FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Un breve percorrido sobre a evolución histórica do concepto de función

Ángela Casas Fontán

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Un breve percorrido sobre a evolución histórica do concepto de función

Ángela Casas Fontán

Xullo, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Un breve percorrido sobre a evolución histórica do concepto de función
Breve descrición do contido
O concepto de función é, sen dúbida, un dos máis importantes das matemáticas, así como, tamén, un dos máis difíciles de aprehender. O obxecto deste traballo, cunha forte compoñente histórica, é trazar a evolución deste concepto, deténdose especialmente nalgúns momentos históricos relevantes nesta evolución e prestando tamén atención a algunhas funcións significativas.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

Un breve percorrido sobre a evolución histórica do concepto de función trata sobre os diferentes momentos históricos polos que este concepto atravesa e como evoluciona segundo as diferentes necesidades ás que os matemáticos se van enfrentando.

Este percorrido comeza hai 4000 anos, momento no que temos constancia das primeiras anticipacións ao concepto da man da civilización babilónica. A seguinte parada é Grecia, onde matemáticos como Euclides e demais xeómetras gardan, sen sabelo, o concepto de función dentro das súas denominadas proporcións. O seguinte paso que damos é a causalidade pola que o concepto emerxe na primeira metade do século XVIII. Esta causalidade pode resumirse en principalmente dúas vertentes: o interese polo movemento e a invención da xeometría analítica.

Unha vez xerado, o concepto atravesa un período de cambio constante debido ás diferentes necesidades prácticas que xurden ao longo da segunda metade do século XVIII e a primeira do XIX. Problemas como o da corda vibrante ou a condución da calor poñen ao concepto no punto de mira, á espera de ser desenvolvido.

É no século XIX cando o concepto, logo de ir adquirindo diferentes visións ao longo da súa evolución como son a xeométrica ou a analítica, se establece e estabiliza definitivamente. Así, no concepto de función termina por primar a visión de correspondecia inequívoca entre variables sobre as anteriormente citadas.

Neste traballo resulta moi curioso como as diferentes definicións que aparecen do termo son superficialmente semellantes, mais toda a contextualización que hai detrás delas fai que as ideas que esconden nada teñan que ver as unhas coas outras.

Tamén é de grande interese o papel que algunhas funcións concretas xogaron no desenvolvemento. Por este motivo adicarase un espacio ao acontecido e debatido sobre algunha destas funcións, como é o caso da función de Dirichlet e algunhas máis que se manterán en secredo polo momento.

Abstract

A brief journey about the historical evolution of the function concept adresses some of the different historical moments through which it goes and how its evolution directly depends on the different needs to which the mathematicians face it.

This journey starts 4000 years ago, the moment where we have evidence of the first anticipations of the concept, which come with the Babylonian civilisation. The next step is Greece, where mathematicians such us Euclid and other geometrists who keep in, without knowing it, the concept of function in their known proportions. Our next step is the causility for which the concept originates in the first half of the XVIII century. This causality can be summed up like two principal aspects: the interest in the movement and the invention of the analytic geometry.

Once it has been generated, the concept goes through a period of constant change due to the different practical needs that arise during the second half of the XVIII century and the first half of the XIX. Problems such as the vibrating rope or the heat conduction make the concept to be in the firing line, in the expectation of being developed.

It is in the XIX century when the concept, after being adquiring different visions along its evolution as are the geometric or the analytical, is definitively established and stabilized. In this way the vision of unequivocal correspondance between variables takes priority over the previously mentioned visions.

In this project it is entertaining to see how while all the different definitions that appear from the term are superficially similar, all the contextualization that there are behind them makes that the ideas that hide have nothing to do with each other.

It is also of a great interest the role that some concrete functions played in the development. For this reason, a space will be devoted to see what has happened and discussed about some of these functions, as is the case of the Riemann function and some more which will be kept in secret for the moment.

Introdución

O problema de estudar calquera concepto, sexa da disciplina que sexa, moito despois de quedar este verdadeiramente establecido é caer na trampa de pensar que dito concepto saíu da noite para a mañá porque si e que logo, porque os humanos somos así de previsores, as circunstancias e situacións que se deron foron o escenario perfecto para a aplicación del. A realidade é outra: o ser humano, como moito, pode ser previsor no senso como o é o oso cando hiberna, é dicir, previsor respecto a una acción que, como xa vivida a situación no pasado, mellora a resposta a ela e asegura o éxito. Por esta mesma razón, o carácter previsor en cuestións abstractas de conceptos é moi limitado. Moi limitado porque a necesidade de definir un novo concepto implica irremediablemente a novidade do reto e, por tanto, mellorar unha resposta pasada a el é imposible. Dentro do posible si está mellorar, en xeral, o proceso de estabilización dun concepto arbitrario, isto é, as diferentes fases das que consta dito proceso.

O caso concreto que nos ocupa, o concepto de función, non é alleo ao arriba explicado. Mais cabe mencionar que tamén o momento no que comezou este a xurdir de forma máis forte foi especialmente favorable posto que, por unhas razóns que a continuación desenvolveremos, a comunidade matemática estaba máis propensa a realmente establecer e fixar definitivamente conceptos necesarios e non deixalos así oscilando no aire cos conseguintes inconvenientes que iso puidese xerar.

A vida da Matemática como ente pasou, como pode pasar a vida dunha persona, por diferentes épocas que se caracterizarían por distintos aspectos. Estes últimos poderianse clasificar, con bastante consenso, como calidades positivas e calidades negativas. Un aspecto, o cal se pode considerar fundamental pois é o adxectivo que calquera persoa asociaría directamente coa Matemática, é o rigoroso. Así, como é obvio, a falta de rigor iría ligada absolutamente cunha calidade negativa (nefasta) nos razoamentos matemáticos. E aquí outra vez volve a xogarnos unha mala pasada a intuición (que poderiamos considerar mellor unha falta de reflexión neste caso). Mentres que intuitivamente tenderiamos a pensar que o rigor iría aumentando acorde co paso dos anos, isto é, que por exemplo o rigor dos resultados matemáticos do século XVII sería moito maior que o rigor dos da antigüedade por exemplo, a realidade volve a desmentirnos. Podería dicirse que desde os xeómetras gregos ata o século XIX, o rigor matemático pasou polos seus propios "Séculos Escuros".

O paradigma do rigor para todos os matemáticos fora a xeometría grega e a obra por excelencia o compendio dos trece libros que compoñían os *Elementos* de Euclides. Esta obra era un edificio perfectamente construído coas súas definicións; os seus axiomas aceptados como verdades intuitivas, a priori; e logo todo o conxunto de resultados que de forma lóxica e irrefutable se extraía deles, coas súas probas completas que confirmaban ditos resultados.

O problema veu cando se coñeceu que un dos axiomas, o quinto ou das paralelas, non era tal. Para ser máis precisos, este axioma, aínda que certo para algúns casos (os máis intuitivos experimentalmente), non o era para outras situacións e afirmacións contrarias a el tamén podían ser verdadeiras nestes casos. O que este axioma viña a dicir, resumidamente, era que se tiñamos unha recta dada e un punto exterior a ela, só se podía trazar unha única recta que pasase por ese punto e que fose paralela á dada. Así, nese momento, ideas como que podía non haber ningunha recta nesas condicións ou inclusive que podían haber máis dunha collían cada vez máis e máis forza. Matemáticos coma Lobachevski (1792-1856) ou Johann Bolyai (1802-1860) publicaron inicialmente ao respecto destas últimas ideas, mais o tema era tan impoñente que tardou un tempo en ser asumido e recoñecido. Este ambiente refléxase de forma nítida na prudencia coa que Gauss tratou o tema: mentres que apoiaba e compartía privadamente as opinións de Bolyai, non foi quen de atreverse nun primeiro momento a publicar sobre o tema.

Dúas foron as consecuencias principais deste feito: por un lado o nacemento da xeometría non euclídea e polo outro a caída total do edificio por excelencia da rigorosidade. Que ían a facer agora? Ata ese momento, a falta de rigor era xa alarmante, pero polo menos tiñan a seguridade que lle proporcionaba a xeometría grega e que usaban como pilar para a proba dos seus resultados; sen embargo agora nin nela se podían apoiar...

Se sumamos esta circunstancia, á que D'Alembert chamaría o *escándalo da xeometría*, ao xa convulso período que se vivía na matemática da época, temos un cóctel de incerteza e preocupación ascendentes. Imaxinemos por un momento ser un matemático dese tempo. Por unha parte xa estariamos preocupados porque a terra sobre a cal traballamos é incerta (os comezos do cálculo infinitesimal), traballamos con cantidades infinitesimales das que sabemos que nos veñen moi ben pois, como son cantidades moi pequenas que tenden a cero, podemos obvialas e facelas desaparecer cando nos interese e "facerlles caso"cando nos conveña, como por exemplo cando son os denominadores dunha fracción... Mais aínda non temos moi claro que son, son como fantasmas de cantidades desaparecidas e non temos idea de como tratalas verdadeiramente... Ademais, agora o noso modelo a seguir en canto a rigorosidade acaba de caer, xa non existe e non sabemos a onde mirar para acadar esta calidade tan imprescindible en matemáticas... Por último, como os novos conceptos sobre os cales estamos traballando como son a diferenciabilidade, integrabilidade ou función non están moi definidos, isto dá lugar a conflictos á hora de atacar e profundizar nos diferentes problemas aos que nos enfrontamos. En definitiva, un momento de abismo no que a comunidade matemática dase de conta da necesidade urxente que ten de rigor.

E neste momento urxente, o noso concepto a analizar. O concepto de función, aínda que durante miles de anos latente como expresión que quere saír, nacera soamente unhas décadas antes. Era un concepto fresco e moi necesario nese intre pois a materia a desenvolver pedía intensamente precisar o que unha función era e así acabar con moitos problemas que xurdían a raíz da inexactitude nel. De aquí tamén a evolución tan rápida que en pouco tempo tivo o concepto ata chegar a establecerse de forma definitiva.

