



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Mestrado

O teorema de Krasnoselskii en espazos produto para sistemas de operadores e aplicacións

Laura María Fernández Pardo

Dirixido por Jorge Rodríguez López

Curso Académico 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MESTRADO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Mestrado

**O teorema de Krasnoselskii en espazos
produto para sistemas de operadores e
aplicacións**

Laura María Fernández Pardo

Dirixido por Jorge Rodríguez López

Xullo, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice

Resumo	iv
Introdución	1
1 Preliminares: O índice de punto fixo e o teorema de Krasnoselskii	3
1.1 O índice de punto fixo en conos	3
1.1.1 Conos e orde en espazos normados	4
1.1.2 O índice de punto fixo	7
1.2 Teoría de punto fixo en conos: O teorema de Krasnoselskii	9
2 Motivación e obxectivos	19
2.1 Motivación: solucións con compoñentes positivas para sistemas de ecuacións	21
2.2 Obxectivos	23
3 O teorema de Krasnoselskii en espazos produto	25
3.1 Versións vectoriais nunha rexión anular dun cono	25
3.1.1 Versión normada do teorema de Krasnoselskii	35
3.1.2 Versión homotópica do teorema de Krasnoselskii	44
3.1.3 Versión clásica do teorema de Krasnoselskii	50
3.1.4 Versión clásica con épsilon do teorema de Krasnoselskii	54
3.2 Versións vectoriais noutros dominios: conxuntos estrelados	57

3.3	Resultados de Multiplicidade	66
4	Aplicacións a sistemas diferenciais e integrais	75
4.1	Problemas diferenciais e integrais: unha correspondencia	75
4.2	Existencia de solución para sistemas diferenciais e integrais	77
4.2.1	Solucións periódicas con compoñentes positivas para un sistema diferencial de segunda orde	78
4.2.2	Solucións con compoñentes positivas para un sistema diferencial de segunda orde con condicións de fronteira mixtas	94
4.2.3	Aplicación da teoría de punto fixo en conxuntos estrelados: Solucións con compoñentes positivas para un sistema de ecuacións integrais.	101
5	Conclusión e traballos futuros	115
5.1	Conclusión	115
5.2	Traballos futuros	117
	Bibliografía	119

Resumo

A teoría do punto fixo consolidouse como unha rama das matemáticas con gran potencial para abordar unha ampla variedade de problemas en análise non lineal, especialmente na demostración da existencia, unicidade ou multiplicidade de solucións de ecuacións diferenciais e integrais. En concreto, o teorema do punto fixo de Krasnoselskii en conos de expansión-compresión foi empregado en numerosos traballos de investigación para obter solucións non triviais a este tipo de problemas.

Co obxectivo de acadar resultados de existencia para sistemas de ecuacións diferenciais e integrais con todas as súas compoñentes non triviais, desenvolvéronse distintas versións deste resultado, adaptadas a operadores definidos en espazos produto.

Neste traballo introducimos o índice de punto fixo, unha potente ferramenta coa que probaremos os resultados principais. Así mesmo, propoñemos unha nova versión vectorial do teorema de Krasnoselskii, na que as condicións sobre o operador se expresan en termos das normas dos espazos que compoñen o produto no que traballamos. Este resultado orixinal motivou pequenas melloras sobre versións previas, que tamén serán detalladas neste texto. Finalmente, aplicaremos de entre estes resultados os máis novidosos, establecendo condicións que garanten a existencia de solucións con compoñentes positivas en distintos sistemas de ecuacións diferenciais e integrais.

Abstract

Fixed point theory has proven to be a branch of mathematics with great potential for solving multiple problems in nonlinear analysis, such as proving the existence, uniqueness, or multiplicity of solutions to both integral and differential equations. Specifically, Krasnoselskii's fixed point theorem in cones of expansion-compression has been widely used in numerous research works to obtain nontrivial solutions to such problems.

With the aim of obtaining existence results for systems of differential and integral equations with all components being nontrivial, different versions of this result have been developed, adapted to operators defined on product spaces.

In this work, we introduce the fixed point index, a powerful tool with which we will prove the main results. Additionally, we propose a new version of Krasnoselskii's theorem, in which the conditions on the operator are expressed in terms of the norms of the spaces forming the product space under consideration. This original result has motivated minor improvements to existing versions, which we also describe. Finally, we apply the most novel among these results to establish conditions that guarantee the existence of solutions with positive components for various systems of differential and integral equations.

Introdución

O teorema de compresión-expansión de punto fixo desenvolvido por Mark Alexandrovich Krasnoselskii constitúe unha das ferramentas fundamentais dentro do ámbito da análise non linear (ver Figura 1). Este resultado baséase na imposición de condicións de compresión ou expansión para operadores compactos sobre a fronteira dunha rexión contida nun cono dun espazo normado.

Mark Alexandrovich Krasnoselskii (1920–1997) dedicou case cincuenta anos ao desenvolvemento da análise funcional non linear, converténdose nun dos seus principais referentes, como destaca Jean Mawhin no capítulo *Mark A. Krasnoselskii and nonlinear analysis: a fruitful love story* de [35].

Desenvolveu a súa carreira en institucións de prestixio: foi investigador na Academia de Ciencias de Ucraína en Kiev (1946–1952), profesor na Universidade Estatal de Voronezh (1952–1967), e investigador sénior e xefe de laboratorio no Instituto de Ciencias do Control en Moscova (1967–1990). Desde 1990 ata o seu falecemento, traballou no Instituto de Problemas de Transmisión de Información da Academia de Ciencias rusa.

En 1960, Mark Krasnoselskii inmisciuse na teoría de punto fixo en conos. As súas achegas estableceron as bases para demostrar a existencia de solucións non triviais en numerosos problemas non lineais, influíndo decisivamente no desenvolvemento da análise funcional moderna. O que hoxe se coñece como o teorema de punto fixo de Krasnoselskii (resultado que inspira o presente traballo) deu lugar a múltiples extensións e aplicacións, marcando un antes e un despois na investigación en análise non linear.



Figura 1: Breve biografía académica de Mark A. Krasnoselskii [35].

Cando se trata da súa aplicación a sistemas, o teorema de Krasnoselskii non permite localizar individualmente as compoñentes dos puntos fixos obtidos, polo que non se pode asegurar que todas elas sexan non triviais. Esta limitación, xa destacada en [37, 38], levou a Precup a formular unha versión vectorial do citado teorema. Esta nova versión permite localizar cada compoñente do punto

fixo por separado, achegando condicións suficientes para garantir *puntos fixos de coexistencia*, termo introducido por Lan en [28], é dicir, puntos fixos nos que todas as súas compoñentes son distintas de cero. Ademais, as versións vectoriais permiten combinar comportamentos expansivos e compresivos simultaneamente nas distintas compoñentes, algo que ata o de agora no contexto orixinal do resultado, non era posible.

Neste traballo introdúcese unha nova versión vectorial do teorema de Krasnoselskii. Tamén distintas melloras das versións vectoriais propostas en [40]. Para a proba de todas elas emprégase o índice de punto fixo.

Organizaremos este texto en catro capítulos. Facemos aquí un breve repaso dos mesmos e comentamos as principais referencias empregadas para a elaboración de cada un deles, obviando aquelas que foron consultadas de xeito puntual e que serán debidamente indicadas en cada caso.

No capítulo 1 facemos unha revisión das ideas e conceptos fundamentais. Trataremos o concepto de índice de punto fixo en retractos dun espazo normado e as súas propiedades. Parándonos, principalmente nunha clase especial de retractos que gardan unha estreita relación coas relacións de orde, aos cales nos referiremos como conos. Ademais, tamén presentamos o teorema de Krasnoselskii en conos de expansión-compresión no seu contexto orixinal. Este capítulo foi elaborado coa axuda das referencias [2, 15, 19, 21, 25, 26].

No capítulo 2 repasamos as principais motivacións do traballo e establecemos os obxectivos, explicando tamén a importancia das súas consecucións. Esencialmente, as referencias [37, 38, 40] son o principal motor de todo o esforzo realizado.

O capítulo 3 recolle distintas versións vectoriais do teorema de punto fixo de Krasnoselskii. Todas as demostracións baséanse no índice de punto fixo, seguindo as ideas expostas en [40]. Ademais, introdúcese melloras respecto tanto aos resultados en [40], como aos que se poden atopar en [37, 38], e propónse unha nova formulación na que as condicións sobre o operador se expresan en termos da norma dos espazos normados nos que traballamos (Teorema 3.12).

Co obxectivo de amosar a aplicabilidade dos teoremas de punto fixo, o capítulo 4 recolle distintos resultados de existencia de solución para sistemas diferenciais e integrais con todas as compoñentes positivas. O traballo desenvolto nesta última parte apoiase fundamentalmente en [40, 42, 46].

O traballo culmina co capítulo 5, no que expoñemos as conclusións. Tamén explicamos algunhas das posibles vías de investigación relacionadas que poderían ser abordadas nun futuro próximo.

Capítulo 1

Preliminares: O índice de punto fixo e o teorema de Krasnoselskii

Neste primeiro capítulo, estableceremos os fundamentos teóricos imprescindibles para o desenvolvemento do traballo. Introduciremos conceptos clave, como o de cono nun espazo normado e o de índice de punto fixo de Kronecker, que aparecerán na meirande parte das probas dos resultados de punto fixo que abordaremos. Ademais, tamén destacaremos aquí o teorema clásico de Krasnoselskii en conos de expansión-compresión e as súas distintas versións, que serán o noso principal obxecto de estudo.

1.1 O índice de punto fixo en conos

O índice de punto fixo é un concepto introducido por Leopold Kronecker en 1869 que está estreitamente relacionado cos graos topolóxicos de Brouwer e de Leray-Schauder [2, 15]. A pesar de que o grao topolóxico foi orixinalmente formulado no contexto da xeometría simplicial, pode tamén presentarse desde outras perspectivas, como a da topoloxía alxébrica e a da análise [25]. A construción do concepto de grao desde o punto de vista analítico, foi introducido por Nagumo en 1951 e abordámolo nun traballo previo [19].

