



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álgebras de evolución y grafos

Andrés Pérez Rodríguez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Álgebras de evolución y grafos

Andrés Pérez Rodríguez

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Álgebras de evolución e grafos
Breve descripción do contido
<p>No ano 2006 xurdiu un novo tipo de álgebras xenéticas, denominadas álgebras de evolución, para ilustrar o estudo da xenética non mendeliana, a cal é a linguaxe básica da bioloxía molecular. As álgebras de evolución presentan moitas conexións con outros campos matemáticos, incluíndo a teoría de grafos, a teoría de grupos, as cadeas de Markov e os sistemas dinámicos. As álgebras de evolución son álgebras conmutativas pero non asociativas, e non están definidas por identidades, e por tanto non forman unha variedade de álgebras.</p> <p>O obxectivo do traballo é estudar as propiedades básicas destas álgebras, e explorar o digrafo asociado a un álgebra de evolución relacionando as súas correspondentes propiedades.</p>
Bibliografía
<p>A. Elduque, A. Labra, <i>Evolution algebras and graphs</i>, J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 7, 1550103, 10 pp.</p> <p>J. P. Tian, <i>Evolution Algebras and their Applications</i>, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1921, Springer, Berlin, 2008.</p>
Recomendacións

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Álgebras	1
1.2. Teoría de grafos	5
1.3. Teoría de categorías	7
2. Álgebras de evolución	9
2.1. Concepto y propiedades	9
2.2. Subálgebras e ideales de un álgebra de evolución	12
2.3. Álgebras de evolución no degeneradas	14
3. El grafo asociado a un álgebra de evolución	17
3.1. Grafos no dirigidos y álgebras de evolución	17
3.2. Digrafos y álgebras de evolución	20
3.3. Grafos simples y álgebras de evolución	26
4. Descomponibilidad en álgebras de evolución	29
4.1. Conceptos básicos	29
4.2. La descomponibilidad en álgebras de evolución	30
4.3. La descomposición óptima en suma directa	35
5. Nilpotencia en álgebras de evolución	37
5.1. Conceptos y relaciones	37
5.2. Reconocimiento de álgebras de evolución nilpotentes	40
5.3. Índice de nilpotencia	44

6. Grupo de automorfismos en álgebras de evolución	49
6.1. Finitud del grupo de automorfismos	49
6.2. Una categoría finitamente universal	54
6.3. El álgebra de derivaciones	56
Bibliografía	59
A. Anexo	61
A.1. Inyectividad en los homomorfismos de grafos	61
A.2. Digrafo del Teorema 6.3	62

Resumen

Las álgebras de evolución son un nuevo tipo de álgebras no asociativas que surgen con el objetivo de modelar la genética no mendeliana, la cual es el lenguaje básico de la biología molecular. El primer estudio profundo sobre las álgebras de evolución data del año 2008, momento en el que J. P. Tian publica una extensa monografía donde describe sus propiedades más destacables, sus aplicaciones biológicas y sus conexiones con otros campos de las matemáticas, en particular, con la teoría de grafos.

El objetivo de este trabajo es presentar las relaciones existentes entre las álgebras de evolución y la teoría de grafos, y mostrar cómo esta última es una herramienta indispensable en el estudio de algunas de sus propiedades, como pueden ser la descomponibilidad, la nilpotencia, el grupo de automorfismos o el álgebra de derivaciones.

Abstract

Evolution algebras are a new type of non-associative algebras that arise intending to model non-Mendelian genetics, which is the basic language of molecular biology. The first in-depth study of evolution algebras dates back to 2008, when J. P. Tian published an extensive monograph in which he describes their most outstanding properties, biological applications, and connections with other areas of mathematics, particularly graph theory.

The aim of this paper is to present the existing relations between evolution algebras and graph theory and to show how the latter is an indispensable tool in the study of some of their properties, such as decomposability, nilpotency, the group of automorphisms or the algebra of derivations.

Introducción

Las álgebras de evolución son un nuevo tipo de álgebras no asociativas que surgen con el propósito de modelar la herencia no mendeliana.

Para entender la aparición de las álgebras de evolución hay que remontarse a la segunda mitad del siglo XIX, momento en el cual Gregor Mendel lleva a cabo sus experimentos con plantas de guisantes y recurre al empleo del lenguaje matemático para formular sus leyes de la herencia. No obstante, a pesar de que entremedias hubo numerosas contribuciones por parte de autores como Jennings, Serebrovskij o Glivenko, fue Etherington quien introdujo por primera vez el álgebra abstracta en el estudio de la genética en [7]. Llegados a este punto, muchas otras contribuciones corroboraron que las álgebras no asociativas son el marco matemático apropiado para el estudio de la genética mendeliana. Este es el motivo por el cual se acuñó el término de álgebra genética para referirse a todas aquellas álgebras, principalmente no asociativas, que permiten modelar la herencia en el campo de la genética.

Sin embargo, los científicos de la época no tardaron en toparse con situaciones hereditarias que no respondían a las leyes de Mendel. De aquí surge la genética no mendeliana, que puede considerarse como el lenguaje básico de la biología molecular, pero . . . ¿las álgebras no asociativas funcionan igual de bien en este caso?

En el año 2006, J. P. Tian y P. Vojtěchovský responden afirmativamente a esta pregunta introduciendo por primera vez el concepto de álgebra de evolución en [15]. No obstante, tan solo dos años más tarde, J. P. Tian publica una nueva monografía [14], donde profundiza en mayor medida en las álgebras de evolución y en sus aplicaciones biológicas. En particular, se estudia cómo las álgebras de evolución permiten modelar la genética de poblaciones de orgánulos citoplasmáticos, principalmente mitocondrias y cloroplastos, así como de ciertos organismos como la *Phytophthora infestans*, un oomicete causante de una enfermedad conocida como mildiu de la patata, que afecta a patatas, tomates y otras solanáceas. Además, también se presentan numerosas conexiones entre las álgebras de evolución y otros campos de las matemáticas, como pueden ser la teoría de grafos, los procesos estocásticos, la teoría de grupos, las cadenas de Markov o los sistemas dinámicos. De hecho, desde este momento las investigaciones no han cesado y podemos encontrar numerosas publicaciones

que relacionan las álgebras de evolución con campos muy diversos. Por ejemplo, en [13] las álgebras de evolución están asociadas a espacios de funciones determinados por medidas de Gibbs, e incluso se han empleado para describir la herencia genética en poblaciones bisexuales en [10].

Como se ha visto, a pesar de tratarse de un campo de investigación emergente en el que hay muchos aspectos básicos todavía por explorar, las álgebras de evolución han suscitado gran interés dentro de la comunidad matemática, lo que ha hecho que en los últimos años se haya avanzado mucho en su estudio. De hecho, en el presente trabajo se analizan algunos aspectos y resultados fruto de las investigaciones más recientes, como son la relación con la teoría de grafos, la descomponibilidad, la nilpotencia o el grupo de automorfismos.

A continuación se describe cómo está organizado el trabajo y el contenido de cada uno de los capítulos. Tras el introductorio capítulo 1 que proporciona el marco teórico necesario para el desarrollo de este trabajo, en el capítulo 2 se define el concepto de álgebra de evolución y se demuestran sus propiedades más básicas, así como las relaciones existentes entre los ideales y las subálgebras en álgebras de evolución. Por último, se estudian las álgebras de evolución no degeneradas, a las cuales se recurrirá en numerosas ocasiones a lo largo de este trabajo.

En el capítulo 3 se relaciona la teoría de grafos con las álgebras de evolución de tres formas distintas. La importancia de este capítulo recae en el hecho de que la teoría de grafos es un recurso indispensable en el estudio de las álgebras de evolución, ya que facilita y simplifica el estudio de sus propiedades.

En el capítulo 4 se estudia cómo la conexidad del digrafo asociado está íntimamente relacionada con el hecho de que el álgebra de evolución se pueda expresar como suma directa de ideales. Además, también se demuestran las condiciones de existencia y unicidad de esta descomposición.

En el capítulo 5 se trata la nilpotencia en álgebras de evolución, la cual se ve que depende únicamente de la existencia de ciclos orientados en el digrafo asociado. Además, aunque en general es un problema complicado, también se presentan un par de resultados sobre los posibles valores que puede tomar el índice de nilpotencia en un álgebra de evolución de dimensión finita.

Para terminar este trabajo, en el capítulo 6 se estudia el grupo de automorfismos de un álgebra de evolución y se demuestra bajo qué condiciones este es un grupo finito. Además, también se explica y demuestra la interesante propiedad de que, dado un grupo finito cualquiera, existe un álgebra de evolución cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a dicho grupo finito. Por último, se enuncia un resultado que permite describir el álgebra de derivaciones de un álgebra de evolución y se presentan algunos ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de comenzar con los contenidos propios de las álgebras de evolución, es necesario proporcionar ciertas definiciones y resultados que se emplearán en numerosas ocasiones a lo largo de este trabajo.

1.1. Álgebras

El propósito de esta primera sección es abordar los conceptos principales sobre álgebras, los cuales han sido extraídos mayormente de [9] y [11].

Definición 1.1. Un *álgebra* es un espacio vectorial \mathcal{A} sobre un cuerpo \mathbb{K} dotado de una aplicación bilineal $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ dada por $(a, b) \mapsto ab$, llamada *producto de \mathcal{A}* .

Entre los conceptos más básicos de un álgebra se encuentran los siguientes:

- B es una *base* de un álgebra \mathcal{A} si B es base del espacio vectorial subyacente.
- La *dimensión* de un álgebra \mathcal{A} es la dimensión del espacio vectorial subyacente. Por tanto, un álgebra tiene dimensión finita si el espacio vectorial subyacente tiene dimensión finita.
- Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra de dimensión finita n con base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces, el producto de cualesquiera dos elementos e_i y e_j de B es una combinación lineal de elementos de B :

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k,$$

con $\gamma_{ijk} \in \mathbb{K}$. Los escalares γ_{ijk} se denominan *constantes de estructura de \mathcal{A} relativas a la base B* . Nótese que el producto de \mathcal{A} con base B está determinado por las n^3 constantes de estructura.

A continuación, se presentan los conceptos de ideal y de subálgebra.

Definición 1.2. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra. Se dice que un subespacio $I \subseteq \mathcal{A}$ es un *ideal por la izquierda* (por la derecha) de \mathcal{A} si para cualquier $a \in \mathcal{A}$ y cualquier $x \in I$, se tiene que $ax \in I$ ($xa \in I$). Se dice que I es un *ideal bilátero* (o simplemente un *ideal*) de \mathcal{A} cuando es ideal por ambos lados.

Definición 1.3. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra. Un subespacio $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ es una \mathbb{K} -*subálgebra* de \mathcal{A} si $a_1 a_2 \in \mathcal{A}'$ para cualesquiera $a_1, a_2 \in \mathcal{A}'$.

Es sencillo ver que la intersección de subálgebras de \mathcal{A} es una subálgebra de \mathcal{A} . Este hecho induce la siguiente definición.

Definición 1.4. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra y $S \subseteq \mathcal{A}$ un subconjunto. Se define la *subálgebra de \mathcal{A} generada por S* como la menor subálgebra de \mathcal{A} que contiene a S . Esta subálgebra se denota por $\langle S \rangle$. Equivalentemente, la subálgebra de \mathcal{A} generada por S también se puede definir como la intersección de todas las subálgebras de \mathcal{A} que contienen a S .

Dado que ya se ha definido el concepto de subálgebra generada, ya se está en condiciones de definir algunas propiedades básicas que nos van a permitir describir las álgebras de evolución.

- Un álgebra \mathcal{A} se dice *conmutativa* si $ab = ba$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$.
- Un álgebra \mathcal{A} se dice *asociativa* si $(ab)c = a(bc)$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$.
- Un álgebra \mathcal{A} se dice *flexible* si $(ab)a = a(ba)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$.
- Un álgebra \mathcal{A} se dice *asociativa por potencias* si toda subálgebra generada por un elemento es asociativa.

A lo largo de este trabajo también se empleará en numerosas ocasiones el cociente de álgebras y el concepto de aniquilador.

Definición 1.5. Sean \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra y \mathcal{A}' una subálgebra de \mathcal{A} . Dados $a, b \in \mathcal{A}$, se dice que ambos están *relacionados módulo \mathcal{A}'* si $a - b \in \mathcal{A}'$.

Entre los conceptos más básicos del álgebra cociente se encuentran los siguientes:

- La *clase de equivalencia* de un elemento $a \in \mathcal{A}$ viene dada por

$$\bar{a} = a + \mathcal{A}' = \{a + a' \mid a' \in \mathcal{A}'\}.$$

- El conjunto de las clases de equivalencia módulo \mathcal{A}' se denota por \mathcal{A}/\mathcal{A}' .

- El conjunto \mathcal{A}/\mathcal{A}' es un \mathbb{K} -espacio vectorial con la suma y la multiplicación por escalares. A este espacio vectorial se le llama *espacio cociente entre \mathcal{A} y \mathcal{A}'* .

Definición 1.6. Sean \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra e I un ideal de \mathcal{A} . Se define el *producto entre clases de equivalencia* como

$$\overline{ab} = (a + I)(b + I) = ab + I = \overline{ab}.$$

Observación 1.7. Si \mathcal{A} es una \mathbb{K} -álgebra e I es un ideal de \mathcal{A} , \mathcal{A}/I adquiere una estructura de \mathbb{K} -álgebra con la suma, la multiplicación por escalares y el producto interno. \mathcal{A}/I se denomina *\mathbb{K} -álgebra cociente entre \mathcal{A} e I* .

Definición 1.8. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra. Se define el *aniquilador de \mathcal{A}* como

$$\text{ann}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} + \mathcal{A}x = 0\}.$$

En el caso particular en el que \mathcal{A} es conmutativa, se tiene que $\text{ann}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} = 0\}$.

Seguidamente, se presenta el concepto de homomorfismo de álgebras y se enuncia el llamado primer teorema de isomorfía.

Definición 1.9. Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos \mathbb{K} -álgebras, una aplicación lineal $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre los espacios vectoriales subyacentes se dice que es un *homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras* si $f(ab) = f(a)f(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$. Los homomorfismos biyectivos son *isomorfismos*. Los homomorfismos de un álgebra en sí misma se llaman *endomorfismos* y los isomorfismos de un álgebra en sí misma se llaman *automorfismos*. El conjunto de los automorfismos de un álgebra \mathcal{A} tiene estructura de grupo con la composición y se denota por $\text{Aut}(\mathcal{A})$.

Definición 1.10. Sea $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo de álgebras. El *núcleo de f* se define como el conjunto $\ker(f) := \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) = 0_{\mathcal{B}}\}$. La *imagen de f* se define como el conjunto $\text{Im}(f) := \{f(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$.

Teorema 1.11 (Primer teorema de isomorfía). *Sea $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo de álgebras. Entonces, la aplicación $\pi: \mathcal{A}/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ definida por $a + \ker(f) \mapsto f(a)$, es un isomorfismo de álgebras, esto es, $\mathcal{A}/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.*

A continuación, se define el concepto de suma directa de álgebras, tomado de [1], y se presenta un resultado que relaciona el cociente de álgebras con el concepto de suma directa.

Definición 1.12. Sea $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia no vacía de \mathbb{K} -álgebras. Se define la *suma directa de álgebras*, denotada por $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$, con las siguientes operaciones: dados $a = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$, $b = \sum_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \in \mathcal{A}$ (con a_γ y b_γ igual a cero para casi todo $\gamma \in \Gamma$) y $k \in \mathbb{K}$:

$$a + b := \sum_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma + b_\gamma), \quad ka := \sum_{\gamma \in \Gamma} (ka_\gamma), \quad ab := \sum_{\gamma \in \Gamma} (a_\gamma b_\gamma).$$

Nótese que, con estas operaciones, \mathcal{A} es un álgebra y cada \mathcal{A}_γ es un ideal de \mathcal{A} .

Lema 1.13. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra tal que $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$. Entonces, si $J = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mu\}} I_\gamma$, se tiene que $\mathcal{A}/J \cong I_\mu$.

Dada un álgebra \mathcal{A} se introducen las siguientes sucesiones de subespacios y las siguientes definiciones tomadas de [5].

$$\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{(k+1)} = \mathcal{A}^{(k)}\mathcal{A}; \quad (1.1)$$

$$\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \mathcal{A}^i \mathcal{A}^{k+1-i}; \quad (1.2)$$

$$\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{(k+1)} = \mathcal{A}^{(k)}\mathcal{A}^{(k)}. \quad (1.3)$$

Observación 1.14. Si \mathcal{A} es un álgebra conmutativa es obvio que $\mathcal{A}^i \mathcal{A}^{k+1-i} = \mathcal{A}^{k+1-i} \mathcal{A}^i$ y, en consecuencia, se tiene que $\mathcal{A}^{k+1} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \mathcal{A}^i \mathcal{A}^{k+1-i}$.

Definición 1.15. Un elemento x de un álgebra \mathcal{A} se dice que es *nil* si existe un número natural n tal que $x^n = \underbrace{(\dots((xx)x)\dots)}_n x = 0$. Se dice que el álgebra \mathcal{A} es *nil* si todo elemento del álgebra es nil.

Definición 1.16. Un álgebra \mathcal{A} se dice:

- (i) *nilpotente por la derecha* si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^{(n)} = 0$. Al menor índice n que lo verifica se le denomina *índice de nilpotencia por la derecha*.
- (ii) *nilpotente* si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^n = 0$. Al menor índice n que lo verifica se le denomina *índice de nilpotencia*.
- (iii) *soluble* si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}^{(n)} = 0$. Al menor índice n que lo verifica se le denomina *índice de solubilidad*.

Por último, se introducen los conceptos de álgebra de Lie y derivación, los cuales serán necesarios en la última sección de este trabajo.

Definición 1.17. Sea \mathcal{L} una \mathbb{K} -álgebra cuyo producto se denota por $[\cdot, \cdot]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Se dice que \mathcal{L} es un *álgebra de Lie* si:

- (i) $[x, x] = 0$ para cualquier $x \in \mathcal{L}$,
- (ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{L}$.

La segunda de las identidades recibe el nombre de *identidad de Jacobi*. Cabe destacar que las álgebras de Lie son *anticonmutativas*, es decir, $[x, y] = -[y, x]$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{L}$. Si un álgebra de Lie \mathcal{L} cumple que $[x, y] = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{L}$, se dice que es *abeliana*.

Definición 1.18. Sea \mathcal{A} una \mathbb{K} -álgebra. Una *derivación* $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es una aplicación lineal tal que $\delta(a_1 a_2) = \delta(a_1) a_2 + a_1 \delta(a_2)$ para cualesquiera $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. El conjunto de las derivaciones sobre un álgebra \mathcal{A} , con el producto $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$, tiene estructura de álgebra de Lie y se denota por $\text{Der}(\mathcal{A})$.

Nótese que, en general, la composición de derivaciones $\delta_1 \circ \delta_2$ no es una derivación.

1.2. Teoría de grafos

A lo largo de este trabajo se recurrirá en numerosas ocasiones a la teoría de grafos, la cual nos va a facilitar en gran medida el estudio de las propiedades de las álgebras de evolución. No obstante, para ello es necesario presentar ciertos conceptos básicos que han sido extraídos principalmente de [3].

Definición 1.19. Un *grafo no dirigido* (o simplemente *grafo*) G es un par (V, E) , donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan *nodos o vértices*, y E es un conjunto finito (que puede ser vacío) de subconjuntos de dos elementos de V que reciben el nombre de *arcos o aristas*. Se denotará por $V(G)$ al conjunto de nodos de G y por $E(G)$ al conjunto de aristas de G .

Si u y v son nodos de G y $a = \{u, v\}$ es una arista de G , se dice que u y v son *nodos adyacentes*. Dos nodos adyacentes se dice que son *vecinos* el uno del otro. Al conjunto de vecinos de un nodo u se le llama *vecindades de u* y se denotará por $\Gamma(u)$. Además, a una arista $\{u, u\}$ se la denomina *lazo*.

El número de nodos es el *orden* de G y el número de aristas es el *tamaño* de G . Un grafo cuyo tamaño es nulo se denomina *grafo vacío*, mientras que un grafo en el cual todos los nodos son adyacentes dos a dos se denomina *grafo completo*.

Definición 1.20. Se dice que un grafo G es *simple* si no presenta lazos y dos nodos pueden estar unidos, a lo sumo, por una única arista.

Definición 1.21. Un grafo H es un *subgrafo* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición 1.22. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *camino* es una sucesión de vértices y aristas, $\gamma = (v_1, a_1, v_2, \dots, a_{r-1}, v_r)$, tal que $a_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $1 \leq i \leq r-1$. Además, si coinciden v_1 y v_r , entonces se dice que γ es un *ciclo*. La *longitud* de un camino o de un ciclo se define como su número de aristas.

Definición 1.23. Un grafo G se dice *conexo* si entre cualesquiera dos nodos existe un camino que los une. En caso contrario, se dice que G es *disconexo* o *no conexo*. A los subgrafos conexos maximales de G se los denomina *componentes conexas* de G .

Definición 1.24. Un *digrafo* o *grafo dirigido* D es un par (V, E) , donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan *nodos* o *vértices*, y E es un conjunto finito (que puede ser vacío) de pares ordenados de elementos de V que reciben el nombre de *arcos* o *aristas*.

Si u y v son nodos de D y $a = (u, v)$ es una arista de D , se dice que u es un *nodo adyacente a v* y que v es un *nodo adyacente de u* . El conjunto de los nodos adyacentes de un nodo u se llama *vecindades salientes de u* y se denotará por $\Gamma_+(u)$. Además, los conceptos de orden, tamaño, lazo y subdigrafo son análogos al caso de grafos no dirigidos.

Gráficamente, el carácter dirigido o no dirigido de un grafo se representará mediante la presencia o ausencia de flechas.

Definición 1.25. Se dice que un nodo de un digrafo D es un *sumidero* o *sink* si no le salen aristas. En contraste, se dice que un nodo de D es una *fuentes* o *source* si no le entran aristas.

