nilpotente:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{2.2}$$

3. *Se p é dexenerado:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Demostración. En primeiro lugar, un sistema cunha singularidade $p = (a, b) \neq (0, 0)$ é topologicamente equivalente a outro cunha singularidade na orixe, basta realizar unha traslación no espazo. Identificaremos a este sistema equivalente co campo \tilde{X} . Como ten unha singularidade na orixe, os polinomios que o conforman non terán termos independentes.

Vexamos como é o campo do seu sistema linearizado:

$D\tilde{X}(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ onde a_1 e b_1 son os coeficientes dos monomios de grao 1 do polinomio relativo a \dot{x} para x e y , respectivamente; e a_2 e b_2 os análogos para o polinomio relativo a \dot{y} .

O paso dun sistema linear como o dado por $D\tilde{X}(0,0)$ ao xerado pola súa matriz de Jordan consiste nun cambio de coordenadas linear, polo que son topoloxicamente equivalentes. Ademais, este mesmo cambio de coordenadas no sistema dado por \tilde{X} da como resultado outro sistema polinomial topoloxicamente equivalente no que os coeficientes dos monomios de grao 1 son os coeficientes da matriz de Jordan relativa a $D\tilde{X}(0,0)$. Se os autovalores de $D\tilde{X}(0,0)$, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, non son reais, traballaremos cos bloques de Jordan reais para autovalores complexos $R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Determinaremos para que matrices na súa forma canónica a singularidade $(0,0)$ pode ser un centro, e veremos que sistemas polinomiais levan asociados.

En virtude da clasificación de singularidades hiperbólicas, un centro non pode ser un punto singular hiperbólico. Como consecuencia do teorema de singularidades semihiperbólicas, tampouco pode ser semihiperbólico. En definitiva, a matriz xacobiana asociada a un centro non pode ter autovalores con parte real non nula.

Se $D\tilde{X}(0,0)$ só ten o autovalor 0 admite dúas formas de Jordan distintas:

- Se $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o punto singular será *dexenerado* e non haberá termos lineares. O sistema \tilde{X} será da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

- Se $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o punto singular será *nilpotente* e o único termo linear con coeficiente non nulo será o da variable y no polinomio relativo a \dot{x} . Tras un reescalado, o sistema \tilde{X} será da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Se $D\tilde{X}(0,0)$ ten dous autovalores imaxinarios puros (un o conxugado do outro), o punto singular será, de ser un centro, *linear*, e a súa forma canónica será $R = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$. Polo

tanto os únicos termos lineares con coeficientes non nulos serán o da variable y no polinomio relativo a \dot{x} e viceversa. Tras un reescalado, o sistema \tilde{X} será da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + P(x, y), \\ \dot{y} &= x + Q(x, y).\end{aligned}$$

□

Detectar centros en sistemas polinomiais é un problema aberto que presenta certa complexidade. Unha delas é a dificultade para diferenciar se as singularidades son centros ou focos, pois caracterizacións como a do Teorema 1.12 non consegue disternir entre as dúas estruturas. Debido ao interese pola presenza de centros en moitos modelos de sistemas dinámicos e o carácter global dos mesmos, na actualidade hai moitas liñas de investigación procurando resultados neste ámbito. Por exemplo, en [7] demostrouse que os sistemas da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

con P e Q polinomios de grao par non presentan centros globais.

Capítulo 3

Definición do problema: polinomios homoxéneos, simetrías e hamiltonianos

3.1. Sistemas polinomiais homoxéneos

Definición 3.1. Dise que $P(x, y)$ é un *polinomio homoxéneo de grao n* se o grao de todo os seus monomios é exactamente n , i.e., é da forma $P(x, y) = a_{0n}y^n + a_{1n-1}xy^{n-1} + \dots + a_{n0}x^n$.

Neste traballo estudaremos a existencia de centros globais en sistemas polinomiais homoxéneos de grao 5. Existe unha caracterización completa para os centros globais no caso de grao 3 (pódese consultar en [5]). Para grao 5, no artigo [8] completouse unha caracterización para os centros lineares. Basearémonos na súa metodoloxía para afrontar o problema análogo para centros nilpotentes. Na publicación ([6]) abordouse a mesma cuestión que estamos a estudar, chegando a unha caracterización para sistemas con limitacións no número de singularidades no infinito que veremos máis adiante.

De agora en adiante, traballaremos con sistemas da forma (2.2) con P e Q polinomios homoxéneos de grao 5; é dicir, con sistemas da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y) = y + a_{05}y^5 + a_{14}xy^4 + a_{23}x^2y^3 + a_{32}x^3y^2 + a_{41}x^4y + a_{50}x^5, \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_{05}y^5 + b_{14}xy^4 + b_{23}x^2y^3 + b_{32}x^3y^2 + b_{41}x^4y + b_{50}x^5.\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.2. Simetrías e o problema centro-foco

As singularidades nilpotentes non só poden ser centros ou focos, existe unha gran diversidade de estruturas locais asociadas a este tipo de puntos singulares.

Veremos que ao someter ao sistema (3.1) a certas simetrías temporais (pares e impares), en virtude do Teorema de Singularidades Nilpotentes (1.12), poderemos dar unha condición necesaria e suficiente para que a orixe sexa un centro local. Estudaremos o comportamento de dito sistema fronte a 6 formas distintas de simetría:

1. Simetría de TIPO I

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (-x, -y, t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.2)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (-x(t), -y(t))$ tamén o é.

Proposición 3.2. *Todos os sistemas polinomiáis homoxéneos de grao 5 nilpotentes, é dicir, da forma (3.1), presentan a simetría de tipo I.*

Demostración. Sexa (x, y, t) solución de (3.1). Consideremos as funcións $u(t) = -x(t)$ e $v(t) = -y(t)$, entón temos que

$$u'(t) = -x'(t) = -y(t) - P(x(t), y(t)), \quad (3.3)$$

$$v'(t) = -y'(t) = -Q(x(t), y(t)). \quad (3.4)$$

Polo tanto, (u, v, t) será solución de (3.1) se, e só se, cumpre as seguintes condicións:

- a) $u'(t) = v(t) + P(u(t), v(t)) = -y(t) + P(-x(t), -y(t))$. Por 3.3 vemos que haberá simetría só no caso de que $P(-x(t), -y(t)) = -P(x(t), y(t))$. Como en cada monomio de P a potencia dun dos termos é par e a do outro é impar, isto sempre ocorre.
- b) $v'(t) = -Q(u(t), v(t)) = Q(-x(t), -y(t))$. Por 3.4 vemos que haberá simetría só no caso de que $Q(-x(t), -y(t)) = -Q(x(t), y(t))$. Polo mesmo motivo, isto sempre ocorre.

□

En consecuencia, os diagramas de fase presentarán simetría *impar*. Tanto centros como focos poden presentar simetría impar nos seus diagramas de fase.

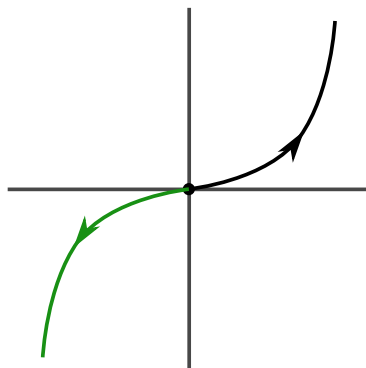


Figura 3.1: Representación de dúas órbitas suxeitas á simetría de tipo I.

2. Simetría de TIPO II

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (-x, -y, -t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.5)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (-x(-t), -y(-t))$ tamén o é.

Proposición 3.3. *Ningún sistema polinomial homoxéneo de grao 5 da forma (3.1) presenta simetría de tipo II.*

Demostración. A simetría de tipo II é incompatible coa simetría I, definida en (3.2), pois as órbitas terían sentidos opostos simultaneamente. \square

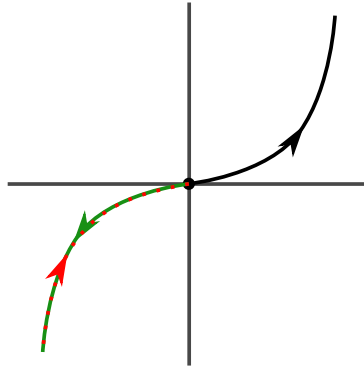


Figura 3.2: Representación dunha órbita (negro) e a súas xemelgas baixo simetría de tipo I (verde) e de tipo II (vermello).

3. Simetría de TIPO III

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (-x, y, -t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.6)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (-x(-t), y(-t))$ tamén o é.