Capítulo 1

"Prehistoria" do concepto

Neste capítulo veremos os primeiros esbozos do que siglos máis tarde se coñecería co nome de "función". Aquí veremos os antecedentes ao concepto que se recollen tanto na Matemática Antiga (tamén coñecida como prehelénica) como na helénica. Aclaremos, polas posibles dúbidas, que como Matemática Antiga coñécese aquela que se deu nas antigas civilizacións de Exipto, Mesopotamia, China e India.

1.1. Matemática prehelénica

Para comezar é importante ter claro que na Época Antiga non había ningunha idea abstracta sobre os conceptos de variable ou función, senón que estes viñan implícitos en manisfestacións como son tablas ou incluso gráficos.

É actualmente coñecido que a civilización babilónica era moi avanzada. En concreto, o desenvolvemento alxébrico que esta posuía era incrible. Sorprendente é por exemplo o coñecemento que esta civilización tiña sobre a suma de n termos dunha progresión aritmética, os números pitagóricos ou as regras de tres.

Sobre a noción de función en concreto tamén temos claros exemplos nos que vemos, aínda que de forma non explícita, si implícita, o coñecemento dela. As catro operacións elementais como son a suma, a resta, a multiplicación e a división son, de feito, funcións as cales dependen de dúas variables cada unha. Temos constancia da existencia de táboas numéricas babilónicas de arredor de 4000 anos de antigüidade nas que se presentaban listados de operacións (en base 60, pois esta era a que usaban os babilonios) como multiplicacións, divisións, raíces, cadrados, inversos...

Outro campo de amplo desenvolvemento da cultura babilónica, no que tamén aparece a noción de función, foi o astronómico. Os babilonios gozaban dun gran coñecemento

Figura 1.1: Exemplos de táboas babilónicas

do ceo e acostumaban a recoller, en táboas tamén, as observacións que facían para así logo poder predicir os fenómenos a vir. Por exemplo, observaban a posición de planetas, astros e outros obxectos astronómicos para poder logo calcular os períodos de visibilidade e posicións destes.

1.2. Matemática helénica

Grecia é recoñecida e recordada como berce de saber. En Matemáticas en concreto, a cultura helénica aportou, sobre todo, un inmenso avance no que se refire ao sector xeométrico. Foi nese momento (aproximadamente os 1000 anos que transcorren dende o 500$a.C.$ ata o 500$d.C.$) onde este experimentou un lugar e importancia sen iguais, e problemas como a cuadratura do cículo ou a duplicación do cubo(que nun primeiro momento pensábase que era un problema plano, isto é, resoluble con regra e compás como se explica en [5], mais logo descubriuse que era sólido) ocuparon as mentes dos grandes filósofos da época como Arquímedes (285-212 $a.C.$), Anaxágoras (510-429$a.C.$), Menecmo (380-320$a.C.$) ou Apolonio (262-190$a.C.$).

É precisamente neste tipo de problemas, os xeométricos, nos que nos atopamos outra vez a idea de función; mais de novo nunca de forma explícita, simplemente reflexada en táboas de lonxitudes, áreas, volúmenes...

Os gregos denominaban a estas claras relacións funcionais as *proporcións*. Estas vémolas reflectidas neste anaco pertencente aos *Elementos* de Euclides: "as áreas dos círculos son unha á outra coma os cadrados dos seus radios". Outro exemplo notable é a proporción (relación) existente entre a lonxitude dunha corda pulsada e o sonido musical que esta producía.

Cabe mencionar que neste período tamén xurden, sobre todo da man de Ptolomeo (100-

170) no seu *Almaxesto*, os elementos da Trigonometría que serán de enorme importancia en momentos posteriores ao desenvolvemento do concepto de función en si. Ademais, estes elementos trigonométricos como o seno e o coseno, dos que aparecen neste momento xa as primeiras táboas, gardan intrínseca e indiscutiblemente a noción de función.

1.3. Idade Moderna

Dende Grecia ata o século XVI, pouco hai que destacar sobre o avance neste concepto. O único resaltable é o resultado en forma de gráfico que no século XIV o francés Oresme(1323-1382), na súa obra *Tratactus de latitudinibus formarum*, deu a un problema pertencente á corrente denominada *latitude das formas*, que consistía en, mediante o uso da matemática, resolver problemas físicos. Oresme representou gráficamente o movemento uniformemente acelerado, intuíndo así dalgunha forma o que nos vindeiros séculos ía a pasar no desenrolo do noso concepto en cuestión. Mais é realmente nos séculos XVI e XVII onde se dan os factores decisivos para que, no século XVIII, a idea de función comece a ter forma.

Un destes factores foi o interés que nese momento xurdiu polo movemento. O interese de Kepler polo movemento planetario ou Galileo polos problemas dinámicos, como o lanzamento parabólico, son claros exemplos do cambio de mentalidade que nesa época estábase a dar. A maior preocupación dos coetáneos da época xa non era a anterior, a da Grecia, a estática, senón que todo apuntaba a unha novo obxectivo: o movemento, o cambiable, variable.

Pero sen dúbida, o factor clave foi a invención da xeometría analítica por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665). Como se explica en [1] a xeometría analítica, aínda que se lle adoita atribuír a Descartes directamente (así se pode asociar o nome dos eixos desta xeometría), a realidade é que, así como o cálculo compartiu creadores independentes, esta tamén. Isto débese a que, mentres que por parte de Descartes esta saíu publicada en 1637 no apéndice *La géometrie*, da obra *Discours de la methode*, Fermat non publicou ata finais dese século a obra na que procesos similares eran detallados, a pesares de telos xa desenvoltos con anterioridade.

Ata ese momento, as curvas eran vistas de forma xeométrica. Isto é, as cónicas por exemplo eran vistas como a interxeción dun plano cun cono. A partir deste intre, as curvas pasarían a ser vistas como conxuntos de puntos que teñen en común aspectos analíticos, como sería a verificación dunha expresión analítica (concepto que xa examinaremos con profundidade no próximo capítulo).

Foi así como empezou a coller forma a idea de "función" que hoxe en día temos, mais aínda quedaba moito caminõ por percorrer. Nese momento o interese suscitábano en verdade moi poucas curvas, a máis importante do momento a cicloide. Antes de seguir cabe facer un pequeno comentario sobre o termo "curva": cando nas seguintes líneas o empreguemos estaremos a facelo no mesmo senso no que se facía nese tempo, polo que este non ten que cadrar co significado que a palabra "curva" adquiriu logo e ten actualmente. Mais debido ao desenvolvemento do cálculo infinitesimal a finais do século, cada vez xurdían máis e máis ecuacións alxébricas a estudar. De feito, foi Leibniz (1646-1716) quen a finais do século XVII modificou o nome que Descartes lle dera aos dous tipos de curvas do momento. Uns anos antes Descartes nomeou ás curvas que se podían caracterizar cunha expresión polinómica de dúas variables curvas xeométricas, mentres que ás que non podían pórse desta forma pasaban a ser as denominadas curvas mecánicas. Para el, as xeométricas eran as que realmente eran "dignas" de estudar dende o punto de vista xeométrico, dándolle así ás do segundo tipo un carácter pexorativo. En cambio Leibniz veu a estas últimas cun grande interese e deulle o valor que anteriormente Descartes lles negara. Para obviar o mínimo rastro dos aspectos negativos, renomeou aos dous tipos de curvas do seguinte xeito: as curvas xeométricas pasaron a denominarse alxébricas e as mecánicas, trascendentes.

Reseñable tamén é o que xa no 1667 o escocés James Gregory (1631-1675) inclúe na súa obra *Vera circuli et hyperbole quadrature*: unha primeira definición de relación funcional:

Dicimos que unha cantidade x está composta doutras cantidades $a, b...$, se x resulta de $a, b...$, polas catro regras elementais (suma, resta, produto e división), extracción de raíces ou por calquera operación imaxinable

Así, xa acabamos o século XVII coa idea de relación funcional na cabeza e cun crecemento exponencial de curvas con expresións analíticas, momento idóneo para o verdadeiro comezo e posterior desenrolo do concepto de función, que trataremos no seguinte capítulo.

Referencias bibliográficas

Para a elaboración deste capítulo empregáronse as seguintes referencias bibliográficas: [1], [2], [3], [4] e [5].

Capítulo 2

Historia do concepto

Neste capítulo trataremos os comezos e posterior desenvolvemento do concepto, que se deron nos séculos XVIII, XIX e XX. Para isto será necesario tratar algúns dos problemas máis importantes que deron lugar ao planteamento dos matemáticos da época do que realmente debía de ser unha función. Ao longo do capítulo seremos testemuñas de como o concepto foi variando e tamén como diferentes matemáticos tiñan diferentes concepcións del. Inclusive algúns matemáticos coma Euler (1707-1783) foron variando a concepción sobre o que unha función era segundo as necesidades coas que se ían atopando. Cabe destacar tamén que, aínda que a simple vista as definicións que vexamos sexan moi similares entre si, debemos ser conscientes de que tendo en conta as diferentes contextualizacións históricas destas, o que significan será moi diferente. Xa o puntualizaremos nas diferentes partes.

Comecemos polo principio. Actualmente podemos atopar en calquera curso estándar de cálculo coa seguinte definición de función:

Definición 1. Dicimos que f é unha función real de variable real definida nun conxunto S de números reais se a cada punto x de S lle asocia un único número real que denotamos por $f(x)$.

Moitas veces faise tamén referencia ao carácter arbitrario de esta asociación pero, por que? Nas seguintes seccións veremos como nada é así por casualidade, senón que cada unha das palabras das que esta definición consta teñen unha razón de ser.

2.1. Nacemento e primeiros pasos no concepto

A primeira definición de función xurdiu a comezos do século XVIII. Eran aínda os comezos do cálculo infinitesimal e, a raíz das expresións que a xeometría analítica levaba xa varias décadas producindo, expresións en forma de igualdade con variables, faltaban termos para referirse a elas. Como explica Kleiner en [2], esta falta de vocabulario é sinalada nunha parte da abundante correspondencia (máis de 200 cartas) entre Leibniz(1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748).

Se somos fieis á verdade foi Leibniz o primeiro en empregar este termo, mais o sentido para el nada ten que ver co sentido do concepto ao que nós estamos a facer referencia. Para Leibniz, unha función era unha tanxente, unha normal... É dicir, Leibniz denominaba funcións ás diferentes características que dunha curva podía obter.

