



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Introducción a la teoría de distribuciones

David Graña Vázquez

Curso 2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Introducción a la teoría de distribuciones

David Graña Vázquez

Julio 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento: Análise Matemática</b>
<b>Título: Introducción á teoría das distribucións</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
Motivación da derivación xeneralizada. Funcións test. Espazo de distribucións e a súa topoloxía. Distribucións notables: delta de Dirac e as súas derivadas. Propiedades das distribucións. Distribucións temperadas e transformada de Fourier. Aplicacións ao estudo de ecuacións en derivadas parciais.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Funciones test</b>	<b>1</b>
<b>2. Distribuciones</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Derivación . . . . .	10
2.2.1. Distribuciones vectoriales . . . . .	14
2.3. Operaciones . . . . .	15
2.3.1. Dificultades a la hora de definir la multiplicación . . . . .	15
2.3.2. Convolución . . . . .	16
<b>3. Topología de las distribuciones</b>	<b>21</b>
3.1. Espacios localmente convexos . . . . .	21
3.2. Los Espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . . . . .	23
3.3. El Espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .	23
3.4. El Espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	26
<b>4. La transformada de Fourier</b>	<b>29</b>
4.1. Funciones de decaimiento rápido . . . . .	29
4.2. Distribuciones temperadas . . . . .	32
<b>5. Aplicaciones en EDPs</b>	<b>37</b>
5.1. Operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	37
5.2. Soluciones Fundamentales . . . . .	38
5.3. Teorema de Malgrange-Ehrenpreis . . . . .	40
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



## Resumen

La teoría de distribuciones surge con el objetivo de generalizar el concepto clásico de función y dar cabida a elementos que, si bien son útiles a la hora de estudiar problemas físicos, no tienen sentido en el cálculo tradicional, como la delta de Dirac. Dicha teoría se introduce en este trabajo de manera clara y sencilla, permitiendo un acercamiento al tema sin tener conocimientos previos de distribuciones, pero conservando el rigor matemático. Partimos de las funciones test para después definir las distribuciones, de las que vemos sus propiedades más importantes, desde la derivación hasta la operación de convolución. A continuación vemos cómo es la topología sobre la que se asienta esta teoría, haciendo una breve introducción a los espacios localmente convexos. Finalmente tratamos como aplicar la transformada de Fourier sobre las distribuciones, para después aplicar los resultados vistos hasta ahora a la búsqueda de soluciones fundamentales de EDPs.

## Abstract

The theory of distributions arises with the aim of generalizing the classical concept of function and to make room for elements that, although they are useful when studying physical problems, do not make sense in traditional calculus, such as the Dirac delta. This theory is introduced in this dissertation in a clear and simple way, allowing an approach to the subject without previous knowledge of distribution theory, but preserving the mathematical rigor.

We start studying test functions and then we define the distributions, of which we see their most important properties, from the derivative to the convolution operation. Then we study the topology on which this theory is based, making a brief introduction to locally convex spaces. Finally we discuss how to apply the Fourier transform on the space of distributions, and then apply the results seen so far to the search for fundamental solutions of PDEs.



# Introducción

A la hora de analizar funciones, la manera más sencilla y 'natural' de hacerlo es estudiar su comportamiento punto a punto, es decir, dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , estudiamos la evaluación  $y = f(x)$  y vemos sus propiedades. Sin embargo, aunque la utilidad de dicha noción de evaluación está fuera de toda duda, esta forma de analizar funciones se vuelve demasiado rígida en algunas situaciones, impidiendo llegar a resultados que, aunque en el sentido del análisis tradicional no tengan cabida, no por ello son de menor utilidad. A partir de esta idea surge la teoría de distribuciones que busca generalizar el concepto de función, aportando nuevas técnicas para estudiar funciones clásicas y expandiéndolas, incluyendo nuevos conceptos como la delta de Dirac. El objetivo de este trabajo es presentar dicha teoría de una forma sencilla y progresiva, que permita una fácil introducción al tema, dejando las cuestiones más complejas para más adelante, una vez los conceptos previos ya están bien asentados. Para ello este trabajo está dividido en 5 capítulos que resumimos a continuación.

En el primer capítulo construimos y motivamos una nueva forma de evaluación funcional, definiendo el elemento sobre el que se asienta la teoría de distribuciones, el espacio de las funciones test,  $\mathcal{D}(\Omega)$  siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto. Para ello damos ejemplos sencillos de funciones test, vemos sus propiedades y como las funciones localmente integrables actúan sobre ellas. Para acabar el capítulo definimos la convergencia en  $\mathcal{D}(\Omega)$  sin entrar en detalles topológicos.

En el siguiente capítulo ya definimos el concepto de distribución, introducimos la convergencia en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  y vemos como cada funciones localmente integrable da lugar a una distribución a través de su acción sobre las funciones test. A partir de estas definiciones pasamos a mostrar algunas propiedades de las distribuciones, desde como estudiarlas localmente, pasando por operaciones básicas, hasta llegar a la derivación. En esta última parte se muestra la gran facilidad con la que se pueden derivar funciones en el sentido distribucional, gracias a la integración por partes. Una vez definida la derivación de distribuciones se

presenta (como la derivada de la función de Heaviside) la delta de Dirac, una distribución que no viene dada por ninguna función ordinaria y que es de gran importancia en muchos ámbitos de la física como la mecánica cuántica.

En la última parte del capítulo 2 se trata principalmente la operación de convolución con distribuciones, no sin antes mencionar los problemas resultantes al intentar definir la multiplicación en el espacio  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . La convolución se presenta a partir del caso de dos funciones y se muestran los problemas a la hora de definirla para dos distribuciones cualesquiera. Posteriormente se trata la convolución entre una distribución y una función test, viendo sus características más importantes, para finalizar demostrando que podemos definir la convolución entre dos distribuciones si una de ellas tiene soporte compacto.

La topología de los espacios de funciones test y de distribuciones se deja de lado al principio del trabajo para hacer más sencilla la toma de contacto, es por esto que empezamos a estudiarla en el capítulo 3. Primero se hace una breve introducción a los espacios topológicos localmente convexos y sus conceptos más importantes, para después tratar la topología del espacio  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  e introducir la topología límite inductivo sobre el espacio de las funciones test. Se estudiarán las propiedades de dicho espacio vectorial topológico y veremos que efectivamente da lugar a la convergencia definida anteriormente. Para finalizar el capítulo se introduce el espacio  $\mathcal{D}'(\Omega)$  con la topología débil\*, así como el concepto de orden de una distribución.

En el capítulo 4 buscamos una forma de definir la transformada de Fourier sobre el espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  y así poder extenderla a las distribuciones. Empezamos viendo las dificultades de definir dicha transformada sobre las funciones test, por lo que definimos el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ . Una vez definidas las funciones de decrecimiento rápido, comprobamos que la aplicación de la transformada de Fourier es continua y va de  $\mathcal{S}$  en sí mismo. Además estudiamos algunas de sus propiedades como su comportamiento con las derivadas, con los exponentes y la fórmula de la transformada inversa. Para cerrar el capítulo se definen las distribuciones temperadas, un subconjunto de las distribuciones que actúan sobre el espacio  $\mathcal{S}$  y conservan sus buenas propiedades con la transformada de Fourier.

En el último capítulo se estudian las aplicaciones de la teoría de distribuciones en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para ello definimos los operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes (ODLCC), el símbolo de dicho operador y la noción de solución fundamental. Después se estudia la búsqueda de soluciones fun-

damentales y se ejemplifica con un caso sencillo en el que la solución fundamental viene dada por una función. Finalmente, usando varios resultados vistos a lo largo del trabajo, se realiza una demostración del teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que asegura la existencia de soluciones fundamentales para cualquier ODLCC que no sea idénticamente cero.



# Capítulo 1

## Funciones test

En primer lugar debemos definir el elemento sobre el que se asienta la teoría de distribuciones, y el que nos va a permitir estudiar funciones sin recurrir a la evaluación puntual, las funciones test. Estas funciones se caracterizan por tener muy buenas propiedades, que nos van a ser muy útiles a la hora de analizar funciones que carecen de ellas (funciones no derivables o con discontinuidades de salto).

Es importante aclarar que aunque estas son la base de la teoría de distribuciones, no tienen un gran valor por sí solas, su utilidad radica a la hora de usarlas como 'herramienta' para estudiar otras funciones y permitirnos generalizar su definición.

**Definición 1.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Diremos que  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una **función test** si su soporte ( $\text{sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \neq 0\}}$ ) es compacto y  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Denotamos por  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  al conjunto de funciones test definidas en el abierto  $\Omega$ .

*Observación 1.2.* Las funciones test también pueden ser definidas como funciones de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , de hecho recurriremos a esta definición al principio para simplificar la introducción.

Veamos unos ejemplos sencillos de funciones test:

**Ejemplo 1.3.** Tomamos  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma:

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Vemos que  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , por lo tanto si tomamos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma  $\varphi(x) = h(x)h(1-x)$  tenemos una función test sobre  $\mathbb{R}$  que es infinitamente diferenciable  $\forall x \in \mathbb{R}$  y su soporte

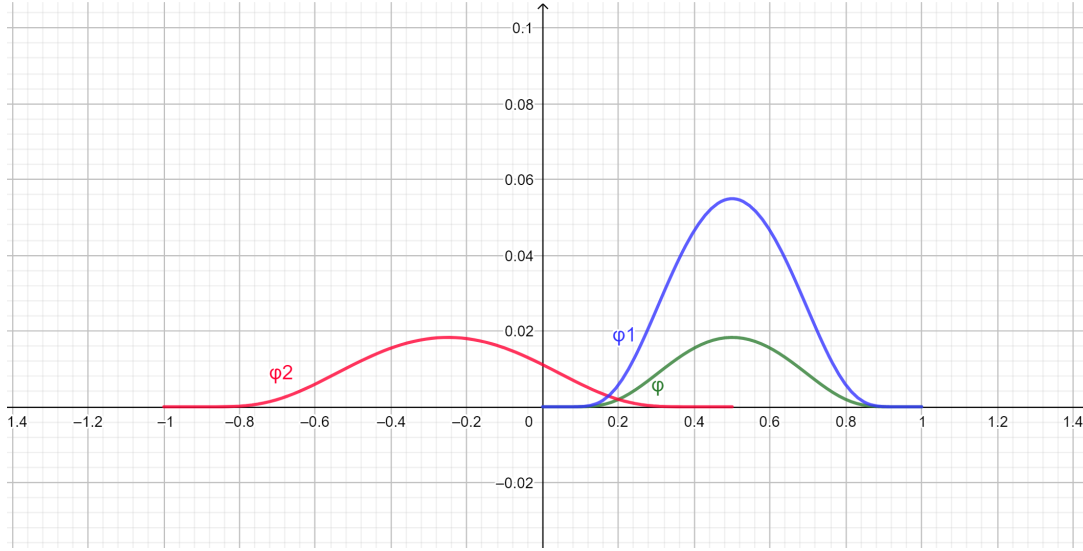


Figura 1.1: Gráficas del soporte de 3 funciones test ( $\varphi$ ,  $\varphi_1 = c \cdot \varphi$ ,  $\varphi_2 = \varphi_{a,b}$ )

es el intervalo compacto  $[0, 1]$ . A partir de esta función podemos construir una función test cuyo soporte sea cualquier intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  definiendo:

$$\varphi_{a,b}(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right). \quad (1.1)$$

Además si multiplicamos  $\varphi$  por cualquier escalar  $c \in \mathbb{R}^n$  obtenemos otra función test puesto que  $\text{sop}(\varphi) = \text{sop}(c \cdot \varphi)$  y  $c \cdot \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .

**Proposición 1.4.** *El conjunto  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  con la suma usual y el producto por escalares de  $\mathbb{R}$  es un espacio vectorial.*

*Demostración:* Claramente dadas dos funciones  $\varphi, \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  tenemos que  $a\varphi + b\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  para cualquier par de escalares  $a, b \in \mathbb{R}$ . Además la multiplicación por escalares conserva el soporte original y la unión finita de compactos es compacto, por lo tanto  $a\varphi + b\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .  $\square$

**Definición 1.5.** Dada  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  y  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , definimos la acción<sup>1</sup> de  $f$  sobre  $\varphi$  como:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \varphi$$

Veamos ahora un ejemplo de como podemos usar la acción de una función localmente integrable sobre  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  para estudiar sus propiedades.