Por outra banda, independentemente do enfoque desde o que se constrúa, tanto o grao topolóxico como o índice de punto fixo comparten unha serie de propiedades fundamentais que os caracterizan de forma única, un feito que foi probado por Amann e Weiss en 1973 [3]. Neste punto introduciremos o concepto de índice de punto fixo axiomáticamente a partir destas propiedades, pero antes, presentaremos o que é un cono nun espazo normado e destacaremos a estreita relación que estes gardan coas relacións de orde.

1.1.1 Conos e orde en espazos normados

Un espazo normado $(X, \|\cdot\|)$ é un espazo vectorial X dotado dunha norma $\|\cdot\|$. No noso caso traballaremos con espazos vectoriais que teñen por corpo base \mathbb{R} e referirémonos a eles simplemente polo conxunto, é dicir, neste caso X .

Recordemos que, dado un conxunto $X \neq \emptyset$ unha **orde** é unha relación (que denotaremos por “ \preceq ”) que cumpre as propiedades reflexiva, transitiva e antisimétrica. Ademais, diremos que unha relación de orde é **parcial** cando existen elementos que non son comparables entre eles, isto é, existen $x, y \in X$ tales que non se ten $x \preceq y$ nin tampouco $y \succeq x$.

Definición 1.1. (Cono). Sexa X un espazo normado e $P \subset X$ un subconxunto non baleiro. Diremos que P é un **cono** se é convexo e pechado e ademais satisfai as seguintes condicións

- (a) Se $x \in P$, entón $\alpha x \in P$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,
- (b) Se $x \in P$ e $-x \in P$, entón $x = 0$.

Ademais, cando $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$ diremos que o cono P é un **cono sólido**.

Observación 1.2. Se P é un cono, da convexidade e a condición (a) dedúcese directamente que se $x, y \in P$, entón $x + y \in P$.

Observación 1.3. Cando P é un cono sólido nun espazo normado X , se $x \in \overset{\circ}{P}$, entón $\alpha x \in \overset{\circ}{P}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$. En efecto, en caso contrario, habería un $x \in \overset{\circ}{P}$ de xeito que $\alpha x \notin \overset{\circ}{P}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pola propiedade (a) de cono, se $\alpha x \notin \overset{\circ}{P}$ entón temos que $\alpha x \in \partial P$ e así para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $x_n \in X \setminus P$ de xeito que $\|x_n - \alpha x\| < \frac{1}{n}$. Pero así $\|\frac{x_n}{\alpha} - x\| < \frac{1}{\alpha n}$ e ademais $\frac{x_n}{\alpha} \in X \setminus P$ de donde se tería que $B\left(x, \frac{1}{\alpha n}\right) \cap (X \setminus P) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ o cal contradí o feito de que $x \in \overset{\circ}{P}$.

Definición 1.4. (Espazo normado ordenado). Sexa (X, \preceq) un espazo normado cunha relación de orde. Diremos que é un **espazo normado ordenado** se a relación de orde é compatible coa estrutura de espazo vectorial, isto é, se se cumpre que

- (a) Se $x \preceq y$, entón $x + z \preceq y + z$ para todo $z \in X$,
- (b) Se $x \preceq y$, entón $\alpha x \preceq \alpha y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

No seguinte resultado podemos observar o vínculo existente entre os conos e as relacións de orde parciais en espazos normados. A demostración deste resultado pode atoparse por separado nos Teoremas 2.6 e 2.7 de [20].

Teorema 1.5. *Sexa (X, \preceq) un espazo normado ordenado. Entón o conxunto $X^+ = \{x \in X : 0 \preceq x\}$ é un cono en X ao que chamaremos **cono positivo** de X . Por outra parte, dado P un cono nun espazo normado X , P induce unha relación de orde parcial “ \preceq_P ” en X compatible coa estrutura de espazo vectorial de X do seguinte xeito,*

$$x \preceq_P y \text{ se, e só se, } y - x \in P.$$

Ademais, o cono positivo inducido por esa relación de orde é P .

Observación 1.6. A partir deste punto faremos distinción entre as relacións de orde inducidas por conos en espazos normados, que seguiremos denotando por “ \preceq ” (ou “ \preceq_P ” cando queiramos resaltar que a relación de orde é a inducida polo cono P) e a relación de orde usual en \mathbb{R} , que denotaremos por “ \leq ”.

Notación 1.7. Dado un cono P nun espazo normado X e dous elementos $x, y \in X$, denotaremos

- $x \prec_P y$ cando $y - x \in P \setminus \{0\}$.
- Se o cono P é sólido escribiremos $x \prec\prec_P y$ cando $y - x \in \overset{\circ}{P}$.

A continuación introducimos distintos exemplos de conos en espazos normados. O primeiro deles amosa, de xeito intuitivo, como se relacionan os distintos elementos de \mathbb{R}^2 a través da relación de orde inducida por dous conos. O segundo, é un exemplo de cono nun espazo de dimensión infinita no que traballaremos máis adiante.

Exemplo 1.8. Os subconxuntos $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ e $C = \{a(1, 3) + b(3, 1) : a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ de \mathbb{R}^2 son conos.

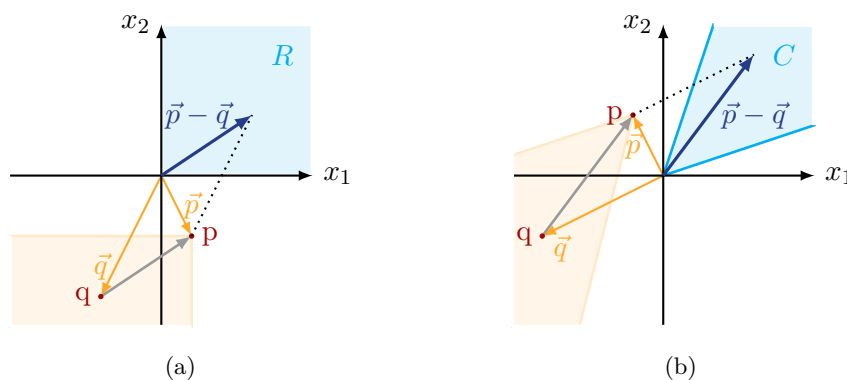


Figura 1.1: Ilustración sobre as relacións de orde parciais que inducen en \mathbb{R}^2 os conos R e C .

Dado un punto $p = (x_1^0, x_2^0) \in (\mathbb{R}^2, \preceq_R)$, un punto $q = (x_1^1, x_2^1) \in (\mathbb{R}^2, \preceq_R)$ verifica $q \preceq_R p$ se, e só se, $x_1^0 - x_1^1 \geq 0$ e $x_2^0 - x_2^1 \geq 0$, ou o que é o mesmo $x_1^0 \geq x_1^1$ e $x_2^0 \geq x_2^1$. Ilústrase esta idea na

Figura 1.1 (a), onde un punto é menor ou igual que p se, e só se, está no recinto laranxa. En base a isto é fácil observar que os puntos da recta $x_2 = -x_1$ non son comparables entre eles, polo que a relación de orde é parcial.

Analogamente, dado $p = (x_1^0, x_2^0) \in (\mathbb{R}^2, \preceq_C)$, un punto $q = (x_1^1, x_2^1) \in (\mathbb{R}^2, \preceq_C)$ será tal que $q \preceq_C p$ se, e só se, $x_1^0 - x_1^1 = a + 3b$ e $x_2^0 - x_2^1 = 3a + b$ para $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Na Figura 1.1 (b), un punto será menor ou igual que p se, e só se, está novamente no recinto laranxa.

Exemplo 1.9. Sexa $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo e consideremos agora o espazo $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ das funcións continuas definidas en I con valores en \mathbb{R} coa norma do supremo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|, \text{ para cada } u \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}).$$

O conxunto

$$K = \{u \in P : \min_{t \in [a', b']} u(t) \geq C\|u\|_\infty\},$$

onde $[a', b'] \subset I$, $P = \{u \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}) : u(t) \geq 0 \text{ para cada } t \in I\}$ e $C \in (0, 1)$ é un cono de $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$. Observamos en primeiro lugar que $K \neq \emptyset$, pois claramente a función $u(t) = 0$, $t \in I$ pertence a K .

Vexamos que K é pechado en $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$. Sexa $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $u_n \rightarrow u$ en $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$, vexamos que $u \in K$. En efecto, como $u_n \rightarrow u$ en $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $N \in \mathbb{N}$ de xeito que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ se ten $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in [a, b]$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ temos $0 \leq u_n(t) < \varepsilon + u(t)$ para cada $t \in [a, b]$. De aquí, é directo que $u(t) \geq 0$ para cada $t \in [a, b]$ e ademais, tomando mínimos en $[a', b']$ e tendo en conta que $u_n \in K$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$,

$$C\|u_n\|_\infty \leq \min_{t \in [a', b']} u_n(t) < \varepsilon + \min_{t \in [a', b']} u(t),$$

e tomando o límite en n ,

$$C\|u\|_\infty \leq \varepsilon + \min_{t \in [a', b']} u(t),$$

de onde se ten, por ser $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, que $C\|u\|_\infty \leq \min_{t \in [a', b']} u(t)$ e xa que logo $u \in K$.

