



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Superficies de Traslación

Rosalía Rodríguez-Gigirey Villar

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Superficies de Traslación

Rosalía Rodríguez-Gigirey Villar

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía</b>
<b>Título: Superficies de translación</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
Introducir as superficies de translación como aquelas que veñen dadas pola suma de dúas curvas e analizar algúns exemplos. Describir as superficies de translación en función da súa curvatura de Gauss e curvatura media.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>1. Unha introdución a curvas e superficies</b>	<b>1</b>
1.1. Curvas regulares. . . . .	1
1.2. Superficies regulares . . . . .	4
1.3. A primeira e segunda formas fundamentais . . . . .	6
1.3.1. A primeira forma fundamental. Xeometría intrínseca . . . . .	6
1.3.2. A segunda forma fundamental. Xeometría extrínseca . . . . .	7
1.4. Curvatura de Gauss e curvatura media . . . . .	8
1.4.1. Interpretación xeométrica da curvatura de Gauss . . . . .	9
1.4.2. Interpretación xeométrica da minimalidade . . . . .	11
1.5. Superficies congruentes . . . . .	13
<b>2. Superficies de translación</b>	<b>17</b>
2.1. Definición e exemplos de superficies de translación . . . . .	17
2.1.1. Superficies de translación regradas . . . . .	18
2.2. Superficies de tipo plano ortogonal . . . . .	22
2.2.1. Superficies de tipo plano ortogonal con curvatura de Gauss constante	23
2.2.2. Superficies minimais de tipo plano ortogonal . . . . .	23
2.2.3. Exemplos de superficies de tipo plano planas . . . . .	25
2.3. Superficies de translación de tipo plano non ortogonais . . . . .	27
2.4. Superficies de translación xeradas por curvas non planas . . . . .	27
<b>3. Superficies de translación con <math>K</math> constante</b>	<b>29</b>
3.1. Superficies de translación con $K = 0$ . . . . .	31
3.1.1. Supoñamos que $f_1'' = 0$ nun intervalo $I_0 \subset I$ . . . . .	31

3.1.2.	Supoñamos que $f_1'' \neq 0$ nun intervalo $I_0 \subset I$ . . . . .	32
3.2.	Superficies de translación con $K \neq 0$ . . . . .	33
3.2.1.	Superficies de translación con dúas curvas xeratrices planas . . . . .	33
3.2.2.	Superficies de translación cunha única curva xeratriz plana . . . . .	36





## Resumo

Unha superficie é de translación se pode obterse ao desprazar unha curva  $\beta(t)$  ao longo doutra curva  $\alpha(s)$  e a súa parametrización obtense sumando ambas curvas,  $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ . As propiedades da superficie obtida dependerán da xeometría das curvas xeratrices  $\alpha$  e  $\beta$ . O noso obxectivo é analizar as superficies de translación con curvatura de Gauss constante e, nalgúns casos, con curvatura media constante. A análise dependerá do carácter plano ou espacial das curvas xeratrices e da posición relativa dos planos osculadores da situación plana.

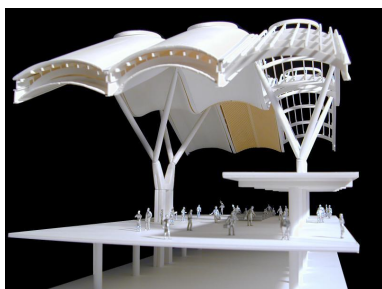
## Abstract

A translation surface can be obtained by moving a curve  $\beta(t)$  along another curve  $\alpha(s)$  and its parametrization is obtained by adding both curves,  $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ . The surface properties will depend on the geometry of the generating curves  $\alpha$  and  $\beta$ . Our goal is to analyze translation surfaces with constant Gauss curvature and, in some cases, with constant mean curvature. The analysis will depend on the plane or spatial character of the generating curves and the relative position of the osculating planes in the plane situation.



# Introdución

As superficies de translación forman unha familia de superficies en  $\mathbb{R}^3$  que se obteñen ao desprazar unha curva dada sobre outra fixada previamente. Este feito fai que dita clase de superficies sexa especialmente útil en procesos de construción. As superficies de translación son de uso habitual na arquitectura, constituíndo a base dun gran número de cubertas.



Modelo da cuberta da Terminal T4 do  
Aeroporto de Madrid Barajas



Cuberta da Estación de Melbourne

Asimesmo, as superficies de translación son obxectos de uso industrial que aparecen no noso día a día como as caixas de ovos. É por iso que a súa descrición ten, ademais do seu interese matemático, un claro interese práctico.

Dende un punto de vista matemático, unha gráfica  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é unha superficie de translación se a función  $f(u, v)$  se descompón como suma  $f(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$ , o que permite separar as variables e, en consecuencia, simplificar a análise dun bo número de problemas. Tal é o caso das superficies minimais de Scherk.

De modo xeral, dadas dúas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(t)$  no espazo, a superficie de translación determinada por elas ven dada pola parametrización  $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ . Aínda que ditas superficies presentan similaridades coas superficies regradas, existindo superficies que son á vez regradas e de translación, a súa xeometría é esencialmente diferente. O estudo das superficies de translación dependerá das propiedades das curvas xeratrices  $\alpha$  e  $\beta$ . Na situación máis sinxela, cando  $\alpha$  e  $\beta$  sexan curvas planas, a xeometría resultante dependerá da posición relativa dos planos nos que se sitúen ambas curvas.

É importante sinalar que, a pesar das súas restricións, as superficies de translación xeradas por curvas planas son as máis utilizadas tanto na construción como na industria por ser as de máis fácil manipulación.

O estudo das superficies de translación ten as súas orixes no traballo de Darboux [2]. Unha superficie de Darboux defínese como a superficie xerada polo movemento dunha curva mediante unha familia uniparamétrica de movementos ríxidos de  $\mathbb{R}^3$ . Tendo en conta que todo movemento ríxido de  $\mathbb{R}^3$  é composición dunha transformación ortogonal  $A$ , seguida por unha translación mediante un vector, a superficie de Darboux parametrízase como  $\mathbf{x}(s, t) = A(t) \cdot \gamma(s) + \beta(t)$ , onde  $\gamma(s)$  e  $\beta(t)$  son dúas curvas espaciais e  $A(t)$  é unha matriz ortogonal. As superficies de translación correspóndense, entón, coa situación máis sinxela das superficies de Darboux nas que a curva de transformacións ortogonais  $A(t)$  é constante e  $\alpha(s) = A \cdot \gamma(s)$ . A pesar da historia destas superficies, problemas básicos como a clasificación das superficies de translación con curvatura de Gauss constante [3], ou a clasificación das superficies de translación minimais [9], non foron resoltos ata a actualidade.

O obxectivo deste traballo é analizar as superficies de translación con curvatura de Gauss constante e minimais baixo certas restricións na súa construción. De forma un pouco máis precisa, esta memoria estruturase como segue.

O Capítulo 1 dedícase á introdución dos elementos básicos da xeometría de curvas e superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Moitos dos conceptos xa foron abordados na materia "Curvas e Superficies", aínda que son recordados coa intención de fixar a notación empregada no traballo. Outros resultados, como a interpretación xeométrica da curvatura de Gauss, en termos da distorsión da área causada pola aplicación de Gauss, ou a interpretación xeométrica da curvatura media, en termos da distorsión da área causada polas variacións normais da superficie, son analizadas con detalle.

O Capítulo 2 dedícase en primeiro lugar a introducir as superficies de translación. Mostramos a existencia de superficies de translación que son, ademais, regradas. Aparte das superficies cilíndricas móstrase que o helicoides é regrada e de translación (algo que non parece obvio nunha primeira impresión). Ámbalas dúas clases de superficies son, sen embargo, diferentes, como mostra o paraboloides elíptico, que é unha superficie de translación non regrada. En segundo lugar, centrámonos na análise da situación máis simple: as superficies de translación de tipo plano con curvas xeratrices situadas en planos ortogonais. Mostramos que tal superficie ten curvatura de Gauss constante se, e só se, é unha superficie cilíndrica, en cuxo caso, a curvatura de Gauss é nula (Teorema 2.3). Analizamos as superficies de translación minimais, mostrando que unha superficie de translación de tipo plano con curvas xeratrices situadas en planos ortogonais é minimal se, e só se, é localmente un plano ou unha superficie de Scherk (Teorema 2.4). Asimesmo analizamos outros tipos de superficies

de translación habitualmente utilizadas na práctica, como os paraboloides ou a superficie caixa de ovos. É importante sinalar a existencia de superficies de translación xeradas por curvas espaciais, como é o caso do helicoides ou o senoide.

O Capítulo 3 constitúe a parte central da memoria. Nel analízanse as superficies de translación con curvatura de Gauss constante, centrándonos na análise de dúas situacións particulares.

Na Sección 3.1 mostramos que unha superficie de translación con curvatura de Gauss nula ten que ser localmente isométrica a un plano ou a unha superficie cilíndrica (Lema 3.2). O caso de curvatura de Gauss constante non nula é considerado na Sección 3.2 para superficies de translación onde unha das curvas xeratrices é plana. Mostramos a non existencia de tales superficies cando as dúas curvas xeratrices son planas na Sección 3.2.1 para máis tarde analizar a situación na que só unha das xeratrices é plana na Sección 3.2.2. En cada un dos casos, o resultado obtense a partir da consideración de parametrizacións adecuadas e a posibilidade de separar variables en certas ecuacións diferenciais determinadas pola curvatura de Gauss. Consideramos importante sinalar que, aínda que a demostración presentada segue as liñas xerais de [8], en certos puntos o noso argumento difire do considerado por ditos autores.

O resultado máis xeral, que establece que as únicas superficies de translación con curvatura de Gauss constante son os planos e as superficies cilíndricas (probado recentemente en [3]), escápase dos obxetivos deste traballo.



# Capítulo 1

## Unha introdución a curvas e superficies

Neste capítulo introduciremos os conceptos relacionados coas curvas e superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  que serán necesarios para o desenvolvemento do traballo.

Comezaremos cos conceptos básicos sobre as curvas, a curvatura, a torsión e o Triedro de Frenet. A continuación consideraránse os conceptos básicos de superficies en  $\mathbb{R}^3$ ; especialmente a curvatura de Gauss e a curvatura media. Mostraremos unha interpretación xeométrica da curvatura de Gauss como unha medida da distorsión na área causada pola aplicación de Gauss. Despois de introducir a curvatura media móstrase que as superficies minimais correspóndense coas superficies críticas do funcional área para variacións normais.

Ademais, recórdanse as nocións de isometría local e congruencia, e a súa relación coa primeira e segunda formas fundamentais en termos do Teorema Fundamental da teoría de superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1. Curvas regulares.

Sexa  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  unha curva diferenciable parametrizada. Diremos que  $\alpha(t)$  é unha curva parametrizada *regular* se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

A condición de regularidade permite definir unha nova parametrización da curva en termos do parámetro lonxitude de arco  $s \equiv h(t) = \int_{t_0}^t \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2} dt$ , de xeito que  $\alpha(s)$  é unha reparametrización de  $\alpha$ , para calquera valor  $t_0 \in I$ . Isto ven garantido polo feito de ser  $h'(t) = \|\alpha'(t)\| \neq 0$  pola hipótese de regularidade. Ao parámetro  $s = h(t)$  chamáremoslle *parámetro lonxitude de arco* e, á curva reparametrizada  $\alpha(s) \equiv (\alpha \circ h^{-1})(s)$  denominarémola *curva parametrizada polo parámetro lonxitude de arco*. Dada unha curva

regular sempre é posible reparametrizala polo parámetro lonxitude de arco.

### Movimentos Ríxidos. Curvas congruentes

Un *movemento ríxido* (ou isometría) de  $\mathbb{R}^3$  é unha aplicación  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que conserva as distancias, i.e.,  $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$  para calquera puntos  $p, q \in \mathbb{R}^3$ .

Todo movemento ríxido de  $\mathbb{R}^3$  pódese expresar como composición dunha translación  $T_{\vec{b}} : \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mapsto T_{\vec{b}}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{b}$  onde  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , e unha transformación ortogonal, é dicir, unha transformación linear  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle G\vec{u}, G\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Toda transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  obtense como composición de simetrías respecto a puntos, rectas ou planos xunto con xiros arredor dunha recta dada. Diremos que un movemento ríxido conserva ou inverte a orientación segundo o faga a súa parte lineal  $G$ , isto é, segundo  $\det G = 1$  ou  $\det G = -1$ .

Diremos que dúas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  son *congruentes* se existe un movemento ríxido  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de xeito que  $\beta = F \circ \alpha$ . Un cálculo sinxelo, utilizando a regra da cadea, mostra que en tal caso  $\beta'(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))$ . Dado que todo movemento ríxido de  $\mathbb{R}^3$  se descompón como unha transformación ortogonal,  $G$ , seguida dunha translación  $T_{\vec{b}}$ , entón  $\beta' = G \circ \alpha'$ . Polo tanto, se a curva  $\alpha(s)$  está parametrizada por arco, calquera curva congruente con ela tamén estará parametrizada por arco.

### Curvas planas

O estudo das curvas planas será interesante como motivación para o estudo posterior das curvas no espazo e, ao mesmo tempo, xogará un papel esencial no estudo das seccións normais de superficies. Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  a transformación ortogonal dada pola rotación de ángulo  $\pi/2$ :

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada curva parametrizada por arco  $\alpha(s)$  no plano, definimos o seu *diedro de Frenet* como

$$T(s) := \alpha'(s) \quad N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s).$$

Chamamos *curvatura da curva plana*  $\alpha(s)$  á compoñente normal da variación do vector velocidade,  $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ . Así, derivando obtemos

$$\begin{cases} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s). \end{cases}$$

Se  $\alpha$  e  $\beta = F \circ \alpha$  son dúas curvas planas congruentes, entón os correspondentes diedros de Frenet verifican

$$T_\beta = G(T_\alpha),$$

$$N_\beta = R_{\frac{\pi}{2}} T_\beta = (R_{\frac{\pi}{2}} \circ G)(T_\alpha) = \det(G) (G \circ R_{\frac{\pi}{2}})(T_\alpha) = \det(G) G(N_\alpha),$$

onde  $\det G = \pm 1$  é o determinante da transformación ortogonal asociada ao movemento ríxido  $F$ . Polo tanto, as curvaturas de  $\alpha$  e  $\beta = F \circ \alpha$  verifican

$$\kappa_\beta = \langle T'_\beta, N_\beta \rangle = \det(G) \langle GT'_\alpha, GN_\alpha \rangle = \det(G) \langle T'_\alpha, N_\alpha \rangle = \det(G) \kappa_\alpha.$$

En consecuencia dúas curvas planas congruentes teñen a mesma (ou oposta) curvatura segundo a transformación ortogonal asociada ao movemento ríxido conserve (ou invirta) a orientación.

