



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Planificación lineal a trozos en la robótica

Manuel Timiraos López

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Planificación lineal a trozos en la robótica

Manuel Timiraos López

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Geometría y Topología
Título: Planificación lineal a trozos en la robótica
Breve descripción del contenido
La complejidad topológica $TC(X)$ de un espacio topológico X (Farber 2003) mide el número de algoritmos necesarios para planificar los movimientos de un sistema mecánico. Es un invariante difícil de calcular, por lo que se han dado diferentes versiones y aproximaciones. En este trabajo se estudiará la complejidad simplicial $SC(K)$ de un complejo simplicial K (González 2018), que coincide con la complejidad $TC(K)$ de su realización geométrica, pero que puede calcularse con métodos combinatorios.
Recomendaciones
Cursar o haber cursado las materias “Topología general” y “Topología algebraica”.
Otras observaciones

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Complejidad topológica	1
1.1. Topología compacto-abierto	1
1.2. Definición de $\mathbf{TC}(X)$	2
1.3. Ejemplos de cálculo	4
1.4. Equivalencia entre sección y homotopía	7
1.5. Retractos de entornos euclídeos	8
1.6. Reformulación de $\mathbf{TC}(X)$ para ENRs	11
2. Complejos y aplicaciones simpliciales	15
2.1. Complejos simpliciales abstractos	15
2.2. Realización geométrica	18
2.3. Subdivisión baricéntrica	21
2.4. Aproximación simplicial y contigüidad	23
2.5. Producto de complejos	26
3. Complejidad simplicial	29
3.1. Definición de $\mathbf{SC}(K)$	29

3.2. Relación con $\mathbf{TC}(\ K\)$	33
3.3. Subdivisiones no necesariamente baricéntricas	35
3.4. Un ejemplo: la circunferencia \mathbb{S}^1	36
Bibliografía	43

Resumen

La complejidad topológica $\mathbf{TC}(X)$ es un invariante propuesto por Michael Farber, que surge en el contexto de la planificación de movimientos en la robótica. En este trabajo se desarrolla una analogía discreta propuesta por Jesús González: la complejidad simplicial $\mathbf{SC}(K)$ de un complejo simplicial K , que resulta equivalente a la complejidad topológica $\mathbf{TC}(\|K\|)$ de su realización geométrica, pero que es computable mediante métodos combinatorios.

Abstract

The topological complexity $\mathbf{TC}(X)$ is an invariant proposed by Michael Farber, arising in the context of motion planning in robotics. In this thesis, a discrete analogy proposed by Jesús González is developed: the simplicial complexity $\mathbf{SC}(K)$ of a simplicial complex K , which is equivalent to the topological complexity $\mathbf{TC}(\|K\|)$ of its geometric realization but is computable using combinatorial methods.

Introducción

Originalmente, la topología algebraica fue topología *combinatoria*. Esto se refiere al uso de objetos combinatorios, como los complejos simpliciales, para modelar espacios topológicos. La realización geométrica de un complejo simplicial es un *poliedro* n -dimensional, es decir un espacio con una “triangulación” generalizada. A partir de mediados del siglo XX, con la aparición de nuevos métodos homológicos y categóricos, dejó de ser necesario trabajar con estas triangulaciones para definir invariantes topológicos como los números de Betti o la característica de Euler-Poincaré.

Sin embargo, en los últimos años el enfoque combinatorio ha vuelto a despertar interés, sobre todo por la presencia cada vez mayor en las Matemáticas de los ordenadores y el software de cálculo científico y de computación técnica. Esto da importancia a la posibilidad de programar el cálculo de invariantes topológicos como el que vamos a considerar en este trabajo.

La *categoría de Lusternik-Schnirelmann*, o *categoría LS*, es un invariante homotópico que fue introducido hacia 1935 en el contexto del cálculo de variaciones y que sigue siendo un área activa de investigación ya que tiene aplicaciones en robótica. Pero es muy difícil de calcular.

En realidad estas aplicaciones surgieron cuando Farber definió en 2003 la *complejidad topológica*, un invariante análogo a la categoría LS, como una forma de atacar el llamado problema de planificación de movimientos.

Una idea reciente es buscar aproximaciones simpliciales de este tipo de invariantes. Surgió tras los trabajos de los matemáticos argentinos Barmak y Minian, que dieron una interpretación geométrica moderna a la noción clásica de contigüidad, ya utilizada por Brouwer en su teorema de aproximación simplicial de 1912.

Fueron Macías, Vilches y Fernández-Ternero [7, 8], junto con Aaronson y Scoville [1], quienes dieron por primera vez una noción de categoría LS discreta, es decir en el contexto de complejos simpliciales. Para ello dieron una definición análoga a la clásica, pero sustituyendo el uso de homotopías por el de clases de contigüidad. En un trabajo posterior, los mismos autores volvieron a usar estas ideas para definir una versión simplicial de la complejidad topológica [6]. De este

modo, estos invariantes dependen exclusivamente de la estructura combinatoria. Posteriormente, Jesús González y sus colaboradores [9] refinaron esta idea para que fuera efectivamente computable y diera una buena aproximación de la complejidad topológica. Es este último invariante el que estudiaremos en este trabajo.

El trabajo se organiza como sigue. El Capítulo 1 trata el concepto de complejidad topológica siguiendo principalmente las referencias de Farber [4] y [5]. Se tratan en detalle los diferentes aspectos de la definición, incluyendo la topología compacto-abierto. Esto se complementa con varios ejemplos de cálculo. Además, se prueba una equivalencia entre secciones y homotopías fundamental para adaptar el concepto al contexto simplicial. Por último, se realiza una reformulación de la definición para el caso de los retracts de entornos euclídeos. Dado que los complejos simpliciales se incluyen en esta clase de espacios, dicha reformulación se podrá aprovechar más adelante.

El Capítulo 2 consiste en una introducción a la teoría de complejos simpliciales abstractos, extrayendo la ideas del libro [14], como sugiere Jesús González en [9]. Se incluyen principalmente los conceptos necesarios para entender las ideas de realización geométrica, subdivisión baricéntrica, aproximación simplicial y contigüidad, empleadas todas ellas en el siguiente capítulo. Se termina con una sección dedicada a la construcción del producto de complejos simpliciales expuesta en el libro [3].

Finalmente, el Capítulo 3 consiste en una explicación detallada del artículo de Jesús González [9], en el que se propone el concepto de complejidad simplicial. Se prueba que coincide con la complejidad topológica de la realización geométrica y se termina el capítulo con un ejemplo de cálculo.

Capítulo 1

Complejidad topológica

En este capítulo introduciremos el concepto de complejidad topológica $\mathbf{TC}(X)$, un número que mide la discontinuidad en el proceso de planificación de movimientos en el espacio de configuración X . Presentaremos el concepto siguiendo las explicaciones de Farber en [4]. No obstante, adaptaremos todas las definiciones y resultados a la versión reducida de $\mathbf{TC}(X)$, ya que es la utilizada por González en [9].

Antes de nada, presentaremos un concepto preliminar imprescindible para las definiciones posteriores.

1.1. Topología compacto-abierto

Dedicamos esta sección a trabajar con un concepto bastante general, que permite dotar de estructura topológica al conjunto de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos cualesquiera. Las siguientes definiciones y resultados se han extraído de la Sección 46 de [12].

Definición 1.1. Sean X e Y espacios topológicos y sea $\mathcal{C}(X, Y)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas entre X e Y . Si K es un subconjunto compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y , se define:

$$S(K, U) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\}.$$

La colección de todos los conjuntos $S(K, U)$ es una subbase de una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que se conoce como *topología compacto-abierto*.

En general, resulta tedioso trabajar directamente con esta definición. Es por ello que presentamos a continuación una serie de resultados que nos simplificarán el uso de este concepto.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Consideramos $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología compacto-abierto. Entonces la aplicación*

$$\tilde{e}: X \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Y,$$

definida por

$$(x, f) = f(x),$$

es continua.

Observación 1.3. Denotamos la aplicación \tilde{e} con una tilde para distinguirla de la aplicación evaluación e que definiremos en la siguiente sección.

Definición 1.4. Dada una aplicación $f: X \times Z \rightarrow Y$, existe una aplicación asociada $F: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, definida por la ecuación

$$F(z)(x) = f(x, z).$$

Recíprocamente, dada $F: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, esta ecuación define la correspondiente aplicación $f: X \times Z \rightarrow Y$. Decimos que F es la aplicación de Z en $\mathcal{C}(X, Y)$ *inducida* por f .

Teorema 1.5. *Sean X e Y espacios topológicos y consideremos en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología compacto-abierto. Si $f: X \times Z \rightarrow Y$ es continua, entonces la aplicación inducida $F: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ también es continua. El recíproco es cierto si X es Hausdorff y localmente compacto.*

1.2. Definición de $\text{TC}(X)$

Ahora que ya sabemos dotar de topología a un espacio de aplicaciones, comenzamos con el desarrollo del concepto principal del capítulo. Consideraremos el espacio X de todas las posibles configuraciones de un sistema mecánico. En la mayoría de aplicaciones, este espacio estará equipado con una estructura de espacio topológico. El problema de la planificación de movimientos consiste en la construcción de un algoritmo capaz de tomar pares de configuraciones $(A, B) \in X \times X$ como entrada y producir como salida un camino continuo en X , que empiece en A y termine en B . A representa la configuración inicial, y B la configuración final del sistema.

Asumiremos que el espacio de configuración X es conexo por caminos, para evitar así el subproblema de tener que determinar si los puntos A y B pertenecen a la misma componente conexa.

Introduciremos a continuación las definiciones que formalizan el problema de la planificación de movimientos.

Definición 1.6. Llamamos *espacio de caminos*, y lo denotamos por $P(X)$, al espacio de todas las aplicaciones continuas $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ con la topología compacto-abierto. Llamamos *aplicación*

evaluación y la denotamos por $e: P(X) \rightarrow X \times X$ a la aplicación que asocia a cada camino $\gamma \in P(X)$ el par formado por sus puntos inicial y final: $e(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$.

Como es habitual en topología, tras introducir una nueva aplicación entre espacios topológicos, resulta casi obligatorio probar su continuidad. En este caso, nos sirve además como una primera puesta en práctica de la definición de la topología compacto-abierto.

Proposición 1.7. *La aplicación evaluación $e: P(X) \rightarrow X \times X$ es continua.*

Demostración. Debido a la propiedad universal de la topología producto, e será continua si y solo si las dos composiciones $\pi_1 \circ e$ y $\pi_2 \circ e$ son continuas; siendo π_1 y π_2 las proyecciones canónicas. Comprobaremos que, efectivamente, $\pi_1 \circ e$ es continua. El razonamiento para $\pi_2 \circ e$ será análogo.

Sea $V \subset X$ un abierto, veamos que $(\pi_1 \circ e)^{-1}(V)$ es abierto:

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ e)^{-1}(V) &= \{\gamma \in P(X) : (\pi_1 \circ e)(\gamma) = \gamma(0) \in V\} \\ &= \{\gamma \in P(X) : \gamma(\{0\}) \subset V\} \\ &= S(\{0\}, V). \end{aligned}$$

Efectivamente, se trata de un abierto subbásico de $P(X)$, puesto que $\{0\}$ es compacto (por ser finito) y V es abierto. \square

Tras esto, podemos reformular el problema de la planificación de movimientos como la búsqueda de un algoritmo planificador de movimientos, definido como sigue.

Definición 1.8. Llamamos *algoritmo planificador de movimientos* a una aplicación $s: X \times X \rightarrow P(X)$ tal que $e \circ s = id_{X \times X}$. Es decir, s ha de ser una sección de e .

La pregunta a hacerse en este punto es: ¿Existe un algoritmo planificador de movimientos *continuo* en el espacio de configuración X ? Esta cuestión es interesante ya que una falta de continuidad resultará en un comportamiento inestable del algoritmo. Concretamente, existirán pares arbitrariamente próximos de puntos iniciales y finales cuyos caminos asociados no son cercanos.

El siguiente teorema de Farber [4] caracteriza los espacios para los que la pregunta anterior tiene una respuesta afirmativa.

Teorema 1.9. *Dado el espacio de configuración X , existe un algoritmo planificador de movimientos continuo $s: X \times X \rightarrow P(X)$ si y solo si X es contráctil.*

Habiendo visto que la continuidad de un algoritmo planificador de movimientos no es una cuestión trivial, tendrá sentido el concepto que introduciremos a continuación: la complejidad

topológica. Intuitivamente, representa una medida de discontinuidad de cualquier algoritmo planificador de movimientos en X .

Definición 1.10. Dado un espacio topológico X conexo por caminos, se define la *complejidad topológica de la planificación de movimientos en X* como el menor entero no negativo $\mathbf{TC}(X) = k$ para el cual el producto $X \times X$ puede ser cubierto por $k + 1$ abiertos

$$X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k+1}, \quad (1.1)$$

tales que para cada $i = 1, 2, \dots, k + 1$ existe un algoritmo planificador de movimientos continuo $s_i: U_i \rightarrow P(X)$ cumpliendo $e \circ s_i = id_{U_i}$. En caso de no existir dicho k , diremos que $\mathbf{TC}(X) = \infty$.

En [9] también se mencionan una serie de términos para referirse a los distintos componentes de la definición anterior:

Definición 1.11. Los abiertos U_i del recubrimiento 1.1 se denominarán *dominios locales*. Llamaremos *reglas locales* a las correspondientes secciones s_i . La familia de pares resultante $\{(U_i, s_i)\}$ se conocerá como *planificador de movimientos*.

Observación 1.12. Como habíamos comentado al comienzo del capítulo, estamos considerando la versión reducida de $\mathbf{TC}(X)$. Se diferencia de la definición original de Farber simplemente en una unidad. Es decir, la versión original considera k dominios locales, en lugar de $k + 1$.

Observación 1.13. A raíz del Teorema 1.9, se tiene que $\mathbf{TC}(X) = 0$ si y solo si X es contráctil.

Terminamos la sección enunciando un resultado muy importante sobre la complejidad topológica: su invarianza homotópica. Este resultado permitirá a menudo simplificar el espacio de configuración X sin cambiar su complejidad topológica. Omitimos la demostración puesto que no vamos a requerir su aplicación en este trabajo.

Teorema 1.14. $\mathbf{TC}(X)$ solo depende del tipo de homotopía de X .

1.3. Ejemplos de cálculo

Veamos algunos ejemplos de espacios de configuración junto a sus correspondientes complejidades topológicas. Son precisamente los que aparecen en [4]. Aquí trataremos de estudiarlos con más detalle, para reforzar las ideas que acabamos de presentar.

Ejemplo 1.15. Supongamos que X es un subconjunto convexo del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Dado un par de configuraciones $(A, B) \in X \times X$, como X es convexo, el segmento que une A y B está contenido en X . De este modo, podemos asociar a este par el camino que consiste en recorrer dicho segmento a velocidad constante. Intuitivamente, está claro que este procedimiento

determina un algoritmo planificador de movimientos continuo en X . Además, esto es consistente con el Teorema 1.9 ya que se tiene $\mathbf{TC}(X) = 0$ por ser X contráctil.