Tamén é convexo pois se $u, v \in K$, entón a aplicación $f_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_x(t) = (1-x)u(t) + xv(t)$ está en K para cada $x \in [0, 1]$. En efecto, fixado $x \in [0, 1]$ temos que $f_x(t) \geq 0$ para cada $t \in I$ pois $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ para cada $t \in I$ e $1-x \geq 0$ e $x \geq 0$. Ademais,

$$\begin{aligned} \min_{t \in [a', b']} f_x(t) &= \min_{t \in [a', b']} ((1-x)u + xv)(t) \geq \min_{t \in [a', b']} (1-x)u(t) + \min_{t \in [a', b']} xv(t) \\ &\geq C(\|(1-x)u\|_\infty + \|xv\|_\infty) \geq C\|(1-x)u + xv\|_\infty = C\|f_x\|_\infty. \end{aligned}$$

A propiedade (a) de cono satisfaise claramente, pois se $u \in K$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tamén temos que $\alpha u \in K$ xa que $\alpha u(t) \geq 0$ para cada $t \in [a, b]$ e

$$\min_{t \in [a', b']} (\alpha u)(t) \geq \alpha \min_{t \in [a', b']} u(t) \geq \alpha C\|u\|_\infty = C\|\alpha u\|_\infty.$$

Finalmente, para rematar de comprobar que K é un cono debemos ver (b) na Definición 1.1. Isto é claro, pois se $u, -u \in K$ temos que $u(t) \geq 0$ e $u(t) \leq 0$ para cada $t \in [a, b]$ e así $u(t) = 0$ para cada $t \in [a, b]$.

Observación 1.10. Unha propiedade interesante neste último Exemplo 1.9 é que a norma do espazo $\|\cdot\|_\infty$ preserva a relación de orde \preceq_K inducida polo cono K sobre os seus propios elementos, é dicir, para calesqueira $u, v \in K \subset \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ tales que $u \preceq_K v$ tense que $\|u\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. En efecto, que $u \preceq_K v$ significa que $v - u \in K$ e deste xeito temos que $v(t) - u(t) \geq 0$ para cada $t \in I$ de onde se ten que $u(t) \leq v(t)$ para cada $t \in I$ e de aquí, posto que $u(t), v(t) \geq 0$ para cada $t \in I$, $\|u\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.

Por outra parte, o cono K é un cono sólido independentemente do valor que tome $C \in (0, 1)$. Vexamos que a función constante $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ tal que $f(t) = 1$ para cada $t \in I$ está en $\overset{\circ}{K}$. Que $f \in K$ é evidente. Ademais, se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ é tal que $\varepsilon < \frac{1-C}{2}$, tense que $B(f, \varepsilon) \subset K$ pois para $g \in B(f, \varepsilon)$ é claro que $g(t) \geq f(t) - \varepsilon > \frac{1+C}{2} > 0$ para $t \in I$. Por outra parte

$$\min_{t \in [a', b']} g(t) \geq \min_{t \in [a', b']} f(t) - \varepsilon = 1 - \varepsilon > \frac{1+C}{2},$$

e

$$C\|g\|_\infty \leq C(\|f\|_\infty + \varepsilon) = C(1 + \varepsilon) < \frac{(3-C)C}{2}.$$

De aquí, para rematar de ver que $g \in K$ chega con probar que $h(C) = \frac{(1+C)-(3-C)C}{2} = \frac{(C-1)^2}{2} > 0$ para $C \in (0, 1)$, o cal é claro. Deste xeito

$$\min_{t \in [a', b']} g(t) \geq C\|g\|_\infty,$$

sexa cal sexa o $C \in (0, 1)$ fixado para o noso cono K , concluíndo o que buscabamos.

Visto que o cono K é sólido observamos que se temos dúas funcións $u, v \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ tales que $u \prec\prec_K v$ entón $\|u\|_\infty < \|v\|_\infty$ pois $u \prec\prec_K v$ significa que $v - u \in \overset{\circ}{K}$. É fácil ver que as funcións que se anulan nalgún punto non están en $\overset{\circ}{K}$ pois en caso contrario teríamos unha bola centrada nelas contida en K e isto é imposible pois non hai ningunha bola centrada nelas contida nin tan sequera en P . Así $v(t) - u(t) > 0$ para cada $t \in I$ e en consecuencia, pola compacidade de I , tense $\|u\|_\infty < \|v\|_\infty$.

1.1.2 O índice de punto fixo

Antes de introducir o índice de punto fixo convén fixar algo de notación e definir os conceptos de operador compacto, retracto e retracción dun espazo normado. Cando falemos dunha aplicación entre espazos normados (ou subconxuntos destes) referirémonos a ela como un **operador**. Aos operadores denotarémolos con letra maiúscula, salvo excepcións. Por exemplo, $T : X \rightarrow Y$

e a súa actuación sobre un elemento $x \in X$ escribiremosa como Tx . Ademais, traballaremos constantemente baixo o suposto de que os operadores son compactos.

Definición 1.11. (Operador Compacto). Sexan X e Y espazos normados, Ω un aberto en X e $T : \Omega \rightarrow Y$ un operador continuo. Diremos que T é un operador compacto se para cada $\mathcal{R} \subset \Omega$ conxunto limitado, $\overline{T(\mathcal{R})}$ é un conxunto compacto. Denotaremos por $\mathcal{Q}(\Omega; Y)$ o conxunto dos operadores compactos de Ω en Y .

Definición 1.12. (Retracto). Un subconxunto $P \neq \emptyset$ dun espazo normado X dise un **retrato de X** se existe unha aplicación continua $R : X \rightarrow P$, chamada **retracción**, tal que $R|_P = I_P$, onde I_P denota a identidade sobre P .

Teorema 1.13. (Caracterización axiomática do índice de punto fixo). *Sexa $\mathcal{M} = \{(T, U, P) \mid P \text{ retracto de } X, U \text{ aberto limitado en } P, T : \overline{U} \rightarrow P \text{ operador compacto tal que } Tx \neq x \text{ en } \partial U\}$, existe unha única aplicación $i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ coñecida como o **índice de punto fixo** que satisfai as seguintes propiedades:*

- (a) **(Normalización)** *Se T é un operador constante de \overline{U} en U , entón $i(T, U, P) = 1$.*
- (b) **(Invariancia baixo homotopía)** *Para cada operador compacto $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow P$ tal que $H(x, t) \neq x$ para cada $(x, t) \in \partial U \times [0, 1]$ tense que $i(H(\cdot, t), U, P)$ é independente de $t \in [0, 1]$.*
- (c) **(Aditividade)** *Sexa $(T, U, P) \in \mathcal{M}$. Para cada par de subconxuntos abertos disxuntos U_1 e U_2 de U tales que T non ten puntos fixos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$ tense que*

$$i(T, U, P) = i(T|_{\overline{U}_1}, U_1, P) + i(T|_{\overline{U}_2}, U_2, P).$$

- (d) **(Permanencia)** *Sexa $(T, U, P) \in \mathcal{M}$, se Q é un retracto de P e $T(\overline{U}) \subset Q$, entón*

$$i(T, U, P) = i(T|_{\overline{U \cap Q}}, U \cap Q, Q). \quad (1.1)$$

Notación 1.14. Dado $(T, U, P) \in \mathcal{M}$, diremos que $i(T, U, P)$ é o índice do operador T no aberto U con respecto ao retracto P .

Aínda que aquí introducimos o índice de punto fixo para operadores definidos sobre abertos relativos de retractos dun espazo normado, traballaremos principalmente no caso no que tales retractos son conos. Como vimos, os conos en espazos normados son conxuntos non baleiros, pechados e convexos e en consecuencia son retractos en virtude do seguinte resultado.

Teorema 1.15. [16, Corollary 4.2] (de Dugundji). *Todo subconxunto non baleiro, pechado e convexo $C \subset X$ dun espazo normado X é un retracto de X .*

As catro propiedades anteriores coñécense como **propiedades fundamentais** ou **axiomáticas** do índice de punto fixo. Ademais destas, o índice tamén conta coas dúas seguintes.

(e) **(Excisión)** Sexa $(T, U, P) \in \mathcal{M}$. Para cada subconxunto aberto $V \subset U$ tal que T non ten puntos fixos en $\bar{U} \setminus V$ tense que

$$i(T, U, P) = i(T, V, P). \quad (1.2)$$

(f) **(Propiedade de punto fixo)** Sexa $(T, U, P) \in \mathcal{M}$. Se $i(T, U, P) \neq 0$, entón T ten polo menos un punto fixo en U . É dicir, existe $x_0 \in U$ tal que $Tx_0 = x_0$.

Demostración. (e) Se neste contexto tomamos $U_1 = V$ e $U_2 = \emptyset$, usando a propiedade de aditividade xunto con $i(T, \emptyset, P) = 0$ (tense de tomar $U_1 = U$ e $U_2 = \emptyset$ na propiedade de aditividade), temos que $i(T, U, P) = i(T, V, P)$.

(f) Se T non ten puntos fixos en U podemos tomar $V = \emptyset$ na propiedade de excisión, e así $i(T, U, P) = i(T, \emptyset, P) = 0$. \square

1.2 Teoría de punto fixo en conos: O teorema de Krasnoselskii

A teoría de punto fixo é unha ampla rama das matemáticas que estuda as condicións baixo as cales unha aplicación dun conxunto en si mesmo admite un punto fixo, é dicir, un punto que permanece invariante baixo a aplicación. A propiedade (f) do índice de punto fixo destaca a relevancia deste concepto como ferramenta fundamental para a demostración de resultados dentro desta teoría.

Nesta sección revisaremos algúns resultados de teoría de punto fixo para operadores definidos en conos de espazos normados. Como xa adiantamos, centrarémonos no teorema clásico de Krasnoselskii en conos de expansión-compresión [26] e nalgunhas das diferentes versións coñecidas do mesmo. Para este fin, seguiremos principalmente [21]. A motivación principal para centrar a nosa atención nestes resultados radica na utilidade dos mesmos para a procura de solucións non triviais, e en particular positivas, de problemas diferenciais [12, 22], unha cuestión que trataremos no seguinte capítulo.

A partir deste momento, denotaremos por P un cono nun espazo normado X . En ocasións, pediremos ademais que este espazo normado sexa de Banach. Un espazo de Banach é un espazo normado cuxa norma induce un espazo métrico no que toda sucesión de Cauchy é converxente. A razón pola que en ocasións se engade esta hipótese adicional atópase na necesidade de poder estender os operadores a conxuntos máis grandes que nos que están previamente definidos, botando man do teorema de extensión seguinte.