Proposición 3.4. *Un sistema polinómico homoxéneo de grao 5 nilpotente da forma (3.1), presenta simetría III se, e só se,*

$$a_{14}, a_{32}, a_{50}, b_{05}, b_{23}, b_{41} = 0.$$

Demostración. Sexa (x, y, t) solución de (3.1). Consideremos as funcións $u(t) = -x(-t)$ e $v(t) = y(-t)$. Entón, temos que

$$u'(t) = -(-x')(-t) = y(-t) + P(x(-t), y(-t)), \quad (3.7)$$

$$v'(t) = -y'(-t) = -Q(x(-t), y(-t)). \quad (3.8)$$

Debido a isto, (u, v, t) será solución de (3.1) se, e só se, cumpre as seguintes condicións:

- a) $u'(t) = v(t) + P(u(t), v(t)) = y(-t) + P(-x(-t), y(-t))$. Por 3.7 vemos que haberá simetría só no caso de que $P(-x(-t), y(-t)) = P(x(-t), y(-t))$. Iso só ocorre se a primeira variable está elevada a unha potencia par en cada monomio, i. e., $a_{14}, a_{32}, a_{50} = 0$
- b) $v'(t) = -Q(u(t), v(t)) = Q(-x(-t), y(-t))$. Por 3.8 vemos que haberá simetría só no caso de que $Q(-x(-t), y(-t)) = -Q(x(-t), y(-t)) = Q(-x(-t), -y(-t))$. Iso só ocorre se a segunda compoñente está elevada a unha potencia par en cada monomio, $b_{05}, b_{23}, b_{41} = 0$.

□

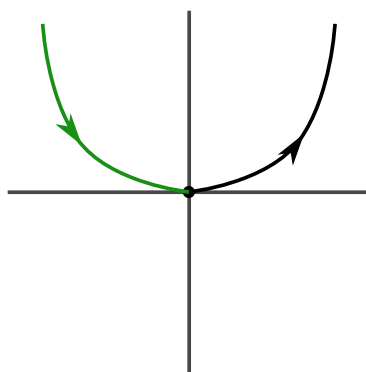


Figura 3.3: Representación de dúas órbitas sometidas á simetría de tipo III (3.6).

4. Simetría de TIPO IV

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (x, -y, -t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.9)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (x(-t), -y(-t))$ tamén o é.

Proposición 3.5. *Un sistema polinomial homoxéneo de grao 5 da forma (3.1) presenta simetría de tipo IV se, e só se,*

$$a_{14}, a_{32}, a_{50}, b_{05}, b_{23}, b_{41} = 0.$$

Demostración. Debido a que a simetría de tipo I definida en (3.2) esta presente en todos os sistemas da forma (3.1), a simetría de tipo IV é equivalente á simetría de tipo III, definida en (3.6). □

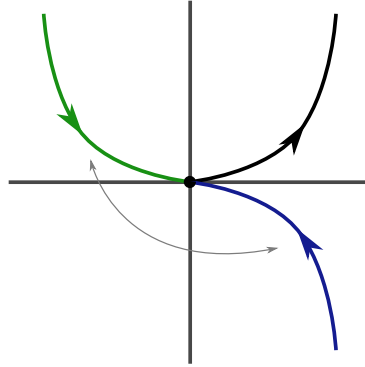


Figura 3.4: Representación dunha órbita (negro) e as súas órbitas xemelgas baixo a simetría III (verde) e IV (azul).(3.9).

Os diagramas de fase, baixo as condicións da simetría de tipo III e IV, presentarán simetría *par* salvo polo sentido das órbitas.

5. Simetría de TIPO V

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (-x, y, t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.10)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (-x(t), y(t))$ tamén o é.

Proposición 3.6. *Ningún sistema polinomial homoxéneo de grao 5 da forma (3.1) presenta simetría de tipo V.*

Demostración. Sexa (x, y, t) solución de (3.1). Consideremos as funcións $u(t) = -x(t)$ e $v(t) = y(t)$. Entón, temos que

$$u'(t) = -x'(t) = -y(t) - (P(x(t), y(t))), \quad (3.11)$$

$$v'(t) = y'(t) = Q(x(t), y(t)). \quad (3.12)$$

En consecuencia, se (u, v, t) será solución de (3.1) entón cumpre a seguinte condición:

$u'(t) = v(t) + P(u(t), v(t)) = y(t) + P(-x(t), y(t))$. Vemos que é incompatible con (3.11) debido ao signo que acompaña ao termo linear. \square

6. Simetría de TIPO VI

$$(x, y, t) \text{ solución de (3.1)} \Rightarrow (x, -y, t) \text{ solución de (3.1)}, \quad (3.13)$$

isto é, se $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ é solución de (3.1) entón $\tilde{\varphi}(t) = (x(t), -y(t))$ tamén o é.

Proposición 3.7. *Ningún sistema polinomial homoxéneo de grao 5 da forma (3.1) presentan simetría de tipo VI.*

Demostración. Dado que a simetría I definida en (3.2) está presente en todos os sistemas, as simetrías de tipo V e VI son equivalentes. \square

Tras este estudo, as únicas simetrías que implican unha restrición sobre os parámetros do sistema son as de tipo III e IV.

Proposición 3.8. *Os sistemas da forma (3.1) sometidos a simetrías de tipo III e IV presentan a forma*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + P(x, y) = y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y, \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + b_{50}x^5.\end{aligned}\tag{3.14}$$

O certo é que esta imposición garda certo sentido cando pensamos en que fenómenos podemos representar con sistemas dinámicos. As simetrías III e IV pódense corresponder con simetrías temporais (pares ou impares segundo cambia o signo), presentes en moitos procesos da Física (velocidades, momentos, enerxías...) e noutras ciencias. En [9] pódese acceder a un repositorio de fontes onde se tratan distintos exemplos de simetrías deste tipo en fenómenos naturais.

Agora vexamos como a acción destas simetrías permítenos obter unha familia de sistemas nas que a presenza dun centro local na orixe está garantida.

Teorema 3.9. Caracterización de centros locais:

Os sistemas da forma (3.14) teñen un centro local na orixe se, e só se, $b_{50} < 0$.

Demostración. Comprobemos que nos atopamos nas hipóteses do Teorema das singularidades nilpotentes (Teorema 1.12). Para o sistema (3.14), $A(x, y) = a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^4 + a_{41}x^4y$ e $B(x, y) = b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + b_{50}x^5$ son funcións analíticas tales que $DA(0, 0)(x, y) = DB(0, 0)(x, y) = 0$. A solución de $y + A(x, y) = 0$ é a función $f(x) = 0$. En consecuencia, temos que

$$\begin{aligned}F(x) &= B(x, 0) = b_{50}x^5, \\ G(x) &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) (x, 0) = 0.\end{aligned}$$

Se consultamos a caracterización dada no Teorema (1.12), os casos nos que a orixe é un centro ou foco son:

- Se $G(x) \equiv 0$, $F(x) = \lambda_m x^m + o(x^m)$ con $m \in \mathbb{N}$ e $\lambda_m < 0$ (3.b).
- Que $G(x) = \mu_n x^n + o(x^n)$, $F(x) = \lambda_m x^m + o(x^m)$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ impar, $\mu_n \neq 0$, $\lambda_m < 0$ e $m < 2n + 1$ (3.d.1).

- Que $G(x) = \mu_n x^n + o(x^n)$, $F(x) = \lambda_m x^m + o(x^m)$ con $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ impar, $\mu_m \neq 0$, $\lambda_m < 0$, $m = 2n + 1$ e $\mu^2 + 4\lambda(n + 1) < 0$ (3.d.1).

Vemos que para este sistema só se pode cumprir o primeiro. Como $m = 5$ e $\lambda_m = b_{5,0}$ a orixe será un centro ou u foco se $b_{5,0} < 0$. A condición tamén é necesaria debido a que no Teorema 1.12) todo sistema polinómico correspóndese a algún dos casos considerados.

Ademáis, grazas á imposición das simetrías III (3.6) e IV (3.9), podemos garantir que os puntos singulares non poden ser focos. Se observamos un diagrama de fases de tipo foco, veremos que as súas órbitas (sen orientación) en ningún caso pode presentar simetría par. Concretamente, dado que as órbitas próximas a un foco trazan unha traxectoria que vira arredor do punto singular nun certo sentido mentres se afastan ou acercan a él, percorrendo todos os cuadrantes de forma periódica, ao reflectilas nun dos eixos coordenados, a órbita xemelga que rota no sentido oposto cortaría á orixinal xustamente no eixo de simetría. Na Figura 3.5 pódese apreciar graficamente.

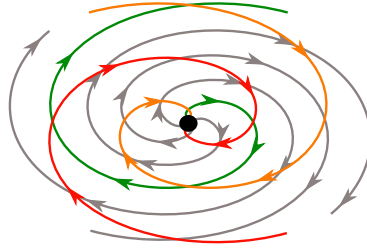


Figura 3.5: Representación gráfica das traxectorias xemelgas a unha órbita (verde) nun foco baixo simetrías III (laranxa) e IV (vermello).