Definición 1.26. El *grafo subyacente de un digrafo D* es el grafo que surge de sustituir cada arista (u, v) , o su simétrico (v, u) , por la arista $\{u, v\}$.

Cabe destacar que en el caso de un digrafo D , pueden considerarse dos tipos de caminos distintos. Por un lado, están los *caminos dirigidos*, aquellos en los cuales se respeta el sentido de los arcos de D como digrafo y, por otro lado, están los *caminos no dirigidos*, en los cuales no se tiene en cuenta el sentido de los arcos, como si se estuviese empleando el grafo subyacente al digrafo D . Este hecho induce los dos siguientes conceptos.

Definición 1.27. Un digrafo D se dice *conexo* si su grafo subyacente es conexo. Un digrafo D se dice *fuertemente conexo* si para cada par de nodos $u, v \in V$ existe un camino dirigido que va de u a v .

A continuación, se verá cómo se puede presentar un digrafo a través de una matriz.

Definición 1.28. Sea $D = (V, E)$ un digrafo con n nodos. Una forma de representar el digrafo D es por la denominada *matriz de adyacencia* A_D definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \text{ es un arco de } D, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cabe destacar que el concepto de matriz de adyacencia se puede extender al caso no dirigido, pero como las aristas son subconjuntos de V en los cuales no importa el orden ($\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$), se tienen siempre matrices simétricas.

Por último, se presenta el concepto de homomorfismo de grafos y se enuncia el teorema de Frucht, cuya demostración y explicación se puede encontrar en [3, Theorem 9.6].

Definición 1.29. Un *homomorfismo* de grafos (digrafos) es una aplicación entre grafos (digrafos) que conserva la adyacencia, es decir, es una aplicación $f: G \rightarrow H$ entre grafos (digrafos) tal que si u es adyacente a v en G , entonces $f(u)$ es adyacente a $f(v)$ en H . Si un homomorfismo de grafos (digrafos) es biyectivo, entonces se dice que es un *isomorfismo*, y un isomorfismo de un grafo (digrafo) en sí mismo se denomina *automorfismo*. Además, al igual que en el caso de álgebras, el conjunto de los automorfismos de un grafo (digrafo) G tiene estructura de grupo con la composición y se denota por $\text{Aut}(G)$. Nótese que un automorfismo de un grafo (digrafo) no es más que una permutación del conjunto de nodos que preserve la adyacencia, por tanto, el grupo de automorfismos de un grafo (digrafo) con n nodos siempre es un subgrupo del grupo simétrico S_n .

Teorema 1.30 (Teorema de Frucht). *Para todo grupo finito G existe un grafo simple finito tal que su grupo de automorfismos es isomorfo a G .*

1.3. Teoría de categorías

Por último, para terminar este primer capítulo introductorio, se presentarán los conceptos de categoría y funtor, los cuales han sido extraídos de [8].

Definición 1.31. Una *categoría* \mathfrak{C} es una estructura algebraica que consta de:

- una colección de objetos, $\text{Obj}(\mathfrak{C})$,
- para cada par de objetos A, B de \mathfrak{C} , un conjunto $\mathfrak{C}(A, B)$ de morfismos de A en B ,
- para cada terna de objetos A, B, C de \mathfrak{C} , una *ley de composición*

$$\circ: \mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \rightarrow \mathfrak{C}(A, C);$$

y que cumple los siguientes axiomas:

- (A.1) Los conjuntos $\mathfrak{C}(A_1, B_1)$ y $\mathfrak{C}(A_2, B_2)$ son disjuntos salvo que $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.
- (A.2) *Asociatividad*: dada una terna de morfismos $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ y $h: C \rightarrow D$, se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (A.3) *Existencia de unidades*: para cada objeto A existe un morfismo $1_A: A \rightarrow A$ tal que para cualesquiera $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow A$ se tiene que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

De estos axiomas se deduce fácilmente que existe un único morfismo identidad para cada objeto de \mathfrak{C} .

Definición 1.32. Sean \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías. Un *functor covariante* (o simplemente *functor*) es una aplicación $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ que:

- lleva cada objeto A de \mathfrak{C} en un objeto $\mathcal{F}(A)$ de \mathfrak{D} ,
- lleva cada morfismo $f: A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} en un morfismo $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ en \mathfrak{D} de forma que se cumplen las dos condiciones siguientes:

$$\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)} \text{ para todo } A \in \text{Obj}(\mathfrak{C}),$$

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \text{ para cualesquiera morfismos } f \in \mathfrak{C}(A, B) \text{ y } g \in \mathfrak{C}(B, C).$$

Esto es, un functor debe preservar las identidades y la composición de morfismos.

Definición 1.33. Se dice que un morfismo $f: A \rightarrow B$ en \mathfrak{C} es un *isomorfismo* si existe un morfismo $g: B \rightarrow A$ en \mathfrak{C} tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Observación 1.34. Cabe destacar que si $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es un functor, entonces, si f es un isomorfismo en \mathfrak{C} , $\mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo en \mathfrak{D} .

Es claro que si \mathfrak{C} y \mathfrak{D} son dos categorías y $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es un functor, entonces para cada par de objetos A, B de \mathfrak{C} , el functor induce una aplicación

$$\mathcal{F}_{A,B}: \mathfrak{C}(A, B) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)).$$

Este hecho da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.35. Sean \mathfrak{C} y \mathfrak{D} dos categorías y sea $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ un functor. Se dice que \mathcal{F} es *fiel* si $\mathcal{F}_{A,B}$ es inyectivo para cualesquiera $A, B \in \text{Obj}(\mathfrak{C})$.

Capítulo 2

Álgebras de evolución

A lo largo de este capítulo se tratan los conceptos fundamentales sobre las álgebras de evolución, un tipo de álgebras no asociativas que permite modelar la herencia no mendeliana. Además, estas también poseen numerosas conexiones con otras ramas de las matemáticas, como pueden ser la teoría de grafos, la teoría de grupos, las cadenas de Markov o los sistemas dinámicos.

Gran parte de las definiciones, ejemplos y resultados que se tratan en este capítulo se han tomado de [1].

2.1. Concepto y propiedades

Definición 2.1. Un *álgebra de evolución* \mathcal{E} sobre un cuerpo \mathbb{K} es una \mathbb{K} -álgebra provista de una base $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$, denominada *base natural*, tal que $e_i e_j = 0$ cuando $i \neq j$. Fijada una base natural B de \mathcal{E} , los escalares $a_{ik} \in \mathbb{K}$ tales que $e_i^2 = e_i e_i = \sum_{k \in \Lambda} a_{ik} e_k$ se denominan *constantes de estructura de \mathcal{E} relativas a B* y la matriz $M_B = (a_{ik})$ se denomina *matriz de estructura de \mathcal{E} relativa a B* . El álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural B está determinada por las n^2 constantes de estructura o por su matriz de estructura $M_B = (a_{ik})$.

Ejemplo 2.2. Un álgebra que tiene una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_i e_j = 0$ para cualesquiera $i \neq j$, $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_2$ y $e_3^2 = e_1 + e_2 + e_3$ es, en particular, un álgebra de evolución. De igual modo, un álgebra que tiene una base $B = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y cuyo producto viene dado por $e_i e_j = 0$ para cualesquiera $i \neq j$ y $e_i^2 = \sum_{k=1}^i e_k$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$ también es, en particular, un álgebra de evolución.

Observación 2.3.

- A pesar de que, tal y como se muestra en el Ejemplo 2.2, existen álgebras de evolución de dimensión infinita, a partir de este momento se considerarán siempre álgebras de evolución de dimensión finita, es decir, tales que existe una base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ con un número finito de elementos. Consecuentemente, la matriz de estructura también será una matriz de dimensiones finitas.
- Un álgebra de dimensión n es un álgebra de evolución si, y solo si, tiene una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ cuya tabla de multiplicación es diagonal:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & \dots & e_i & \dots & e_n \\
 \hline
 e_1 & \sum_{k=1}^n a_{1k} e_k & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 e_i & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 e_n & 0 & \dots & 0 & \dots & \sum_{k=1}^n a_{nk} e_k
 \end{array}$$

- Biológicamente, si \mathcal{E} es un álgebra de evolución con base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, los elementos e_i pueden ser interpretados como genotipos. Por tanto, si se tiene que $e_i^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$, la constante de estructura a_{ik} se puede interpretar como la probabilidad de que el genotipo e_i , al reproducirse, dé lugar al genotipo e_j . No obstante, para poder hacer estas interpretaciones es necesario que $0 \leq a_{ik} \leq 1$ y que $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$ para cualesquiera $i, k \in \{1, \dots, n\}$. De ahora en adelante, siempre y cuando se hagan interpretaciones biológicas, se considerará que la matriz de estructura del álgebra de evolución en cuestión cumple estas características, es decir, es una *matriz estocástica*.
- Los conceptos de *homomorfismo*, *isomorfismo*, *automorfismo* y *derivación* entre álgebras de evolución son análogos a los presentados en las Definiciones 1.9 y 1.18 para un álgebra cualquiera. Además, cabe destacar que un isomorfismo entre álgebras de evolución siempre lleva bases naturales en bases naturales.

Proposición 2.4. *Algunas propiedades de las álgebras de evolución son las siguientes:*

- a) *Las álgebras de evolución no son asociativas en general.*
- b) *Las álgebras de evolución son conmutativas, y por tanto flexibles.*
- c) *Las álgebras de evolución no son asociativas por potencias en general.*

Demostración.

- a) Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ tal que para algún índice i se tiene que $e_i^2 = \sum_{k \in \Lambda} a_{ik} e_k$ con $a_{ik} \neq 0$ y $e_k^2 \neq 0$ para algún $k \neq i$. En efecto, $(e_i e_i) e_k \neq 0$ pero $e_i (e_i e_k) = 0$, concluyendo así que en general no hay asociatividad.
- b) Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Para cualesquiera dos elementos $x, y \in \mathcal{E}$ tales que $x = \sum_{i \in \Lambda} a_i e_i$ e $y = \sum_{i \in \Lambda} b_i e_i$ se tiene que:

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{i \in \Lambda} a_i e_i \right) \left(\sum_{j \in \Lambda} b_j e_j \right) = \sum_{i, j \in \Lambda} a_i b_j (e_i e_j) = \sum_{i \in \Lambda} a_i b_i e_i^2 \\ &= \sum_{i \in \Lambda} b_i a_i e_i^2 = \sum_{i, j \in \Lambda} b_j a_i (e_j e_i) = \left(\sum_{j \in \Lambda} b_j e_j \right) \left(\sum_{i \in \Lambda} a_i e_i \right) = yx. \end{aligned}$$

Además, también es flexible ya que:

$$x(yx) \stackrel{\text{conm.}}{=} (yx)x \stackrel{\text{conm.}}{=} (xy)x.$$

- c) Recordemos que un álgebra se dice asociativa por potencias si toda subálgebra generada por un elemento es asociativa. En particular, esto significa que si un elemento es operado consigo mismo varias veces, no importa en qué orden se lleven a cabo las operaciones, es decir, se tiene que $x(x(xx)) = ((xx)x)x = (xx)(xx)$ para cualquier x elemento del álgebra. En general, las álgebras de evolución no verifican esta propiedad. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Entonces, se tiene que:

$$(e_i e_i)(e_i e_i) = \left(\sum_{k \in \Lambda} a_{ik} e_k \right) \left(\sum_{l \in \Lambda} a_{il} e_l \right) = \sum_{k \in \Lambda} a_{ik}^2 e_k^2 \quad \text{y}$$

$$((e_i e_i) e_i) e_i = \left(\left(\sum_{k \in \Lambda} a_{ik} e_k \right) e_i \right) e_i = (a_{ii} e_i^2) e_i = \left(a_{ii} \sum_{k \in \Lambda} a_{ik} e_k \right) e_i = a_{ii}^2 e_i^2.$$

Por tanto, en general $(e_i e_i)(e_i e_i) \neq ((e_i e_i) e_i) e_i$, concluyendo así que en general no hay asociatividad por potencias.

□

2.2. Subálgebras e ideales de un álgebra de evolución

En esta sección se explica el comportamiento y las relaciones existentes entre las subálgebras y los ideales en álgebras de evolución. Por último, se trata el cociente entre álgebras de evolución e ideales.

Definición 2.5. Una *subálgebra de evolución* de un álgebra de evolución \mathcal{E} es una subálgebra $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ tal que \mathcal{E}' es un álgebra de evolución, es decir, posee una base natural.

Observación 2.6. Biológicamente, una subálgebra \mathcal{E}' de \mathcal{E} es una población de individuos, cada uno de los cuales tiene una cierta probabilidad de tener el genotipo e_i y tal que su reproducción (es decir, su producto) permanece en \mathcal{E}' .

Cabe destacar que las álgebras de evolución no son cerradas por subálgebras, es decir, una subálgebra de un álgebra de evolución no tiene que ser subálgebra de evolución, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.7. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_1 + e_2$, $e_2^2 = -e_1 - e_2$ y $e_3^2 = -e_2 + e_3$. Sean $u_1 = e_1 + e_2$ y $u_2 = e_1 + e_3$ y considérese el subespacio $\mathcal{E}' = \text{span}\{u_1, u_2\}$, el cual es subálgebra de \mathcal{E} por ser cerrado para el producto:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1^2 + e_2^2 = e_1 + e_2 - e_1 - e_2 = 0, \\ u_2^2 &= (e_1 + e_3)(e_1 + e_3) = e_1^2 + e_3^2 = e_1 + e_2 - e_2 + e_3 = u_2, \\ u_1 u_2 &= (e_1 + e_2)(e_1 + e_3) = e_1^2 = e_1 + e_2 = u_1. \end{aligned}$$

No obstante, se verá que \mathcal{E}' no es subálgebra de evolución.

Supóngase que existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ tales que $v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$ y $v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$ determinan una base natural de la subálgebra \mathcal{E}' . Entonces, por definición de base natural, se tendría que verificar que $v_1 v_2 = 0$,

$$v_1 v_2 = \alpha \gamma u_1^2 + \beta \delta u_2^2 + (\alpha \delta + \beta \gamma) u_1 u_2 = (\alpha \delta + \beta \gamma) u_1 + \beta \delta u_2 = 0,$$

y, en consecuencia, $\beta \delta = 0$ y $\alpha \delta + \beta \gamma = 0$. Por un lado, si $\beta = 0$, entonces $\alpha \delta = 0$. Supóngase que $\alpha = 0$, entonces $v_1 = 0$ y no habría independencia lineal. Supóngase ahora que $\delta = 0$, entonces $v_1 = \alpha u_1$ y $v_2 = \gamma u_1$, que son linealmente dependientes. El caso $\delta = 0$ sería análogo. Se llega entonces a una contradicción con que v_1 y v_2 forman base natural.

Definición 2.8. Un subespacio I de un álgebra de evolución \mathcal{E} es un *ideal* si $I\mathcal{E} \subseteq I$, es decir, si es ideal del álgebra \mathcal{E} según la Definición 1.2.

Nótese que no toda subálgebra de evolución es un ideal.

Ejemplo 2.9. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_1$ y $e_3^2 = e_3$. Sean también $u_1 = e_1 + e_2$ y $u_2 = e_3$ y considérese el subespacio $\mathcal{E}' = \text{span}\{u_1, u_2\}$. Se tiene que \mathcal{E}' es cerrado para el producto, ya que $u_1^2 = e_1^2 + e_2^2 = e_2 + e_1 = u_1$, $u_2^2 = e_3^2 = e_3 = u_2$ y $u_1u_2 = 0$, y además $B' = \{u_1, u_2\}$ es una base natural, por tanto \mathcal{E}' es subálgebra de evolución de \mathcal{E} . No obstante, no es un ideal porque $u_1e_1 = (e_1 + e_2)e_1 = e_1^2 = e_2 \notin \mathcal{E}'$.

Recíprocamente, no todo ideal es una subálgebra de evolución, es decir, no todo ideal tiene una base natural.

Ejemplo 2.10. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_1 + e_2$ y $e_3^2 = -(e_1 + e_2)$. Sean $u_1 = e_1^2 = e_2 + e_3$ y $u_2 = e_2^2 = e_1 + e_2$, los cuales son linealmente independientes y generan el subespacio $I = \{\alpha e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \beta e_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$. Como $e_1u_1 = 0$, $e_2u_1 = u_2$, $e_3u_1 = -u_2$, $e_1u_1 = u_1$, $e_2u_2 = u_2$ y $e_3u_2 = 0$, I es un ideal de \mathcal{E} . Sin embargo, I no tiene una base natural. En caso de tenerla, los generadores serían de la forma $v_1 = \alpha e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \beta e_3$ y $v_2 = \lambda e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + \mu e_3$, con $\alpha, \beta, \mu, \lambda \in \mathbb{K}$ tales que $v_1v_2 = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} v_1v_2 &= (\alpha e_1 + (\alpha + \beta)e_2 + \beta e_3)(\lambda e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + \mu e_3) \\ &= \alpha\lambda(e_2 + e_3) + (\alpha + \beta)(\lambda + \mu)(e_1 + e_2) - \beta\mu(e_1 + e_2) \\ &= \alpha\lambda u_1 + [(\alpha + \beta)(\lambda + \mu) - \beta\mu]u_2 = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\alpha\lambda = 0$ y $(\alpha + \beta)(\lambda + \mu) = \beta\mu$. Además, la segunda condición es equivalente a $\alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\lambda = 0$. Se sigue entonces que $\alpha = \lambda = 0$ o $\alpha = \beta = 0$ o $\lambda = \mu = 0$, y por tanto v_1 y v_2 no serían linealmente independientes.

Este último hecho motiva la siguiente definición.

Definición 2.11. Un *ideal de evolución* de un álgebra de evolución \mathcal{E} es un ideal I de \mathcal{E} que tiene una base natural.

Claramente, los ideales de evolución son subálgebras de evolución, pero el recíproco no es cierto, tal y como se ve en el Ejemplo 2.9. Además, el Ejemplo 2.10 también muestra que un ideal de un álgebra de evolución no es, necesariamente, un ideal de evolución.

Observación 2.12. Biológicamente, un ideal de evolución I de un álgebra de evolución \mathcal{E} es una subálgebra de evolución tal que la reproducción (es decir, el producto) de genotipos de \mathcal{E} por individuos de I da lugar a individuos de I .

Se cierra esta sección con el hecho de que las álgebras de evolución son cerradas por cocientes de ideales.

Lema 2.13. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución e I un ideal de \mathcal{E} . Entonces \mathcal{E}/I , con el producto natural, es un álgebra de evolución.*

Demostración. Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural de \mathcal{E} . El conjunto de las clases de los elementos de B módulo I , $B_{\mathcal{E}/I} = \{\bar{e}_i = e_i + I \mid 1 \leq i \leq n\}$, genera \mathcal{E}/I , y $\bar{e}_i \bar{e}_j = (e_i + I)(e_j + I) = e_i e_j + I = \bar{0}$ para $i \neq j$. En consecuencia, cualquier base de \mathcal{E}/I contenida en $B_{\mathcal{E}/I}$ es una base natural de \mathcal{E}/I . \square

Observación 2.14. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución y $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ una base natural. Si I es un ideal de \mathcal{E} , $B_{\mathcal{E}/I} = \{\bar{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ no es necesariamente una base natural de \mathcal{E}/I , tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. Considérese el álgebra de evolución \mathcal{E} y el ideal I descritos en el Ejemplo 2.10. Nótese que $e_1, e_2, e_3 \notin I$ y en consecuencia $B_{\mathcal{E}/I} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, pero esta no es una base de \mathcal{E}/I ya que la dimensión de este cociente es $\dim(\mathcal{E}/I) = \dim(\mathcal{E}) - \dim(I) = 3 - 2 = 1$. Sin embargo, por el Lema 2.13, sí que se puede afirmar que el conjunto $B_{\mathcal{E}/I}$ contiene a una base de \mathcal{E}/I .

Corolario 2.16. *Sea $f: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ un homomorfismo entre las álgebras de evolución \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 . Entonces, $\text{Im}(f)$ es una subálgebra de evolución de \mathcal{E}_2 .*

Demostración. Como el $\ker(f)$ es un ideal de \mathcal{E}_1 , por el Lema 2.13 se tiene que $\mathcal{E}_1/\ker(f)$ es álgebra de evolución. Además, por el Teorema 1.11 se sabe que $\text{Im}(f)$ y $\mathcal{E}_1/\ker(f)$ son isomorfos, por tanto $\text{Im}(f)$ también es álgebra de evolución. \square

2.3. Álgebras de evolución no degeneradas

A lo largo de esta sección se trata el concepto de álgebras de evolución no degeneradas y cómo obtenerlas a través del cociente por ideales.

Definición 2.17. Un álgebra de evolución \mathcal{E} se dice *no degenerada* si existe una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ tal que $e_i^2 \neq 0$ para cualquier $i \in \Lambda$.

Observación 2.18. Biológicamente, que el genotipo e_i en un álgebra de evolución \mathcal{E} cumpla que $e_i^2 = 0$ significa que no puede tener descendientes. En consecuencia, un álgebra de evolución \mathcal{E} es no degenerada si, y solo si, todos sus genotipos se pueden reproducir.

El siguiente lema, presentado en [5], da la relación existente entre si un álgebra de evolución es degenerada o no y su aniquilador.

Lema 2.19. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Entonces, $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_i \mid e_i^2 = 0\}$.*

Demostración. Para probar la igualdad, se demostrarán ambas inclusiones. En primer lugar, $\text{ann}(\mathcal{E}) \subseteq \text{span}\{e_i \mid e_i^2 = 0\}$, ya que si $x = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i e_i \neq 0$ es un elemento de \mathcal{E} tal que $x\mathcal{E} = 0$, para cualquier i tal que $\alpha_i \neq 0$, se tiene que $0 = e_i x = e_i \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j e_j = \alpha_i e_i^2$, por lo que $e_i^2 = 0$. Recíprocamente, si $e_i^2 = 0$ para algún i , entonces $e_i \mathcal{E} = 0$, porque por un lado ya se tiene que $e_i^2 = 0$ y, por otro, por definición de base natural, $e_i e_j = 0$ para cualquier $j \neq i$. \square

Proposición 2.20. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ y sea $\Lambda_0(B) := \{i \in \Lambda \mid e_i^2 = 0\}$. Entonces:*

(i) $\text{ann}(\mathcal{E})$ es un ideal de evolución de \mathcal{E} .