Teorema 1.16. [16, Theorem 4.1] *Sexa X un espazo normado, $A \subset X$ un pechado de X e $T : A \rightarrow X$ un operador continuo. Entón, existe unha extensión $\widehat{T} : X \rightarrow X$ continua de T tal que $\widehat{T}(X) \subset \overline{\text{co}}(T(A))$.*

No resultado anterior, coa hipótese adicional de que X é un espazo de Banach, a extensión dada por este resultado tamén é compacta cando o operador que estendemos é compacto definido sobre un pechado limitado. En efecto, supoñamos que $T : A \rightarrow X$ é un operador compacto onde $A \subset X$ é pechado e limitado. Polo Teorema 1.16 (recordamos que estamos asumindo en todo momento que os operadores son continuos), existe $\widehat{T} : X \rightarrow X$ continua tal que $\widehat{T}(X) \subset \overline{\text{co}}(T(A)) \subset \overline{\text{co}}(\overline{T(A)})$. Para que \widehat{T} sexa compacta é suficiente con que $\overline{\text{co}}(\overline{T(A)})$ sexa compacto (en tal caso para cada $U \subset X$ limitado, $\widehat{T}(U)$ sería un pechado dentro do compacto $\overline{\text{co}}(\overline{T(A)})$ e, xa que logo compacto). Pedindo completitude temos que $\overline{\text{co}}(\overline{T(A)})$ é compacto porque a envoltura convexa pechada dun compacto é compacta [1, Theorem 5.35] (cando non hai completitude isto non ten porque ocorrer [1, Example 5.34]) e $\overline{T(A)}$ é compacto por ser A limitado e T compacto. Temos pois o seguinte corolario.

Corolario 1.17. (de extensión de Dugundji). *Sexa X un espazo de Banach, $A \subset X$ un pechado de X e $T : A \rightarrow X$ un operador compacto. Entón existe unha extensión $\widehat{T} : X \rightarrow X$ compacta de T .*

A versión orixinal do teorema de punto fixo de Krasnoselskii en conos de expansión-compresión data de 1960 [27]. Nesta primeira versión, o resultado establece condicións para que un operador compacto definido sobre un cono conte con algún punto fixo nun subconxunto delimitado por dúas bolas. En concreto, o resultado orixinal é o seguinte.

Teorema 1.18. (de punto fixo de Krasnoselskii). *Sexa X un espazo normado, $P \subset X$ un cono e $\overline{P}_{r,R} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\}$ con $r, R \in \mathbb{R}_+$. Se $T : \overline{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador compacto satisfacendo algunha das seguintes condicións,*

(a) **Versión compresiva.** *$Tx \not\leq_P x$ se $\|x\| = r$ e $Tx \not\leq_P x$ se $\|x\| = R$,*

(b) **Versión expansiva.** *$Tx \not\leq_P x$ se $\|x\| = r$ e $Tx \not\leq_P x$ se $\|x\| = R$,*

entón T ten un punto fixo $x_0 \in P$ tal que $r \leq \|x_0\| \leq R$.

En realidade, este resultado segue a ser certo cando as mesmas condicións son impostas sobre o operador en conxuntos máis xerais que $\overline{P}_{r,R} = \{x \in P : r \leq \|x\| \leq R\}$. Ademais, é coñecido que tales condicións poden ser debilitadas dando lugar ao que se coñece como a versión homotópica do teorema de Krasnoselskii ou teorema de Krasnoselskii-Benjamin [2]. A proba destas versións

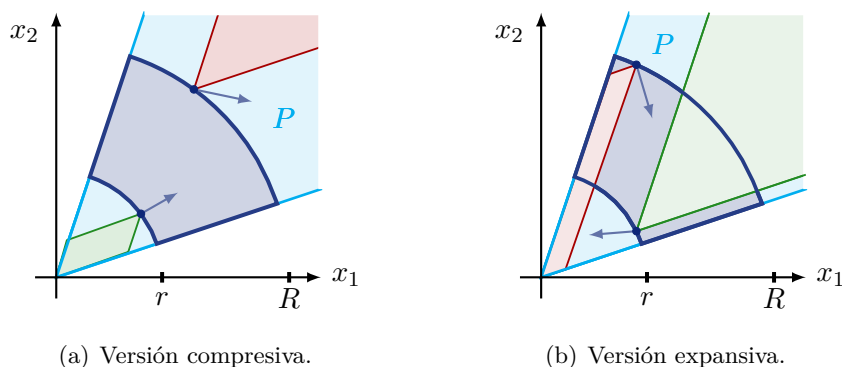


Figura 1.2: Visualización das condicións imposta sobre o operador polo Teorema de punto fixo de Krasnoselskii 1.18. Para os puntos $x \in P$ tales que $\|x\| = r$, o operador non pode ter imaxe dentro dos recintos verdes. Analogamente, os puntos $x \in P$ tales que $\|x\| = R$ non poden ter imaxe polo operador nos recintos vermellos.

máis xerais do teorema de Krasnoselskii apóianse sobre os lemas seguintes que, á súa vez, poden ser demostrados empregando o índice de punto fixo.

Lema 1.19. *Sexa $U \subset P$ un aberto relativo do cono P e limitado dun espazo normado X tal que $0 \in U$ e $T : \bar{U} \rightarrow P$ un operador compacto. Se temos que*

$$Tx \neq \mu x, \quad \forall x \in \partial_P U, \quad \mu \geq 1, \tag{1.3}$$

entón $i(T, U, P) = 1$.

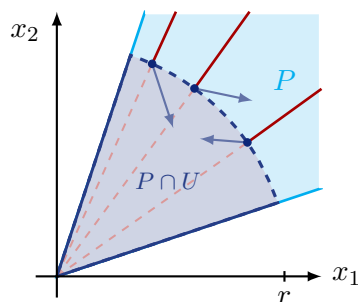


Figura 1.3: Visualización da condición (1.3) do Lema 1.19 para o caso no que $U = B(0, r)$ con $r \in \mathbb{R}_+$ e $X = \mathbb{R}^2$. A imaxe dun punto $x \in P$ tal que $\|x\| = r$ non pode ser proporcional a x por un valor $\mu \geq 1$.

Demostración. Definamos a aplicación $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow P$ dada por $H(x, t) = tTx$. Esta é compacta, ademais temos que $H(x, t) \neq x$ para $x \in \partial_P U$ e $t \in [0, 1]$. En efecto, se isto non fose así existirían $x_o \in \partial_P U$ e $t_o \in [0, 1]$ tales que $t_oTx_o = x_o$. Deste xeito, ou ben $t_o = 0$ e así $x_o = 0$ o cal

contradí que $x_o \in \partial_P U$ ou ben $t_o \in (0, 1]$ téndose $Tx_o = \frac{1}{t_o}x_o$ o cal contradí (1.3). Empregando pois as propiedades de normalización e invariancia baixo homotopía para o índice de punto fixo temos que $i(T, U, P) = i(0, U, P) = 1$. \square

Lema 1.20. *Sexan $U \subset P$ un aberto relativo dun cono P e limitado dun espazo Banach X , $T : \bar{U} \rightarrow P$ e $S : \partial_P U \rightarrow P$ operadores compactos. Se temos que*

$$\inf_{x \in \partial_P U} \|Sx\| > 0, \quad e \quad (1.4)$$

$$x - Tx \neq \mu Sx, \quad \forall x \in \partial_P U, \quad \mu \geq 0, \quad (1.5)$$

entón $i(T, U, P) = 0$.

Demostración. O teorema de extensión de Dugundji permítenos estender S a un operador compacto S^* de \bar{U} a P de xeito que $S^*(\bar{U}) \subset \bar{c}oS(\partial_P U)$. Se $F = S(\partial_P U)$ entón $\bar{c}oF = \bar{M}$ onde

$$M = \left\{ y = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i : y_i \in F, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vexamos que

$$\inf_{y \in \bar{M}} \|y\| > 0. \quad (1.6)$$

Sexa X_o subespazo de X xerado por F (envolvente lineal de F). Posto que S^* é compacto, F é relativamente compacto e, xa que logo X_o é separable. Por outra parte, temos que $P_o = P \cap X_o$ é cono de X_o e $F \subset P_o$, $\bar{c}oF \subset P_o$. Polo [21, Theorem 1.4.1] existe $f_o \in X_o^*$ (elemento no espazo dual de X_o , $X_o^* = \{f : X_o \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é lineal e continua}\}$) tal que $f_o(y) > 0$ para cada $y \in P \setminus \{0\}$. Vexamos agora que,

$$\inf_{y \in F} f_o(y) = \sigma > 0.$$

En efecto, se $\sigma = 0$ existiría $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ de xeito que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_o(y_k) = 0$ e posto que F é compacto, existe $\{y_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = y_o \in \bar{F} \subset P_o$ e pola continuidade de f_o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_o(y_{k_n}) = f_o(y_o),$$

que xunto con $\lim_{k \rightarrow \infty} f_o(y_k) = 0$ implica que $f_o(y_o) = 0$ e de aquí $y_o = 0$. Así chegamos a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{k_n}\| = 0$ o que contradí o suposto.

Sexa agora

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \bar{M}, \quad \text{con } y_i \in F, \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

temos que

$$f_o(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_o(y_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma = \sigma,$$

e así $f_o(y) \geq \sigma$, para cada $y \in \overline{M}$.