<sup>1</sup>Recibe el nombre de acción, pero no guarda ninguna relación con la definición usual de acción de un grupo.

**Ejemplo 1.6.** Supongamos que tenemos un determinado material y queremos estudiar una propiedad suya (dependiente de la temperatura) en un determinado punto  $T_0$ , es decir, queremos estudiar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $f$  localmente integrable) en dicho punto. Sin embargo conseguir con exactitud la temperatura  $T_0$  es muy difícil, por no decir imposible, por lo que el estudio de la evaluación puntual,  $f(T_0) = y$ , se antoja complicada.

Lo mas probable en esta situación es que la temperatura varíe a lo largo de un intervalo  $a \leq T \leq b$ . Podríamos pensar entonces que la forma adecuada de estudiar  $f$  consiste en calcular la media a lo largo de  $[a, b]$ . Sin embargo de esta forma estaríamos presuponiendo una distribución uniforme de las temperaturas a lo largo del intervalo, lo cual no tiene por qué ser cierto. De hecho no sería de extrañar que las temperaturas cercanas a los extremos sean mucho menos frecuentes y la mayoría se concentren en el interior del intervalo. Una posible densidad de la temperatura viene dada por  $\varphi_{a,b}(T)$  vista en (1.1), por lo tanto podemos usar dicha función para 'testar'  $f$ .

Si nuestra idea original era calcular la media de  $f$  a lo largo de  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b f(T) dT \quad (\text{omitimos el factor } \frac{1}{b-a} \text{ por simplicidad}),$$

ahora podemos calcular una 'media ponderada' de  $f$  teniendo en cuenta la función de densidad  $\varphi_{a,b}(T)$ , es decir,

$$\int_a^b f(T) \cdot \varphi_{a,b}(T) dT.$$

Por comodidad, como  $\varphi_{a,b}(T) = 0 \quad \forall T \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ , podemos simplemente tomar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(T) \cdot \varphi_{a,b}(T) dT.$$

Esta expresión es exactamente la definición de la acción de  $f$  sobre  $\varphi_{a,b}$ . De esta forma viendo como actúa  $f$  sobre  $\varphi_{a,b}$  obtenemos información sobre ella.

La cuestión natural que surge ahora es:

Dada  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , ¿conociendo la acción de  $g$  sobre cada una de las funciones test de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , conocemos la estructura de la función?

Para que esto sea así es necesario que  $g$  quede definida de forma inequívoca por como actúa sobre  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .

Sean  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$  tales que

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Entonces tenemos que  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (f - g) \cdot \varphi = 0.$$

Esto es suficiente para asegurar que  $f - g = 0$  en c.t.p., como nos asegura el siguiente teorema:

**Teorema 1.7.** *Dada  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  para toda  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , entonces  $f = 0$  para c.t.p. en  $\Omega$ .*

*Demostración:* Consideremos la función  $\phi$  satisfaciendo las siguientes condiciones (podríamos tomar  $\phi = c \cdot \varphi_{a,b}$  como en (1.1) con  $a = 0, b = 1, c = 1/\int \varphi_{0,1}$ ):

- $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \phi(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\text{sop}(\phi) \subseteq \overline{B(0,1)}$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$

y para cada  $\epsilon > 0$  definimos:

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.2)$$

Por lo que  $\forall \epsilon > 0$  tenemos:

- $\phi_\epsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \phi_\epsilon(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\text{sop}(\phi_\epsilon) \subseteq \overline{B(0, \epsilon)}$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x) dx = 1$

Sea  $x \in \Omega$  fijado y  $\epsilon \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ . Entonces  $B(x, \epsilon) \subseteq \Omega$  que, junto con las propiedades de  $\phi_\epsilon$ , implica que  $\phi_\epsilon(x - \cdot)|_\Omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ . De esta forma usando las hipótesis iniciales, si  $f$  actúa sobre esta función test:

$$\int_{\Omega} f(y) \cdot \phi_\epsilon(x - y) dy = 0$$

Ahora aplicando lo visto antes, tenemos que:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \phi_\epsilon(x - y) dy - \int_{\Omega} f(y) \cdot \phi_\epsilon(x - y) dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) - f(y)| \phi_\epsilon(x - y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x, \epsilon)} |f(x) - f(y)| \phi\left(\frac{x - y}{\epsilon}\right) dy \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^n} \|\phi\|_\infty \int_{B(x, \epsilon)} |f(x) - f(y)| dy \end{aligned}$$

Acotando (tomamos<sup>2</sup>  $k = \frac{\omega_{n-1}}{n} \|\phi\|_\infty$ ) y aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue, obtenemos que para c.t.p.  $x \in \Omega$ :

$$|f(x)| \leq \frac{k}{|B(x, \epsilon)|} \int_{B(x, \epsilon)} |f(x) - f(y)| dy \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

Por lo tanto  $f = 0$  para c.t.p. de  $\Omega$  y el teorema estaría demostrado.  $\square$

De esta forma si dos funciones  $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  definen la misma acción sobre  $\mathcal{C}_0^\infty$ ,  $f = g$  en  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

A continuación definimos de manera 'sencilla' la convergencia en el conjunto  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .

*Observación 1.8.* Dada  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  y  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , usaremos la notación  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$  donde  $D_k^{\alpha_k}$  denota derivar ' $\alpha_k$ ' veces con respecto a la variable  $k$ -ésima.

**Definición 1.9.** Dada  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones test,  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , diremos que  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  si:

- a)  $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$
- b) Existe  $K \subset \mathbb{R}^n$  compacto que contiene el soporte de  $\varphi_k \forall k \in \mathbb{N}$

El espacio  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  junto con esta noción de convergencia se denota por  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Esta es una definición de convergencia 'muy fuerte', puesto que es necesario, no solo que la sucesión de funciones test converja uniformemente, sino que lo hagan también todas las sucesiones de sus derivadas.

*Observación 1.10.* En el caso de trabajar en todo  $\mathbb{R}^n$ , denotaremos  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  simplemente como  $\mathcal{D}$ .

*Observación 1.11.* Con el fin de facilitar la introducción se omiten por ahora las cuestiones topológicas. En el capítulo 3 se estudiarán más en detalle las características de la topología de  $\mathcal{D}(\Omega)$  y como surge esta noción de convergencia.

---

<sup>2</sup>Denotamos por  $\omega_{n-1}$  la medida de la superficie de la esfera  $n-1$  dimensional de radio 1 y de esta forma tenemos  $|B(x, \epsilon)| = \frac{\omega_{n-1}}{n} \cdot \epsilon^n$



## Capítulo 2

# Distribuciones

### 2.1. Introducción

**Definición 2.1.** Una **distribución**  $T$  es una forma lineal continua de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , es decir, una aplicación  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ , que cumple las siguientes condiciones:

1. **Linealidad:**  $\langle T, a\varphi + b\psi \rangle = a \langle T, \varphi \rangle + b \langle T, \psi \rangle$  para cualesquiera funciones test  $\varphi, \psi$  y constantes  $a, b$ .
2. **Continuidad:** Si  $\varphi_n$  converge a 0 en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , entonces  $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ .

El espacio de las distribuciones es (al igual que el de las funciones test) un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares, es decir dadas  $S$  y  $T$  distribuciones,  $a, b \in \mathbb{R}$  escalares entonces:

$$\langle aT + bS, \varphi \rangle = a \langle T, \varphi \rangle + b \langle S, \varphi \rangle$$

también es una distribución.

**Definición 2.2.** Sea  $(T_k)_k \in \mathbb{N}$  una sucesión de distribuciones y  $T$  una distribución. Diremos que  $T_k$  converge a  $T$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , si:

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$  al espacio vectorial topológico dado por el espacio vectorial de las distribuciones y la noción de convergencia que acabamos de definir. En caso de trabajar en todo  $\mathbb{R}^n$  denotaremos  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  simplemente por  $\mathcal{D}'$ .

Esta es una noción de convergencia<sup>1</sup> débil\*. Como las condiciones sobre la convergencia

---

<sup>1</sup>Al igual que en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , con  $\mathcal{D}'(\Omega)$  también dejamos el estudio más detallado de la topología para el capítulo 3.

en  $\mathcal{D}(\Omega)$  son tan estrictas, nos permite trabajar con la convergencia débil\* en el espacio de las distribuciones. Gracias a esto podremos probar la convergencia en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de manera sencilla bajo una gran variedad de circunstancias.

Tal y como hemos comentado antes, las distribuciones surgen como una generalización de la noción tradicional de funciones. Una vez hemos comprendido que una función puede ser conocida sabiendo como actúa sobre el espacio  $\mathcal{D}$ , es fácil ver que dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  da lugar a una distribución  $T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle$  donde:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi$$

Como vimos en el capítulo 1, esta distribución es única para cada función de  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Además satisface claramente las condiciones de linealidad y continuidad. Por otro lado si  $u \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  entonces no da lugar a ninguna distribución. Este es el caso de  $f(x) = 1/x$  que no es una función localmente integrable.

**Definición 2.3.** Dado un abierto  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , diremos que  $T$  es nula en el abierto  $\omega$  si  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  para todas las funciones test  $\varphi \in \mathcal{D}$  tal que  $\text{sop}(\varphi) \subset \omega$ .

Al igual que pasa con las funciones ordinarias, existen distribuciones definidas sobre un abierto que no pueden ser prolongadas a todo  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo,  $\exp(1/x)$  solo está definida para  $x > 0$  y no puede ser prolongada a todo  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.4.** Dada una distribución  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  y  $A \subset \mathbb{R}^n$  la unión de todos los abiertos donde  $T$  es nula, definimos el soporte de  $T$  como:

$$\text{sop}(T) = \Omega \setminus A$$

Diremos que es una distribución de soporte compacto si  $\text{sop}(T)$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ .

*Observación 2.5.* El conjunto de las funciones  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  con la topología dada por la convergencia de todas sus derivadas se denota por  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ . El espacio dual  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  es exactamente el espacio de las distribuciones de  $\mathcal{D}'$  con soporte compacto. No entraremos en más detalle sobre este tema, pero si usaremos más adelante el hecho de que una distribución con soporte compacto puede actuar sobre  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Estas definiciones nos permiten estudiar las distribuciones desde un punto de vista local y nos ayudan a entender las distribuciones como funciones generalizadas y no simplemente como formas lineales sobre las funciones test. Recordamos que las funciones test son herramientas para generalizar el concepto clásico de función, necesarias a la hora de hacer un planteamiento riguroso, pero que pueden resultar confusas a la hora de facilitar la comprensión.

Ahora definiremos algunas operaciones en  $\mathcal{D}'$ . Todas ellas surgirán de la misma forma, vemos como se comporta para una función arbitraria  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  y comprobamos que se puede extender  $\forall T \in \mathcal{D}'$

**Definición 2.6.** Sean  $T \in \mathcal{D}'$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) y  $g \in \mathcal{C}^\infty$ . Se definen:

- (1)  $\langle T(ax), \varphi \rangle = |a|^{-1} \langle T, \varphi(x/a) \rangle$ ;
- (2)  $\langle T(x-a), \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x+a) \rangle$ ;
- (3)  $\langle g(x)T(x), \varphi \rangle = \langle T, g(x)\varphi(x) \rangle$ ;

*Demostración:* Para demostrar que están bien definidas las distribuciones anteriores, hay que comprobar que cumplen las condiciones de linealidad (trivial) y continuidad. Lo veremos para (1) ya que el resto de demostraciones son similares:

Dada  $(\varphi_k)_k \in \mathbb{N}$  sucesión de funciones test tal que  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}$  veamos que efectivamente  $\langle T(ax), \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ :

Definimos la sucesión de funciones test  $(\varphi_k^a)_k \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi_k^a(x) = \varphi_k(x/a)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}' &\Rightarrow D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow D^\alpha \varphi_k(x/a) \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \Rightarrow \varphi_k^a \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}' \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(ax), \varphi_k \rangle = |a|^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_k(x/a) \rangle = |a|^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_k^a \rangle = 0$$

□

*Observación 2.7.* La notación  $T(ax)$  y  $T(x-a)$  busca facilitar la escritura y dejar ver como 'actúan' las distribuciones sobre  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, no es muy precisa ya que las distribuciones no actúan sobre  $\mathbb{R}^n$  sino sobre  $\mathcal{D}$ , lo que denotan en realidad es la composición de  $T$  con las funciones  $f(x) = ax$  y  $g(x) = x - a$ .