(ii) $|\Lambda_0(B)| = |\Lambda_0(B')|$ para cualquier otra B' base natural de \mathcal{E} .

Demostración. Por el Lema 2.19, $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_i \mid e_i^2 = 0\} = \text{span}\{e_i \in B \mid i \in \Lambda_0(B)\}$. En efecto, si $i \in \Lambda_0(B)$ entonces $e_i^2 = 0$. Sea $x = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i e_i \neq 0$ un elemento cualquiera de \mathcal{E} . Entonces, para cualquier $i \in \Lambda_0(B)$ se tiene que $e_i x = e_i \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j e_j = \alpha_i e_i^2 = 0$. Por tanto, $\text{ann}(\mathcal{E})$ es un ideal, y por ser $\{e_i \in B \mid i \in \Lambda_0(B)\}$ una base natural, en particular es ideal de evolución. Por otro lado, $|\Lambda_0(B)| = \dim(\text{ann}(\mathcal{E}))$, siendo la dimensión de $\text{ann}(\mathcal{E})$ como álgebra de evolución independiente de la base natural elegida. \square

Corolario 2.21. *Un álgebra de evolución \mathcal{E} es no degenerada si, y solo si, $\text{ann}(\mathcal{E}) = 0$. En consecuencia, que un álgebra de evolución sea o no degenerada no depende de la base natural considerada.*

Observación 2.22. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ y denótese por $\Lambda_1 := \{i \in \Lambda \mid e_i^2 \neq 0\}$. Entonces:

(i) $\mathcal{E}_1 = \text{span}\{e_i \in B \mid i \in \Lambda_1\}$ no es necesariamente subálgebra de \mathcal{E} .

(ii) $\mathcal{E}/\text{ann}(\mathcal{E})$ no es necesariamente un álgebra de evolución no degenerada.

A continuación, se presentan dos ejemplos que ilustran la observación anterior.

Ejemplo 2.23. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y el producto dado por $e_1^2 = 0$ y $e_2^2 = e_1 + e_2$. Se tiene entonces que $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_1\}$ y que $\mathcal{E}_1 = \text{span}\{e_2\}$, que no es una subálgebra de \mathcal{E} ya que $e_2^2 = e_2 e_2 = e_1 + e_2 \notin \mathcal{E}_1$.

Ejemplo 2.24. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0$, $e_4^2 = e_1 + e_2$, $e_5^2 = e_2$ y $e_6^2 = e_2 + e_5$.

Por el Lema 2.19, $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{E}/\text{ann}(\mathcal{E}) &= \{x + \text{ann}(\mathcal{E}) \mid x \in \mathcal{E}\} = \left\{ \sum_{i=1}^6 \alpha_i e_i + \text{ann}(\mathcal{E}) \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, 6 \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left\{ \sum_{i=4}^6 \alpha_i e_i + \text{ann}(\mathcal{E}) \mid \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{K} \right\} = \text{span}\{\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6\}, \end{aligned}$$

donde $(*)$ se tiene porque $e_1, e_2, e_3 \in \text{ann}(\mathcal{E})$. Además, por otro lado se tiene que $\bar{e}_4^2 = \overline{e_1 + e_2} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \bar{0}$, $\bar{e}_5^2 = \bar{e}_2 = \bar{0}$ y $\bar{e}_6^2 = \overline{e_2 + e_5} = \bar{e}_2 + \bar{e}_5 = \bar{e}_5 \neq \bar{0}$, y de nuevo por el Lema 2.19 se tiene que $\text{ann}(\mathcal{E}/\text{ann}(\mathcal{E})) = \text{span}\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$, por lo que $\mathcal{E}/\text{ann}(\mathcal{E})$ no es un álgebra de evolución no degenerada.

Para obtener álgebras de evolución no degeneradas, se introducen los conceptos de propiedad de absorción de un ideal y de radical de absorción.

Definición 2.25. Un ideal I de un álgebra de evolución \mathcal{E} se dice que tiene la *propiedad de absorción* si $x\mathcal{E} \subseteq I$ implica que $x \in I$.

Observación 2.26. Biológicamente, un ideal I tiene la propiedad de absorción si, al considerar cualquier individuo del álgebra cuyos descendientes son únicamente elementos de I , entonces el individuo original también pertenece a I .

Lema 2.27. Un ideal I de un álgebra de evolución \mathcal{E} tiene la propiedad de absorción si, y solo si, $\text{ann}(\mathcal{E}/I) = \bar{0}$.

Demostración. Supóngase que I tiene la propiedad de absorción y sea $\bar{x} \in \text{ann}(\mathcal{E}/I)$. Entonces $\bar{x}\mathcal{E}/I = \bar{0}$, y por tanto $x\mathcal{E} \subseteq I$. Esto implica que $x \in I$, y así $\bar{x} = \bar{0}$. Recíprocamente, si $x\mathcal{E} \subseteq I$ entonces $\bar{x}\mathcal{E}/I = \bar{0}$, lo que implica que $\bar{x} \in \text{ann}(\mathcal{E}/I) = \bar{0}$, y así $x \in I$. \square

Además, es sencillo ver que la intersección de ideales de absorción también es un ideal de absorción, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 2.28. Se define el *radical de absorción* de un álgebra de evolución \mathcal{E} , $\text{rad}(\mathcal{E})$, como la intersección de todos los ideales de \mathcal{E} que tienen la propiedad de absorción.

Resulta evidente que el radical de absorción es el ideal más pequeño de \mathcal{E} que tiene la propiedad de absorción.

Proposición 2.29. Si \mathcal{E} es un álgebra de evolución, entonces $\mathcal{E}/\text{rad}(\mathcal{E})$ es un álgebra de evolución no degenerada.

Demostración. Por el Lema 2.13, se tiene que $\mathcal{E}/\text{rad}(\mathcal{E})$ es un álgebra de evolución. Además, $\text{rad}(\mathcal{E})$ es un ideal con la propiedad de absorción, por tanto, por el Lema 2.27, se tiene que $\text{ann}(\mathcal{E}/\text{rad}(\mathcal{E})) = \bar{0}$, y en consecuencia es un álgebra de evolución no degenerada. \square

Capítulo 3

El grafo asociado a un álgebra de evolución

A lo largo de este capítulo se hace un recorrido cronológico a través de algunas de las múltiples formas que han ido surgiendo de relacionar la teoría de grafos con las álgebras de evolución. En primer lugar, se trata cómo se puede obtener un álgebra de evolución a partir de un grafo no dirigido y viceversa. Esta asociación, presente en [14], fue el primer intento de relacionar las álgebras de evolución con la teoría de grafos. Sin embargo, únicamente una cantidad muy reducida de álgebras de evolución admite esta representación gráfica. A continuación, se trata la asociación entre un digrafo y un álgebra de evolución, enfoque empleado en [1] y en [5]. Esta asociación permite, al contrario que el enfoque anterior, asociarle un digrafo a cualquier álgebra de evolución, y además, se estudia cómo se puede hacer que esta correspondencia entre digrafos y álgebras de evolución sea biunívoca. A pesar de que esta relación es la que se va a emplear en la mayor parte de este trabajo, cabe destacar que presenta el problema de que no es funtorial, es decir, el digrafo en cuestión depende de la base natural considerada en el álgebra de evolución. Por último, se presenta una posible solución a este problema empleando grafos simples, tal y como se describe en [4].

3.1. Grafos no dirigidos y álgebras de evolución

En esta sección se trata la forma de obtener un álgebra de evolución a partir de un grafo no dirigido. Además, se explican aquellos casos en los que este proceso es reversible y se presentan algunos ejemplos de ellos.

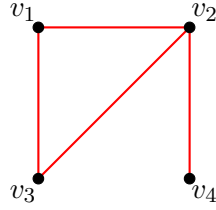
Definición 3.1. Dado $G = (V, E)$ un grafo no dirigido finito con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ su

conjunto de vértices y E su conjunto de aristas, se le puede asociar un álgebra de evolución $\mathcal{E} = \mathcal{A}(G)$ con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y producto

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma(v_i)} e_k, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

donde $\Gamma(v_i)$ denota las vecindades del nodo v_i .

Ejemplo 3.2. Considérese el siguiente grafo no dirigido con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:



Empleando la Definición 3.1, este grafo no dirigido da lugar a un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma(v_1)} e_k = e_2 + e_3, & e_2^2 &= \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma(v_2)} e_k = e_1 + e_2 + e_3, \\ e_3^2 &= \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma(v_3)} e_k = e_1 + e_2, & e_4^2 &= \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma(v_4)} e_k = e_2. \end{aligned}$$

Hasta ahora, únicamente se ha explicado cómo a partir de un grafo no dirigido se puede obtener un álgebra de evolución pero, ¿qué ocurre en sentido contrario? A continuación, se definen los conceptos de álgebras graficables y álgebras \mathcal{S} -graficables (véase [12]) y se presentan algunos ejemplos.

Definición 3.3. Un álgebra conmutativa no asociativa \mathcal{A} se denomina *graficable* si tiene un conjunto de generadores $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ cuyo producto viene dado por

$$e_i^2 = \sum_{e_k \in B_i} e_k, \quad e_i e_j = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, n,$$

donde cada uno de los B_i es un subconjunto de B . En consecuencia, si \mathcal{A} es graficable, se le puede asociar un grafo (ya sea o no dirigido) G de la siguiente forma: sea $V \equiv B$ el conjunto de vértices de G , y a cada vértice e_i , se le asignan los elementos de $V_i \equiv B_i$ como sus nodos adyacentes.

Es inmediato que toda álgebra graficable es de evolución, pero el recíproco no es cierto en general. Este hecho se puede ver, por ejemplo, en aquellas álgebras de evolución cuya matriz de estructura tiene entradas distintas de ceros y unos.

Observación 3.4. Nótese que a toda álgebra graficable se le puede asociar un grafo, pero este no tiene que ser necesariamente un grafo no dirigido. De hecho, existen álgebras graficables que no admiten un grafo no dirigido, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. Considérese el álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2 + e_3 + e_4$, $e_2^2 = e_1$, $e_3^2 = e_4$ y $e_4^2 = e_3$. En efecto, esta es un álgebra graficable tal que $B_1 = \{e_2, e_3, e_4\}$, $B_2 = \{e_1\}$, $B_3 = \{e_4\}$ y $B_4 = \{e_3\}$. Por tanto, se tendría que construir un grafo $G = (V, E)$ con $V \equiv B$ en el que, por ejemplo, e_1 fuese adyacente a e_3 pero e_3 no fuese adyacente a e_1 , hecho que no es posible empleando un grafo no dirigido, ya que si existe una arista que une dos nodos, ambos son adyacentes el uno del otro. La construcción de grafos dirigidos a partir de álgebras de evolución se tratará en la sección siguiente.

Definición 3.6. Un álgebra graficable de dimensión n se dice *S-graficable* si sus constantes de estructura cumplen que $a_{ij} = a_{ji}$ y $a_{ii} = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. A este tipo de álgebras graficables sí se les puede asociar un grafo no dirigido, y además, este no va a presentar lazos en ninguno de sus nodos.

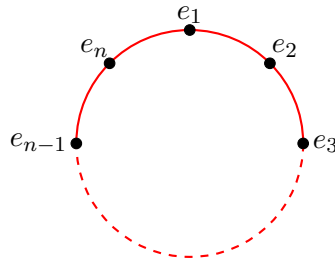
En [14], se hace una clasificación de algunas álgebras de evolución, que en particular son *S-graficables*, en función de su producto, y en consecuencia, de su grafo no dirigido asociado.

Definición 3.7.

- 1) Un álgebra de evolución de dimensión n se dice *cíclica* si, siendo $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural, su producto viene dado por

$$e_1^2 = e_n + e_2, \quad e_2^2 = e_1 + e_3, \quad \dots, \quad e_{n-1}^2 = e_{n-2} + e_n, \quad e_n^2 = e_{n-1} + e_1,$$

y en consecuencia, su grafo no dirigido asociado es de la forma:



- 2) Un álgebra de evolución de dimensión n se dice *de camino* si, siendo $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural, su producto viene dado por

$$e_1^2 = e_2, \quad e_2^2 = e_1 + e_3, \quad \dots, \quad e_{n-1}^2 = e_{n-2} + e_n, \quad e_n^2 = e_{n-1},$$

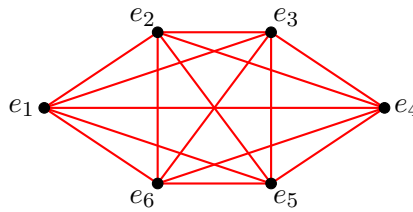
y en consecuencia, su grafo no dirigido asociado es de la forma:



- 3) Un álgebra de evolución de dimensión n se dice *completa* si, siendo $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural, su producto viene dado por

$$e_i^2 = \sum_{k \neq i} e_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por ejemplo, en el caso en el que $n = 6$, se tendría el siguiente grafo no dirigido completo:

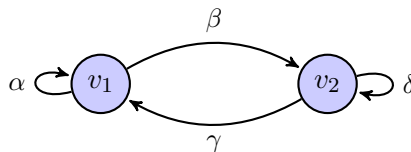


3.2. Digrafos y álgebras de evolución

A lo largo de esta sección se ven dos formas, siendo la primera de ellas más completa que la segunda, de asociar digrafos y álgebras de evolución. La primera de ellas es a través de digrafos ponderados. Estos son digrafos en los que todas sus aristas tienen asociado un peso o ponderación que viene determinado por la correspondiente constante de estructura. A continuación, se define formalmente el digrafo ponderado asociado a un álgebra de evolución y se presentan algunos ejemplos.

Definición 3.8. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y matriz de estructura $M_B = (a_{ij})$. El digrafo ponderado $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B) = (V, E, \omega)$, donde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es el conjunto de vértices, E el conjunto de aristas y ω es la aplicación $E \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\omega((v_i, v_j)) = a_{ij}$, se denomina *digrafo ponderado asociado al álgebra de evolución \mathcal{E} relativo a la base natural B* .

Ejemplo 3.9. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = \alpha e_1 + \beta e_2$ y $e_2^2 = \gamma e_1 + \delta e_2$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ no nulos. El digrafo ponderado asociado $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B)$ es:



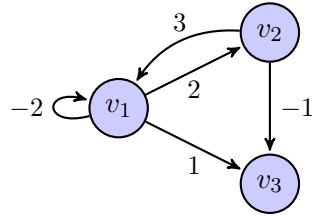
Recíprocamente, al igual que dada un álgebra de evolución con una determinada base natural se le puede asociar un digrafo ponderado, dado un digrafo ponderado también se le puede asociar un álgebra de evolución con su correspondiente base y su correspondiente producto.

Definición 3.10. Dado un digrafo ponderado $D = (V, E, \omega)$ finito, con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, se le puede asociar un álgebra de evolución $\mathcal{E} = \mathcal{A}(D)$ con base natural $\{e_1, \dots, e_n\}$ y producto:

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma_+(v_i)} a_{ik} e_k, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

donde $a_{ik} = \omega((v_i, v_k))$ y donde $\Gamma_+(v_i)$ denota a las vecindades salientes del nodo v_i .

Ejemplo 3.11. Considérese el digrafo ponderado:

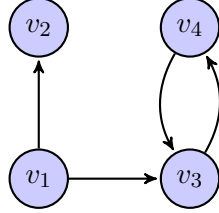


Siguiendo la correspondencia explicada en la Definición 3.10, se obtiene un álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = -2e_1 + 2e_2 + e_3$, $e_2^2 = 3e_1 - e_3$ y $e_3^2 = 0$.

En efecto, fijada una determinada base natural, toda álgebra de evolución determina un único digrafo ponderado, y viceversa. Se puede decir entonces que existe una correspondencia biunívoca entre los digrafos ponderados y las álgebras de evolución con una determinada base natural, es decir, $\mathcal{A}(\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B)) = (\mathcal{E}, B)$ y $\Gamma^\omega((\mathcal{A}(D), B)) = D$ para cualesquiera (\mathcal{E}, B) álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural B y D digrafo ponderado. Sin embargo, para nuestros propósitos, no se van a necesitar esas ponderaciones o pesos de los digrafos descritos anteriormente. Lo único que se necesita es saber si dos nodos están relacionados, y en caso de que así sea, el sentido en el que lo están. Por ello, y con afán de simplificar, es suficiente utilizar digrafos tal y como se describe en la siguiente definición.

Definición 3.12. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y matriz de estructura $M_B = (a_{ij})$. El digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B) = (V, E)$, con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid a_{ij} \neq 0\}$, se denomina *digrafo asociado al álgebra de evolución \mathcal{E} relativo a la base natural B* .

Ejemplo 3.13. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con una base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por: $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = 0$, $e_3^2 = -2e_4$ y $e_4^2 = 5e_3$. El digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es:



Recíprocamente, a partir de un digrafo no ponderado también se puede obtener un álgebra de evolución.

Definición 3.14. Dado un digrafo $D = (V, E)$ finito, con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, se le puede asociar un álgebra de evolución $\mathcal{E} = \mathcal{A}(D)$ con base natural $\{e_1, \dots, e_n\}$ y producto:

$$e_i e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ \sum_{k \text{ con } v_k \in \Gamma_+(v_i)} e_k, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

En el caso de digrafos no ponderados, en general $\mathcal{A}(\Gamma(\mathcal{E}, B)) \neq (\mathcal{E}, B)$. De hecho, la igualdad se tiene si, y solo si, el álgebra de evolución \mathcal{E} es graficable con la base B . Por tanto, fijada una base natural, se puede decir que no se tiene una correspondencia biunívoca entre las álgebras de evolución y este tipo de digrafos, ya que dos álgebras de evolución de la misma dimensión con la misma base natural que tengan las mismas constantes de estructura no nulas, tienen el mismo digrafo asociado.

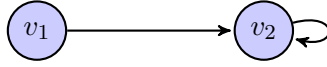
Observación 3.15. Es fácil determinar el aniquilador de un álgebra de evolución \mathcal{E} observando los sumideros del digrafo relativo a una base natural. Por el Lema 2.19, el aniquilador de \mathcal{E} es el subespacio generado por los elementos de la base cuyo cuadrado es 0 (en particular, estos se corresponden con los sumideros del digrafo asociado). Así, en el Ejemplo 3.13, el único sumidero que hay es el nodo v_2 , y por tanto $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_2\}$. De igual forma, si en vez de tener la representación del digrafo contamos con su matriz de adyacencia (o con la matriz de estructura del álgebra de evolución, la cual tiene las mismas entradas no nulas), también es muy sencillo encontrar los sumideros, ya que el nodo v_i es un sumidero si la fila i -ésima de la matriz de adyacencia es una fila de ceros. En particular, en el Ejemplo 3.13, la matriz de adyacencia es

$$A_{\Gamma(\mathcal{E}, B)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

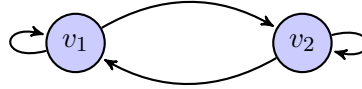
que tal y como cabía esperar, tiene la segunda fila de ceros.

Observación 3.16. Nótese que, en general, el digrafo asociado a un álgebra de evolución depende de la base natural que se haya escogido, es decir, a una misma álgebra de evolución con bases naturales distintas podrían asociársele digrafos también distintos, uno por cada una de las bases tomadas, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2$ y $e_2^2 = e_2$. Entonces, el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es:



Por otro lado, se tiene que $(e_1 + e_2)(e_1 - e_2) = e_1^2 - e_1e_2 + e_2e_1 - e_2^2 = e_1^2 - e_2^2 = e_2 - e_2 = 0$, y de ahí, si la característica del cuerpo \mathbb{K} es distinta de 2, $B' = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\}$ es otra base natural de \mathcal{E} con producto $f_1^2 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1^2 + e_2^2 = 2e_2 = f_1 - f_2$ y con $f_2 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_2) = e_1^2 + e_2^2 = 2e_2 = f_1 - f_2$. Entonces, el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B')$ es:



A continuación, se define el concepto de álgebra de evolución regular y se muestra que, en este caso, el digrafo no cambia independientemente de la base natural empleada.

Definición 3.18. Un álgebra de evolución \mathcal{E} se dice *regular* si $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$.

Proposición 3.19. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y matriz de estructura M_B . Entonces \mathcal{E} es regular si, y solo si, M_B es regular, es decir, su determinante es no nulo.

Demostración. En efecto, para todo $i = 1, \dots, n$, se tiene que $e_i^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$. Entonces, M_B es regular si, y solo si, $e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2$ son linealmente independientes, y esto ocurre si, y solo si, $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$, es decir, e_1^2, \dots, e_n^2 también generan \mathcal{E} . \square

Definición 3.20. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural. Para cualquier elemento $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \mathcal{E}$, se define su soporte (relativo a la base B) como $\text{supp}(x) := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$.

Proposición 3.21. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución regular con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, y sean $x, y \in \mathcal{E}$ dos elementos no nulos tales que $xy = 0$. Entonces $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$.