Como $\overline{M} = \overline{c_oF}$ é compacto, existe $z_o \in \overline{M}$ tal que

$$\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_o\|,$$

e, polo razoado con anterioridade, $f_o(z_o) \geq \sigma$ e, de aquí, $z_o \neq 0$ (pois se $z_o = 0$, como f_o é lineal tería $f_o(z_o) = 0$). Séguese pois (1.6). Ademais, xuntando (1.6) co feito de que $S^*(\overline{U}) \subset \overline{c_oF} = \overline{M}$ temos

$$\inf_{y \in \overline{U}} \|S^*y\| =: \gamma > 0.$$

Consideremos agora a aplicación $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow P$ dada por $H(x, t) = Tx + (1 - t)t_oS^*x$, onde $t_o > \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ sendo

$$\alpha := \sup_{x \in \overline{U}} \|x\| \quad \text{e} \quad \beta := \sup_{x \in \overline{U}} \|Tx\|.$$

O operador H , que é compacto, non ten puntos fixos en $\partial_P U \times [0, 1]$ pois do contrario tería $x^* \in \partial_P U$ e $t^* \in [0, 1]$ de xeito que $x^* = Tx^* + (1 - t^*)t_oS^*x^*$, pero isto contradí (1.5). Podemos pois empregar a propiedade de invarianza baixo homotopía para o índice tendo que

$$i(T, U, P) = i(H(\cdot, 0), U, P). \quad (1.7)$$

Para rematar, observamos que $H(\cdot, 0) : \overline{U} \rightarrow P$ dada por $H(x, 0) = Tx + t_oS^*x$ non ten puntos fixos en \overline{U} pois en caso contrario atoparía $x' \in \overline{U}$ satisfacendo que $x' = Tx' + t_oS^*x'$. Tomando normas e empregando a desigualdade triangular teriamos que

$$t_o = \frac{\|x' - Tx'\|}{\|S^*x'\|} \leq \frac{\alpha + \beta}{\gamma}.$$

Así, pola propiedade de punto fixo e (1.7) chegamos a que $i(T, U, P) = 0$. \square

Observación 1.21. Na proba anterior só se utiliza o feito de que o espazo normado é de Banach para estender o operador S a \overline{U} facendo uso do Corolario 1.17. Unha vez estendido, o resto da proba é independente de que o espazo no que traballemos sexa ou non de Banach. Neste sentido, se pedimos inicialmente que o operador S esté definido en \overline{U} , o resultado é certo sen pedirle a X completitude. O mesmo ocorre cando a fronteira $\partial_P U$ é un retracto de \overline{U} , pois nese caso se $\rho : \overline{U} \rightarrow \partial_P U$ é unha retracción, entón o operador $\widehat{S} : \overline{U} \rightarrow P$ dado por $\widehat{S}x = (S \circ \rho)x$ é unha extensión compacta de S que por como está definida satisfai

$$\inf_{x \in \overline{U}} \|\widehat{S}x\| > 0.$$

Téñense pois, deste xeito, os dous seguintes corolarios.

Corolario 1.22. Sexan $U \subset P$ un aberto relativo de P e limitado nun espazo normado X (non necesariamente de Banach), $T : \bar{U} \rightarrow P$ e $S : \bar{U} \rightarrow P$ operadores compactos. Se temos que

$$\inf_{x \in \bar{U}} \|Sx\| > 0, \quad e \quad (1.8)$$

$$x - Tx \neq \mu Sx, \quad \forall x \in P \cap \partial U, \quad \mu \geq 0, \quad (1.9)$$

entón $i(T, P \cap U, P) = 0$.

Corolario 1.23. Sexa $U \subset P$ un aberto relativo de P e limitado nun espazo normado X (non necesariamente de Banach) tal que existe $\rho : \bar{U} \rightarrow \partial_P U$ unha retracción de \bar{U} na súa fronteira en P , $T : \bar{U} \rightarrow P$ e $S : \partial_P U \rightarrow P$ operadores compactos. Se temos que

$$\inf_{x \in \partial U} \|Sx\| > 0, \quad e \quad (1.10)$$

$$x - Tx \neq \mu Sx, \quad \forall x \in P \cap \partial U, \quad \mu \geq 0, \quad (1.11)$$

entón $i(T, P \cap U, P) = 0$.

A continuación presentamos as diferentes versións do teorema de Krasnoselskii coas que traballaremos. Para a primeira delas incluímos a demostración co fin de amosar como se traballa coas propiedades do índice e os Lemas 1.19 e 1.20.

Teorema 1.24. (de Krasnoselskii-Benjamin). Sexan U_1 e U_2 dous abertos relativos dun cono P e limitados dun espazo de Banach X tales que $0 \in U_1$, $\bar{U}_1 \subset U_2$ e $T : \bar{U}_2 \setminus U_1 \rightarrow P$ un operador compacto. Supoñamos que estamos nalgún dos seguintes casos

(a) **Versión compresiva:**

(i) Existe $h \in P \setminus \{0\}$ tal que $x - Tx \neq \mu h$, para todo $x \in \partial_P U_1$ e todo $\mu \geq 0$,

(ii) $Tx \neq \mu x$, para todo $\mu \geq 1$ e todo $x \in \partial_P U_2$,

(b) **Versión expansiva:**

(i) $Tx \neq \mu x$, para todo $\mu \geq 1$ e todo $x \in \partial_P U_1$,

(ii) Existe $h \in P \setminus \{0\}$ tal que $x - Tx \neq \mu h$, para todo $x \in \partial_P U_2$ e todo $\mu \geq 0$.

Entón T ten polo menos un punto fixo en $U_2 \setminus \bar{U}_1$.

Demostración. Vexámolo primeiro supoñendo que se verifican as condicións para a forma compresiva. O teorema de extensión de Dugundji permítenos estender T a un operador compacto e continuo en \bar{U}_2 (ao cal denotaremos igualmente T).

Por un lado temos que $Tx \neq \mu x$, para todo $\mu \geq 1$ e todo $x \in \partial_P U_2$. Deste xeito, o Lema 1.19 permítenos afirmar que $i(T, U_2, P) = 1$. Por outra parte, existe $h \in P \setminus \{0\}$ tal que $x - Tx \neq \mu h$, para todo $x \in \partial_P U_1$ e todo $\mu \geq 0$. É fácil notar que estamos nas condicións do Lema 1.20 se

restrinximos o operador estendido $T : \bar{U}_2 \rightarrow P$ a \bar{U}_1 e tomamos como operador $S : \partial_P U_1 \rightarrow P$ o dado por $Sx = h$. En consecuencia, $i(T, U_1, P) = 0$.

Finalmente, e posto que o operador estendido T non ten puntos fixos en $\bar{U}_2 \setminus [(U_2 \setminus \bar{U}_1) \cup U_1] = \partial_P U_1 \cup \partial_P U_2$ podemos aplicar a propiedade de aditividade téndose

$$i(T, U_2 \setminus \bar{U}_1, P) = i(T, U_2, P) - i(T, U_1, P) = 1 \neq 0,$$

de onde pola propiedade de punto fixo para o índice se obtén o resultado.

De atopármonos na versión expansiva os razoamentos serían análogos, chegando a que $i(T, U_2, P) = 0$ e $i(T, U_1, P) = 1$, de onde ao aplicarmos a propiedade de aditividade teríamos $i(T, U_2 \setminus \bar{U}_1, P) = -1 \neq 0$. \square

Observación 1.25. Novamente, se o operador T se presupón definido sobre todo o conxunto \bar{U}_2 ou se $\partial_P U_1$ é un retracto de \bar{U}_1 , non é necesario facer uso do teorema de extensión na proba anterior e así o resultado é certo sen pedir que o espazo normado sexa de Banach.

As dúas seguintes versións que presentaremos poden verse como unha consecuencia directa da anterior. As probas serán omitidas por ter sido abordadas nun traballo previo [19] e non ser de especial relevancia aquí. As probas dos respectivos resultados poden consultarse tamén en [21]. En esencia, a idea radica no feito de que as condicións que se impoñen son máis fortes que as do teorema de Krasnoselskii-Benjamin.

Corolario 1.26. *Nas condicións do teorema anterior a tese mantense ao cambiar as condicións para cada caso polas seguintes*

- (a) **Versión compresiva:** $Tx \not\leq_P x, \forall x \in \partial_P U_1$ e $Tx \not\leq_P x, \forall x \in \partial_P U_2$,
(b) **Versión expansiva:** $Tx \not\leq_P x, \forall x \in \partial_P U_1$ e $Tx \not\leq_P x, \forall x \in \partial_P U_2$.

Corolario 1.27. *Nas condicións do teorema anterior sexa $h \in P \setminus \{0\}$ e definamos*

$$P_h = \{x \in P : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, x \succeq \lambda h\}.$$

Se se satisfán algunhas das seguintes condicións

(a) **Versión compresiva:**

$$Tx \not\leq_P x, \forall x \in P_h \cap \partial_P U_1 \quad e \quad Tx \not\leq_P (1 + \varepsilon)x, \forall x \in \partial_P U_2, \varepsilon \in \mathbb{R}_+,$$

(b) **Versión expansiva:**

$$Tx \not\leq_P (1 + \varepsilon)x, \forall x \in \partial_P U_1, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad e \quad Tx \not\leq_P x, \forall x \in P_h \cap \partial_P U_2,$$

entón T ten, polo menos, un punto fixo en $\bar{U}_2 \setminus U_1$.

A última das versións que aquí presentamos non é consecuencia directa do teorema de Krasnoselskii-Benjamin, ao contrario do que pasaba coas anteriores. Porén, a súa proba tamén se apoia sobre os Lemas 1.19 e 1.20 e as propiedades do índice, como pode consultarse en [21].

Teorema 1.28. *Nos supostos do teorema anterior, ao cambiar as condicións para cada caso polas seguintes*

(a) **Versión compresiva:** $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_1$ e $\|Tx\| \leq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_2$,

(b) **Versión expansiva:** $\|Tx\| \leq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_1$ e $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_2$,

o operador T ten, polo menos, un punto fixo en $\bar{U}_2 \setminus U_1$.