O Teorema Fundamental da teoría local de curvas planas asegura a existencia de curvas para calquera curvatura prefixada e, ademais, garante que dúas curvas planas coa mesma curvatura son congruentes.

**Teorema 1.1** (Fundamental da teoría local de curvas no plano). *Dada unha función diferenciable  $\kappa(s)$  definida nun certo intervalo  $I \in \mathbb{R}$ , existe unha curva regular  $\alpha : s \in I \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  de velocidade unidade para a que  $\kappa(s)$  é a súa curvatura.*

*Ademais, se dúas curvas planas teñen a mesma curvatura (salvo o seu signo), entón son congruentes.*

### Curvas no espazo

Sexa  $\alpha(s)$  unha curva regular no espazo parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Sexa  $T(s) = \alpha'(s)$  o vector tanxente á curva. Como  $\langle T, T \rangle = 1$ , entón  $\langle T, T' \rangle = 0$ . Dado que o vector  $T'$  é ortogonal ao vector tanxente unitario, chamamos *vector normal* ao vector unitario na dirección de  $T'$ , isto é  $N(s) := \frac{1}{\|T'(s)\|} T'(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s)$ , sempre que  $T'(s) \neq 0$ . Asemade chamamos *curvatura da curva no espazo* á función  $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ . A diferenza da curvatura das curvas planas, a curvatura das curvas no espazo sempre é non negativa. Se a curvatura  $\kappa(s) = 0$  nun certo intervalo, entón a restricción da curva a dito intervalo é un segmento de recta.

Defínese o *vector binormal* da curva  $\alpha(s)$  como o vector normal unitario asociado ao plano osculador determinado polo produto vectorial

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

onde  $\wedge$  denota o produto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Defínese a *torsión* de  $\alpha(s)$  como a función dada por

$$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle,$$

ou o que é o mesmo, a función dada por  $B'(s) = \tau(s)N(s)$ . Referirémonos a  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  como o *triedro de Frenet* asociado á curva  $\alpha(s)$ . A súa variación ven dada polas expresións

$$\begin{cases} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= \tau(s)N(s). \end{cases}$$

É importante sinalar que se dúas curvas  $\alpha$  e  $\beta = F \circ \alpha$  son congruentes, entón os correspondentes triedros de Frenet  $\{T, N, B\}$  veñen dados por

$$T_\beta = GT_\alpha, \quad N_\beta = GN_\alpha, \quad B_\beta = \det(G)B_\alpha,$$

onde  $G$  denota a transformación ortogonal asociada ao movemento ríxido. En consecuencia a curvatura e torsión das curvas  $\alpha$  e  $\beta = F \circ \alpha$  están relacionadas por

$$\kappa_\beta = \kappa_\alpha, \quad \tau_\beta = \det(G)\tau_\alpha,$$

polo que a curvatura é invariante por congruencia, mentras que a torsión é invariante salvo o signo, segundo a transformación ortogonal  $G$  conserve ou invirta a orientación. Ao igual que para as curvas planas, o Teorema Fundamental da teoría local de curvas no espazo mostra que toda curva está determinada pola súa curvatura e torsión salvo un movemento ríxido do espazo.

**Teorema 1.2** (Fundamental da teoría local de curvas no espazo). *Sexan  $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcións diferenciables con  $\kappa(s) > 0$ , para todo  $s \in I$ . Entón existe unha curva regular  $\alpha(s)$  parametrizada por arco de xeito que  $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$  e  $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$ , para todo  $s \in I$ .*

*Ademais, se dúas curvas  $\alpha$  e  $\beta$  teñen a mesma curvatura e a mesma torsión (salvo o seu signo), entón son congruentes.*

Finalmente é importante sinalar que, aínda que teoricamente é posible, en moitos casos resulta imposible coñecer a parametrización por lonxitude de arco dunha curva dada. Polo tanto, será de importancia poder calcular tanto a curvatura como a torsión dunha curva  $\alpha(t)$  a partir dunha parametrización arbitraria da mesma. As seguintes expresións son ben coñecidas (véxase, por exemplo [5])

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

## 1.2. Superficies regulares

**Definición 1.3.** *Unha superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  é un subconxunto non baleiro  $S \subset \mathbb{R}^3$  de xeito que para cada punto  $p \in S$  existe un entorno aberto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  do punto  $p$  e unha*

aplicación

$$\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{V} \cap S$$

verificando as seguintes condicións:

- (1)  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciable.
- (2)  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$  é un homeomorfismo, é dicir, é bixectiva na imaxe e a súa inversa é continua.
- (3) Para todo  $p \in \mathcal{U}$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é inxectiva, é dicir, se representamos por  $(x_1, x_2)$  os puntos do plano e as funcións compoñentes de  $\mathbf{x}$  como

$$\mathbf{x}(x_1, x_2) = (x(x_1, x_2), y(x_1, x_2), z(x_1, x_2))$$

entón a matriz Jacobiana

$$d\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} x(p) & \frac{\partial}{\partial x_2} x(p) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} y(p) & \frac{\partial}{\partial x_2} y(p) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} z(p) & \frac{\partial}{\partial x_2} z(p) \end{pmatrix}$$

é de rango máximo en cada  $p \in \mathcal{U}$ .

*Notación 1.4.* Diremos que:

1.  $\mathbf{x}$  ou  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  é unha *parametrización local* ou *carta local* da superficie.
2. Ao aberto  $\mathcal{U}$  chamáremoslle *dominio da parametrización*.
3. Os parámetros  $(x_1, x_2)$  serán as coordenadas locais da superficie.

**Teorema 1.5.** *Sexa  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  unha aplicación diferenciable e  $a \in \mathbb{R}$  un valor regular de  $f$ . Entón  $f^{-1}(\{a\}) \subset \mathbb{R}^3$  é unha superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  e chamáremola superficie de nivel da función  $f$ .*

Sexa  $S$  unha superficie regular e  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  unha aplicación. Consideramos a parametrización local  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  de  $S$  e denotamos por  $\hat{F} = F \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  a *lectura en coordenadas*. Unha función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  é *diferenciable* se o é na súa lectura en coordenadas.

Sexan  $S_1$  e  $S_2$  dúas superficies regulares e  $F : S_1 \rightarrow S_2$  unha aplicación. Diremos que  $F$  é *diferenciable nun punto*  $p \in S_1$  se para calquera parametrización  $(\mathcal{U}_1, \mathbf{x}_1)$  de  $S_1$  e  $(\mathcal{U}_2, \mathbf{x}_2)$

de  $S_2$  en  $F(p)$ , a expresión en coordenadas de  $F$ ,  $\hat{F} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}_1$ , é diferenciable no punto  $\mathbf{x}_1^{-1}(p)$ . Diremos que unha aplicación  $F : S_1 \rightarrow S_2$  entre dúas superficies regulares é un *difeomorfismo* de  $F$  se é un homeomorfismo entre  $S_1$  e  $S_2$  e, ademais,  $F$  e a súa inversa son diferenciables como aplicacións entre superficies.

Unha curva diferenciable nunha superficie  $S$  é unha aplicación diferenciable  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ , onde  $I$  é un intervalo aberto. Se consideramos unha parametrización local  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  de  $S$ , a curva lerase localmente en coordenadas como a aplicación:

$$\hat{\alpha}(t) = (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

obtendo así unha curva en  $\mathbb{R}^2$ .

Un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  é tanxente a unha superficie regular  $S$  nun punto  $p \in S$  se existe unha curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \vec{v}$ .

Chamamos espazo tanxente a superficie  $S$  nun punto  $p$ , e denotamos por  $T_p S$ , ao conxunto formado por todos os vectores tanxentes en  $p$ .

**Lema 1.6.** *Sexa  $S$  unha superficie regular e  $p \in S$ . Sexa  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  unha parametrización local de  $S$  nunha veciñanza de  $p$  e sexa  $\mathbf{x}^{-1}(p) = q \in \mathcal{U}$ . Entón  $T_p S = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ .*

Sexan  $S \subset \mathbb{R}^3$  unha superficie regular,  $p \in S$  e  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  unha función diferenciable. Definimos a diferencial de  $f$  en  $p$  como a aplicación

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto df_p(\vec{v}) = (f \circ \alpha)'(0), \end{aligned}$$

onde  $\alpha(t)$  é unha curva diferenciable que representa ao vector  $\vec{v}$ . A aplicación  $df_p$  está ben definida e é lineal.

## 1.3. A primeira e segunda formas fundamentais

### 1.3.1. A primeira forma fundamental. Xeometría intrínseca

Sexan  $S$  unha superficie regular e un punto  $p \in S$ . Sabemos que  $T_p S$  é un espazo vectorial de dimensión 2 contido en  $\mathbb{R}^3$ . Logo, dados dous vectores  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$ , podemos calcular o produto escalar  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p$  como vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

Sexa  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  o produto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  e consideremos a súa restrición ao espazo tanxente en cada punto  $p \in S$  como a forma bilineal simétrica e definida positiva

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}.$$

Á súa forma cuadrática asociada

$$\mathbb{I}_p : \vec{v} \in T_p S \longmapsto I_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2 \geq 0$$

chamarémoslle *primeira forma fundamental de S en p*.

Chamaremos *coeficientes da primeira forma fundamental* correspondentes á parametrización  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  ás funcións:

$$\begin{pmatrix} g_{11}(x_1, x_2) & g_{12}(x_1, x_2) \\ g_{21}(x_1, x_2) & g_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental verifican o seguinte:

$$g_{11}, g_{22} > 0 \quad \text{e} \quad g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

A primeira forma fundamental permítenos construír e falar da xeometría intrínseca dunha superficie. Definimos unha *isometría local* entre dúas superficies regulares  $S_1$  e  $S_2$  como unha aplicación diferenciable  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  que conserva a primeira forma fundamental, é dicir,

$$\langle d\Phi_p(\vec{v}), d\Phi_p(\vec{w}) \rangle_{\Phi(p)} = \langle \vec{V}, \vec{w} \rangle_p$$

para calquera vectores tanxentes  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S_1$ .

Se  $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$  é unha isometría local, entón existen parametrizacións locais  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  de  $S_1$  e  $(\mathcal{U}, \hat{\mathbf{x}} = \Phi \circ \mathbf{x})$  de  $S_2$  nas que os coeficientes da primeira forma fundamental son iguais, é dicir,  $g_{ij}(x_1, x_2) = \hat{g}_{ij}(x_1, x_2)$ . Reciprocamente, se é posible parametrizar localmente as superficies  $S_1$  e  $S_2$  de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental coincidan, entón existe unha isometría local entre ambas superficies.

### 1.3.2. A segunda forma fundamental. Xeometría extrínseca

Definimos a *aplicación de Gauss* como a aplicación  $S \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  que a cada punto da superficie lle asocia un vector normal unitario. Sexa  $(\mathcal{U}, \mathbf{X})$  unha parametrización local da superficie  $S$ . Entón a aplicación de Gauss ven dada por:

$$N : p \in \mathcal{V} \subset S \longmapsto N(p) = \pm \frac{\mathbf{x}_1(p) \wedge \mathbf{x}_2(p)}{\|\mathbf{x}_1(p) \wedge \mathbf{x}_2(p)\|} \in \mathbb{S}^2(1),$$

onde “ $\wedge$ ” denota o produto vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Se ben a aplicación de Gauss dunha superficie non é necesariamente continua, como é o caso da cinta de Möbius, a súa continuidade garante a diferenciabilidade da mesma sen máis que ter en conta a expresión anterior. En calquera caso, como a análise que levaremos

a cabo neste traballo é de carácter local, podemos asumir que a aplicación de Gauss é diferenciable no que segue.

Sexa  $S$  unha superficie regular. Chamaremos *operador de configuración* da superficie  $S$  no punto  $p \in S$  á aplicación lineal:  $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$  definida por  $A_p = -dN_p$ . O operador de configuración é autoadxunto, é dicir,  $\langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A_p(\vec{w}) \rangle$ , para calquera  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$ .

Defínese a *segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$*  como a forma cuadrática asociada á forma bilinear simétrica determinada polo operador de configuración

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{I}_p : T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle A_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle, \end{aligned}$$

que ven dada por  $\vec{v} \in T_p S \longmapsto \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{v})$ . Tendo en conta que

$$\mathbb{I}\mathbb{I}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle A_p(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_j \rangle = -\langle dN_p(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_j \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{ij} \rangle,$$

chamaremos *coeficientes da segunda forma fundamental* ás funcións

$$L_{11} = \langle N, \mathbf{x}_{11} \rangle \quad L_{22} = \langle N, \mathbf{x}_{22} \rangle \quad L_{12} = L_{21} = \langle N, \mathbf{x}_{12} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{21} \rangle$$

e representámolas coa seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} L_{11}(x_1, x_2) & L_{12}(x_1, x_2) \\ L_{21}(x_1, x_2) & L_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N, \mathbf{x}_{11} \rangle & \langle N, \mathbf{x}_{12} \rangle \\ \langle N, \mathbf{x}_{21} \rangle & \langle N, \mathbf{x}_{22} \rangle \end{pmatrix}.$$

## 1.4. Curvatura de Gauss e curvatura media

Como o operador de configuración é unha transformación lineal autoadxunta pódese diagonalizar respecto dunha base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de forma que

$$A_p \vec{e}_1 = \lambda_1(p) \vec{e}_1 \quad A_p \vec{e}_2 = \lambda_2(p) \vec{e}_2.$$

Os autovalores  $\lambda_1(p)$  e  $\lambda_2(p)$  denomínanse *curvaturas principais* da superficie  $S$  no punto  $p \in S$ , e os autovectores asociados  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  chámanse *direccións principais* do punto  $p \in S$ . Tendo en conta a expresión do polinomio característico do operador de configuración

$$\det(A_p - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 + 2 \text{traza}(A_p)\lambda + \det(A_p),$$

defínense as curvaturas de Gauss e media da superficie en termos dos invariantes alxébricos do operador de configuración.