Demostración. Sean $x, y \neq 0$ elementos de \mathcal{E} tales que $xy = 0$. Si $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ e $y = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$, entonces $0 = xy = \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \cdots + \alpha_n \beta_n e_n^2$. Pero por hipótesis se tiene que \mathcal{E} es regular, y por tanto $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$, luego $e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2$ son linealmente independientes, y así, $\alpha_i \beta_i = 0$ para cualquier $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, $\alpha_i = 0$ o $\beta_i = 0$ (o ambos), y $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$. \square

Teorema 3.22. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución regular y considérense $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ dos bases naturales distintas. Entonces, existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $f_i \in \mathbb{K}^* e_{\sigma(i)}$ para cualquier $i = 1, \dots, n$, donde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Por ser B' una base natural, se tiene que $f_i f_j = 0$ para cualesquiera $i \neq j$, por tanto $\text{supp}(f_i) \cap \text{supp}(f_j) = \emptyset$, donde supp denota el soporte relativo a la base B . Entonces, necesariamente, $\text{supp}(f_i)$ tiene un único elemento para cualquier i , y así se sigue el resultado. \square

Corolario 3.23. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución regular. Entonces los digrafos $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ son isomorfos para cualquier B base natural de \mathcal{E} .*

Demostración. El Teorema 3.22 asegura que si un álgebra de evolución es regular entonces hay una única base natural posible, salvo permutaciones y multiplicación por escalares. Por tanto, hay un único digrafo posible, salvo el orden de los nodos, y en consecuencia, todos son isomorfos como digrafos. \square

Se concluye esta sección con el siguiente resultado, el cual también es perfectamente aplicable al caso particular de álgebras S -graficables y de grafos no dirigidos.

Teorema 3.24. *Sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 dos álgebras de evolución graficables y D_1 y D_2 sus digrafos asociados. Entonces, D_1 y D_2 son isomorfos como digrafos si, y solo si, \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son isomorfas como álgebras.*

Demostración. En primer lugar, se probará que si D_1 y D_2 son isomorfos como digrafos, entonces $\mathcal{A}(D_1) = \mathcal{E}_1$ y $\mathcal{A}(D_2) = \mathcal{E}_2$ son isomorfas como álgebras.

Sean $D_1 = (V_1, E_1)$ y $D_2 = (V_2, E_2)$ y sea Φ el isomorfismo entre D_1 y D_2 . Con el objetivo de simplificar la notación, se denotarán de la misma forma los nodos de los digrafos y los elementos de las bases naturales de las álgebras de evolución B_1 y B_2 . Supóngase entonces que $V_1 = \{e_1, \dots, e_n\} = B_1$, entonces

$$\Phi(V_1) = V_2 = \{\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)\} = B_2,$$

y además Φ conserva la adyacencia, es decir, si e_i es adyacente a e_j , entonces $\Phi(e_i)$ también es adyacente a $\Phi(e_j)$. A continuación, definimos $\bar{\Phi}(e_i) = \Phi(e_i)$ para todo $e_i \in B_1$ y extendemos $\bar{\Phi}$ por linealidad:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}: \mathcal{A}(D_1) = \mathcal{E}_1 &\longrightarrow \mathcal{A}(D_2) = \mathcal{E}_2 \\ x = \sum_{i=1}^n a_i e_i &\longmapsto \bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi} \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{\Phi}(e_i). \end{aligned}$$

En efecto, $\bar{\Phi}$ es lineal y biyectiva por ser una extensión lineal de una aplicación biyectiva, es decir, $\bar{\Phi}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales subyacentes. Se verá entonces que $\bar{\Phi}$ también es homomorfismo de álgebras. Por un lado, para $i \neq j$ se tiene que:

$$\bar{\Phi}(e_i e_j) = \bar{\Phi}(0) = 0 = \bar{\Phi}(e_i) \bar{\Phi}(e_j).$$

Por otro lado, si $i = j$ resulta que:

$$\bar{\Phi}(e_i^2) = \bar{\Phi} \left(\sum_{e_k \in \Gamma_+(e_i)} e_k \right) = \sum_{e_k \in \Gamma_+(e_i)} \bar{\Phi}(e_k) = \bar{\Phi}(e_i)^2.$$

Así, por ser $\bar{\Phi}$ un homomorfismo biyectivo de álgebras, $\bar{\Phi}$ es un isomorfismo de álgebras, concluyendo así el resultado.

Recíprocamente, sean \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 dos álgebras de evolución graficables isomorfas y sean $D_1 = (V_1, E_1)$ y $D_2 = (V_2, E_2)$ sus digrafos asociados, respectivamente. Además, \mathcal{E}_1 tiene una base natural $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ y \mathcal{E}_2 tiene otra base natural $B_2 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el isomorfismo entre \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 viene dado por $\Phi: \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ tal que $\Phi(e_i) = e'_i$ para cualquier $i = 1, \dots, n$. Por ser $D_1 = (V_1, E_1)$ y $D_2 = (V_2, E_2)$ los digrafos asociados, se puede suponer que $V_1 \equiv B_1$ y $V_2 \equiv B_2$. El isomorfismo Φ induce un isomorfismo $\bar{\Phi}$ entre los digrafos D_1 y D_2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}: V_1 &\longrightarrow V_2 \\ e_i &\longmapsto \bar{\Phi}(e_i) = e'_i. \end{aligned}$$

Además, el vértice e_i es adyacente a e_j si e_j tiene coeficiente uno en e_i^2 . Así, si el vértice e_i es adyacente a e_j , entonces se verifica que:

$$(e'_i)^2 = \bar{\Phi}(e_i) \bar{\Phi}(e_i) = \bar{\Phi}(e_i^2) = \bar{\Phi} \left(\sum_{e_k \in \Gamma_+(e_i)} e_k \right) = \sum_{e_k \in \Gamma_+(e_i)} \bar{\Phi}(e_k) = \sum_{k \text{ con } e_k \in \Gamma_+(e_i)} e'_k,$$

es decir, $\bar{\Phi}(e_i) = e'_i$ es adyacente a $\bar{\Phi}(e_j) = e'_j$. Por tanto, $\bar{\Phi}$ es un homomorfismo de digrafos. Análogamente, $\bar{\Phi}^{-1}: V_2 \longrightarrow V_1$ también es un homomorfismo de digrafos y se puede concluir que D_1 y D_2 son digrafos isomorfos. \square

3.3. Grafos simples y álgebras de evolución

A lo largo de esta sección se desarrolla una manera de obtener álgebras de evolución a partir de grafos simples de forma funtorial. Por tanto, el objetivo principal será demostrar la existencia de un funtor de la categoría $Graphs_i$, cuyos objetos son los grafos simples finitos y los morfismos son los homomorfismos de grafos inyectivos tal y como se describen en la Definición 1.29, en la categoría $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$, cuyos objetos son las álgebras de evolución sobre el cuerpo \mathbb{K} y los morfismos son los homomorfismos de álgebras tal y como se describen en la Definición 1.9.

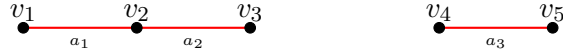
Definición 3.25. Dado un grafo simple finito $\mathcal{G} = (V, E)$, se define $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ como el álgebra de evolución sobre un cuerpo \mathbb{K} con base natural $B = \{b_v \mid v \in V\} \cup \{b_a \mid a \in E\}$, y cuyo producto viene dado por

$$\begin{aligned} b_v^2 &= b_v \text{ para todo } v \in V, \\ b_a^2 &= b_a + \sum_{v \in a} b_v \text{ para todo } a \in E. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.26. Considérese el grafo del Ejemplo 3.2. Este es un grafo simple finito con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{a_1 = \{v_1, v_2\}, a_2 = \{v_1, v_3\}, a_3 = \{v_2, v_3\}, a_4 = \{v_2, v_4\}\}$. Empleando la Definición 3.25, se obtiene un álgebra de evolución cuya base natural es $B = \{b_{v_1}, b_{v_2}, b_{v_3}, b_{v_4}, b_{a_1}, b_{a_2}, b_{a_3}, b_{a_4}\}$ y cuyo producto viene dado por

$$\begin{aligned} b_{v_1}^2 &= b_{v_1}, & b_{a_1}^2 &= b_{a_1} + b_{v_1} + b_{v_2}, \\ b_{v_2}^2 &= b_{v_2}, & b_{a_2}^2 &= b_{a_2} + b_{v_1} + b_{v_3}, \\ b_{v_3}^2 &= b_{v_3}, & b_{a_3}^2 &= b_{a_3} + b_{v_2} + b_{v_3}, \\ b_{v_4}^2 &= b_{v_4}, & b_{a_4}^2 &= b_{a_4} + b_{v_2} + b_{v_4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.27. Considérese el grafo simple finito \mathcal{G} siguiente:



con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E = \{a_1 = \{v_1, v_2\}, a_2 = \{v_2, v_3\}, a_3 = \{v_4, v_5\}\}$. Empleando de nuevo la Definición 3.25, se obtiene un álgebra de evolución $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ cuya base natural es $B = \{b_{v_1}, b_{v_2}, b_{v_3}, b_{v_4}, b_{v_5}, b_{a_1}, b_{a_2}, b_{a_3}\}$ y cuyo producto viene dado por

$$\begin{aligned} b_{v_1}^2 &= b_{v_1}, & b_{v_5}^2 &= b_{v_5}, \\ b_{v_2}^2 &= b_{v_2}, & b_{a_1}^2 &= b_{a_1} + b_{v_1} + b_{v_2}, \\ b_{v_3}^2 &= b_{v_3}, & b_{a_2}^2 &= b_{a_2} + b_{v_2} + b_{v_3}, \\ b_{v_4}^2 &= b_{v_4}, & b_{a_3}^2 &= b_{a_3} + b_{v_4} + b_{v_5}. \end{aligned}$$

Tal y como ya se ha anticipado, el digrafo $\Gamma(\mathcal{X}(\mathcal{G}), B)$ no va a depender de la elección de la base natural del álgebra de evolución. Este hecho es consecuencia directa de la siguiente proposición y del Teorema 3.22.

Proposición 3.28. *Si \mathcal{G} es un grafo simple finito, entonces $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ es un álgebra de evolución regular.*

Demostración. Sea M_B la matriz de estructura de $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ relativa a la base natural B descrita en la Definición 3.25. En efecto, por la definición del producto, M_B es triangular inferior con todos unos en la diagonal. Por tanto $\det(M_B) = 1 \neq 0$, y así M_B es regular. En consecuencia, por la Proposición 3.19, $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ es un álgebra de evolución regular. \square

Además, a todo homomorfismo de grafos simples inyectivo le corresponde un homomorfismo de álgebras de evolución, tal y como se describe en la siguiente definición.

Definición 3.29. Dado un homomorfismo de grafos $f: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ inyectivo, donde $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ y $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos simples finitos, se define $\mathcal{X}(f): \mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ como el homomorfismo de álgebras dado por $\mathcal{X}(f)(b_v) = b_{f(v)}$ y $\mathcal{X}(f)(b_a) = b_{f(a)}$.

Observación 3.30. En efecto, la aplicación $\mathcal{X}(f)$ está bien definida como homomorfismo de álgebras. Por ser f un homomorfismo de grafos, f lleva vértices en vértices y aristas en aristas preservando la adyacencia. Por tanto, para cualquier vértice $v \in V_1$:

$$\mathcal{X}(f)(b_v)^2 = b_{f(v)}^2 = b_{f(v)} = \mathcal{X}(f)(b_v) = \mathcal{X}(f)(b_v^2), \quad (3.1)$$

y para cualquier arista $a = \{v, w\} \in E_1$:

$$\mathcal{X}(f)(b_a)^2 = b_{f(a)}^2 = b_{f(a)} + b_{f(v)} + b_{f(w)} = \mathcal{X}(f)(b_a + b_v + b_w) = \mathcal{X}(f)(b_a^2). \quad (3.2)$$

Además, por la inyectividad de f (véase el anexo A.1), si se denota por $B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ la base natural de $\mathcal{X}(\mathcal{G}_1)$, donde cada $\lambda_i \equiv b_v$ para algún $v \in V_1$ o $\lambda_i \equiv b_a$ para alguna $a \in E_1$, para cualesquiera $\lambda_i, \lambda_j \in B$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se tiene que:

$$(\mathcal{X}(f)(\lambda_i))(\mathcal{X}(f)(\lambda_j)) = \lambda_{f(i)}\lambda_{f(j)} = 0 = \mathcal{X}(f)(0) = \mathcal{X}(f)(\lambda_i\lambda_j). \quad (3.3)$$

Por otro lado, también se cumple que $\mathcal{X}(f \circ g) = \mathcal{X}(f) \circ \mathcal{X}(g)$ ya que:

$$\mathcal{X}(f \circ g)(\lambda_i) = \lambda_{f(g(i))} = \mathcal{X}(f)(\lambda_{g(i)}) = (\mathcal{X}(f) \circ \mathcal{X}(g))(\lambda_i),$$

para cualquier $i = 1, \dots, n$. Por último, dado que $\mathcal{X}(f)(\lambda_i) = \lambda_{f(i)}$ y $\mathcal{X}(g)(\lambda_i) = \lambda_{g(i)}$, es obvio que $\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}(g)$ si, y solo si, $f = g$.

Empleando entonces todo lo visto en esta sección se puede concluir el siguiente teorema, el cual se mejorará en el capítulo 6.

Teorema 3.31. *Dado un cuerpo \mathbb{K} , existe un funtor fiel covariante $\mathcal{X} : \text{Graphs}_i \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ tal que para cada $\mathcal{G} \in \text{Obj}(\text{Graphs}_i)$ se tiene que $\mathcal{X}(\mathcal{G})^2 = \mathcal{X}(\mathcal{G})$, es decir, $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ es regular.*

Se concluye esta sección con un resultado análogo al Teorema 3.24, pero empleando esta nueva asociación entre grafos simples y álgebras de evolución.

Proposición 3.32. *Sean $\mathcal{G}_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, dos grafos simples finitos. Entonces $\mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \cong \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ si, y solo si, $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$.*

Demostración. Si $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$, entonces existe $\sigma : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ isomorfismo de grafos, y por ser \mathcal{X} un funtor, se tiene que $\mathcal{X}(\sigma) : \mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ también es un isomorfismo de álgebras de evolución. Así, $\mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \cong \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \cong \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ entonces existe $\varphi : \mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ isomorfismo entre álgebras de evolución regulares. Sea entonces B_i la base natural de $\mathcal{X}(\mathcal{G}_i)$, $i = 1, 2$, según la Definición 3.25. Luego, por ser φ isomorfismo de álgebras de evolución, $\varphi(B_1)$ también es base natural de $\mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$, y de acuerdo con la Proposición 3.22, existen escalares $\lambda_v, \lambda_a \in \mathbb{K}$ para cada $v \in V_1$ y $a \in E_1$ tales que $\lambda_v \varphi(b_v), \lambda_a \varphi(b_a) \in B_2$. Además, el número de constantes de estructura no nulas tiene que preservarse para cada elemento de la base. Así, existen aplicaciones $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ y $\tau : E_1 \rightarrow E_2$ tales que $\lambda_v \varphi(b_v) = b_{\sigma(v)}$ y $\lambda_a \varphi(b_a) = b_{\tau(a)}$. Además, por un lado:

$$\begin{aligned} b_{\sigma(v)}^2 &= b_{\sigma(v)} \quad \text{y} \\ (\lambda_v \varphi(b_v))^2 &= \lambda_v^2 \varphi(b_v)^2 = \lambda_v^2 \varphi(b_v^2) = \lambda_v^2 \varphi(b_v) = \lambda_v (\lambda_v \varphi(b_v)) = \lambda_v b_{\sigma(v)}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_v \varphi(b_v) = b_{\sigma(v)}$, se tiene que $(\lambda_v \varphi(b_v))^2 = (b_{\sigma(v)})^2 = b_{\sigma(v)}$, y así $b_{\sigma(v)} = \lambda_v b_{\sigma(v)}$. En consecuencia, $\lambda_v = 1$ para cualquier $v \in V_1$. Análogamente, si $a = \{v, w\} \in E_1$ y $\tau(a) = \{\bar{v}, \bar{w}\} \in E_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} b_{\tau(a)}^2 &= b_{\tau(a)} + b_{\bar{v}} + b_{\bar{w}} \quad \text{y} \\ (\lambda_a \varphi(b_a))^2 &= \lambda_a^2 \varphi(b_a^2) = \lambda_a^2 \varphi(b_a + b_v + b_w) \\ &= \lambda_a^2 (\varphi(b_a) + \varphi(b_v) + \varphi(b_w)) = \lambda_a b_{\tau(a)} + \lambda_a^2 (b_{\sigma(v)} + b_{\sigma(w)}). \end{aligned}$$

Como $\lambda_a \varphi(b_a) = b_{\tau(a)}$, se tiene que $(\lambda_a \varphi(b_a))^2 = b_{\tau(a)}^2 = b_{\tau(a)} + b_{\bar{v}} + b_{\bar{w}}$, y así $\lambda_a = 1$ y $\tau(a) = \{\bar{v}, \bar{w}\} = \{\sigma(v), \sigma(w)\}$. En consecuencia, la aplicación $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$, la cual es biyectiva por ser φ un isomorfismo, también lleva aristas de E_1 en aristas de E_2 , preservando la adyacencia. Así, $\sigma : \mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ es isomorfismo de grafos y además $\varphi = \mathcal{X}(\sigma)$. \square

Capítulo 4

Descomponibilidad en álgebras de evolución

En este capítulo se estudian aquellas álgebras de evolución que se pueden escribir como suma directa de dos ideales (de evolución), las llamadas álgebras de evolución descomponibles. Además, se estudia cómo obtener dicha descomposición, en caso de exista, en términos de su digrafo asociado o en términos de su matriz de estructura. Por último, se presenta el proceso de descomposición en más de dos ideales, la llamada descomposición óptima en suma directa, y se analizan sus condiciones de existencia y unicidad.

No está de más mencionar que la descomposición de un álgebra de evolución, a nivel biológico, puede ser vista como una unión disjunta de familias de genotipos, en la que cada uno de los individuos de una de las familias, al reproducirse, da lugar a individuos de esa propia familia.

4.1. Conceptos básicos

En esta primera sección se presentan los conceptos esenciales para este capítulo, extraídos mayormente de [1].

En primer lugar, si $\{\mathcal{E}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia no vacía de \mathbb{K} -álgebras de evolución, la suma directa de ellas, $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{E}_\gamma$, tal y como se define en la Definición 1.12, es un álgebra de evolución. Además, si B_γ es una base natural para \mathcal{E}_γ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $B := \cup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ es una base natural para \mathcal{E} .

Lema 4.1. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existe una familia de subálgebras de evolución $\{\mathcal{E}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tales que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{E}_\gamma$.*
- (ii) *Existe una familia de ideales de evolución $\{I_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tales que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$.*

(iii) Existe una familia de ideales $\{I_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ tales que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$.

Demostración. (i) \implies (ii). Veamos que toda subálgebra de evolución que aparece en la definición de suma directa es también un ideal de evolución. Considérese un elemento $a = a_\gamma \in \mathcal{E}_\gamma$ y otro elemento $b = \sum_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma \in \mathcal{E}$. Haciendo su producto, se tiene que:

$$ab = a_\gamma b = a_\gamma \sum_{\mu \in \Gamma} b_\mu = a_\gamma b_\gamma \in \mathcal{E}_\gamma,$$

y en consecuencia \mathcal{E}_γ es ideal, y por ser subálgebra de evolución, tiene una base natural. Por tanto, \mathcal{E}_γ es un ideal de evolución.

(ii) \implies (iii). Obvio.

(iii) \implies (i). Supongamos que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, donde cada I_γ es un ideal. Así, por el Lema 1.13, para cualquier $\mu \in \Gamma$ se tiene que:

$$I_\mu \cong \mathcal{E} / (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mu\}} I_\gamma).$$

Por ser $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mu\}} I_\gamma$ un ideal, por el Lema 2.13 se tiene que $\mathcal{E} / (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mu\}} I_\gamma)$ es un álgebra de evolución. Así, por ser isomorfas como álgebras, I_μ también es un álgebra de evolución. \square

Se concluye esta sección introductoria con la siguiente definición. Cabe destacar que aunque en [1] se emplea el término *reducible*, para este trabajo se ha apostado por el empleo del término *descomponible*.

Definición 4.2. Un álgebra de evolución \mathcal{E} se dice *descomponible* si se puede descomponer en suma directa de dos subálgebras de evolución no nulas, o equivalentemente, en dos ideales de evolución no nulos, o equivalentemente, en dos ideales no nulos, en vista del Lema 4.1. Un álgebra de evolución que no es descomponible se denomina *indescomponible*.

4.2. La descomponibilidad en álgebras de evolución

En numerosas ocasiones resulta interesante saber si un álgebra es descomponible y conocer sus posibles descomposiciones, ya que esto puede aportar mucha información acerca de sus propiedades. A lo largo de esta sección se verá cómo, en el caso particular de las álgebras de evolución, la descomponibilidad está íntimamente relacionada con la conexidad del digrafo asociado. No obstante, no en todo tipo de álgebras de evolución su digrafo asociado nos aporta la misma cantidad de información. En primer lugar, se tratará lo que ocurre con las álgebras de evolución no degeneradas.

Teorema 4.3. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución no degenerada con una base natural finita $B = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ y supóngase que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, donde cada I_γ es un ideal de \mathcal{E} . Entonces:

- (i) Existe una descomposición disjunta de Λ , es decir, existen $\Lambda_\gamma \subseteq \Lambda$ con $\gamma \in \Gamma$ tales que $\Lambda = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$. Además, $I_\gamma = \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\gamma\}$.
- (ii) Para cada $e_i \in B$ existe un único $\mu \in \Gamma$ tal que $e_i \in I_\mu$. Además, $e_i \in I_\mu$ si, y solo si, $e_i^2 \in I_\mu$.

Demostración. Fijado un $i \in \Lambda$, considérese la proyección lineal $\pi_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}e_i$. Sea también $\Lambda_\gamma := \{i \in \Lambda \mid \pi_i(I_\gamma) \neq 0\}$. En primer lugar, se verá que $\Lambda = \cup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$. Que $\Lambda \supseteq \cup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$ es obvio. Para la otra inclusión, supóngase que existe un $i \in \Lambda$ tal que $i \notin \cup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$, es decir, existe un i tal que $i \notin \Lambda_\gamma$ para ningún $\gamma \in \Gamma$. En este caso se tendría que $\pi_i(I_\gamma) = 0$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, y por tanto $\pi_i(\oplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma) = \pi_i(\mathcal{E}) = 0$, lo cual es una contradicción con que $e_i \in \mathcal{E}$.