A verdadeira primeira definición de función viu da man do segundo da anteriormente citada correspondencia, Johann Bernoulli, incluída nun artigo en 1718 a raíz dun problema isoperimétrico planteado polo seu irmán Jacques Bernoulli (1654-1705). Nel, Johann afirmaba que

Unha función dunha variable é definida aquí como unha cantidade composta dalgunha forma por esta variable e por constantes.

Como podemos obsevar, esta definición é demasiado pouco exacta. Aínda que podemos intuír máis ou menos o que a expresión "composta dalgunha forma" quere dicir, en ningún momento o autor deixa ningunha guía do que "dalgunha forma" pode ou non incluír. A pesares desta gran desvantaxe, si hai unha parte moi salientable desta primeira aproximación: mentres que os primeiros esbozos do concepto estaban cargados de tinteiros xeométricos, agora a vista estaba posta na parte alxébrica, nesa expresión con variables.

O seguinte grande paso no desenvolvemento do concepto foi levado a cabo polo arriba nomeado Euler(1707-1783). Na súa afamada obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, considerada a primeira dentro da Análise Matemática, Euler intenta formular e reunir os conceptos matemáticos e métodos básicos que o desenvolvemento do cálculo estaba xerando. Nesta obra, o papel do concepto de función xoga un rol esencial, pois en palabras do propio Euler a Análise Matemática é a ciencia xeral das variables e as súas funcións. Así mesmo, nela tamén afirma que

A función dunha cantidade variable é unha expresión analítica composta dalgunha forma por esa cantidade variable e números ou cantidades constantes.

Aínda que, coma no caso de Bernoulli, Euler non especifica completamente a que se refire con expresión analítica, este si que explica cales serían as operacións permitidas para crear esta expresión analítica, sendo estas: as catro operacións elementais (suma, resta, multiplicación e división), exponenciais, raíces, logaritmos, elementos trigonométricos, derivadas e integrais. Tamén clasifica as funcións segundo diferentes características: alxébricas ou transcendentais (seguindo a clasificación de Leibniz), de valor único ou multivalores e implícitas ou explícitas.

Outro resultado importante deste tratado é a afirmación de Euler de que calquera función pode poñerse como una serie de potencias. No traballo de Newton(1642-1727) xa se vira anteriormente como no seu método de fluxións aparecían series de potencias. Pero agora Euler afirmaba que para calquera función era posible o desenrolo en serie de potencias.

É interesante remarcar que a visión alxébrica prima aquí de novo, polo que podemos confirmar un abandono total do concepto coa súa vinculación xeométrica polo momento.

Como podemos observar, a "densidade informacional" deste tratado é considerable. Malia que, como logo foi coñecido, moitas das afirmacións deste son inexactas e incluso erróneas, é un bo punto de partida pois abarca moitos aspectos e cuestións. Na seguinte sección do capítulo veremos como, movidos por certos problemas físicos do momento, esta idea debatirase e afinarase.

-

2.2. Problemas prácticos clave para o seu desenvolvemento

Gracias á *Introductio in analysin Infinitorum*, Euler puxo sobre a mesa o concepto de función como central dentro do desenvolvemento das matemáticas da segunda metade do século XVIII. Agora, este debería ser empregado para tratar os problemas do momento. O que aconteceu foi que, debido ás necesidades que os problemas tratados presentaban, o concepto foi obxecto de debate entre os diferentes matemáticos cuxas ideas non coincidían en relación a ditos problemas. Nesta sección seremos testemuñas deste debate en dous problemas concretos claves para o desenvolvemento deste concepto: a corda vibrante e a condución da calor.

2.2.1. A corda vibrante

O problema da corda vibrante tivo lugar tamén nos anos centrais do século XVIII. Foi un problema que se prolongou no tempo e que non chegou a ningunha conclusión compartida por tódolos participantes nela. O problema consistía no seguinte:

*Unha corda elástica, poñamos de extremos 0 e l, está deformada nunha forma inicial e sóltase para deixala vibrar. O problema consiste en determinar a función que describe a forma da corda en calqueira momento t.*x

O problema foi atacado por varios matemáticos e físicos, mais nós centrarémonos esencialmente nos traballos de D'Alembert (1717-1783), Euler e Daniel Bernoulli (1700-1782), pois é nas visións destes tres nas que vemos claramente como a concepción e importancia que cada un deles lle daba ao termo "función" diferencia completamente as suás respectivas solucións. Comecemos con D'Alembert, pois foi o primeiro que cronolóxicamente lle deu solución ao problema.

D'Alembert deu en 1747 a que para el era a solución máis xeral deste problema: afirmaba que o movemento desta corda viña dado pola ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

onde a é unha constante, suxeita a:

$$y(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}_{|t=0} = 0$$

D'Alembert resolveu esta ecuación chegando á que a solución viña dada por

$$y(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}$$

para unha función arbitraria φ. Claro que desta solución séguese directamente que

$$\begin{gathered} y(x,0) = f(x) = \varphi(x) \ \forall x \in (0,l) \\ \varphi(x+2l) = \varphi(x) \\ \varphi(x) = \varphi(-x) \end{gathered}$$

O maior problema desta solución ven dado por unha crenza que había nese tempo: se dúas expresións analíticas coincidían nun intervalo calquera, por pequeno que fose, entón tamén o farían sempre. Cabe mencionar que, aínda que máis tarde concluiríase que para nada isto era certo, non é raro que nese momento así o pensasen pois, tendo en conta que, para comezar, en ningún momento as expresións estaban restrinxidas a ningún conxunto concreto senón que por defecto se aplicaban para todos os números reais e, para seguir, como a idea de "expresión única" era a soa existente, os contemporáneos da época asumían isto como algo natural.

Así, deducido directamente desta crenza seguíase que φ era impar e periódica de período $2l$ e, por conseguinte, tamén o era f, é dicir, a forma inicial da corda.

Outra observación que podemos facer desta solución e que, para cumplir a ecuación, ten que ser dúas veces diferenciable... Vemos entón como, para D'Alembert, a forma inicial da corda está moi limitada debido a tódalas restricións que o seu espírito crítico matemático lle supoñen.

Mais Euler non podía admitir que deste xeito fose a solución de D'Alembert a máis xeral do problema. Non, porque restrinxía demasiado a forma inicial da corda. Aínda que a parte teórica creada por D'Alembert non lle supoñía ningún problema, a parte aplicada non lle convencía. Para el unha forma inicial válida sería, por exemplo, a que nos nosos días viría dada pola función

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ -x + l & x \in (\frac{l}{2}, l) \end{cases}$$

Pero esta forma triangulada da corda non entraría dentro do conxunto de solucións de D'Alembert. Así, como Euler tiña en mente moitas máis posibles formas iniciais da corda, viuse obrigado a aumentar o número de posibidades para dalas. Estas foron: diferentes expresións analíticas en diferentes subintervalos do orixinal ou directamente curvas debuxadas a man alzada. Pola crenza antes explicada, ningunha destas dúas posiblidades podían pórse en forma de expresión única, polo que Euler viuse obrigado a incluílas no seu concepto de función. Desta forma, Euler cambiaba este concepto que el mesmo dera nese mesmo ano (1748) na súa *Introductio in Analysim Infinitorum*.

Cabe mencionar tamén que para Euler o sentido de continuidade non era o mesmo que actualmente. Euler denominaba funcións descontinuas a aquelas que non se podían pór en forma de expresión única. Así, para el todas as funcións que si pudiesen ser postas cunha única expresión pasaban a ser denominadas continuas. Será máis adiante, no século XIX no que Cauchy (1789-1857) reconvertirá esta idea.

Dúas consideracións son importantes neste punto. A primeira, a consideración por primeira vez das funcións definidas con distintas expresións en distintos trozos, é dicir, as funcións definidas a trozos. Cabe destacar que, aínda que o exemplo arriba posto de función a trozos valería como forma inicial da corda para Euler, a especificación do dominio, é dicir, a restrición a $(0, l)$ todavía non sería real pois nese momento seguíase a considerar por defecto a expresión para todos os números. A segunda, a volta a unha concepción bastante xeométrica do concepto de función, relacionándoo coa curva, coa forma.

O último en sumarse ao polémico problema foi Daniel Bernoulli quen en 1753 afirmaba que a solución era

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l}) \cdot \cos(\frac{n\pi a x}{l})$$

En Bernoulli a parte física pesaba moito máis que a matemática, polo que á hora de resolver o problema o que realmente lle interesaba era a parte práctica, a forma que a corda podía ter en cada instante t. Así, apoiado no traballo que anteriormente outros fixeran sobre vibracións de cordas musicais, chegara a esta solución.

Dende o punto de vista matemático, como en $t = 0$ $y(x, 0)$ consistía nunha serie de senos únicamente, pola crenza xa mencionada ao longo de toda esta subsección, deducíase que a f, a forma inicial, era periódica e impar. Respecto ao concepto de función, para Bernoulli este estaba totalmente mediado pola práctica do problema: así como para D'Alembert a concepción do que unha función era limitaba completamente a forma de ver e resolver o problema, para Bernoulli o termo non lle supoñía problema algún pois, aínda que empregado, era de forma baleira pois cada vez que o usaba en verdade na súa mente aparecía a palabra "forma".

Vemos así como, dependendo do suxeito en cuestión, o concepto función é tratado de diferente forma. Mentres que para D'Alembert o concepto restrinxe as solucións do problema práctico, Euler pon a disposición da práctica o concepto, cambiándoo a favor das necesidades da física e Bernoulli emprégao indiferentemente prestando exclusivo interese pola física. Como explica Ravetz en [6], o debate aquí creado non é outro que o que acontece entre o mundo matemático de D'Alembert, o físico de Bernoulli e a "terra de ninguén" de Euler.

Respecto ao concepto de función, recordemos antes de comezar o seguinte tema a nova situación creada a raíz deste problema: as funcións a trozos adhírense ao concepto e revive a parte xeométrica asociada a el, aínda que convivindo coa parte alxébrica antes acadada.