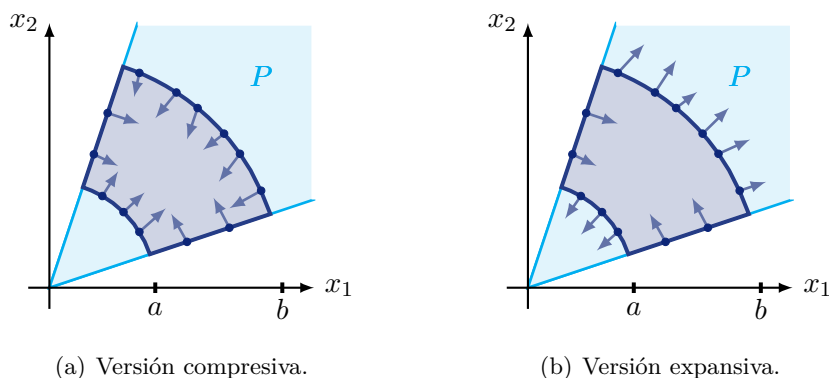


Figura 1.4: Visualización das condicións do Teorema 1.28 no caso particular onde $U_1 = B(0, a) \cap P$ e $U_2 = B(0, b) \cap P$ con $0 < a < b$ e $X = \mathbb{R}^2$. Este caso particular motiva as denominacións de versión compresiva e expansiva que viñemos empregando.

Para rematar o capítulo é importante sinalar que a partir destes resultados é sinxelo obter outros de multiplicidade sen máis que concatenar dúas ou máis rexións alternando entre as versións compresiva e expansiva de calquera dos resultados anteriores. Exemplos de tales resultados poderían ser os seguintes. O primeiro combina unha versión compresiva e unha expansiva do Corolario 1.22 e o segundo fai a mesma combinación coas condicións do Teorema 1.28.

Teorema 1.29. *Sexan U_1 , U_2 e U_3 tres abertos relativos dun cono P e limitados dun espazo de Banach X tales que $0 \in U_1$, $\bar{U}_1 \subset U_2$ e $\bar{U}_2 \subset U_3$ e $T : \bar{U}_3 \setminus U_1 \rightarrow P$ un operador compacto. Supoñamos que $Tx \not\leq_P x$, $\forall x \in \partial_P U_1$, que $Tx \not\leq_P x$, $\forall x \in \partial_P U_2$ e que $Tx \not\leq_P x$, $\forall x \in \partial_P U_3$. Entón T ten, polo menos, dous puntos fixos x^* e x^{**} en $U_3 \setminus \bar{U}_1$ e ademais $x^* \in U_2 \setminus \bar{U}_1$ e $x^{**} \in U_3 \setminus \bar{U}_2$.*

Teorema 1.30. *Sexan U_1 , U_2 e U_3 tres abertos relativos dun cono P e limitados dun espazo de Banach X tales que $0 \in U_1$, $\bar{U}_1 \subset U_2$ e $\bar{U}_2 \subset U_3$ e $T : \bar{U}_3 \setminus U_1 \rightarrow P$ un operador compacto.*

Supoñamos que $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_1$, que $\|Tx\| \leq \|x\|$ e $Tx \neq x \forall x \in \partial_P U_2$ e que $\|Tx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in \partial_P U_3$. Entón T ten, polo menos, dous puntos fixos x^* e x^{**} en $\bar{U}_3 \setminus U_1$ e ademais $x^* \in U_2 \setminus U_1$ e $x^{**} \in \bar{U}_3 \setminus \bar{U}_2$.

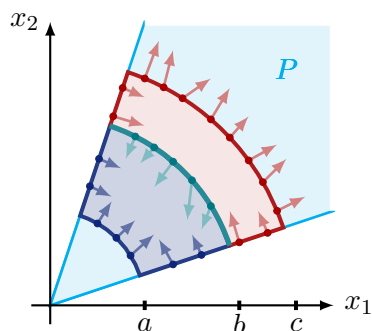


Figura 1.5: Ilustración das condicións para o Teorema 1.30 para o caso no que $U_1 = B(0, a) \cap P$, $U_2 = B(0, b) \cap P$ e $U_3 = B(0, c) \cap P$ onde $0 < a < b < c$ e $X = \mathbb{R}^2$.

Observación 1.31. Observamos que no Teorema 1.30 pedimos que $Tx \neq x$, $\forall x \in \partial_P U_2$, pois de non ser así a condición imposta sobre as normas non nos privaría de que x^* e x^{**} puidesen estar sobre $\partial_P U_2$ e ser o mesmo punto.

Capítulo 2

Motivación e obxectivos

Presentados os conceptos e resultados básicos para o traballo, o propósito deste segundo capítulo é o de ofrecer un repaso superficial sobre o contexto que motivou a súa proposta, ao mesmo tempo que se establecen con claridade os seus obxectivos e se destaca o valor e a relevancia das súas posibles consecucións.

Os métodos topolóxicos consolidáronse nos últimos anos como unha poderosa ferramenta para obter información cualitativa sobre a existencia, unicidade e comportamento das solucións de numerosos problemas diferenciais de carácter non lineal. Estes consisten nunha serie de técnicas baseadas en conceptos introducidos con anterioridade e relacionados coa topoloxía, tales como a utilización directa do grao topolóxico de Leray-Schauder, o índice de punto fixo ou a aplicación de resultados de teoría de punto fixo [2, 13, 15].

Neste traballo, abordaremos principalmente o problema da existencia de solución a través de resultados de teoría de punto fixo. É importante destacar que non todos os resultados dentro desta teoría son igual de relevantes para este propósito. Neste sentido, os resultados de punto fixo en conos detallados no capítulo anterior permiten obter condicións suficientes para a existencia de solucións positivas [27]. Porén, outros, como por exemplo o teorema de Schauder, non son tan útiles ao non excluír a trivial como unha posible solución. Esta cuestión foi tratada nun traballo previo [19] a través do seguinte exemplo que tamén pode consultarse en [21, 22].

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $f \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Non é difícil ver que unha función $u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ é solución do problema (2.1) se, e só se, é un punto fixo do operador integral

$$T : (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

$$\{u : t \in [0, 1] \rightarrow u(t)\} \longrightarrow \left\{ Tu : t \in [0, 1] \rightarrow Tu(t) = \int_a^b G(t, s)f(s, u(s))ds \right\}, \quad (2.2)$$

onde $G : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vén dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & \text{se } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s), & \text{se } 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Observación 2.1. Por solución do problema de valor inicial entendemos unha función $u \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ satisfacendo (2.1) e por punto fixo de T unha aplicación $u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ tal que

$$Tu = u. \quad (2.4)$$

Podemos empregar o teorema de punto fixo de Schauder para establecer un resultado de existencia de solución cando $f \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ é unha función limitada.

Teorema 2.2. (de punto fixo de Schauder). *Sexa $K \subset X$ un subconxunto non baleiro, pechado, limitado e convexo de X . Se $T : K \longrightarrow K$ é unha aplicación compacta, entón T ten algún punto fixo.*

Por unha parte, o operador T pode probarse compacto cando $f \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ [19, 22]. Ademais, como f é limitada, existirá $R \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(t, x)| < R$ para cada $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$. Así, dado $u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$, para cada $t \in [0, 1]$ tense que

$$|Tu(t)| = \left| \int_0^1 G(t, s)f(s, u(s))ds \right| \leq \int_0^1 |G(t, s)||f(s, u(s))|ds \leq R,$$

pois $0 \leq |G(t, s)| \leq 1$ para todo $(t, s) \in [0, 1]^2$. Deste xeito $T(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R)}$ e polo Teorema 2.2 o operador T ten, polo menos, un punto fixo na bóla $\overline{B(0, R)}$ de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ que é unha solución do problema (2.1).

En concreto, o problema

$$\begin{cases} x''(t) = \text{sen}(x(t))e^{t-x^2(t)}, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

ten algunha solución, pois é un problema do tipo de (2.1) con $f : (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow f(t, x) = -\text{sen}(x)e^{t-x^2} \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ limitada.

Observación 2.3. É importante destacar que, en realidade, a información sobre a existencia de solución que nos proporciona o teorema de Schauder pode non ser relevante, pois non se exclúe a posibilidade de que a solución sexa a trivial. Por exemplo, no caso do problema (2.5), esta resulta facilmente recoñecible como solución, polo que a existencia podía ter sido identificada a priori.

2.1. Motivación: solucións con compoñentes positivas para sistemas de ecuacións 21

No contexto das aplicacións, os resultados específicos para operadores en conos (como o teorema de Krasnoselskii) resultan máis axeitados e relevantes, pois permiten establecer condicións sobre f que garanten a existencia de puntos fixos do operador T positivos (observemos que no Teorema 1.18 o punto fixo x_0 do operador satisfacía $r \leq \|x_0\| \leq R$ con $r, R \in \mathbb{R}_+$), localizados en conos da forma dada no Exemplo 1.9 e que poden consultarse en [17, 19, 21, 22, 32].

2.1 Motivación: solucións con compoñentes positivas para sistemas de ecuacións

Consideremos $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ espazos normados e P_1 e P_2 conos deses espazos, respectivamente. O Teorema 1.28 podería aplicarse para atopar solucións dun sistema da forma

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) = x_1, \\ N_2(x_1, x_2) = x_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $N = (N_1, N_2) : P_1 \times P_2 \longrightarrow P_1 \times P_2$ se pensamos (2.6) como unha ecuación

$$Nx = x, \quad (2.7)$$

no espazo produto $(X_1 \times X_2, \|\cdot\|)$ coa norma $\|\cdot\|$ dada por

$$\|\cdot\|_{X_1 \times X_2} : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x_1, x_2) \mapsto \|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2} = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}.$$

Para N nas condicións do Teorema 1.28 atopariamos un punto fixo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in P = P_1 \times P_2$ satisfacendo $r \leq \|(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| \leq R$ con $r, R \in \mathbb{R}_+$, isto é $r \leq \max\{\|\bar{x}_1\|_1, \|\bar{x}_2\|_2\} \leq R$, pero esta condición non impide que unha das compoñentes poida ser a trivial. Esta problemática detállase en [8, 37, 38], onde tamén se propoñen novas versións vectoriais do teorema de Krasnoselskii clásico e do de Krasnoselskii-Benjamin para operadores definidos sobre o subconxunto dun cono delimitado por dúas bólas. Ditos resultados establecen as condicións compoñente a compoñente, garantindo a existencia de puntos fixos para o sistema con todas as compoñentes positivas. Os respectivos resultados enúncianse a continuación. As súas primeiras probas, nas que non se emprega o índice de punto fixo, poden consultarse en [37, 38].