Formalizaremos más en detalle para probar que, efectivamente, dicho planificador es continuo. Consideremos la siguiente aplicación, que claramente es continua:

$$\begin{aligned} h : I \times X \times X &\longrightarrow X \\ (t, A, B) &\longmapsto (1-t)A + tB. \end{aligned}$$

La aplicación inducida $s : X \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que, dado $(A, B) \in X \times X$, su imagen viene dada por

$$\begin{aligned} s(A, B) : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (1-t)A + tB, \end{aligned}$$

también será continua gracias al Teorema 1.5. Y esta aplicación se trata precisamente del planificador que hemos descrito.

Ejemplo 1.16. Consideremos ahora el espacio $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sabemos que $\mathbf{TC}(\mathbb{S}^1) > 0$ porque \mathbb{S}^1 no es contráctil. Veamos que, en concreto, $\mathbf{TC}(\mathbb{S}^1) = 1$. Para ello definimos el subconjunto $U_1 = \{(z, w) : z \neq -w\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Para ver que es abierto, definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto z + w. \end{aligned}$$

Se tiene que $U_1 = f_1^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$, de modo que es abierto por ser imagen recíproca de un abierto.

Un planificador de movimientos continuo en U_1 vendrá dado por la aplicación $s_1 : U_1 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$ que le asigna al par (z, w) el camino a velocidad constante a lo largo del único arco más corto que conecta z y w . Esta aplicación s no se puede extender de forma continua a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ puesto que para pares de puntos antipodales el arco más corto que los une ya no es único.

Para probar que la aplicación s_1 es continua, primero debemos formalizarla apropiadamente. Construyámosla paso a paso. En primer lugar, tenemos que considerar la función argumento principal $\text{Arg} : \mathbb{C} \rightarrow [-\pi, \pi)$. Esta aplicación, incluso restringida a \mathbb{S}^1 , no es continua; el problema está en el punto $z = -1$. La aplicación $\text{Arg}|_{\mathbb{S}^1 - \{-1\}}$ sí que es continua. En este caso, la imagen también se restringe a $(-\pi, \pi)$.

Ahora consideramos la aplicación $(z, w) \mapsto w \cdot z^{-1}$, que es continua en $U_1 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ por ser producto de aplicaciones continuas. Su imagen está contenida en \mathbb{S}^1 , puesto que $|w \cdot z^{-1}| = |w||z^{-1}| = |w||z|^{-1} = 1$. Además, $w \neq -z$ por la definición de U_1 , lo cual es equivalente a que $w \cdot z^{-1} \neq -1$. De este modo, la composición de esta aplicación con $\text{Arg}|_{\mathbb{S}^1 - \{-1\}}$ está bien definida

y es continua. En resumen, hemos construido la siguiente aplicación continua, que calcula la diferencia de argumento entre dos puntos de la circunferencia no antipodales.

$$\begin{aligned}\phi_1 : U_1 &\longrightarrow (-\pi, -\pi) \\ (z, w) &\longmapsto \text{Arg}|_{\mathbb{S}^1 - \{-1\}}(w \cdot z^{-1}).\end{aligned}$$

A partir de ϕ_1 , construimos la siguiente homotopía, que es continua por serlo todas las aplicaciones que intervienen.

$$\begin{aligned}h_1 : I \times U_1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (t, z, w) &\longmapsto z \cdot \exp(it \cdot \phi_1(z, w)).\end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, obtenemos la aplicación inducida $s_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{S}^1)$ tal que, dado $(z, w) \in U_1$, su imagen viene dada por

$$\begin{aligned}s_1(z, w) : I &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto z \cdot \exp(it \cdot \phi_1(z, w)).\end{aligned}$$

Nuevamente, también es continua gracias al Teorema 1.5. Analizándola con cuidado, puede apreciarse que se trata del planificador que habíamos descrito de manera informal. La función ϕ_1 proporciona el ángulo (con el signo apropiado) entre los puntos z y w . Este valor lo multiplicamos por el parámetro t y aplicamos la exponencial. De este modo recorreremos la circunferencia desde el punto 1 al correspondiente a la diferencia de ángulos. Solo queda multiplicar todo esto por z , y ya tenemos el recorrido desde z hasta w .

A modo de comprobación, podemos evaluar la expresión en $t = 0$, obteniendo $z \cdot \exp(0) = z$. Evaluando en $t = 1$ se obtiene $z \cdot \exp(i \cdot \text{Arg}|_{\mathbb{S}^1 - \{-1\}}(w \cdot z^{-1})) = z \cdot w \cdot z^{-1} = w$.

Todavía falta definir un planificador en otro abierto que, junto a U_1 , recubra $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Consideremos el conjunto $U_2 = \{(z, w) : z \neq w\}$, que será abierto de manera análoga a U_1 , sin más que considerar la aplicación:

$$\begin{aligned}f_2 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\longmapsto z - w.\end{aligned}$$

Claramente, $U_2 = f_2^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$, así que será abierto por ser imagen recíproca de un abierto.

En este caso fijaremos una orientación en la circunferencia. Un planificador de movimientos continuo en U_2 vendrá dado por la aplicación $s_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{S}^1)$ que le asigna al par (z, w) el camino que recorre la circunferencia a velocidad constante desde z hasta w en el sentido positivo respecto a la orientación fijada. Nuevamente, s_2 no puede ser extendida de forma continua a

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Intuitivamente, habría un “salto” en cada par (z, w) tal que $z = w$, puesto que se pasaría “de golpe” de un camino casi estático a una vuelta completa a la circunferencia.

Los detalles técnicos de s_2 son similares a los de s_1 . Nos sirve prácticamente la misma expresión para el planificador, pero es necesario modificar ligeramente la función ϕ_1 . En este caso consideraremos la función argumento con determinación π , es decir, la función $\arg_\pi : \mathbb{C} \rightarrow [0, 2\pi)$. Al igual que el argumento principal, esta aplicación tampoco es continua en \mathbb{S}^1 . Ahora el problema está únicamente en el punto $z = 1$, por lo que la aplicación $\arg_\pi|_{\mathbb{S}^1 - \{1\}}$ sí es continua y su imagen es $(0, 2\pi)$. A partir de esto, construimos ϕ_2 de manera análoga a ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 &\longrightarrow (0, 2\pi) \\ (z, w) &\longmapsto \arg_\pi|_{\mathbb{S}^1 - \{1\}}(w \cdot z^{-1}). \end{aligned}$$

Como ahora $(z, w) \in U_2$, tenemos que $w \neq z$, o equivalentemente $w \cdot z^{-1} \neq 1$. Gracias a esto, la composición con $\arg_\pi|_{\mathbb{S}^1 - \{1\}}$ está bien definida. Las definiciones de h_2 y s_2 serán iguales que las de h_1 y s_1 , sustituyendo ϕ_1 por ϕ_2 . La expresión del camino es por tanto $z \cdot \exp(it \cdot \phi_2(z, w))$. Se corresponde con el planificador que describimos anteriormente ya que recorre la circunferencia desde z hasta w a velocidad constante, y siempre añadiéndole a z un ángulo positivo.

1.4. Equivalencia entre sección y homotopía

El siguiente resultado extraído de [9], nos permite reducir el problema seccional a un problema homotópico. Esta reformulación será la clave para adaptar el problema al contexto simplicial en un capítulo posterior. Además, será utilizado en este mismo capítulo para demostrar la reformulación de la complejidad topológica para ENRs.

Lema 1.17. *La aplicación evaluación $e: P(X) \rightarrow X \times X$ admite una sección en $A \subset X \times X$ si y solo si las dos composiciones $A \xrightarrow{i} X \times X \xrightarrow{\pi_1} X$ y $A \xrightarrow{i} X \times X \xrightarrow{\pi_2} X$ son homótopas.*

Demostración. Supongamos que e admite una sección en $A \subset X \times X$, i.e., existe $\sigma: A \rightarrow P(X)$ continua tal que $e \circ \sigma = \text{id}_A$. Probemos entonces que $\pi_1 \circ i \simeq \pi_2 \circ i$. Para ello, construimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} H : I \times A &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto \sigma(x)(t). \end{aligned}$$

El intervalo $I = [0, 1]$ es un subespacio cerrado de \mathbb{R} . Por tanto, I es Hausdorff y localmente compacto por serlo \mathbb{R} . En consecuencia, el Teorema 1.5 nos garantiza que H así construida es

continua. Además, se tiene lo siguiente

$$H(0, x) = \sigma(x)(0) = (\pi_1 \circ \underbrace{e \circ \sigma}_{\text{id}_A})(x) = \pi_1(x) = (\pi_1 \circ i)(x) \quad \forall x \in A.$$

$$H(1, x) = \sigma(x)(1) = (\pi_2 \circ \underbrace{e \circ \sigma}_{\text{id}_A})(x) = \pi_2(x) = (\pi_2 \circ i)(x) \quad \forall x \in A.$$

Por tanto, H es la homotopía que buscamos. Demostremos ahora la otra implicación. Supongamos que $\pi_1 \circ i \simeq \pi_2 \circ i$, i.e, existe una aplicación $H: I \times A \rightarrow X$ continua tal que

$$\begin{cases} H(0, x) = (\pi_1 \circ i)(x) & \forall x \in A, \\ H(1, x) = (\pi_2 \circ i)(x) & \forall x \in A. \end{cases}$$

Tenemos que probar que existe $\sigma: A \rightarrow P(X)$ continua tal que $e \circ \sigma = \text{id}_A$. Consideramos la aplicación $\sigma: A \rightarrow P(X)$ tal que, dado $x \in A$, su imagen viene dada por la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma(x): I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \sigma(x)(t) = H(t, x). \end{aligned}$$

Nuevamente, el Teorema 1.5 nos garantiza la continuidad. Tan solo falta probar que es una sección. Veámoslo:

$$(e \circ \sigma)(x) = e(\sigma(x)) = (\sigma(x)(0), \sigma(x)(1)) = (H(0, x), H(1, x)) = (\pi_1(x), \pi_2(x)) = x \quad \forall x \in A.$$

□

1.5. Retractos de entornos euclídeos

En esta sección introducimos una clase de espacios conocidos como retracts de entornos euclídeos o ENRs, por sus siglas en inglés (*Euclidean Neighbourhood Retracts*). Su nombre es bastante explicativo, como se puede comprobar al leer la definición ([5], Definition 4.5).

Definición 1.18. Un espacio topológico X es un *retracto de entorno euclídeo (ENR)* si es homeomorfo a un espacio $X' \subset \mathbb{R}^n$ que es retracto de un entorno abierto $X' \subset U \subset \mathbb{R}^n$, es decir, existe una retracción $r: U \rightarrow X$, $r|_X = r \circ \iota = \text{id}_X$.

La Proposición 1.22 se incluye a continuación como herramienta técnica que será necesaria en una demostración de la siguiente sección. Se corresponde con el Ejercicio 2 de la Sección 8 del Capítulo 4 de [2]. Antes de enunciarla, recordamos el Lema del pegado de aplicaciones continuas ([12], Teorema 18.3), el Teorema de extensión de Tietze ([12], Teorema 35.1) y el Lema del tubo ([12], Lema 26.8), resultados que serán necesarios en la demostración.

Lema 1.19. Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X . Sean $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \rightarrow Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

Teorema 1.20. Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X . Cualquier aplicación continua de A en \mathbb{R} se puede extender a una aplicación continua de todo X en \mathbb{R} .

Lema 1.21. Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un abierto de $X \times Y$ conteniendo la rebanada $\{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ sobre $\{x_0\} \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X .

Proposición 1.22. Sea X un ENR. Para cada espacio binormal Y (es decir, $I \times Y$ normal), A subespacio cerrado de Y y $F_0, F_1 : Y \rightarrow X$ par de aplicaciones continuas tales que $F_0|_A \simeq F_1|_A$, existe un entorno V de A tal que $F_0|_V \simeq F_1|_V$. De hecho, cualquier homotopía entre $F_0|_A$ y $F_1|_A$ puede ser extendida a un entorno de A .

Demostración. La clave de la demostración recae en extender la homotopía en cuestión, aplicando el Teorema de extensión de Tietze, y después emplear el Lema del tubo para ajustar la extensión a un entorno como el que indica el enunciado, de manera que el resultado sea una nueva homotopía.

Para comenzar, consideremos una homotopía entre $F_0|_A$ y $F_1|_A$, es decir, una aplicación $H : I \times A \rightarrow X$ continua tal que

$$\begin{cases} H(0, a) = F_0|_A(a) & \forall a \in A. \\ H(1, a) = F_1|_A(a) & \forall a \in A. \end{cases}$$

Nuestro primer objetivo es buscar un cerrado $F \subset I \times Y$, en el cual aplicaremos Tietze. Construiremos dicho cerrado como unión de los tres cerrados siguientes: $I \times A$ (cerrado por serlo A), $\{0\} \times Y$ (cerrado por serlo $\{0\}$) y $\{1\} \times Y$ (cerrado por serlo $\{1\}$). El primero de ellos es el dominio de la aplicación H . Los otros dos se pueden entender como los dominios de F_0 y F_1 . Tan solo hay que modificar estas aplicaciones ligeramente de la siguiente manera:

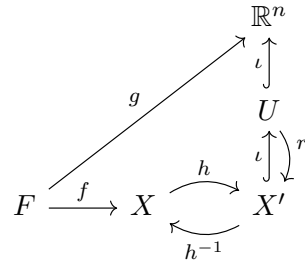
$$\begin{aligned} \hat{F}_0 : \{0\} \times I &\longrightarrow X \\ (0, y) &\longmapsto F_0(y). \end{aligned}$$

La aplicación \hat{F}_1 se construye de manera análoga sobre $\{1\} \times I$. Son continuas por ser composición de una proyección y otra aplicación continua. Ahora pegamos las tres aplicaciones, obteniendo una nueva $f : F \subset I \times Y \rightarrow X$, donde $F = I \times A \cup (\{0\} \times Y) \cup (\{1\} \times Y)$. La aplicación f queda definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} f(0, y) = \hat{F}_0(0, y) = F_0(y) & \forall y \in Y, \\ f(t, y) = H(t, y) & \forall y \in A, \\ f(1, y) = \hat{F}_1(1, y) = F_1(y) & \forall y \in Y. \end{cases}$$

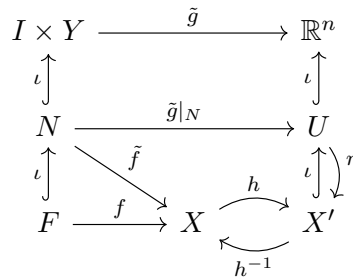
Está bien definida ya que en $t = 0, y \in A$ se tiene que $H(0, y) = F_0(y)$ por definición de H . Análogamente, en $t = 1, y \in A$ se tiene $H(1, y) = F_1(y)$. El Lema 1.19 garantiza que esta f es continua.

Todavía no podemos aplicar Tietze, puesto que se requiere que el codominio de la aplicación a extender sea \mathbb{R} (o \mathbb{R}^n , ver Observación 1.23). La solución a este problema consistirá en aprovechar que X es un ENR para definir una nueva función g que tome valores en \mathbb{R}^n . Recordemos que, por definición, X es homomorfo a un $X' \subset \mathbb{R}^n$, para el cual existe una retracción $r : U \rightarrow X, r|_X = r \circ \iota = id_X$, donde U es un entorno abierto de X' . Llamando h al homeomorfismo entre X y X' , lo anterior puede resumirse en el siguiente diagrama. Se incluye en él también la aplicación g , que definimos como la composición que surge naturalmente del diagrama. Es decir, $g = \iota \circ \iota \circ h \circ f$.