**Definición 1.7.** Sexa  $S$  unha superficie regular. Defínese a *curvatura de Gauss* en cada punto  $p$  da superficie  $S$  como a función  $K(p) := \det(A_p)$ . Defínese a *curvatura media* en cada punto  $p \in S$  como a función  $H(p) := \frac{1}{2} \text{traza}(A_p)$ .

En termos das curvaturas principais temos o seguinte:

$$K(p) = \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p), \quad H(p) = \frac{1}{2}(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)).$$

A aplicación de Gauss dunha superficie non é única, estando definida salvo o signo (entrante ou saínte) do vector normal. Séguese, das expresións anteriores, que a curvatura de Gauss é independente da escolla da aplicación de Gauss, mentres que o signo da curvatura media depende da aplicación de Gauss. As curvaturas de Gauss e media exprésanse en termos da primeira e segunda formas fundamentais como

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

O Teorema Egregium de Gauss asegura que a curvatura de Gauss de toda superficie pode ser expresada somentes en termos da primeira forma fundamental, polo que é invariante por isometrías locais. En consecuencia se dúas superficies son localmente isométricas, entón as súas curvaturas de Gauss son iguais en puntos correspondentes. O recíproco non é certo. De feito, o helicoido  $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$  e a superficie de revolución  $\hat{\mathbf{x}} = (u \cos v, u \sin v, \log u)$  teñen a mesma curvatura de Gauss  $K(u, v) = \hat{K}(u, v) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$  a pesar de que non pode existir ningunha isometría local entre elas.

### 1.4.1. Interpretación xeométrica da curvatura de Gauss

Nos seguintes capítulos trataremos as superficies de translación con curvatura de Gauss constante. Por ese motivo introduciremos a continuación a interpretación xeométrica da curvatura de Gauss.

Sexan  $S$  e  $\bar{S}$  dúas superficies regulares orientadas. Diremos que unha aplicación diferenciable  $F : S \rightarrow \bar{S}$  conserva a orientación nun punto  $p \in S$  se, dada unha base positiva  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  de  $T_p S$ , entón  $\{dF_p(\mathbf{x}_1), dF_p(\mathbf{x}_2)\}$  é unha base positiva de  $T_{F(p)}\bar{S}$ . No caso contrario, diremos que  $F$  invirte a orientación en  $p$ .

Sexa  $S$  unha superficie regular orientada por  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ , onde consideramos a esfera  $\mathbb{S}^2(1)$  orientada polo normal exterior. Se  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  é unha base ortonormal positivamente orientada de  $T_p S$ , entón o produto vectorial

$$dN_p(\mathbf{x}_1) \wedge dN_p(\mathbf{x}_2) = \det(dN_p) \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = K(p) \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2.$$

En consecuencia a aplicación de Gauss conserva a orientación se  $K(p) > 0$  e invirtea se  $K(p) < 0$ . Polo tanto: se a aplicación de Gauss  $N$  conserva (resp., invirte) a orientación en  $p$ , entón escolleremos o signo positivo (resp., negativo) para a curvatura de Gauss en  $p$ ,  $K(p)$ .

Denotemos con  $B(\tilde{p}, \epsilon) = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^2 / d(\tilde{p}, \tilde{q}) < \epsilon\}$  a bola aberta no plano de centro  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^2$  e radio  $\epsilon > 0$ , respecto da distancia Euclidiana. Sexa  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  unha carta local sobre a superficie  $S$ , e sexa  $p \in \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset S$ . Para valores de  $\epsilon > 0$  suficientemente pequenos podemos supoñer que  $B(\mathbf{x}^{-1}(p), \epsilon) \subset \mathcal{U}$  e polo tanto podemos considerar a imaxe da bola aberta baixo a parametrización,  $V_\epsilon = \mathbf{x}(B(\mathbf{x}^{-1}(p), \epsilon))$ , que é un aberto sobre a superficie. O seguinte resultado mostra que a curvatura de Gauss proporciona a medida de como a aplicación de Gauss distorsiona o volume de rexións pequenas da superficie.

**Teorema 1.8.** *Sexa  $S$  unha superficie regular orientada, con aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ , e  $p \in S$  tal que a curvatura de Gauss  $K(p) \neq 0$ . Entón,*

$$K(p) = \pm \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(N(V_\epsilon))}{\text{Area}(V_\epsilon)}.$$

*Demostración.* Considerando a aplicación de Gauss  $N : \mathbf{x}(\mathcal{U}) \subset S \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  para algunha parametrización local  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  de  $S$ , como  $\det(dN_p) = K(p) \neq 0$ , entón  $N$  é un difeomorfismo local. Polo tanto existe un aberto  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  tal que  $N|_{\mathbf{x}(\mathcal{V})} : \mathbf{x}(\mathcal{V}) \rightarrow N(\mathbf{x}(\mathcal{V}))$  é un difeomorfismo. En tal caso,  $(\mathcal{V}, N \circ \mathbf{x})$  é unha parametrización local da esfera  $\mathbb{S}^2(1)$ .

Ademais,  $B(\mathbf{x}^{-1}(p), \epsilon) = (N \circ \mathbf{x})^{-1}(N(V_\epsilon))$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. Entón as áreas de  $V_\epsilon$  e  $N(V_\epsilon)$  veñen dadas por

$$\text{Area}(V_\epsilon) = \iint_{B_\epsilon} \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\| dudv, \quad \text{Area}(N(V_\epsilon)) = \iint_{B_\epsilon} \|(N \circ \mathbf{x})_1 \wedge (N \circ \mathbf{x})_2\| dudv.$$

Tendo en conta que

$$(N \circ \mathbf{x})_1 \wedge (N \circ \mathbf{x})_2 = dN(\mathbf{x}_1) \wedge dN(\mathbf{x}_2) = \det(dN) \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = K \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2,$$

a área da rexión  $N(V_\epsilon)$  resulta

$$\text{Area}(N(V_\epsilon)) = \iint_{B_\epsilon} |K \circ \mathbf{x}| \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\| dudv.$$

O Teorema do valor medio para integrais dobres, permite concluír que existen certos  $q, q' \in B_\epsilon \subset \mathcal{U}$  de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(N(V_\epsilon))}{\text{Area}(V_\epsilon)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{B_\epsilon} |K \circ \mathbf{x}| \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\| dudv}{\iint_{B_\epsilon} \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\| dudv} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|K(\mathbf{x}(q))| \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|(q) A(B_\epsilon)}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|(q') A(B_\epsilon)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |K(\mathbf{x}(q))| \frac{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|(q)}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|(q')} = |K(p)|, \end{aligned}$$

de onde se segue o resultado. □

### 1.4.2. Interpretación xeométrica da minimalidade

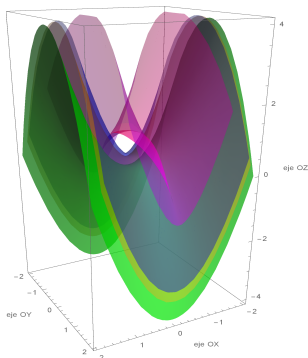
Unha superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  dirase *minimal* se a súa curvatura media  $H = 0$ . A continuación mostraremos que a condición de minimalidade aparece de forma natural estudando o comportamento da área dunha rexión da superficie dada en relación ás superficies obtidas ao desprazala na dirección dun campo de vectores normais prefixado.

Co obxectivo de medir cómo varía a área dunha rexión da superficie ao mover esta nunha dirección normal, introdúcese a noción de variación normal.

Sexa  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  unha superficie regular parametrizada mediante unha aplicación  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e sexa  $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbf{x}(\mathcal{Q})$  unha rexión acotada de  $\mathcal{S}$  para  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$ . Sexan  $N = N(u, v)$  un vector normal unitario á superficie e  $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función diferenciable. Chamamos *variación normal* da rexión da superficie  $\tilde{\mathcal{Q}}$  na dirección do vector normal  $N$  á aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t] : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, (u, v)) &\mapsto \mathbf{x}(u, v) + t\varphi(u, v)N(u, v) \end{aligned}$$

definida para  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  suficientemente pequeno. A función  $\varphi$  proporciona o tipo de deformación, mentras que o parámetro  $t$  indica a magnitude e o sentido da mesma. Se  $t$  se anula, a superficie non cambia e os distintos valores deste parámetro determinan unha familia de superficies  $\mathbf{x}[t](u, v)$ . Ademais, dado que a primeira forma fundamental  $(g_{ij})$  da superficie  $\mathbf{x}[t](u, v)$  é definida positiva, mantérase definida positiva para valores de  $t$  suficientemente próximos a  $t = 0$ , polo que podemos supoñer que  $\mathbf{x}[t](u, v)$  é unha superficie regular para todo valor de  $t$ .



Variación normal do paraboloides hiperbólico  $z = x^2 - y^2$  dada por

$$\mathbf{x}[t](u, v) = \mathbf{x}(u, v) + tN(u, v).$$

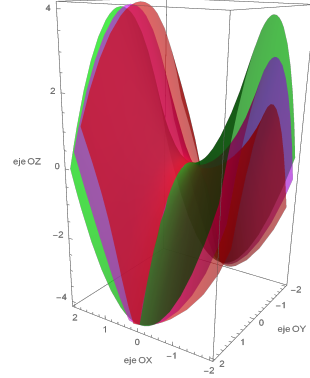
Mentras que para valores de  $t$  próximos a cero os conxuntos  $\mathbf{x}[t]$  son superficies regulares, para  $t = 1$  preséntanse auto-interseccións.

Variación normal do paraboloido hiperbólico  $z = x^2 - y^2$  dada por

$$\mathbf{x}[t](u, v) = \mathbf{x}(u, v) + t\varphi(u, v)N(u, v)$$

para una función  $\varphi(u, v) = \sin u$ .

A función  $\varphi$  modifica a magnitude e dirección do vector normal á superficie.



En cada un dos casos anteriores debuxouse a superficie inicial  $z = x^2 - y^2$  na cor verde, indicando noutras cores as súas variacións normais.

Os campos coordenados correspondentes ás parametrizacións  $\mathbf{x}[t]$  veñen dados por

$$\mathbf{x}[t]_1 = \mathbf{x}_1 + t\varphi_1 N + t\varphi N_1, \quad \mathbf{x}[t]_2 = \mathbf{x}_2 + t\varphi_2 N + t\varphi N_2,$$

onde  $\varphi_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi$ . Así, os coeficientes da primeira forma fundamental correspondente ás parametrizacións  $\mathbf{x}[t]$  veñen dados por:

$$\begin{aligned} g[t]_{ij} &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle + t\varphi_j \langle \mathbf{x}_i, N \rangle + t\varphi \langle \mathbf{x}_i, N_j \rangle + t\varphi_i \langle N, \mathbf{x}_j \rangle + t^2\varphi_i\varphi_j \langle N, N \rangle \\ &\quad + t^2\varphi_i\varphi \langle N, N_j \rangle + t\varphi \langle \mathbf{x}_j, N_i \rangle + t^2\varphi\varphi_j \langle N_i, N \rangle + t^2\varphi^2 \langle N_i, N_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle - 2t\varphi \langle \mathbf{x}_{ij}, N \rangle + t^2\varphi_i\varphi_j + t^2\varphi^2 \langle N_i, N_j \rangle \end{aligned}$$

xa que, ao ser  $0 = \langle \mathbf{x}_i, N \rangle$ , tense que  $\langle \mathbf{x}_i, N_j \rangle = -\langle \mathbf{x}_{ij}, N \rangle = L_{ij}$ . Así, os coeficientes da primeira forma fundamental evolucionan ao longo da variación como

$$g[t]_{ij} = g_{ij} - 2t\varphi L_{ij} + t^2\varphi_i\varphi_j + t^2\varphi^2 \langle N_i, N_j \rangle,$$

polo que

$$\frac{\partial}{\partial t} g[t]_{ij} = -2\varphi L_{ij} + 2t\varphi_i\varphi_j + 2t\varphi^2 \langle N_i, N_j \rangle.$$

En particular, evaluando en  $t = 0$  as expresións anteriores tense que

$$g[0]_{ij} = g_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial t} g[0]_{ij} = -2\varphi L_{ij}.$$

**Teorema 1.9.** *Unha superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^n$  é minimal se, e só se, é un punto crítico da aplicación área de calquera rexión acotada para toda variación normal.*

*Demostración.* Sexa  $\mathbf{x}(u, v)$  unha parametrización local da superficie definida nun aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  e sexa  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}$  de tal forma que  $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbf{x}(\mathcal{Q})$  é unha rexión acotada. Sexa  $\mathbf{x}[t]$  unha

variación normal determinada polo vector normal unitario  $N$  e unha función de deformación  $\varphi$ . Entón a aplicación área da variación normal ven dada por

$$A[t] := \iint_{\mathcal{Q}} \sqrt{g[t]_{11}g[t]_{22} - g[t]_{12}^2} \, dudv$$

Derivando a expresión anterior, e tendo en conta as expresións anteriores das primeiras formas fundamentais  $(g[t]_{ij})$ , tense

$$A'(t) = \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{Q}} \sqrt{g[t]_{11}g[t]_{22} - g[t]_{12}^2} \, dudv = \iint_{\mathcal{Q}} \frac{\frac{\partial}{\partial t} (g[t]_{11}g[t]_{22} - g[t]_{12}^2)}{2\sqrt{g[t]_{11}g[t]_{22} - g[t]_{12}^2}} \, dudv.$$

Tendo en conta que  $g[0]_{ij} = g_{ij}$  y  $\frac{\partial}{\partial t} g[0]_{ij} = -2\varphi L_{ij}$ , entón  $A'(0)$  ven dada por

$$\begin{aligned} A'(0) &= \iint_{\mathcal{Q}} \frac{-2\varphi (Lg_{22} + g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12})}{2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} -\varphi \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \frac{(L_{11}g_{22} + g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12})}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \, dudv \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} -2\varphi H \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \, dudv. \end{aligned}$$

Se  $\mathcal{S}$  é minimal ( $H = 0$ ) entón  $A'(0) = 0$  para toda variación normal. Reciprocamente, supoñamos que a superficie non é minimal e vexamos que existe unha variación normal onde  $A'(0) \neq 0$ . Se a superficie non é minimal en  $\mathcal{Q}$ , existe un punto en dita rexión no que  $H \neq 0$ . Dado que  $H$  é continua, existe  $\hat{\mathcal{Q}}$  un entorno aberto dese punto onde a curvatura media non se anula. Sexa  $N$  un campo de vectores normal definido en  $\mathcal{Q}$  e consideramos a variación normal determinada por  $\varphi = \frac{1}{2}H$ , é dicir,  $\mathbf{x}[t] = \mathbf{x} + \frac{t}{2}HN$ . Temos

$$A'(0) = \iint_{\mathcal{Q}} -H^2 \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \, dudv < 0,$$

polo que existe unha variación normal que non ten un punto crítico en  $t = 0$ . □

## 1.5. Superficies congruentes

Diremos que dúas superficies  $S_1$  e  $S_2$  son *congruentes* se existe un movemento ríxido  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que  $S_2 = F(S_1)$ . En tal caso, cada parametrización local  $(\mathcal{U}, \mathbf{x})$  de  $S_1$  induce unha parametrización local  $(\mathcal{U}, \hat{\mathbf{x}} = F \circ \mathbf{x})$  de  $S_2$  de xeito que os coeficientes da primeira e segundas formas fundamentais verifican que

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \hat{g}_{ij}(x_1, x_2), \quad L_{ij}(x_1, x_2) = \pm \hat{L}_{ij}(x_1, x_2),$$

onde o signo  $\pm 1$  depende de que o movemento ríxido preserve a orientación ou a invirta. Séguese de forma inmediata das expresións anteriores que a curvatura de Gauss,  $K(p)$ , é

invariante por movementos ríxidos, mentras que a curvatura media  $H(p)$  é invariante por movementos ríxidos que conservan a orientación.