2.2.2. O problema da condución da calor: as series de Fourier

O outro problema físico que significou un grande avance no concepto de función foi o da condución da calor. A diferencia do que pasaba co da corda vibrante, neste o avance non se produciu polo debate que xurdiu entre diferentes científicos segundo o enfoque do problema, senón que neste caso deuse pola aportación feita por un único traballo ao concepto.

O traballo ao que facemos referencia é a *Théorie Analytique de la chaleur* de Fourier (1768-1780). Publicada en 1822, foi unha obra que impactou no mundo científico moi significativamente debido aos numerosos e sorprendentes resultados dos que constaba.

Cabe destacar que, aínda que moi falta de rigor e con moitas imperfeccións, nela había en xeral un incrible avance conceptual. Como explica Langer en [7], isto débese a que a súa despreocupación polo rigor permitiulle dar pasos conceptuais que outros talentos con máis espírito crítico non podían.

No que respecta ao concepto de función, a visión que este tiña era a máis avanzada nese momento, mais sen innovar nada realmente. Para el,

unha función $f(x)$ representa unha sucesión de valores ou ordenadas cada un dos cales é arbitrario. Un infinito número de valores dados á abscisa x, un número igual de ordenadas $f(x)$

(...) Non se suponēn estas ordenadas suxeitas a ningunha lei común; elas sucédense dunha ou outra forma calqueira, e cada unha delas é dada coma se fose unha soa cantidade.

Recordemos que, malia que esta definición se asemelle extremadamente á actual superficialmente, debemos de contextualizar. Coa expresión "dunha ou outra forma calquera", Fourier non ten en mente calquera asociación lóxica realmente arbitraria.

Agora ben, o que si creou un forte impacto na comunidade científica do primeiro terzo do século XIX foi un resultado relativo a funcións incluido no tratado:

Teorema 2. *Calquera función $f(x)$ definida en $(-l, l)$ é representable dentro deste intervalo mediante unha serie de senos e cosenos,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l})]$$

onde os coeficientes a_n e b_n venñen dados polas expresións

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{l})dt$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{l})dt$$

Este resultado foi acollido con sorpresa. Para convencer aos contemporáneos da veracidade do resultado, Fourier tiña dúas cousas que demostrar. A primeira era que estes coeficientes a_n e b_n existían para calquera función. A segunda, ver que efectivamente dentro do intervalo $(-l, l)$ a serie converxía á función a que se quería aproximar.

Para o primeiro, Fourier interpretou os coeficientes como áreas, pois así evitaba os problemas que lle puidesen ocasionar as que non se puideran poñer en forma de expresión analítica. Para o segundo, calculou aproximacións de varias funcións para pequenos valores de n que amosaban que dentro do intervalo $(-l, l)$ a aproximación tomaba valores moi achegados aos da f, mentres que, sen embargo, fora del, a aproximación nada tiña que ver con ela.

Como se anticipaba no comezo da cuestión, este traballo supuxo, polo seu risco conceptual, un importante avance en numerosos campos. Para comezar, supuxo a revisión dos conceptos de converxencia e de integral que, anos despois, pasaría a ser central na preocupación pola búsqueda de rigor na matemática. Tamén supuxo o punto de partida para a teoría de conxuntos de Cantor.

No campo das funcións, este tratado tivo tres consecuencias notorias. A primeira delas foi o descubrimento da falsidade da crenza de que se dúas expresións analíticas coincidían nun intervalo, entón coincidían en todas partes, que tan malas pasadas xogara durante o século XVIII. A segunda foi o reforzo da parte analítica do concepto. O desenrolo en series de potencias dáballe importancia a esa parte analítica que nos últimos anos perdera. Por último, desmontaba por primeira vez a idea de continuidade no sentido de Euler, pois había funcións por este último consideradas descontinuas que admitían a representación en serie de potencias, é dicir, en forma dunha expresión analítica.

Na seguinte sección veremos como o impacto deste tratado foi tal que os seguintes avances que a continuación expliramos tamén tiveron, dalgunha forma, a súa orixe nesta obra de Fourier.

2.3. Dirichlet e as funcións patolóxicas

O século XIX foi o século onde se asentou, por fin, o rigor na Matemática. Dende Grecia, con autores como Euclides co seu *Elementos* ou Arquímedes cos seus resultados perfectamente probados, a ciencia volvérase de carácter máis débil e a preocupación polas demostracións brillaba pola súa ausencia. Durante os séculos pasados, os problemas prácticos marcaban o ritmo, e a rigurosidade e exactitude eran dubidosas.

Pero no século XIX esta falta de rigorosidade facía que cada vez que se quería profundizar máis nun problema, as dúbidas e discrepaciancias aumentaban exponencialmente, pois os conceptos non estaban ben fixados. Ademais foi a comezos deste século cando un descubrimento puxo en xaque a toda a comunidade científica: un dos postulados dos *Elementos* de Euclides, o quinto ou das paralelas, non era unha verdade a priori pois de feito, outros postulados que o contradicían funcionaban ben tamén en certos espazos.

Ata ese momento, o paradigma da rigorosidade matemática era a xeometría grega e, dentro dela, o tratado dos *Elementos*. Aínda que esta falsidade do quinto postulado xa levaba sendo obxecto de debate entre os matemáticos da época bastante tempo, de tal importancia era que moi poucos se atreveron a publicar sobre o tema. Incluso o mesmísimo Gauss (1777-1855) evitou publicar ao respecto, sendo este soamente participativo en correspondencia privada e limitándose a dar opinión sobre o traballo en relación á cuestión doutros.

Así, nese momento de inestabilidade e evaluación de todo, os matemáticos buscan establecer unha base sólida e uns coñecementos seguros e inequívocos.

Como xa se avanzara na sección anterior, o traballo de Fourier convertiríase no punto inicial de moitos dos resultados en diferentes campos que se darían despois. Como fora explicado, o traballo de Fourier era, aínda que moi rico conceptualmente, moi impreciso e falto de rigor. Así, moitos matemáticos tomaron como orixe este para dotalo de rigor e axustar todas as imprecisións e erros cometidos. Entre estes atopábanse Dirichlet (1805-

1859) e Cauchy (1789-1857).

Este último, no seu *Cours d'Analyse* de 1821, definía en forma de límites os seguintes conceptos: continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funcións. A continuidade de Cauchy ten o sentido actual e, polo tanto, difire da anterior de Euler. De feito, Cauchy confirma a validez da súa caracterización de continuidade amosando como no sentido de Euler hai certas funcións nas que non está ben definida a súa continuidade. Por exemplo, a función

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq \end{cases}$$

que era descontinua para Euler, tamén se podía expresar ata de dous xeitos diferentes con forma, en ambos casos, de única expresión:

$$f(x) = \sqrt{x^2}$$

ou ben

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+t^2}dt$$

Cauchy afirmaba que a continuidade definida da súa forma non tiña estes problemas, isto é, que estaba ben definida.

No que ao concepto de función respecta, Cauchy era bastante conservador. A súa definición era similar ás aceptadas ata o momento. O único comentario interesante en relación é a clasificación que Cauchy facía destas en simples (x^a, $\frac{x}{a}$, a^x, sen(x), cos(x), log(x)...) e compostas, que eran composicións das simples.

Pola súa parte, Dirichlet centrouse no concepto de función e empregou os resultados de Cauchy para probar un resultado en relación coas series de Fourier polo que comezaremos:

Teorema 3. *Se unha función f ten un número finito de descontinuidades e un número finito de máximos e mínimos en $(-l, l)$, entón f pode representarse pola súa serie de Fourier en $(-l, l)$. A serie converxerá punto a punto a f onde sexa continua e a $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ nos puntos onde f sexa discontinua.*

Respecto ao concepto de función, Dirichlet tiña moi presente o que se entendía por función na comunidade científica da época mais, por outro lado, o seu espírito crítico facía que non deixase de ter en mente unha palabra que normalmente se empregaba na definición: arbitraria. Por definición, algo arbitrario é algo que depende da libre vontade ou do capricho de alguén, que non está suxeito a regras ou a razóns. Ata ese momento, aínda que a palabra era impresa nas definicións, non se fixera uso pleno do seu significado. O arbitrario ata ese momento fora arbitrario ata certo punto, ata o arbitrario dunha forma, dunha expresión analítica, pero o arbitrario totalmente non. Vexamos a definición que Dirichlet dá dunha función:

y é función dunha variable x, definida nun intervalo $a < x < b$, se para cada vaor da variable x nese intervalo lle corresponde un valor definido da variable y. Tamén, é irrelevante de que forma esta correspondencia é establecida.

A importancia desta nova definición é vital. Nela ponse de manifesto a importancia da parte lóxica, da parte de correspondencia. A concepción de Dirichlet enfatiza o feito de independencia. Para cada valor da variable independente ten que haber un único valor, un definido, da que depende del, é dicir, da dependente. Tamén fai referencia, por primeira vez, ao conxunto de partida, especificándoo e non deixándoo por defecto a todos os números reais.

A parte de arbitrariedade explícita na función manifestaa publicando en 1829, dentro dun artículo precisamente sobre series de Fourier, un exemplo que daría moito que falar.

A función D, definida por:

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{Q} \\ d, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

con $c, d \in \mathbb{R}, c \neq d$, que logo pasaría a ser coñecida como a función de Dirichlet, amosaba a total arbitrariedade coa que fora creada: non había curva xeométrica nin había expresión analítca, soamente unha asociación totalmente definida de valores tales que, a cada un da variable independente x, lle asociaba un único valor da dependente, y. É importante tamén recalcar o feito de que a relación establecida é inequívoca, está ben definida, pois en todo momento sabemos cal é o par asociado a cada valor da independente.

Outro feito interesante de observar é que esta mesma función non cumpre as hipóteses do teorema de representatividade en serie de Fourier do mesmo autor.

Cabe mencionar a aportación de Lobachevski (1793-1856) que, aínda que menos coñecida e sen función propia asociada, paralelamente a Dirichlet deu o mesmo paso conceptual. En 1834, tamén nun artículo relacionado coas series de Fourier, escribía:

A concepción xeral que require que unha función de x sexa definida como un número dado para cada x e variando gradualmente con x. O valor da función pode ser dado ben por unha expresión analítica ou por unha condición ue aporta un modo de examinar todos os números e elixir un deles ou, finalmente, a dependencia pode existir e resultar descoñecida.