Entón, podemos afirmar que se, e só se, $b_{5,0} < 0$ entón o sistema (3.14) ten un centro na orixe. □

3.3. Sistemas hamiltonianos

Definición 3.10. Sistema hamiltoniano

Un sistema de ecuacións dferenciais en \mathbb{R}^2 é hamiltoniano se é da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

20 3. Definición do problema: polinomios homoxéneos, simetrías e hamiltonianos

Consideremos o sistema (3.14). Sexa $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y + P(x, y) = y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^4 + a_{41}x^4y.$$

Entón $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{a_{05}y^6}{6} + \frac{a_{23}x^2y^4}{4} + \frac{a_{41}x^4y^2}{2} + g(x)$. O sistema será hamiltoniano se, e só se,

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{a_{23}xy^4}{2} - 2a_{41}x^3y^2 + g'(x) = b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + b_{50}x^5 = Q(x, y).$$

Polo tanto, cando os sistemas da forma (3.1) sometidos a simetrías de tipo III e IV son hamiltonianos presentarán a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y, \\ \dot{y} &= -\frac{a_{23}}{2}xy^4 - 2a_{41}x^3y^2 + b_{50}x^5. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Aínda que os sistemas hamiltonianos son de gran interese, a meirande parte dos resultados que desenvolveremos a continuación centráronse no caso xeral, da forma (3.14).

Cómpre observar que, dado que os sistemas da forma (3.16) están nas hipóteses do Teorema 3.9, con $\lambda_m = b_{50}$, a condición necesaria e suficiente para que a orixe sexa un centro local é que $b_{50} < 0$.

Capítulo 4

Carácter global dos centros

Para estudar o carácter global dun centro repararemos esencialmente en dúas cuestións: a unicidade da singularidade no sistema e o carácter das órbitas no infinito. Para isto último introduciremos unha transformación do plano real, a compactificación de Poincaré, que nos permitirá identificar o infinito do plano co ecuador da esfera unidade, e analizaremos o comportamento das órbitas nas súas inmediacións.

4.1. Unicidade da singularidade

Unha condición necesaria para que a orixe sexa un centro global do sistema é que non existan máis puntos singulares finitos en \mathbb{R}^2 . De non ser así, existirían órbitas (en particular a do propio punto singular distinto da orixe) que non serían periódicas en torno á orixe.

Centrándonos no sistema (3.14), como $X(0,0) = (0,0)$ a orixe é sempre un punto singular. Polo tanto, debemos comprobar que o campo só se anula no $(0,0)$.

Proposición 4.1. *Un sistema da forma (3.14) cun centro na orixe ten unha única singularidade se, e só se:*

1. $b_{50} < 0$.
2. $a_{05} \geq 0$.
3. *Cúmrese algunha das seguintes condicións:*
 - a) $b_{32}^2 < 4b_{14}b_{50}$.
 - b) $b_{32}, b_{14} \leq 0$.

c) Se existen os valores $r^\pm = \frac{-b_{32} \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{50}b_{14}}}{2b_{50}}$, tense que $a_{05} + a_{23}r^\pm + a_{41}r^{\pm 2} \geq 0$.

Demostración. Recordemos a forma do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^4 + a_{41}x^4y, \\ \dot{y} &= b_{14}xy^4 + b_{32}x^3y^2 + b_{50}x^5,\end{aligned}$$

no que supoñemos $b_{50} < 0$ para que a orixe sexa un centro local. Estudaremos para que parámetros existen máis puntos singulares. Comecemos polos eixos. Supoñamos que $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ é una singularidade. Como $y = 0$ entón $\dot{x} = 0$. Vexamos cando se anula \dot{y} .

$$\dot{y} = Q(x_0, 0) = b_{50}x_0^5 = 0 \iff b_{50} = 0,$$

o cal se contradice coa condición $b_{50} < 0$. Supoñamos agora que o punto $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, é unha singularidade. Como $x = 0$ entón $\dot{y} = 0$. Vexamos cando se anula \dot{x} .

$$\dot{x} = y_0 + P(0, y_0) = y_0 + a_{05}y_0^5 = 0 \iff y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{-a_{05}}} \text{ ou } y_0 = 0,$$

é dicir, só se $a_{05} < 0$ temos que $(\frac{1}{\sqrt[4]{-a_{05}}}, 0)$ é unha singularidade de (3.14).

Por último, tratemos os puntos (x_0, y_0) , $x_0, y_0 \neq 0$. Primeiro, vexamos cando se anula \dot{y} .

$$\begin{aligned}\dot{y} = b_{14}x_0y_0^4 + b_{32}x_0^3y_0^2 + b_{50}x_0^5 = 0 &\iff b_{14}\frac{x_0}{y_0} + b_{32}\frac{x_0^3}{y_0^3} + b_{50}\frac{x_0^5}{y_0^5} = 0 \\ \iff b_{50}r^4 + b_{32}r^2 + b_{14} = 0, \text{ onde } r = \frac{x_0}{y_0} \neq 0.\end{aligned}$$

Obtemos unha ecuación bicadrada cuxas solucións son da forma

$$r^\pm = \pm \sqrt{\frac{-b_{32} \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{14}b_{50}}}{2b_{50}}}$$

Para que esta solución r^\pm exista e sexa real, e \dot{y} se anule en (x_0, y_0) , precísase que:

- O denominador non sexa 0: $b_{50} \neq 0$. Isto sempre ocorre baixo a condición de que $b_{50} < 0$, que impoñemos para que a orixe sexa un centro.
- O radicando da raíz interior non sexa negativo: $b_{32}^2 \geq 4b_{14}b_{50}$.
- Supoñendo que o anterior se cumpra, o radicando da raíz exterior non pode ser negativo. Recordemos que para que a orixe sexa un centro, $b_{50} < 0$. Polo tanto o numerador tamén debe ser negativo:

$$-b_{32} \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{14}b_{50}} < 0$$

- Se $b_{32} > 0$, sempre haberá polo menos unha solución r^- .

- Se $b_{32} < 0$, só pode haber solución tomando o valor negativo da raíz interior, e só en caso de que $\sqrt{b_{32}^2 - 4b_{14}b_{50}} > -b_{32} \iff b_{14}b_{50} < 0 \iff b_{14} > 0$
- Se $b_{32} = 0$, como $r \neq 0$, necesariamente $b_{14} > 0$.

Baixo estas condicións, $\dot{y} = 0$. Falta ver cando se anula \dot{x} : En primerio lugar, teremos en conta que $x_0 = y_0s$. Se substituímos na expresión de \dot{x} queda:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\iff y_0 + a_{05}y_0^5 + a_{23}r^2y_0^5 + a_{41}r^4y_0^5 = 0 \\ &\iff 1 + a_{05}y_0^4 + a_{23}r^2y_0^4 + a_{41}r^4y_0^4 = 0 \\ &\iff y_0^4 = -\frac{1}{a_{05} + a_{23}r^2 + a_{41}r^4}. \end{aligned}$$

Deducimos que $\exists y_0 \iff a_{05} + a_{23}r^2 + a_{41}r^4 < 0$ para $r = r^+$ o $r = r^-$ segundo existan. Unha vez temos garantida a existencia de y_0 , tamén se garante a de x_0 , e (x_0, y_0) é un punto singular de (3,14).

Desta forma obtemos as condicións para que existan máis singularidades. Baixo as condicións opostas, garantimos a unicidade da singularidade na orixe. \square

Demostraremos un resultado análogo para os sistemas hamiltonianos da forma (3.16):

Proposición 4.2. *Un sistema da forma (3.16) cun centro na orixe ten unha única singularidade se, e só se, cumpre as seguintes tres condicións:*

1. $b_{50} < 0$
2. $a_{05} \geq 0$
3. Cúmprese algún dos seguintes casos:

a) $a_{41}^2 < -\frac{1}{2}a_{23}b_{50}$

b) $a_{41}, a_{23} \geq 0$

Demostración. Recordemos a forma do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^4 + a_{41}x^4y \\ \dot{y} &= \dot{y} = -\frac{a_{23}}{2}xy^4 - 2a_{41}x^3y^2 + b_{50}x^5, \end{aligned}$$

onde supoñemos que $b_{50} < 0$ ara que a orixe sexa un punto singular. Reescribamos as condicións da proposición anterior tendo en conta que $b_{14} = -\frac{1}{2}a_{23}$ e $b_{32} = -2a_{41}$. (Sh) ten unha única singularidade (que ademais é un centro) na orixe se, e só se, cumpre as seguintes tres condicións:

1. $b_{50} < 0$.
2. $a_{05} \geq 0$.
3. Cúmrese algún dos seguintes casos:

$$a) \quad 4a_{41}^2 < 4\frac{-1}{2}a_{23}b_{50} \iff a_{41}^2 < -\frac{1}{2}a_{23}b_{50}.$$

$$b) \quad -2a_{41}, -\frac{1}{2}a_{23} \leq 0 \iff a_{41}, a_{23} \geq 0.$$

- c) Se existen os valores $r^\pm = \frac{2a_{41} \pm \sqrt{4a_{41}^2 + 2b_{50}a_{23}}}{2b_{50}}$, tense que $a_{05} + a_{23}r^\pm + a_{41}r^{\pm 2} \geq 0$. Este último caso é consecuencia directa de que se dea o inmediatamente anterior debido a que r , a efectos prácticos, sempre será un valor positivo (é o cadrado dunha raíz) e os coeficientes da inecuación a_{05} , a_{23} e a_{41} son non negativos polas condicións anteriores. Polo tanto, é un caso particular do segundo caso.