Reciprocamente, séguese do Teorema Fundamental das superficies en  $\mathbb{R}^3$  que se dúas superficies teñen as mesmas primeira e segunda formas fundamentais, entón son congruentes. Intentaremos analizar isto máis a fondo. En primeiro lugar, introduciremos a *fórmula de Gauss* e as condicións de compatibilidade a fin de dar sentido ao enunciado do Teorema Fundamental.

Sexa  $S$  unha superficie regular orientada por  $N$  e sexa  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  unha parametrización de  $S$  positivamente orientada, é dicir, tal que  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, N\}$  é unha base de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada. Podemos expresar os vectores  $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, N_1, N_2$  en función de dita base da seguinte maneira

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{11} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_2 + L_{11} N, \\ \mathbf{x}_{12} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_2 + L_{12} N, \\ \mathbf{x}_{21} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_2 + L_{21} N, \\ \mathbf{x}_{22} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_2 + L_{22} N, \\ N_1 &= a_{11} \mathbf{x}_1 + a_{21} \mathbf{x}_2, \\ N_2 &= a_{12} \mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

para certos coeficientes  $a_{ij}, \Gamma_{ij}^k$  e  $L_{ij}$ , con  $i, j, k \in \{1, 2\}$ . Como  $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{21}$  tense que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ . Os coeficientes  $a_{ij}$  veñen dados por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Os símbolos de Christoffel están determinados por

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} & \frac{\partial}{\partial x_2} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} g_{22} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia as expresións das derivadas de  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  e  $N$  só dependen dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamentais de  $S$ . O Lema de Schwarz permite obter relacións entre estes coeficientes

$$(\mathbf{x}_{11})_2 - (\mathbf{x}_{12})_1 = 0, \quad (\mathbf{x}_{22})_1 - (\mathbf{x}_{21})_2 = 0, \quad N_{12} - N_{21} = 0. \quad (1.2)$$

A fórmula de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = g_{11} K, \quad (1.3)$$

e as ecuacións de Codazzi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}L_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1}L_{12} &= L_{11}\Gamma_{12}^1 + L_{12}(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - L_{22}\Gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}L_{12} - \frac{\partial}{\partial x_1}L_{11} &= L_{11}\Gamma_{22}^1 + L_{12}(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - L_{22}\Gamma_{12}^2,\end{aligned}\tag{1.4}$$

resultan ser equivalentes ás condicións (1.2). A fórmula de Gauss (1.3) e as ecuacións de Codazzi (1.4) son coñecidas como *ecuacións de compatibilidade* da teoría das superficies.

O Teorema Fundamental de superficies asegura que as ecuacións de compatibilidade son suficientes para asegurar a existencia dunha superficie.

**Teorema 1.10** (Teorema Fundamental da teoría de superficies en  $\mathbb{R}^3$ ). *Sexan  $g_{ij}, L_{ij}$  con  $i, j = 1, 2$  funcións diferenciables definidas nun conxunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ , verificando as ecuacións de compatibilidade (1.3)–(1.4) e tales que*

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0.$$

*Entón, existen un aberto  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  e un difeomorfismo  $\mathbf{x} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{x}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^3$ , de forma que  $\mathbf{x}(\mathcal{V})$  é unha superficie regular, parametrizada por  $\mathbf{x}$  tal que os coeficientes das súas primeira e segunda formas fundamentais son  $g_{ij}, L_{ij}$  con  $i, j = 1, 2$ , respectivamente.*

*Ademais, se  $\mathcal{W}$  é conexo e  $\bar{\mathbf{x}} : \mathcal{W} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(\mathcal{W}) \subset \mathbb{R}^3$  é outro difeomorfismo que satisfai tamén as condicións anteriores, entón existe un movemento ríxido de  $\mathbb{R}^3$  que transforma  $\mathbf{x}(\mathcal{V})$  en  $\bar{\mathbf{x}}(\mathcal{W})$ .*



## Capítulo 2

# Superficies de translación

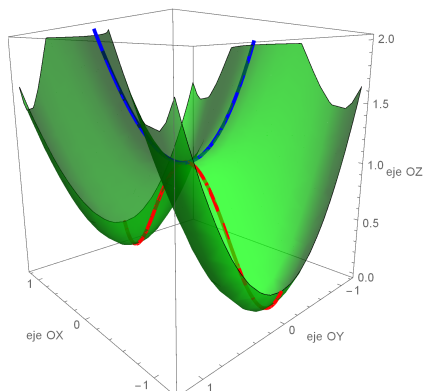
O obxectivo deste capítulo é, despois de establecer a definición de superficie de translación, proporcionar exemplos significativos de tales superficies. Mostrarase a existencia de superficies de translación regradas e de revolución, e estudarase a xeometría das superficies de translación xeradas por curvas planas situadas en planos ortogonais, o que supón a situación máis sinxela posible.

### 2.1. Definición e exemplos de superficies de translación

Unha *superficie de Darboux* defínese cinematicamente como o movemento dunha curva mediante unha familia uniparamétrica de movementos ríxidos de  $\mathbb{R}^3$  [2]. Polo tanto, unha parametrización de dita superficie ven dada por  $\mathbf{x}(s, t) = G(t) \cdot \alpha(s) + \beta(t)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  son dúas curvas no espazo e  $G(t)$  é unha matriz ortogonal. Neste traballo trataremos a situación particular na que  $G(t)$  sexa a identidade.

**Definición 2.1.** Unha superficie  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  é unha *superficie de translación* se pode ser expresada localmente como a suma  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  de dúas curvas  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tales que  $\alpha' \wedge \beta' \neq 0$ .

As curvas  $\alpha$  e  $\beta$  denominaríanse *curvas xeratrices* de  $S$ . Ademais, se  $\alpha$  e  $\beta$  son curvas planas, diremos que a superficie de translación é de *tipo plano*.



A superficie  $z = (x^2 - 1)^2 - y^2$  obtense como traslación da curva (debuxada en vermello)

$$r \mapsto (r, 0, (r^2 - 1)^2)$$

ao longo da parábola (debuxada en azul)

$$s \mapsto (0, s, 1 + s^2),$$

que representan as curvas xeratrices. Ademais, este é un exemplo de superficie de tipo plano.

A superficie de traslación  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  obtense mediante a traslación de  $\alpha$  ao longo de  $\beta$ , ou reciprocamente, dado que os papeis desempeñados por ambas curvas son simétricos.

As curvas paramétricas  $s = s_0$  son congruentes entre sí, ao igual que as curvas paramétricas  $t = t_0$ .

A continuación veremos algúns exemplos de superficies de traslación

### 2.1.1. Superficies de traslación regradas

Unha superficie é *regrada* se a superficie contén unha recta pasando por cada punto. Estas superficies están caracterizadas a partir dunha curva xeratriz  $\alpha(t)$  e unha curva direccional  $v(t)$ , de xeito que determinan unha parametrización  $\mathbf{x}(t, s) = \alpha(t) + sv(t)$ .

Ademais do plano (que é un exemplo trivial de superficie regrada), os cilindros e os conos son superficies regradas con curvatura de Gauss cero. Pero tamén existen outras superficies regradas con curvatura de Gauss non nula (e polo tanto estritamente negativa) como son o hiperboloide dunha folla ou o helicoido.

Toda superficie regrada da forma  $\mathbf{x}(t, s) = \alpha(t) + sv(t)$  con  $v(t)$  constante é unha superficie de traslación. Tal é o caso das superficies cilíndricas. Sen embargo, existen superficies regradas coma o helicoido que poden ser vistas como superficies de traslación sen corresponderse coa situación anterior.

#### Superficies cilíndricas

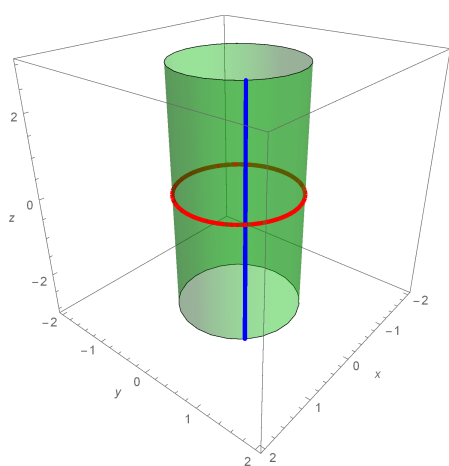
Unha *superficie cilíndrica* é unha superficie regrada  $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + tv(s)$  coa curva direccional constante,  $v(s) = \vec{v}$ , é dicir, a superficie contén rectas paralelas pasando por cada punto da mesma. Todas estas superficies son invariantes baixo calquera traslación na dirección do vector  $\vec{v}$ .

Para cada superficie de traslación cilíndrica  $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) + tv$ , tense que

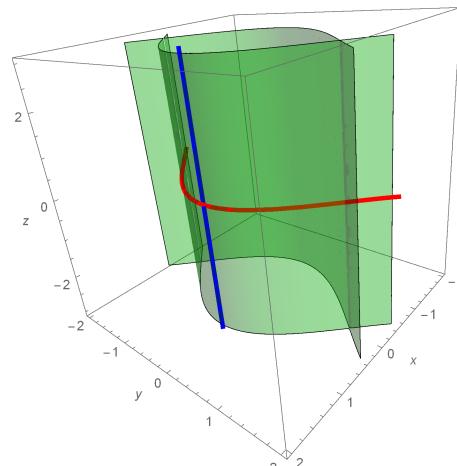
$$\mathbf{x}_1 = \alpha', \quad \mathbf{x}_2 = v$$

$$\mathbf{x}_{11} = \alpha'', \quad \mathbf{x}_{12} = 0, \quad \mathbf{x}_{22} = 0.$$

Polo tanto, os coeficientes da segunda forma fundamental verifican  $L_{12} = L_{21} = L_{22} = 0$ , de onde se segue que  $\det(L_{ij}) = 0$  e polo tanto a curvatura de Gauss  $K = 0$ .



$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\text{sen}^2 x + y^2 = 1$$

Outro tipo de superficie cilíndrica que, a súa vez, é unha superficie de traslación é a *superficie parca* (ou superficie "grim reaper").

Sexa  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  un aberto e sexa  $\mathbf{x}[t](u, v) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  unha familia de superficies dependente dun parámetro  $t \in I \subset \mathbb{R}$  definida nun intervalo que contén á orixe. A ecuación en derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}[t] = H_{\mathbf{x}[t]} N_{\mathbf{x}[t]}$$

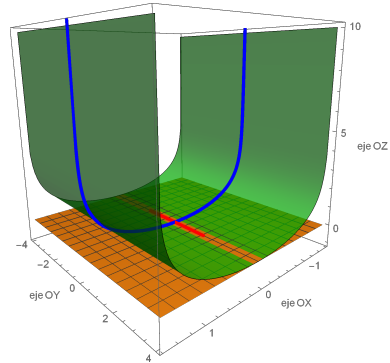
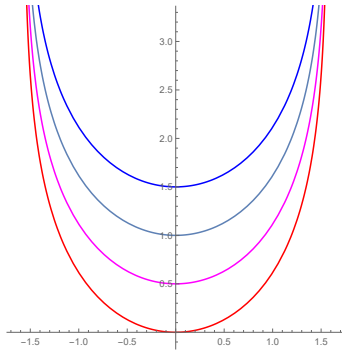
coñécese como *ecuación do fluxo por curvatura media*, onde  $H_{\mathbf{x}[t]}$  representa a curvatura media da superficie  $\mathbf{x}[t]$  e  $N_{\mathbf{x}[t]}$  denota a súa aplicación de Gauss.

Toda superficie minimal (i.e.,  $H = 0$ ) permanece constante baixo o fluxo de curvatura media, xa que a familia de superficies constante  $\mathbf{x}[t] = \mathbf{x}[0]$  é solución da ecuación.

Unha clase especial de solucións do fluxo de curvatura media é a dada polos *solitóns de traslación*. Estas son solucións  $\mathbf{x}[t]$  que se moven por traslacións:  $\mathbf{x}[t + s] = \mathbf{x}[t] + s\vec{v}$  para algún vector fixo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Neste caso, todas as superficies  $\mathbf{x}[t]$  son congruentes e verifícase que o vector curvatura media  $H_{\mathbf{x}[t]} N_{\mathbf{x}[t]}$  coincide coa proxección do vector  $\vec{v}$  na dirección normal á superficie,  $H_{\mathbf{x}[t]} N_{\mathbf{x}[t]} = \langle \vec{v}, N_{\mathbf{x}[t]} \rangle N_{\mathbf{x}[t]}$ . Por tanto,  $H_{\mathbf{x}[t]} = \langle \vec{v}, N_{\mathbf{x}[t]} \rangle$ .