A partir desta nova visión do concepto de función, o mundo enteiro da análise matemática cambiou substancialmente. Antes, este consistía en buscar os conceptos axeitados, como o de función, para poder aplicarlles todos os procesos como integración ou diferenciación. Agora, este pasaba a consistir en, segundo a posible aplicación ou non de ditos procesos, clasificar as funcións.

A raíz da función de Dirichlet, o mundo matemático centrouse na busca de funcións estrañas, estas que se comportaban de xeito moi curioso en procesos matemáticos como integración, diferenciación... Os maiores expoñentes desta busca foron sen dúbida Riemann (1826-1866) e Weierstrass (1815-1897), aínda que tamén destacaron outros como Darboux (1842-1917). No próximo capítulo veremos algúns exemplos destas funcións.

Isto débese a que, como xa se plasmou anteriormente, os matemáticos do século XIX buscaban o rigor, a exactitude dos resultados. Un dos maiores enfoques que tiveron lugar neste século foi a búsqueda de resultados de aplicabilidade da integral. En 1821 Cauchy establecera a aplicación desta para funcións continuas pero agora o obxectivo era estender esta aplicabilidade ao maior número de funcións posibles. Neste campo foi tamén o antes mencionado Riemann quen ampliou a integrabilidade a funcións acotadas nas que o número de discontinuidades podía incluso ser infinito sempre que, aínda que denso no intervalo de definición, este conxunto de discontinuidades tivese, como logo de Lebesgue nós coñecemos, medida cero. Esta integral non é senón a coñecida integral de Riemann. O que se segue inmediatamente desta ampliación na integrabilidade de funcións é a ampliación ao conxunto de funcións representables por series de Fourier.

Pero como todo, este xiro na forma de facer matemáticas non agradaba a todos os contemporáneos da época, como evidencia o que Poincaré (1854-1912) escribía en 1899 (para máis detalles [4]), onde se lamentaba de que estas funcións raras foran finalmente as máis comúns.

A pesares de opinións como a anterior, a evolución seguiu o curso da busca destas funcións "enfermizas" e por conseguinte da clasificación delas según diferentes aspectos.

2.3.1. Funcións analíticamente representables

Un dos aspectos con gran interese de estudo foi a representatividade dunha función en forma analítica. O resultado existente ata o momento era a representavilidade en series de Fourier, que Dirichlet había afianzado co resultado 3 e que a ampliación da integral levada a cabo por Riemann estendera a un conxunto máis vasto.

O seguinte paso veu da man de Baire (1874-1932), quen tratou a cuestión na súa tese doutoral *Sur les Fonctions de variables reélles*, con data de 1898. Baire, partindo da aproximación que Weierstrass fixera trece anos atrás (calquera función continua $f(x)$ nun intervalo $[a, b]$ era límite uniforme de polinomios nese mesmo intervalo), creou a súa propia clasificación que constaba de clases de funcións:

1. As funcións da *clase 0* eran as continuas
2. As funcións da *clase 1* eran aquelas que non estando na anterior, eran límites delas.
3. Unha función era da *clase* n se non pertencía á *clase* $n-1$ pero sí era límite de funcións desa clase.

Ademais, Baire non para aquí, é dicir, non só define as clases de funcións de orde natural, senón que, baseándose na Teoría de Conxuntos de Cantor, estende estas clases a ordes trasfinitos da seguinte forma: se $\{f_n\}$ é unha sucesión de funcións tal que para cada f_n existe unha das clases anteriores de orde natural que a conten e $\{f_n\}$ converxe puntualmente a f cumpríndose que esta f non pertence a ningunhas das clases anteriores; entón $f \in C_\omega$, sendo este ω o primeiro ordinal trasfinito da teoría cantoriana, é dicir, o menor ordinal trasfinito maior que calquera número natural. A partir deste primeiro crea outros ordinais trasfinitos como segue:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, ..., \omega+n, ..., \omega+\omega = 2\omega, 3\omega, ..., n\omega, ..., \omega\cdot\omega = \omega^2...$$

xerando así, respectivamente, as clases

$$C_\omega, C_{\omega+1}, C_{\omega+2}, ..., C_{\omega+n}, ..., C_{\omega+\omega=2\omega}, C_{3\omega}, ..., C_{n\omega}, ..., C_{\omega\cdot\omega=\omega^2...}$$

Baire consideraba que unha función era analíticamente representable se esta pertencía a algunha das clases da súa clasificación, isto é, se pertencía ao conxunto unión das clases (notemos que esta é unha unión disxunta).

Este conxunto é moi amplo. Se ben non inclúe a tódalas funcións ás que anos despois Lebesgue (1875-1941) denominaría funcións medibles, para calquera función Lebesgue-medible f existiría unha función de Baire que diferiría dela só nun conxunto de medida cero. Para facernos unha idea da amplitude desta clasificación, exemplifiquémolo co caso da famosa función de Dirichlet que, a pesar de parecer difícilmente analíticamente representable, pertence á *clase 2* de funcións analíticamente representables para Baire. Isto queda probado ao observar como D podemos escribila como límite de funcións de *clase 1* pois

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ d, & x \in \mathbb{I} \end{cases} = (c-d) \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2m} + d$$

Así vemos como, aínda que non todas as funcións forman parte desta clasificación, esta é o suficiente ampla para que atopar unha fora dela sexa unha tarea non precisamente doada.

2.3.2. Pequeno comentario concluínte sobre a estabilización do concepto de función

Malia a flutuación que este concepto sufriu ao longo do século XVIII e os primeiros anos do XIX, a partir da concepción de Dirichlet esta se estabilizou. Se ben é certo que a comezos do XX houbo certo movemento de cuestionamento sobre tal concepción, en concreto sobre a validez absoluta que a arbitrariedade lle proporcionaba ao termo, finalmente esta acabou por asentarse.

Este cuestionamento produciuse porque esta arbitrariedade tiña como consecuencia directa unha libertade completa para a construción dunha función, sempre que cumprise o requisito de que a cada elemento do conxunto de partida se lle asociase un único elemento do de chegada. Pero claro, esta sinxela condición facía que os "monstros" de funcións que se creaban desen moitas dores de cabeza aos matemáticos e estudosos da época; chegándose así a cuestionar o sentido que tiña "permitir" que estas se considerasen funcións, pois xa bastantes incertezas e vértigo había na época debido á novidade dos temas que se estaban a tratar a raíz da aparición revolucionaria do Cálculo Infinitesimal.

Mais por outro lado, este único e sinxelo requisito simplificaba as cousas e facía que a controversia e desacordo que se podía crear se minimizase. Así, problemas como os que antes houbera como o da corda vibrante por exemplo, no que a diferente perspectiva de cada un dos matemáticos sobre o problema, máis práctica ou máis teórica, "manipulaba" a idea que estes tiñan sobre o concepto, desaparecía.

Finalmente, esa sinxeleza pesou máis e así atopamos actualmente a definición estándar de función coa que comezamos o capítulo, na que ningunha das palabras é por casualidade e coa que o rematamos:

Dicimos que f é unha función real de variable real definida nun conxunto S de números reais se a cada punto x de S lle asocia un único número real que denotamos por $f(x)$.

Referencias bibliográficas

Para a elaboración deste capítulo empregáronse as seguintes referencias bibliográficas: [1], [2], [3], [4], [6], [7] e [8].

Capítulo 3

Exemplos de funcións significativas ao longo da Historia

Neste derradeiro capítulo explicaranse algúns casos de funcións que, por diferentes razóns, foron, dalgunha forma, significativas e destacadas ao longo da historia do concepto. Así, explicarase por exemplo a orixe de funcións elementais como as trigonométricas ou as logarítmicas. Tamén estarán neste capítulo seccións adicadas a casos concretos como son o da función de Dirichlet antes introducida, a de Thomae, a de Weierstrass ou a Gamma. Nestas seccións veranse tanto aspectos históricos (en referencia ao porqué da aparición destas funcións, isto é, á súa motivación de aparición) como aspectos matemáticos (isto é, características que estas funcións posúen e a proba destas). Para seguir algún criterio para a orde na que pór as funcións, seguiremos o da orde cronolóxica destas.

3.1. Orixes históricas dalgunhas funcións elementais

Aquí describirase, superficialmente, a orixe dalgunhas das clases de funcións máis comúns e coñecidas. Abordaranse os casos das funcións trigonométricas e logarítmica.

As funcións trigonométricas

O que hoxe coñecemos como Trigonometría ten a súa orixe en dous sitios separados por 5771 quilómetros: Grecia e India. É curioso porque, aínda que separadas fisicamente por todo ese espazo, a razón pola que apareceron foi a mesma en ambos casos: ser un apoio computacional á Astronomía. Así mesmo, non foi ata bastante despois que a Trigonometría se desenvolveu máis amplamente para triángulos planos, pois nun primeiro momento a maior parte das táboas e coñecementos que se tiñan era sobre os triángulos esféricos, ao seren estes os de maior utilidade para calcular posicións de astros.

En Grecia, esta ciencia de carácter complementario á Astronomía apareceu no século III $a.C.$, no que viviu Hiparco de Nicea, o cal é considerado o pai da trigonometría grega. Del son as primeiras táboas trigonométricas que se coñecen. Nelas asocia a un ángulo centrado con respecto a un diámetro da circunferencia a lonxitude da corda que este sustenta na circunferencia. Hiparco dividía o diámetro en 120 partes e por iso as lonxitudes destas cordas que serían os senos difiren del na cantidade de $\frac{1}{120}$. Tamén se lle atribúe a división do círculo en 360 grados.

O outro nome clave para o desenvolvemento desta disciplina foi Ptolomeo (II $d.C.$) pois del é a autoría da obra *Sintaxe matemática*, máis comunmente coñecida como o *Almaxesto*. Este segundo nome débese á tradución que os árabes fixeron da obra: para diferenciala do resto, chamáronlle "a maior", de aquí o nome de *Almaxesto*. Neste compendio de trece libros atópanse numerosos resultados sobre xeometría: ademais de numerosas táboas do que logo chamaríamos razóns trigonométricas, atopamos a explicación dos métodos empregados para a elaboración destas e incluso fórmulas como as dos seno e coseno da suma de ángulos, da diferencia, do ángulo metade ou do ángulo dobre.