□

Baixo as condicións dadas nas proposicións 4.1 e 4.2, a orixe é a única singularidade dos sistemas (3.14) e (3.16), e ademais é un centro local. O seguinte paso na caracterización será estudar o comportamento das órbitas no infinito.

4.2. Órbitas no infinito

Unha vez coñecemos os sistemas da forma (3.14) que teñen un centro na orixe e ningunha outra singularidade, o derradeiro paso para determinar o seu carácter global é comprobar se a natureza periódica das órbitas se mantén conforme nos afastamos do $(0, 0)$. Noutras palabras, debemos estudar a tendencia do comportamento das traxectorias nun entorno do infinito do plano euclídeo.

Falar do infinito nun conxunto como \mathbb{R}^2 amósase problemático por varios motivos. O primeiro é que, a diferenza de en \mathbb{R} , onde intuitivamente se pode asociar o infinito a dous puntos límite da recta real, a dimensión maior do plano euclídeo lévanos, xeneralizando a idea do caso de dimensión 1, a considerar infinitos pares de puntos límite, un por cada dirección lanzada dende a orixe. O segundo inconvinte é que estes puntos non son elementos de \mathbb{R}^2 onde podamos evaluar o campo asociado ao sistema. Será necesario estender a definición do campo vectorial nun conxunto compacto onde podamos identificar tanto o plano euclídeo como os puntos no infinito, procurando que exista unha equivalencia co campo orixinal nos puntos onde estaba definido.

Existen varias formas de compactificar o plano euclídeo. Por exemplo, a *proxección estereográfica* relaciona cada punto de \mathbb{R}^2 cun punto da esfera salvo o polo Norte N . A esfera sen N non

é un conxunto compacto. Ao engadir o polo Norte estamos compactificando \mathbb{R}^2 adxuntándolle un único elemento que se pode identificar co infinito do plano, pois conforme nos alonxamos da orixe (que na esfera é o polo Sur), as proxeccións aproxímanse ao seu antipodal. Neste caso non estamos recorrendo á idea de múltiples puntos no infinito.

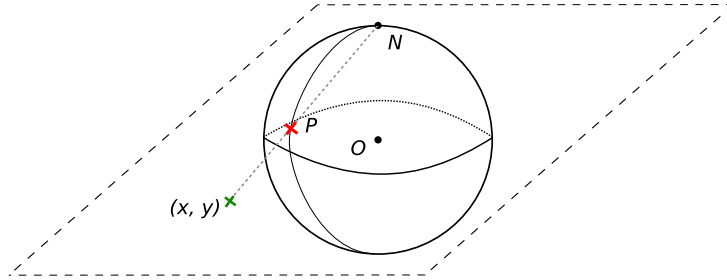


Figura 4.1: Interpretación xeométrica da proxección estereográfica.

Identificar todos os puntos límite no infinito nun mesmo elemento conleva algúns inconvenientes. Un sistema pode presentar comportamentos no infinito moi diferentes para distintas direccións. Ao colapsar todas no mesmo elemento, a estrutura local nese punto pode resultar moi complexa. Por iso, as compactificacións que engadan un elemento por cada punto límite facilitarán a comprensión da natureza das órbitas preto do infinito. A continuación, introucímos unha compactificación destas características.

4.2.1. Compactificación de Poincaré

Nesta sección denotaremos os puntos no espazo como $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos un campo vectorial polinomial $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ definido en \mathbb{R}^2 .

Primeiramente, identifiquemos \mathbb{R}^2 co plano en \mathbb{R}^3 $\pi : x_3 = 1$.

$$\pi = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Consideremos a esfera de radio unidade centrada no $(0, 0, 0)$, $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, á que chamaremos *esfera de Poincaré*. O plano π é tanxente a \mathbb{S}^2 no polo norte $N = (0, 0, 1)$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a recta que une o correspondente punto no plano $(x, y, 1) \in \pi$ co centro da esfera. A recta interseca coa esfera en dous puntos antipodais, tal e como se amosa na Figura 4.2, de forma que un sempre se atopa na semiesfera $\mathbb{S}_+^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0\}$ e o outro na complementaria $\mathbb{S}_-^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 < 0\}$.

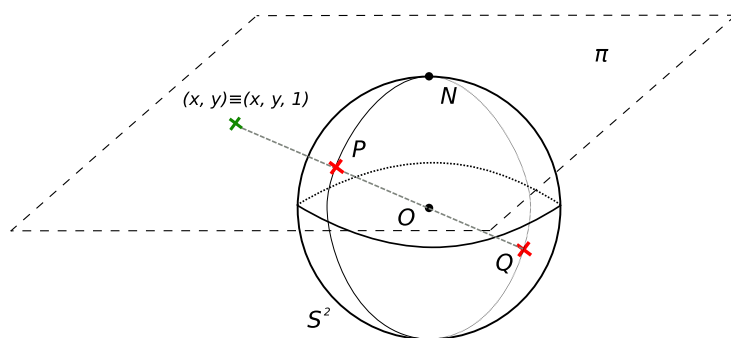


Figura 4.2: Interpretación xeométrica da proxección do plano na esfera de Poincaré.

Podemos construír dúas bixeccións que proxecten cada punto do plano euclídeo nun punto en cada semiesfera. Nótese que ningún elemento de \mathbb{R}^2 se asocia cos puntos do ecuador, que denotaremos por $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. A expresión de ditas aplicacións é a seguinte:

$$f^+(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right),$$

$$f^-(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right).$$

Conforme tomamos puntos do plano euclídeo máis alonxados do $(0, 0, 1)$, as súas dúas proxeccións aproxímanse cara o ecuador da esfera. Se tomamos unha dirección (x_1, x_2) e facemos o límite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f^+(hx_1, hx_2) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{hx_1}{\sqrt{h^2(x_1^2 + x_2^2) + 1}}, \frac{hx_2}{\sqrt{h^2(x_1^2 + x_2^2) + 1}}, \frac{1}{\sqrt{h^2(x_1^2 + x_2^2) + 1}} \right)$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0 \right)$$

obtemos como resultado o punto do ecuador da esfera de Poincaré na dirección dada por $(x_1, x_2, 0)$. Polo tanto, podemos asociar os puntos límite no infinito de \mathbb{R}^2 cos puntos do ecuador de forma biunívoca, de tal forma que podemos identificar o plano euclídeo estendido co compacto $\mathbb{S}_+^2 \cup \mathbb{S}^1$. O mesmo ocorre con $\mathbb{S}_-^2 \cup \mathbb{S}^1$, só que os puntos límite asócianse cos puntos do ecuador na dirección contraria.

Esta compactificación do plano euclídeo recibe o nome de *compactificación de Poincaré*, e será na que nos basearemos para estudar o comportamento das órbitas do sistema no infinito.

Pero antes debemos obter o campo vectorial inducido en cada hemisferio e tratar de extendelo a toda a esfera de Poincaré. Dado que f^+ e f^- son difeomorfismos analíticos, o campo vectorial

que inducen nos dous hemisferios $\tilde{X} : \mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\tilde{X}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} Df^+(x, y)X(x, y) & \text{se } (x_1, x_2, x_3) = f^+(x, y), \\ Df^-(x, y)X(x, y) & \text{se } (x_1, x_2, x_3) = f^-(x, y), \end{cases}$$

non só é homotopicamente conxugado ao campo X , son *analiticamente conxugados*.