Mediante un movemento ríxido de  $\mathbb{R}^3$ , un pode asumir que o vector  $\vec{v}$  está na dirección de  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  e supoñendo ademais que as superficies se moven con velocidade unidade, fixamos  $\vec{v} = \vec{e}_3$ .

A superficie parca é o cilindro en  $\mathbb{R}^3$  sobre a curva plana  $s \mapsto (s, -\log \cos s)$ . Esta superficie é un solitón de traslación para o fluxo de curvatura media. A familia de curvas representadas abaixo corresponden á evolución da curva parca ao longo do fluxo na dirección do vector  $\vec{e}_3$ , mentras que a superficie da dereita corresponde á superficie parca, que é unha superficie de traslación onde as curvas xeratrices están debuxadas en azul e vermello.



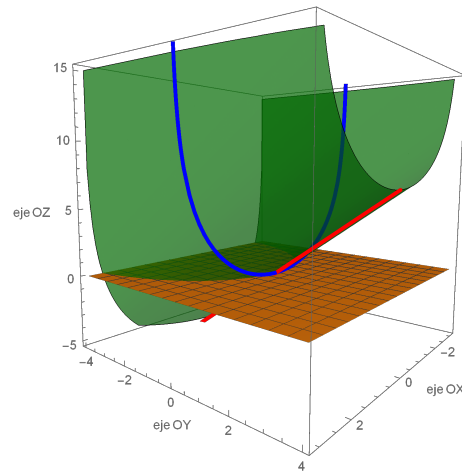
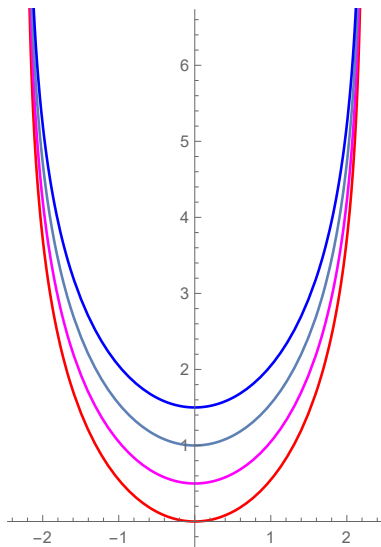
Dado que a curva debuxada en vermello é unha recta, a superficie parca é unha superficie cilíndrica de tipo plano xerada por dúas curvas situadas en planos ortogonais.

A *superficie parca inclinada* é unha modificación da superficie parca, onde se modificou a parametrización da curva parca orixinal como  $s \mapsto \log(\cos(s \cos \theta))$ , situandoa no plano  $y = 0$ . Ademais rotouse a recta situada no plano ortogonal para colocala agora no plano  $z = y \tan \theta$ . As curvas xeratrices

$$\alpha(s) = \left( s, 0, \frac{1}{\cos^2 \theta} \log(\cos(s \cos \theta)) \right), \quad \beta(t) = (0, t, t \tan \theta),$$

dan lugar á superficie de traslación  $z = \alpha(s) + \beta(t)$  determinada pola ecuación

$$z = \frac{1}{\cos^2 \theta} \log(\cos(x \cos \theta)) + y \tan \theta.$$



A superficie parca inclinada é unha superficie cilíndrica de tipo plano cuxas curvas xerátricas están situadas sobre planos non ortogonais. Alternativamente, pode ser vista como a gráfica da función

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\theta : \left(-\frac{\pi}{2\cos\theta}, \frac{\pi}{2\cos\theta}\right) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \mathcal{G}_\theta(x, y) = \frac{1}{\cos^2\theta} \log(\cos(x \cos\theta)) + y \tan\theta. \end{aligned}$$

As dúas superficies anteriores son os únicos grafos que son solitóns de traslación para o fluxo de curvatura media baixo certas condicións que se escapan dos obxectivos deste traballo [6].

### Helicoide

O helicoide é unha superficie regrada que pode parametrizarse como  $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ . Introducindo dous novos parámetros  $s, t$  dados por

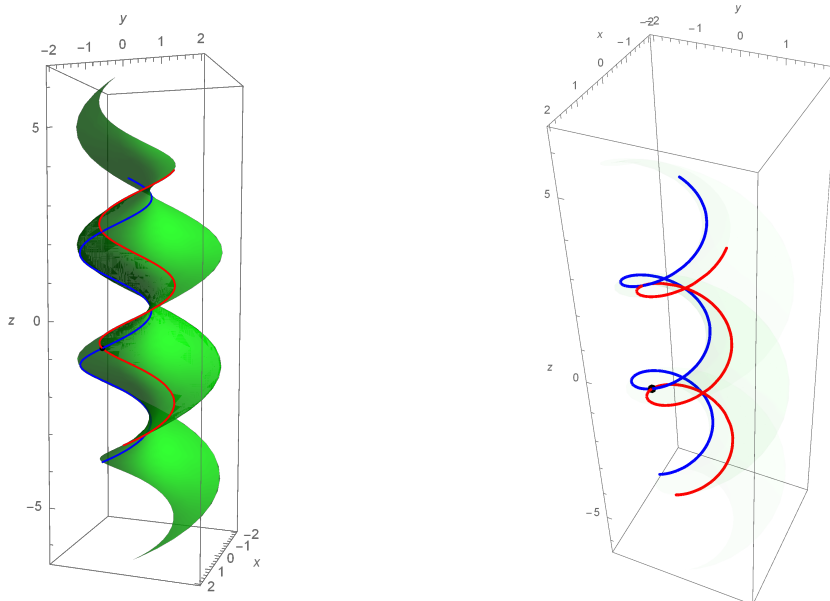
$$u = 2 \cos\left(\frac{r-s}{2}\right), \quad v = \frac{r+s}{2},$$

a parametrización anterior resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(r, s) &= \left(2 \cos\left(\frac{r-s}{2}\right) \cos\left(\frac{r+s}{2}\right), 2 \cos\left(\frac{r-s}{2}\right) \sin\left(\frac{r+s}{2}\right), \frac{r+s}{2}\right) \\ &= \left(\cos r + \cos s, \sin r + \sin s, \frac{r}{2} + \frac{s}{2}\right) \\ &= \left(\cos r, \sin r, \frac{r}{2}\right) + \left(\cos s, \sin s, \frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

O helicoide é unha superficie de traslación xerada por dúas curvas idénticas

$$c_1(r) = \left(\cos r, \sin r, \frac{r}{2}\right), \quad c_2(s) = \left(\cos s, \sin s, \frac{s}{2}\right).$$



O helicoides é a única superficie regrada minimal en  $\mathbb{R}^3$ , ademais dos planos, o que mostra a existencia de superficies de traslación que son regradas da forma  $\mathbf{x}(t, s) = \alpha(t) + sv(t)$  con curva de direccións  $v(t)$  non constante, e polo tanto de tipo non cilíndrico.

## 2.2. Superficies de traslación de tipo plano con curvas xeratrices en planos ortogonais

Sexa  $S$  unha superficie de traslación de tipo plano  $\Psi = \alpha + \beta$  con  $\alpha, \beta$  curvas planas situadas sobre planos ortogonais. Neste caso, é posible realizar movementos ríxidos no espazo, supoñendo que os planos son  $y = 0$  e  $x = 0$ . Ademais, como cada curva é localmente a gráfica dunha función, podemos supoñer que

$$\alpha(s) = (s, 0, f(s)), \quad \beta(t) = (0, t, h(t)),$$

de xeito que a superficie  $S$  parametrizase como

$$\mathbf{x}(s, t) = (s, t, f(s) + h(t)).$$

Un cálculo sinxelo mostra que os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental veñen dados por

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 + f'^2 & f'h' \\ f'h' & 1 + h'^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{III} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} f'' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix}.$$

Polo tanto, as curvaturas de Gauss e media resultan

$$K = \frac{f''h''}{(1 + f'^2 + h'^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{(1 + h'^2)f'' + (1 + f'^2)h''}{(1 + f'^2 + h'^2)^{3/2}}. \quad (2.1)$$

*Observación 2.2.* En xeral, a condición para que o grafo  $G_\phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \phi(x, y)\}$  dunha función  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sexa unha superficie de traslación é que a función  $\phi$  verifique  $\partial_{xy}^2 \phi = 0$ , en cuxo caso  $\phi$  se descompón da forma  $\phi(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ . Nesta situación a superficie poderá ser parametrizada localmente como

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \alpha(u) + \beta(v)) = (u, 0, \alpha(u)) + (0, v, \beta(v))$$

e correspóndese cunha superficie de traslación de tipo plano con curvas xeratrices situadas en planos ortogonais.

### 2.2.1. Superficies de traslación planas con curvas xeratrices en planos ortogonais con curvatura de Gauss constante

Se unha superficie de traslación de tipo plano, con curvas xeratrices situadas sobre planos ortogonais, ten curvatura de Gauss cero, entón  $f'' = 0$  ou  $h'' = 0$ , en cuxo caso, a curva  $\alpha$  ou a curva  $\beta$  verifican  $\alpha'' = 0$  ou  $\beta'' = 0$ , polo que son rectas e a superficie é cilíndrica.

A situación na que a curvatura de Gauss sexa constante  $K = \text{const} \neq 0$  non pode darse. Se a función  $f(s)$  (resp.,  $h(t)$ ) verifica que  $f''(s) = 0$  (resp.,  $h''(t) = 0$ ) nun certo intervalo, entón a curva  $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$  (resp.,  $\beta(t) = (0, t, h(t))$ ) cumpre que  $\alpha''(s) = 0$  (resp.,  $\beta''(t) = 0$ ), polo que é un segmento de recta nese intervalo e a superficie resultante é cilíndrica. En tal caso, a curvatura de Gauss ten que ser necesariamente nula.

Se a curvatura escalar é constante, entón séguese da expresión da curvatura de Gauss en (2.1), derivando respecto ás variables 's' e 't', que

$$\begin{aligned} f'''h''(1 + f'^2 + h'^2)^2 - 4f'f''^2h''(1 + f'^2 + h'^2) &= 0, \\ f''h'''(1 + f'^2 + h'^2)^2 - 4h'f''h''^2(1 + f'^2 + h'^2) &= 0. \end{aligned}$$

Supoñamos agora que  $f''(s) \neq 0$  e  $h''(t) \neq 0$ . Entón séguese das dúas expresións anteriores que

$$f'''(1 + f'^2 + h'^2) - 4f'f''^2 = 0, \quad h'''(1 + f'^2 + h'^2) - 4h'h''^2 = 0.$$

Se a función  $f'''(s) = 0$ , entón  $f(s) = as^2 + bs + c$  e da primeira identidade anterior ( $f'f''^2 = 0$ ) séguese que  $a = 0$  e polo tanto  $f(s) = bs + c$  co que a superficie é cilíndrica e entón  $K = 0$ . Polo contrario, supoñendo que  $f''' \neq 0$ , entón da primeira identidade anterior séguese que

$$h'^2(t) = \frac{4f'(s)f''(s)^2 - f'''(s)(1 + f'(s)^2)}{f'''(s)}.$$

Como a ecuación anterior separa as variables, entón  $h'(t)^2 = \text{const.}$  e polo tanto  $h''(t) = 0$ , de onde se segue que  $\beta(t) = (0, t, h(t))$  é unha recta e a superficie  $S$  é cilíndrica.

O anterior correspóndese co resultado de H. Liu:

**Teorema 2.3.** [7] *Sexa  $S$  unha superficie de traslación de tipo plano con curvas xeratrices situadas sobre planos ortogonais. Entón  $S$  ten curvatura de Gauss constante se, e só se, é unha superficie cilíndrica, en cuxo caso  $K = 0$ .*

### 2.2.2. Superficies de traslación planas minimais con curvas xeratrices en planos ortogonais

Sexa  $S$  unha superficie plana de traslación xerada por curvas situadas en planos ortogonais. Entón séguese da expresión (2.1) que  $S$  é mínima (é dicir, a curvatura media

$H = 0$ ) se e só se  $(1 + h'^2)f'' + (1 + f'^2)h'' = 0$ . Se  $f'' = 0$  e  $h'' = 0$ , entón as dúas curvas xeratrices son rectas e a superficie é un plano. Se  $f'' = 0$  e  $h'' \neq 0$ , entón  $1 + f'^2 = 0$ , o que é imposible. Se  $f'' \neq 0$  e  $h'' \neq 0$ , entón

$$\frac{(1 + h'^2)}{h''} = -\frac{(1 + f'^2)}{f''}.$$

Como os dous lados da igualdade dependen de variables diferentes, entón ten que ser

$$\frac{(1 + h'^2)}{h''} = \frac{1}{\kappa} = -\frac{(1 + f'^2)}{f''}$$

para algún  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Integrando as ecuacións  $h''(t) = -\kappa(1 + h'(t)^2)$  e  $f''(s) = \kappa(1 + f'(s)^2)$ , obtemos

$$h(t) = a_1 + \frac{1}{\kappa} \ln(|\cos(\kappa t + b_1)|), \quad f(s) = a_2 - \frac{1}{\kappa} \ln(|\cos(\kappa s - b_2)|),$$

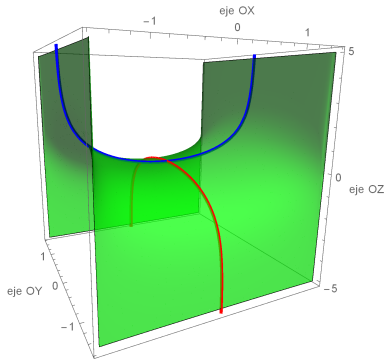
para constantes  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Despois dunha traslación en  $\mathbb{R}^3$  podemos asumir que  $a_1 = a_2 = 0$  e  $b_1 = b_2 = 0$ . Así obtense a superficie mínima

$$\mathbf{x}(s, t) = (s, t, f(s) + h(t)) = \left( s, t, \frac{1}{\kappa} \ln |\cos \kappa t| - \frac{1}{\kappa} \ln |\cos \kappa s| \right) = \left( s, t, \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{\cos \kappa t}{\cos \kappa s} \right| \right).$$

**Teorema 2.4.** [7] *Sexa  $S$  unha superficie de traslación de tipo plano con curvas xeratrices situadas sobre planos ortogonais. Entón  $S$  é minimal se e só se é localmente un plano ou unha superficie de Scherk.*

### Superficies de Scherk

A *superficie de Scherk* está dada por  $S = \left\{ (x, y, \log \left( \frac{\cos y}{\cos x} \right)) / (x, y) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$ .