Na India, pola súa banda, non sabemos exactamente cando xurdiu. Hai constancia de táboas hindúes de aproximadamente o século IV. Os hindúes, a diferencia dos gregos, medían os ángulos no que hoxe chamaríamos radiáns, consecuencia da división que facían en 21600 partes da lonxitude da circunferencia. Os árabes foron os que trouxeron a trigonometría hindú a Europa. O seno era unha creación hindú, mais no proceso de absorción e homoxeneización, introduciuse este nos traballos de Ptolomeo.

A partir dese momento a Trigonometría seguiuse a desenrolar ata que no ano 1595 Bartholomeus Pitiscus emprega por primeira vez o termo "Trigonometría". Logo, outros como Regiomontano (1436-1476) seguen a traducir e compactar todo o saber desta materia xerado ata ese momento. Precisamente é Regiomontano o que, cas súas obras *De triangulis* e *Tabulae directorium* condensa a maior cantidade de coñecementos sobre a materia visto nunca. A partir de aqu'i, os filósofos comezan a ver á Trigonometría como una materia independente, sen necesidade de estar soamente como apoio a outras. Así, vaise facendo e moldeándose, integrándose en diferentes sectores como logo sería o das funcións.

A función logarítmica

A función logarítmica sempre a vinculamos coa exponencial. É irremediable: é a súa inversa e precisamente por iso o que é unha ten moito que ver co que é a outra. Mais, historicamente, nada teñen que ver. A aparición dunha é completamente independente da da outra. De feito, cando aparecen os logaritmos a exponencial nin sequera existía.

A razón da aparición dos logaritmos non é outra que a busca de simplificación, de comodidade. No Renacemento, a asimilación do sistema hindú-arábigo e os decimais deu como resultado unha mellora moi notable na precisión das operacións aritméticas. O problema desta mellora consistía na complicación para a manipulación das cifras, pois estas gozaban agora de moitos máis díxitos. Sobre todo había problemas cos produtos e as divisións. Nesa época, por exemplo, a navegación precisaba de numerosos e longos cálculos e esta situación non facía senón complicala máis.

É nestas circunstancias nas que o aristócrata escocés John Napier (1550-1617) pensa en como facilitar este problema e como se cita en [1] describe:

Nada hai que cause tantos problemas na práctica da Matemática nin que faga os cálculos máis molestos e problemáticos que as multiplicacións, divisións e extracción de raíces cadradas ou cúbicas de grandes números, que ademais dunha tediosa perda de tempo son na maioría dos casos suxeito de moitos erros escorregadizos. Véndoo así, empecei a considerar por cal verdadeiro arte eu podería evitar estes obstáculos. E habendo pensado a este propósito en moitas cousas, encontrei ao cabo de tempo algunhas excelentes e breves regras que serán tratadas de aquí en diante (...)

Así, en 1614 Napier presenta os seus logaritmos, que tiñan a seguinte forma:

Considérase un segmento AB e unha semirrecta que comeza no punto C; partindo de A e sobre o segmento AB móvese un punto P con velocidade proporcional á distancia de P a B e sobre a semirrecta, móvese un punto Q, que partiu de C á vez co punto P partiu de A con velocidade constante igual á velocidade inicial de P.

Napier definiu a distancia CQ como o logaritmo da distancia PB e tomou a distancia de AB e tamén a velocidade inicial de P como 10^7, obtendo así que

$$\frac{CQ}{10^7} = \log(\frac{PB}{10^7})$$

Esta definición cumpre dous puntos importantes:

1. Salvo unha homotecia de razón 10^7 corresponde cos logaritmos de base $\frac{1}{e}$
2. Convirte produtos e divisións en sumas e restas salvo nunha lixeira variación debido á homotecia

Poucos anos pasarían logo da publicación do libro de Napier sobre os logaritmos, ata que estes sofresen a súa primeira modificación. Suxerido por Henry Briggs, Napier cambia a base dos logaritmos: agora terán base 10 e serán coñecidos tamén co nome de "logaritmos vulgares". Estes novos logaritmos xa non padecerán da homotecia anteriormente citada, pois calquera rastrollo dela será eliminado e así agora os productos e divisións serán estritamente equivalentes a sumas e restas neles.

Logo, por diversos motivos (como por exemplo que a área debaixo dunha hipérbole viña dada polo logaritmo), os logaritmos foron considerándose como curvas e espertou interese o seu estudo particular. Como posteriormente o termo “curva" intersecou co termo "función", os logaritmos introducíronse neste campo tamén.

3.2. A función Gamma

A función Gamma, Γ, apareceu por primeira vez nunha carta de Euler a Goldbach (1690-1764) con data de 1729. Esta carta viña motivada por un problema de interpolación que se estaba a desenvolver nese momento. Varias personalidades da época como Daniel Bernoulli ou Stirling (1692-1770), e incluso o mesmo Goldbach xa intentaran atopar a solución a dito problema, mais sen ningún éxito.

O problema de interpolación que se lle planteu a Euler, ao cal este deu resposta na carta a Goldbach un 13 de outubro de 1729, foi o seguinte:

$$1, 1\cdot 2, 1\cdot 2\cdot 3, 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5, ...$$

isto é, a sucesión dos factoriais. O que se quería saber era se se podía acadar una fórmula ou expresión para os factoriais, ver se estes podían interpolarse e así poder saber tamén canto sería un factorial dun número non enteiro como por exemplo 5,5!.

A expresión que Euler buscaba debía de cumprir basicamente dúas condicións: ser o factorial para os enteiros positivos e fixar o valor para o resto de posibles valores. Experimentando con produtos infinitos chegou á seguinte expresión:

$$\left[\left(\tfrac{2}{1}\right)^n \tfrac{1}{n+1}\right]\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^n \tfrac{2}{n+2}\right]\left[\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \tfrac{3}{n+3}\right] ... = n!$$

Esta expresión de aquí arriba era efectivamente o factorial para os enteiros positivos (nótese como os numeradores e denominadores das primeiras fraccións de cada termo entre corchetes vanse anulando). Pero un pormenor foi o que chamou a atención de Euler e fixo que este dera outra volta á idea: cando se evaluaba esta expresión en $n = \frac{1}{2}$, logo dun gran traballo de manipulación, chegábase a:

$$\left[\left(\tfrac{2}{1}\right)^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{\frac{1}{2}+1}\right]\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tfrac{2}{\frac{1}{2}+2}\right]\left[\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tfrac{3}{\frac{1}{2}+3}\right] ... = \left(\tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\tfrac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right) ... = \tfrac{\pi}{2}$$

Euler observou que en máis casos o valor da expresión tiña relación con π. E π tiña relación con círculos e áreas destes; e as áreas, a súa vez, tíñana coas integrais... Así, seguiu a traballar co problema mais desta vez cun novo enfoque. Deste xeito, comezou coa integral

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx$$

que xa fora manipulada por outros coetáneos da época como o antes mencionado Stirling. Expandindo sen dificultade a parte de $(1-x)^n$ polo Teorema do Binomio chegou a

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n}{(e+1)(e+2)(e+3)\ldots(e+n+1)}$$

que é coñecida habitualmente como a función Beta ou por algúns como a primeira integral euleriana. Ademais, esta Función Beta é comunmente escrita como

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

Pero Euler tiña aínda que manipular un pouco máis esta integral, para poder manter o numerador, que era o factorial e polo tanto o que lle interesaba, separándoo así do denominador.

Mediante substitucións, chegou finalmente a que

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n dx$$

á que o matemático Legendre (1752-1833) chamaría segunda integral euleriana. Foi precisamente este último o que modificou esta integral e chamouna Gamma, adquirindo esta forma:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Esta ten sentido cando $x > 0$ verificando ademais que:

$$\begin{cases} \Gamma(n+1) = n! & \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) & \forall x > 0 \end{cases}$$

Mais este non é senón o comezo pois a partir desta función produciuse un enorme desenvolvemento: así como o interese por estender o factorial aos números que se atopaban entre os enteiros positivos desencadeu o anteriormente explicado e culminou coa creación da función Gamma; o interese por estender esta función aos números negativos e incluso aos complexos suscitou un inmenso avance e incluso o desenvolvemento dunha nova área como a da teoría de funcións dunha variable complexa.

3.3. A función de Dirichlet

Como xa se explicou no capítulo anterior, esta función foi clave no desenvolvemento do concepto de función e por isto adicaremos as seguintes líneas a ver algún aspecto desta.

Veremos, a continuación, como esta función real de variable real non é continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Recordemos que a función de Dirichlet defínese por:

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{Q} \\ d, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Sexa $x_0 \in \mathbb{Q}$ arbitrario. Probaremos que D non é continua neste x_0. Para isto empregaremos os dous seguintes resultados sobre a densidade de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ e a caracterización da continuidade por sucesións:

Teorema 4. *Sexa $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función real de variable real e sexa $x_0 \in A$. Entón f será continua en x_0 se para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

se ten que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Como conseuencia, se existe unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica que $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, entón f non será continua en x_0.

Sexa $x_0 \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{I}$ é denso en $\mathbb{R}$, entón existe unha sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{I}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Pero $\forall n \in \mathbb{N}$ $D(x_n) = d$, o que implica que

$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = \lim_{n\to\infty} d = d \neq D(x_0) = c$

Ergo D non é continua en $x_0 \in \mathbb{Q}$. Como este punto x_0 escollido é arbitrario, D non é continua en ningún dos racionais. Para ver que non o é tampouco nos irracionais, razonamento e proba análogas.

Conclúese, así, que a función de Dirichlet non é continua en ningún punto da recta real.