**Proposición 2.8.** Sea  $(T_k)_k \in \mathbb{N}$  una sucesión de distribuciones tal que  $T_k \rightarrow T$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) y  $g \in \mathcal{C}^\infty$ , entonces:

- (1)  $T_k(ax) \rightarrow T(ax)$ ;
- (2)  $T_k(x-a) \rightarrow T(x-a)$ ;
- (3)  $g(x) \cdot T_k \rightarrow g(x) \cdot T$ ;

Este resultado se demuestra de manera sencilla gracias a la convergencia en  $\mathcal{D}'$ , sólo es necesario ver que por la definición de los operadores llegamos a una expresión en la que la sucesión sigue estando aplicada sobre una función test por lo tanto la convergencia se mantiene.

## 2.2. Derivación

Ahora introduciremos el concepto de derivación en el espacio  $\mathcal{D}'$ . Esto nos permitirá derivar en el sentido distribucional funciones que en el sentido clásico no son derivables. Para que esta noción sea interesante debemos asegurarnos que dada  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ , su derivada distribucional sea la misma que la distribución definida por su derivada, es decir:

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \varphi$$

Partiendo de esta igualdad tenemos por el teorema de Fubini que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \varphi &= \int \dots \int \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= \int \dots \int \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \varphi \, dx_k \right) dx_1, \dots, dx_{k-1}, dx_{k+1}, \dots, dx_n \end{aligned}$$

Si aplicamos integración por partes en la integral entre paréntesis, como  $\varphi$  tiene soporte compacto la parte de fuera de la integral se anula y llegamos a que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \varphi \, dx_k = - \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx_k$$

Finalmente sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = \int \dots \int \left( - \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dx_k \right) dx_1, \dots, dx_{k-1}, dx_{k+1}, \dots, dx_n = - \int f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

Y esta última expresión es la definición de  $T_f$  aplicada sobre  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ , es decir:

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle$$

Y ahora si generalizamos esto al resto de distribuciones obtenemos nuestra definición de derivada.

**Definición 2.9.** Dada  $T \in \mathcal{D}'$ , definimos la derivada de  $T$  con respecto a la variable  $x_k$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x_k} \in \mathcal{D}'$  como:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle$$

La sencillez de esta definición viene dada por las buenas propiedades que tienen las funciones test y la integración por partes. De esta forma la tarea de derivar una distribución, que a priori parece compleja, se traduce en derivar una función infinitamente derivable. Por lo tanto tenemos que toda distribución es infinitamente derivable y dado  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  multiíndice, podemos definir cualquier operador diferencial como:

$$D^\alpha : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$$

$$T \longmapsto D^\alpha T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

*Observación 2.10.* Utilizaremos la notación  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  para las derivadas de primer orden, sobre todo al principio para que quede claro cual es la variable respecto a la que se deriva, más adelante también usaremos la notación  $D_k$ .

**Proposición 2.11.** Dada  $(T_r)_{r \in \mathbb{N}}$  sucesión de distribuciones convergente a  $T \in \mathcal{D}'$ , entonces:

$$\frac{\partial T_r}{\partial x_k} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

*Demostración:* Dada  $T_r \longrightarrow T$  en  $\mathcal{D}'$  entonces  $\langle T_r, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}$ . Como se tiene para toda función test, también se tiene en concreto para  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in \mathcal{D}$ , por lo tanto:

$$\langle \frac{\partial T_r}{\partial x_k}, \varphi \rangle = - \langle T_r, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle \longrightarrow - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle$$

□

**Teorema 2.12.** Sea  $T \in \mathcal{D}'$ , y  $e_k \in \mathbb{R}^n$  ( $1 \leq k \leq n$ ) el  $k$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x + he_k) - T}{h} \quad \text{en } \mathcal{D}' \quad (2.1)$$

*Demostración:* Por definición,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  tenemos que  $\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle$ . Además:

$$\langle \frac{T(x + he_k) - T}{h}, \varphi \rangle = \langle T, \frac{\varphi(x - he_k) - \varphi(x)}{h} \rangle$$

Ahora cuando  $h \rightarrow 0$

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} \longrightarrow - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad \text{en } \mathcal{D}$$

Y como  $T \in \mathcal{D}'$  es una forma lineal continua sobre  $\mathcal{D}$  el resultado queda demostrado. □

**Proposición 2.13.** Dada  $T, S \in \mathcal{D}'$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) y  $g \in \mathcal{C}^\infty$  tenemos que:

a)  $D_k(T + S) = D_k T + D_k S$

b)  $D_k(aT) = a \cdot D_k T$

c)  $D_k T(ax) = a \cdot D_k T(ax)$

d)  $D_k T(x - a) = D_k T(x - a)$

e)  $D_k(gT) = (D_k g)T + g(D_k T)$

*Demostración:* Realizamos la demostración para e), el resto son similares.

$$\begin{aligned} \langle g(D_k T), \varphi \rangle &= \langle D_k T, g\varphi \rangle = - \langle T, D_k(g\varphi) \rangle \\ &= \langle T, (D_k g)\varphi + g(D_k \varphi) \rangle = - \langle T, (D_k g)\varphi \rangle - \langle T, g(D_k \varphi) \rangle \\ &= - \langle (D_k g)T, \varphi \rangle - \langle gT, D_k \varphi \rangle = - \langle (D_k g)T, \varphi \rangle + \langle D_k(gT), \varphi \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g(D_k T) = -(D_k g)T + D_k(gT)$ , lo que implica que  $D_k(gT) = (D_k g)T + g(D_k T)$ , y el resultado queda probado.  $\square$

Como podemos derivar cualquier distribución y toda función localmente integrable puede representarse mediante una distribución, todas ellas son derivables en el sentido distribucional. Veamos un ejemplo de una función que no es derivable y cómo es su derivada distribucional.

**Ejemplo 2.14. (Función de Heaviside)** Definimos la función escalón  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

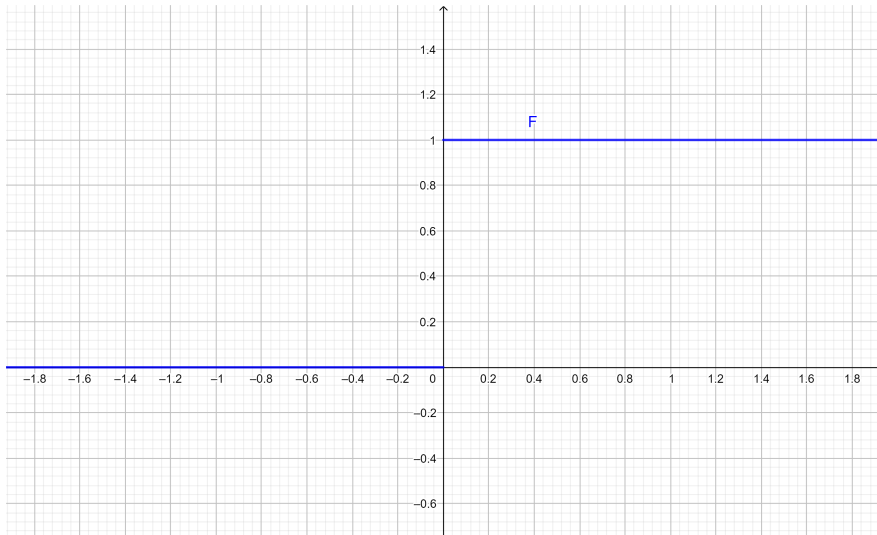


Figura 2.1: Función escalón de Heaviside

Esta función claramente no es derivable en el punto  $x = 0$  al presentar una discontinuidad de salto. Sin embargo, sí que podemos derivarla como distribución al ser una función

localmente integrable.

$$\langle T'_F, \varphi \rangle = - \langle T_F, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \varphi'(x) = - \int_0^{\infty} \varphi' = -\varphi \Big|_0^{\infty} = \varphi(0)$$

Por lo tanto la distribución derivada de  $F$  es aquella que lleva a cada función test a su valor en el punto  $x = 0$ . Esta derivada tiene sentido de manera intuitiva, ya que básicamente consiste en un 'impulso unidad' en el punto en el que  $F$  presenta la discontinuidad de salto.

**Definición 2.15. (Delta de Dirac)** Se define la distribución delta de Dirac  $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  como:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*Observación 2.16.* Claramente  $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$  pues  $\langle \delta, a\varphi + b\phi \rangle = (a\varphi + b\phi)(0) = a\varphi(0) + b\phi(0) = a \langle \delta, \varphi \rangle + b \langle \delta, \phi \rangle$  y además si  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  tenemos que  $\langle \delta, \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \rightarrow 0$

*Observación 2.17.* La delta de Dirac se puede definir centrada sobre cualquier punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tomando  $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ , de esta forma tenemos  $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ .

Hasta ahora nos hemos centrado en las distribuciones que provienen de funciones tradicionales para facilitar la comprensión de las mismas. Sin embargo, las distribuciones no se quedan solo ahí, sino que son una generalización del concepto de función, por lo que nos permiten estudiar 'elementos' que no tienen cabida en el análisis clásico. La delta de Dirac es un ejemplo de este caso, es una distribución que no está definida por la acción de una función sobre el espacio  $\mathcal{D}$ . Veamos una demostración de que efectivamente este es el caso:

**Proposición 2.18.** No existe  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\langle T_u, \varphi \rangle = \varphi(0)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ .

*Demostración:* Supongamos que existe una función  $u \in L^1_{loc}$  y  $T_u \in \mathcal{D}'$  con,

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int u \cdot \varphi$$

de forma que  $T_u = \delta$ .

Sea  $(\varphi_k)_k \in \mathbb{N}$  una sucesión de funciones test en  $\mathbb{R}^n$  con  $\varphi_k(0) = 1$  y con  $\text{sop}(\varphi_k) = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]^n$ . Entonces tenemos por un lado que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle T_u, \varphi_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(0) = \varphi(0) = 1$$

Pero por otro lado tenemos que  $u \cdot \varphi_k \rightarrow 0$  puntualmente cuando  $k \rightarrow \infty$ , como  $|u(x)\varphi_k(x)| \leq |u(x)| \cdot \|\varphi_k(x)\|_{\infty} \leq |u(x)|$ , por el teorema de convergencia dominada tenemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]^k} u \cdot \varphi_k = 0$$

lo que es una contradicción. □

La delta de Dirac, a pesar de su sencilla definición, juega un papel fundamental dentro de la teoría de distribuciones. Un primer ejemplo de su utilidad teórica lo tenemos en el siguiente resultado, del cual no daremos demostración.

**Proposición 2.19.** *Dada  $T \in \mathcal{D}'$  tal que  $\text{sop}(T) \subseteq \{a\}$  con  $a \in \mathbb{R}^n$ , entonces puede ser expresada como combinación lineal de la delta de Dirac en  $\{a\}$  y sus derivadas. Es decir,*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_a, \quad \text{con } m \in \mathbb{N}_0 \text{ y } c_\alpha \in \mathbb{R}^n.$$

### 2.2.1. Distribuciones vectoriales

Ahora que hemos definido la derivación distribucional podemos introducir también otros operadores del cálculo vectorial.

**Definición 2.20.** El espacio de funciones test  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  es el espacio vectorial formado por los vectores  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  cuyas componentes pertenecen a  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Definición 2.21.** Una distribución  $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$  viene dada por  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$  con  $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega) \forall i = 1, \dots, n$ . La relación entre  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$  viene dada por:

$$\langle \mathbf{T}, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle T_i, \varphi_i \rangle$$

**Definición 2.22.** Definimos a continuación algunos de los operadores de cálculo vectorial en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  y  $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$ :

- El gradiente de  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  es

$$\nabla T = (D_1 T, D_2 T, \dots, D_n T).$$

$\nabla T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$  y además dada  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ :

$$\langle \nabla T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle D_i T, \varphi_i \rangle = - \sum_{i=1}^n \langle T, D_i \varphi_i \rangle = - \langle T, \text{div} \varphi \rangle.$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\langle \nabla T, \varphi \rangle = - \langle T, \text{div} \varphi \rangle.$$

- La divergencia de  $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$  viene dada por:

$$\text{div} \mathbf{T} = \sum_{i=1}^n D_i T_i.$$

Claramente  $\text{div} \mathbf{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$  y dada  $\varphi \in \mathcal{D}$  se tiene:

$$\langle \text{div} \mathbf{T}, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n D_i T_i, \varphi \right\rangle = - \sum_{i=1}^n \langle T_i, D_i \varphi \rangle = - \langle \mathbf{T}, \nabla \varphi \rangle.$$

- Definimos el Laplaciano en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  como:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^n D_i^2 T.$$

Por lo que entonces dada  $\varphi \in \mathcal{D}$ :

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle \sum_{i=1}^n D_i^2 T, \varphi \rangle = (-1)^2 \langle T, \sum_{i=1}^n \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle.$$

Usando los puntos anteriores podemos ver además que:

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle = \langle T, \operatorname{div} \nabla \varphi \rangle = - \langle \nabla T, \nabla \varphi \rangle = \langle \operatorname{div} \nabla T, \varphi \rangle,$$

es decir,  $\Delta T = \operatorname{div} \nabla T$ , como sucede con los correspondientes términos en el ámbito de las funciones.