É unha superficie de traslación de tipo plano obtida a partir das curvas xeratrices

$$\alpha(s) = (s, 0, -\log \cos s), \quad \beta(t) = (0, t, \log \cos t).$$

Realizando os cálculos da curvatura de Gauss e curvatura media obtemos

$$K = \frac{-1}{(\cos x \cos y (\tan^2 x + \tan^2 y + 1))^2}, \quad H = 0,$$

o que proba que a superficie de Scherk é minimal.

### 2.2.3. Exemplos de superficies de traslación planas con curvas xeratrices en planos ortogonais

A continuación mostramos algúns exemplos de superficies de traslación planas. Nalgúns casos, como sucede co paraboloide elíptico, ditas superficies son tamén superficies de revolución. En calquera dos casos, considerando unha parametrización  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$ , as curvaturas de Gauss e media veñen dadas por

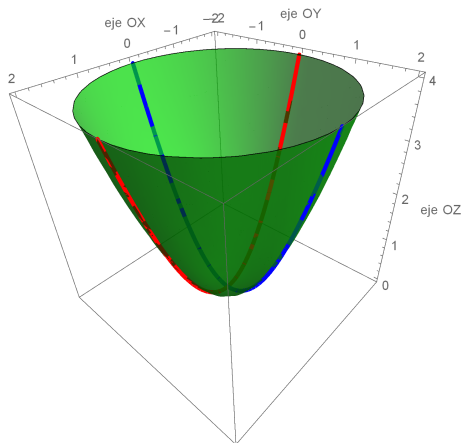
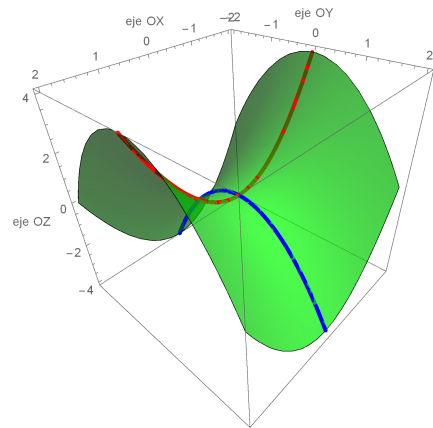
$$K(u, v) = \frac{f''(u)g''(v)}{(1 + f'(u)^2 + g'(v)^2)^2}, \quad H(u, v) = \frac{(1 + g'(v)^2)f''(u) + (1 + f'(u)^2)g''(v)}{2(1 + f'(u)^2 + g'(v)^2)^{3/2}}.$$

#### Paraboloides hiperbólico, elíptico e parabólico

O *paraboloide hiperbólico*, descrito pola ecuación  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  é unha superficie de traslación que se obtén ao trasladar a parábola  $z = \frac{x^2}{a^2}$  ao longo da parábola  $z = -\frac{y^2}{b^2}$ .

Podemos parametrizar a superficie como

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right).$$



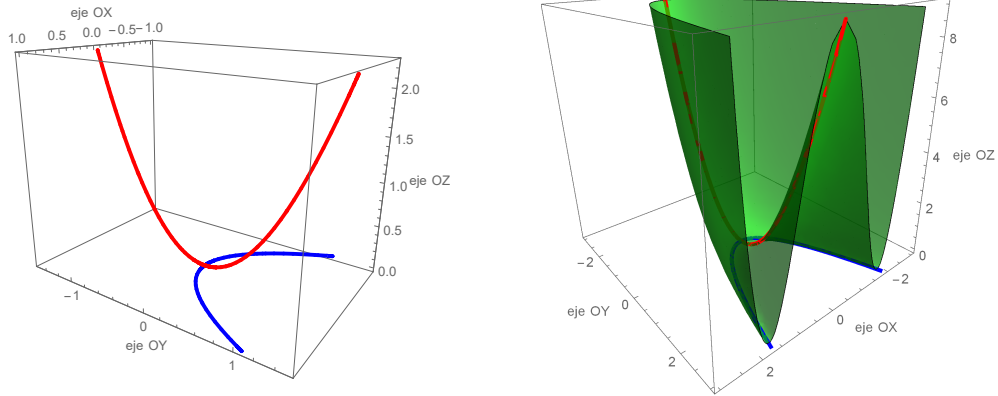
O *paraboloide elíptico*, descrito pola ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

é unha superficie de traslación que se obtén ao trasladar a parábola  $z = \frac{x^2}{a^2}$  ao longo da parábola  $z = \frac{y^2}{b^2}$ .

Esta superficie é tamén unha superficie de revolución.

O *paraboloide parabólico* obtense desprazando unha parábola ao longo doutra con concavidade en distinta dirección e sentido.



Desprazando a curva  $s \mapsto (s, s^2, 0)$  ao longo da curva  $r \mapsto (0, r, r^2)$  obteremos o paraboloide parabólico parametrizado como  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v + u^2, v^2)$ .

### Superficie de caixa de ovos

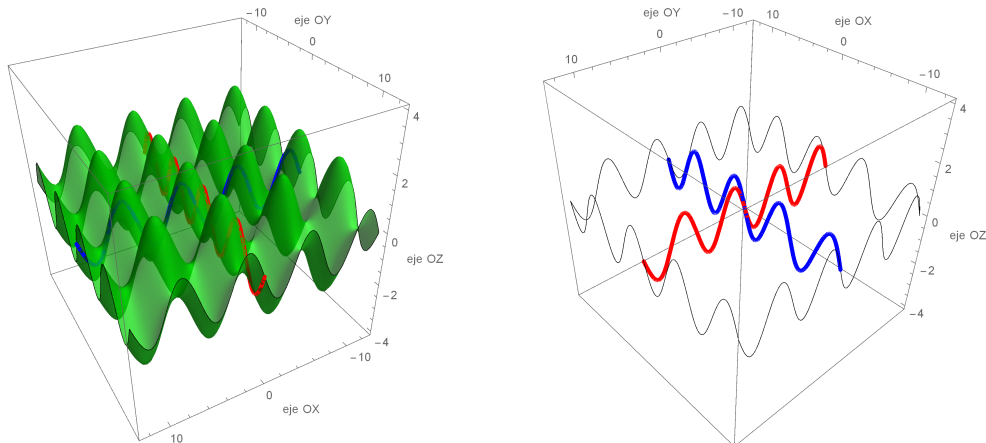
Chamaremos *superficie de caixa de ovos* á superficie dada por

$$S = \{(x, y, \sin x + \sin y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

É unha superficie de traslación de tipo plano, dobremente periódica, obtida a partir das curvas xeratrices

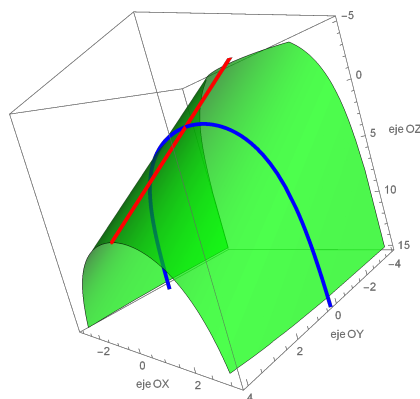
$$\alpha(s) = (s, 0, \sin s), \quad \beta(t) = (0, t, \sin t).$$

Polo tanto a parametrización da superficie será  $\mathbf{x}(s, t) = (s, t, \sin s + \sin t)$ .



### 2.3. Superficies de translación de tipo plano non ortogonais

A *superficie parca inclinada* descrita xa anteriormente neste capítulo é unha superficie de translación que se obtén desprazando unha parábola ao longo dunha recta. Esta superficie é un exemplo de superficie de translación de tipo plano cuxas curvas xeratrices non son ortogonais



Se consideramos a parametrización  $\mathbf{x}(s, t) = \left( s, t, t \tan \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \log(\cos(s \cos \theta)) \right)$ , as curvaturas de Gauss e media da superficie parca inclinada serán

$$K = 0, \quad H = \frac{1}{2} | \cos \theta \cos(s \cos \theta) | .$$

Outras superficies de tipo plano non ortogonal podense visualizar facilmente sen máis que considerar as superficies descritas anteriormente e mover un dos planos dende a súa posición ortogonal a un ángulo distinto.

### 2.4. Superficies de translación xeradas por curvas non planas

Como vimos na Sección 2.1.1, o helicoides é unha superficie de translación xerada por curvas que non son planas. A modo de exemplo, a superficie sinusoidal mostrada a continuación tamén é unha superficie de translación que non é de tipo plano.

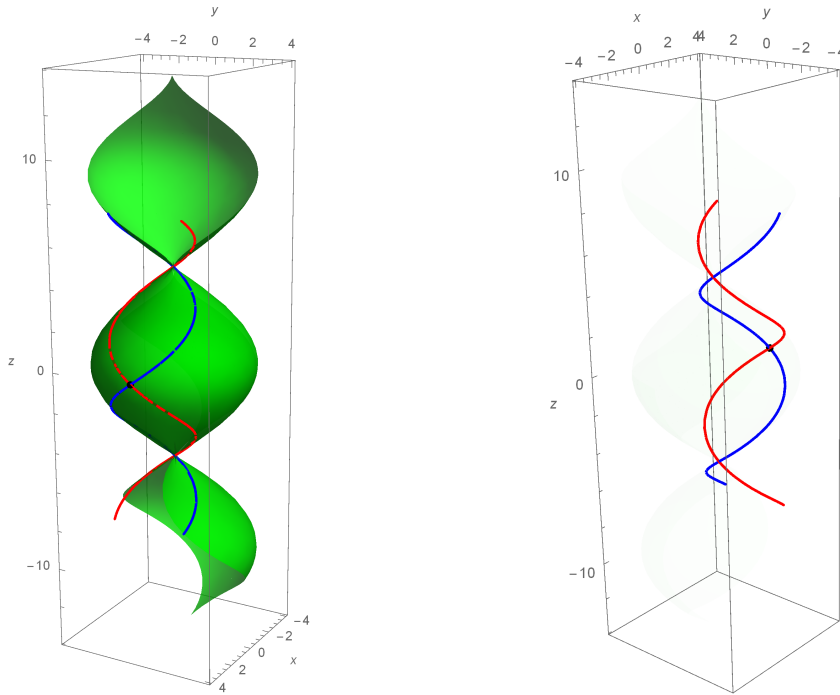
#### Sinusoide

O *sinusoide* é unha superficie parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos(u + v) \cos(u - v), a \cos(u + v) \sin(u - v), b(u + v)) .$$

As curvas que xeran estas superficies son dúas hélices circulares simétricas que veñen dadas por

$$\alpha(u) = (2 \cos(2u), 4 \cos u \sin u, 3u), \quad \beta(v) = (2 \cos(2v), -4 \cos v \sin v, 3v) .$$



As curvaturas de Gauss e media do sinusoide na parametrización anterior están dadas por

$$K(u, v) = \frac{4b^2}{(a^2 + 2b^2 - a^2 \cos(2(u + v)))^2}, \quad H(u, v) = \frac{\sqrt{2}b(a^2 + b^2) \sec(u + v)}{a(a^2 + 2b^2 - a^2 \cos(2(u + v)))^{3/2}}.$$

O sinusoide é tamén unha superficie de revolución. Basta considerar o cambio de variable  $t = u + v$ ,  $\theta = u - v$ , para observar que o sinusoide é a superficie de revolución xerada pola curva  $\gamma(t) = (a \cos t, a \cos t, bt)$  ao redor do eixo  $0Z$  correspondente ao vector  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

## Capítulo 3

# Superficies de traslación con curvatura de Gauss constante

Neste capítulo trataremos as superficies de traslación que teñen curvatura de Gauss constante. O resultado que clasifica ditas superficies foi probado recentemente por Hasanis e López en [3] na súa total xeralidade.

**Teorema 3.1.** *As únicas superficies de traslación con curvatura de Gauss cero son os planos e as superficies cilíndricas.*

Distintas situacións particulares foran consideradas con anterioridade (como é o caso do Teorema 2.3). Neste capítulo trataremos dúas siutacións particulares. En primeiro caso analizaremos a situación na que a curvatura de Gauss é nula para superficies de traslación arbitrarias, mostrando que as únicas superficies de traslación con curvatura de Gauss cero son os planos e as superficies cilíndricas. O segundo caso a considerar é aquel no que unha das curvas xeratrices da superficie de traslación é plana. Mostraremos nesta situación que a curvatura de Gauss non pode ser constante distinta de cero.

En primeiro lugar estableceremos a expresión da curvatura de Gauss dunha superficie de traslación arbitraria. Para elo, sexa  $S$  unha superficie de traslación obtida como suma de dúas curvas  $\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta(t) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Dado que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  son localmente gráficas de funcións multivaluada, pódense expresar (probablemente en entornos máis pequenos, que seguiremos a denotar de igual modo) como

$$\alpha(s) = (s, f_1(s), f_2(s)), \quad \beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t))$$

para certas funcións  $f_1, f_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1, h_2 : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En consecuencia a superficie

$S$  parametrizárase localmente como

$$\mathbf{x}(s, t)(s + h_1(t), f_1(s) + t, f_2(s) + h_2(t)), \quad (s, t) \in I \times J. \quad (3.1)$$

Coa fin de simplificar a notación, no que segue omitiremos a variable (' $s$ ' ou ' $t$ ') nas funcións  $f_1, f_2$  e  $h_1, h_2$ .

Un cálculo directo mostra que os campos de vectores coordenados están dados por

$$\mathbf{x}_1(s, t) = (1, f_1'(s), f_2'(s)), \quad \mathbf{x}_2(s, t) = (h_1'(t), 1, h_2'(t)),$$

e polo tanto os coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (f_1')^2 + (f_2')^2 & f_1' + h_1' + f_2'h_2' \\ f_1' + h_1' + f_2'h_2' & 1 + (h_1')^2 + (h_2')^2 \end{pmatrix}.$$

Ademais,  $\det(g_{ij}) = (1 + (f_1')^2 + (f_2')^2)(1 + (h_1')^2 + (h_2')^2) - (f_1' + h_1' + h_2'f_2')^2$ .