3.4. A función de Weierstrass

Esta función ten como orixe o debate que, sobre todo a partir da segunda metade do século XIX, tivo lugar entorno á seguinte cuestión: a diferenciabilidade dunha función real de variable real que era continua en todos os seus puntos de definición. Foi a partir dese intre pois, anteriormente, estaba bastante xeneralizada a idea de que unha función deste tipo era diferenciable en todos os puntos salvo nunha cantidade finita deles. Como explica J.J. Dóniz en [10], esta era a crenza que entre outros tiñan Lagrange(1736-1813) ou Ampère(1775-1836). Outra opinión, pola contra, era a que gardaba Riemann. Para el, algunhas das funcións representadas por series non semellaban adaptarse ben a esta crenza. Así, en 1861 lanzou a seguinte conxectura que el xamais chegou a demostrar: a función

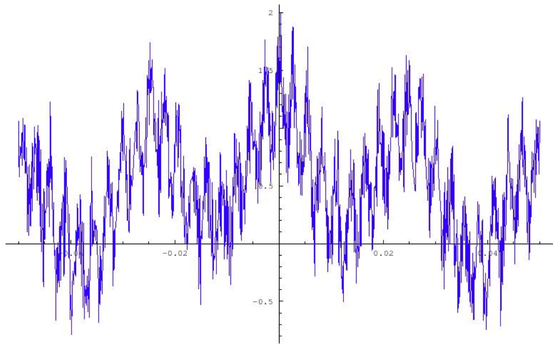

Figura 3.1: Gáfica dunha suma parcial da serie que define á función de Weierstrass

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 \cdot x)}{n^2} \end{array}$$

era continua en todo punto mais non era diferenciable en ningún.

Esta conxectura deu moito xogo pois, aínda que a continuidade foi rapidamente aceptada por ser consecuencia directa da *proba M de Weierstrass*, a cuestión da súa diferenciabilidade non convencía a todos. Foi así como mentres Weierstrass intentaba probala deu coa función que agora nós coñecemos como a función de Weierstrass cuxa forma é a seguinte:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

sendo $b \in (0,1)$, a un enteiro impar e con $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Cabe mencionar que esta función é o primeiro exemplo de función sempre continua e nunca diferenciable do que se ten constancia, pois no 1916 o matemático británico Hardy(1877-1947) demostrou que a función R de Riemann si era diferenciable en algúns puntos e polo tanto a conxectura de Riemann era incorrecta.

Co seguinte teorema probaremos este resultado.

Teorema 5. *Sexa $b \in (0,1)$ e a un enteiro impar tales que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Tense entón que a función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

é continua e non derivable en ningún punto.

Demostración. Para probar a continuidade da función faremos uso de la *proba M Weierstrass*.

Por ser $b \in (0,1)$ temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b} < \infty$$

Por outro lado tamén temos que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mid b^n \cos(a^n \pi x) \mid \leq b^n$. Empregando ambas aplicamos a proba M de Weiertrass, obtendo así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

converxe uniformemente á función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

sobre $\mathbb{R}$, da que é consecuencia directa a continuidade da función.

Pasemos entón a probar a non derivabilidade da función:

Sexa $x \in \mathbb{R}$. Entón temos

$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n \tfrac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h} =$$

$$= \textstyle\sum_{n=0}^{m-1} b^n \tfrac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h} + \textstyle\sum_{n=m-1}^{\infty} b^n \tfrac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h}$$

$$= S_m(h) + R_m(h)$$

Polo *Teorema do Valor Medio* teríamos que existiría certo $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\tfrac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h}\right) = -\operatorname{sen}(a^n\pi c)a^n\pi$$
$$\Rightarrow \mid \tfrac{\cos(a^n\pi(x+h))-\cos(a^n\pi x)}{h} \mid \leq a^n\pi$$
$$\Rightarrow \mid \cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x) \mid \leq a^n\pi \mid h \mid$$

polo que se $\mid h \mid < 1$ teríamos que

$$\mid S_m(h) \mid \leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab-1} < \pi \frac{a^m b^m}{ab-1}$$

A partir de agora estimaremos $\mid R_m(h) \mid$ por debaixo deste valor.
Sexa $a_m x = \mu_m + v_m$, con μ_m enteiro, $\mid v_m \mid < \frac{1}{2}$ e $h = \frac{1-v_m}{a^m} \Rightarrow 0 < h < \frac{3}{2a^m}$ e

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m}a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\mu_m+1) \tag{3.1}$$

Como a impar

$$\cos(a^n\pi x) = \cos(a^{n-m}\pi(\mu_m+v_m)) = \cos(a^{n-m}\pi\mu_m)\cos(a^{n-m}\pi v_m)$$

$=(-1)^{\mu_m}\cos(a^{n-m}\pi v_m)$

$$\cos(a^n\pi(x+h)) = (-1)^{a^{n-m}(\mu_m+1)} = (-1)^{\mu_m+1} \Rightarrow$$

$$R_m(h) = \frac{(-1)^{\mu_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\{1+\cos(a^{n-m}\pi v_m)\}$$

Por seren todos os membros da serie positivos temos que

$$\mid R_m(h) \mid > \frac{b^m}{\mid h \mid} > \frac{2}{3}a^m b^m \Rightarrow \mid \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \mid \geq \mid R_m(h) \mid - \mid S_m(h) \mid > (\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})a^m b^m \tag{3.2}$$

O problema vén porque por hipótese tiñamos que $ab > 1+\frac{2}{3}\pi$ e como $m \to \infty \Rightarrow h \to 0$, do que se segue que

$$\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{\pi}{ab-1}\right) \to \infty$$

e polo tanto chegamos a que $f'(x)$ non existe, é dicir, f non é derivable en x e como este é arbitrario, concluimos que f non é derivable en ningún $x \in \mathbb{R}$.

□

3.5. A función de Thomae

Esta función, tamén coñecida como función popcorn, ten como orixe a función anterior que, como xa é coñecido, non é Riemann-integrable en ningún intervalo, a pesares de ser acotada. O obxectivo de Thomae (7840-1921) consistiu en modificar un pouco a función de Dirichlet para conseguir unha que fose Riemann-integrable. Así, en 1875 publicou a seguinte función:

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \textit{ sendo } p \textit{ e } q \textit{ primos entre si} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

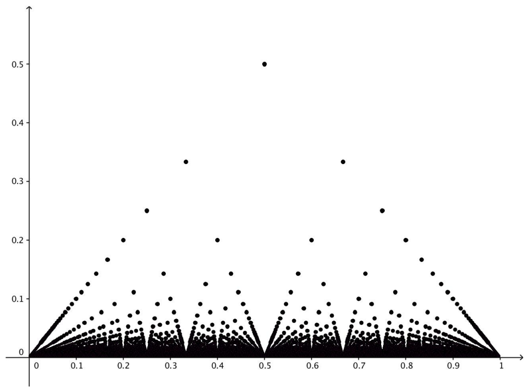

Figura 3.2: Función de Thomae restrinxida ao intervalo $[0,1]$

Como podemos observar, a función de Thomae toma únicamente o valor cero para os irracionais e valores estrictamente maiores ca el para los racionais. Ademais,

Teorema 6. *A función de Thomae é continua en todos os números irracionais e discontinua en todos os racionais.*

Demostración. Sexa $x_0 \in \mathbb{Q}$ arbitrario.

$x_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_0 = \frac{p}{q}$, supoñamos da forma irreducible

$\mathbb{I}$ denso en $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{I}$ and $\{x_n\} \longrightarrow x_0$

Por como está definida T, temos que $\forall x_n \; T(x_n) = 0$. Entón, $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión nula, polo que o seu límite será tamén 0, non $T(x_0)$ pois $T(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$

Pero entón chegamos a

$$\left.\begin{array}{rr} \{x_n\} \to & x_0 \\ \{T(x_n)\} \nrightarrow & T(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow T \textit{ non continua en } x_0 \tag{3.3}$$

Ao coller x_0 arbitrario, conclúese que T non é continua no conxunto dos racionais.

Vexamos agora a continuidade de T en $\mathbb{I}$:

Sexa $x_1 \in \mathbb{I}^+$ arbitrario (probarémolo soamente para os irracionais positivos, para os negativos é similar) e sexa $0 < \varepsilon < 1$ arbitrario tamén. Tomemos $N \in \mathbb{N} / \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Agora crearemos un entorno aberto con centro en x_1, poñamos I, que non contenga a ningún racional da forma:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{N-1}{N}$$

Tomemos $\delta_1 > 0$ de xeito que o intervalo $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ non conteña a ningún numero natural.

Tomemos agora $\delta_2 > 0$ de xeito que $(x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ non conteña a ningún número da forma $\frac{m}{2}$, con m e 2 primos entre sí.

En xeral, tomemos para $k = 1, ...N$, $\delta_k > 0$ de xeito que $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ non conteña a ningún número da forma $\frac{m}{k}$, con m e k primos entre sí.

Se definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_N\}$, entón temos que o intervalo

$$I = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$$

non contén a ningún dos racionais da forma antes descrita.

Agora comprobemos o que pasa neste entorno: tomemos calquer $x \in I$. Dúas posibilidades:

(a) Se $x \in \mathbb{I}$, entón $T(x) = T(x_1) = 0 \ \Rightarrow | T(x) - T(x_0) |= 0 < \varepsilon$

(b) Se $x \in \mathbb{Q}$, entón $| T(x) - T(x_0) |=| T(x) |= \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

Como ε arbitrario, concluimos entón que T é continua en x_1 e, como este último tamén arbitrario, que T é continua en $\mathbb{I}^+$.

□

Corolario 7. *A función de Thomae é Riemann-integrable en calquera intervalo compacto de $\mathbb{R}$, é dicir, en calquera intervalo da forma $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.*

Demostración. O conxunto de descontinuidades de esta é $\mathbb{Q}$, que ten medida de Lebesgue igual a 0 $\Rightarrow$ é Riemann-integrable nese intervalo.

□

3.6. A función de Cantor

A seguinte función da que estudaremos certos aspectos é a de Cantor. Este matemático revolucionou o mundo das matemáticas ca súa *Teoría de Conxuntos* durante a segunda metade do século XIX e a primeira do XX.

Como se explica en [12], esta función apareceu por primeira vez publicada nun traballo de Cantor en novembro de 1883. Cantor estaba a traballar en posibles extensións do *Teorema Fundamental do Cálculo* para funcións descontinuas e esta servíalle como contraexemplo a algunhas das afirmacións que o matemático alemán Harnack(1851-1888) fixera ao respecto destas extensións.