Ahora sí que podemos aplicar el Teorema 1.20 para extender g a todo $I \times Y$. Nótese que $I \times Y$ es normal por hipótesis. De este modo, consideramos la extensión continua $\tilde{g} : I \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$.

El siguiente paso será utilizar esta \tilde{g} para construir una extensión de f . Hay que tener cuidado, puesto que en este caso no será posible extender f a todo $I \times Y$. La idea intuitiva sería considerar la composición $h^{-1} \circ r \circ \tilde{g}$. Sin embargo, esta aplicación no está bien definida, ya que la imagen de \tilde{g} puede no estar contenida en U (que es el dominio de r). Para solucionar esto, hemos de restringir la extensión \tilde{g} al abierto $N = \tilde{g}^{-1}(U) \subset I \times Y$, que contiene a F porque $\tilde{g}(F) = g(F) \subset U$. A continuación, actualizamos el diagrama, incluyendo las aplicaciones \tilde{g} y $\tilde{g}|_N$.



Ahora sí, la aplicación $\tilde{f} = h^{-1} \circ r \circ \tilde{g}|_N$ está bien definida; y es continua por ser composición de continuas. Verifiquemos que efectivamente es una extensión de f :

$$\tilde{f}|_F = (h^{-1} \circ r \circ \tilde{g}|_N)|_F = h^{-1} \circ r \circ \tilde{g}|_F = h^{-1} \circ r \circ g = h^{-1} \circ r \circ \iota \circ h \circ f = h^{-1} \circ h \circ f = f$$

Hemos logrado extender la función f al abierto N . Para completar la demostración basta restringir \tilde{f} a $I \times V$, siendo V un entorno abierto de A , de manera que $I \times A \subset I \times V \subset N$.

La aplicación continua $\tilde{H} = \tilde{f}|_{I \times V} : I \times V \rightarrow X$ será la homotopía que buscamos entre $F_0|_V$ y $F_1|_V$. Comprobémoslo:

$$\begin{cases} \tilde{H}(0, y) = \tilde{f}|_{I \times V}(0, y) = \tilde{f}(0, y) = f(0, y) = F_0(y) & \forall y \in V. \\ \tilde{H}(1, y) = \tilde{f}|_{I \times V}(1, y) = \tilde{f}(1, y) = f(1, y) = F_1(y) & \forall y \in V. \end{cases}$$

Solo falta, por tanto, justificar la existencia de tal abierto V . Como I es compacto, podemos aplicar el Lema del tubo (1.21) en el espacio producto $I \times Y$. Sabemos que $I \times A \subset F \subset N$, de modo que, para cada $a \in A$, la rebanada $I \times \{a\}$ está contenida en el abierto N . En consecuencia, para cada $a \in A$ existirá un V_a entorno abierto de a en Y tal que N contiene al tubo $I \times V_a$. Ahora consideramos el abierto $V := \bigcup_{a \in A} V_a$. Claramente, V es un entorno de A y, además, $I \times V = I \times (\bigcup_{a \in A} V_a) = \bigcup_{a \in A} I \times V_a \subset N$. Por tanto, este V cumple los requisitos establecidos, finalizando así la demostración. \square

Observación 1.23. Nótese que en la demostración se aplica el Teorema 1.20 a una aplicación g cuyo codominio es \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R} . Esta generalización se obtiene considerando las componentes $g_i = \pi_i \circ g$, para cada $i = 1, \dots, n$. Se extiende cada una de ellas empleando la versión que hemos enunciado del teorema; y finalmente se obtiene la extensión \tilde{g} combinando las extensiones \tilde{g}_i .

1.6. Reformulación de $\mathbf{TC}(X)$ para ENRs

Con vistas a nuestro objetivo de trasladar el concepto de complejidad topológica al marco de los complejos simpliciales, nos va a resultar de utilidad reformular la definición en términos de ENRs, puesto que los complejos simpliciales entran en esta clase de espacios.

A continuación, analizamos la Proposición 4.12 de [5]. En ella se definen varios números del estilo de $\mathbf{TC}(X)$, y se prueba que todos son equivalentes si X es un ENR. Solo nos interesa uno de ellos, $r(X)$, pero conviene definir también $k(X)$ para poder demostrar que ambos coinciden con la complejidad topológica. Nuevamente, adaptamos las definiciones a su versión reducida.

Definición 1.24. Sea X un ENR. Denotamos por $k = k(X)$ el menor entero no negativo tal que existe una sección s de la aplicación evaluación y una sucesión creciente de k abiertos

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{k+1} = X \times X,$$

tales que $s|_{U_{i+1}-U_i}$ es continua para cada $i = 0, 1, \dots, k$. Consideramos $U_0 = \emptyset$.

Definición 1.25. Sea X un ENR. Denotamos por $r = r(X)$ el menor entero no negativo tal que existe una sección s de la aplicación evaluación y un recubrimiento

$$G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{r+1} = X \times X, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

tal que G_i es localmente cerrado y $s|_{G_i}$ es continua para cada $i = 1, \dots, r$.

Observación 1.26. La definición de $r(X)$ en [5] presenta un recubrimiento por localmente compactos, en lugar de localmente cerrados. Al trabajar con subespacios de \mathbb{R}^n , estos conceptos son equivalentes, como se demuestra en el Lema 8.3 de la Sección 8 del Capítulo 4 de [2]. La demostración de la proposición realmente hace uso del concepto de localmente cerrado, y luego se utiliza la equivalencia para hablar de localmente compactos. Se ha optado por reformular de esta manera la definición de $r(X)$, con el objetivo de simplificar los argumentos.

Tras haber definido los números en cuestión, ya podemos enunciar y demostrar el resultado principal de la sección.

Proposición 1.27. *Sea X un ENR. Entonces $\mathbf{TC}(X) = k(X) = r(X)$.*

Demostración. En primer lugar, probemos que $\mathbf{TC}(X) \geq k(X)$. Establezcamos $\mathbf{TC}(X) = m$ y sea $W_1 \cup \dots \cup W_{m+1} = X \times X$ un recubrimiento tal que cada abierto W_i admite una sección continua $s_i : W_i \rightarrow \mathbf{P}(X)$ de la aplicación evaluación. Consideremos $U_i = W_1 \cup \dots \cup W_i$ para cada $i = 1, \dots, m+1$. Con esta construcción, está claro que $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{m+1} = X \times X$. Definimos entonces la sección $s : X \times X \rightarrow \mathbf{P}(X)$ de la siguiente forma: $s(x, y) = s_i(x, y)$, siendo i el menor índice tal que $(x, y) \in W_i$. Así, para cada $i = 0, \dots, m$ ($U_0 = \emptyset$) se tiene:

$$\begin{aligned} U_{i+1} - U_i &= W_1 \cup \dots \cup W_i \cup W_{i+1} - (W_1 \cup \dots \cup W_i) \\ &= W_{i+1} - (W_1 \cup \dots \cup W_i). \end{aligned}$$

En consecuencia, dado $(x, y) \in U_{i+1} - U_i$ vemos que $(x, y) \in W_{i+1}$ pero $(x, y) \notin W_j$ para cada $j \leq i$. En base a la definición de s que hemos dado, se cumple entonces que $s(x, y) = s_{i+1}(x, y)$ para todo $(x, y) \in U_{i+1} - U_i$. De este modo, la restricción $s|_{U_{i+1} - U_i} = s_{i+1}|_{U_{i+1} - U_i}$ es continua, habiendo probado así que $m \geq k(X)$.

A continuación, veremos que $k(X) \geq r(X)$. Consideremos $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_{k+1} = X \times X$ ($U_0 = \emptyset$) en las condiciones de la definición de $k(X)$. Para cada $i = 1, \dots, k+1$, los conjuntos $G_i = U_i - U_{i-1}$ son localmente cerrados, pues $U_i - U_{i-1} = U_i \cap (X - U_{i-1})$. Veamos que forman un recubrimiento en las condiciones de la definición de $r(X)$:

$$G_1 \cup \dots \cup G_{k+1} = (U_1 - \emptyset) \cup (U_2 - U_1) \cup \dots \cup (U_{k+1} - U_k) = U_{k+1} = X \times X.$$

Para comprobar que $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$, consideremos s.p.g. que $i < j$. Entonces $U_i \subset U_{j-1}$ y por tanto $G_i \cap G_j = (U_i - U_{i-1}) \cap (U_j - U_{j-1}) \subset U_i \cap (U_j - U_{j-1}) \subset U_{j-1} \cap (U_j - U_{j-1}) = \emptyset$.

Para terminar la demostración, probemos que $r = r(X) \geq \mathbf{TC}(X)$. Consideremos el recubrimiento $G_1 \cup \dots \cup G_{r+1} = X \times X$ formado por localmente cerrados disjuntos dos a dos, tales que cada G_i admite una sección continua $s_i : G_i \rightarrow \mathbf{P}(X)$ de la aplicación evaluación. Siguiendo

la argumentación de la prueba del Lema 1.17, estas secciones se corresponden con homotopías $h_i : I \times G_i \rightarrow X$ entre las proyecciones de $G_i \subset X \times X$.

Como G_i es localmente cerrado, para cada i podemos considerar un abierto $W_i \subset X \times X$ y un cerrado $F_i \subset X \times X$ tales que $G_i = F_i \cap W_i$. Como F_i es cerrado en $X \times X$, se tiene que G_i es cerrado en W_i . De este modo, estamos en las hipótesis de la Proposición 1.22; considerando $Y = W_i$, $F_0 = \pi_1|_{W_i}$, $F_1 = \pi_2|_{W_i}$ y $A = G_i$. Aplicándola para cada i , obtenemos abiertos U_i cumpliendo $G_i \subset U_i \subset W_i$, de manera que las h_i son extendidas a unas nuevas homotopías $H_i : I \times U_i \rightarrow X$, en este caso entre las proyecciones de $U_i \subset X \times X$. Nuevamente, el Lema 1.17 hace corresponder estas homotopías con secciones $S_i : U_i \rightarrow P(X)$ de la aplicación evaluación. Así, U_1, \dots, U_{r+1} es un recubrimiento de $X \times X$ en las condiciones de la definición de $\mathbf{TC}(X)$, por lo que $\mathbf{TC}(X) \leq r$.

Como detalle para poder aplicar la Proposición 1.22, nos ha faltado justificar que $I \times W_i$ es un espacio normal. Como X es un ENR, se tiene que $X \approx X' \subset \mathbb{R}^n$. De este modo, el subespacio $I \times X' \times X' \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ es un espacio métrico por serlo \mathbb{R}^{2n+1} , y por tanto $I \times X \times X \approx I \times X' \times X'$ es metrizable. Como $I \times W_i \subset I \times X \times X$, resulta que $I \times W_i$ es metrizable y, en consecuencia, normal. \square

Observación 1.28. Dado que la argumentación seguida en la demostración no utiliza la condición $G_i \cap G_j = \emptyset$ como hipótesis en ningún paso, es posible suprimirla de la definición de $r(x)$. Simplemente se trataría de una condición más fuerte que nos garantiza que podemos tomar localmente cerrados disjuntos, en caso de necesitarlos. En nuestro caso no será necesario.

Capítulo 2

Complejos y aplicaciones simpliciales

En este capítulo introduciremos una serie de conceptos relacionados con el objeto matemático conocido como complejo simplicial. Seguiremos las definiciones, resultados y demás explicaciones del Capítulo 3 de [14], puesto que este es el libro de referencia que emplea Jesús González en [9]. Adaptaremos ligeramente la notación para que coincida con la de [9].

2.1. Complejos simpliciales abstractos

La idea de triangulación es muy útil a la hora de estudiar espacios topológicos, puesto que simplifica mucho la estructura, reduciéndola a una cuestión combinatoria. Los complejos simpliciales formalizan apropiadamente esta idea, generalizándola a cualquier dimensión. Habitualmente se introducen en términos de símlices geométricos. Es decir, se define un complejo como una colección de puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, etc. que se “pegan apropiadamente”. No obstante, también es posible definirlos atendiendo simplemente a sus vértices, capturando de igual manera la esencia de la estructura simplicial. Esto se conoce habitualmente como complejo simplicial abstracto, y es precisamente lo que presentamos a continuación.

Definición 2.1. Un *complejo simplicial abstracto* K consiste en un conjunto V de *vértices* y un conjunto Σ de subconjuntos finitos no vacíos de V denominados *símlices* tal que:

1. $\{v\} \in \Sigma, \forall v \in V$.
2. $\emptyset \neq \sigma' \subset \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma' \in \Sigma$.

Aunque lo hayamos definido como *complejo simplicial abstracto*, por brevedad habitualmente nos referiremos a estos objetos como *complejos simpliciales*, o incluso *complejos*. A continuación, definiremos una serie de conceptos asociados a estos.

Definición 2.2. Se dice que el complejo K es *finito* si contiene solo un número finito de simplices.

Definición 2.3. Se denomina *q-símplice* a un símplice σ que contiene exactamente $q+1$ vértices. En tal caso, también se dirá que la *dimensión* de σ es q , y se escribirá $\dim \sigma = q$.

Definición 2.4. Sea σ un símplice. Se dice que $\sigma' \subset \sigma$ es una *cara* de σ . Si además $\sigma' \neq \sigma$, se dirá que σ' es una *cara propia* de σ .

En base a estas definiciones, está claro que, dado un q -símplice σ , entonces σ es la única cara de dimensión q de σ . En consecuencia, una cara σ' de σ será propia si y solo si $\dim \sigma' < q$.

Observación 2.5. Dado un conjunto de simplices S , la relación “ser una cara de”, al tratarse realmente del contenido entre conjuntos, es una relación de orden. De esta manera, el conjunto S está parcialmente ordenado y denotaremos $\sigma' \leq \sigma$ si σ' es una cara de σ .

Observación 2.6. La condición 1. de la Definición 2.1 implica que los 0-simplices de un complejo K se corresponden biyectivamente con los vértices de K . Además, de la condición 2. se sigue que todo símplice está determinado por sus caras de dimensión 0. Por esta razón, habitualmente se identificará el complejo K con su conjunto de simplices; y cada vértice de K con su 0-símplice correspondiente. Así, si σ es un símplice de K , escribiremos $\sigma \in K$, y, si v es un vértice, escribiremos también $v \equiv \{v\} \in K$.

Para trabajar un poco las definiciones anteriores, introducimos una serie de ejemplos de complejos simpliciales.

Ejemplo 2.7. El conjunto vacío de simplices es trivialmente un complejo simplicial denotado por \emptyset .

Ejemplo 2.8. Para cualquier conjunto A , el conjunto de todos sus subconjuntos finitos no vacíos es un complejo simplicial.

Ejemplo 2.9. Si σ es un símplice de un complejo K , entonces tanto el conjunto de todas sus caras como el de sus caras propias son complejos simpliciales.