A continuación, se verá que si $\pi_i(I_\gamma) \neq 0$, se tiene que $e_i^2 \in I_\gamma$, y que, en consecuencia, $\pi_i(I_\mu) = 0$ para cualquier $\mu \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$. Si $\pi_i(I_\gamma) \neq 0$, existe al menos un $y \in I_\gamma$ tal que $\pi_i(y) = ke_i \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$. Si se multiplica por e_i se tiene que $e_i y = e_i \pi_i(y) = ke_i^2 \in I_\gamma$, y en consecuencia $e_i^2 \in I_\gamma$. Si existiese otro índice $\mu \in \Gamma$ tal que $\pi_i(I_\mu) \neq 0$, de forma análoga se llega a que $e_i^2 \in I_\mu$, y por tanto $e_i^2 \in I_\mu \cap I_\gamma = \{0\}$, lo cual es una contradicción con que \mathcal{E} es no degenerada. Además, este argumento también muestra como la unión $\Lambda = \cup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$ es disjunta.

Ahora, es obvio que para cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $I_\gamma \subseteq \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\gamma\}$. Para ver la otra inclusión, basta considerar un $e_j \in B$ con $j \in \Lambda_\gamma$ y sea $J = \oplus_{\mu \in \Gamma \setminus \{\gamma\}} I_\mu$. Como $\mathcal{E} = I_\gamma \oplus J$, se puede escribir $e_j = u + v$, donde $u \in I_\gamma$ y $v \in J$. Entonces, $v = e_j - u \in \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\gamma\}$ porque e_j y u pertenecen a $\text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\gamma\}$. Por otro lado, $v \in J \subseteq \text{span}\{e_i \mid i \in \cup_{\mu \in \Gamma \setminus \{\gamma\}} \Lambda_\mu\}$, y como $I_\gamma \cap J = \{0\}$, se deduce que v tiene que ser cero. Se concluye entonces que $I_\gamma = \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\gamma\}$ con $\Lambda = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_\gamma$, y así queda probado (i).

Además, (ii) se desprende directamente de la definición de ideal y de que en (i) la descomposición de Λ es disjunta. \square

Observación 4.4. Una posible aplicación del teorema anterior es que permite reconocer de forma sencilla cuándo un álgebra de evolución no degenerada es descomponible: si $B = \{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$ es una base natural de \mathcal{E} , entonces \mathcal{E} es suma directa de dos ideales si, y solo si, existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que la matriz de estructura asociada a $B' = \{e_{\sigma(i)} \mid i = 1, \dots, n\}$ es

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} W_{m \times m} & 0_{m \times (n-m)} \\ 0_{(n-m) \times m} & Y_{(n-m) \times (n-m)} \end{pmatrix},$$

para algún $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ y matrices $W_{m \times m}$ y $Y_{(n-m) \times (n-m)}$ con entradas en \mathbb{K} . En este caso se tendría que $\mathcal{E} = I \oplus J$, donde $I = \text{span}\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)}\}$ y $J = \text{span}\{e_{\sigma(m+1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\}$. La base natural B' se denomina *reordenamiento* de B .

Veamos cómo se puede emplear la observación anterior a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5. Considérese un álgebra de evolución no degenerada \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_1 + e_3$, $e_2^2 = e_2 + e_5$, $e_3^2 = e_1 + e_4$, $e_4^2 = e_1$ y $e_5^2 = e_5$. Es sencillo ver que, por un lado e_1 , e_3 y e_4 están relacionados entre sí, y que por otro lado e_2 y e_5 también lo están. Considérese entonces la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$. Si ahora se aplica esta permutación a la base B se obtiene un reordenamiento de esta, $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}, e_{\sigma(5)}\} = \{e_1, e_3, e_4, e_2, e_5\}$, cuyo producto viene dado por $f_1^2 = e_1^2 = e_1 + e_3 = f_1 + f_2$, $f_2^2 = e_2^2 = e_2 + e_5 = f_1 + e_4 = f_1 + f_3$, $f_3^2 = e_3^2 = e_1 + e_4 = f_1 + f_3$, $f_4^2 = e_4^2 = e_1 = f_1$, $f_4^2 = e_2^2 = e_2 + e_5 = f_4 + f_5$ y $f_5^2 = e_5^2 = e_5 = f_5$. Consecuentemente, la matriz de estructura asociada a esta nueva base es:

$$M_{B'} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

la cual es una matriz por bloques con la estructura descrita en la Observación 4.4 en el caso particular en el que $m = 3$ y $n = 5$. Por tanto, se tiene que $\mathcal{E} = I \oplus J$, donde $I = \text{span}\{f_1, f_2, f_3\} = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\}$ y $J = \text{span}\{f_4, f_5\} = \text{span}\{e_2, e_5\}$.

A continuación, se presenta uno de los resultados más importantes e ilustrativos de este trabajo. Para probarlo, se ha optado por el empleo del Teorema 4.3, que simplifica mucho la demostración que aparece en [5].

Corolario 4.6. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución no degenerada y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural. Entonces, \mathcal{E} es indescomponible si, y solo si, $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es conexo.*

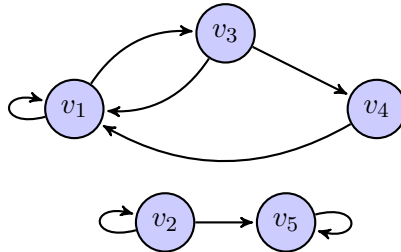
Demostración. Se probará que \mathcal{E} es descomponible si, y solo si, $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ no es conexo.

Sea \mathcal{E} descomponible, es decir, sea $\mathcal{E} = I \oplus J$ con I y J ideales no nulos. Por el Teorema 4.3, existe una descomposición $\{1, \dots, n\} = \Lambda_I \sqcup \Lambda_J$ tal que $I = \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_I\}$ y $J = \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_J\}$. Considérense entonces los digrafos asociados a cada uno de los ideales, que por el Lema 4.1 se sabe que son subálgebras de evolución, $\Gamma(I, B_I)$ y $\Gamma(J, B_J)$, donde $B_I = \{e_i \mid i \in \Lambda_I\}$ y $B_J = \{e_i \mid i \in \Lambda_J\}$. En efecto, estos son dos digrafos que no

están conectados entre sí, y dado que $\Gamma(I, B_I) \sqcup \Gamma(J, B_J) = \Gamma(\mathcal{E}, B)$, se tiene que el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ presenta dos componentes conexas, y por tanto no es conexo.

Recíprocamente, supóngase que el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ no es conexo, luego existe una partición $\{1, \dots, n\} = A_1 \cup A_2$ tal que ninguna arista conecta elementos de $\{v_i \mid i \in A_1\}$ con elementos de $\{v_j \mid j \in A_2\}$ (y viceversa). Entonces $I = \text{span}\{e_i \mid i \in A_1\}$ y $J = \text{span}\{e_j \mid j \in A_2\}$ son ideales de \mathcal{E} tales que $\mathcal{E} = I \oplus J$. En consecuencia, \mathcal{E} es descomponible. \square

Observación 4.7. La importancia de este corolario recae en el hecho de que cuando se tiene un álgebra de evolución no degenerada, que su digrafo asociado relativo a la base natural considerada sea o no conexo no depende de la base. Dicho de otra forma, para ver si un álgebra de evolución no degenerada es o no descomponible, basta con ver la conexidad de su digrafo asociado relativo a cualquiera de sus bases naturales, ya que si para una de ellas es conexo, lo será para todas, y si para una no es conexo, no lo será para ninguna otra. Además, indirectamente, el Corolario 4.6 proporciona un algoritmo para encontrar la descomposición de un álgebra de evolución no degenerada a través de su digrafo asociado. Para verlo, se empleará el álgebra de evolución descrita en el Ejemplo 4.5. Su digrafo asociado relativo a la base B es:



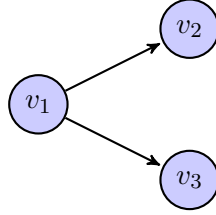
Este digrafo no es conexo, ya que presenta dos componentes conexas bien diferenciadas. Por tanto, se pueden definir $A_1 = \{1, 3, 4\}$ y $A_2 = \{2, 5\}$, y en consecuencia $\mathcal{E} = I \oplus J$ donde:

$$I = \text{span}\{e_i \mid i \in A_1\} = \text{span}\{e_i \mid i \in \{1, 3, 4\}\} = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\} \quad \text{y}$$

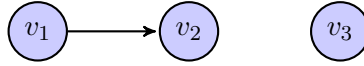
$$J = \text{span}\{e_i \mid i \in A_2\} = \text{span}\{e_i \mid i \in \{2, 5\}\} = \text{span}\{e_2, e_5\}.$$

En caso de que el álgebra sea degenerada, el Corolario 4.6 deja de ser válido. Para ilustrarlo, se empleará el siguiente ejemplo de [5, Example 2.5]:

Ejemplo 4.8. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ su base natural con producto dado por $e_1^2 = e_2 + e_3$ y $e_2^2 = e_3^2 = 0$. En efecto, se trata de un álgebra degenerada con $\text{ann}(\mathcal{E}) = \text{span}\{e_2, e_3\}$. Además, su digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es conexo:



Por otro lado, se tiene que $e_1(e_2 + e_3) = 0$, $e_1e_3 = 0$ y $(e_2 + e_3)e_3 = e_3^2 = 0$ y por tanto $B' = \{f_1 = e_1, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_3\}$ es otra base natural de \mathcal{E} con producto dado por $f_1^2 = e_1^2 = e_2 + e_3 = f_2$, $f_2^2 = (e_2 + e_3)(e_2 + e_3) = e_2^2 + e_3^2 = 0$ y $f_3^2 = e_3^2 = 0$. No obstante, el nuevo digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B')$ no es conexo:



Tal y como se ha visto en el Ejemplo 4.8, cuando tenemos un álgebra de evolución degenerada, la conexidad del grafo es una propiedad que depende de la base natural asociada al álgebra. Este hecho motiva el siguiente resultado, el cual es una generalización del Corolario 4.6.

Proposición 4.9. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución. Entonces \mathcal{E} es indescomponible si, y solo si, el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es conexo para cualquier base natural B .*

Demostración. Se probará que \mathcal{E} es descomponible si, y solo si, existe una base natural B tal que $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ no es conexo.

Si \mathcal{E} es descomponible, entonces existen I y J ideales no nulos tales que $\mathcal{E} = I \oplus J$. Además, por los Lemas 1.13 y 2.13, se tiene que $I \cong \mathcal{E}/J$ y $J \cong \mathcal{E}/I$ son álgebras de evolución, y en consecuencia existen bases naturales para cada uno de ellos, B_I y B_J . En efecto, $B = B_I \sqcup B_J$ es una base natural para \mathcal{E} y $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ no es conexo, ya que no existen aristas que unan nodos correspondientes a B_I con nodos correspondientes a B_J .

El recíproco se demuestra de manera similar a la implicación hacia la izquierda del Corolario 4.6. \square

Observación 4.10. Tal y como se ha visto en el Ejemplo 4.8, si el álgebra es degenerada la conexidad puede variar de unas bases a otras. Por tanto, a nivel práctico, el resultado anterior no siempre ayuda. En caso de encontrar una base con la cual el digrafo asociado no es conexo, se tendría que el álgebra es descomponible y las componentes conexas del digrafo asociado proporcionarían la descomposición. No obstante, si se quisiese probar que es indescomponible, sería inviable, ya que habría que analizar la conexidad del digrafo con cada una de las bases naturales posibles, pudiendo haber una gran cantidad de ellas.

4.3. La descomposición óptima en suma directa

En la sección anterior se ha visto cómo reconocer un álgebra de evolución descomponible y cómo obtener esa descomposición. Cuando se habla de la descomponibilidad de un álgebra, siempre nos referimos a si se puede expresar como suma directa de dos ideales (equivalentemente, como suma directa de dos ideales de evolución, o equivalentemente, como suma directa de dos subálgebras de evolución por el Lema 4.1). Sin embargo, ¿se podría llegar a descomponer el álgebra en suma directa de más de dos ideales? A continuación se presenta el concepto de descomposición óptima en suma directa y se describirán sus condiciones de existencia y unicidad.

Definición 4.11. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución y supongamos que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ es una suma directa de ideales no nulos. Si todo ideal I_γ es un álgebra de evolución indescomponible, se dice que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ es una *descomposición óptima en suma directa* de \mathcal{E} .

Teorema 4.12. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución no degenerada. Entonces, \mathcal{E} admite una descomposición óptima en suma directa. Además, esta descomposición es única.*

Demostración. En primer lugar, se verá la existencia. Sea $E = \Gamma(\mathcal{E}, B)$ el digrafo asociado a \mathcal{E} relativo a la base natural B , y supóngase que $E = \sqcup_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$, donde los E_γ son cada una de las componentes conexas. Además, como en todo momento se está trabajando con álgebras de evolución de dimensión finita, y la dimensión es invariante por cambios de base, se tiene que toda base va a tener una cantidad finita, n , de elementos. Por ello, a través de un procedimiento análogo al presentado en el Teorema 4.3, se tiene que existe una partición de $\{1, \dots, n\} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ tal que ninguna arista conecta elementos de $\{v_i \mid i \in A_\alpha\}$ con elementos de $\{v_j \mid j \in A_\beta\}$ (y viceversa) para cualesquiera $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Luego, los $I_\gamma := \text{span}\{e_i \mid i \in A_\gamma\}$ son ideales de \mathcal{E} tales que $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$. Además, como \mathcal{E} es no degenerada, los ideales I_γ también son subálgebras no degeneradas, y en consecuencia, como el grafo asociado a I_γ , E_γ , es conexo, por el Corolario 4.6 se tiene que cada uno de los I_γ es un álgebra de evolución indescomponible.

Ahora se probará la unicidad. Para ello, fijada una base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, supongamos que existen dos descomposiciones óptimas en suma directa, $\mathcal{E} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ y $\mathcal{E} = \bigoplus_{\omega \in \Omega} J_\omega$. Por el Teorema 4.3, existen dos descomposiciones $\{1, \dots, n\} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ y $\{1, \dots, n\} = \bigoplus_{\omega \in \Omega} \Lambda_\omega$ tales que

$$I_\gamma = \text{span}\{e_i \mid i \in A_\gamma\} \quad \text{y} \quad J_\omega = \text{span}\{e_i \mid i \in \Lambda_\omega\},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ y $\omega \in \Omega$. Tomemos un $i \in A_\gamma$ para un $\gamma \in \Gamma$ cualquiera. Entonces, de nuevo por el Teorema 4.3, se tiene que va a existir un $\omega \in \Omega$ tal que $e_i \in J_\omega$. Esto significa

que $I_\gamma \cap J_\omega \neq 0$. Es obvio que

$$I_\gamma = (I_\gamma \cap J_\omega) \oplus (I_\gamma \cap (\bigoplus_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} J_{\omega'})).$$

Como I_γ era indescomponible y $I_\gamma \cap J_\omega \neq 0$, necesariamente $I_\gamma \cap (\bigoplus_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} J_{\omega'}) = 0$. Entonces, se tiene que $I_\gamma = I_\gamma \cap J_\omega$, y por tanto $I_\gamma \subseteq J_\omega$. Invirtiendo los papeles de I_γ y J_ω , se llega a que $I_\gamma \supseteq J_\omega$ y en consecuencia $I_\gamma = J_\omega$. Se concluye así que ambas descomposiciones son iguales salvo el orden de los sumandos. \square

Observación 4.13. La hipótesis de que el álgebra es no degenerada no puede ser eliminada, ya que en ese caso no se puede asegurar la unicidad de la descomposición óptima en suma directa, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.14. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2^2 = e_1$, $e_3^2 = e_3 + e_5$ y $e_4^2 = e_5^2 = 0$ (nótese que es degenerada). Se verá que las dos siguientes descomposiciones óptimas en suma directa son válidas. Sean

$$\mathcal{E} = I \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \quad \text{y} \quad \mathcal{E} = J \oplus I_1 \oplus I_2 \oplus I_3$$

dos descomposiciones donde $I_1 = \text{span}\{e_3 + e_5\}$, $I_2 = \text{span}\{e_4\}$, $I_3 = \text{span}\{e_5\}$, $I = \text{span}\{f_1 = e_1, f_2 = e_2 + e_4\}$ y $J = \text{span}\{h_1 = e_1, h_2 = e_2\}$. En efecto, I_1 , I_2 y I_3 son subálgebras de evolución indescomponibles por tener dimensión uno. Además, I y J son subálgebras de evolución no degeneradas ya que $f_1^2 = h_1^2 = e_1^2 = e_1 = f_1 = h_1 \neq 0$, $f_2^2 = (e_2 + e_4)(e_2 + e_4) = e_2^2 + e_4^2 = e_1 = f_1 \neq 0$, $h_2^2 = e_2^2 = e_1 = h_1 \neq 0$ y $f_1 f_2 = h_1 h_2 = 0$, y sus respectivos digrafos asociados son:



En ambos casos se tiene un digrafo conexo y por el Corolario 4.6, tanto I como J son indescomponibles. En consecuencia, se tienen dos descomposiciones óptimas en suma directa de \mathcal{E} .

Capítulo 5

Nilpotencia en álgebras de evolución

A lo largo de este capítulo se particularizan los conceptos de álgebra nil, nilpotente por la derecha, nilpotente y soluble al caso de las álgebras de evolución y se estudia cómo los tres primeros son equivalentes en el caso particular de álgebras de evolución de dimensión finita. Además, se trata cómo identificar álgebras de evolución nilpotentes a través de su matriz de estructura y de su digrafo asociado. Por último, también se ven algunas caracterizaciones sobre los posibles valores que puede tomar el índice de nilpotencia de un álgebra de evolución nilpotente de dimensión finita.

No está de más mencionar que el significado biológico de la nilpotencia es que los rasgos originales (o generadores) se extinguen tras un cierto número de generaciones.

5.1. Conceptos y relaciones

Esta primera sección está dedicada al estudio y demostración de las relaciones existentes entre los conceptos presentados en la Definición 1.16 en el caso particular de las álgebras de evolución. Para ello, es necesario tener presentes las sucesiones de subespacios descritas en (1.1), (1.2) y (1.3), y la Observación 1.14, la cual se empleará en numerosas ocasiones debido a la conmutatividad de las álgebras de evolución.

Se dice que un álgebra de evolución es *nil*, *nilpotente por la derecha*, *nilpotente* o *soluble* si lo es, como álgebra, según las Definiciones 1.15 y 1.16. De la misma manera, se dice que un álgebra de evolución tiene *índice de nilpotencia por la derecha n* , *índice de nilpotencia n* o *índice de solubilidad n* si lo tiene, como álgebra, según la Definición 1.16.

Proposición 5.1. *Un álgebra de evolución \mathcal{E} es nilpotente por la derecha si, y solo si, es nilpotente.*

Demostración. En primer lugar, se verá que toda álgebra de evolución nilpotente es nilpotente por la derecha. Para ello, se demostrará que $\mathcal{E}^{(k)} \subseteq \mathcal{E}^k$. Por un lado se tiene que:

$$\mathcal{E}^{(k)} = \mathcal{E}^{(k-1)}\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{(k-2)}\mathcal{E})\mathcal{E} = \underbrace{(\dots((\mathcal{E}\mathcal{E})\mathcal{E})\dots\mathcal{E})}_k.$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^k &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{k-i} = \mathcal{E}\mathcal{E}^{k-1} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{k-2} + \dots + \mathcal{E}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \mathcal{E}^{k-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \\ \mathcal{E}^{k-1} &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{k-1-i} = \mathcal{E}\mathcal{E}^{k-2} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{k-3} + \dots + \mathcal{E}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mathcal{E}^{k-1-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}, \\ &\vdots \\ \mathcal{E}^2 &= \mathcal{E}\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{E}^k \supseteq \mathcal{E}\mathcal{E}^{k-1} \supseteq \mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E}^{k-2}) \supseteq \dots \supseteq \underbrace{\mathcal{E}(\mathcal{E}\dots(\mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E}))\dots)}_k \stackrel{\text{conm.}}{=} \mathcal{E}^{(k)}$, tal y como se quería ver.

A continuación se probará que toda álgebra de evolución nilpotente por la derecha es nilpotente. Para ello, se verá que $\mathcal{E}^{2^k} \subseteq \mathcal{E}^{(k)}$. En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2^k} &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2^k}{2} \rfloor} \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{2^k-i} = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{2^k-i} \\ &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k-1} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^k-2} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}}\mathcal{E}^{2^k-2^{k-1}} \\ &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k-1} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^k-2} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}}\mathcal{E}^{2^k-1} \\ &\subseteq (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}})\mathcal{E}^{2^k-1} \subseteq \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k-1}, \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{E}^{2^k-1} \subseteq \mathcal{E}^{2^k-2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}^{2^{k-1}}$. Si ahora se repite el proceso anterior con $\mathcal{E}^{2^{k-1}}$ se llega a que $\mathcal{E}^{2^{k-1}} \subseteq \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{k-2}}$. Después de k pasos se concluye que:

$$\mathcal{E}^{2^k} \subseteq \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{k-1}} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{k-2}}) \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\mathcal{E}(\mathcal{E}\dots(\mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E}))\dots)}_k \stackrel{\text{conm.}}{=} \mathcal{E}^{(k)},$$

probando así el resultado. □

Observación 5.2. Nótese que, aunque los conceptos de nilpotencia y nilpotencia por la derecha son equivalentes en álgebras de evolución, el índice de nilpotencia y el índice de nilpotencia por la derecha no tienen que coincidir.

Proposición 5.3. Si \mathcal{E} es un álgebra de evolución nilpotente, entonces \mathcal{E} es soluble.