Cabe mencionar que esta función tamén é ás veces coñecida como a función de Lebesgue, pois este empregouna no seu famoso traballo *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* en 1904. O que resulta moi interesante desta función é que é singular. Aínda que hai máis casos de funcións singulares, en moitos deles a súa singularidade é bastante máis complexa de probar polo que este exemplo, ademais de axeitado historicamente, éo funcionalmente.

Probaremos, pois, que a función de Cantor é singular mais, para iso, necesitaremos comezar por describir o conxunto de Cantor. Comecemos, pois, coa súa construción.

Sexa C_0 o intervalo pechado $[0,1] \subset \mathbb{R}$

O primeiro paso que temos que facer é o de dividir C_0 en tres subintervalos do seguinte xeito

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Agora suprimimos o subintervalo do medio e así C_1 será a unión disxunta dos outros dous, é dicir,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

O seguinte paso é repetir o que fixemos en C_0 en C_1, isto é, en cada un dos dous intervalos disxuntos que forman C_1 dividímolos en tres subintervalos e eliminamos en cada caso o intervalo do medio:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$$

e

$$\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

co que eliminando os intervalos do medio de cada un chegamos a

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Co mesmo proceso co que construimos o anterior, construiriamos C_3, que quedaría ca forma

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

E así continuariamos sucesivamente de forma que, de cada conxunto C_n construiriamos o conxunto seguinte C_{n+1}, obtendo que cada conxunto C_n sería a unión disxunta de 2^n intervalos de lonxitude $\frac{1}{3^n}$.

Así, o conxunto de Cantor, C, defínese como

$$C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Probemos agora que este conxunto ten medida de Lebesgue igual a cero:

Teorema 8. *O conxunto de Cantor C ten medida de Lebesgue cero*

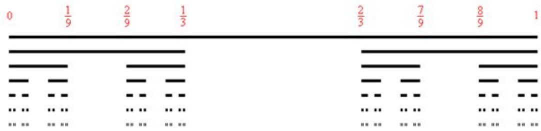

Figura 3.3: Construción do conxunto de Cantor

Demostración. Nótese que en C_1 quitamos un intervalo de lonxitude $\frac{1}{3}$; para C_2 quitamos dous intervalos de lonxitude $\frac{1}{9}$; para C_3, catro de $\frac{1}{27}$..., polo que

$$\begin{aligned} m(C) = m([0,1] \setminus (m([0,1] \setminus C))) &= 1 - \left(1 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{1}{9} + 4 \cdot \tfrac{1}{27} + ...\right) \\ &= 1 - \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 9. *O conxunto C de Cantor é non baleiro, perfecto y nunca denso*

Demostración. $m(C) = 0 \Rightarrow C$ non pode conter intervalos $\Rightarrow C$ nunca denso

Agora, se probamos que todo punto do conxunto é un punto límite, teremos probado que é perfecto. Sexa enón $x \in C$ e sexa $\delta > 0$. Escollemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > 3^{-n}$. Como $x \in C_n$ (pois $x \in C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$), $\Rightarrow \exists I$ intervalo pechado de lonxitude $3^{-n}/x \in I \subseteq C_n$.

Sexa a un punto final de I, con $a \neq x$, $a \in C$ e $0 <\mid x - a \mid< \delta$. Ergo x é un punto límite de C. □

Corolario 10. *C é non numerable*

Consecuencia directa pois todo conxunto perfecto é non numerable.

Agora probaremos que a función de Cantor, F, é singular. Para isto recordemos primeiro no que consiste unha función deste tipo:

Definición 11. Unha función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será singular se verifica:

a) f continua en $[a, b]$

b) f crecente

c) $f(a) < f(b)$

d) Existe un conxunto de medida nula N tal que $f'(x) = 0 \; \forall x \in [a, b] \setminus N$

Comecemos considerando as sucesións das seguintes funcións $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuxos términos verían dados polas seguintes expresións:

$$f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi C_n$$

$$F_n(t) = \int_0^x f_n(t)dt$$

Desta forma teríamos os primeiros elementos das sucesións, que serían

$$f_0 = 1$$

e

$$F_0 = x$$

e que logo se irían volvendo menos simples cada vez obtendo, por exemplo, os seguintes termos da segunda delas

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3x - 2), & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x, & 0 \le x \le \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{9} \le x \le \frac{2}{9} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(9x - 2), & \frac{2}{9} \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(9x - 6), & \frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{9} \\ \frac{3}{4}, & \frac{7}{9} \le x \le \frac{8}{9} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(9x - 8), & \frac{8}{9} \le x \le 1 \end{cases}$$

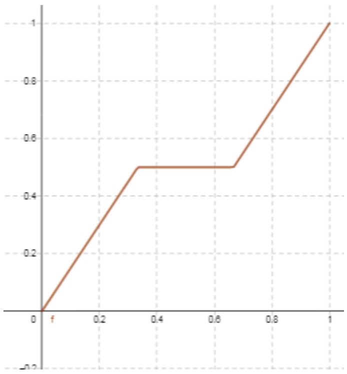

Figura 3.4: Gáfica de F_1

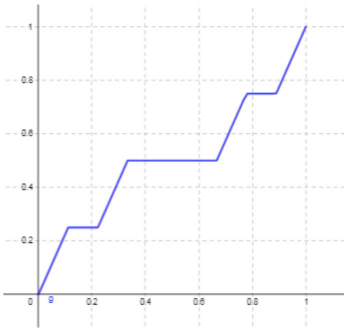

Figura 3.5: Gráfica de F_2

Por estes gráficos non é de estrañar que a esta función tamén sexa coñecida como a *escaleira do diablo.*

Observemos tamén que se $\left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_{j+1}}{3^n}\right]$ é un dos intervalos que forman C_n verifícase que

$$\int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} f_{n+1}(t)dt = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi C_{n+1}(t)dt = \frac{1}{2^n} = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} f_n(t)dt$$

polo que temos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións continuas e crecentes onde ademais o seu termo xeral verifica que

$$\mathrm{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{j+1}{2^n}, & \frac{a_j+1}{3^n} \leq x \leq \frac{a_{j+1}}{3^n} \; para \; j = 0, ..., 2^n - 2 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Notemos que os chanzos da escaleira únense de forma lineal e que se $x \in [0,1] \setminus C_{n-1}$, entón cumprirase que $F_n(x) = F_{n-1}(x)$.

Proposición 12. *Existe límite da sucesión* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *é dicir, existe* $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

Demostración. Demostraremos que é unha sucesión de Cauchy uniforme en $[0,1]$, e como $[0,1]$ compacto, teremos a converxencia da sucesión directamente.

$$| F_{n+1}(x) - F_n(x) |=| \int_0^x \left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \chi C_{n+1}(t) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \chi C_n(t)\right] dt |=$$
$$| \int_{\frac{a_j}{3^n}}^x \left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \chi C_{n+1}(t) - \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \chi C_n(t)\right] dt |\leq$$
$$\int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \chi C_{n+1}(t)dt + \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \chi C_n(t)dt = \tfrac{1}{2^n}$$

Sexa $\varepsilon > 0$ arbitrario, debemos atopar $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m,n > n_\varepsilon$, $| F_m(x) - F_n(x) |< \varepsilon \ \forall x \in [0,1]$. Tomamos n_ε de xeito que

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

Se tomamos calesquera $m, n > n_\varepsilon$, supoñamos por exemplo que $m > n$, entón para calquera $x \in [0,1]$ teríamos que

$$| F_m(x) - F_n(x) |=| F_m(x) - F_{m-1}(x) + F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x) + ... - F_{n+1}(x) + F_{n+1}(x) - F_n(x) |$$
$$\leq| F_m(x) - F_{m-1}(x) | + | F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x) | + ... + | F_{n+1}(x) - F_n(x) |$$
$$\leq \tfrac{1}{2^{m-1}} + \tfrac{1}{2^m} + ... + \tfrac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

Ergo queda probado que esta sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e polo tanto converxe á función de Cantor F.

□

Teorema 13. *A función de Cantor, $F : [0,1] \to [0,1]$ é singular.*

Demostración. $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funcións crecentes $\Rightarrow \forall x, y \in [0,1]$ tal que $x < y \Rightarrow F_n(x) < F_n(y) \ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) < \lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$$

co que temos que F é crecente. Ademais, por ser a sucesión de funcións continuas F_n e F o seu límite uniforme, temos que esta F tamén é continua en $[0,1]$.

Tamén vemos doadamente como, por estar F construida como está, que:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- Como F constante en cada intervalo do complementario do conxunto de Cantor, temos que $F' = 0$ para casi todo punto.

Ergo concluímos que esta función de Cantor é singular. □

Referencias bibliográficas

Para a elaboración deste capítulo empregáronse as seguintes referencias bibliográficas: [1], [9], [10],[11] e [12].

Bibliografía

[1] Durán, J. A., Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, 1996.*

[2] Kleiner, I., Excursions in the History of Mathematics*, Springer Sciencie+Business Media, 2012, 103–150*

[3] Youschkevitch, A.P., The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. Hist. Exact Sci., 1976*

[4] Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972*

[5] Sastre, P., Rey, G. Boubée, C., El concepto de función a través de la Historia*, UNIÓN, Revista iberoamericana de educación matemática, 2008*

[6] Ravetz, J.R., Vibrating strings and arbitrary functions*, The Free Press, 1961, 71–88.*

[7] Langer, R.E., Fourier series: the genesis and evolution of a theory*, The First Herbert Ellsworth Slaught Memorial Papel, 1947, 1–86*

[8] Vallejo, F., Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad*, 2008*

[9] Vásquez, L.M., Sobre la función gamma (Γ)*, 1999*

[10] Dóniz, J.J., Funciones raras en Análisis Real*, Univerdidad La Laguna, 2017*

[11] Gelbaum, B.R., Olmsted, J.M.H., Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, 2003*

[12] Dovgoshey, O., Martio, O., Ryazanov, V., Vuorinen, M., The Cantor function*, Science Direct, 2006*