Ejemplo 2.10. Dado un conjunto X y una colección \mathcal{W} de subconjuntos de X , se llama *nervio* de \mathcal{W} y se denota $K(\mathcal{W})$ al complejo simplicial cuyos simplices son los subconjuntos finitos no vacíos de \mathcal{W} con intersección no vacía. Por tanto, los vértices de $K(\mathcal{W})$ son los elementos no vacíos de \mathcal{W} .

Ejemplo 2.11. Un ejemplo concreto de complejo simplicial infinito puede construirse sobre \mathbb{Z} como conjunto de vértices, considerando el siguiente conjunto de simplices:

$$\{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Ya hemos introducido el concepto de dimensión de un símplex. En base a esta, se puede definir también el concepto de dimensión de un complejo simplicial:

Definición 2.12. Dado un complejo simplicial $K \neq \emptyset$, se define su *dimensión*, que se denotará $\dim K$, como el supremo de las dimensiones de sus símplexes. Es decir,

$$\dim K := \sup \{ \dim s : s \in K \}.$$

Nótese que este valor puede ser ∞ si K contiene n -símplexes $\forall n \in \mathbb{N}$. En el caso $K = \emptyset$, se define directamente $\dim K = -1$.

Observación 2.13. Está claro que si K es finito, $\dim K < \infty$, puesto que es el supremo de un conjunto finito de números naturales. Sin embargo, si $\dim K < \infty$, esto no implica que K sea finito. En el Ejemplo 2.11 se construye un complejo simplicial infinito, cuya dimensión es 1, ya que $\dim\{n\} = 0$ y $\dim\{n, n+1\} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Como toda estructura matemática, los complejos simpliciales también disponen de la correspondiente noción de “subestructura”: los subcomplejos. Este concepto permite definir el análogo simplicial al recubrimiento por abiertos de un espacio topológico.

Definición 2.14. Un *subcomplejo* L de un complejo simplicial K , denotado por $L \subset K$, es un subconjunto de K que también es un complejo simplicial.

Definición 2.15. Una colección \mathcal{C} de subcomplejos de K es un *recubrimiento* si $K = \bigcup_{L \in \mathcal{C}} L$.

Un ejemplo importante de subcomplejos son los esqueletos, que procedemos a definir.

Definición 2.16. Sea un complejo simplicial K . Se define su *esqueleto q -dimensional* K^q como el subcomplejo de K consistente en todos los p -símplexes de K , con $p \leq q$.

Para terminar la sección, incluimos la definición que convierte a los complejos simpliciales en una categoría.

Definición 2.17. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales. Una *aplicación simplicial*, denotada $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$, es una aplicación φ definida entre los vértices de K_1 y K_2 tal que, para cada símplex $\sigma \in K_1$, su imagen $\varphi(\sigma)$ es un símplex de K_2 .

Observación 2.18. Dado un complejo simplicial K , se puede considerar la aplicación identidad en su conjunto de vértices. Claramente, se trata de una aplicación simplicial, ya que la imagen de cada símplex coincide consigo mismo, siendo por tanto un símplex. Esta aplicación se denotará por $1_K : K \rightarrow K$. Por otra parte, dadas dos aplicaciones simpliciales $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ y $\psi : K_2 \rightarrow K_3$, su composición $\psi\varphi$ también es una aplicación simplicial. Para comprobarlo, consideremos un $\sigma \in K_1$. Su imagen por $\psi\varphi$ será $\psi\varphi(\sigma) = \psi(\varphi(\sigma))$. Se tiene que $\varphi(\sigma) \in K_2$ por ser φ aplicación simplicial. Entonces, como ψ también lo es, $\psi(\varphi(\sigma)) \in K_3$, habiendo probado así que $\psi\varphi$ es simplicial. Todo esto garantiza que los complejos simpliciales junto a las aplicaciones simpliciales conforman una categoría.

2.2. Realización geométrica

Hasta ahora hemos presentado los complejos y aplicaciones simpliciales de manera abstracta; sin hacer ninguna referencia a la topología. Ha llegado el momento. A continuación, definiremos un funtor covariante de la categoría de los complejos simpliciales y aplicaciones simpliciales a la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas. Comenzaremos construyendo el conjunto asociado a un complejo K , al que más adelante dotaremos de topología. Recordemos que extraemos estos conceptos del Capítulo 3 de [14].

Definición 2.19. Sea K un complejo simplicial no vacío, y $V(K) \equiv K^0$ su conjunto de vértices. Consideremos $|K|$ el conjunto de funciones $\alpha : K^0 \rightarrow I$ tales que:

1. $\{v \in K^0 : \alpha(v) \neq 0\} \in K$.
2. $\sum_{v \in K^0} \alpha(v) = 1$.

Si $K = \emptyset$, definimos $|K| = \emptyset$. El número real $\alpha(v)$ se denomina *v-ésima coordenada baricéntrica de α* . Se llama *símplice soporte* de $\alpha \in |K|$, y se denota σ_α , al símplice formado por los vértices $v \in K$ tales que $\alpha(v) > 0$. En el caso de que $\sigma_\alpha = \{v\}$ identificaremos el punto $\alpha \in |K|$ con el vértice v (y, como ya hemos hecho hasta ahora, con el símplice $\{v\}$). Se deduce de forma inmediata que, en esta situación, la aplicación $\alpha \equiv v$ actúa de la siguiente forma: $v(v') = 1$ si $v = v'$, y $v(v') = 0$ en caso contrario.

En el conjunto que acabamos de definir, podemos construir una primera topología como sigue:

Definición 2.20. Dado un complejo K , consideremos la distancia d en $|K|$ definida por:

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in K^0} [\alpha(v) - \beta(v)]^2}.$$

La topología definida por esta distancia se llamará *topología métrica*. El conjunto $|K|$ con la topología métrica se denotará $|K|_d$.

Acabamos de darle estructura de espacio topológico al conjunto $|K|$. Sin embargo, esta todavía no es la topología con la que trabajaremos. Tan solo la usaremos como herramienta para definir otra topología nueva, más práctica. Antes de continuar, necesitamos el siguiente resultado (Teorema 2.5 de [14]), que nos permite construir un espacio topológico a partir de topologías definidas en ciertos subconjuntos.

Teorema 2.21. Sea X un conjunto y $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos contenidos en X tales que, para cada $j, j' \in J$, $A_j \cap A_{j'}$ es cerrado (o abierto) en A_j y en $A_{j'}$ y la topología

de $A_j \cap A_{j'}$ inducida por A_j coincide con la topología de $A_j \cap A_{j'}$ inducida por $A_{j'}$. Entonces, la topología final con respecto a la familia de las inclusiones $\{A_j \hookrightarrow X\}$ está caracterizada por las propiedades:

- A_j es un subespacio cerrado (o abierto) de X , $\forall j \in J$.
- X tiene una topología coherente con la colección $\{A_j\}_{j \in J}$, i. e., X tiene la topología final respecto a las inclusiones $A_j \hookrightarrow X$.

La topología en cuestión se conoce como topología coherente con $\{A_j\}_{j \in J}$.

Volvamos a los complejos simpliciales. Considerando el q -símplice $\sigma \in K$, podemos definir el siguiente subconjunto de $|K|$:

$$|\sigma| := \{\alpha \in |K| : \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in \sigma\}.$$

El conjunto $\Delta^q = \{x \in \mathbb{R}^{q+1} : 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1\}$ se corresponde biyectivamente con $|\sigma|$. Es más, la topología inducida en $|\sigma|$ por $|K|_d$ convierte a $|\sigma|$ en un espacio topológico $|\sigma|_d$ homeomorfo a Δ^q como subespacio compacto de \mathbb{R}^{q+1} . Esto sucede debido a que el conjunto y la distancia escogidos en cada caso son, en esencia, los mismos.

Consideremos ahora dos símplices $\sigma_1, \sigma_2 \in K$. Estudiemos su intersección. Una posibilidad es que se tenga $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, lo cual implica que $|\sigma_1| \cap |\sigma_2| = \emptyset$. La otra opción es que $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, de manera que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ sería una cara de σ_1 y también de σ_2 . En tal caso, $|\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_1| \cap |\sigma_2|$. En cualquiera de las dos situaciones $|\sigma_1|_d \cap |\sigma_2|_d$ es un subespacio cerrado de $|\sigma_1|_d$ y de $|\sigma_2|_d$. En el primer caso es cierto por tratarse del conjunto vacío. Veamos por qué se cumple en el segundo caso. A nivel de conjuntos, está claro que $|\sigma_1 \cap \sigma_2| = |\sigma_1| \cap |\sigma_2| \subset |\sigma_1| \subset |K|$. A nivel topológico, también podemos afirmar que $|\sigma_1 \cap \sigma_2|_d$ es un subespacio de $|\sigma_1|_d$, y este a su vez lo es de $|K|_d$. Gracias a un razonamiento anterior, podemos asegurar que $|\sigma_1 \cap \sigma_2|_d = |\sigma_1|_d \cap |\sigma_2|_d$ es compacto. Combinando esto con el hecho de que $|\sigma_1|_d$ es Hausdorff (por ser $|K|_d$ un espacio métrico), se concluye que $|\sigma_1|_d \cap |\sigma_2|_d$ es un cerrado de $|\sigma_1|_d$. Análogamente, también lo es de $|\sigma_2|_d$.

Por otra parte, está claro que la topología inducida en la intersección $|\sigma_1|_d \cap |\sigma_2|_d$ por $|\sigma_1|_d$ coincide con la inducida por $|\sigma_2|_d$. Recopilando todo lo anterior, el Teorema 2.21 nos permite considerar una topología en $|K|$ que es coherente con la colección $\{|\sigma|_d : \sigma \in K\}$.

Definición 2.22. La topología anterior se denominará *topología coherente*. El espacio topológico correspondiente se denotará $\|K\|$.

Observación 2.23. Nótese que el Teorema 2.21 garantiza que $|\sigma|_d \equiv \|\sigma\|$ es un subespacio cerrado de $\|K\|$, para todo $\sigma \in K$.

Definición 2.24. Dado un símlice $\sigma \in K$, se define su correspondiente *símlice abierto* como el subespacio $\langle \sigma \rangle \subset \|\sigma\|$ formado por los puntos $\alpha \in K$ tales que $\sigma_\alpha = \sigma$. Es decir,

$$\langle \sigma \rangle = \{\alpha \in \|\sigma\| : \alpha(v) > 0 \Leftrightarrow v \in \sigma\}.$$

Observación 2.25. Nótese que $\|\sigma\|$ es la clausura de $\langle \sigma \rangle$. También es interesante reflexionar que, como conjuntos, $|K|$ es igual a la unión disjunta $\coprod_{\sigma \in K} \langle \sigma \rangle$.

Observación 2.26. De la observación previa se deduce fácilmente que $\|K\| = \bigcup_{\sigma \in K} \|\sigma\|$. Si consideramos K finito, como cada $\|\sigma\|$ es compacto, $\|K\|$ resulta ser una unión finita de compactos. Por tanto, también es compacto. En consecuencia, el Corolario A.8 de [10] garantiza que $\|K\|$ es un ENR.

Observación 2.27. Otra idea que conviene tener en cuenta es la siguiente. Dado un complejo K , la realización geométrica de la unión de subcomplejos de K coincide con la unión de las realizaciones geométricas de los subcomplejos. En particular, si \mathcal{C} es un recubrimiento de K , entonces se tiene que $\bigcup_{L \in \mathcal{C}} \|L\| = \|K\|$.

Para que tenga sentido lo que acabamos de comentar, conviene precisar que dado un subcomplejo $L \in K$ estamos identificando su realización geométrica con el siguiente subespacio de $\|K\|$:

$$\|L\| = \{\alpha \in \|K\| : \alpha(v) > 0 \Leftrightarrow v \in L^0\}.$$

A continuación, exponemos un resultado (ver [14]) que caracteriza de forma muy conveniente la continuidad de aplicaciones definidas en el espacio $\|K\|$ que acabamos de construir.

Teorema 2.28. *Dados K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Una aplicación $f : \|K\| \rightarrow X$ es continua si y solo si $f|_{\|\sigma\|} : \|\sigma\| \rightarrow X$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Demostración. Supongamos que f es continua y consideremos $\sigma \in K$. Denotemos a la inclusión correspondiente por $\iota_\sigma : \|\sigma\| \hookrightarrow \|K\|$. Por definición, la topología coherente es la topología final respecto a estas inclusiones, es decir, es la topología más fina que hace que estas aplicaciones sean continuas. Así, $f|_{\|\sigma\|} = f \circ \iota_\sigma$ es continua por ser composición de continuas.

Ahora supongamos que $f|_{\|\sigma\|}$ es continua para todo $\sigma \in K$. Consideremos un abierto $U \subset X$ y veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto en $\|K\|$. Nuevamente, la definición de la topología coherente determina que lo será si y solo si $(\iota_\sigma)^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \iota_\sigma)^{-1}(U) = (f|_{\|\sigma\|})^{-1}(U)$ es abierto para cada $\sigma \in K$. Pero esto ya se tiene por hipótesis. \square

Ya hemos terminado de construir la realización geométrica $\|K\|$ de un complejo simplicial K . Pero para hablar de un funtor entre categorías, todavía falta concretar cómo actúa $\|\cdot\|$ sobre los morfismos. Es decir, tenemos que dar una definición para la realización geométrica $\|\varphi\|$ de una aplicación simplicial φ .

Definición 2.29. Dada una aplicación simplicial $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$, se define su realización geométrica como $\|\varphi\| : \|K_1\| \rightarrow \|K_2\|$ tal que, dado $\alpha \in \|K_1\|$, su imagen viene dada por la aplicación

$$\begin{aligned} \|\varphi\|(\alpha) : K_2^0 &\longrightarrow I \\ v' &\longmapsto \|\varphi\|(\alpha)(v') = \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v). \end{aligned}$$

Proposición 2.30. *La aplicación $\|\varphi\|$ es continua.*

Demostración. El Teorema 2.28 nos caracteriza la continuidad en términos de los símlices de K_1 , de modo que $\|\varphi\|$ será continua si y solo si lo son sus restricciones a cada $\|\sigma\| \subset \|K_1\|$, con $\sigma \in K_1$. Además, probaremos a continuación que $\|\varphi\|(\|\sigma\|) \subset \|\varphi(\sigma)\|$. De este modo, como la restricción del rango no afecta a la continuidad, nos bastará con probar la continuidad de las aplicaciones $\|\varphi\| \mid_{\|\sigma\|} : \|\sigma\| \rightarrow \|\varphi(\sigma)\|$.

Demostremos entonces que $\|\varphi\|(\|\sigma\|) \subset \|\varphi(\sigma)\|$. Consideremos $\alpha \in \|\sigma\|$. Verifiquemos si $\|\varphi\|(\alpha) \in \|\varphi(\sigma)\|$, es decir, supongamos que $\|\varphi\|(\alpha)(v') \neq 0$ y veamos si $v' \in \varphi(\sigma)$. Si $\|\varphi\|(\alpha)(v') = \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v) \neq 0$, como $\alpha(v) \geq 0$ para todo v , se tendrá que existe un \tilde{v} tal que $\alpha(\tilde{v}) \neq 0$. Esto, como $\alpha \in \|\sigma\| = \{\beta \in \|K_1\| : \beta(v) \neq 0 \Rightarrow v \in \sigma\}$, implica que $\tilde{v} \in \sigma$, y por tanto $v' = \varphi(\tilde{v}) \in \varphi(\sigma)$.