Demostración. Para demostrar este resultado, se probará la inclusión $\mathcal{E}^{(k+1)} \subseteq \mathcal{E}^{2^k}$. Por un lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2^{k-1}} \mathcal{E}^{2^{k-1}} &\subseteq \mathcal{E} \mathcal{E}^{2^k-1} + \mathcal{E}^2 \mathcal{E}^{2^k-2} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}} \mathcal{E}^{2^{k-1}} = \mathcal{E}^{2^k}, \\ \mathcal{E}^{2^{k-2}} \mathcal{E}^{2^{k-2}} &\subseteq \mathcal{E} \mathcal{E}^{2^k-2} + \mathcal{E}^2 \mathcal{E}^{2^k-3} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-2}} \mathcal{E}^{2^{k-2}} = \mathcal{E}^{2^{k-1}}, \\ &\vdots \\ \mathcal{E} \mathcal{E} &= \mathcal{E}^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(k+1)} &= \mathcal{E}^{(k)} \mathcal{E}^{(k)} = \left(\mathcal{E}^{(k-1)} \mathcal{E}^{(k-1)} \right) \left(\mathcal{E}^{(k-1)} \mathcal{E}^{(k-1)} \right) \\ &= \dots = (\dots ((\mathcal{E} \mathcal{E}) (\mathcal{E} \mathcal{E})) \dots ((\mathcal{E} \mathcal{E}) (\mathcal{E} \mathcal{E})) \dots) \\ &= \dots = (\dots ((\mathcal{E}^2 \mathcal{E}^2)) \dots ((\mathcal{E}^2 \mathcal{E}^2)) \dots) \\ &\subseteq (\dots ((\mathcal{E}^4)) \dots ((\mathcal{E}^4)) \dots) \\ &\subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}^{2^{k-1}} \mathcal{E}^{2^{k-1}} \subseteq \mathcal{E}^{2^k}, \end{aligned}$$

tal y como se quería probar. □

Observación 5.4. Nótese que, aunque toda álgebra de evolución nilpotente es soluble, los índices de nilpotencia y solubilidad no tienen que coincidir. Además, también cabe destacar que no toda álgebra de evolución soluble es nilpotente, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y cuyo producto viene dado por $e_i^2 = e_1 + \dots + e_n$ para $1 \leq i \leq n-1$ y $e_n^2 = (1-n)(e_1 + \dots + e_n)$. En efecto, $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_1 + \dots + e_n, (1-n)(e_1 + \dots + e_n)\} = \text{span}\{e_1 + \dots + e_n\}$, y en consecuencia se tiene que $\mathcal{E}^{(k)} = \text{span}\{e_1 + \dots + e_n\} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, \mathcal{E} no es nilpotente por la derecha, y por la Proposición 5.1, tampoco es nilpotente. Sin embargo,

$$\begin{aligned} (e_1 + \dots + e_n)(e_1 + \dots + e_n) &= e_1^2 + e_2^2 \dots + e_n^2 \\ &= (n-1)(e_1 + \dots + e_n) + (1-n)(e_1 + \dots + e_n) \\ &= (n-1+1-n)(e_1 + \dots + e_n) = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\mathcal{E}^{(3)} = \mathcal{E}^{(2)} \mathcal{E}^{(2)} = (\mathcal{E} \mathcal{E})(\mathcal{E} \mathcal{E}) = 0$. Se ve así que, por el contrario, \mathcal{E} sí es soluble.

5.2. Reconocimiento de álgebras de evolución nilpotentes

En esta sección se desarrolla un resultado presentado en [5]. Este teorema nos permite reconocer si un álgebra de evolución es nilpotente o no a partir de su matriz de estructura o bien a partir de su digrafo asociado. Además, también prueba que los conceptos de álgebra de evolución nil y álgebra de evolución nilpotente (y también nilpotente por la derecha por la Proposición 5.1) son equivalentes.

Teorema 5.6. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución y sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural de \mathcal{E} . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

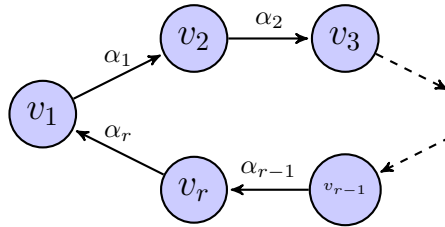
- (i) \mathcal{E} es nil.
- (ii) No hay ciclos orientados en $\Gamma(\mathcal{E}, B)$.
- (iii) La base natural puede ser reordenada de tal forma que la matriz de estructura de \mathcal{E} es estrictamente triangular superior (triangular superior con todo ceros en la diagonal).
- (iv) \mathcal{E} es nilpotente.

Demostración. (iv) \implies (i). Si \mathcal{E} es nilpotente, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}^k = 0$. Tal y como se ha visto en la Proposición 5.1, $\mathcal{E}^{(k)} \subseteq \mathcal{E}^k$, y por tanto $\mathcal{E}^{(k)} = 0$. Este hecho significa que:

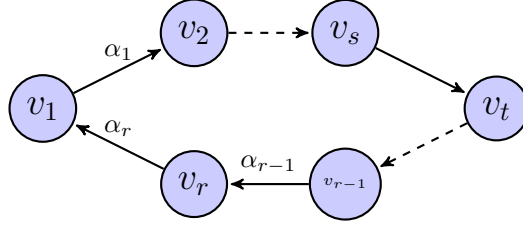
$$(\dots((a_1 a_2) a_3) \dots) a_k = 0 \text{ para cualesquiera } a_1, \dots, a_k \in \mathcal{E};$$

en particular, $a^k = \underbrace{(\dots((aa)a) \dots)}_k a = 0$ para cualquier $a \in \mathcal{E}$. En consecuencia, \mathcal{E} es nil.

(i) \implies (ii). Se probará por reducción al absurdo. Supongamos que $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ contiene ciclos orientados y escojamos el de longitud mínima (esta longitud podría ser uno en caso de haber un lazo en alguno de los nodos). Sea r esa longitud mínima y reordenemos los nodos y los elementos de la base de tal forma que:



En primer lugar, se verá que, por minimalidad, no existe ninguna otra arista que conecta los nodos v_1, \dots, v_r entre sí. Supóngase, por ejemplo, que existe una arista que une los nodos $v_s, v_t \in \{v_1, \dots, v_r\}$, con $|s - t| > 1$.



En este caso se tendría un ciclo de longitud $r - |s - t| < r$, en contradicción con que el de longitud mínima era el de longitud r . Si se define $\mathcal{N} = \mathbb{K}e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_n$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \alpha_1 e_2 + u_1, & u_1 &\in \mathcal{N}, \\ e_2^2 &= \alpha_2 e_3 + u_2, & u_2 &\in \mathcal{N}, \\ &\vdots \\ e_r^2 &= \alpha_r e_1 + u_r, & u_r &\in \mathcal{N}; \end{aligned}$$

con $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Operando ahora el elemento $x = e_1 + \cdots + e_r$ consigo mismo, se tiene que:

$$\begin{aligned} x^{r+1} &= (\cdots ((e_1 + \cdots + e_r)(e_1 + \cdots + e_r))x \cdots)x \\ &= (\cdots ((\alpha_1 e_2 + \cdots + \alpha_r e_1 + u_1 + \cdots + u_r)(e_1 + \cdots + e_r))x \cdots)x \\ &= (\cdots ((\alpha_2 \alpha_1 e_3 + \cdots + \alpha_1 \alpha_r e_2 + u_2 + \cdots + u_1)(e_1 + \cdots + e_r))x \cdots)x \\ &= \cdots = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r)x + u_1 + \cdots + u_r = \alpha x + u \neq 0, \end{aligned}$$

con $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \neq 0$, por ser todos los α_i no nulos, y $u = u_1 + \cdots + u_r$. A continuación, si se toma un $s \in \mathbb{N}$ cualquiera, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} x^{s(r+1)} &= (\cdots (x^{r+1})x \cdots)x = (\cdots (\alpha x + u)x \cdots)x \\ &= \cdots = (\cdots (\alpha^2 x + u)x \cdots)x = \cdots = \alpha^s x + u \neq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, x no es nil, ya que si existiese un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, se tendría una contradicción con que $x^{s(r+1)} \neq 0$ para cualquier $s \in \mathbb{N}$. En efecto, bastaría tomar un $s \in \mathbb{N}$ tal que $s(r+1) > n$.

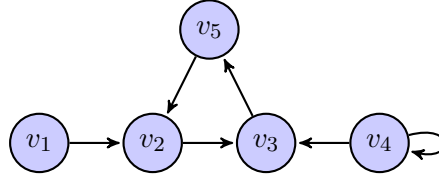
(ii) \implies (iii). Como el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es finito y no hay ciclos orientados, existe al menos un nodo sumidero. Supóngase que este es el nodo i , entonces $e_i^2 = 0$. Reordenemos entonces B de tal forma que $i = n$ y, en consecuencia, $e_n^2 = 0$. Considérese ahora el subgrafo formado por los $n - 1$ nodos restantes. Como este subgrafo tampoco presenta ciclos orientados, supóngase sin pérdida de generalidad que el nodo $n - 1$ también es un

sumidero. Así $e_{n-1}^2 \in \mathbb{K}e_n$. Repitiendo este proceso, se obtendría un reordenamiento B' de B tal que $e_i^2 \in \sum_{j>i} \mathbb{K}e_j$ para cualquier $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, se tiene que la matriz de estructura $M_{B'}$ es estrictamente triangular superior.

(iii) \implies (iv). Si la matriz de estructura es estrictamente triangular superior, entonces esta es una matriz nilpotente. Esto es debido a que si se eleva al cuadrado una matriz estrictamente triangular superior, se genera al menos una nueva supradiagonal nula. En términos de álgebras de evolución, esto significa que $\mathcal{E}^{(k)} \subseteq \sum_{j=k}^n \mathbb{K}e_j$. Por lo que, en particular, $\mathcal{E}^{(n+1)} = 0$, y por la Proposición 5.1, se tiene el resultado. \square

Observación 5.7. La implicación (ii) \implies (iii) de la demostración del Teorema 5.6 aporta un algoritmo para la obtención del reordenamiento de la base natural B cuya matriz de estructura es estrictamente triangular superior.

Ejemplo 5.8. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_3$, $e_3^2 = e_5$, $e_4^2 = e_3 + e_4$ y $e_5^2 = e_2$. En efecto, su digrafo asociado relativo a la base natural B es



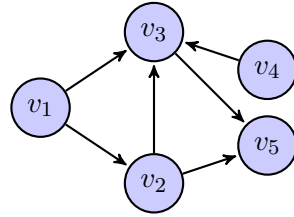
Este digrafo presenta ciclos orientados, ya que en el nodo v_4 existe un lazo, y además existe otro ciclo orientado que relaciona los nodos v_2 , v_3 y v_5 . Por tanto, este álgebra de evolución no es nilpotente.

Ejemplo 5.9. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_3 + e_5$, $e_3^2 = e_5$, $e_4^2 = e_3$ y $e_5^2 = 0$. En primer lugar, se verá explícitamente que se trata de un álgebra de evolución nilpotente con índice de nilpotencia 9:

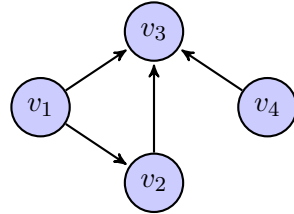
$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^2 &= \text{span}\{e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2, e_5^2\} = \text{span}\{e_2 + e_3, e_3 + e_5, e_5, e_3\} = \text{span}\{e_2, e_3, e_5\}, \\
 \mathcal{E}^3 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \text{span}\{e_2, e_3, e_5\} = \text{span}\{e_2^2, e_3^2, e_5^2\} = \text{span}\{e_3 + e_5, e_5\} = \text{span}\{e_3, e_5\}, \\
 \mathcal{E}^4 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \text{span}\{e_3, e_5\} + \text{span}\{e_2, e_3, e_5\} \text{span}\{e_2, e_3, e_5\} = \text{span}\{e_3, e_5\}, \\
 \mathcal{E}^5 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^3 = \mathcal{E} \text{span}\{e_3, e_5\} + \text{span}\{e_2, e_3, e_5\} \text{span}\{e_3, e_5\} = \text{span}\{e_5\}, \\
 \mathcal{E}^6 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^5 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^3\mathcal{E}^3 \\
 &= \text{span}\{e_2, e_3, e_5\} \text{span}\{e_3, e_5\} + \text{span}\{e_3, e_5\} \text{span}\{e_3, e_5\} = \text{span}\{e_5\}, \\
 \mathcal{E}^7 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^6 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^5 + \mathcal{E}^3\mathcal{E}^4 = \text{span}\{e_3, e_5\} \text{span}\{e_3, e_5\} = \text{span}\{e_5\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^8 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^7 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^6 + \mathcal{E}^3\mathcal{E}^5 + \mathcal{E}^4\mathcal{E}^4 = \text{span}\{e_3, e_5\} \text{span}\{e_3, e_5\} = \text{span}\{e_5\}, \\ \mathcal{E}^9 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^8 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^7 + \mathcal{E}^3\mathcal{E}^6 + \mathcal{E}^4\mathcal{E}^5 = 0. \end{aligned}$$

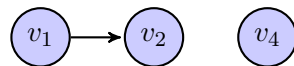
Además, todos los elementos de la base natural son nil ya que $e_1^3 = e_1^2e_1 = (e_2 + e_3)e_1 = 0$, $e_2^3 = e_2^2e_2 = (e_3 + e_5)e_2 = 0$, $e_3^3 = e_3^2e_3 = e_5e_3 = 0$, $e_4^3 = e_4^2e_4 = e_3e_4 = 0$ y $e_5^2 = 0$, y en consecuencia, \mathcal{E} es nil, ya que cualquier otro elemento del álgebra también es nil por ser combinación lineal de los elementos de la base. Por otro lado, el digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es:



Este digrafo, tal y como cabía esperar por ser \mathcal{E} nilpotente, no presenta ciclos orientados. A continuación, se empleará el algoritmo antes citado en la Observación 5.7 para obtener el reordenamiento de la base natural tal que la matriz de estructura sea estrictamente triangular superior. Sea σ la permutación que nos da dicho reordenamiento. En efecto, el nodo v_5 es un sumidero, por tanto $\sigma(5) = 5$. Si ahora se considera el subdigrafo de $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ con los cuatro nodos restantes,



el nodo v_3 es un sumidero, por tanto $\sigma(4) = 3$. De nuevo, considerando el subdigrafo con los tres nodos restantes,



se tiene que tanto el nodo v_2 como el nodo v_4 son sumideros. Considérese, sin pérdida de generalidad, que $\sigma(3) = 2$. Finalmente, solo se tiene el subdigrafo con los nodos v_1 y v_4 sin aristas, por lo que se puede tomar $\sigma(2) = 4$ y $\sigma(1) = 1$. El reordenamiento resultante es $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}, e_{\sigma(5)}\} = \{e_1, e_4, e_2, e_3, e_5\}$, cuyo producto viene dado por $f_1^2 = e_1^2 = e_2 + e_3 = f_3 + f_4$, $f_2^2 = e_4^2 = e_3 = f_4$, $f_3^2 = e_2^2 = e_3 + e_5 = f_4 + f_5$, $f_4^2 = e_3^2 = e_5 = f_5$ y $f_5^2 = e_5^2 = 0$. En consecuencia, la matriz de

estructura asociada a este reordenamiento es

$$M_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es una matriz estrictamente triangular superior.

5.3. Índice de nilpotencia

En algunas ocasiones resulta interesante conocer los posibles valores que puede tomar el índice de nilpotencia de un álgebra de evolución nilpotente. Si se tiene un álgebra de evolución de dimensión baja, es sencillo hacer los cálculos. Veámoslo, por ejemplo, en el caso de un álgebra de evolución nilpotente \mathcal{E} de dimensión 3 con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Al igual que se hará en el resto de la sección, gracias al Teorema 5.1, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la matriz de estructura de esta álgebra de evolución nilpotente es estrictamente triangular superior. Así, su producto viene dado por $e_1^2 = ae_2 + be_3$, $e_2^2 = ce_3$ y $e_3^2 = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Se tienen entonces los siguientes casos:

- Si a, b y c son nulos, entonces $\mathcal{E}^2 = 0$.
- Si a es nulo y b o c son no nulos, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$ y $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = 0$.
- Si c es nulo y a o b son no nulos, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{ae_2 + be_3\}$ y $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = 0$.
- Si b es nulo y a o c son no nulos:
 - Si a es nulo, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$ y $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = 0$.
 - Si c es nulo, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_2\}$ y $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = 0$.
 - Si ambos son no nulos, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_2, e_3\}$, $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$, $\mathcal{E}^4 = \mathcal{E}\mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$ y $\mathcal{E}^5 = \mathcal{E}\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^3 = 0$.
- Si los tres son no nulos, entonces $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{ae_2 + be_3, ce_3\} = \text{span}\{e_2, e_3\}$, $\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$, $\mathcal{E}^4 = \mathcal{E}\mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3\}$ y $\mathcal{E}^5 = \mathcal{E}\mathcal{E}^4 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^3 = 0$.

Es decir, un álgebra de evolución nilpotente de dimensión 3 puede tener índice de nilpotencia 2, 3 o 5. Sin embargo, para valores mayores de n , este se convierte en un problema difícil. A pesar de ello, en esta sección se desarrollan ciertos resultados presentados en [2], los cuales nos permitirán ver cuál es el máximo índice de nilpotencia que puede tener un

álgebra de evolución nilpotente de dimensión finita arbitraria y lo que ocurre en los casos en los que el índice de nilpotencia no sea máximo. Sin embargo, antes de tratar estos resultados es necesario demostrar los dos siguientes lemas, los cuales aportan información acerca de la dimensión del álgebra elevada a una cierta potencia.

Lema 5.10. *Si \mathcal{E} es un álgebra de evolución nilpotente con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, entonces se tiene que:*

$$\mathcal{E}^{2^k+1} \subseteq \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\}$$

para todo $0 \leq k \leq n - 2$.

Demostración. Este hecho se probará por inducción.

Para $k = 0$ se verifica, ya que $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}\mathcal{E} \subseteq \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$.

Para $k = 1$ también se verifica, ya que $\mathcal{E}^{2+1} = \mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 \subseteq \text{span}\{e_3, \dots, e_n\}$. Supongamos entonces que $\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} \subseteq \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ y se verá que se verifica para \mathcal{E}^{2^k+1} . Empleando la hipótesis de inducción se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2^k+1} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^k-1} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}}\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} \\ &\subseteq (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}})\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} \subseteq \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} \\ &\subseteq \mathcal{E}\text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subseteq \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\}, \end{aligned}$$

tal y como se quería ver. □

Lema 5.11. *Si \mathcal{E} es un álgebra de evolución nilpotente con base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, tal que su matriz de estructura $M_B = (a_{ij})$ (estrictamente triangular superior) satisface que $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$, entonces se tiene que:*

$$\mathcal{E}^{2^k+1} = \mathcal{E}^{2^k+2} = \dots = \mathcal{E}^{2^{k+1}} = \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\}$$

para todo $0 \leq k \leq n - 2$.

Demostración. Este hecho se probará por inducción.

Para $k = 0$ se verifica ya que $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}\mathcal{E} = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$.

Para $k = 1$ también se verifica ya que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2+1} &= \mathcal{E}^3 = \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}\text{span}\{e_2, \dots, e_n\} = \text{span}\{e_3, \dots, e_n\}, \\ \mathcal{E}^{2^2} &= \mathcal{E}^4 = \mathcal{E}\mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_3, \dots, e_n\}. \end{aligned}$$

Supongamos entonces que $\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} = \mathcal{E}^{2^{k-1}+2} = \dots = \mathcal{E}^{2^k} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Empleando la hipótesis de inducción se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{2^k+1} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^k-1} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}}\mathcal{E}^{2^{k-1}+1} \\ &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^k} + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}}\mathcal{E}^{2^k} = (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{k-1}})\mathcal{E}^{2^k} \\ &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^k} = \mathcal{E}\text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\} = \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\},\end{aligned}$$

tal y como se quería probar. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{2^{k+1}} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{k+1}-1} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^{k+1}-2} + \dots + \mathcal{E}^{2^k}\mathcal{E}^{2^k} \\ &\supseteq \mathcal{E}^{2^k}\mathcal{E}^{2^k} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}\text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\} = \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\}.\end{aligned}$$

Así, tenemos la cadena de contenidos

$$\text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\} = \mathcal{E}^{2^k+1} \supseteq \mathcal{E}^{2^k+2} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{E}^{2^{k+1}} \supseteq \text{span}\{e_{k+2}, \dots, e_n\},$$

de la cual se deducen las igualdades buscadas. \square

Teorema 5.12. *El máximo índice de nilpotencia que puede alcanzar un álgebra de evolución nilpotente es $1 + 2^{n-1}$.*

Demostración. Por el Lema 5.10 se tiene que $\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} \subseteq \text{span}\{e_n\}$. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{2^{n-1}+1} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{n-1}} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^{n-1}-1} + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-2}}\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} \\ &\subseteq (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-2}})\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} \subseteq \mathcal{E}\text{span}\{e_n\} = 0,\end{aligned}$$

lo que concluye que, en general, el índice de nilpotencia de \mathcal{E} no es mayor que $1 + 2^{n-1}$. Además, en particular, si $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$, aplicando el Lema 5.11, $\mathcal{E}^{2^{n-1}} = \text{span}\{e_n\}$ y $\mathcal{E}^{2^{n-1}+1} = \mathcal{E}\text{span}\{e_n\} = 0$. Se deduce así, que en este caso el índice de nilpotencia es exactamente $1 + 2^{n-1}$. \square

Proposición 5.13. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución nilpotente con índice de nilpotencia distinto de $1 + 2^{n-1}$. Entonces no es mayor que $1 + 2^{n-2}$.*

Demostración. Como \mathcal{E} es nilpotente, supóngase sin pérdida de generalidad que la matriz de estructura es estrictamente triangular superior. En la demostración del Teorema 5.12 se ha visto que si $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$ entonces el índice de nilpotencia es máximo. En consecuencia, la única hipótesis empleada será que $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} = 0$.

Esta proposición se probará por reducción al absurdo. Supóngase que \mathcal{E} es nilpotente con índice de nilpotencia estrictamente mayor que $1 + 2^{n-2}$ pero distinto de $1 + 2^{n-1}$. A continuación, se llevará a cabo una inducción en k para ver que $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} = \text{span}\{e_{n-k-1}, \dots, e_n\}$.