## 2.3. Operaciones

En este capítulo veremos cómo podemos definir algunas operaciones entre distribuciones, centrándonos sobre todo en la convolución y las restricciones necesarias para definirla.

### 2.3.1. Dificultades a la hora de definir la multiplicación

En primer lugar veremos si podemos definir la multiplicación entre dos distribuciones. Para ello intentaremos definir el producto  $\delta \cdot \delta = \delta^2$  como una distribución en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Una idea para definir  $\delta^2$  es: dada  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucesión de funciones  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$  tal que  $u_k \rightarrow \delta$  en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , definimos:

$$\delta^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^2 \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

De esta forma si comprobamos que esta multiplicación no depende de la sucesión  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tomada, entonces estaría bien definida. Sin embargo esto no es posible.

Si tomamos  $u_k = k\chi_{[0, 1/k]}$  tenemos que  $u_k \rightarrow \delta$  en  $\mathcal{D}'$  pero, si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , por el teorema del valor medio tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} u_k^2 \varphi = k^2 \int_0^{1/k} \varphi = k\varphi(x_k) \text{ para algún } x_k \in [0, 1/k]$$

Ahora, si tomamos  $\varphi \in \mathcal{D}$  tal que  $\varphi(0) > 0$  deducimos que:

$$\int_{\mathbb{R}} u_k^2 \varphi \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty$$

Por lo que  $(u_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$  no converge en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Por lo tanto no tenemos una definición clara de multiplicación entre dos distribuciones cualesquiera.

### 2.3.2. Convolución

Para definir la convolución en  $\mathcal{D}'$  vamos a necesitar algunas restricciones. En el caso de dos funciones  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la función  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como  $h(x, y) = f(x - y)g(y)$  es absolutamente integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ :

$$\int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |h(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

De esta forma la **convolución** de  $f$  y  $g$  queda definida como:

$$f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

y satisface que  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Al ser una función integrable existe  $T_{f*g} \in \mathcal{D}'$  tal que:

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x + y) dy dx$$

Sin embargo esta definición no puede extenderse para dos distribuciones  $T, S \in \mathcal{D}'$  cualesquiera, ya que dada  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\varphi(x + y)$  no tiene por qué tener soporte compacto. Pero si una de las dos distribuciones tiene soporte compacto sí que se puede definir la convolución.

Partimos del caso de la convolución de una distribución y una función test.

Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in \mathcal{D}$  la convolución entre la distribución que define  $f$  ( $T_f$ ) y  $\varphi$  debería coincidir con la convolución de  $f$  y  $\varphi$ , es decir:

$$(T_f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x - y) dy = \langle T_f(y), \varphi(x - y) \rangle$$

**Definición 2.23.** Dada  $T \in \mathcal{D}'$  y  $\varphi \in \mathcal{D}$  definimos

$$(T * \varphi)(x) = \langle T(y), \varphi(x - y) \rangle \quad (2.2)$$

*Observación 2.24.* En esta sección usamos la notación  $\langle T(y), \varphi(x - y) \rangle$ , donde  $T(y)$  sirve para denotar que la distribución  $T$  actúa sobre  $\varphi$  en la variable  $y$ .

Ahora veremos algunas propiedades de la convolución de distribuciones y funciones test, que más adelante nos ayudarán a definir convolución entre dos distribuciones (una de ellas de soporte compacto).

**Teorema 2.25.** Dada  $T \in \mathcal{D}'$  y  $\varphi \in \mathcal{D}$ , entonces  $T * \varphi$  es una función  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Y si  $T$  tiene soporte compacto entonces  $T * \varphi$  es una función test.

*Demostración:* Para demostrar este teorema haremos uso de varios lemas:

**Lema 2.26.**  $T * \varphi$  es continua

*Demostración:* Al ser  $\varphi$  una función test,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $D^\alpha \varphi(z - y) \rightarrow D^\alpha \varphi(x - y)$  cuando  $z \rightarrow x$ , es decir  $\varphi(z - y) \rightarrow \varphi(x - y)$  en  $\mathcal{D}$ . De esta forma como  $T$  es continua, tenemos que

$$\langle T(y), \varphi(z - y) \rangle \rightarrow \langle T(y), \varphi(x - y) \rangle \text{ cuando } z \rightarrow x$$

Así que  $T * \varphi$  es continua.  $\square$

**Lema 2.27.**  $D^\alpha(T * \varphi) = T * (D^\alpha \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi$

*Demostración:* Realizamos la demostración para  $|\alpha| = 1$  y el resultado se sigue por inducción para todo  $\alpha$ . Sea  $e_k \in \mathbb{R}^n$  el vector canónico  $k$ -ésimo de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} D_k(T * \varphi) &= \frac{\partial(T * \varphi)}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T * \varphi)(x + he_k) - (T * \varphi)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle T(y), \varphi(x - y + he_k) \rangle - \langle T(y), \varphi(x - y) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle T(y), \frac{\varphi(x - y + he_k) - \varphi(x - y)}{h} \rangle \\ &= \langle T(y), \frac{\partial \varphi}{\partial(x - y)_k}(x - y) \rangle = T * \frac{\partial \varphi}{\partial(x - y)_k} = T * (D_k \varphi) \end{aligned}$$

Además como,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial(x - y)_k}(x - y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(x - y)$$

tenemos por la definición de derivada en  $\mathcal{D}'$  que

$$-\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(x - y) \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial y_k}(y), \varphi(x - y) \rangle = \left(\frac{\partial T}{\partial y_k}\right) * \varphi = (D_k T) * \varphi$$

Por lo tanto concluimos que

$$D_k(T * \varphi) = T * (D_k \varphi) = (D_k T) * \varphi$$

y así ya queda probado el resultado original para todo  $\alpha$ .  $\square$

Con estos dos lemas ya quedaría demostrado que la convolución de una distribución y una función test da lugar a una función de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , veamos ahora que si  $T$  tiene soporte compacto, su convolución con  $\varphi$  es una función test.

**Lema 2.28.** *Si el soporte de  $T$  está contenido en  $[-a, a]^n \subset \mathbb{R}^n$  y  $\text{sop}(\varphi) \subseteq [-b, b]^n$  entonces  $\text{sop}(T * \varphi) \subseteq [-a - b, a + b]^n$ .*

*Demostración:* Como función sobre  $y$ ,  $\text{sop}(\varphi(x - \cdot)) \subseteq [-b + x, b + x]^n$ . Si  $x \notin [-a - b, a + b]^n$ , entonces  $\text{sop}(\varphi(x - y)) \cap [-a, a]^n = \emptyset$  y  $(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - y) \rangle = 0$ . Por lo tanto  $\text{sop}(T * \varphi) \subseteq [-a - b, a + b]^n$ .  $\square$

Queda así demostrado el teorema 2.25.

**Ejemplo 2.29.** Sea  $\varphi \in \mathcal{D}$  se tiene

$$(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta(y), \varphi(x - y) \rangle = \varphi(x)$$

es decir,  $\delta * \varphi = \varphi$ . Por lo tanto la delta de Dirac actúa como la identidad con la convolución.

**Teorema 2.30.** Sea  $T \in \mathcal{D}'$  y  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ , entonces,

$$T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$$

*Demostración:* Para  $\epsilon > 0$  tomamos la suma de Riemann

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^n \sum_j \varphi(x - j\epsilon)\phi(j\epsilon)$$

donde  $j$  recorre todos los puntos con coordenadas enteras. Entonces tenemos  $\text{sop}(f_\epsilon) \subset \text{sop}(\varphi) + \text{sop}(\phi)$ , y es compacto, entonces para todo  $\alpha$  multiíndice,

$$D^\alpha f_\epsilon(x) = \epsilon^n \sum_j D^\alpha \varphi(x - j\epsilon)\phi(j\epsilon) \rightarrow ((D^\alpha \varphi) * \phi)(x) = (D^\alpha(\varphi * \phi))(x)$$

y la convergencia es uniforme cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} (T * (\varphi * \phi))(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (T * f_\epsilon)(x) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^n \sum_j \varphi(x - j\epsilon)\phi(j\epsilon) = ((T * \varphi) * \phi)(x) \end{aligned}$$

y el teorema queda probado. □

**Teorema 2.31.** Sea  $T$  una distribución con soporte compacto, entonces si  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{D}$ , entonces  $T * \varphi_k \rightarrow T * \varphi$  en  $\mathcal{D}$ .

*Demostración:* Tenemos que por el lema (2.28),  $T * \varphi_k$  tienen un soporte uniformemente acotado. Sea  $[-c, c]^n$  una caja que contiene el soporte de  $T * \varphi_k \forall k \in \mathbb{N}$ .

Sea  $K$  un compacto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formado por todos los puntos  $(x, s)$  siendo  $x \in [-c, c]^n$  y  $s \in \{1/k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ . Ahora definimos la siguiente función:

$$F(x, s) = \begin{cases} (T * \varphi_k)(x) & s = \frac{1}{k} \\ (T * \varphi)(x) & s = 0 \end{cases}$$

**Lema 2.32.** Si  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{D}$ , y  $x_k \rightarrow x$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces como función sobre  $y$ , se tiene que  $\varphi_k(x_k - y) \rightarrow \varphi(x - y)$  en  $\mathcal{D}$ .

*Demostración.* Como  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  uniformemente y  $\varphi$  es uniformemente continua,  $\varphi_k(x_k - y) \rightarrow \varphi(x - y)$  uniformemente como función sobre  $y$ . Este mismo argumento aplica para cualquier derivada de  $\varphi$  por lo tanto  $\varphi_k(x_k - y) \rightarrow \varphi(x - y)$  en  $\mathcal{D}$ .  $\square$

Usando el lema (2.32) con la continuidad de la distribución  $T$ , tenemos que  $F(x, s)$  es continua en  $K$ . Por lo tanto es uniformemente continua. De esta forma cuando  $k$  tiende a infinito

$$F(x, \frac{1}{k}) = (T * \varphi_k)(x) \rightarrow F(x, 0) = (T * \varphi)(x).$$

Como por (2.27)  $\frac{\partial(T * \varphi_k)}{\partial x_k} = T * \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}$  y  $\frac{\partial(T * \varphi)}{\partial x_k} = T * \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ , lo mismo se mantiene para cualquier derivada. Así queda demostrado que  $T * \varphi_k \rightarrow T * \varphi$  en  $\mathcal{D}$ .  $\square$

Tanto la siguiente observación, como el siguiente teorema son necesarios para definir la convolución entre dos distribuciones, una de ellas con soporte compacto. Sin embargo los enunciaremos sin entrar en más detalle pues tratan sobre el espacio  $\mathcal{E}'$ .

*Observación 2.33.* Se puede definir la convolución entre una distribución de soporte compacto y una función infinitamente diferenciable igual que en (2.2).

**Teorema 2.34.** *Sea  $T \in \mathcal{D}'$  con soporte compacto ( $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ),  $\varphi \in \mathcal{D}$  y  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces,*

$$T * (\varphi * \phi) = (T * \varphi) * \phi$$

*Observación 2.35.* A partir de ahora usaremos la notación  $\tilde{T} = T(-x)$  tanto con funciones como con distribuciones.