Para terminar, falta probar la continuidad de $\|\varphi\| \mid_{\|\sigma\|} : \|\sigma\| \rightarrow \|\varphi(\sigma)\|$. Para ello tan solo hay que traducirla a la aplicación correspondiente entre los subespacios $\Delta^{q_1} \subset \mathbb{R}^{q_1+1}$ y $\Delta^{q_2} \subset \mathbb{R}^{q_2+1}$, homeomorfos a $\|\sigma\|$ y $\|\varphi(\sigma)\|$ respectivamente. Esta aplicación llevará a cada $(x_0, x_1, \dots, x_{q_1}) \in \Delta^{q_1}$ a un $(y_0, y_1, \dots, y_{q_2}) \in \Delta^{q_2}$, donde cada y_j vendrá dado por una suma de varios x_i . Esto es claramente una aplicación continua entre subespacios euclídeos. De este modo, $\|\varphi\| \mid_{\|\sigma\|}$ resultará serlo también como composición de esta otra aplicación con los homeomorfismos adecuados. \square

Terminamos la sección definiendo un par de conceptos importantes relacionados con la idea de realización geométrica.

Definición 2.31. Una *triangulación* (K, f) de un espacio topológico X consiste en un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : \|K\| \rightarrow X$. Si X admite una triangulación, X se denomina *poliedro*.

2.3. Subdivisión baricéntrica

En esta sección presentaremos el concepto de subdivisión de un complejo simplicial. Nos centraremos en un ejemplo específico: la subdivisión baricéntrica. Esta será fundamental para

trabajar las ideas de aproximación simplicial que utilizaremos en este trabajo. Antes de llegar a estos conceptos, es necesario presentar una serie de definiciones previas. Comenzamos por una curiosa idea que permite hablar de linealidad en un contexto topológico.

Definición 2.32. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales. Se dice que una aplicación continua $f : ||K_1|| \rightarrow ||K_2||$ es *lineal en K_1* si, para cada $\alpha \in ||K_1||$, $\sum_{v \in K} \alpha(v)f(v)$ es un punto de $||K_2||$ y dicho punto es igual a $f(\alpha)$.

Observación 2.33. La definición de aplicación lineal dada en [14] es un poco más general. Se sustituye $||K_2||$ por un espacio topológico X con las propiedades adecuadas para que la suma en cuestión tenga sentido. En nuestro caso, tan solo nos hará falta esta versión simplificada.

Observación 2.34. En base a la definición, está claro que una aplicación lineal quedará determinada por cómo actúa sobre los vértices de K_1 . Además, dada cualquier aplicación $f_0 : K_1^0 \rightarrow ||K_2||$ sobre los vértices de K_1 , podrá ser extendida a una aplicación lineal $f : ||K_1|| \rightarrow ||K_2||$ si y solo si, para cada $\sigma \in K_1$, cualquier combinación convexa de elementos de $f_0(\sigma)$ está bien definida como elemento de $||K_2||$.

Ya tenemos el ingrediente que nos faltaba, la linealidad, para poder definir el concepto de subdivisión:

Definición 2.35. Sea K un complejo simplicial. Una *subdivisión* de K es un complejo simplicial K' tal que

1. Los vértices de K' son puntos de $||K||$.
2. Si $\sigma' \in K'$, existirá $\sigma \in K$ tal que $\sigma' \subset ||\sigma||$.
3. La aplicación lineal $||K'|| \rightarrow ||K||$ que lleva cada vértice de K' a su correspondiente punto de $||K||$ es un homeomorfismo.

Observación 2.36. Nótese que la aplicación lineal del punto 3 de la definición anterior existe y es única gracias a lo comentado en la Observación 2.34. En general, utilizaremos este homeomorfismo para identificar $||K'||$ con $||K||$.

Observación 2.37. De la definición, se deduce fácilmente que cualquier subdivisión de una subdivisión de K es también una subdivisión de K .

Tras haber introducido el concepto básico de subdivisión, pasaremos a construir el ejemplo fundamental: la subdivisión baricéntrica.

Definición 2.38. Se define el *baricentro* $b(\sigma)$ del símple $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ como el punto:

$$b(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq q} \frac{1}{q+1} v_i.$$

Definición 2.39. Sea K un complejo simplicial. Se define su *subdivisión baricéntrica* $\text{Sd}(K)$ como el complejo simplicial cuyos vértices son los baricentros de los símlices de K y cuyos símlices son los conjuntos $\{b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_q)\}$ tales que σ_{i-1} es una cara de σ_i para cada $i = 1, \dots, q$.

Observación 2.40. Es inmediato comprobar que $\text{Sd}(K)$ es un complejo simplicial y que, si L es un subcomplejo de K , entonces $\text{Sd}(L)$ es un subcomplejo de $\text{Sd}(K)$.

A continuación, incluimos el resultado esperado que hace encajar toda la sección. Omitimos la demostración porque puede resultar tediosa. Se puede consultar en [14].

Proposición 2.41. $\text{Sd}(K)$ es una subdivisión de K .

Para terminar, definimos un concepto que nos será muy práctico de ahora en adelante.

Definición 2.42. Sea K un complejo. Se define para cada entero $b \geq 0$, la k -ésima *subdivisión baricéntrica iterada* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Sd}^0(K) &= K, \\ \text{Sd}^b(K) &= \text{Sd}(\text{Sd}^{b-1}(K)), \quad b \geq 1. \end{aligned}$$

Observación 2.43. Gracias a la Observación 2.37, tenemos garantizado que $\text{Sd}^b(K)$ es una subdivisión para todo entero $b \geq 0$.

2.4. Aproximación simplicial y contigüidad

En este punto, ya tenemos las herramientas necesarias para poder seguir directamente las definiciones que incluye Jesús González en los preliminares de [9]. Se asume por tanto que estamos trabajando con complejos simpliciales finitos. Comenzamos definiendo el concepto de aproximación simplicial; pieza fundamental para relacionar aplicaciones simpliciales con aplicaciones continuas.

Definición 2.44. Sean K y L complejos simpliciales. Una *aproximación simplicial* (o simplemente, *aproximación*) de una aplicación continua $f : \|K\| \rightarrow \|L\|$ es una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ tal que $\|\varphi\|(x) \in \|\sigma\|$ para cada $x \in \|K\|$ y $f(x) \in \langle \sigma \rangle$.

Veamos un par de ejemplos importantes de aproximaciones.

Ejemplo 2.45. Una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ es la única aproximación de su propia realización geométrica $\|\varphi\|$. Justifiquémoslo brevemente. Sea $v \in K^0$ un vértice. Sabemos que $\|\varphi\|(v)$ ha de ser un vértice $v' \in L^0$, es decir, $\|\varphi\|(v) = v' \in \langle v' \rangle$. Supongamos que ψ es otra aproximación simplicial de $\|\varphi\|$, entonces por definición ha de cumplir $\|\psi\|(v) \in \|v\| = \{v'\}$, lo cual implica que $\psi(v) = v'$. Como v era un vértice arbitrario de K , se tiene que $\psi = \varphi$.

Ejemplo 2.46. Para cualquier subdivisión K' de un complejo K , el homeomorfismo lineal estándar $\|K'\| \xrightarrow{\cong} \|K\|$ (ver Definición 2.35) admite una aproximación $K' \rightarrow K$. Cualquier aplicación simplicial $\iota : K' \rightarrow K$ con la propiedad de que $v'(\iota(v')) > 0$, para todo vértice v' de K' , es una aproximación de dicho homeomorfismo. De hecho, tales aplicaciones ι son las únicas aproximaciones posibles.

Observación 2.47. Las aproximaciones se comportan bien respecto de las composiciones. Es decir, si

$$K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M$$

son aproximaciones respectivas de

$$\|K\| \xrightarrow{f} \|L\| \xrightarrow{g} \|M\|,$$

entonces $\psi\varphi$ es una aproximación de $g \circ f$. Tanto este hecho, como el que se afirma en el ejemplo anterior, se obtienen de [14] (Capítulo 3, Sección 4).

Introducimos ahora un concepto análogo a la homotopía para la categoría de los complejos simpliciales: la contigüidad de aplicaciones simpliciales.

Definición 2.48. Dado c un entero positivo, dos aplicaciones simpliciales $\varphi, \varphi' : K \rightarrow K$ se dicen:

1. *contiguas* (o *1-contiguas*) si $\varphi(\sigma) \cup \varphi'(\sigma)$ es un símlice de L , para todo símlice $\sigma \in K$.
2. *c-contiguas* si existe una sucesión $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_c : K \rightarrow L$ de aplicaciones simpliciales, con $\varphi_0 = \varphi$ y $\varphi_c = \varphi'$, tales que φ_{i-1} y φ_i son contiguas para todo $i \in \{1, 2, \dots, c\}$.

Observación 2.49. En la parte 1. de la Definición 2.48 basta con verificar la condición en los símlices maximales de K . Detallémoslo brevemente. Sea $\sigma \in K$ un símlice verificando la condición y $\tau \subset \sigma$ una de sus caras. Se tiene que $\varphi(\tau) \cup \varphi'(\tau) \subset \varphi(\sigma) \cup \varphi'(\sigma)$, de modo que $\varphi(\tau) \cup \varphi'(\tau)$ será un símlice por ser un subconjunto de otro símlice.

Diremos que la sucesión de aplicaciones φ_j en la parte 2. de la Definición 2.48 es una *cadena de contigüidad* de longitud c entre φ y φ' , y lo denotaremos $\varphi \sim_c \varphi'$. También escribiremos $\varphi \sim \varphi'$ para referirnos a $\varphi \sim_c \varphi'$ para algún c . Esto último define una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones simpliciales $K \rightarrow L$. La correspondiente clase de equivalencia de φ será denotada por $[\varphi]$, y se denominará *clase de contigüidad* de φ . A continuación, razonamos sobre cómo se relaciona la contigüidad con la composición de aplicaciones simpliciales. El siguiente lema se extrae de [14].

Lema 2.50. Si φ, φ' son contiguas y ψ, ψ' son contiguas, entonces $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi'$ son contiguas.

Demostración. Supongamos que $\varphi, \varphi' : K_1 \rightarrow K_2$ son contiguas y $\psi, \psi' : K_2 \rightarrow K_3$ son contiguas. Dado $\sigma \in K_1$, entonces $\varphi(\sigma) \cup \varphi'(\sigma) \in K_2$. Por tanto,

$$\psi\varphi(\sigma) \cup \psi'\varphi'(\sigma) \subset \psi(\varphi(\sigma) \cup \varphi'(\sigma)) \cup \psi'(\varphi(\sigma) \cup \varphi'(\sigma)) \in K_3,$$

de modo que $\psi\varphi(\sigma) \cup \psi'\varphi'(\sigma) \in K_3$. En consecuencia $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi'$ son contiguas. \square

Proposición 2.51. *Dadas las aplicaciones simpliciales*

$$J \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\varphi, \varphi'} L \xrightarrow{\omega} M,$$

si φ y φ' son c -contiguas, entonces $\omega\varphi\psi$ y $\omega\varphi'\psi$ también lo son.

Demostración. Por hipótesis, podemos considerar $\varphi = \varphi_0, \dots, \varphi_c = \varphi'$ tales que φ_i y φ_{i-1} son contiguas para cada $i \in \{1, \dots, c\}$. Consideraremos entonces las composiciones $\omega\varphi\psi = \omega\varphi_0\psi, \dots, \omega\varphi_c\psi = \omega\varphi'\psi$. Para cada $i \in \{1, \dots, c\}$ se tiene que $\omega\varphi_i\psi$ y $\omega\varphi_{i-1}\psi$ son contiguas, sin más que aplicar el Lema 2.50 dos veces, teniendo en cuenta que tanto ω como ψ son contiguas consigo mismas trivialmente. \square

Proposición 2.52. *La composición de clases de clases de contigüidad está bien definida.*

Demostración. Supongamos que $\varphi \sim \varphi'$ y $\psi \sim \psi'$. Aplicando la Proposición 2.51 dos veces obtenemos: $\psi\varphi \sim \psi\varphi' \sim \psi'\varphi'$. Esto garantiza que la siguiente composición de clases de contigüidad:

$$[\psi] \circ [\varphi] = [\psi\varphi]$$

está bien definida. \square

Recordemos que se ha introducido el concepto de contigüidad con la intención de introducir un análogo de la homotopía en el contexto simplicial. Para formalizar adecuadamente la relación entre ambos conceptos, es necesario permitir subdivisiones baricéntricas iteradas para realizar las aproximaciones. La idea intuitiva consiste en que la realización geométrica lleva a una correspondencia biyectiva entre las clases de contigüidad de aplicaciones simpliciales que parten de un complejo suficientemente subdividido y las clases de homotopía de las aplicaciones continuas entre las realizaciones geométricas de los complejos correspondientes. El siguiente Teorema, extraído directamente de [9], recopila de manera precisa estas ideas acerca de las aproximaciones y la contigüidad.

Teorema 2.53. *Existencia y unicidad de aproximaciones:*

(1) *Dos aproximaciones de la misma aplicación continua son 1-contiguas. En consecuencia, si existe, la clase de contigüidad de aproximaciones de una aplicación continua dada es única.*

(2) Para toda aplicación continua $f: \|K\| \rightarrow \|L\|$ existe un entero no negativo b_0 tal que, para cada $b \geq b_0$, f admite una aproximación $\varphi_b: \text{Sd}^b(K) \rightarrow L$. (Recordemos que $\|\text{Sd}^b(K)\| \equiv \|K\|$.) En consecuencia, si $\iota: \text{Sd}^{b+1}(K) \rightarrow \text{Sd}^b(K)$ es una aproximación de la identidad en $\|K\|$, entonces $\varphi_{b\iota}$ y φ_{b+1} son 1-contiguas.

Relación entre contigüidad y homotopía:

(3) Las aplicaciones simpliciales que están en la misma clase de contigüidad tienen realizaciones geométricas homotópicamente equivalentes.

(4) Dadas dos aplicaciones homótopas $f_0, f_1: \|K\| \rightarrow \|L\|$, existe un entero no negativo b_0 tal que, para todo $b \geq b_0$, cualquier par de aproximaciones $\varphi_0, \varphi_1: \text{Sd}^b(K) \rightarrow L$ de f_0, f_1 respectivamente, satisface $\varphi_0 \sim_c \varphi_1$ para algún $c \geq 0$ (que depende de φ_0 y φ_1).

2.5. Producto de complejos

Para terminar este capítulo introductorio a los complejos simpliciales, presentaremos el último ingrediente imprescindible para la definición de la complejidad topológica: el producto de complejos simpliciales. Recordemos que nuestro objetivo consiste en trasladar el concepto de complejidad topológica al contexto simplicial. Para ello, será fundamental la idea dada por el Lema 1.17. Esto provocará la necesidad de considerar una estructura simplicial en un producto de complejos simpliciales de tal manera que la realización geométrica del producto recupere el producto de realizaciones de los factores. Esta condición nos obligará a trabajar en la categoría de los complejos simpliciales ordenados. Seguiremos la construcción proporcionada en [3], tal y como se comenta en [9].