Considérese, en primer lugar, el caso $k = 0$. Por el Lema 5.10, $\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} \subseteq \text{span}\{e_n\}$ y $\mathcal{E}^{2^{n-3}+1} \subseteq \text{span}\{e_{n-1}, e_n\}$. Por otro lado, como el índice de nilpotencia es mayor que $1 + 2^{n-2}$, $\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} \neq 0$. Así, se tiene que $\mathcal{E}^{2^{n-2}+1} = \text{span}\{e_n\}$. Por tanto:

$$\text{span}\{e_{n-1}, e_n\} \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-3}+1} \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-3}+2} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-2}} \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-2}+1} = \text{span}\{e_n\}.$$

Supóngase ahora que $\mathcal{E}^{2^{n-3}+1} = \mathcal{E}^{2^{n-3}+2} = \dots = \mathcal{E}^{2^{n-2}} = \text{span}\{e_n\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2^{n-2}+1} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{n-2}} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^{n-2}-1} + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-3}}\mathcal{E}^{2^{n-3}+1} \\ &\subseteq (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-3}})\mathcal{E}^{2^{n-3}+1} = \mathcal{E}\text{span}\{e_n\} = 0, \end{aligned}$$

en contradicción con que el índice de nilpotencia era mayor que $1 + 2^{n-2}$. Así, como $\text{span}\{e_{n-1}, e_n\} \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-3}+1} \not\supseteq \text{span}\{e_n\}$, se tiene que $\mathcal{E}^{2^{n-3}+1} = \text{span}\{e_{n-1}, e_n\}$.

Supóngase entonces que $\mathcal{E}^{2^{n-k-2}+1} = \text{span}\{e_{n-k}, \dots, e_n\}$ y se verá si se verifica para $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1}$. Como $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} \subseteq \text{span}\{e_{n-k-1}, e_{n-k}, \dots, e_n\}$ por el Lema 5.10 se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{span}\{e_{n-k-1}, e_{n-k}, \dots, e_n\} &\supseteq \mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-k-3}+2} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{E}^{2^{n-k-2}} \\ &\supseteq \mathcal{E}^{2^{n-k-2}+1} = \text{span}\{e_{n-k}, \dots, e_n\}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} \neq \text{span}\{e_{n-k-1}, e_{n-k}, \dots, e_n\}$, se tendría que $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} = \mathcal{E}^{2^{n-k-3}+2} = \dots = \mathcal{E}^{2^{n-k-2}} = \text{span}\{e_{n-k}, \dots, e_n\}$. En ese caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2^{n-k-2}+1} &= \mathcal{E}\mathcal{E}^{2^{n-k-2}} + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^{2^{n-k-2}-1} + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-k-3}}\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} \\ &= (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2 + \dots + \mathcal{E}^{2^{n-k-3}})\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} \\ &= \mathcal{E}\text{span}\{e_{n-k}, \dots, e_n\} \subseteq \text{span}\{e_{n-k-1}, \dots, e_n\}, \end{aligned}$$

lo que contradice que $\mathcal{E}^{2^{n-k-2}+1} = \text{span}\{e_{n-k}, \dots, e_n\}$, y en consecuencia se tiene que $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} = \text{span}\{e_{n-k-1}, e_{n-k}, \dots, e_n\}$.

Por tanto, hemos probado por inducción que $\mathcal{E}^{2^{n-k-3}+1} = \text{span}\{e_{n-k-1}, \dots, e_n\}$, y así, $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$, en contradicción con que $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} = 0$. Se ha probado entonces que si el índice de nilpotencia es distinto de $1 + 2^{n-1}$, entonces no es mayor que $1 + 2^{n-2}$. \square

Observación 5.14. Nótese que, en principio, no se podrían restringir todavía más los valores posibles para el índice de nilpotencia, ya que, tal y como muestra el siguiente ejemplo, existen álgebras de evolución cuyo índice de nilpotencia es mayor que $1 + 2^{n-3}$ y menor que $1 + 2^{n-2}$.

Ejemplo 5.15. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2 + e_3 + e_4$, $e_2^2 = -e_4$, $e_3^2 = e_4$ y $e_4^2 = 0$. En efecto, se tiene

que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^2 &= \mathcal{E}\mathcal{E} = \text{span}\{e_2 + e_3 + e_4, -e_4, e_4\} = \text{span}\{e_2 + e_3, e_4\}, \\ \mathcal{E}^3 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \text{span}\{e_2 + e_3, e_4\} = \text{span}\{e_4\}, \\ \mathcal{E}^4 &= \mathcal{E}\mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^2\mathcal{E}^2 = \text{span}\{(e_2 + e_3)^2, e_4^2\} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, su índice de nilpotencia es 4, el cual verifica que:

$$1 + 2^{4-3} = 1 + 2 = 3 < 4 < 5 = 1 + 4 = 1 + 2^{4-2}.$$

Observación 5.16. En la prueba del Teorema 5.12 se ha visto que si $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$, entonces el álgebra de evolución tiene índice de nilpotencia máximo, $1 + 2^{n-1}$. Por otro lado, en la demostración de la Proposición 5.13 se ha visto que si $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} = 0$, entonces el álgebra de evolución tiene un índice de nilpotencia no mayor que $1 + 2^{n-2}$, y por tanto, menor estricto que $1 + 2^{n-1}$. Es obvio que una consecuencia inmediata de estas dos demostraciones es que un álgebra de evolución nilpotente tiene índice de nilpotencia máximo si y solo si $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$.

Se pone fin a este capítulo con un resultado sobre el índice de nilpotencia por la derecha y el índice de solubilidad.

Teorema 5.17. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución nilpotente cuya matriz de estructura (la cual podemos suponer que es estrictamente triangular superior por el Teorema 5.6) cumple que $a_{12}a_{23} \dots a_{(n-1)n} \neq 0$. Entonces \mathcal{E} también es nilpotente por la derecha y soluble, y en ambos casos tiene índice $n + 1$.*

Demostración. En primer lugar se tratará la solubilidad. En efecto, \mathcal{E} es soluble por la Proposición 5.3. Además, se tiene que $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}\mathcal{E} = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$. Supóngase entonces que $\mathcal{E}^{(k)} = \text{span}\{e_k, \dots, e_n\}$ y se verá que $\mathcal{E}^{(k+1)} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. En efecto:

$$\mathcal{E}^{(k+1)} = \mathcal{E}^{(k)}\mathcal{E}^{(k)} = \text{span}\{e_k, \dots, e_n\}\text{span}\{e_k, \dots, e_n\} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Por tanto $\mathcal{E}^{(n)} = \text{span}\{e_n\}$ y así, $\mathcal{E}^{(n+1)} = \mathcal{E}^{(n)}\mathcal{E}^{(n)} = 0$.

Análogamente, se tratará la nilpotencia por la derecha. En efecto, \mathcal{E} es nilpotente por la derecha por la Proposición 5.1. Además, se tiene que $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}\mathcal{E} = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$. Supóngase entonces que $\mathcal{E}^{(k)} = \text{span}\{e_k, \dots, e_n\}$ y se verá que $\mathcal{E}^{(k+1)} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. En efecto:

$$\mathcal{E}^{(k+1)} = \mathcal{E}^{(k)}\mathcal{E} = \text{span}\{e_k, \dots, e_n\}\mathcal{E} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Por tanto $\mathcal{E}^{(n)} = \text{span}\{e_n\}$ y así, $\mathcal{E}^{(n+1)} = \mathcal{E}^{(n)}\mathcal{E} = 0$. □

Capítulo 6

Grupo de automorfismos en álgebras de evolución

Tal y como ya se ha mencionado en la Definición 1.9, el conjunto de automorfismos de un álgebra tiene estructura de grupo con la composición. El objetivo principal de este último capítulo es el estudio del grupo de automorfismos en el caso particular de las álgebras de evolución. En primer lugar, se presenta una condición suficiente para que el grupo de automorfismos de un álgebra de evolución sea finito, ya que, en general, no tiene por qué serlo. Además, se ejemplificará este caso particular con el cálculo de algunos grupos de automorfismos. Posteriormente, se estudia la interesante propiedad de que, dado un grupo finito cualquiera, se puede construir un álgebra de evolución cuyo grupo de automorfismos sea isomorfo a dicho grupo finito. Por último, como punto y final a este trabajo, se enuncia un resultado que permite describir el álgebra de derivaciones de un álgebra de evolución y se presentan algunos ejemplos.

6.1. Finitud del grupo de automorfismos

Esta sección está dedicada, en su mayoría, al desarrollo de un resultado presente en [5], el cual asegura que el grupo de automorfismos es finito en el caso particular de álgebras de evolución regulares (Definición 3.18). Además, al final se presentan algunos ejemplos del cálculo del grupo de automorfismos de álgebras de evolución regulares empleando la demostración del resultado.

En primer lugar, nótese que si se omite la condición de que el álgebra de evolución sea regular, su grupo de automorfismos puede ser infinito, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo tomado también de [5, Example 4.1].

Ejemplo 6.1. Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución sobre \mathbb{R} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_3$, $e_2^2 = e_3$ y $e_3^2 = e_3$. En efecto, si $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es un automorfismo, este va a ser de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ \varphi(e_2) &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \\ \varphi(e_3) &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3,\end{aligned}$$

tal que existe, al menos, un $\alpha_i \neq 0$, un $\beta_j \neq 0$ y un $\gamma_k \neq 0$. Además, por ser φ un homomorfismo de álgebras, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{E}$. En particular, se tiene que:

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 = \varphi(e_3) = \varphi(e_3^2) = \varphi(e_3)\varphi(e_3) = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)e_3.$$

Por tanto, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ y $\gamma_3 = 1$. Se concluye entonces que $\varphi(e_3) = e_3$, es decir, φ deja fijo a e_3 . De igual modo, se tiene que:

$$e_3 = \varphi(e_3) = \varphi(e_1^2) = \varphi(e_1)\varphi(e_1) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)e_3,$$

y en consecuencia $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Además,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(e_1 e_3) = \varphi(e_1)\varphi(e_3) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)e_3 = \alpha_3 e_3.$$

Se concluye entonces que $\alpha_3 = 0$. Por tanto, $\varphi(e_1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Análogamente, $\varphi(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ con $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$. A mayores,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(e_1 e_2) = \varphi(e_1)\varphi(e_2) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)e_3,$$

por tanto $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$. En resumen, la matriz asociada al automorfismo φ ,

$$M_\varphi = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

cumple que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$, $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$ y $\det(M_\varphi) = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0$. Además, nótese que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 & \beta_1^2 + \beta_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y que ambas matrices son invertibles, por tanto son ortogonales. Así, $\text{Aut}(\mathcal{E})$ es infinito, ya que existen infinitas matrices ortogonales 2×2 .

Antes de comenzar con la demostración del resultado antes mencionado, es conveniente enunciar el siguiente corolario, el cual es consecuencia directa del Teorema 3.22 y del hecho de que un automorfismo de álgebras de evolución es, en particular, un isomorfismo de álgebras de evolución, que por tanto lleva bases naturales en bases naturales.

Corolario 6.2. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución regular y sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural. Entonces, para cualquier automorfismo $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{E})$ existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $\varphi(e_i) \in \mathbb{K}^* e_{\sigma(i)}$, donde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Teorema 6.3. *Si \mathcal{E} es un álgebra de evolución regular, entonces su grupo de automorfismos, $\text{Aut}(\mathcal{E})$, es finito.*

Demostración. En primer lugar, fijese una base natural $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathcal{E} y considérese su matriz de estructura $M_B = (a_{ij})$. Por el Corolario 6.2, se tiene que todo automorfismo de \mathcal{E} induce un automorfismo en $\Gamma(\mathcal{E}, B) = (V, E)$. Es fácil ver que la correspondencia inducida

$$\Phi: \text{Aut}(\mathcal{E}) \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma(\mathcal{E}, B))$$

es un homomorfismo de grupos.

A continuación, se verá que el $\ker(\Phi)$ es finito. Nótese que el núcleo de Φ está formado por los *automorfismos diagonales* de \mathcal{E} , es decir, aquellos automorfismos tales que $\varphi(e_i) = \mu_i e_i$ con $\mu_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. En este caso se tiene que:

$$\sum_{j=1}^n \mu_i^2 a_{ij} e_j = \mu_i^2 e_i^2 = (\mu_i e_i)^2 = \varphi(e_i)^2 = \varphi(e_i^2) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mu_j e_j.$$

Entonces, φ es automorfismo si, y solo si, $\mu_i^2 a_{ij} = \mu_j a_{ij}$ para cualesquiera i, j tales que $a_{ij} \neq 0$, o equivalentemente, si $\mu_i^2 = \mu_j$ para cualesquiera i, j tales que $(v_i, v_j) \in E$. Este argumento se resume en el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\ker(\Phi) \cong \{(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{K}^*)^n \mid \mu_j = \mu_i^2 \text{ para todo } (v_i, v_j) \in E\}.$$

No obstante, por hipótesis se tiene que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$, por tanto $e_i \in \mathcal{E}^2$ para cualquier $i = 1, \dots, n$, y, en consecuencia, existe al menos un índice j tal que $(v_j, v_i) \in E$, es decir, el digrafo asociado a un álgebra de evolución regular no tiene nodos fuente. Por tanto, si se fija un $i \in \{1, \dots, n\}$ cualquiera, $i = i_0$, existe un índice i_1 tal que $(v_{i_1}, v_{i_0}) \in E$. De la misma forma, existe un i_2 tal que $(v_{i_2}, v_{i_1}) \in E$. Si se repite este proceso sucesivas veces, es obvio que, al tratarse de álgebras de evolución finitas cuyo digrafo es finito, acaba apareciendo un ciclo. Tomemos entonces los menores enteros $0 \leq r < s < n$ tales que $i_r = i_{s+1}$ (véase el digrafo en el anexo A.2).

En esta situación se tiene que:

$$\mu_{i_r} = \mu_{i_{r+1}}^2 = (\mu_{i_{r+2}}^2)^2 = \cdots = \mu_{i_{s+1}}^{2^{s+1-r}} = \mu_{i_r}^{2^{s+1-r}},$$

por tanto $\mu_{i_r}^{2^{s+1-r}-1} = 1$. Además, por otro lado, $\mu_i = \mu_{i_0} = \mu_{i_1}^2 = \cdots = \mu_{i_r}^{2^r}$. Reemplazando este valor en la expresión anterior se tiene que:

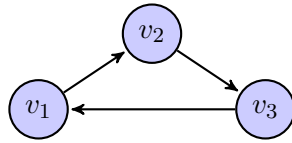
$$\mu_i^{2^{s+1-r}-1} = (\mu_{i_r}^{2^r})^{2^{s+1-r}-1} = (\mu_{i_r}^{2^{s+1-r}-1})^{2^r} = 1.$$

En consecuencia, μ_i es una raíz compleja de la unidad de orden un divisor de $2^{s+1-r} - 1$ y, por tanto, únicamente hay un número finito de posibilidades para cada μ_i . Así, se concluye que el $\ker(\Phi)$ es finito.

Por último, se verá por reducción al absurdo que $\text{Aut}(\mathcal{E})$ es finito. Supóngase entonces que $\text{Aut}(\mathcal{E})$ es infinito. En ese caso, por ser el $\ker(\Phi)$ finito, se tiene que $\text{Aut}(\mathcal{E})/\ker(\Phi)$ es infinito. Por otro lado, la $\text{Im}(\Phi)$ es finita por ser un subgrupo de $\text{Aut}(\Gamma(\mathcal{E}, B))$, el cual es finito por ser un subgrupo del grupo simétrico S_n . Sin embargo, por el Teorema 1.11, se tiene que $\text{Aut}(\mathcal{E})/\ker(\Phi) \cong \text{Im}(\Phi)$, lo cual no es posible por ser el primero infinito y el segundo finito. Por tanto, se tiene una contradicción con el hecho de que $\text{Aut}(\mathcal{E})$ es infinito, concluyendo así el resultado. \square

Observación 6.4. La demostración del Teorema 6.3 proporciona un algoritmo para el cálculo del grupo de automorfismos de cualquier álgebra de evolución regular, el cual se desarrolla en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.5. Considérese un álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y producto $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_3$ y $e_3^2 = e_1$. Además, su digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es



En efecto, $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_1^2, e_2^2, e_3^2\} = \text{span}\{e_2, e_3, e_1\} = \mathcal{E}$, es decir, \mathcal{E} es regular. Además, los automorfismos de este grafo son las permutaciones $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\text{Id} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Así, los automorfismos de $\Phi^{-1}(\sigma_1)$ son de la forma $\psi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ con $\psi(e_1) = \alpha_1 e_3$, $\psi(e_2) = \alpha_2 e_1$ y $\psi(e_3) = \alpha_3 e_2$. Por las propiedades de los automorfismos:

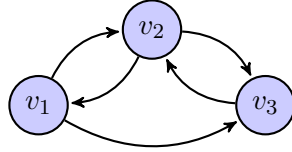
$$\begin{aligned} \alpha_2 e_1 &= \psi(e_2) = \psi(e_1^2) = \psi(e_1)^2 = \psi(e_1)\psi(e_1) = \alpha_1^2 e_1, \\ \alpha_3 e_2 &= \psi(e_3) = \psi(e_2^2) = \psi(e_2)^2 = \psi(e_2)\psi(e_2) = \alpha_2^2 e_2, \\ \alpha_1 e_3 &= \psi(e_1) = \psi(e_3^2) = \psi(e_3)^2 = \psi(e_3)\psi(e_3) = \alpha_3^2 e_3, \\ \psi(e_i)\psi(e_j) &= \psi(e_i e_j) = \psi(0) = 0 \text{ para cualesquiera } i \neq j. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_2 = \alpha_1^2$, $\alpha_3 = \alpha_2^2$ y $\alpha_1 = \alpha_3^2$. Así, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_3^2 = \alpha_2^4 = \alpha_1^8$, es decir, $\alpha_1^7 = 1$. Si se denotan por $\epsilon_k = \exp(\frac{2\pi ki}{7})$ con $0 \leq k \leq 6$ a las raíces séptimas de la unidad, se tienen siete automorfismos distintos $\psi_k: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tales que $\psi_k(e_1) = \epsilon_k e_3$, $\psi_k(e_2) = \epsilon_k^2 e_1$ y $\psi_k(e_3) = \epsilon_k^4 e_3$ con $0 \leq k \leq 6$.

Análogamente, es sencillo ver que $\Phi^{-1}(\sigma_2)$ son otros siete automorfismos distintos $\phi_k: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ tales que $\phi_k(e_1) = \epsilon_k e_2$, $\phi_k(e_2) = \epsilon_k^2 e_3$ y $\phi_k(e_3) = \epsilon_k^4 e_1$ con $0 \leq k \leq 6$.

Sólo falta calcular el $\ker(\Phi)$, el cual está formado por los automorfismos diagonales. El menor y único ciclo que presenta $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ tiene longitud tres. Por tanto, si se supone que los automorfismos $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ son tales que $\varphi(e_1) = \mu_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \mu_2 e_2$ y $\varphi(e_3) = \mu_3 e_3$, se tiene que $\mu_i^{2^3-1} = \mu_i^7 = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$, es decir, μ_i es una raíz séptima de la unidad. Además, por las diferentes relaciones de adyacencia se tiene que $\mu_1^2 = \mu_2$, $\mu_2^2 = \mu_3$ y $\mu_3^2 = \mu_1$. En consecuencia, existen siete automorfismos distintos que pertenecen a $\ker(\Phi)$ tales que $\varphi_k(e_1) = \epsilon_k e_1$, $\varphi_k(e_2) = \epsilon_k^2 e_2$ y $\varphi_k(e_3) = \epsilon_k^4 e_3$ con $0 \leq k \leq 6$.

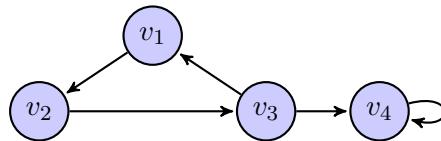
Ejemplo 6.6. Considérese un álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2 + e_3$, $e_2^2 = e_1 + e_3$ y $e_3^2 = e_2$. Además, su digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es



En efecto, $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_1^2, e_2^2, e_3^2\} = \text{span}\{e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_2\} = \mathcal{E}$, es decir, \mathcal{E} es regular. Además, el único automorfismo que admite el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es el homomorfismo identidad, por tanto $\text{Aut}(\mathcal{E}) = \Phi^{-1}(\text{Id}) = \ker(\Phi)$, es decir, este álgebra de evolución solo admite automorfismos diagonales.

Si se supone que los automorfismos $\psi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de $\ker(\Phi)$ son tales que $\psi(e_1) = \mu_1 e_1$, $\psi(e_2) = \mu_2 e_2$ y $\psi(e_3) = \mu_3 e_3$, por las diferentes relaciones de adyacencia se tiene que $\mu_1^2 = \mu_2$, $\mu_2^2 = \mu_3$, $\mu_3^2 = \mu_2$, $\mu_2^2 = \mu_1$ y $\mu_1^2 = \mu_3$. Estas condiciones se reducen a que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Por tanto, el único automorfismo que se puede definir sobre \mathcal{E} es la identidad.

Ejemplo 6.7. Considérese un álgebra de evolución \mathcal{E} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2$, $e_2^2 = e_3$, $e_3^2 = e_1 + e_4$ y $e_4^2 = e_4$. Además, su digrafo asociado $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es



En efecto, $\mathcal{E}^2 = \text{span}\{e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2\} = \text{span}\{e_2, e_3, e_1 + e_4, e_4\} = \mathcal{E}$, es decir, \mathcal{E} es regular. Además, el único automorfismo que admite el digrafo $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ es la aplicación identidad, por tanto $\text{Aut}(\mathcal{E}) = \ker(\Phi)$, es decir, este álgebra de evolución solo admite automorfismos diagonales.

La longitud mínima que presenta un ciclo es uno, ya que en el cuarto nodo existe un lazo. Si se supone que los automorfismos $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de $\ker(\Phi)$ son tales que $\varphi(e_1) = \mu_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \mu_2 e_2$, $\varphi(e_3) = \mu_3 e_3$ y $\varphi(e_4) = \mu_4 e_4$, se tiene que $\mu_i^{2-1} = \mu_i = 1$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Por tanto, el único automorfismo que se puede definir sobre \mathcal{E} es la identidad.