**Definición 2.36.** Dadas  $T, S \in \mathcal{D}'$ , siendo  $T$  de soporte compacto. Definimos su convolución como

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \tilde{T} * \varphi \rangle, \quad \text{siendo } \tilde{T} = T(-x)$$

Esta definición es consistente con la definida siendo  $T$  una función test, gracias a la identidad  $\langle S, \varphi \rangle = (S * \tilde{\varphi})(0)$  y la asociatividad vista en (2.30). Además  $S * T$  es continua por el teorema (2.31). Queda claro entonces que  $S * T$  define una distribución.

**Lema 2.37.** *Esta definición de convolución es asociativa, es decir dados  $T, S, W \in \mathcal{D}'$  con al menos dos de ellos de soporte compacto se tiene*

$$T * (S * W) = (T * S) * W$$

**Teorema 2.38.** *Supongamos  $S, T, W \in \mathcal{D}'$ .*

a) *Si al menos uno de  $S, T$  tiene soporte compacto, entonces  $S * T = T * S$ .*

b) Dado  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , entonces  $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T$ .

c) Si al menos uno de  $S, T$  tiene soporte compacto, entonces dado  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  se tiene que  $D^\alpha(T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S)$ .

*Demostración:* a) Tenemos que dos distribuciones  $T$  y  $S$  son iguales si  $\forall \varphi, \phi \in \mathcal{D}$ ,  $T * (\varphi * \phi) = S * (\varphi * \phi)$ . Pues usando la asociatividad de la convolución tenemos  $T * \varphi = S * \varphi$  para todo  $\phi \in \mathcal{D}$  y por lo tanto  $T = S$ . Entonces aplicando que la convolución de funciones es conmutativa y los teoremas 2.30 y 2.34, tenemos que

$$\begin{aligned} (T * S) * (\varphi * \phi) &= T * (S * (\varphi * \phi)) = T * ((S * \varphi) * \phi) \\ &= T * (\phi * (S * \varphi)) = (T * \phi) * (S * \varphi) \end{aligned}$$

De manera similar llegamos a

$$(S * T) * (\varphi * \phi) = (S * T) * (\phi * \varphi) = (S * \phi) * (T * \varphi) = (T * \phi) * (S * \varphi)$$

Por lo tanto  $(S * T) * (\varphi * \phi) = (T * S) * (\varphi * \phi)$  y la conmutatividad queda probada.

b) Usando las propiedades de la convolución y que  $\delta$  actúa como la identidad en la convolución, tenemos que

$$(D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha T) = T * (D^\alpha \varphi) * \delta = T * (D^\alpha \delta) * \varphi = (D^\alpha \delta) * T * \varphi$$

c) Gracias al apartado anterior y la asociatividad y la conmutatividad de la convolución llegamos a

$$D^\alpha(T * S) = (D^\alpha \delta) * (T * S) = ((D^\alpha \delta) * T) * S = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S)$$

□

## Capítulo 3

# Topología de las distribuciones

En esta sección profundizaremos en la topología de  $\mathcal{D}$ , viendo su construcción y sus propiedades. En primer lugar veremos algunas definiciones y resultados (pasando por alto la demostración) que nos serán de gran utilidad a la hora de estudiar la topología de  $\mathcal{D}$ .

### 3.1. Espacios localmente convexos

**Definición 3.1.** Una función  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  sobre un espacio vectorial  $X$  es una **seminorma** si:

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$
- $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $x \in X$

**Lema 3.2.** Sea  $p$  una seminorma sobre  $X$  espacio vectorial. Entonces se tiene:

- a)  $p(0) = 0$
- b)  $p(x) \geq 0$
- c)  $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$
- d)  $\{x \in X : p(x) = 0\}$  es un espacio lineal

**Definición 3.3.** Dada una seminorma  $p$  sobre un espacio vectorial  $X$ , el conjunto

$$B_{y,\epsilon}(p) = \{x \in X : p(x - y) < \epsilon\}$$

recibe el nombre de  **$p$ -semibola** de radio  $\epsilon > 0$  centrada en  $y \in X$ . Además dada una colección finita de seminormas  $p_1, \dots, p_k$  definimos la  $(p_1, \dots, p_k)$ -semibola de radio  $\epsilon$  centrada en  $y \in X$  como

$$B_{y,\epsilon}(p_1, \dots, p_k) = B_{y,\epsilon}(p_1) \cap \dots \cap B_{y,\epsilon}(p_k) \tag{3.1}$$

**Definición 3.4.** Dado  $X$  un espacio vectorial y  $\mathcal{P}$  una familia de seminormas sobre  $X$  se puede definir una topología en  $X$  de la siguiente forma:

Dado  $A \subset X$  es abierto si  $\forall x \in A$  existe una semibola  $B_{x,\epsilon}(p_1, \dots, p_k) \subset A$  con  $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$  y  $\epsilon > 0$ . El par  $(X, \mathcal{P})$  recibe el nombre de **espacio localmente convexo**.

*Observación 3.5.* Dadas dos seminormas  $p_1, p_2$  tenemos que la aplicación  $x \mapsto \max\{p_1(x), p_2(x)\}$  también es una seminorma y además  $B_{y,\epsilon}(p_1, \dots, p_k) = B_{y,\epsilon}(\max p_1, \dots, p_k)$ . Por lo tanto dado  $(X; \mathcal{P})$  espacio localmente convexo, la topología no varía si añadimos las normas máximos entre normas. A partir de ahora consideraremos siempre que estas están contenidas en  $\mathcal{P}$  para así simplificar notación.

**Definición 3.6.** Dado  $(X, \mathcal{P})$  un espacio localmente convexo definimos:

- $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy si  $\forall p \in \mathcal{P}, p(x_j - x_k) \rightarrow 0$  cuando  $j, k \rightarrow \infty$
- $A \subset X$  está acotado si  $\forall p \in \mathcal{P}, \sup_{x \in A} p(x) < \infty$

**Lema 3.7.** Dada  $f : X \rightarrow Y$  aplicación lineal entre dos espacios localmente convexos con  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  sus respectivas familias de seminormas. Entonces  $f$  es continua si y solo si  $\forall q \in \mathcal{Q}$  existe  $p \in \mathcal{P}$  y una constante  $C > 0$  tal que

$$q(f(x)) \leq Cp(x), \quad x \in X$$

**Lema 3.8.** Una seminorma  $q : X \rightarrow \mathbb{R}$  (no tiene por qué pertenecer a  $\mathcal{P}$ ) es continua si y solo si existe una seminorma  $p \in \mathcal{P}$  y una constante  $C \in \mathbb{R}^+$  de manera que

$$q(x) \leq Cp(x), \quad x \in X$$

**Definición 3.9.** Una familia de seminormas  $\mathcal{P}$  es **separable** si  $\forall x \in X \setminus \{0\}$  existe  $p \in \mathcal{P}$  tal que  $p(x) \neq 0$ .

La importancia de esta definición viene de que si espacio localmente convexo  $(X; \mathcal{P})$  tiene una familia de seminormas separable  $\mathcal{P}$ , entonces la topología definida sobre  $X$  es Hausdorff.

**Lema 3.10.** Un espacio localmente convexo  $(X, \mathcal{P})$  es metrizable con una distancia invariante por traslaciones si y solo si  $\mathcal{P}$  es numerable y separable.

**Definición 3.11.** Un espacio de **Fréchet** es un espacio localmente convexo que es metrizable con una distancia completa invariante por traslaciones.

Ahora ya estamos en condiciones de empezar a construir la topología sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$

### 3.2. Los Espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$

**Definición 3.12.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $K \subset \Omega$  compacto. Definimos  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  como el espacio vectorial topológico de funciones  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  tal que  $\text{sop}(u) \subseteq K$ .

Dotamos  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  de una topología localmente convexa dada por la familia de seminormas  $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$

**Definición 3.13.** Definimos las seminormas  $p_m : \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathcal{D}_K$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  como:

$$p_m(u) = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha u(x)|$$

De esta forma la topología de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  viene dada por una familia de seminormas numerable y separable, por lo tanto es metrizable. Además es un espacio completo con la distancia generada por la familia de seminormas. Por lo tanto es un espacio de Fréchet.

### 3.3. El Espacio $\mathcal{D}(\Omega)$

Aquí daremos una nueva definición del espacio  $\mathcal{D}(\Omega)$ , a partir de los espacios  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  que nos permitirá introducir la topología sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$  de forma más natural.

**Definición 3.14.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Definimos el espacio de las funciones test sobre  $\Omega$  como:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega), \quad K \text{ compacto}$$

Ahora introduciremos una topología sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Al hacerlo queremos que la inclusión  $\mathcal{D}_K(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$  sea continua, es decir, para cada seminorma  $p$  de la familia de seminormas  $\mathcal{P}$  que induce una topología sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $p|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$  debe ser continua en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . La familia  $\mathcal{P} = \{p_m\}$  cumple esta propiedad sin embargo no es la mejor elección.

*Observación 3.15.* El espacio  $\mathcal{D}(\Omega)$  no es completo con la familia de seminormas  $\mathcal{P} = p_m$ . Por ejemplo en el caso  $\Omega = \mathbb{R}$ , si tomamos  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  con un soporte 'pequeño' y que esté concentrado en el 0, (se puede tomar como en (1.1)) y consideramos la sucesión

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + 2^{-1}\varphi(x-1) + \cdots + 2^{-k}\varphi(x-k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Tenemos que la sucesión es de Cauchy con respecto a la familia de seminormas, pero el soporte de la función límite no es compacto.

Por lo tanto necesitamos una familia mas grande de seminormas pero de manera que su restricción sobre  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  sea continua.

**Definición 3.16.** Definimos la familia de seminormas  $\mathcal{P}$  como:

$$\mathcal{P} = \{p : p \text{ es una seminorma en } \mathcal{D}(\Omega) \text{ y } p|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \text{ es continua } \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}$$

La topología generada por  $\mathcal{P}$  recibe el nombre de **topología límite inductivo**. Esta topología se comporta muy bien con la definición que hemos dado de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pues este espacio es la unión de los  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ , donde cada uno tiene su propia topología.

*Observación 3.17.* Denotaremos las semibolas en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  como  $B_{\varphi,\epsilon}(p_m; K)$  y las semibolas en  $\mathcal{D}(\Omega)$  por  $B_{\varphi,\epsilon}(p)$

**Lema 3.18.** *La topología de  $\mathcal{D}(\Omega)$  es exactamente la inducida por los embebimientos  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  para cualquier  $K \subset \Omega$  compacto.*

*Demostración:* Sea  $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$  abierto y  $K \subset \Omega$  compacto. Veamos que  $A \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$  es abierto en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Por ser  $A$  abierto, para cada  $\varphi \in A$ , existen  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\varphi,\epsilon}(p) \subset A$ . Si tomamos la seminorma  $p_m$  tal que  $p \leq cp_m$  en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  con  $c > 0$ . De esta forma  $B_{\varphi,\epsilon/c}(p_m; K) \subset B_{\varphi,\epsilon}(p) \cap \mathcal{D}_K \subset A \cap \mathcal{D}_K$ , probando así que  $A \cap \mathcal{D}_K$  es abierto en  $\mathcal{D}_K$ . Por otro lado, como  $\{p_m\} \subset \mathcal{P}$ , cualquier semibola  $B_{\varphi,\epsilon}(p_m; K)$  es igual a la intersección de la semibola  $B_{\varphi,\epsilon}(p_m)$  con  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Esto implica que cualquier abierto en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  puede escribirse como la intersección de un abierto de  $\mathcal{D}(\Omega)$  con  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ .  $\square$

*Observación 3.19.* De esta forma tenemos que el embebimiento  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  es trivialmente continuo para todo  $K \subset \Omega$  compacto.