El producto cartesiano de dos complejos simpliciales no es de forma inmediata un complejo simplicial. Una primera forma de solventar esta dificultad viene de la mano de la siguiente definición.

Definición 2.54. Sean K_1 y K_2 dos complejos simpliciales. Dados $\sigma_1 \in K_1$ y $\sigma_2 \in K_2$ símlices de dimensiones q_1 y q_2 respectivamente, se define su *producto simplicial* $\sigma_1 \Delta \sigma_2$ como el símlice de dimensión $(q_1 + 1)(q_2 + 1) - 1$ cuyos vértices son todos los pares (A, B) , con $A \in \sigma_1$ y $B \in \sigma_2$. Se define el *producto simplicial* $K_1 \Delta K_2$ como el complejo simplicial cuyos símlices son los conjuntos $\sigma_1 \Delta \sigma_2$, y todas sus respectivas caras, para cada $\sigma_1 \in K_1$ y $\sigma_2 \in K_2$.

Observación 2.55. En la definición se añaden de forma explícita al complejo todas las caras de los símlices $\sigma_1 \Delta \sigma_2$, puesto que las caras de dichos símlices no tienen por qué obtenerse del producto de caras de σ_1 y σ_2 . Esto es debido a que un subconjunto de un producto cartesiano no es necesariamente un producto de subconjuntos de los factores.

Observación 2.56. En base a la definición, se deduce que el conjunto de vértices de $K_1 \Delta K_2$ es $(K_1 \Delta K_2)^0 = K_1^0 \times K_2^0$.

Definición 2.57. Se definen las *proyecciones del producto simplicial* como las aplicaciones simpliciales:

$$\pi_1 : K_1 \Delta K_2 \rightarrow K_1, \quad \pi_2 : K_1 \Delta K_2 \rightarrow K_2,$$

que actúan de la siguiente manera respectivamente: $(A, B) \mapsto A$ y $(A, B) \mapsto B$, para cada $A \in K_1^0$ y $B \in K_2^0$.

Aunque el producto que hemos construido sí es un complejo simplicial, todavía no cumple la condición de homeomorfía requerida. Antes de llegar a eso, debemos introducir el concepto de complejo simplicial ordenado.

Definición 2.58. Un complejo simplicial K se dice que está *ordenado* si cada símplice está dotado de un orden total que concuerda con los órdenes de sus caras. Dado un subcomplejo $L \subset K$ siempre se asumirá en él el orden inducido por el orden de K .

Observación 2.59. Nótese que todo complejo simplicial puede ser ordenado simplemente seleccionando un orden total en su conjunto de vértices. En general, denotaremos la relación de orden por $A \leq B$.

Definición 2.60. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales ordenados. Definimos un orden parcial en el conjunto de vértices de $K_1 \Delta K_2$ de la siguiente manera:

$$(A, B) \leq (A', B') \iff A \leq A' \quad y \quad B \leq B'.$$

Se definirá entonces el *producto cartesiano* $K_1 \times K_2$ como el complejo simplicial cuyos símplices serán aquellos de $K_1 \Delta K_2$ que estén totalmente ordenados por esta relación.

Finalmente, con esta definición del producto, sí que se cumple la condición de homeomorfía que comentamos al comienzo de la sección.

Proposición 2.61. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales ordenados. Entonces

$$\|K_1 \times K_2\| \approx \|K_1\| \times \|K_2\|.$$

Observación 2.62. Nótese que los complejos simpliciales ordenados han sido necesarios para esta definición del producto. Sin embargo, no requeriremos que las aplicaciones simpliciales conserven los órdenes dados.

Observación 2.63. En el libro de Kozlov [11] se define otro producto de complejos, denotado por $K_1 \amalg K_2$, que en esencia es el mismo que $K_1 \Delta K_2$. La realización de este producto no es homeomorfa al producto de las realizaciones de los factores. No obstante, sigue teniendo

cierto interés. Resulta que es el producto categórico en la categoría de los complejos simpliciales abstractos. Esto significa que cumple la siguiente propiedad universal. Dados cualquier complejo K y un par de aplicaciones simpliciales $\varphi_1: K \rightarrow K_1$, $\varphi_2: K \rightarrow K_2$, existe una única aplicación simplicial $\varphi: K \rightarrow K_1 \amalg K_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 K & & \\
 \swarrow \varphi & \xrightarrow{\varphi_2} & \\
 K_1 \amalg K_2 & \xrightarrow{\pi_2} & K_2 \\
 \downarrow \pi_1 & & \\
 K_1 & &
 \end{array}$$

φ_1 (arrow from K to $K_1 \amalg K_2$)
 φ_2 (arrow from K to K_2)
 π_1 (arrow from $K_1 \amalg K_2$ to K_1)
 π_2 (arrow from $K_1 \amalg K_2$ to K_2)

Esta propiedad puede ser interesante en algunos contextos, pero en nuestro caso daremos prioridad a la condición de homeomorfía que nos garantiza $K_1 \times K_2$, puesto que la requerimos para poder definir apropiadamente el concepto de complejidad simplicial.

Capítulo 3

Complejidad simplicial

3.1. Definición de $\text{SC}(K)$

En este capítulo seguiremos esencialmente la exposición del artículo de Jesús González [9]. Así, llevaremos a cabo el objetivo principal de este trabajo: trasladar el concepto de complejidad topológica al contexto simplicial. El Lema 1.17 nos permite reducir el problema seccional a un problema homotópico. Gracias a esto, podemos hacer uso del Teorema 2.53 para proponer un concepto análogo a $\text{TC}(X)$ descrito en términos de contigüidad de aplicaciones simpliciales. Conviene recordar que trabajamos con complejos simpliciales finitos.

Comenzaremos definiendo unas “proyecciones” π_i que serán necesarias para la definición de la complejidad simplicial. Dado un entero $b \geq 0$, consideremos la subdivisión baricéntrica iterada $\text{Sd}^b(K \times K)$. Como ya sabemos, $\text{Sd}^{b+1}(K \times K)$ es una subdivisión de tal complejo. De este modo, tal y como se explica en el Ejemplo 2.46, podemos considerar una aproximación del homomorfismo lineal $\|\text{Sd}^{b+1}(K \times K)\| \xrightarrow{\cong} \|\text{Sd}^b(K \times K)\|$:

$$\iota: \text{Sd}^{b+1}(K \times K) \rightarrow \text{Sd}^b(K \times K). \quad (3.1)$$

A partir de ahora, para adaptarnos a la terminología de [9], nos referiremos a estas aplicaciones ι como *aproximaciones de la identidad* en $\|K\| \times \|K\| \equiv \|K \times K\|$ (nótese que los identificamos por medio del homeomorfismo garantizado por la Proposición 2.61). Podemos justificar este término debido a que $\|\text{Sd}^b(K \times K)\| \approx \|K \times K\|$ para todo $b \geq 0$ (tan solo hay que componer varios homeomorfismos lineales).

Haciendo un abuso de notación, denotaremos a las composiciones iteradas de estas aplicaciones de la siguiente manera:

$$\iota: \text{Sd}^b(K \times K) \rightarrow \text{Sd}^{b'}(K \times K).$$

Observación 3.1. La Observación 2.47 garantiza que cualquiera de estas ι es una aproximación simplicial del homeomorfismo entre $\|\mathrm{Sd}^b(K \times K)\|$ y $\|\mathrm{Sd}^{b'}(K \times K)\|$ dado por la composición de los homeomorfismos lineales correspondientes.

Finalmente, denotamos por

$$\pi_i: \mathrm{Sd}^b(K \times K) \rightarrow K, \quad i \in \{1, 2\}$$

a la composición de $\iota: \mathrm{Sd}^b(K \times K) \rightarrow \mathrm{Sd}^0(K \times K) = K \times K$ con la i -ésima proyección $K \times K \rightarrow K$.

Observación 3.2. Las aplicaciones π_i son simpliciales por ser composición de aplicaciones simpliciales.

Observación 3.3. Cuando pueda haber lugar a confusión escribiremos π_i^b , para aclarar cuál es el dominio de la proyección.

Ya tenemos los ingredientes necesarios para dar la primera definición que nos acercará al concepto que buscamos.

Definición 3.4. Dados dos enteros $b, c \geq 0$, la (b, c) -*complejidad simplicial* $\mathbf{SC}_c^b(K)$ de un complejo (ordenado) K es una unidad menos que la menor cardinalidad de los recubrimientos de $\mathrm{Sd}^b(K \times K)$ por subcomplejos J para los cuales las composiciones

$$J \hookrightarrow \mathrm{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\pi_1} K \quad \text{y} \quad J \hookrightarrow \mathrm{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\pi_2} K$$

son c -contiguas. Cuando no existan tales recubrimientos, establecemos $\mathbf{SC}_c^b(K) = \infty$.

Como analogía al contexto general de la complejidad topológica, los complejos J que aparecen en la definición se llamarán *dominios locales lineales a trozos*, las cadenas de contigüidad que conectan las dos aplicaciones se llamarán *reglas locales lineales a trozos*, y una colección de dominios locales lineales a trozos que recubren K junto a sus correspondientes reglas locales lineales a trozos se llamará *planificador de movimientos lineal a trozos*. el término “lineal a trozos” hace referencia al hecho de que las aplicaciones simpliciales 1-contiguas son homótopas a través de una homotopía lineal a trozos.

Observación 3.5. La ordenación de K tan solo se usa para la construcción de la estructura simplicial de $K \times K$. No afecta al valor de $\mathbf{SC}_c^b(K)$.

Si dos aplicaciones simpliciales son c -contiguas, está claro que también serán $(c+1)$ -contiguas. Para justificarlo, como una aplicación simplicial es trivialmente 1-contigua consigo misma, tan solo habría que repetir uno de los miembros de la cadena de contigüidad. Así, teniendo en cuenta la definición de $\mathbf{SC}_c^b(K)$, está claro que $\mathbf{SC}_c^b(K) \geq \mathbf{SC}_{c+1}^b(K)$ para todo entero $c \geq 0$. De este modo, podemos considerar la siguiente sucesión monótona decreciente:

$$\mathbf{SC}_0^b(K) \geq \mathbf{SC}_1^b(K) \geq \mathbf{SC}_2^b(K) \geq \dots \geq 0.$$

La definición de $\mathbf{SC}_c^b(K)$ garantiza que la sucesión está acotada inferiormente por 0. Esto, junto a la monotonía, implica que ha de tener límite. Entonces, como todos los valores son enteros, se tiene que la sucesión será eventualmente constante. Denotaremos por $\mathbf{SC}^b(K)$ al valor estable correspondiente.

Nótese que, en principio, los valores de $\mathbf{SC}_c^b(K)$ dependen de las aproximaciones de la identidad escogidas. Sin embargo, gracias al Teorema 2.53, probaremos a continuación que esto no sucede para el valor $\mathbf{SC}^b(K)$.

Lema 3.6. *El valor estable $\mathbf{SC}^b(K)$ es independiente de las aproximaciones de la identidad escogidas en 3.1.*

Demostración. Sea $\overline{\mathbf{SC}}_c^b(K)$ la (b, c) -complejidad simplicial asociada a un nuevo conjunto de aproximaciones de la identidad $\bar{\iota}: \text{Sd}^{b+1}(K \times K) \rightarrow \text{Sd}^b(K \times K)$. Denotaremos por $\bar{\pi}_i$ a las correspondientes proyecciones.

Debido a lo que explicamos en la Observación 3.1, ι y $\bar{\iota}$ son aproximaciones simpliciales del mismo homeomorfismo. Así, el Teorema 2.53 garantiza que son 1-contiguas. Ahora, como π_i y $\bar{\pi}_i$ resultan de la composición de estas aplicaciones con la correspondiente proyección $K \times K \rightarrow K$, la Proposición 2.51 nos implica que π_i y $\bar{\pi}_i$ son 1-contiguas. Si además consideramos la inclusión $j: J \hookrightarrow \text{Sd}^b(K \times K)$ de un subcomplejo J , esta misma proposición implica que $\pi_i \circ j$ y $\bar{\pi}_i \circ j$ son 1-contiguas.

Consideremos una cadena de contigüidad $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_c: J \rightarrow K$ de longitud c entre $\varphi_0 = \pi_1 \circ j$ y $\varphi_c = \pi_2 \circ j$. Entonces, se tendrá que $\bar{\pi}_1 \circ j, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_c, \bar{\pi}_2 \circ j$ es una cadena de contigüidad de longitud $c + 2$ entre $\bar{\pi}_1 \circ j$ y $\bar{\pi}_2 \circ j$. En consecuencia, $\mathbf{SC}_c^b(K) \geq \overline{\mathbf{SC}}_{c+2}^b(K)$. De manera análoga se prueba que $\overline{\mathbf{SC}}_c^b(K) \geq \mathbf{SC}_{c+2}^b(K)$. Como las sucesiones se estabilizan, se tiene que, a partir de un cierto c ,

$$\mathbf{SC}_c^b(K) = \mathbf{SC}_{c+2}^b(K) = \mathbf{SC}^b(K) \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{SC}}_c^b(K) = \overline{\mathbf{SC}}_{c+2}^b(K) = \overline{\mathbf{SC}}^b(K).$$

Combinando esto con las desigualdades anteriores obtenemos finalmente la igualdad

$$\mathbf{SC}^b(K) = \overline{\mathbf{SC}}^b(K). \quad \square$$

A continuación, realizaremos un argumento similar para justificar la siguiente cadena de desigualdades:

$$\mathbf{SC}^0(K) \geq \mathbf{SC}^1(K) \geq \mathbf{SC}^2(K) \geq \dots \geq 0. \quad (3.2)$$

En el contexto de la Definición 3.4, sea $\lambda_J: \text{Sd}(J) \rightarrow J$ una aproximación de la identidad. Recordemos que con esto nos referimos a una aproximación del correspondiente homeomorfismo lineal; que en este caso es una restricción a $\|\text{Sd}(J)\|$ del homeomorfismo lineal entre las realizaciones $\|\text{Sd}^{b+1}(K \times K)\|$ y $\|\text{Sd}^b(K \times K)\|$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
J & \xleftarrow{j} & \text{Sd}^b(K \times K) \\
\lambda_J \uparrow & & \uparrow \iota \\
\text{Sd}(J) & \xleftarrow{h} & \text{Sd}^{b+1}(K \times K)
\end{array}$$

La única aplicación que no hemos definido explícitamente aún es la que hemos denotado por h . Esta se trata simplemente de una inclusión. Al ser J un subcomplejo de $\text{Sd}^b(K \times K)$, por construcción las respectivas subdivisiones baricéntricas verifican la misma relación. La inclusión correspondiente es esta aplicación h .

No lo habíamos comentado hasta ahora, pero dado un subcomplejo L de un complejo cualquiera K , la realización geométrica de la inclusión $L \hookrightarrow K$ será siempre la inclusión $\|L\| \hookrightarrow \|K\|$ entre las realizaciones geométricas. El Ejemplo 2.45 garantiza entonces que $L \hookrightarrow K$ es una aproximación de $\|L\| \hookrightarrow \|K\|$. De esta manera, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\|J\| & \xleftarrow{\|j\|} & \|\text{Sd}^b(K \times K)\| \\
\|\uparrow & & \uparrow\| \\
\|\text{Sd}(J)\| & \xleftarrow{\|h\|} & \|\text{Sd}^{b+1}(K \times K)\|
\end{array}$$

Aplicando la Observación 2.47 junto a esta conmutatividad, se obtiene que las dos composiciones del diagrama simplicial, $j \circ \lambda_J$ y $\iota \circ h$, son aproximaciones de la misma aplicación. De este modo, el Teorema 2.53 garantiza que son 1-contiguas.