Para traballar con campos sobre a superficie da esfera faremos uso de cartas locais. Podemos recubrir a esfera con 6 cartas locais U_i e V_i con $i = 1, 2, 3$ onde

$$U_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_i > 0\}, \\ V_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_i < 0\},$$

nas que definimos os mapas $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\phi_i(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_j}{x_i}, \frac{x_k}{x_i} \right), \text{ con } j, k \neq i, j < k \\ \psi_i(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-x_j}{x_i}, \frac{-x_k}{x_i} \right), \text{ con } j, k \neq i, j < k$$

É claro que os mapas son bixectivos e diferenciables. Para as veciñanzas U_1, U_2, V_1, V_2 cómpre salientar que os puntos no ecuador da esfera ($x_3 = 0$) se identificarán no sistema de coordenadas (u, v) co eixo $\{(u, 0) \in \mathbb{R}^2 : u \in \mathbb{R}\}$ (Figura 4.3).

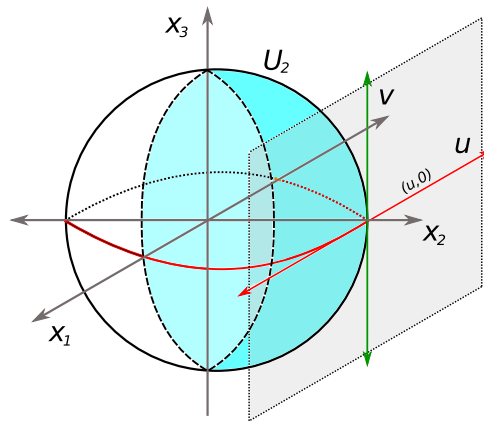


Figura 4.3: Idea xeométrica da carta en U_2 .

De agora en adiante traballaremos sobre as cartas de U_1 e U_2 . O noso obxectivo é atopar unha extensión do campo \tilde{X} nos puntos do ecuador, e dado que tales puntos están recubertos polas catro veciñanzas coordenadas U_1, U_2, V_1, V_2 , podemos restrinxirnos a estender o campo inducido en \mathbb{R}^2 nelas. Ademais, tal e como se constrúen ϕ_i e ψ_i , os campos inducidos serán simétricos e a extensión en V_i será análoga a de U_i .

Denotamos por $\bar{X}|_{U_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo inducido dado por

$$\bar{X}|_{U_1}(u, v) = \begin{cases} D\phi_1(f^+(x, y)) \circ Df^+(x, y)X(x, y) & \text{se } v = (\phi \circ f^+)(x, y) > 0, \\ D\phi_1(f^-(x, y)) \circ Df^-(x, y)X(x, y) & \text{se } v = (\phi \circ f^-)(x, y) < 0. \end{cases}$$

Podemos centrarnos no semiplano $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ dado que f^+ e f^- inducen campos simétricos. Tendo en conta que

$$(\phi_1 \circ f^+)(x, y) = \phi_1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right) = \left(\frac{y}{x}, \frac{1}{x} \right) = (u, v), \quad (4.1)$$

e que o campo orixinal é da forma $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, con P e Q polinomios de grao m e n respectivamente, tense que

$$\begin{aligned} \bar{X}|_{U_1}(u, v) &= D\phi_1(\phi_1(f^+(x, y))) \circ Df^+(f^+(x, y))X(x, y) = D(\phi_1 \circ f^+)(x, y)X(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2}P(x, y) + \frac{1}{x}Q(x, y) \\ -\frac{1}{x^2}P(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uvP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + vQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \\ -v^2P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Este campo non é, en xeral, extensible aos puntos do ecuador identificados por $(u, 0)$, $u \in \mathbb{R}^\neq$. Para $v = 0$ o denominador se anula nos polinomios P e Q . Porén, multiplicar o campo por un termo v^d con expoñente suficientemente grande permitiría eliminar os denominadores, de xeito que a extensión aos puntos do ecuador é trivial. Basta tomar $d = \max\{m, n\} - 1$. O campo resultante é topoloxicamente (e analiticamente) equivalente ao orixinal, pois o factor é non nulo nos puntos do semiplano aberto.

Como indicamos anteriormente, podemos restrinxirnos ao semiplano que identifica o hemisferio positivo correspondente na esfera, que denominaremos *disco de Poincaré*. O campo extendido en U_1 describe o sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^d \left(Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) - uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right), \\ \dot{v} &= -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

De forma análoga a en U_1 pódese estender o campo en U_2 , obtendo o sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^d \left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right), \\ \dot{v} &= -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Agora podemos aplicar a compactificación aos sistemas da forma 3.14:

- Na carta local U_1 obtemos o sistema compactificado

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v^4 u^2 - a_{05} u^6 + (b_{14} - a_{23}) u^4 + (b_{32} - a_{41}) u^2 + b_{50}, \\ \dot{v} &= -v^5 u - a_{05} v u^5 - a_{23} v u^3 - a_{41} v u.\end{aligned}\tag{4.4}$$

- Na carta local U_2 obtemos o sistema compactificado

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v^4 - b_{50} u^6 + (a_{41} - b_{32}) u^4 + (a_{23} - b_{14}) u^2 + a_{05}, \\ \dot{v} &= -b_{14} v u - b_{32} v u^3 - b_{50} v u^5.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Nótese que $\dot{v} = 0$ se $v = 0$ tanto en U_1 como en U_2 .

4.2.2. Singularidades no infinito

Na etapa final deste proceso de caracterización basearémonos no seguinte teorema, demostrado en [8]:

Teorema 4.3. *Un sistema de ecuacións diferenciais polinómicas $(\dot{x}, \dot{y}) = (p(x, y), q(x, y))$ sen unha liña de singularidades no infinito ten un centro global se, e só se, ten unha única singularidade, que é un centro, e todos os puntos singulares no infinito, se existen, teñen un retrato de fases local formado por dous sectores hiperbólicos cuxas separatrices están no ecuador (na compactificación de Poincaré).*

No enunciado deste problema faise referencia ao concepto de sector hiperbólico. Consideremos un campo X cunha singularidade illada p nunha veciñanza aberta V de tal xeito que todo $q \in V$ distinto de p é un punto regular. Supoñamos que existen dúas órbitas que tenden a p nalgún sentido e que atravesan transversalmente V , delimitando unha rexión na veciñanza. Diremos que a rexión é un sector hiperbólico se para todos os puntos \tilde{q} no interior da rexión, $\partial V \cap \gamma_{\tilde{q}}^+ \neq \emptyset \neq \partial V \cap \gamma_{\tilde{q}}^-$. Exemplos de sectores hiperbólicos son os descritos polos puntos de sela.

Nos sistemas da forma (3.14) xa coñecemos baixo que parámetros a orixe é un centro local. Só queda comprobar como é o retrato de fases en cada singularidade do infinito. Pero antes, convén facer algunhas apreciacións:

En primeiro lugar, é claro que para o campo extendido (4.4, 4.5), tanto en U_1 como en U_2 , \dot{v} se anula sempre para os puntos $(u_0, 0)$, $u_0 \in \mathbb{R}$. Polo tanto, para comprobar se existen singularidades no infinito podemos restrinxir o estudo a \dot{u} .

Ademais, nas ecuacións de \dot{u} en U_1 e U_2 , todas as variables están elevadas a expoñentes pares. En consecuencia, se $(u_0, 0)$ é un punto singular, tamén o é $(-u_0, 0)$.

Por último, a carta local U_1 solápanse con U_2 , en concreto, o semiplano positivo respecto a variable u de U_1 coincide co semiplano negativo respecto a mesma variable de U_2 . Se existe unha singularidade distinta da orixe en U_1 , garantiríase a existencia de outra distinta en U_2 .

Debido a estas tres observacións, podemos limitar o estudo do sistema na carta local U_1 á súa orixe, pois calquera outra singularidade correspóndese coa existencia doutra en U_2 . Tamén poderíase estudar a orixe en U_2 e todo o eixo $v = 0$ en U_1 , pero veremos que para os sistemas que consideramos a primeira opción é máis conveniente.

O Teorema 4.3 enúnciase baixo a hipótese de que non haxa un continuo de singularidades no infinito. Vexamos que todos os centros locais da forma (3.14) cumpren esta condición:

Proposición 4.4. *Sexa X o campo vectorial asociado a un sistema de ecuacións diferenciais da forma (3.14). Se a orixe é un centro local, a compactificación de Poincaré de X non presentará un continuo de singularidades no infinito.*

Demostración. En virtude do Teorema 3.9, por ser a orixe un centro local, $b_{50} < 0$. En consecuencia, como na carta local U_1 $\dot{u}|_{(u,v)=(0,0)} = b_{50}$, nunca haberá un punto singular na orixe de U_1 . \square

Na proba do resultado anterior concluímos que nunca haberá unha singularidade na orixe da carta local U_1 , e polo tanto podemos restrinxir a busca de puntos singulares no eixo $v = 0$ en U_2 . Dado que neste eixo se verifica sempre $\dot{v} = 0$, o cálculo de puntos singulares radica en atopar raíces do polinomio \dot{u} en U_2 .

$$\dot{u}|_{v=0} = -b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2 + a_{05}.$$

O polinomio terá ao sumo 6 raíces, que se corresponderían con 6 singularidades no infinito. Como en V_2 o campo é simétrico a en U_2 , en total haberá como máximo 12 singularidades no infinito (os únicos puntos fóra de U_2 e V_2 son as orixes en U_1 e V_1 , onde xa se comprobou a regularidade do campo).