Teorema 2.4. [38, Theorem 2.1] *Sexa $(X, \|\cdot\|)$ un espazo normado, P_1, P_2 conos en X , $P = P_1 \times P_2$, $r = (r_1, r_2)$, $R = (R_1, R_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $0 < r_k < R_k$ (para $k \in \{1, 2\}$) e denotemos*

$$P_{r,R} := \{x = (x_1, x_2) \in P : r_k < \|x_k\| < R_k \text{ para } k = 1, 2\}.$$

Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \longrightarrow P$ é un operador compacto e para cada $k \in \{1, 2\}$ existe $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ tal que se satisfán algunha das seguintes condicións en $\bar{P}_{r,R}$

(a) $T_k x + \mu h_k \neq x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\mu > 0$, e $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\lambda > 1$;

(b) $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\lambda > 1$, e $T_k x + \mu h_k \neq x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\mu > 0$.

Entón T ten, polo menos, un punto fixo $x = (x_1, x_2) \in P$ tal que $r_k \leq \|x_k\| \leq R_k$ ($k = 1, 2$).

Teorema 2.5. [37, Theorem 1.1] Na situación do resultado anterior, se $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador compacto de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións en $\bar{P}_{r,R}$

(c) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$;

(d) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$,

entón T ten, polo menos, un punto fixo $x = (x_1, x_2) \in P$ tal que $r_k \leq \|x_k\| \leq R_k$ ($k = 1, 2$).

En publicacións máis recentes [39, 40] próbase o Teorema 2.4 para o operador definido sobre $\bar{P}_{r,R} := \{x = (x_1, x_2) \in P : r_k \leq \|x_k\| \leq R_k \text{ para } k = 1, 2\}$ empregando o índice de punto fixo. O requirimento de que o índice de punto fixo estea ben definido levou aos autores a fortalecer lixeiramente as condicións polas seguintes

(a*) $T_k x + \mu h_k \neq x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\mu \geq 0$, e $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\lambda \geq 1$;

(b*) $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\lambda \geq 1$, e $T_k x + \mu h_k \neq x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\mu \geq 0$.

A proba destes resultados empregando o índice de punto fixo é interesante por diversos motivos, como se destaca en [40].

- Podería ocorrer que co índice de punto fixo fose posible obter versións vectoriais en subconxuntos de conos máis xerais, como é o caso das distintas versións do teorema de Krasnoselskii detalladas no capítulo anterior.
- O cómputo do índice de punto fixo permite obter resultados de multiplicidade e localización de puntos fixos [24, 39, 40].

Neste sentido, presentamos a continuación os obxectivos principais do presente traballo, que serán abordados en capítulos posteriores. Observamos que no primeiro capítulo enunciámos catro versións distintas do teorema de Krasnoselskii en conos. Para referirmonos a cada unha delas, tanto no caso xeral como nas súas respectivas formas vectoriais sen que haxa lugar a confusión, introducimos aquí as seguintes denominacións.

- (a) **O teorema de Krasnoselskii-Benjamin ou versión homotópica** será o nome que empregaremos para referirmonos ao teorema de Krasnoselski coas condicións impostas no Teorema 1.24.

- (b) **Versión clásica** será a forma na que nos referiremos ao teorema de Krasnoselskii coas condicións impostas sobre o operador en termos da relación de orde inducida polo cono. Isto é, as do Corolario 1.26.
- (c) **Versión clásica con epsilon** referirá aos resultados que contan con condicións na forma das do Corolario 1.27.
- (d) **Versión normada** será a denominación que reciban os resultados coas condicións impostas sobre o operador en termos da norma no espazo, como no Teorema 1.28.

2.2 Obxectivos

- Empregar o índice de punto fixo para obter a versión vectorial normada do teorema de Krasnoselskii para operadores definidos nunha rexión anular dun cono.
- Empregar o índice de punto fixo para obter a versión vectorial clásica con epsilon do teorema de Krasnoselskii para operadores definidos nunha rexión anular dun cono.
- A versión vectorial para o teorema de Krasnoselskii-Benjamin probada vía o índice de punto fixo para operadores definidos nunha rexión anular dun cono [40, Theorem 2.8] permite probar directamente a versión vectorial clásica. Isto é, o Teorema 2.5 para o operador definido sobre $\bar{P}_{r,R}$, pero fortalecendo as hipóteses pola seguintes

$$(c^*) T_k x \not\leq_{P_k} x_k \text{ se } \|x_k\| = r_k, \text{ e } T_k x \not\leq_{P_k} x_k \text{ se } \|x_k\| = R_k;$$

$$(d^*) T_k x \not\leq_{P_k} x_k \text{ se } \|x_k\| = r_k, \text{ e } T_k x \not\leq_{P_k} x_k \text{ se } \|x_k\| = R_k.$$

A idea consiste en que estas condicións son mais fortes que as condicións (a^*) e (b^*) , do mesmo xeito que ocorría coas versións non vectoriais no primeiro capítulo. Probaremos isto e, ademais, trataremos de atopar algunha demostración empregando o índice para estes resultados coas hipóteses máis débiles (é dicir, as dos Teoremas 2.4 e 2.5).

- Outro dos nosos obxectivos consiste en debilitar as hipóteses para obter as distintas versións vectoriais en dominios o máis xerais posibles para os operadores. En espazos produto, o teorema de extensión de Dugundji tamén nos permite estender os operadores. Porén, ao contrario do que ocorría cos resultados no primeiro capítulo, neste contexto non temos garantida a non existencia de puntos fixos en conxuntos nos que non interesa que os haxa para a boa definición do índice.

Neste sentido comezaremos tratando de estender estes resultados a conxuntos estrelados, valéndonos das súas peculiaridades e emulando as estratexias de extensión empregadas en [33, 40], que serán debidamente detalladas.

- Ilustrar a importancia das distintas probas empregando o índice de punto fixo a través da obtención de resultados de multiplicidade que, a priori, non se obterían facilmente descoñecendo o índice do operador.
- Procurar condicións suficientes para a existencia e multiplicidade de solución con compoñentes positivas para distintos sistemas de ecuacións diferenciais e integrais empregando as melloras dos resultados relativos á teoría de punto fixo que poidan ser acadados como consecución de obxectivos previos.

Capítulo 3

O teorema de Krasnoselskii en espazos produto

Neste capítulo presentaremos os novos resultados de teoría de punto fixo en espazos produto acadados. Seguiremos como orde de presentación dos mesmos a escollida para introducir os obxectivos do traballo no capítulo anterior.

En cada sección, iremos detallando as novas versións obtidas e destacando, en cada caso, a debilitación de hipóteses de versións xa probadas con anterioridade. Ademais, indicaremos en cada caso o contexto e as ideas que foron inspirando a súa obtención.

3.1 Versións vectoriais nunha rexión anular dun cono

Antes de comezar, fixamos a notación coa que imos a traballar neste capítulo e que xa foi adiantada no capítulo anterior. Imos a considerar dous espazos normados $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ e $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$, e $P_1 \subset X_1$, $P_2 \subset X_2$ dous conos de cada un deles, respectivamente.

Temos que $P := P_1 \times P_2$ é un cono de $X_1 \times X_2$. Cando non haxa dúbidas, denotaremos ambas normas $\|\cdot\|_{X_1}$ e $\|\cdot\|_{X_2}$ simplemente por $\|\cdot\|$. Ademais, a norma de $X_1 \times X_2$ que empregaremos será a seguinte

$$\|\cdot\|_{X_1 \times X_2} : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x_1, x_2) \mapsto \|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2} = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}, \quad (3.1)$$

que tamén será chamada $\|\cdot\|$ cando non haxa lugar a confusión.

Sexan agora $r = (r_1, r_2)$, $R = (R_1, R_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $0 < r_k < R_k$ (para $k \in \{1, 2\}$). Introducimos a seguinte notación para conxuntos de interese:

$$P_{r,R} := \{x = (x_1, x_2) \in P : r_k < \|x_k\| < R_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

$$\bar{P}_{r,R} := \{x = (x_1, x_2) \in P : r_k \leq \|x_k\| \leq R_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

$$P_r := \{x = (x_1, x_2) \in P : \|x_k\| < r_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

$$\bar{P}_r := \{x = (x_1, x_2) \in P : \|x_k\| \leq r_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

$$P_R := \{x = (x_1, x_2) \in P : \|x_k\| < R_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

$$\bar{P}_R := \{x = (x_1, x_2) \in P : \|x_k\| \leq R_k \text{ para } k = 1, 2\},$$

e para cada $k \in \{1, 2\}$,

$$(P_k)_{r_k, R_k} = \{x \in P_k : r_k < \|x\| < R_k\}, \quad (\bar{P}_k)_{r_k, R_k} = \{x \in P_k : r_k \leq \|x\| \leq R_k\},$$

$$(P_k)_{r_k} = \{x \in P_k : \|x\| < r_k\}, \quad (\bar{P}_k)_{r_k} = \{x \in P_k : \|x\| \leq r_k\},$$

$$(P_k)_{R_k} = \{x \in P_k : \|x\| < R_k\}, \quad (\bar{P}_k)_{R_k} = \{x \in P_k : \|x\| \leq R_k\}.$$

Observación 3.1. É claro que $\bar{P}_{r,R} = (\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$, que $\bar{P}_r = (\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2}$ e que $\bar{P}_R = (\bar{P}_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{R_2}$.

A proba da versión vectorial do teorema de Krasnoselskii-Benjamin nunha rexión anular mediante o índice de punto fixo [40] bota man do Lema 1.19, do Corolario 1.22 con $S = h \in P \setminus \{0\}$ e do seguinte resultado.