Observación 6.8. A partir del Ejemplo 6.7 es sencillo darse cuenta de que si el digrafo asociado a un álgebra de evolución tiene un lazo en alguno de sus nodos, entonces el único automorfismo de $\ker(\Phi)$ es la identidad.

6.2. Una categoría finitamente universal

Tal y como ya se ha adelantado con anterioridad, dado un grupo finito es posible encontrar un álgebra de evolución cuyo grupo de automorfismos sea isomorfo a dicho grupo finito. La siguiente definición da nombre a esta propiedad.

Definición 6.9. Se dice que una categoría \mathcal{C} es *finitamente universal* si todo grupo finito se puede expresar como el grupo de automorfismos de un objeto de \mathcal{C} , es decir, si dado G un grupo finito, existe $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$, donde $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ denota el grupo de automorfismos del objeto X de la categoría \mathcal{C} .

En general, estudiar si una categoría es finitamente universal es un problema difícil. Sin embargo, en el caso particular de la categoría de las álgebras de evolución sobre un cuerpo \mathbb{K} , $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$, el *Teorema de Frucht* (Teorema 1.30) simplifica mucho la solución a este problema. Cabe destacar que a lo largo de esta sección se empleará el enfoque descrito en la sección 3.3, el cual relaciona grafos simples finitos y álgebras de evolución.

En primer lugar, se presenta un resultado que relaciona el grupo de automorfismos de un grafo simple \mathcal{G} , con el grupo de automorfismos del álgebra de evolución $\mathcal{X}(\mathcal{G})$.

Proposición 6.10. *Dado un grafo simple finito $\mathcal{G} = (V, E)$ y $\varphi \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{X}(\mathcal{G}))$, existe $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G})$ tal que $\varphi = \mathcal{X}(\sigma)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{X}(\mathcal{G}))$. Nótese que, por la Proposición 3.28, $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ es regular, y por tanto, su base natural B , según la Definición 3.25, es única salvo permutaciones y multiplicación por escalares por el Teorema 3.22. Además, por ser φ un automorfismo, $\varphi(B)$ es otra base natural de $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ y preserva el número de constantes de estructura no

ulas, entonces $\varphi(b_v) = \lambda_v b_{\sigma(v)}$ y $\varphi(b_a) = \lambda_a b_{\tau(a)}$, donde σ es una permutación de V , τ es una permutación de E y $\lambda_v, \lambda_a \in \mathbb{K}$ no nulos.

Por un lado,

$$\lambda_v b_{\sigma(v)} = g(b_v) = g(b_v^2) = (g(b_v))^2 = (\lambda_v b_{\sigma(v)})^2 = \lambda_v^2 b_{\sigma(v)},$$

por tanto $\lambda_v^2 = \lambda_v$, y así $\lambda_v = 1$.

Por otro lado, si $a = \{v, w\} \in E$ y $\tau(a) = \{\bar{v}, \bar{w}\}$,

$$\lambda_a b_{\tau(a)} + \lambda_v b_{\sigma(v)} + \lambda_w b_{\sigma(w)} = \varphi(b_a + b_v + b_w) = \varphi(b_a^2) = (\varphi(b_a))^2 = \lambda_a^2 (b_{\tau(a)} + b_{\bar{v}} + b_{\bar{w}}),$$

por tanto $\lambda_a^2 = \lambda_a$, y así $\lambda_a = 1$. Además, $\tau(a) = \{\sigma(v), \sigma(w)\}$. En consecuencia, σ es una permutación de los vértices de \mathcal{G} que lleva aristas en aristas. En otras palabras, $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G})$ y $\varphi = \mathcal{X}(\sigma)$. \square

Observación 6.11. Recíprocamente, como los funtores preservan isomorfismos, a todo $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G})$ le corresponde un automorfismo $\mathcal{X}(\sigma) \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{X}(\mathcal{G}))$.

A partir de esta relación entre el grupo de automorfismos de un grafo simple \mathcal{G} y del álgebra de evolución $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ y la Proposición 3.28, se puede mejorar el Teorema 3.31 de la siguiente manera.

Teorema 6.12. *Dado un cuerpo \mathbb{K} , existe un funtor fiel covariante $\mathcal{X}: \text{Graphs}_i \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ tal que para cada $\mathcal{G} \in \text{Obj}(\text{Graphs}_i)$ se verifica:*

- (i) $\mathcal{X}(\mathcal{G})^2 = \mathcal{X}(\mathcal{G})$, es decir, $\mathcal{X}(\mathcal{G})$ es regular, y
- (ii) $\text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{X}(\mathcal{G})) \cong \text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G})$.

Con todo lo anterior, estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar el resultado de mayor importancia de esta sección.

Teorema 6.13. *Sea $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ la categoría de las álgebras de evolución sobre el cuerpo \mathbb{K} y sea \mathbf{G} un grupo finito. Entonces, existe un $X \in \text{Obj}(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$ tal que:*

- (i) $X^2 = X$, esto es, X es regular, y
- (ii) $\text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(X) \cong \mathbf{G}$.

En particular, $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ es finitamente universal.

Demostración. Dado un grupo finito \mathbf{G} , por el Teorema de Frucht (Teorema 1.30), existe un grafo simple \mathcal{G} tal que $\text{Aut}_{\text{Graphs}}(\mathcal{G}) \cong \mathbf{G}$. Por otro lado, dado \mathcal{G} un grafo simple finito, $\text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G}) = \text{Aut}_{\text{Graphs}}(\mathcal{G})$, ya que, en particular, un automorfismo es un homomorfismo inyectivo. Así, por el Teorema 6.12, existe un álgebra de evolución regular $X := \mathcal{X}(\mathcal{G}) \in \text{Obj}(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$ tal que $\text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(X) \cong \text{Aut}_{\text{Graphs}_i}(\mathcal{G}) \cong \text{Aut}_{\text{Graphs}}(\mathcal{G}) \cong \mathbf{G}$. \square

Además, como por el Teorema 6.3 se tiene que el grupo de automorfismos de un álgebra de evolución regular es finito, el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 6.14. *Sea G un grupo. Entonces G es finito si, y solo si, existe un álgebra de evolución regular X tal que $\text{Aut}_{\mathcal{E}_{\mathbb{K}}}(X) \cong G$.*

6.3. El álgebra de derivaciones

Tal y como ya se ha mencionado en la Definición 1.18, el conjunto de las derivaciones de un álgebra tiene estructura de álgebra de Lie. En esta última sección se expone un resultado de [6] que permite caracterizar el álgebra de derivaciones de cualquier álgebra de evolución regular. Cabe destacar que este resultado se presenta sin demostración, ya que los conceptos y técnicas empleadas en esta exceden los objetivos de este trabajo.

En primer lugar, se presentan dos conceptos sobre digrafos que van a ser necesarios para comprender estos dos resultados.

Definición 6.15. Sea $\gamma = (v_1, a_1, v_2, \dots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n)$ un camino no dirigido de un digrafo $D = (V, E)$, donde $v_1, \dots, v_n \in V$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in E$ y para cada $i = 1, \dots, n-1$, se tiene que $a_i = (v_i, v_{i+1})$ o bien $a_i = (v_{i+1}, v_i)$. Se define el *equilibrio del camino* γ como el entero

$$b(\gamma) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ y } a_i = (v_i, v_{i+1})\}| - |\{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ y } a_i = (v_{i+1}, v_i)\}|,$$

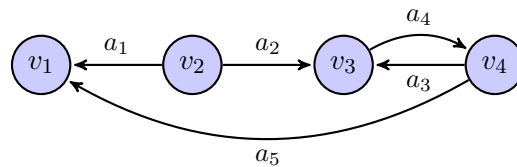
esto es, $b(\gamma)$ se obtiene sumando uno si la arista a_i se recorre en el sentido que marca la flecha, y restando uno si se recorre en sentido contrario a la flecha.

Definición 6.16. El *equilibrio del digrafo* D se define como el máximo común divisor de los valores absolutos de los equilibrios de los ciclos de D , es decir,

$$b(D) = \text{mcd}\{|b(\gamma)|, \text{ con } \gamma \text{ ciclo en } D\}.$$

Se ilustrarán las definiciones anteriores a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.17. Considérese el siguiente digrafo $D = (V, E)$ con $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ y $E = \{a_1 = (v_2, v_1), a_2 = (v_2, v_3), a_3 = (v_4, v_3), a_4 = (v_3, v_4), a_5 = (v_4, v_1)\}$:



Considérense los caminos $\alpha_1 = (v_1, a_1, v_2)$, $\alpha_2 = (v_2, a_2, v_3)$, $\alpha_3 = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3)$ y $\alpha_4 = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4)$. Entonces se tiene que $b(\alpha_1) = -1$, $b(\alpha_2) = 1$, $b(\alpha_3) = 1 - 1 = 0$ y $b(\alpha_4) = 1 - 2 = -1$. Además, todos los posibles ciclos tienen equilibrio un múltiplo de 2. Considérense, por ejemplo, los ciclos $\gamma_1 = (v_3, a_4, v_4, a_3, v_3)$, $\gamma_2 = (v_3, a_3, v_4, a_4, v_3)$, $\gamma_3 = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4, a_5, v_1)$ y $\gamma_4 = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_4, v_4, a_5, v_1)$. En efecto, $b(\gamma_1) = 2$, $b(\gamma_2) = -2$, $b(\gamma_3) = 0$ y $b(\gamma_4) = 2$. Por tanto, $b(D) = 2$.

Teorema 6.18. *Sea \mathcal{E} un álgebra de evolución regular sobre \mathbb{K} , sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base natural y $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ su digrafo asociado. Entonces:*

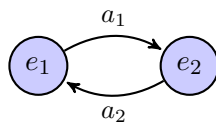
- (i) *Si la característica del cuerpo \mathbb{K} es 0 o 2, entonces $\text{Der}(\mathcal{E}) = 0$.*
- (ii) *Si la característica del cuerpo \mathbb{K} es $p \neq 0, 2$, considérense $\Gamma_i = (V_i, E_i)$ ($V_i \subset B$), $i = 1, \dots, r$, las componentes conexas de $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ tales que $p \mid 2^{b(\Gamma_i)} - 1$. Además, para cada $i = 1, \dots, r$, fíjese un elemento $e_i \in V_i$. Entonces, $\text{Der}(\mathcal{E})$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión r , y una posible base viene dada por $\{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_r\}$, donde:*

- $\hat{\delta}_i(e) = 0$ para todo $e \notin V_i$,
- $\hat{\delta}_i(e_i) = e_i$,
- $\hat{\delta}_i(e') = 2^{b(\gamma)}e'$ si $e' \in V_i$ y γ es un camino que conecta e_i y e' .

Observación 6.19. En particular, la característica de \mathbb{R} y \mathbb{C} es 0. Por tanto, cualquier álgebra de evolución regular \mathcal{E} sobre \mathbb{R} o sobre \mathbb{C} verifica que $\text{Der}(\mathcal{E}) = 0$.

Por último, se presentan algunos ejemplos del cálculo del álgebra de derivaciones en álgebras de evolución regulares.

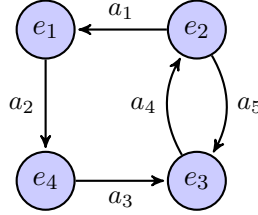
Ejemplo 6.20. Considérense un álgebra de evolución regular \mathcal{E} sobre un cuerpo \mathbb{K} con base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_2$ y $e_2^2 = e_1$. Además, su digrafo asociado $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E}, B)$ es conexo:



Por un lado, fijado el nodo e_1 , se tiene que $\alpha = (e_1, a_1, e_2)$ es un camino de e_1 a e_2 con $b(\alpha) = 1$. Por otro lado, los ciclos posibles con equilibrio no nulo son $\gamma_1 = (e_1, a_1, e_2, a_2, e_1)$, $\gamma_2 = (e_1, a_2, e_2, a_1, e_1)$, $\gamma_3 = (e_2, a_1, e_1, a_2, e_2)$ y $\gamma_4 = (e_2, a_2, e_1, a_1, e_2)$, los cuales verifican que $b(\gamma_1) = b(\gamma_4) = 1 + 1 = 2$ y $b(\gamma_2) = b(\gamma_3) = -1 - 1 = -2$. En consecuencia, $b(\Gamma) = 2$.

Así, $2^{b(\Gamma)} - 1 = 2^2 - 1 = 3$, por tanto, $\text{Der}(\mathcal{E}) = 0$ salvo que la característica del cuerpo \mathbb{K} sea 3, en cuyo caso $\text{Der}(\mathcal{E})$ tiene dimensión uno y una posible base es $\{\hat{\delta}\}$, donde $\hat{\delta}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es una derivación tal que $\hat{\delta}(e_1) = e_1$ y $\hat{\delta}(e_2) = 2^{b(\alpha)}e_2 = 2e_2 = -e_2$.

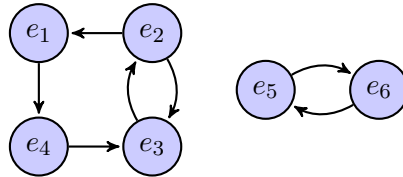
Ejemplo 6.21. Considérese un álgebra de evolución regular \mathcal{E} sobre un cuerpo \mathbb{K} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_4$, $e_2^2 = e_1 + e_3$, $e_3^2 = e_2$ y $e_4^2 = e_3$. Además, su digrafo asociado $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E}, B)$ es conexo:



Por un lado, fijado el nodo e_1 , se tiene que $\alpha_1 = (e_1, a_2, e_4, a_3, e_3, a_4, e_2)$ es un camino de e_1 a e_2 con $b(\alpha_1) = 3$, $\alpha_2 = (e_1, a_2, e_4, a_3)$ es un camino de e_1 a e_3 con $b(\alpha_2) = 2$ y $\alpha_3 = (e_1, a_2, e_4)$ es un camino de e_1 a e_4 con $b(\alpha_3) = 1$. Por otro lado, sobre este digrafo se pueden definir gran cantidad de ciclos, pero todos ellos tienen equilibrio un múltiplo de 2. Algunos ejemplos de ciclos serían $\gamma_1 = (e_2, a_5, e_3, a_4, e_2)$, $\gamma_2 = (e_1, a_2, e_4, a_3, e_3, a_4, e_2, a_1, e_1)$, $\gamma_3 = (e_2, a_4, e_3, a_5, e_2)$ y $\gamma_4 = (e_1, a_1, e_2, a_4, e_3, a_3, e_4, a_2, e_1)$, los cuales verifican que $b(\gamma_1) = 2$, $b(\gamma_2) = 4$, $b(\gamma_3) = -2$ y $b(\gamma_4) = -4$. En consecuencia, $b(\Gamma) = 2$.

Así, $2^{b(\Gamma)} - 1 = 2^2 - 1 = 3$, por tanto, $\text{Der}(\mathcal{E}) = 0$ salvo que la característica del cuerpo \mathbb{K} sea 3, en cuyo caso $\text{Der}(\mathcal{E})$ tiene dimensión uno y una posible base es $\{\hat{\delta}\}$, donde $\hat{\delta}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es una derivación tal que $\hat{\delta}(e_1) = e_1$, $\hat{\delta}(e_2) = 2^{b(\alpha_1)}e_2 = 8e_2 = -e_2$, $\hat{\delta}(e_3) = 2^{b(\alpha_2)}e_3 = 4e_3 = e_3$ y $\hat{\delta}(e_4) = 2^{b(\alpha_3)}e_4 = 2e_4 = -e_4$.

Ejemplo 6.22. Considérese un álgebra de evolución regular \mathcal{E} sobre un cuerpo \mathbb{K} con base natural $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ y cuyo producto viene dado por $e_1^2 = e_4$, $e_2^2 = e_1 + e_3$, $e_3^2 = e_2$, $e_4^2 = e_3$, $e_5^2 = e_6$ y $e_6^2 = e_5$. Su digrafo asociado $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E}, B)$ es



En efecto, este digrafo presenta dos componentes conexas Γ_1 y Γ_2 . Además, por los dos ejemplos anteriores, se sabe que $2^{b(\Gamma_1)} - 1 = 2^{b(\Gamma_2)} - 1 = 2^2 - 1 = 3$, por tanto, $\text{Der}(\mathcal{E}) = 0$ salvo que la característica del cuerpo \mathbb{K} sea 3, en cuyo caso $\text{Der}(\mathcal{E})$ tiene dimensión dos y una posible base es $\{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2\}$, donde $\hat{\delta}_1: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\hat{\delta}_2: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ son derivaciones tales que $\hat{\delta}_1(e_1) = e_1$, $\hat{\delta}_1(e_2) = 8e_2 = -e_2$, $\hat{\delta}_1(e_3) = 4e_3 = e_3$, $\hat{\delta}_1(e_4) = 2e_4 = -e_4$ y $\hat{\delta}_1(e_5) = \hat{\delta}_1(e_6) = 0$; y $\hat{\delta}_2(e_1) = \hat{\delta}_2(e_2) = \hat{\delta}_2(e_3) = \hat{\delta}_2(e_4) = 0$, $\hat{\delta}_2(e_5) = e_5$ y $\hat{\delta}_2(e_6) = 2e_6 = -e_6$.

Bibliografía

- [1] Y. Cabrera Casado, *Evolution algebras*, PhD thesis, Universidad de Málaga, 2016.
- [2] L. M. Camacho, J. R. Gómez, B. A. Omirov, R. M. Turdibaev, *Some properties of evolution algebras*, Bull. Korean Math. Soc. **50** (2013), no. 5, 1481–1494.
- [3] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, *Graphs & Digraphs*, 6th ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [4] C. Costoya, P. Ligouras, A. Tocino, A. Viruel, *Regular evolution algebras are universally finite*, arXiv:2002.03338v2 (2021).
- [5] A. Elduque, A. Labra, *Evolution algebras and graphs*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 7, 1550103, 10 pp.
- [6] A. Elduque, A. Labra, *Evolution algebras, automorphisms, and graphs*, Linear Multilinear Algebra **69** (2021), no. 2, 331–342.
- [7] I. M. H. Etherington, *Non-associative algebra and the symbolism of genetics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. B. **61** (1941), 24–42.
- [8] P. J. Hilton, U. Stammbach, *A course in homological algebra*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] L. Hogben, *Handbook of Linear Algebra*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [10] M. Ladra, U. A. Rozikov, *Evolution algebra of a bisexual population*, J. Algebra **378** (2013), 153–172.
- [11] C. Martín González, *Álgebras no asociativas*, <http://agt2.cie.uma.es/simples.pdf>, Universidad de Málaga, 2008.
- [12] J. Núñez, M. Silvero, M. T. Villar, *Mathematical tools for the future: graph theory and graphicable algebras*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), no. 11, 6113–6125.

- [13] U. A. Rozikov, J. P. Tian, *Evolution algebras generated by Gibbs measures*, Lobachevskii J. Math. **32** (2011), no. 4, 270–277.
- [14] J. P. Tian, *Evolution Algebras and their Applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1921, Springer, Berlin, 2008.
- [15] J. P. Tian, P. Vojtěchovský, *Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics*, Quasigroups Related Systems **14** (2006), no. 1, 111–122.

A. Anexo

A.1. Inyectividad en los homomorfismos de grafos

Nótese que no es posible definir el funtor \mathcal{X} de la categoría *Graphs*, cuyos objetos son los grafos simples finitos y los morfismos son los homomorfismos de grafos tal y como se describen en la Definición 1.29, en la categoría $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$. Esto es debido a que, en general, siguiendo la Definición 3.29, \mathcal{X} no lleva homomorfismos de grafos en homomorfismos de álgebras de evolución, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Considérese el grafo simple finito $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$, donde $V_1 = \{v_1, v_2\}$ y $E_1 = \emptyset$:

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

y el grafo simple finito $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_2 = \{w\}$ y $E_2 = \emptyset$:

$$w \\ \bullet$$

Considérese entonces la aplicación $f: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = w$. En efecto, f es un homomorfismo de grafos ya que lleva vértices en vértices, aristas en aristas y preserva la adyacencia. No obstante, nótese que f no es una aplicación inyectiva.

Por otro lado, $\mathcal{X}(\mathcal{G}_1)$ es un álgebra de evolución con base natural $B = \{b_{v_1}, b_{v_2}\}$ y producto $b_{v_1}^2 = b_{v_1}$ y $b_{v_2}^2 = b_{v_2}$; y $\mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$ es un álgebra de evolución con base natural $B = \{b_w\}$ y producto $b_w^2 = b_w$.

Sin embargo, la aplicación $\mathcal{X}(f): \mathcal{X}(\mathcal{G}_1) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{G}_2)$, tal y como se describe en la Definición 3.29, no es un homomorfismo de álgebras de evolución ya que no respeta el producto:

$$\mathcal{X}(f)(b_{v_1}b_{v_2}) = \mathcal{X}(f)(0) = 0 \neq b_w = b_w^2 = b_{f(v_1)}b_{f(v_2)} = (\mathcal{X}(f)(b_{v_1}))(\mathcal{X}(f)(b_{v_2})).$$

No obstante, este problema es sencillo de solucionar empleando la categoría *Graphs_i*, en la que únicamente se consideran homomorfismos de grafos inyectivos. De esta forma, se consigue que el homomorfismo de álgebras correspondiente respete no solo el producto de un elemento de la base por sí mismo, tal y como se muestra en (3.1) y (3.2), sino también el producto de dos elementos distintos de la base, es decir, se verifica (3.3). Así, si f es un homomorfismo de grafos inyectivo, $\mathcal{X}(f)$ siempre va a estar bien definido como homomorfismo de álgebras de evolución.

Cabe destacar que, en la sección 6.2, el empleo de la categoría *Graphs_i* en vez de la categoría *Graphs* no causa problema alguno ya que, en particular, los automorfismos son homomorfismos inyectivos.

A.2. Digrafo del Teorema 6.3