Para acadar unha caracterización completa dos centros globais nos sistemas (3.14) podemos analizar de forma illada os sistemas que teñan un número concreto de singularidades no infinito. Unha vez se estuden todos os casos posibles (0, 2, 4, 6, 8, 10, e 12), a caracterización estará completa. Nós imos tratar os dous primeiros casos.

Comecemos cos sistemas que non teñen singularidades no infinito. En virtude da proposición 4.3, se os sistemas (4.4) non presentan ningunha singularidade no infinito son centros globais.

Proposición 4.5. *Un sistema de ecuacións diferenciais polinómicas $(\dot{x}, \dot{y}) = (p(x, y), q(x, y))$ da forma (3.14) ten un centro global sen singularidade no infinito se, e só se, cumpre as seguintes condicións:*

1. $b_{50} < 0$.
2. $a_{05} > 0$.
3. Cúmrese algunha das seguintes condicións:
 - a) $b_{32}^2 < -4b_{14}b_{50}$.
 - b) $b_{32}, b_{14} < 0$.
 - c) Dado $r^\pm = \frac{-b_{32}^\pm \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{50}b_{14}}}{2b_{50}}$, tense que $a_{05} + a_{23}r^\pm + a_{41}r^{\pm 2} > 0$.
4. Cúmrese algunha as seguintes condicións:
 - a) $(b_{32} - a_{41})^2 \leq -3b_{50}(a_{23} - b_{14})$.
 - b) $w^+ = \frac{2(b_{32} - a_{41}) + \sqrt{4(b_{32} - a_{41})^2 + 12b_{50}(a_{23} - b_{14})}}{-6b_{50}} < 0$.
 - c) $-b_{50}w^{+3} + (a_{41} - b_{32})w^{+2} + (a_{23} - b_{14})w^+ + a_{05} > 0$.

Demostración. Queremos saber para que parámetros o polinomio

$$\dot{u} = -b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2 + a_{05} = g(u)$$

non ten raíces reais. En primeiro lugar, notemos que $g(0) = a_{05}$. Se $a_{05} = 0$, o sistema terá unha singularidade na orixe de U_2 . En consecuencia, dado que para que a singularidade na orixe sexa única $a_{05} \geq 0$, para que o polinomio non teña raíces reais debemos esixir $a_{05} < 0$.

Facendo o cambio de variable $w = u^2$, obtemos o polinomio $\tilde{g}(w) = -b_{50}w^3 + (a_{41} - b_{32})w^2 + (a_{23} - b_{14})w + a_{05}$. Queremos ver cando este polinomio non ten raíces non negativas. Para iso, consideremos o seu polinomio derivado $\tilde{g}'(w) = -3b_{50}w^2 + 2(a_{41} - b_{32})w + (a_{23} - b_{14}) = g(u)$ e estudemos a monotonía de \tilde{g} . Os ceros de \tilde{g}' , se existen, son da forma

$$\frac{2(b_{32} - a_{41}) \pm \sqrt{4(b_{32} - a_{41})^2 + 12b_{50}(a_{23} - b_{14})}}{-6b_{50}}.$$

- **Se non existen ceros reais de \tilde{g}'** , a función \tilde{g} é monótona crecente (esiximos que $b_{50} < 0$ para que a singularidade na orixe de \mathbb{R}^2 sexa un cero, e polo tanto o coeficiente do monomio de maior grado de \tilde{g} é positivo). Dado que $\tilde{g}(0) = a_{05} > 0$, \tilde{g} non terá raíces positivas. Isto ocorre se $(b_{32} - a_{41})^2 < -3b_{50}(a_{23} - b_{14})$.
- **Se hai un só cero real de \tilde{g}'** , a función \tilde{g} tamén é monótona crecente, e dado que $\tilde{g}(0) = a_{05} > 0$, \tilde{g} non terá raíces positivas. Isto ocorre se $(b_{32} - a_{41})^2 = -3b_{50}(a_{23} - b_{14})$.
- **Se hai dous ceros reais de \tilde{g}'** , que denotamos por $w^- < w^+$, tense que:
 - Se $w^+ \leq 0$, dado que $\lim_{w \rightarrow \infty} \tilde{g}(w) = \infty$ e $\tilde{g}(0) = a_{05} > 0$, \tilde{g} non terá raíces positivas. Isto ocorre se $\frac{2(b_{32} - a_{41}) + \sqrt{4(b_{32} - a_{41})^2 + 12b_{50}(a_{23} - b_{14})}}{-6b_{50}} < 0$.

- Se $w^+ > 0$, dado que $\lim_{w \rightarrow \infty} \tilde{g}(w) = \infty$ e $\tilde{g}(0) = a_{05} > 0$, que \tilde{g} teña raíces positivas implica que existe $\tilde{w} \in [t_1, \infty) \cap [0, \infty)$ tal que $\tilde{g}(\tilde{w}) = 0$. Os únicos puntos onde \tilde{g} pode acadar o seu mínimo nese pechado son $w = 0$ e w^+ , pero $\tilde{g}(0) > 0 = \tilde{g}(\tilde{w})$, polo que $\tilde{g}(w^+) \leq 0$. Isto ocorre se $-b_{50}w^{+3} + (a_{41} - b_{32})w^{+2} + (a_{23} - b_{14})w^+ + a_{05} \leq 0$.

□

Tratemos agora os sistemas con dúas singularidades na orixe. Como xa se viu en apartados anteriores, se existe unha singularidade na carta local U_2 , existirá outra distinta en V_2 . Polo tanto, o caso dunha única singularidade no infinito non é posible. O caso de dous puntos singulares si o é, pero de forma moi restrinxida, pois sabemos que calquera punto distinto da orixe da forma $(u_0, 0)$ terá o mesmo carácter a efectos de anular \dot{u} en (4.5) que $(-u_0, 0)$. En conclusión, a única posibilidade é ter dous puntos singulares nas orixes de U_2 e V_2 .

A continuación estableceremos baixo que condicións os sistemas da forma (3.14), cun centro local na orixe como única singularidade, teñen exactamente dous puntos singulares no infinito, nas orixes das cartas locais U_2 e V_2 .

En primeiro lugar, recordemos que se o sistema (3.14) ten un centro na orixe como única singularidade, entón:

1. $b_{50} < 0$.
2. $a_{05} > 0$.
3. Cúmprese algún dos seguintes casos:

a) $b_{32}^2 < -4b_{14}b_{50}$

b) $b_{32}, b_{14} < 0$

c) Dado $r^\pm = \frac{-b_{32} \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{50}b_{14}}}{2b_{50}}$, tense que $a_{05} + a_{23}r^\pm + a_{41}r^{\pm 2} > 0$.

Recordemos tamén a expresión de \dot{u} na carta local U_2 (4.5):

$$\dot{u} = v^4 - b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2 + a_{05}.$$

Vemos que haberá un punto singular nas orixes de U_2 e V_2 se, e só se, $a_{05} = 0$; o cal é compatible coas condicións para a existencia dun centro local como única singularidade do sistema (3.14).

Vexamos agora baixo que parámetros non hai máis singularidades no eixo $v = 0$ de U_2 .

Consideremos puntos $(u, 0) \in U_2$, $u \neq 0$. Entón,

$$\begin{aligned} \dot{u}|_{v=0} = b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2 = 0 &\iff b_{50}t^3 + (a_{41} - b_{32})t^2 + (a_{23} - b_{14})t = 0 \\ &\iff b_{50}t^2 + (a_{41} - b_{32})t + (a_{23} - b_{14}) = 0 \\ &\iff t = \frac{-(a_{41} - b_{32}) \pm \sqrt{(a_{41} - b_{32})^2 + 4(a_{23} - b_{14})b_{50}}}{-2b_{50}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se $\exists t > 0$ solución da ecuación anterior, o campo compactificado anúlase en máis puntos do infinito. Vexamos baixo que parámetros iso non é posible.