**Teorema 3.20.** *Un conjunto  $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$  es acotado si y solo si existe un compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $A \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $A$  está acotado en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  para algún  $K \subset \Omega$ . Por la continuidad del embebimiento  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $A$  también está acotado en  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Dada  $p \in \mathcal{P}$ , entonces existe  $p_m$  seminorma de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  tal que  $p(\varphi) \leq Cp_m(\varphi)$  para  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ . Por suposición,  $p_m(\varphi) \leq M$  para todo  $\varphi \in A$  y alguna constante  $M \in \mathbb{R}^+$ , implicando que  $p$  está acotada en  $A$  y como  $p$  es arbitraria, tenemos que  $A$  está acotada en  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Para la otra implicación supongamos que  $A \not\subset \mathcal{D}_K(\Omega)$  para ningún compacto  $K \subset \Omega$ . Entonces existen sucesiones  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  y  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  tal que  $\varphi_k(x_k) \neq 0$ , y que  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  no tiene puntos de acumulación en  $\Omega$ . Definimos entonces:

$$p(\varphi) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{k|\varphi(x_k)|}{|\varphi_k(x_k)|}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es claramente una seminorma y además  $p \in \mathcal{P}$  ya que para cualquier compacto  $K' \subset \Omega$  existe  $C \in \mathbb{R}^+$  de forma que  $p(\varphi) \leq C\|\varphi\|_{C^0}$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}'_{K'}$ . Sin embargo, tenemos que  $p(\varphi_k) \geq k$ , así que  $p$  no está acotado en  $A$  y por lo tanto  $A$  no está acotado en  $\mathcal{D}(\Omega)$ .  $\square$

- Corolario 3.21.** a) La sucesión  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy en  $\mathcal{D}(\Omega)$  si y solo si  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$  para algún compacto  $K \subset \Omega$ , y  $\|\varphi_i - \varphi_j\|_{C^m} \rightarrow 0$  cuando  $i, j \rightarrow \infty$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}_0$
- b)  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  si y solo si  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K$  para algún compacto  $K \subset \Omega$ , y  $\|\varphi_k\|_{C^m} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}_0$
- c)  $\mathcal{D}(\Omega)$  es **completo**.

*Demostración:* a) Si  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$  es de Cauchy en  $\mathcal{D}_K$  para algún compacto  $K \subset \Omega$ , entonces es de Cauchy en  $\mathcal{D}(\Omega)$  por la continuidad del embebimiento  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ . Ahora sea  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  de Cauchy en  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Como las sucesiones de Cauchy están acotadas, por el teorema anterior  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$  para algún compacto  $K \subset \Omega$ . Además como  $\{p_m\} \subset \mathcal{P}$ ,  $p_m(\varphi_i - \varphi_j) \rightarrow 0$  cuando  $i, j \rightarrow \infty$ , para todo  $p_m$ .

b) De manera similar a la demostración anterior, toda sucesión convergente en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  es convergente en  $\mathcal{D}(\Omega)$  por la continuidad del embebimiento  $\mathcal{D}_K(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ . Además si es convergente en  $\mathcal{D}(\Omega)$  está acotada y por el teorema anterior estaría contenida en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  para algún  $K \subset \Omega$ . Además como todas las seminormas de  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  están contenidas en  $\mathcal{P}$ , la sucesión también es convergente en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$

c) Dada  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  de Cauchy en  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Por a) es de Cauchy en algún  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Como  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  es Fréchet, la sucesión es convergente en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  y por b) también lo es en  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

*Observación 3.22.* El espacio de las funciones test **no es metrizable**. Pongamos el caso  $\Omega = \mathbb{R}$  y tomemos  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{sop}(\varphi) = [-1, 1]$ , y definimos:

$$\varphi_{k,m}(x) = \frac{1}{m} \varphi\left(\frac{x}{k}\right), \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Para todo  $k$  la sucesión  $\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \dots$  converge a 0 en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Entonces si  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  fuese metrizable por una distancia  $d$ , podemos tomar una subsucesión  $m_1, m_2, \dots$  de forma que  $\varphi_{k,m_k} \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Si tomamos  $m_k$  suficientemente grande tal que  $d(\varphi_{k,m_k}, 0) < \frac{1}{k}$ , para todo  $k$ . Pero esta sucesión no converge en  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  pues  $\text{sop}(\varphi_{k,m_k}) = [-k, k]$  que, cuando  $k$  tiende a infinito, acaba siendo más grande que cualquier compacto en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.23.** Sea  $(Y, \mathcal{Q})$  un espacio localmente convexo, y sea  $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$  una aplicación lineal. Entonces equivalen:

- a)  $f$  es continua
- b)  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  implica  $f(\varphi_k) \rightarrow 0$  en  $Y$ .
- c) Para cualquier compacto  $K \subset \Omega$ ,  $f : \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow Y$  es continuo.

*Demostración:* a) $\Rightarrow$ b). Por la definición de continuidad,  $f$  es continua si para cualquier  $q \in \mathcal{Q}$ , existe  $p \in \mathcal{P}$  tal que

$$q(f(\varphi)) \leq p(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.2)$$

Como  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}$ , tenemos que  $p(\varphi_k) \rightarrow 0$ , por lo tanto  $q(f(\varphi_k)) \rightarrow 0$ . Como esto se tiene para toda  $q \in \mathcal{Q}$ , concluimos que  $f(\varphi_k) \rightarrow 0$  en  $Y$ .

b) $\Rightarrow$ c). Sea  $K \subset \Omega$  compacto. Por b) queda claro que para cualquier sucesión  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  tenemos que  $f(\varphi_k) \rightarrow 0$  en  $Y$ . Por lo tanto como  $\mathcal{D}_K(\Omega)$  es un espacio metrizable, la continuidad de  $f$  viene dada por el hecho de que para un espacio métrico  $X$  y un espacio topológico  $Y$ , una aplicación  $g : \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow Y$  es continua si dada una sucesión  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x$  en  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ , entonces  $f(x_k) \rightarrow f(x)$  en  $Y$ .

c) $\Rightarrow$ a). Queremos probar que para cualquier  $q \in \mathcal{Q}$ , existe  $p \in \mathcal{P}$  tal que se cumple (3.2). Dada  $q$ , definimos la función

$$p(\varphi) = q(f(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Esta función es una seminorma sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ , y además para cada compacto  $K \subset \Omega$ , la restricción  $p|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$  es continua pues

$$q(f(\varphi)) \leq Cp_m(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

para algún  $C$  y  $m$  que dependen de  $K$ . Por lo tanto  $p \in \mathcal{P}$ , y claramente se cumple (3.2).  $\square$

### 3.4. El Espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Definición 3.24.** Una distribución en  $\Omega$  es un funcional lineal continuo sobre  $\mathcal{D}$ , es decir el espacio de las distribuciones es el dual del espacio de las funciones test, y lo denotamos por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Lema 3.25.** *Un funcional lineal  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  es continuo si y solo si se tiene alguna de las siguientes:*

- a)  $\varphi_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}(\Omega)$  implica  $\langle T, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$ .
- b) Para cualquier  $K \subset \Omega$  compacto, existe  $m \in \mathbb{N}_0$  y  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{C^m}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Este lema es consecuencia directa del teorema 3.23.

Tal y como hemos visto en el segundo capítulo, dotamos al espacio  $\mathcal{D}(\Omega)$  de la topología

débil\*, esta en el caso de espacios localmente convexos, es la inducida por la familia de seminormas  $\mathcal{P}' = \{p_\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ , con  $p_\varphi(T) = |\langle T, \varphi \rangle|$  para  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Por lo tanto una sucesión de distribuciones  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a 0 en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si y solo si

$$\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A continuación veremos una propiedad que nos permite en cierta forma catalogar las distribuciones según su 'regularidad'.

**Definición 3.26.** Sea  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $K \subset \Omega$  compacto existe  $C \in \mathbb{R}^+$  que cumple

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_C^m, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

entonces decimos que el orden de  $T$  es menor o igual a  $m$ . El menor  $m$  que cumple esto es el **orden** de  $T$ .

*Observación 3.27.* Se puede comprobar fácilmente que tanto la delta de Dirac como las distribuciones dadas por funciones localmente integrables tienen orden 0.



## Capítulo 4

# La transformada de Fourier

### 4.1. Funciones de decrecimiento rápido

**Definición 4.1.** Dada  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la transformada de Fourier de  $f$  es la aplicación  $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad (4.1)$$

Bajo las condiciones anteriores, se tiene que la integral (4.1) es absolutamente convergente y además

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{y} \quad \widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \quad (4.2)$$

De esta forma la aplicación  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) / g \text{ está acotada}\}$  es la **Transformada de Fourier** y está bien definida.

Queremos extender la transformada de Fourier al espacio de las distribuciones. Al igual que al definir las operaciones anteriores, dada una distribución  $T$  buscamos una forma de definir  $\widehat{T}$  llevando la transformada sobre las funciones test.

Sin embargo dada  $\varphi \in \mathcal{D}$  que no es idénticamente cero, se tiene que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx$$

no pertenece a  $\mathcal{D}$ .

**Ejemplo 4.2.** Sea  $\varphi \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{sop}(\varphi) \subset (-a, a)$ , entonces

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx = \int_{-a}^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} \varphi(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \int_{-a}^a x^n \varphi(x) dx$$

y como

$$\left| \int_{-a}^a x^n \varphi(x) dx \right| \leq \text{máx} |\varphi| a^n$$

se tiene que  $\widehat{\varphi}$  es una función analítica en  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto  $\widehat{\varphi}$  no puede tener soporte compacto siendo idénticamente distinta de cero.

Por lo tanto necesitamos otro espacio de funciones, que contenga a  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , sea invariante con respecto a  $\mathcal{F}$  y que su dual sea un subespacio de  $\mathcal{D}'$ . Este espacio es el espacio de **Schwartz**, que definimos a continuación.

**Definición 4.3.** Denotamos por  $\mathcal{S}$  el espacio de las funciones **de decrecimiento rápido** o de **Schwartz**, es decir,

$$\mathcal{S} := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty\}$$

Esta definición nos dice que una función es de Schwartz si es infinitamente diferenciable y el supremo del producto de cualquiera de sus derivadas por una potencia de cualquier grado de  $x$  siempre está acotado en  $\mathbb{R}^n$ .

Se tiene claramente que:

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S} \quad (4.3)$$

**Ejemplo 4.4.** La función  $e^{-|x|^2}$  es un ejemplo de función rápidamente decreciente

Otro conjunto de funciones que nos van a ser muy útiles son las funciones de crecimiento lento que definimos a continuación.

**Definición 4.5.** El espacio de las **funciones de crecimiento lento** en  $\mathbb{R}^n$  se denota por  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y es el conjunto de las funciones  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , existe  $k \in \mathbb{N}_0$  y  $C, R \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C|x|^m, \quad |x| > R.$$

Básicamente una función es de crecimiento lento si tanto ella como todas sus derivadas crecen infinitamente más despacio que algún polinomio.

**Definición 4.6.** Sea  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$  y  $v \in \mathcal{S}$ . Entonces decimos que  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $v$  en  $\mathcal{S}$  si para cualquier par de multi-índices  $\alpha, \beta$ ,

$$x^\beta D^\alpha v_k \longrightarrow x^\beta D^\alpha v, \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

*Observación 4.7.* Si  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$  y  $\varphi_k \rightarrow v$  en  $\mathcal{D}$ , entonces  $\varphi_k \rightarrow v$  en  $\mathcal{S}$

**Lema 4.8.**  $\mathcal{S}$  es un espacio de Frechét, es decir,  $\mathcal{S}$  es un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo sobre  $\mathbb{C}$ .

**Proposición 4.9.**  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$  y es un embebimiento continuo.

*Demostración:* Consideramos la aplicación  $\iota : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$  definido por  $\iota(\varphi) := \varphi$ . Por (4.3) esta aplicación está bien definida y es lineal. Consideramos una sucesión de funciones test  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\varphi_j \rightarrow 0$  en  $\mathcal{D}$  cuando  $j$  tiende a infinito. Entonces existe un compacto  $K \in \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que  $\text{sop}(\varphi_j) \subseteq K$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , y  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j| = 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ . Por lo tanto, para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi_j(x)| = \sup_{x \in K} |x^\beta D^\alpha \varphi_j(x)| \leq C \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

De esta forma y gracias al teorema 3.23 la aplicación  $i$  es continua y define un embebimiento continuo.  $\square$

**Lema 4.10.**  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  es un subespacio denso de  $\mathcal{S}$ .

Ahora que hemos definido un espacio que contiene a  $\mathcal{D}$ , veremos que  $\mathcal{S}$  se comporta como queremos con respecto a la transformada de Fourier, es decir, dada una función de decrecimiento rápido, su transformada de Fourier también pertenece a  $\mathcal{S}$ . El siguiente resultado nos asegura justo eso, además de una propiedad que nos facilitará el cálculo de dicha transformada.