Ahora, razonando de modo similar a la demostración anterior, supongamos que $\pi_1 \circ j \sim_c \pi_2 \circ j$. La Proposición 2.51 garantiza que $\pi_1 \circ j \circ \lambda_J \sim_c \pi_2 \circ j \circ \lambda_J$. Por otra parte, como $j \circ \lambda_J \sim_1 \iota \circ h$, haciendo uso de la misma observación, se tiene que $\pi_1 \circ j \circ \lambda_J \sim_1 \pi_1 \circ \iota \circ h$ y también $\pi_2 \circ j \circ \lambda_J \sim_1 \pi_2 \circ \iota \circ h$. Combinando todo lo anterior se obtiene la siguiente cadena de contigüidad. Escribimos las proyecciones con los superíndices (Observación 3.3) para aclarar el argumento:

$$\pi_1^{b+1} \circ h = \pi_1^b \circ \iota \circ h \sim_1 \pi_1^b \circ j \circ \lambda_J \sim_c \pi_2^b \circ j \circ \lambda_J \sim_1 \pi_2^b \circ \iota \circ h = \pi_2^{b+1} \circ h.$$

Hemos deducido entonces que $\pi_1^{b+1} \circ h \sim_{c+2} \pi_2^{b+1} \circ h$. La aplicación h era precisamente la inclusión del subcomplejo $\text{Sd}(J)$ en $\text{Sd}^{b+1}(K \times K)$. Como los subcomplejos J recubren $\text{Sd}^b(K \times K)$, está claro que los subcomplejos $\text{Sd}(J)$ van a recubrir $\text{Sd}^{b+1}(K \times K)$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{SC}_c^b(K) \geq \mathbf{SC}_{c+2}^{b+1}(K)$, de donde se deduce inmediatamente 3.2.

Después de todas estas consideraciones, podemos definir finalmente el concepto central de este trabajo.

Definición 3.7. La *complejidad simplicial* $\mathbf{SC}(K)$ de un complejo K es el valor estable de la sucesión monótona 3.2.

Observación 3.8. Nótese que $\mathbf{SC}(K)$ es independiente de cualquier aproximación de la identidad por serlo $\mathbf{SC}^b(K)$ para todo $b \geq 0$.

Para llegar a la definición de $\mathbf{SC}(K)$, se han requerido unos ciertos parámetros b y c que no carecen de significado. Juegan un cierto rol en la medición del problema simplicial de planificación del movimiento. El parámetro b nos da una noción de “complejidad” en el siguiente sentido. Cuanto más retorcida sea una determinada regla local, más grande tendrá que ser el valor de b para aproximar esta regla por una que sea lineal a trozos. Por otra parte, el parámetro c conlleva una noción de “distancia”, puesto que cuenta el número de segmentos lineales a trozos necesarios para obtener un planificador del movimiento combinatoriamente. Estas consideraciones serán ilustradas por los resultados computacionales de la Sección 3.4.

3.2. Relación con $\mathbf{TC}(\|K\|)$

En esta sección presentaremos el resultado central del trabajo: la relación entre la complejidad simplicial de un complejo con la complejidad topológica de su realización. En concreto, tendremos una igualdad entre estos dos conceptos. Esto nos permitirá trasladar las buenas propiedades de la complejidad topológica al contexto simplicial.

Para comenzar, se tiene la siguiente relación entre la (b, c) -complejidad simplicial y la complejidad topológica:

Proposición 3.9. *Sea K un complejo simplicial finito y $b, c \geq 0$ dos enteros. Se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\mathbf{SC}_c^b(K) \geq \mathbf{TC}(\|K\|).$$

Demostración. Consideremos un recubrimiento de $\mathbf{Sd}^b(K \times K)$ por k subcomplejos J , de tal forma que las aplicaciones

$$J \hookrightarrow \mathbf{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\pi_1} K \quad \text{y} \quad J \hookrightarrow \mathbf{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\pi_2} K$$

sean c -contiguas. En consecuencia, gracias al Teorema 2.53 (punto 3), las siguientes aplicaciones son homótopas:

$$\|J\| \hookrightarrow \|K\| \times \|K\| \xrightarrow{\pi_1} \|K\|, \quad \|J\| \hookrightarrow \|K\| \times \|K\| \xrightarrow{\pi_2} \|K\|.$$

Los subespacios $\|J\|$ son localmente cerrados por ser cerrados. Así, como $\|K\|$ es un ENR (ver Observación 2.26), podemos combinar el Lema 1.17 con la Proposición 1.27 y la Observación 1.28, para concluir que $k \geq \mathbf{TC}(\|K\|)$. \square

Como la desigualdad es cierta para cualesquiera valores de b y c , claramente

$$\mathbf{SC}(K) \geq \mathbf{TC}(\|K\|).$$

Probaremos finalmente que la relación entre estas dos cantidades es, de hecho, una igualdad.

Teorema 3.10. *Para cualquier complejo finito K se tiene la igualdad*

$$\mathbf{SC}(K) = \mathbf{TC}(\|K\|).$$

Demostración. Veamos que es cierta la desigualdad que falta. Consideremos $\mathbf{TC}(\|K\|) = k$. De este modo, podemos escoger un planificador de movimientos

$$\{(U_0, \sigma_0), (U_1, \sigma_1), \dots, (U_k, \sigma_k)\}$$

en $\|K\|$ con $k + 1$ dominios locales. Nótese que los U_i recubren $\|K\| \times \|K\|$. Tomamos ahora un entero positivo b suficientemente grande de manera que la realización de cualquier símplice de $\text{Sd}^b(K \times K)$ esté contenida en alguno de los U_j ($0 \leq j \leq k$). Consideraremos, para cada $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, el siguiente subcomplejo de $\text{Sd}^b(K \times K)$:

$$L_j := \{\sigma \in \text{Sd}^b(K \times K) : \|\sigma\| \subset U_j\}.$$

Como todo $\|\sigma\|$ está contenido en algún U_j , está claro que

$$\text{Sd}^b(K \times K) = \bigcup_{j \in \{0, \dots, k\}} L_j,$$

es decir, se cumple que los L_j recubren $\text{Sd}^b(K \times K)$.

Por otra parte, las proyecciones $\pi_1, \pi_2: \|K\| \times \|K\| \rightarrow \|K\|$ son homótopas en cada U_j gracias al Lema 1.17. En consecuencia, también lo serán en cada $\|L_j\| = \bigcup_{\sigma \in L_j} \|\sigma\| \subset U_j$. De este modo, haciendo uso del Teorema 2.53, existirán b' y c enteros positivos tales que, para cada $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, las composiciones

$$\text{Sd}^{b'}(L_j) \hookrightarrow \text{Sd}^{b+b'}(K \times K) \xrightarrow{\pi_1} K \quad \text{y} \quad \text{Sd}^{b'}(L_j) \hookrightarrow \text{Sd}^{b+b'}(K \times K) \xrightarrow{\pi_2} K$$

son c -contiguas. Nótese que, como los L_j recubrían $\text{Sd}^b(K \times K)$, se tiene que los $\text{Sd}^{b'}(L_j)$ recubren $\text{Sd}^{b'}(\text{Sd}^b(K \times K)) = \text{Sd}^{b+b'}(K \times K)$. De este modo, obtenemos que $\mathbf{SC}_c^{b+b'}(K) \leq k$. El siguiente razonamiento garantiza la desigualdad que nos faltaba por probar:

$$\mathbf{TC}(\|K\|) = k \geq \mathbf{SC}_c^{b+b'}(K) \geq \mathbf{SC}^{b+b'}(K) \geq \mathbf{SC}(K). \quad \square$$

El teorema que acabamos de demostrar nos permite extrapolar las propiedades de la complejidad topológica al contexto simplicial. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.11. La combinación del Teorema 3.10 con el Teorema 1.14 da lugar al hecho de que dos complejos con realizaciones homotópicamente equivalentes tienen la misma complejidad simplicial. De manera análoga, el Teorema 1.9 garantiza que un complejo K tiene $\mathbf{SC}(K) = 0$ si y solo si $\|K\|$ es contráctil. Por último, podemos aplicar el Corolario 4.51 de [5] para razonar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{SC}(K_1 \times \cdots \times K_n) &= \mathbf{TC}(\|K_1 \times \cdots \times K_n\|) = \mathbf{TC}(\|K_1\| \times \cdots \times \|K_n\|) \\ &\leq \mathbf{TC}(\|K_1\|) + \cdots + \mathbf{TC}(\|K_n\|) = \mathbf{SC}(K_1) + \cdots + \mathbf{SC}(K_n). \end{aligned}$$

3.3. Subdivisiones no necesariamente baricéntricas

Si el espacio de configuración de un robot puede modelarse a través de una estructura de complejo simplicial, el Teorema 3.10 garantiza que es posible construir planificadores óptimos con reglas locales lineales a trozos. La importancia de esto radica en que, de este modo, se abre la posibilidad de que un ordenador sea capaz de ayudar en la búsqueda de dichos planificadores. Sin embargo, se tiene que el espacio de búsqueda en cuestión crece exponencialmente con cada subdivisión, de manera que una búsqueda exhaustiva resulta inviable.

Con el objetivo de suavizar el problema de complejidad que acabamos de comentar, describiremos a continuación una forma de mejorar el rendimiento basada en la consideración de subdivisiones no necesariamente baricéntricas. En la siguiente sección usaremos esta técnica para simplificar el cálculo de $\mathbf{SC}_c^b(K)$ para valores pequeños de b y c .

Sea entonces K un complejo simplicial. Consideremos S una subdivisión de $K \times K$ tal que $\text{Sd}^b(K \times K)$ sea a su vez una subdivisión de S . Fijemos las aproximaciones

$$\text{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\iota''} S \quad \text{y} \quad S \xrightarrow{\iota'} K \times K$$

de la identidad en $\|K \times K\|$ y denotemos por $\iota: \text{Sd}^b(K \times K) \rightarrow K \times K$ a la aproximación composición $\iota'\iota''$. Si S admite un recubrimiento \mathcal{C} formado por $k + 1$ subcomplejos J para los cuales las dos composiciones ($j = 1, 2$) de la fila superior del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} J & \hookrightarrow & S & \xrightarrow{\iota'} & K \times K & \xrightarrow{\pi_j} & K \\ \iota'' \uparrow & & \iota'' \uparrow & \nearrow \iota & & & \\ (\iota'')^{-1}(J) & \hookrightarrow & \text{Sd}^b(K \times K) & & & & \end{array}$$

son c -contiguas, entonces las composiciones de la fila inferior también lo son. Justificaremos este hecho razonando a través de varios diagramas intermedios. Partimos de que las composiciones

$$J \hookrightarrow S \xrightarrow{\iota'} K \times K \xrightarrow{\pi_j} K$$

son c -contiguas. La Proposición 2.51 nos garantiza que podemos añadir al comienzo la aplicación ι'' , de modo que las composiciones resultantes siguen siendo c -contiguas:

$$\begin{array}{ccccccc} J & \hookrightarrow & S & \xrightarrow{\iota'} & K \times K & \xrightarrow{\pi_j} & K \\ \iota'' \uparrow & & & & & & \\ (\iota'')^{-1}(J) & & & & & & \end{array}$$

Ahora utilizamos la conmutatividad inmediata del siguiente subdiagrama

$$\begin{array}{ccc} J & \hookrightarrow & S \\ \iota'' \uparrow & & \iota'' \uparrow \\ (\iota'')^{-1}(J) & \hookrightarrow & \text{Sd}^b(K \times K) \end{array}$$

para concluir la c -contigüidad de las composiciones

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota'} & K \times K \xrightarrow{\pi_j} K \\ \iota'' \uparrow & & \\ (\iota'')^{-1}(J) & \hookrightarrow & \text{Sd}^b(K \times K) \end{array}$$

Como $\iota = \iota' \iota''$, tenemos finalmente que las composiciones de la fila inferior son c -contiguas:

$$(\iota'')^{-1}(J) \hookrightarrow \text{Sd}^b(K \times K) \xrightarrow{\iota} K \times K \xrightarrow{\pi_j} K.$$

Ahora detallaremos, a través de las siguientes igualdades, por qué los $k+1$ subcomplejos $(\iota'')^{-1}(J)$ recubren $\text{Sd}^b(K \times K)$:

$$\bigcup_{J \in \mathcal{C}} (\iota'')^{-1}(J) = (\iota'')^{-1}\left(\bigcup_{J \in \mathcal{C}} J\right) = (\iota'')^{-1}(S) = \text{Sd}^b(K \times K).$$

De este modo, queda probado finalmente que $\mathbf{SC}_c^b(K) \leq k$, y será este hecho lo que tendrá utilidad práctica en el siguiente capítulo.

3.4. Un ejemplo: la circunferencia \mathbb{S}^1

En esta sección utilizaremos como espacio la circunferencia \mathbb{S}^1 , para ejemplificar los conceptos que hemos desarrollado en el capítulo anterior, tal y como hace Jesús González en [9]. Para ello consideraremos el complejo K correspondiente al esqueleto 1-dimensional del símplice Δ^2 . De este modo, $\|K\| \approx \mathbb{S}^1$. El procedimiento que haremos a continuación puede verse, al fin y al

cabo, como una forma “computacional” de calcular $\mathbf{TC}(\mathbb{S}^1)$. Como $\|K\|$ no es contráctil, se tiene que $\mathbf{SC}(K) > 0$. Nuestro objetivo concreto será probar que

$$\mathbf{SC}_c^b(K) \leq 1,$$

para cierta selección de aproximaciones de la identidad, siempre que $b \geq 1$ y $c \geq 5$. En consecuencia, se tendrá que $\mathbf{SC}(K) = 1$. En particular, esto quiere decir que la sucesión monótona 3.2 se estabiliza ya en el segundo término.

Denotemos a los vértices de K por $0, 1$ y 2 (ordenados de esta manera). En la Figura 3.1 (extraída de [9], al igual que el resto de figuras de la sección) se muestra la realización del producto $K \times K$. Al observarla, hay que tener en cuenta que los bordes del cuadrado están identificados, tal y como sucede en la representación habitual del toro en topología.

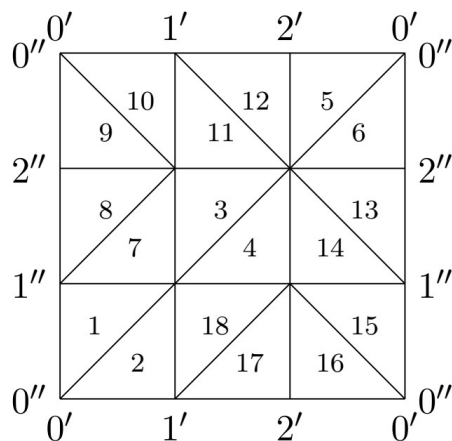


Figura 3.1: Representación de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

La numeración de los 18 2-símplices que se puede apreciar en la figura, se usará para definir ciertos subcomplejos J_i de $K \times K$ ($i = 1, 2, 3$). En concreto, J_i estará formado por los 2-símplices desde el $6i - 5$ hasta $6i$. Con esta disposición, resulta que $\|J_2\|$ y $\|J_3\|$ son contráctiles, mientras que $\|J_1\|$ es un retracto por deformación de la diagonal del espacio $\|K \times K\| \equiv \|K\| \times \|K\|$.