1. $\nexists t$ solución de (4.6): Como $b_{50} < 0$, a única forma de que non exista solución para (4.6) é que o radicando sexa negativo, é dicir, que $(a_{41} - b_{32})^2 < -4(a_{23} - b_{14})b_{50}$.
2. As solucións de (4.6) non son positivas: Dado que o denominador é positivo, buscamos numeradores negativos ou nulos. Supoñendo que existan valores reais da raíz cadrada, se $a_{41} - b_{32} < 0$, tomando o valor positivo da raíz sempre existirá unha solución positiva da ecuación. Se $a_{41} - b_{32} \geq 0$, para obter un valor do numerador negativo ou nulo saxa cal sexa o signo da raíz precisamos que o resultado desta sexa, en valor absoluto, maior ou igual que que $(a_{41} - b_{32})$, é dicir, que $4(a_{23} - b_{14})b_{50} \leq 0 \iff a_{23} - b_{14} \geq 0$.

Recopilando, para que non haxa máis singularidades en U_2 (e polo tanto en V_2) ha de cumprirse que $a_{23} - b_{14} \geq 0$ e algunha das seguintes condicións:

1. $(a_{41} - b_{32})^2 < -4(a_{23} - b_{14})b_{50}$.
2. $a_{41} - b_{32} \geq 0$.

Agora estudemos como é o diagrama de fases da orixe da carta local U_2 . Recordemos a expresión do campo extendido na carta local U_2 (4.5), que denotaremos por $\hat{X}|_{U_2}$, con $a_{05} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v^4 - b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2, \\ \dot{v} &= -b_{14}vu - b_{32}vu^3 - b_{50}vu^5. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A matriz xacobiana de X avaliada na orixe é nula, $D\hat{X}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, polo que non podemos obter conclusións inmediatas sobre a súa estrutura local. Para estudar o comportamento das órbitas preto da singularidade, aplicaremos uns cambios de variables, denominados *directional blow ups* ou *explosións direccionais*, de forma que a orixe se expandirá ao longo dun dos eixos, dando lugar a unha recta formada por puntos singulares. Unha vez estudada a estrutura local de cada un, ao desfacer correctamente os cambios de variable obtense unha descripción completa do diagrama de fases nas inmediacións da singularidade inicial.

4.2.3. Transformacións blow-up

Ao contrario que para as singularidades hiperbólicas, semihiperbólicas e nilpotentes, non existe un teorema de clasificación de singularidades dexeneradas que permita caracterizar de forma inmediata a súa estrutura local. Porén, existen técnicas aplicables a cada caso de forma individual coas que acadar unha descrición precisa do comportamento das órbitas nas inmediacións destas singularidades en sistemas polinomiais.

Consideremos o sistema con singularidade na orixe

$$\begin{aligned} \dot{x} = P(x, y) &= P_m(x, y) + \sum_{i=m+1}^{M_P} P_i(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) &= Q_m(x, y) + \sum_{i=m+1}^{M_Q} Q_i(x, y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde P_i e Q_i son polinomios homoxéneos de grao $i \in \mathbb{N}$ e M_P e M_Q son o graos de P e Q , respectivamente, e m o menor grao para o que P_m ou Q_m non é nulo. Só consideraremos sistemas onde P_m e Q_m sexan coprimos.

Facendo un cambio a coordenadas polares $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ e eliminando factores comúns obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sum_{i=1}^{M_P} \mathcal{G}_i(\cos(\theta), \sen(\theta)) r^i \\ \dot{\theta} &= \mathcal{F}(\cos(\theta), \sen(\theta)) + \sum_{i=1}^{M_Q} \mathcal{F}_i(\cos(\theta), \sen(\theta)) r^i, \end{aligned} \quad (4.9)$$

con \mathcal{F} , \mathcal{F}_i e \mathcal{G}_i polinomios $i \in \mathbb{N}$.

Definición 4.6. Chamamos *direccións características* aos ángulos $\theta \in [0, 2\pi)$ que son raíces do polinomio característico \mathcal{F} , cuxa expresión en coordenadas cartesianas é $\mathcal{F}(x, y) = xQ_m(x, y) - yP_m(x, y)$. Cada termo linear do polinomio correspóndese cunha dirección caracterísitca. Diremos que a orixe é una *singularidade non diacrítica* se \mathcal{F} non é nulo.

No caso de que o polinomio característico sexa nulo, $\mathcal{F} \equiv 0$, diremos que a orixe é unha *singularidade diacrítica*. Entón, dado que $\mathcal{F}(x, y) = xQ_m(x, y) - yP_m(x, y)$, tense que $P_m(x, y) = xR_{m-1}(x, y)$ e $Q_m(x, y) = yR_{m-1}(x, y)$, con R_{m-1} un polinomio de grao $m - 1$ homoxéneo. Se $y - \eta x$ é un factor linear do polinomio $R_{m-1}(x, y)$, diremos que os ángulos $\hat{\theta} \in [0, 2\pi)$ tales que $\tan(\hat{\theta}) = \eta$ son *direccións singulares*.

A continuación introducimos dous tipos de cambios de variables que extenden a singularidade de formas xeometricamente distintas, pero que serán equivalentes.

Definición 4.7. O cambio de variable dado pola aplicación $\Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Psi(s, t) = (s, st)$ denomínase *transformación blow up homoxénea na dirección de x* (en inglés *homogeneous x -directional blow up*). Expande a orixe do sistema (4.8) na dirección $x = s = 0$ en \mathbb{R}^2 , dando lugar a unha recta formada integramente por puntos singulares, e intercambia o segundo o terceiro cuadrante. Tras realizar o cambio de variable sobre o sistema (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}|_{(s,st)} = P(s, st) \\ \dot{t} &= \frac{\dot{y}|_{(s,st)}x - \dot{x}|_{(s,st)}y}{x^2} = \frac{Q(s, st)s - P(s, st)st}{s^2} = \frac{Q(s, st) - P(s, st)t}{s}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pódese definir un cambio de variables análogo na dirección $y = 0$, que expande a orixe nunha recta horizontal de singularidades e intercambia o terceiro e cuarto cuadrantes. Nos limitaremos ao uso das explosións x -direccionais.

O factor común en forma de potencia de s produce a liña de singularidades no eixo $s = 0$. Ao cancelalo, o continuo de singularidades desaparece. O novo campo anúlase nun número finito de puntos da recta. Estes poden volver a ser dexenerados, e para estudar a súa estrutura local deberíamos aplicar unha nova transformación *blow up*. En [3] demostrouse que o proceso iterativo de transformar as novas singularidades ata que non resulten dexeneradas é sempre finito.

Aínda que os sistemas obtidos mediante estes cambios non son topologicamente equivalentes aos orixinais (as aplicación que constrúen non son homeomorfismos), unha vez coñecemos a estrutura local de todas as singularidades xeneradas, ao desfacer correctamente as transformación obtemos a descrición da estrutura do punto singular orixinal. Os seguintes resultados, enunciados en [1], relacionan o comportamento das órbitas nos sistemas expandidos coas traxectorias dos orixinais.

Proposición 4.8. *Consideremos un sistema da forma (4.8) onde a orixe é unha singularidade non diacrítica e supoñamos que existe unha órbita, parametrizada como curva por $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, que ten á singularidade por conxunto límite nalgún sentido e que é tanxente a unha dirección angular solución de $\tan(\theta) = \eta \in \mathbb{R}$. Entón, terase que:*

1. *As direccións dadas polos ángulos θ tales que $\tan(\theta) = \eta$ son direccións características en (4.10).*
2. *O sistema (4.10), tras a cancelación do factor común, presentará unha singularidade no punto $(0, \eta)$.*
3. *Tras realizar o cambio de variable Ψ_2 sobre (4.8), a órbita parametrizada por $\varphi(t)$ transfórmase nunha traxectoria que tende á singularidade $(0, \eta)$ no mesmo sentido. Ademais, calquera outra órbita do sistema (4.10) que tenda a esa singularidade corresponderase a*

unha órbita que tende á orixe no sistema (4.8), e faíno tanxente a algunha das direccións principais dadas por $\tan(\theta) = \eta$

Proposición 4.9. *Consideremos un sistema da forma 4.8 onde a orixe é unha singularidade diacrítica. Entón, para calquera dirección que non sexa singular existirá unha única órbita que tenda á orixe tanxente a dita dirección. Para aquelas direccións que sexan singulares, pode haber tanto un número finito ou infinito de órbitas tanxentes que tendan á orixe como non haber ningunha.*

Facendo uso desta técnica trataremos de acadar información sobre a singularidade dexenerada na orixe do sistema (4.7).