O produto vectorial dos campos coordenados determina un vector normal á superficie

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = (f_1'h_2' - f_2', h_1'f_2' - h_2', 1 - h_1'f_1'),$$

polo que a aplicación de Gauss da superficie está dada localmente (salvo o signo) por

$$N = \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} = \frac{(f_1'h_2' - f_2', h_1'f_2' - h_2', 1 - h_1'f_1')}{\sqrt{(f_1'h_2' - f_2')^2 + (h_1'f_2' - h_2')^2 + (1 - h_1'f_1')^2}}.$$

Calculando as derivadas parciais segundas da parametrización

$$\mathbf{x}_{11}(s, t) = (0, f_1''(s), f_2''(s)), \quad \mathbf{x}_{22}(s, t) = (h_1''(t), 0, h_2''(t)), \quad \mathbf{x}_{12}(s, t) = (0, 0, 0),$$

temos que a segunda forma fundamental ven dada por

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

onde  $L_{12} = L_{21} = 0$  e

$$L_{11} = \frac{f_1''(f_2'h_1' - h_2') + f_2''(1 - f_1'h_1')}{\sqrt{(f_1'h_2' - f_2')^2 + (h_1'f_2' - h_2')^2 + (1 - h_1'f_1')^2}},$$

$$L_{22} = \frac{h_2'' - f_2'h_1'' + f_1'(h_2'h_1'' - h_1'h_2'')}{\sqrt{(f_1'h_2' - f_2')^2 + (h_1'f_2' - h_2')^2 + (1 - h_1'f_1')^2}}.$$

Polo tanto, a curvatura de Gauss dunha superficie parametrizada por (3.1) resulta

$$K = \frac{(f_2'' - f_1''h_2' + h_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2''))(h_2'' - f_2'h_1'' + f_1'(h_1''h_2' - h_1'h_2''))}{((1 + (f_1')^2 + (f_2')^2)(1 + (h_1')^2 + (h_2')^2) - (f_1' + h_1' + h_2'f_2')^2)^2} \quad (3.2)$$

A análise a desenvolver dependerá en gran medida das simetrías na expresión anterior e na dependencia das variables ' $t$ ' e ' $s$ ' e das funcións  $f_1, f_2$  e  $h_1, h_2$ .

### 3.1. Superficies de traslación con curvatura de Gauss nula

**Lema 3.2.** *Unha superficie de traslación ten curvatura de Gauss constante  $K = 0$  se, e só se, é localmente isométrica a un plano ou a unha superficie cilíndrica.*

A demostración do resultado anterior séguese da análise realizada ao longo desta sección.

Tendo en conta que os coeficientes da segunda forma fundamental  $L_{12} = L_{21} = 0$ , entón  $\det(L_{ij}) = L_{11}L_{22}$ . Se a curvatura de Gauss  $K = 0$ , entón  $L_{11} = 0$  ou  $L_{22} = 0$ . No que segue suporemos que  $L_{11} = 0$ , procedendo de forma completamente análoga se  $L_{22} = 0$ . Considerando a expresión de  $L_{11}$ , tense que

$$f_2'' - f_1''h_2' + h_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'') = 0. \quad (3.3)$$

A continuación examinamos de forma separada as dúas posibilidades  $f_1'' = 0$  e  $f_1'' \neq 0$  nun punto arbitrario da superficie.

#### 3.1.1. Supoñamos que $f_1'' = 0$ nun intervalo $I_0 \subset I$ .

Se  $f_1''(s) = 0$  nun aberto  $I_0 \subset I$ , entón  $f_1(s) = as + b$  para constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ . Trasladando a curva se é necesario (co que obteriamos unha curva congruente) podemos supoñer que  $b = 0$  e polo tanto  $f_1(s) = as$ . Así da expresión do coeficiente  $L_{11}$  na ecuación (3.3) tense

$$0 = f_2'' - f_1''h_2' + h_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'') = f_2'' - ah_1'f_2'' = f_2''(1 - ah_1').$$

Consideraremos as dúas posibilidades seguintes

#### Supoñamos que $f_2''(s) = 0$

Como  $f_1'' = f_2'' = 0$ , entón a curva  $\alpha(s) = (s, f_1(s), f_2(s))$  é unha recta e polo tanto, a superficie  $S$  é cilíndrica, ao estar xerada por unha recta fixa que se traslada ao longo dunha curva  $\beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t))$ .

*Observación 3.3.* Un cálculo directo mostra que a torsión da curva  $\beta(t)$  ven dada por

$$\tau_\beta(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2} = \frac{h_1'''(t)h_2''(t) - h_1''(t)h_2'''(t)}{h_1''(t)^2 + h_2''(t)^2 + (h_1''(t)h_2'(t) - h_2''(t)h_1'(t))^2}$$

e polo tanto a curva  $\beta$  será plana se, e só se,  $h_1''(t) = \kappa h_2''(t)$  para algunha constante  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Supoñamos que  $f_2''(s) \neq 0$**

Neste caso, séguese da expresión  $0 = f_2''(1 - ah_1')$  que, salvo posiblemente unha traslación da curva  $\beta(t)$ ,  $h_1(t) = \frac{1}{a}t$ . Así a parametrización (3.1) da superficie redúcese a

$$\mathbf{x}(s, t) = \left( s + \frac{t}{a}, as + t, f_2(s) + h_2(t) \right),$$

que é unha reparametrización do plano de ecuación  $ax - y = 0$ .

**3.1.2. Supoñamos que  $f_1'' \neq 0$  nun intervalo  $I_0 \subset I$**

Consideraremos separadamente os casos nos que  $h_1''(t)$  se anule ou non nun intervalo  $J_0 \subset J$ .

**Supoñamos que  $h_1''(t) = 0$**

Neste caso, salvo unha traslación da superficie, podemos asumir que  $h_1(t) = at$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ . Entón, séguese da ecuación (3.3) que

$$0 = f_2'' - f_1''h_2' + h_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'') = f_2'' - f_1''h_2' + a(f_1''f_2' - f_1'f_2''),$$

e polo tanto

$$h_2' = \frac{f_2'' + a(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{f_1''}.$$

Agora ben, a parte dereita da ecuación anterior é función da variable 's', mentras que  $h_2$  é función da variable 't' polo que as dúas expresións anteriores deben ser constantes e, así,  $h_2(t) = bt$  para algún  $b \in \mathbb{R}$ . Polo tanto, a curva  $\beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t)) = (at, t, bt)$  verifica que  $\beta''(t) = 0$ , o que mostra que é unha recta, e polo tanto a superficie  $S$  é cilíndrica con base  $\alpha(s) = (s, f_1(s), f_2(s))$ .

**Supoñamos que  $h_1''(t) \neq 0$**

Derivando a ecuación (3.3) con respecto á variable 't', tense

$$0 = \frac{d}{dt} (f_2'' - f_1''h_2' + h_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'')) = -f_1''h_2'' + h_1''(f_1''f_2' - f_1'f_2''),$$

e así

$$\frac{f_1''f_2' - f_1'f_2''}{f_1''} = \frac{h_2''}{h_1''}.$$

De novo cada lado da igualdade anterior depende dunha variable distinta, polo que ambos teñen que ser constantes e, así,  $h_2'' = \kappa h_1''$  para algún  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Así tense que a curva  $\beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t))$  verifica

$$\beta' = (h_1', 1, h_2'), \quad \beta'' = (h_1'', 0, h_2'') = (h_1'', 0, \kappa h_1''), \quad \beta''' = (h_1''', 0, \kappa h_1'''),$$

de onde  $\det(\beta', \beta'', \beta''') = 0$  polo que a torsión da curva  $\beta$  é nula e así  $\beta$  é unha curva plana.

**Supoñamos que  $h_1(t) = 0$**

Supoñamos agora que a curva plana  $\beta$  está contida no plano  $x = 0$ , é dicir,  $h_1(t) = 0$ , entón tense que a curvatura de Gauss dada en (3.2) redúcese a

$$K = \frac{(f_2'' - f_1''h_2')h_2''}{((1 + (f_1')^2 + (f_2')^2)(1 + (h_1')^2 + (h_2')^2) - (f_1' + h_1' + h_2'f_2')^2)^2}.$$

Dado que  $K = 0$ , tense que  $(f_2'' - f_1''h_2')h_2'' = 0$  e polo tanto  $h_2'' = 0$  ou  $f_2'' - f_1''h_2' = 0$ . Se  $h_2'' = 0$ , entón  $\beta''(t) = 0$  e polo tanto a curva é unha recta e a superficie  $S$  é cilíndrica.

Se  $h_2'' \neq 0$ , entón escribindo  $h_2'(t) = \frac{f_2''(s)}{f_1''(s)}$  tense que  $h_2'(t)$  é constante e polo tanto  $h_2''(t) = 0$ .

## 3.2. Superficies de translación con curvatura de Gauss non nula xeradas por unha curva plana

As superficies de translación con curvatura de Gauss constante non nula foron finalmente clasificadas en [3], mostrando que non existe ningunha superficie de translación con curvatura de Gauss constante non nula.

A demostración deste resultado na súa completa xeralidade é significativamente máis complexa que o caso que abordaremos a continuación aínda que as ideas subxacentes na proba son esencialmente as mesmas. Centrarémonos na situación especial na que unha das curvas xeratrices é unha curva plana, probando o seguinte resultado.

**Lema 3.4.** *Non existe ningunha superficie de translación con curvatura de Gauss constante  $K \neq 0$  se unha das curvas xeratrices da superficie é plana.*

A proba dividírase en dúas partes nas con considerameos as situacións en que ámbalas dúas curvas sexan planas (no primeiro caso) ou somentes unha delas sexa plana na parte final.

### 3.2.1. Superficies de translación con dúas curvas xeratrices planas

Supoñamos que  $\alpha$  e  $\beta$  son planas. Se  $\alpha$  e  $\beta$  se encontran en planos ortogonais, sabemos que as superficie de translación con curvatura de Gauss constante teñen  $K = 0$  e trátase de superficies cilíndricas como se mostrou no Teorema 2.3. Polo tanto consideraremos só o caso no que  $\alpha$  e  $\beta$  están en planos que non son ortogonais.

Se as curvas están en planos paralelos, a superficie de traslación é parte dun plano. Polo tanto, sen perda de xeralidade, podemos asumir que a curva  $\alpha$  está contida no plano  $XZ$ , e  $\beta$  está contida nun plano que ten como ecuación  $x \cos \theta - y \sin \theta = 0$  con  $\cos \theta \sin \theta \neq 0$  (para que non sexan ortogonais). Entón  $\alpha$  e  $\beta$  podemos escribilas como

$$\alpha(s) = (s, 0, f(s)), \quad \beta(t) = (t \sin \theta, t \cos \theta, h(t))$$

con  $f(s), h(t)$  funcións diferenciables. Prametrizamos a superficie como

$$\mathbf{x}(s, t) = (s + t \sin \theta, t \cos \theta, f(s) + h(t)),$$

de forma que

$$\mathbf{x}_1(s, t) = (1, 0, f'(s)) \quad \mathbf{x}_2(s, t) = (\sin \theta, \cos \theta, h'(t)).$$

Polo tanto a matriz asociada á primeira forma fundamental será

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (f'(s))^2 & \sin \theta + h'(t)f'(s) \\ \sin \theta + h'(t)f'(s) & 1 + (h'(t))^2 \end{pmatrix},$$

cuxo determinante é  $\det \mathbb{I}_p = (h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t)$ . Así

$$N = \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} = \frac{(-f'(s) \cos \theta, -h'(t) + f'(s) \sin \theta, \cos \theta)}{\sqrt{(h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t)}}$$

determina un campo de vectores unitarios normais á superficie. Tendo en conta que

$$\mathbf{x}_{11}(s, t) = (0, 0, f''(s)), \quad \mathbf{x}_{22}(s, t) = (0, 0, h''(t)), \quad \mathbf{x}_{12}(s, t) = (0, 0, 0),$$

a segunda forma fundamental da superficie ven dada por

$$\mathbb{II}_p = \frac{\cos \theta}{\sqrt{(h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t)}} \begin{pmatrix} f''(s) & 0 \\ 0 & h''(t) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, a curvatura de Gauss da superficie ven dada por

$$K = \frac{\cos^2 \theta f''(s)h''(t)}{((h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t))^2}.$$

Dado que a curvatura de Gauss  $K \neq 0$ , entón  $f''(s)h''(t) \neq 0$  e despegando na ecuación anterior obtemos

$$\cos^2 \theta f''(s)h''(t) = K ((h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t))^2. \quad (3.4)$$

Derivando a ecuación (3.4) con respecto a  $s$  e con respecto a  $t$  obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta f'''(s)h''(t) &= 4K ((h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta f'(s)h'(t)) \\ &\quad \times (f'(s)f''(s) - \sin \theta f''(s)h'(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta f''(s)h'''(t) &= 4K ((h'(t))^2 + (f'(s))^2 + \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta f'(s)h'(t)) \\ &\quad \times (h'(t)h''(t) - \operatorname{sen} \theta h''(t)f'(s)). \end{aligned}$$

Usando agora que  $f''(s)h''(t) \neq 0$ , podemos dividir as dúas expresións anteriores obtendo

$$\frac{f'''(s)}{f''(s)^2}(h'(t) - \operatorname{sen} \theta f'(s)) = \frac{h'''(t)}{h''(t)^2}(f'(s) - \operatorname{sen} \theta h'(t)). \quad (3.5)$$

Se derivamos de novo con respecto a  $s$  obtemos

$$\left(\frac{f'''(s)}{f''(s)^2}\right)' (h'(t) - \operatorname{sen} \theta f'(s)) - \frac{f'''(s)}{f''(s)^2} \operatorname{sen} \theta f'(s) = \frac{h'''(t)}{h''(t)^2} f''(s)$$

e agora, derivando o resultado obtido con respecto a  $t$ , tense

$$\left(\frac{f'''(s)}{f''(s)^2}\right)' h''(t) = \left(\frac{h'''(t)}{h''(t)^2}\right)' f''(s).$$

Dividimos a igualdade anterior entre  $f''(s)h''(t)$  para obter

$$\left(\frac{f'''(s)}{f''(s)^2}\right)' \frac{1}{f''(s)} = \left(\frac{h'''(t)}{h''(t)^2}\right)' \frac{1}{h''(t)}.$$

Temos así que os dous termos da igualdade anterior dependen das variables independentes  $t$  e  $s$ , polo que a súa igualdade tan só pode suceder se ambos os dous termos son constantes, polo que existe  $a \in \mathbb{R}$  de forma que

$$\left(\frac{f'''(s)}{f''(s)^2}\right)' = a f''(s), \quad \left(\frac{h'''(t)}{h''(t)^2}\right)' = a h''(t),$$

polo que existen  $b, c \in \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{f'''(s)}{f''(s)^2} = a f'(s) + b \quad \frac{h'''(t)}{h''(t)^2} = a h'(t) + c.$$

Substituíndo os resultados anteriores na ecuación (3.5) obtemos

$$(a f'(s) + b)(h'(t) - \operatorname{sen} \theta f'(s)) = (a h'(t) + c)(f'(s) - \operatorname{sen} \theta h'(t)),$$

polo que

$$(a \operatorname{sen} \theta f'(s) + b \operatorname{sen} \theta + c) f'(s) = (a \operatorname{sen} \theta h'(t) + c \operatorname{sen} \theta + b) h'(t).$$

Como os dous lados da igualdade anterior dependen de distintas variables, obtemos de novo que ambos termos son constantes. Así existe  $\kappa \in \mathbb{R}$  de xeito que

$$(a \operatorname{sen} \theta f'(s) + b \operatorname{sen} \theta + c) f'(s) = \kappa, \quad (a \operatorname{sen} \theta h'(t) + c \operatorname{sen} \theta + b) h'(t) = \kappa.$$

Derivando as expresións anteriores tense que

$$(2a \operatorname{sen} \theta f'(s) + b \operatorname{sen} \theta + c) f''(s) = 0, \quad (2a \operatorname{sen} \theta h'(t) + c \operatorname{sen} \theta + b) h''(t) = 0,$$

o que resulta unha contradición coa hipótese de que  $f''(s)h''(t) \neq 0$ .