**Teorema 4.11.** *La transformada de Fourier es una aplicación continua de  $\mathcal{S}$  en sí misma. Además se tiene:*

$$\mathcal{F}[D^\alpha u] = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u} \quad y \quad \mathcal{F}[x^\alpha u] = i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, u \in \mathcal{S} \quad (4.5)$$

*Demostración:* Dada  $u \in \mathcal{S}$ , si derivamos su transformada de Fourier bajo el signo de la integral obtenemos

$$i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} x^\alpha u(x) dx,$$

y está bien definido por ser una integral uniformemente convergente. Por lo tanto  $\widehat{u} \in \mathcal{C}^\infty$  y  $i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}$  es la transformada de Fourier de  $x^\alpha u$ . Integrando por partes obtenemos que

$$i^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\beta D^\alpha \widehat{u} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} D^\beta (x^\alpha u(x)) dx. \quad (4.6)$$

Estas operaciones están bien definidas ya que  $u \in \mathcal{S}$ . Por (4.6) y el hecho de que  $D^\beta (x^\alpha u(x)) \in \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ , queda claro que  $\xi^\beta D^\alpha \widehat{u}$  está acotada y por tanto  $\widehat{u} \in \mathcal{S}$ . Además cuando  $\alpha = 0$  se tiene que  $i^{|\beta|} \xi^\beta \widehat{u}$  es la transformada de Fourier de  $D^\beta u$ . Finalmente si multiplicamos y dividimos el lado derecho de (4.6) por  $(1 + |x|)^{n+1}$ , entonces lo podemos acotar por una constante multiplicada por el  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} [(1 + |x|)^{n+1} |D^\beta (x^\alpha u(x))|]$ , pues  $(1 + |x|)^{-n-1}$  es integrable, y con esto queda demostrada la continuidad de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Teorema 4.12.** *La fórmula inversa de la transformada de Fourier se cumple en  $\mathcal{S}$ , es decir dado  $u \in \mathcal{S}$ .*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[\widehat{u}](x) \quad (4.7)$$

*Demostración:* Tenemos que calcular la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-1x \cdot \xi} dy, \quad u \in \mathcal{S}.$$

Esta integral no es absolutamente convergente así que no podemos invertir el orden de integración. Sin embargo, si introducimos el factor  $v(\xi)$ , con  $v \in \mathcal{S}$ , obtenemos convergencia absoluta. Entonces por ser  $v, u$  funciones  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e invirtiendo el orden de integración se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) v(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y - x) u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) u(x + y) dy. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $v(\xi)$  por  $u(\epsilon\xi)$ ,  $\epsilon > 0$ , con transformada de Fourier  $\epsilon^{-n} \widehat{v}(y/\epsilon)$ , obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) v(\epsilon\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) u(x + \epsilon y) dy.$$

Como tanto  $u, v$  están en  $\mathcal{S}$ , por lo tanto son integrables, y  $u$  y  $v$  son continuas y acotadas, podemos pasar el límite bajo la integral cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y de esta forma

$$v(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) dy$$

Si tomamos ahora  $v(x) = e^{-|x|^2/2}$ , tenemos que  $\widehat{v}(y) = (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2}$  y  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) dy = (2\pi)^n$ , quedando demostrado el resultado.  $\square$

En particular usando el teorema anterior, tenemos que

$$u(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (4.8)$$

## 4.2. Distribuciones temperadas

Ahora definiremos la transformada de Fourier para las distribuciones de  $\mathcal{D}'$  que sean continuas con respecto a la convergencia definida en (4.4). Estas distribuciones reciben el nombre de **distribuciones temperadas**.

**Definición 4.13.** Definimos el espacio de las distribuciones temperadas,  $\mathcal{S}'$ , como el dual algebraico de  $\mathcal{S}$ , es decir,

$$\mathcal{S}' := \{T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} / T \text{ es lineal y continua}\}$$

Es decir  $T$  es una distribución temperada si es una funcional sobre  $\mathcal{S}$  y satisface:

- $\langle T, c_1 u_1 + c_2 u_2 \rangle = c_1 \langle T, u_1 \rangle + c_2 \langle T, u_2 \rangle$  para todo  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  y  $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$
- Para toda  $u_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{S}$ , entonces  $\langle T, u_k \rangle \rightarrow 0$  en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 4.14.** Una sucesión  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$  converge a  $T \in \mathcal{S}'$  si y solo si cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces  $\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$ , es decir, dotamos a  $\mathcal{S}'$  de la topología débil\*.

**Proposición 4.15.**  $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$  es un embebimiento continuo.

*Demostración:* Consecuencia de la proposición 4.9 y el lema 4.10. □

Gracias a este resultado queda claro que todas las distribuciones temperadas están incluidas dentro del espacio de las distribuciones, y por lo tanto hay distribuciones en  $\mathcal{D}$  cuya acción se puede extender a  $\mathcal{S}$  definiendo así una distribución temperada.

**Ejemplo 4.16.** Claramente  $\delta \in \mathcal{D}'$  también es una distribución temperada pues cumple las condiciones de linealidad y continuidad. Sea  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{S}$  tal que  $v_k \rightarrow v$  en  $\mathcal{S}$ . Entonces:

$$\langle \delta, v_k \rangle = v_k(0) \rightarrow v(0) = \langle \delta, v \rangle$$

**Proposición 4.17.** Toda función  $f$  de crecimiento lento genera una distribución temperada  $S_f$  a través de la igualdad

$$\langle S_f, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot u(x) dx, \quad u \in \mathcal{S}$$

*Demostración.* Claramente  $S_f$  es una forma lineal sobre  $\mathcal{S}$ . Para probar la continuidad, debemos demostrar que si  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tiende a 0 en  $\mathcal{S}$ , entonces  $\langle S_f, u_k \rangle \rightarrow 0$  cuando  $k$  tiende a infinito. Ahora para cada  $k$ , tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) u_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^l} [(1 + |x|^2)^l u_k(x)] dx,$$

siendo  $l \geq 0$  un entero. Para  $l$  suficientemente grande,  $f(x)/(1 + |x|^2)^l$  es absolutamente integrable, y tenemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u_k(x) dx \right| \leq \sup \left| (1 + |x|^2)^l u_k(x) \right| \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^l} \right| dx.$$

Cuando  $u_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{S}$ , el lado derecho de la expresión anterior tiende a 0, quedando probada la continuidad. □

Observamos ahora<sup>1</sup> que, si  $u, v \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}, v \rangle &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \right) v(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} v(\xi) d\xi \right) u(x) dx = \langle u, \widehat{v} \rangle \end{aligned}$$

por lo tanto  $\langle \widehat{u}, v \rangle = \langle u, \widehat{v} \rangle$ . Lo importante de esta igualdad es que se mantiene para la distribución temperada  $T_u \in \mathcal{S}'$  definida por  $u$ . De hecho:

**Proposición 4.18.** *Sea  $T \in \mathcal{S}'$ . El funcional lineal dado por*

$$v \mapsto \langle T, \widehat{v} \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{S}$$

*es una distribución temperada.*

*Demostración:* Sea  $v_k \rightarrow v$  en  $\mathcal{D}$ . Entonces  $v_k \rightarrow v$  y  $\widehat{v}_k \rightarrow \widehat{v}$  en  $\mathcal{S}$ . Como  $T \in \mathcal{S}'$ , se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T, \widehat{v}_k \rangle = \langle T, \widehat{v} \rangle$$

por lo que  $v \mapsto \langle T, \widehat{v} \rangle$  define una distribución. Si  $v_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{S}$ , entonces  $\widehat{v}_k \rightarrow 0$  en  $\mathcal{S}$  y  $\langle T, \widehat{v}_k \rangle \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $v \mapsto \langle T, \widehat{v} \rangle$  es una distribución temperada.  $\square$

Con estos resultados ya estamos en condiciones de definir la transformada de Fourier sobre  $\mathcal{S}'$ .

**Definición 4.19.** Dada  $T \in \mathcal{S}'$ . La transformada de Fourier  $\widehat{T} = \mathcal{F}[T]$  es la distribución temperada definida por

$$\langle \widehat{T}, v \rangle = \langle T, \widehat{v} \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{S}.$$

Gracias a esta definición, la transformada de Fourier se aplica sobre las funciones del espacio de Schwartz, haciendo que este bien definida y conserve todas las propiedades válidas al aplicarla sobre funciones.

**Proposición 4.20.** *Sea  $T \in \mathcal{S}'$  y  $v \in \mathcal{S}$ .*

- *Traslación.* Si  $a \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{F}[T(x - a)] = e^{-ia \cdot \xi} \widehat{T} \quad y \quad \mathcal{F}[e^{-ia \cdot \xi} T] = \widehat{T}(\xi - a).$$

- *Reescalado.* Si  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ ,

$$\mathcal{F}[T(hx)] = \frac{1}{|h|^n} \widehat{T}\left(\frac{\xi}{h}\right).$$

<sup>1</sup>por simplicidad denotamos de la misma forma  $u, v$  y las distribuciones a las que dan lugar

- *Derivación:*

$$\mathcal{F}[D_j T] = i\xi_j \widehat{T} \quad y \quad \mathcal{F}[x_j T] = iD_j \widehat{T}$$

- *Convolución:*

$$\mathcal{F}[T * v] = \widehat{T} * \widehat{v}$$

**Ejemplo 4.21.** Como ya vimos  $\delta \in \mathcal{S}'$  por lo tanto su transformada de Fourier esta bien definida y tenemos:

$$\langle \widehat{\delta}, v \rangle = \langle \delta, \widehat{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) dx = \langle 1, v \rangle$$

Además aplicando la fórmula (4.7),

$$\langle \widehat{1}, v \rangle = \langle 1, \widehat{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(\xi) d\xi = (2\pi)^n v(0) = \langle (2\pi)^n \delta, v \rangle \quad (4.9)$$



## Capítulo 5

# Aplicaciones en EDPs

### 5.1. Operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes

En este capítulo veremos como tanto las distribuciones, como las distribuciones temperadas, nos pueden ser de utilidad a la hora de estudiar y resolver ecuaciones en derivadas parciales.

En primer lugar estableceremos la notación que usaremos a lo largo del capítulo. Dado  $m \in \mathbb{N}_0$ , definimos un **operador diferencial lineal con coeficientes constantes** (ODLCC) como:

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} i^{-|\alpha|} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m \quad (5.1)$$

Además, si tenemos  $P(D)$  igual que arriba, definimos  $P(-D) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-i)^{-|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$  y definimos el **símbolo** de  $P(D)$  como:

$$P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \quad (5.2)$$

Decimos que  $P(D)$  es de orden<sup>1</sup>  $m$  si existe  $\alpha_* \in \mathbb{N}_0^n$  con  $|\alpha_*| = m$  y  $a_{\alpha_*} \neq 0$  y definimos su **símbolo principal** como:

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \quad (5.3)$$

*Observación 5.1.* El hecho de definir  $P(D)$  con el factor  $i^{|\alpha|}$  dentro de la suma es simplemente para facilitar los cálculos al aplicar la transformada de Fourier. En cualquier caso

---

<sup>1</sup>No confundir con el orden de una distribución, este orden se refiere exclusivamente a un operador diferencial.

esto no hace que los siguientes resultados pierdan generalidad pues todo operador diferencial lineal de coeficiente constantes se puede expresar de esta forma modificando los coeficientes.