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v^4 - b_{50}u^6 + (a_{41} - b_{32})u^4 + (a_{23} - b_{14})u^2 \\ \dot{v} &= -b_{14}vu - b_{32}vu^3 - b_{50}vu^5\end{aligned}$$

Aplicando as transformacións *blow up* homoxéneas direccionais, acadamos unha condición necesaria para a existencia de centro global:

Proposición 4.10. *Un sistema de ecuacións diferenciais polinomiais $(\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y))$ forma (3.14) onde $a_{23}^2 + b_{14}^2 \neq 0$ cun centro global con dúas singularidades no infinito cumpre as seguintes condicións:*

1. $b_{50} < 0$
2. $a_{05} = 0$
3. $a_{23} > 0$
4. $a_{23} \geq b_{14}$
5. *Cúmrese algún dos seguintes casos:*
 - a) $b_{32}^2 < -4b_{14}b_{50}$
 - b) $b_{32}, b_{14} < 0$
 - c) *Dado $r^\pm = \frac{-b_{32} \pm \sqrt{b_{32}^2 - 4b_{50}b_{14}}}{2b_{50}}$, tense que $a_{05} + a_{23}r^\pm + a_{41}r^{\pm 2} > 0$.*
 - d) *Cúmrese algún dos seguintes casos:*
 - 1) $(a_{41} - b_{32})^2 < 4(b_{14} - a_{23})b_{50}$
 - 2) $a_{41} - b_{32} \geq 0$

Demostración. Consideremos un sistema da forma (3.14) que, baixo as condicións descritas na Proposición 4.1, presenta unha única singularidade de tipo centro na súa orixe. Como consecuencia da Proposición 4.4, o estudo das singularidades no infinito da súa compactificación de

Poincaré pódese restrinxir á carta local U_2 , que presenta a forma (4.5). Supoñamos que $a_{05} = 0$ e que polo tanto a orixe da carta U_2 é unha singularidade. Ademais, se supoñemos que $a_{23} - b_{14} \geq 0$ e que se cumpre ou ben $(a_{41} - b_{32})^2 < -4(a_{23} - b_{14})b_{50}$ ou ben $a_{41} - b_{32} \geq 0$, a singularidade é única no eixo $v = 0$.

A matriz xacobiana asociada ao sistema avaliada no $(0, 0)$ é nula, polo tanto a singularidade é dexenerada. Se os parámetros a_{23} e b_{14} non son simultaneamente nulos, o seu polinomio característico asociado é $\mathcal{F}(u, v) = -b_{14}u^2v - (a_{23} - b_{14})u^2v = -a_{23}u^2v$ con $m = 2$. Se $a_{23} = 0$, a singularidade é diacrítica, con $R_1(u, v) = -b_{14}u$. A dirección dada por $u = 0$ é a única singular. Para o resto de direccións existe unha órbita que tende á orixe tanxente a elas. Isto imposibilita que a estrutura local da singularidade no infinito presente dous sectores hiperbólicos, tal como esixe o Teorema 3.9 para a existencia dun centro global.

Se $a_{23} \neq 0$, a singularidade é non diacrítica. Observando o polinomio característico vemos que $u = 0$ é unha dirección característica. Dado que só queremos facer uso das transformacións *blow up* verticais, será preciso facer un cambio de variable previo $(u_1, v_1) \rightarrow (u_1 - v_1, v_1) = (u, v)$ que traslade a dirección caracterísitca $u = 0$ a $u + v = 0$. O resultado é o sistema

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (a_{23} - b_{14})(u_1 - v_1)^2 + (a_{41} - b_{32})(u_1 - v_1)^4 - b_{50}(u_1 - v_1)^6 \\ &\quad - b_{14}(u_1 - v_1)v_1 - b_{32}(u_1 - v_1)^3v_1 - b_{50}(u_1 - v_1)^5v_1 + v_1^4 \\ \dot{v}_1 &= -b_{14}(u_1 - v_1)v_1 - b_{32}(u_1 - v_1)^3v_1 - b_{50}(u_1 - v_1)^5v_1. \end{aligned}$$

Agora si podemos realizar o primeiro *blow up* na dirección de u_1 mediante o cambio de variable $(u_2, v_2) \rightarrow (u_2, u_2v_2) = (u_1, v_1)$. Tras eliminar o factor común u_2 , obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= u_2(a_{23} - b_{14} + a_{41}u_2^2 - b_{32}u_2^2 - b_{50}u_2^4 - 2a_{23}v_2 + b_{14}v_2 \\ &\quad - 4a_{41}u_2^2v_2 + 3b_{32}u_2^2v_2 + 5b_{50}u_2^4v_2 + a_{23}v_2^2 + 6a_{41}u_2^2v_2^2 \\ &\quad - 3b_{32}u_2^2v_2^2 - 10b_{50}u_2^4v_2^2 - 4a_{41}u_2^2v_2^3 + b_{32}u_2^2v_2^3 + 10b_{50}u_2^4v_2^3 \\ &\quad + u_2^2v_2^4 + a_{41}u_2^2v_2^4 - 5b_{50}u_2^4v_2^4 + b_{50}u_2^4v_2^5) \\ \dot{v}_2 &= -v_2(a_{23}(-1 + v_2)^2 + u_2^2(a_{41}(-1 + v_2)^4 + v_2^4)). \end{aligned}$$

Vemos que na dirección $u_2 = 0$ o campo anúlase nos puntos $(0, 0)$ e $(0, 1)$. Estudemos a estrutura local no primeiro. Vexamos como é a súa matriz xacobiana:

$$DX_2(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{23} - b_{14} & 0 \\ 0 & -a_{23} \end{pmatrix}$$

Sabemos que $a_{23} - b_{14} \geq 0$. Se $a_{23} - b_{14} > 0$, a singularidade será un nó para $a_{23} < 0$ e un punto de sela se $a_{23} > 0$. No caso de ser un nó, cada órbita do sistema final que tende á singularidade corresponderase cunha órbita que tende á orixe na carta U_2 . A súa estrutura local non presentará dous sectores hiperbólicos e o centro non será global.

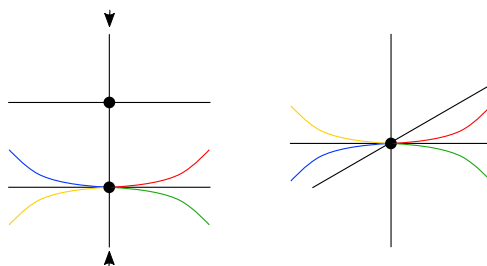


Figura 4.4: Idea xeométrica do comportamento da órbitas ao desfacer o *blow up* no caso do nó.

Se $a_{23} - b_{14} = 0$, a singularidade é semihiperbólica. Na notación do Teorema de singularidades semihiperbólicas, $b = -a_{23}$ e $a_m = -b_{50}$, $m = 5$. En virtude da clasificación de singularidades semihiperbólicas que se pode consultar en [4], se $a_{23} < 0$ o sistema é topoloxicamente un nodo, e se $a_{23} > 0$ é topoloxicamente un punto de sela. No primeiro caso, por motivos análogos ao caso anterior, o centro non sera global. \square

Para o caso no que a singularidade sexa topolóxicamene un punto de sela, que a súa estrutura local sexa compatibles coas hipóteses do Teorema 4.3 dependerá da natureza do punto singular en $(0, 1)$ e como se comporten as órbitas ao desfacer as transformacións. Se posteriormente se estudasen os sistemas onde $a_{23} = b_{14} = 0$ e polo tanto o polinomio caraterístico é distinto, eventualmente chegaríase a unhas condicións necesarias e suficientes para a existencia dun centro global no sistema (3.14) con dúas singularidades.

Para completar a caracterización de centros globais en sistemas da forma (3.14) poderíase seguir este método para campos con máis singularidades no infinito, ata chegar ao número máximo que admite (tantas como raíces teña o polinomio asociado a \dot{u}).

Bibliografía

- [1] Álvarez, M. J., Ferragut, A. e Jarque, X. (2011). *A survey on the blow up technique*, International Journal of bifurcation and chaos Vol.21 No.11
- [2] Chicone, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, 2006
- [3] Dumortier, F. (1977). *Singularities of vector fields on the plane*, Journal of Differential Equations, Vol.23, No.1, p.53-106
- [4] Dumortier, F., Llibre, J. e Cortés, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer, 2006
- [5] García-Sandalla, J., Llibre, J. e Valls, C. (2020). *Linear type global centers of linear systems with cubic homogeneous nonlinearities*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, Vol.69, p.771-785
- [6] García-Saldaña, J. D., Llibre, J. e Valls, C. (2023). *On a class of global centers of linear systems with quintic homogeneous nonlinearities*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, Vol.30 No.2, p.135-148
- [7] Llibre, J. e Valls, C. (2021). *Polynomial differential systems with even degree have no global centers*, Journal of mathematical analysis and applications, Vol.503 No.1
- [8] Llibre, J. e Valls, C. (2023). *Reversible global centers with quintic homogeneous nonlinearities*, Dynamical Systems, Vol.38 No.4, p.632-653
- [9] Meshkov, S. (2009). *The symmetries of nature*, Journal of Physics: Conference Series, Vol.196 No.1