Observación 3.12. Para continuar con el razonamiento, necesitamos un pequeño resultado topológico. Sean dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ y un retracto por deformación $A \subset X$. Es decir, existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq id_X$, donde i es la inclusión. Supongamos que $f|_A \simeq g|_A$. Entonces, el siguiente razonamiento garantiza que $f \simeq g$:

$$f|_A \simeq g|_A \iff f \circ i \simeq g \circ i \implies f = f \circ id_X \simeq f \circ i \circ r \simeq g \circ i \circ r \simeq g \circ id_X = g.$$

Tras esta observación podemos volver al razonamiento anterior, observando que tanto en la diagonal como en los conjuntos de un solo punto $(a, b) \in K \times K$, la aplicación evaluación admite

secciones continuas muy sencillas. En el primer caso solo hay que considerar caminos constantes, y en el segundo hay que considerar un camino cualquiera que una a y b . Todo esto, junto a la Observación 3.12 y a que $\{J_1, J_2, J_3\}$ recubre $K \times K$, sirve para concluir que $\mathbf{TC}(\|K\|) \leq 2$. En consecuencia $\mathbf{SC}_c^b(K) \leq 2$ para valores de b y c suficientemente grandes. En realidad, esta desigualdad se cumple también para valores bastante pequeños, como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 3.13. $\mathbf{SC}_3^0(K) \leq 2$.

Demostración. Consideremos las proyecciones $\pi_j : K \times K \rightarrow K$ ($j = 1, 2$). Examinando directamente el dibujo (Figura 3.1), se puede comprobar que sus respectivas restricciones a J_1 son 1-contiguas. Consideremos las aplicaciones φ_i que llevan cada vértice de J_2 al vértice i de K . Se tendrá entonces la siguiente cadena de contigüidad:

$$\pi_1|_{J_2} = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = \pi_2|_{J_2}.$$

El caso de J_3 es completamente análogo al de J_2 . □

Enunciemos también la desigualdad que hemos puesto como objetivo.

Proposición 3.14. *Existe una aproximación de la identidad para la cual $\mathbf{SC}_5^1 \leq 1$.*

Tal y como hemos hecho con la desigualdad anterior, antes de probar esta nueva proposición daremos una explicación teórica que nos servirá además para introducir notación auxiliar. Comenzaremos llevando a cabo una subdivisión baricéntrica de $K \times K$, como se muestra en la Figura 3.2. Nótese que solo se ha dibujado la subdivisión en los “cuadrados” cuya diagonal tiene pendiente negativa (aunque el resto también están subdivididos), con el objetivo de facilitar la comprensión de los siguientes razonamientos.

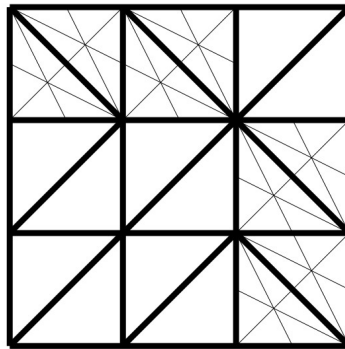


Figura 3.2: Subdivisión baricéntrica.

Consideraremos ahora dos subcomplejos de $\text{Sd}(K \times K)$. El primero de ellos, que denotaremos J_+ , será aquel cuya realización geométrica viene dada por el área sombreada de la Figura 3.3. Denotaremos por J_- al subcomplejo dado precisamente por las franjas no sombreadas.

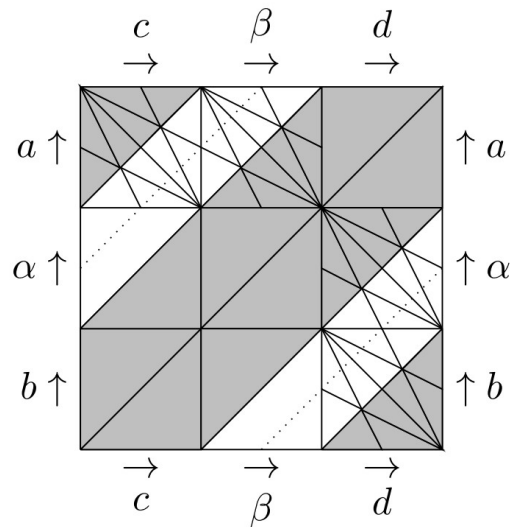


Figura 3.3: Subcomplejos J_+ y J_- .

Nótese que las franjas que determinan el espacio $\|J_-\|$ pueden “pegarse” por el borde etiquetado por \vec{a} , obteniendo así el resultado que se muestra en la Figura 3.4. Si se identifican también los bordes $\vec{\beta}$, se obtiene finalmente un cilindro. Se puede retraer a su línea discontinua central, que se corresponde con la anti-diagonal $\Delta_- = \{(x, -x)\}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (las dos líneas discontinuas de la Figura 3.3).

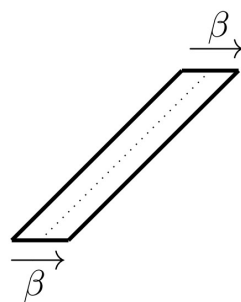


Figura 3.4: Realización de $\|J_-\|$.

Para $\|J_+\|$ se puede hacer un razonamiento similar. En primer lugar se pegan los dos triángulos sombreados a la parte sombreada central (por los bordes \vec{a} y \vec{b} respectivamente). Así, se obtiene como resultado el mostrado en la Figura 3.5, que también se convierte en un cilindro de la misma manera. En este caso, también se puede retraer a su línea central, que se corresponde

con la diagonal $\Delta_+ = \{(x, x)\}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

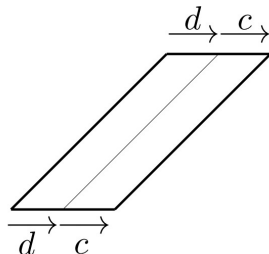
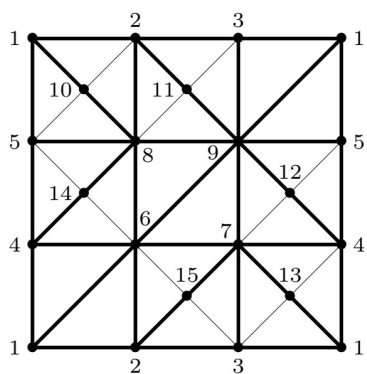


Figura 3.5: Realización de $\|J_+\|$.

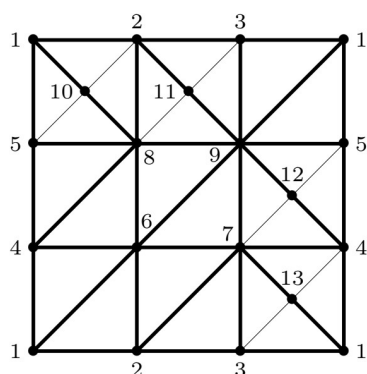
Ya razonamos antes que una sección de la evaluación sobre la diagonal Δ_+ se puede construir de manera inmediata. En Δ_- se hará de la siguiente manera. Fijamos una orientación de la circunferencia y, dados dos puntos antipodales, el camino entre ellos será el único posible a velocidad constante en el sentido marcado por la orientación. En el Ejemplo 1.16 se ha trabajado con una construcción muy similar.

A raíz de lo razonado en el párrafo anterior, se obtiene que $\mathbf{SC}(K) \leq 1$, es decir, $\mathbf{SC}_c^b(K) \leq 1$ para valores de b y c suficientemente grandes. La Proposición 3.14 es todavía más específica. La probamos a continuación. Nótese que la demostración es independiente de nuestro conocimiento de las secciones sobre las diagonales. De hecho, los argumentos consisten en determinar de forma explícita las cadenas de contigüidad necesarias.

Demostración. Los argumentos de la Sección 3.3 nos permiten sustituir $\text{Sd}(K \times K)$ por una subdivisión intermedia entre esta y $K \times K$. De hecho, trabajaremos con dos subdivisiones S' y S'' de $K \times K$ para simplificar los cálculos.



(a) Subdivisión S'' .



(b) Subdivisión S' .

En la Figura 3.6b se muestra la realización de la subdivisión S' . Consiste en subdividir de

manera no baricéntrica los cuatro cuadrados cuya diagonal tiene pendiente negativa. Por otra parte, en la Figura 3.6a se muestra la realización de S'' . Esta se ha obtenido subdividiendo también los dos cuadrados restantes que no son atravesados por la diagonal. Claramente, S'' es una subdivisión de S' y $\text{Sd}(K \times K)$ es una subdivisión de S'' .

Consideremos aproximaciones de la identidad $\iota'' : S'' \rightarrow S'$ y $\iota' : S' \rightarrow K \times K$ (ver el comienzo de este capítulo, y el Ejemplo 2.46). Estas aplicaciones están obligadas a comportarse como la identidad en los vértices que son comunes a su dominio y codominio. En los demás vértices, determinaremos:

$$\iota'(10) = \iota'(13) = 1, \quad \iota'(11) = \iota'(12) = 9, \quad \iota''(14) = 8, \quad \iota''(15) = 7.$$

Para terminar, consideramos los subcomplejos J'_+ y J'_- de S' cuyas realizaciones vienen dadas nuevamente por la sombra de la Figura 3.3. De forma análoga, se consideran $J''_+, J''_- \subset S''$. Nótese que $J''_{\pm} = (\iota'')^{-1}(J'_{\pm})$.

Volvemos al argumento de la Sección 3.3, concretamente con $S = S'$, $J = J'_+$ y $b = 1$. Las composiciones de la fila superior del diagrama son $\varphi_0 = (\pi_1 \iota')|_{J'_+}$ y $\varphi_1 = (\pi_2 \iota')|_{J'_+}$. En la Figura 3.7 se muestra una cadena de contigüidad de longitud 2 entre estas aplicaciones. Gracias a lo razonado en dicha sección, esto garantiza también una cadena de contigüidad de longitud 2 definida en J''_+ .

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$(\pi_1 \iota') _{J'_+} = \varphi_0$		0	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	2	0
φ_1		0	1	2	1	0	1	1	1	2	0	2	2	0
$(\pi_2 \iota') _{J'_+} = \varphi_2$		0	0	0	1	2	1	1	2	2	0	2	2	0

Figura 3.7: Cadena de contigüidad de longitud 2 para J'_+ .

Para el caso de $\|J_-\|$, trabajamos directamente con la subdivisión S'' . Ahora $S = S''$, $J = J''_-$ y $b = 1$. En la Figura 3.8 se muestra una cadena de contigüidad de longitud 5 entre $\varphi_0 = (\pi_1 \iota' \iota'')|_{J''_-}$ y $\varphi_1 = (\pi_2 \iota' \iota'')|_{J''_-}$

□

Finalizamos esta sección, y el trabajo, exponiendo varias reflexiones que hace Jesús González en [9]. Resulta que la desigualdad $\mathbf{SC}_c^b(K) \leq 1$ se trabajó mediante experimentación computacional semi-automatizada guiada por la intuición geométrica del autor. De ahí se obtuvo la demostración combinatoria que acabamos de presentar. Cabe destacar que puede ser verificada sin ninguna preconcepción geométrica. La intención de Jesús González con los resultados de esta

		–	2	3	4	5	–	7	8	–	10	11	12	13	14	15
$(\pi_1 \iota' \iota'') J'' = \varphi_0$	–	1	2	0	0	–	2	1	–	0	2	2	0	1	2	
φ_1	–	1	2	0	0	–	2	1	–	1	1	0	2	0	2	
φ_2	–	1	1	2	0	–	2	0	–	0	1	2	2	0	1	
φ_3	–	0	1	2	2	–	1	0	–	0	0	2	1	2	1	
φ_4	–	0	0	1	2	–	1	2	–	2	0	1	1	2	0	
$(\pi_2 \iota' \iota'') J'' = \varphi_5$	–	0	0	1	2	–	1	2	–	0	2	2	0	2	1	

Figura 3.8: Cadena de contigüidad de longitud 5 para J'' .

sección consiste en motivar el desarrollo de implementaciones completamente automatizadas que busquen planificadores de movimientos óptimos en cualquier poliedro.

Claramente, la intuición geométrica ha ayudado mucho en las demostraciones, tanto para escoger las subdivisiones intermedias y los subcomplejos, como para guiar la búsqueda de las cadenas de contigüidad mostradas en las Figuras 3.7 y 3.8. Una búsqueda exhaustiva de la cadena de contigüidad de la Figura 3.8 tendría que considerar un espacio de búsqueda de 3^{72} instancias, lo cual sería inviable con la tecnología actual. Jesús González sugiere que una autimatización completa podría sustituir la intuición humana por medio de componentes heurísticos como pueden ser algunos métodos estocásticos o técnicas de aprendizaje automático. De este modo, podría obtenerse una búsqueda automática inteligente.

En el artículo [13], Jesús González junto a otros autores como Carlos Ortiz proporciona una continuación de [9]. En ella se propone finalmente un algoritmo explícito que toma como entrada un poliedro, considerado como el espacio de configuración de un sistema mecánico, y devuelve un planificador de movimientos lineal a trozos.

Bibliografía

- [1] Seth Aaronson and Nicholas A. Scoville. Lusternik-Schnirelmann category for simplicial complexes. *Ill. J. Math.*, 57(3):743–753, 2013.
- [2] A. Dold. *Lectures on algebraic topology*, volume 200 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, Cham, 1972.
- [3] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*, volume 15 of *Princeton Math. Ser.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952.
- [4] Michael Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.*, 29(2):211–221, 2003.
- [5] Michael Farber. *Invitation to topological robotics*. Zur. Lect. Adv. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008.
- [6] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, and J. A. Vilches. Discrete topological complexity. *Proc. Am. Math. Soc.*, 146(10):4535–4548, 2018.
- [7] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, and J. A. Vilches. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.*, 194:37–50, 2015.
- [8] Desamparados Fernández-Ternero, Enrique Macías-Virgós, Erica Minuz, and José Antonio Vilches. Simplicial Lusternik-Schnirelmann category. *Publ. Mat., Barc.*, 63(1):265–293, 2019.
- [9] Jesús González. Simplicial complexity: piecewise linear motion planning in robotics. *New York J. Math.*, 24:279–292, 2018.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [11] Dimitry Kozlov. *Combinatorial algebraic topology*, volume 21 of *Algorithms Comput. Math.* Berlin: Springer, 2008.
- [12] James R. Munkres. *Topology*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2nd ed. edition, 2000.

- [13] Carlos Ortiz, Adriana Lara, Jesus Gonzalez, and Ayse Borat. A randomized greedy algorithm for piecewise linear motion planning, 2021.
- [14] Edwin H. Spanier. Algebraic topology. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc.:McGraw-Hill Book Company. XIV, 528 p. (1966)., 1966.