## 5.2. Soluciones Fundamentales

**Definición 5.2.** Sea  $P(D)$  un operador diferencial lineal con coeficientes constantes en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $E \in \mathbb{R}^n$  es una **solución fundamental** de  $P(D)$  si

$$P(D)E = \delta, \quad \text{en } \mathcal{D}' \quad (5.4)$$

De esta forma tenemos que como  $\langle P(D)E, \varphi \rangle = \langle E, P(-D)\varphi \rangle$  para toda  $\varphi \in \mathcal{D}$ , entonces  $E \in \mathcal{D}'$  es solución fundamental de  $P(D)$  si y solo si

$$\langle E, P(-D)\varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.5)$$

**Definición 5.3.** Sea  $P(D)$  un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, definimos la **ecuación de Poisson** para el operador  $P(D)$  como

$$P(D)u = f \quad (5.6)$$

Si el operador diferencial  $P(D)$  tiene una solución fundamental  $E \in \mathcal{D}'$ , entonces para todo  $f \in \mathcal{D}'$  tal que  $E * f$  tiene sentido (por ejemplo si  $f$  tiene soporte compacto) la ecuación de Poisson tiene solución en  $\mathcal{D}'$ . Tomando  $u := E * f$ , se tiene

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f \quad \text{en } \mathcal{D}' \quad (5.7)$$

Vamos a hacer el ejercicio de encontrar la fórmula de una solución fundamental. En primer lugar, supongamos  $P(D)$  un operador diferencial lineal con coeficientes constantes que cumple

$$\exists c \in (0, \infty) \text{ tal que } |P(\xi)| \geq c, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (5.8)$$

De esta forma tenemos que  $\frac{1}{P(\xi)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , entonces<sup>2</sup> por la proposición 4.17,  $\frac{1}{P(\xi)} \in \mathcal{S}'$ . Si  $E \in \mathcal{S}'$  es una solución fundamental de  $P(D)$ , entonces  $P(D)E = \delta$  en  $\mathcal{S}'$ . Si aplicamos la transformada de Fourier, obtenemos que  $P(\xi)\widehat{E} = 1$  en  $\mathcal{S}'$ . En particular, como  $P(\xi)\frac{1}{P(\xi)} = 1$  en  $\mathcal{S}'$  tenemos que multiplicando por  $\frac{1}{P(\xi)}$ , obtenemos  $\widehat{E}(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$  entonces:

$$\begin{aligned} \langle E, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\widehat{E}}, \varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \widehat{E}, \widetilde{\varphi} \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (5.9)$$

<sup>2</sup>Con el fin de simplificar la notación denotamos igual a la función y la distribución a la que da lugar.

La fórmula (5.9) es el punto de partida para construir una solución fundamental en el caso más general en el que la condición (5.8) no se satisface. (Obviamente seguiremos asumiendo que  $P(D) \neq 0$  pues en ese caso no existiría solución de (5.5). A continuación ejemplificamos este razonamiento con un caso sencillo.

**Ejemplo 5.4.** Vamos a hallar una distribución que satisface:

$$-E'' + E = \delta$$

es decir, la solución fundamental del operador

$$P(D) = i^{-2}a_2D^2 + i^{-0}a_0D^0, \quad \text{donde } a_2 = a_0 = 1.$$

En este caso, su símbolo es

$$P(\xi) = a_2\xi^2 + a_0\xi^0 = \xi^2 + 1,$$

y cumple que  $P(\xi) \geq 1$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Tomando la transformada de Fourier en la ED

$$P(D)E = \delta,$$

obtenemos

$$P(\xi)\widehat{E}(\xi) = \widehat{\delta} = 1,$$

de donde

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{1}{P(\xi)} = \frac{1}{\xi^2 + 1},$$

así que

$$E(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que el resultado efectivamente es correcto. Dada  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , tenemos que comprobar que

$$\langle -E'' + E, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

o, equivalentemente, que

$$\langle E, -\varphi'' + \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Como  $E$  es una función localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , da lugar a una distribución por lo que

$$\begin{aligned} \langle E, -\varphi'' + \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} (-\varphi''(x) + \varphi(x)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \varphi''(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi''(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando dos veces por partes

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \varphi''(x) dx = -\frac{\varphi'(0)}{2} + \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx,$$

y, análogamente

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^x \varphi''(x) dx = -\frac{\varphi'(0)}{2} + \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^x \varphi(x) dx,$$

de donde  $\langle E, -\varphi'' + \varphi \rangle = \varphi(0)$ .

### 5.3. Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

En esta sección usaremos algunos de los resultados vistos hasta ahora para llevar a cabo la demostración del teorema de Malgrange-Ehrenpreis. En primer lugar debemos demostrar el siguiente lema.

**Lema 5.5.** *Sea  $m \in \mathbb{N}$  y  $P(D)$  un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de orden  $m$ . Además, supongamos que  $P_m(\eta) \neq 0$  para algún  $\eta \in S^{n-1}$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$ ,  $r_0, r_1, \dots, r_m > 0$  y conjuntos cerrados  $F_0, F_1, \dots, F_m$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que:*

a)  $\mathbb{R}^n = \cup_{j=0}^m F_j$ .

b) Si  $\xi \in F_j$ ,  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $|\tau| = r_j$ , entonces  $|P(\xi + \tau\eta)| \geq \epsilon$ , para cada  $j = 0, 1, \dots, m$ .

*Demostración:* Tomamos  $r_j := \frac{j+1}{m}$ , con  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  y tomamos  $\epsilon := (2m)^{-m} |P_m(\eta)| > 0$  y además,

$$F_j := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |P(\xi + \tau\eta)| \geq \epsilon, \forall \tau \in \mathbb{C}, |\tau| = r_j\}$$

Estos conjuntos son cerrados en  $\mathbb{R}^n$  y satisfacen b). Veamos que se cumple a).

Fijamos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  arbitrario, y consideramos la aplicación de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $\tau \mapsto P(\xi + \tau\eta)$ .

Este es un polinomio en  $\tau$  de orden  $m$  con el coeficiente de  $\tau^m$  igual a  $P_m(\eta)$ . Sean  $\tau_j(\xi)$ , con  $j = 1, \dots, m$ , los ceros de dicho polinomio, entonces

$$P(\xi + \tau\eta) = P_m(\eta) \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j(\xi)), \quad \forall \tau \in \mathbb{C}. \quad (5.10)$$

Consideramos ahora el conjunto

$$M_j := \{\tau \in \mathbb{C} : \text{dist}(\tau, \partial B(0, r_j)) < \frac{1}{2m}\}, \quad \text{para } j \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Como se tiene que  $r_j - r_{j-1} = 1/m$  para  $j = 1, \dots, m$ , la colección de conjuntos  $\{M_j\}_{j=0}^m$  son disjuntos dos a dos. Por lo tanto, como hay  $m + 1$  conjuntos  $M_j$ , por el principio del

palomar, al menos una de ellas no contiene ninguno de los números  $\tau_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . De esta forma existe  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$  tal que

$$\text{dist}(\tau_j(\xi), \partial B(0, r_k)) \geq \frac{1}{2m}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

Entonces,  $|\tau_j - \tau| \geq 1/2m$ , para cada  $|\tau| = r_k$  y cada  $j = 1, \dots, m$ , que usado en (5.10) implica

$$|P(\xi + \tau\eta)| = |P_m(\eta) \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j(\xi))| \geq \frac{|P_m(\eta)|}{(2m)^m} = \epsilon, \quad \text{si } |\tau| = r_k$$

Así queda demostrado que  $\xi \in F_k$ , por lo tanto queda verificada la condición a).  $\square$

**Teorema 5.6. Malgrange-Ehrenpreis**

Sea  $P(D)$  un operador diferencial lineal con coeficientes constantes en  $\mathbb{R}^n$  que no es idénticamente cero. Entonces existe  $E \in \mathcal{D}'$  que es una solución fundamental para  $P(D)$ .

*Demostración:* Sea  $m \in \mathbb{N}_0$  y supongamos que  $P(D)$  es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de orden  $m$ . Si  $m = 0$  entonces  $P(D) = a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y la distribución  $E := \frac{1}{a}\delta$  es una solución fundamental de  $P(D)$ . Veamos ahora el caso  $m \geq 1$ . Como el símbolo principal  $P_m$  no es idénticamente 0 en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y como

$$P_m(\xi) = |\xi|^m P_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

tenemos que existe  $\eta \in S^{n-1}$  tal que  $P_m(\eta) \neq 0$ . Fijamos  $\eta$  que cumpla esto y usamos la notación introducida en la demostración del lema 5.5. Entonces las funciones:

$$\chi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_j(\xi) := \begin{cases} 1, & \xi \in F_j \\ 0, & \xi \in \mathbb{R}^n \setminus F_j \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \dots, m\} \quad (5.11)$$

y

$$f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_j := \frac{\chi_j}{\sum_{k=0}^m \chi_k}, \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}$$

están bien definidas, medibles y  $\sum_{j=0}^m f_j = 1$  en  $\mathbb{R}^n$ . Además,  $0 \leq f_j \leq 1$ , y  $f_j = 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus F_j$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

Definimos ahora la forma lineal  $E : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma

$$\langle E, \varphi \rangle := (2\pi)^{-n} \sum_{j=0}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\xi) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r_j} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)}{P(\xi + \tau\eta)} \cdot \frac{d\tau}{\tau} \right] d\xi. \quad (5.12)$$

Para probar que  $E$  está bien definida, fijamos  $K \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos  $\varphi \in \mathcal{D}$  tal que  $\text{sop}(\varphi) \subseteq K$ . En primer lugar, para cada  $j = 0, 1, \dots, m$ , si  $\xi \in F_j = \text{sop}(f_j)$ , entonces

$|P(\xi + \tau\eta)| \geq \epsilon$  para  $|\tau \in \mathbb{C}|, |\tau| = r_j$ , lo que hace que la integral en (5.12) sobre  $|\tau| = r_j$  sea finita. Además, como  $\varphi$  tiene soporte compacto y

$$\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi + i\tau x \cdot \eta} \varphi(x) dx, \quad (5.13)$$

se tiene que  $\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)$  es analítica en  $\tau$ . Entonces, si fijamos  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ , y tomamos  $N \in \mathbb{N}_0$ , usando (5.13) e integración por partes, para cada  $|\tau| = r_j$  podemos escribir

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^N \widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(1 - \sum_{l=1}^n D_l^2)^N e^{ix \cdot \xi}] e^{i\tau x \cdot \eta} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} (-1 - \sum_{l=1}^n D_l^2)^N [e^{i\tau x \cdot \eta} \varphi(x)] dx \end{aligned} \quad (5.14)$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . De la integral (5.14) obtenemos que

$$|\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)| \leq C_j (1 + |\xi|^2)^{-N} \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq 2N}} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \text{si } |\tau| = r_j \quad (5.15)$$

para alguna constante  $C_j \in (0, \infty)$  que depende de  $K, r_j$  y  $\eta$ . Usando (5.15) en (5.12) obtenemos que

$$\begin{aligned} |\langle E, \varphi \rangle| &\leq (2\pi)^{-n} \sum_{j=0}^m C_j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\xi) \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r_j}{\epsilon r_j} (1 + |\xi|^2)^{-N} \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq 2N}} |D^\alpha \varphi(x)| d\xi \\ &\leq C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq 2N}} |D^\alpha \varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-N} d\xi \\ &= C \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq 2N}} |D^\alpha \varphi(x)| \end{aligned} \quad (5.16)$$

para algun  $C \in (0, \infty)$  independiente de  $\varphi$ , tomando  $N > n/2$ . De esta forma queda probado que  $E$  está bien definida. Claramente  $E$  es lineal, que junto con (5.15) y el lema 3.25 tenemos que  $E \in \mathcal{D}'$ . Ahora solo falta ver que  $P(D)E = \delta$  en  $\mathcal{D}'$ , esto equivale a ver que se cumple (5.5). Como  $\mathcal{F}(P(-D)\varphi) = \widetilde{P}\widehat{\varphi}$ , tenemos que

$$\langle E, P(-D)\varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \sum_{j=0}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\xi) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r_j} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)}{\tau} d\tau \right] d\xi$$

Como  $\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)$  es analítica en  $\tau$ , usando la fórmula de Cauchy<sup>3</sup> en el lado derecho de

---

<sup>3</sup>  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r_j} \frac{\widehat{\varphi}(-\xi - \tau\eta)}{\tau} d\tau = \widehat{\varphi}(-\xi)$

la expresión anterior y la igualdad (4.8), tenemos que

$$\begin{aligned}\langle E, P(-D)\varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=0}^m \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado que  $E \in \mathcal{D}'$  es solución fundamental. □



# Bibliografía

- [1] Gantumur, T.: *Introduction to distributions*  
URL <https://www.math.mcgill.ca/gantumur/math581w14/distrib.pdf> [Online; accessed 13-April-2021].
- [2] Hörmander, L.: *Linear Partial Differential Operators*. Fourth Printing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1976.
- [3] Ian Richards, J., Youn, H. K.: *Theory of distributions a nontechnical introduction*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Kanwal, R. P.: *Generalized Functions: Theory and Applications*. Third Edition, Springer Science+Business Media, 2004.
- [5] Mitrea, D.: *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*. Second Edition, Springer, 2013.
- [6] Rudin, W.: *Análisis Funcional*. Reverté, 1979.
- [7] Salsa, S.: *Partial differential equations in action, from modelling to theory* Springer, 2008.
- [8] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Hermann, 1973.