### 3.2.2. Superficies de traslación cunha única curva xeratriz plana

Supoñamos agora que  $\alpha$  é unha curva plana, mentras que a curva  $\beta$  ten torsión non nula. Despois dun movemento ríxido adecuado podemos supoñer que a curva  $\alpha$  está contida no plano  $y = 0$  e así

$$\alpha(s) = (s, 0, f(s)), \quad \beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t)),$$

con  $f(s), h_1(t), h_2(t)$  funcións diferenciables. En consecuencia, temos unha parametrización da superficie como

$$\mathbf{x}(s, t) = (s + h_1(t), t, h_2(t) + f(s)).$$

Considerando os campos coordenados

$$\mathbf{x}_1(s, t) = (1, 0, f'(s)), \quad \mathbf{x}_2(s, t) = (h_1'(t), 1, h_2'(t)),$$

a matriz asociada á primeira forma fundamental resulta

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f'(s)^2 & h_1'(t) + f'(s)h_2'(t) \\ h_1'(t) + f'(s)h_2'(t) & 1 + h_1'(t)^2 + h_2'(t)^2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto  $\det(g_{ij}) = 1 + f'(s)^2 + (h_2'(t) - h_1'(t)f'(s))^2$ . Así

$$N = \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} = \frac{(-f'(s), -h_2'(t) + h_1'(t)f'(s), 1)}{\sqrt{1 + f'(s)^2 + (h_2'(t) - h_1'(t)f'(s))^2}}$$

é un campo de vectores unitario normal á superficie. Tendo en conta que

$$\mathbf{x}_{11}(s, t) = (0, 0, f''(s)), \quad \mathbf{x}_{22}(s, t) = (h_1''(t), 0, h_2''(t)), \quad \mathbf{x}_{12}(s, t) = (0, 0, 0),$$

os coeficientes da segunda forma fundamental respecto ao vector normal unitario  $N$  veñen dados por

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(s)^2 + (h_2'(t) - h_1'(t)f'(s))^2}} \begin{pmatrix} f''(s) & 0 \\ 0 & h_2''(t) - h_1''(t)f'(s) \end{pmatrix}.$$

Séguese entón que a curvatura de Gauss da superficie está determinada por

$$K = \frac{f''(s)(h_2''(t) - h_1''(t)f'(s))}{(1 + f'(s)^2 + (h_2'(t) - h_1'(t)f'(s))^2)^2}.$$

Dado que estamos asumindo que a curvatura de Gauss é constante  $K \neq 0$  tense que  $f''(s) \neq 0$  e polo tanto

$$K \frac{1}{f''(s)} = \frac{h_2''(t) - h_1''(t)f'(s)}{(1 + f'(s)^2 + (h_2'(t) - h_1'(t)f'(s))^2)^2}.$$

Como o lado esquerdo da ecuación anterior non depende do parámetro  $t$ , o mesmo sucederá co lado dereito e, derivando respecto a  $t$ , tense

$$\begin{aligned} 0 &= -f'(s)^3 \left\{ h_1^{(3)}(t) + h_1^{(3)}(t)h_1'(t)^2 - 4h_1'(t)h_1''(t)^2 \right\} \\ &\quad + f'(s)^2 \left\{ h_2^{(3)}(t)h_1'(t)^2 - 8h_1'(t)h_1''(t)h_2''(t) + h_2'(t) \left( 2h_1^{(3)}(t)h_1'(t) - 4h_1''(t)^2 \right) + h_2^{(3)}(t) \right\} \\ &\quad - f'(s) \left\{ h_1^{(3)}(t)h_2'(t)^2 + h_1^{(3)}(t) - 4h_1'(t)h_2''(t)^2 + h_2'(t) \left( 2h_2^{(3)}(t)h_1'(t) - 8h_1''(t)h_2''(t) \right) \right\} \\ &\quad + h_2^{(3)}(t) + h_2^{(3)}(t)h_2'(t)^2 - 4h_2'(t)h_2''(t)^2 \\ &= f'(s)^3 A_3(t) + f'(s)^2 A_2(t) + f'(s) A_1(t) + A_0(t), \end{aligned}$$

que resulta unha ecuación polinómica en  $f'(s)$ .

Os coeficientes  $A_3$  e  $A_0$  determinan as funcións  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  a través das ecuacións

$$\frac{h_1'''}{h_1''} = 4 \frac{h_1'' h_1'}{1 + (h_1')^2}, \quad \frac{h_2'''}{h_2''} = 4 \frac{h_2'' h_2'}{1 + (h_2')^2}.$$

*Observación 3.5.* Dado que a curvatura de Gauss é non nula, as derivadas  $h_1''(t)$  e  $h_2''(t)$  non poden anularse simultaneamente. Veremos que, de feito, non pode anularse ningunha delas nun intervalo.

Supoñamos que  $h_1''(t) = 0$  polo que  $h_1(t) = a_1 t + b_1$  para algunhas constantes reais  $a_1, b_1$ . Entón un cálculo directo mostra que os coeficientes  $A_0, \dots, A_3$  se reducen a

$$\begin{aligned} A_0(t) &= -4h_2'(t)h_2''(t)^2 + (1 + h_2'(t)^2)h_2'''(t), \\ A_1(t) &= 4a_1 h_2''(t)^2 - 2a_1 h_2'(t)h_2'''(t), \\ A_2(t) &= (1 + a_1^2)h_2'''(t), \\ A_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

Polo tanto  $h_2'''(t) = 0$  e así  $h_2(t) = c_2 t^2 + a_2 t + b_2$  para algunhas constantes  $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ , en cuxo caso as expresións anteriores redúcense a

$$A_0(t) = -16c_2^2(a_2 + 2tc_2), \quad A_1(t) = 16a_1 c_2^2, \quad A_2(t) = A_3(t) = 0.$$

de onde se segue que  $c_2 = 0$  e polo tanto  $h_2''(t) = 0$ .

Integrando as expresións anteriores obtemos para as funcións  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , que

$$\log |h_i''(t)| = 2 \log |1 + (h_i'(t))^2| + \mu_i$$

para algunha constante de integración  $\mu_i$ . Polo tanto

$$h_i''(t) = \lambda_i (1 + h_i'(t)^2)^2, \quad (3.6)$$

para algúns  $\lambda_i > 0$ , nun entorno de cada punto onde  $h_i''(t) \neq 0$ . Derivando en (3.6) obtense

$$h_i'''(t) = 4\lambda_i h_i'(t)(1 + h_i'(t)^2)h_i''(t).$$

Utilizando as expresións de  $h_i''(t)$  e  $h_i'''(t)$  obtidas anteriormente, tense que os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  redúcense a

$$\begin{aligned} A_1 &= -4\lambda_1^2 h_1'(t) (1 + h_1'(t)^2)^3 (1 + h_2'(t)^2) \\ &\quad + 4\lambda_2 (1 + h_2'(t)^2)^2 \{ \lambda_2 h_1'(t)(1 - h_2'(t)^4) + 2\lambda_1 h_2'(t)(1 + h_1'(t)^2)^2 \}, \\ A_2 &= 4(1 + h_1'(t)^2) \{ \lambda_1^2 (-1 + h_1'(t)^2)(1 + h_1'(t)^2)^2 h_2'(t) \\ &\quad - 2\lambda_1 \lambda_2 h_1'(t)(1 + h_1'(t)^2)(1 + h_2'(t)^2)^2 + \lambda_2^2 h_2'(t)(1 + h_2'(t)^2)^3 \}. \end{aligned}$$

Así tense que

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 h_2'(t)(1 + h_1'(t)^2) + A_2 h_1'(t)(1 + h_2'(t)^2) \\ &= -8(1 + h_1'(t)^2)(1 + h_2'(t)^2) \{ \lambda_1 h_1'(t)(1 + h_1'(t)^2) - \lambda_2 h_2'(t)(1 + h_2'(t)^2) \} \\ &\quad \times \{ \lambda_1 h_2'(t)(1 + h_1'(t)^2) + \lambda_2 h_1'(t)(1 + h_2'(t)^2) \}, \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \lambda_1 h_1'(t)(1 + h_1'(t)^2) - \lambda_2 h_2'(t)(1 + h_2'(t)^2) \} \\ &\quad \times \{ \lambda_1 h_2'(t)(1 + h_1'(t)^2) + \lambda_2 h_1'(t)(1 + h_2'(t)^2) \}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

No que segue, utilizaremos as expresións anteriores para probar que a curva  $\beta(t)$  é plana. Un cálculo inmediato mostra que a curva  $\beta(t) = (h_1(t), t, h_2(t))$  verifica

$$\beta'(t) = (h_1'(t), 1, h_2'(t)), \quad \beta''(t) = (h_1''(t), 0, h_2''(t)), \quad \beta'''(t) = (h_1'''(t), 0, h_2'''(t)),$$

e polo tanto, utilizando as expresións de  $h_i''(t)$  e  $h_i'''(t)$  obtidas anteriormente, a torsión da curva  $\beta(t)$  resulta

$$\begin{aligned} \|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|^2 \tau_\beta(t) &= \det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t)) \\ &= h_2''(t)h_1'''(t) - h_1''(t)h_2'''(t) \\ &= 4\lambda_1 \lambda_2 \{ \lambda_1 h_1'(t)(1 + h_1'(t)^2) - \lambda_2 h_2'(t)(1 + h_2'(t)^2) \} (1 + h_1'(t)^2)^2 (1 + h_2'(t)^2)^2. \end{aligned}$$

Se o primeiro factor na expresión (3.7) se anula, isto é, se  $\lambda_1 h_1'(t)(1 + h_1'(t)^2) - \lambda_2 h_2'(t)(1 + h_2'(t)^2) = 0$ , entón  $\tau_\beta(t) = 0$  co que se segue que a curva  $\beta$  é plana.

Por outra parte, se se anula o segundo factor dado pola expresión (3.7), como  $\lambda_1 h_2'(t)(1 + h_1'(t)^2) + \lambda_2 h_1'(t)(1 + h_2'(t)^2) = 0$ , entón

$$1 + h_2'(t)^2 = -\frac{\lambda_1 h_2'(t)}{\lambda_2 h_1'(t)}(1 + h_1'(t)^2).$$

Unha consecuencia inmediata da igualdade anterior é que as derivadas  $h'_1(t)$  e  $h'_2(t)$  teñen signos opostos, i.e.,  $\frac{h'_2(t)}{h'_1(t)} < 0$ .

Sustituíndo no coeficiente  $A_1$  obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = A_1 &= \frac{4\lambda_1^3 h'_2(t)(1+h'_1(t)^2)^3}{\lambda_2^2 h'_1(t)^3} \left\{ \lambda_2 h'_1(t)^3 (1+h'_1(t)^2) + 2\lambda_2 h'_1(t)^3 h'_2(t)^2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1 (1+h'_1(t)^2) h'_2(t)^3 \right\} \\ &= \frac{4\lambda_1^3 h'_2(t)(1+h'_1(t)^2)^3}{\lambda_2^2 h'_1(t)^3} \left( 1+h'_1(t)^2 + 2h'_2(t)^2 - \frac{h'_2(t)}{h'_1(t)} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{h'_2(t)^2}{h'_1(t)^2} (1+h'_1(t)^2) \right). \end{aligned}$$

Como  $\frac{h'_2(t)}{h'_1(t)} < 0$ , todos os sumandos na expresión anterior son non negativos, e chegamos así a unha contradición.



# Bibliografía

- [1] M. P. do Carmo, *Geometría Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.
- [2] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et ses Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*, vol. 1–4. Chelsea Publ. Co, reprint (1972)
- [3] Th. Hasanis, R. López, Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature, arXiv:1809.02758 [math.DG], a aparecer en *Commun. Anal. Geom.*
- [4] Th. Hasanis, R. López, Classification and Construction of Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space, *Results Math.* (2020), 75: 2  
<https://doi.org/10.1007/s00025-019-1128-2>
- [5] M. A. Hernández Cifre, J. A. Pastor González, *Un curso de Geometría Diferencial*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2010.
- [6] D. Hoffman, T. Ilmanen, F. Martín, B. White, Graphical translator for the mean curvature flow, *Calc. Var.* **58** (2019), 117.  
<https://doi.org/10.1007/s00526-019-1560-x>
- [7] H. Liu, Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Geom.* **64** (1999), 141–149.  
<https://doi.org/10.1007/BF01229219>
- [8] R. López, M. Moruz, *Translation and homothetical surfaces in euclidean space with constant curvature*, *J. Korean Math. Soc.* **52** (2015), 523–535.  
<https://doi.org/10.4134/JKMS.2015.52.3.523>
- [9] R. López, O. Perdomo, *Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space*, *J. Geom. Anal.* **27**, (2017), 2926–2937  
<https://doi.org/10.1007/s.12220-017-9788-1>