Lema 3.2. [40, Lemma 2.1] *Sexan U e V abertos relativos de P_1 e P_2 , respectivamente, e limitados de xeito que $0 \in U$. Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \overline{U \times V} \rightarrow P$ é un operador compacto e que existe $h \in P_2 \setminus \{0\}$ tal que se satisfán en $\overline{U \times V}$ as seguintes condicións*

$$(a) \quad T_1(x_1, x_2) \neq \lambda x_1 \text{ para } x_1 \in \partial_{P_1} U, x_2 \in \bar{V} \text{ e } \lambda \geq 1,$$

$$(b) \quad x_2 - T_2(x_1, x_2) \neq \mu h \text{ para } x_1 \in \bar{U}, x_2 \in \partial_{P_2} V \text{ e } \mu \geq 0.$$

Entón, $i(T, U \times V, P) = 0$.

Neste contexto, e posto que para a proba da versión normada do teorema de Krasnoselskii (Teorema 1.28) se utiliza o Lema 1.20 tomando $S : \partial_P U \rightarrow P$ como $Sx = Tx$ sendo T o operador sobre o que se imponen as condicións, o primeiro que faremos será tratar de atopar a versión máis xeral posible deste resultado (Lema 3.2) cambiando a condición (b) polas condicións no Lema 1.20. O primeiro paso nesta dirección é o lema que enunciámos a continuación.

Lema 3.3. *Sexan U e V abertos relativos de P_1 e P_2 respectivamente, e limitados. Sexan $T = (T_1, T_2) : \overline{U \times V} \rightarrow P$ e $S : \overline{U \times V} \rightarrow P_2$ operadores compactos de xeito que se satisfán as seguintes condicións*

$$(a) \quad T_1 x \neq x_1 \text{ para cada } x_1 \in \partial_{P_1} U \text{ e } x_2 \in \bar{V},$$

(b) (i) $\inf_{x \in \overline{U \times V}} \|Sx\| > 0$;

(ii) $x_2 - T_2x \neq \mu Sx$ para cada $x_1 \in \overline{U}$, $x_2 \in \partial_{P_2}V$ e $\mu \geq 0$.

Entón, $i(T, U \times V, P) = 0$.

Demostración. Sexan

$$\alpha := \sup_{x_2 \in \overline{V}} \|x_2\|, \quad \beta := \sup_{x \in \overline{U \times V}} \|T_2x\| \quad \text{e} \quad \gamma := \inf_{x \in \overline{U \times V}} \|Sx\|.$$

Xa sabemos que α e β existen por ser \overline{V} e \overline{U} limitados e T compacto. Ademais, por hipótese, $\gamma > 0$. Sexa pois $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mu_0 > \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ e definamos a aplicación $H : \overline{U \times V} \times [0, 1] \rightarrow P$ dada por

$$H((x_1, x_2), t) = (T_1(x_1, x_2), T_2(x_1, x_2) + (1 - t)\mu_0 S(x_1, x_2)).$$

As condicións (a) e (b)-(ii) fan que a aplicación H (que é compacta por ser T e S) non teña puntos fixos en $\partial_P(U \times V) \times [0, 1]$. Se non fose deste xeito, daquela existiría $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_P(U \times V) = (\partial_{P_1}U \times \overline{V}) \cup (\overline{U} \times \partial_{P_2}V)$ e $t^* \in [0, 1]$ téndose

$$x_1^* = T_1(x_1^*, x_2^*), \tag{3.2}$$

$$x_2^* = T_2(x_1^*, x_2^*) + (1 - t^*)\mu_0 S(x_1^*, x_2^*). \tag{3.3}$$

Pero se $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_{P_1}U \times \overline{V}$ a relación (3.2) non podería darse porque entraríamos en contradición con (a) e se $(x_1^*, x_2^*) \in \overline{U} \times \partial_{P_2}V$ a relación (3.3) sería unha contradición con (b)-(ii). Deste xeito, podemos aplicar a propiedade de invariancia baixo homotopía para o índice,

$$i(T, U \times V, P) = i(H(\cdot, 0), U \times V, P). \tag{3.4}$$

Por outra parte, a aplicación $H(\cdot, 0) : x = (x_1, x_2) \in \overline{U \times V} \rightarrow H(x, 0) = (T_1x, T_2x + \mu_0 Sx)$ non ten puntos fixos en $U \times V$ por como foi tomado μ_0 . En efecto, se non fose así, existiría $(x'_1, x'_2) \in U \times V$ satisfacendo que

$$x'_2 = T_2(x'_1, x'_2) + \mu_0 S(x'_1, x'_2),$$

e xa que logo, restando $T_2(x'_1, x'_2)$ a ambos lados da igualdade, tomando normas e aplicando a desigualdade triangular e as definicións de α , β e γ

$$\mu_0 = \frac{\|x'_2 - T_2(x'_1, x'_2)\|}{\|S(x'_1, x'_2)\|} \leq \frac{\alpha + \beta}{\gamma},$$

o cal é unha contradición co feito de que $\mu_0 > \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$. Temos pois, de (3.4) e a propiedade de punto fixo para o índice que $i(T, U \times V, P) = 0$. □

Observación 3.4. Se no lema que acabamos de ver pedimos que $0 \in U$ e substituímos a condición (a) pola seguinte,

$$(a^*) T_1 x \neq \lambda x_1 \text{ para cada } x_1 \in \partial_{P_1} U, x_2 \in \bar{V} \text{ e } \lambda \geq 1,$$

a tese do resultado mantense. Para ver isto sería suficiente cambiar a aplicación H por outra $H^* : \bar{U} \times \bar{V} \times [0, 1] \rightarrow P$ dada por

$$H^*((x_1, x_2), t) = (tT_1(x_1, x_2), T_2(x_1, x_2) + (1-t)\mu_0 S(x_1, x_2)).$$

Facendo os mesmos argumentos, as condicións (a^*) e (b) - (ii) impiden que a aplicación H^* teña puntos fixos en $\partial_P(U \times V) \times [0, 1]$. Ademais, a aplicación $H^*(\cdot, 0) : x = (x_1, x_2) \in \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow H^*(x, 0) = (0, T_2 x + \mu_0 Sx)$ non ten puntos fixos en $U \times V$.

Outra forma de ver isto apóiase no feito de que a condición (a^*) para $\lambda = 1$ se corresponde coa condición (a) . Isto é, (a^*) é mais forte que (a) .

Observación 3.5. É importante observar que, no contexto do lema previo, non é o mesmo pedir que o operador $T : \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow P$ non teña puntos fixos en $\partial_P(U \times V)$ que pedir que se satisfagan simultaneamente as seguintes condicións

$$(i) T_1(x_1, x_2) \neq x_1 \text{ para cada } x_1 \in \partial_{P_1} U \text{ e } x_2 \in \bar{V},$$

$$(ii) T_2(x_1, x_2) \neq x_2 \text{ para cada } x_1 \in \bar{U} \text{ e } x_2 \in \partial_{P_2} V.$$

Se o operador T satisfai simultaneamente estas condicións, entón non ten puntos fixos en $\partial_P(U \times V)$. En efecto, se existise un punto $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_P(U \times V) = (\partial_{P_1} U \times \bar{V}) \cup (\bar{U} \times \partial_{P_2} V)$ tal que $(x_1^*, x_2^*) = (T_1(x_1^*, x_2^*), T_2(x_1^*, x_2^*))$ entraría en contradición con (i) se $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_{P_1} U \times \bar{V}$ e con (ii) se $(x_1^*, x_2^*) \in \bar{U} \times \partial_{P_2} V$. Pola contra, o recíproco desta afirmación non é certo.

Tras estas observacións, anunciamos a continuación unha modificación do Lema 3.3 que consiste en cambiar a primeira das condicións pola introducida na Observación 3.4 e relaxar as hipóteses sobre T no senso da Observación 3.5.

Lema 3.6. *Sexan U e V abertos relativos e limitados de P_1 e P_2 respectivamente, tales que $0 \in U$. Se $T = (T_1, T_2) : \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow P$ e $S : \bar{U} \times \bar{V} \rightarrow P_2$ son operadores compactos satisfacendo as seguintes condicións*

$$(a) T_1 x \neq \lambda x_1 \text{ para cada } x_1 \in \partial_{P_1} U, x_2 \in \bar{V} \text{ e } \lambda > 1,$$

$$(b) (i) \inf_{x \in \bar{U} \times \bar{V}} \|Sx\| > 0;$$

$$(ii) x_2 - T_2 x \neq \mu Sx \text{ para cada } x_1 \in \bar{U}, x_2 \in \partial_{P_2} V \text{ e } \mu > 0,$$

$$(c) T \text{ non ten puntos fixos en } \partial_P(U \times V).$$

Entón, $i(T, U \times V, P) = 0$.

Demostración. Vexamos que a aplicación H^* compacta definida na Observación 3.4 non ten puntos fixos en $\partial_P(U \times V) \times [0, 1]$. En efecto, no caso contrario existiría $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_P(U \times V) = (\partial_{P_1}U \times \bar{V}) \cup (\bar{U} \times \partial_{P_2}V)$ e $t^* \in [0, 1]$ satisfacéndose

$$x_1^* = t^*T_1(x_1^*, x_2^*), \quad (3.5)$$

$$x_2^* = T_2(x_1^*, x_2^*) + (1 - t^*)\mu_0 S(x_1^*, x_2^*). \quad (3.6)$$

Se $t^* = 1$ entraríamos en contradición con (c), se $t^* = 0$ como $0 \in U$ teríamos de (3.5) que $(x_1^*, x_2^*) = (0, x_2^*) \in \bar{U} \times \partial_{P_2}V$ e (3.6) entraría en contradición con (b)-(ii) e se $t^* \in (0, 1)$ tería

$$T_1(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{t^*}x_1^*, \quad (3.7)$$

$$x_2^* = T_2(x_1^*, x_2^*) + (1 - t^*)\mu_0 S(x_1^*, x_2^*), \quad (3.8)$$

pero se $(x_1^*, x_2^*) \in \partial_{P_1}U \times \bar{V}$ entón (3.7) entra en contradición con (a), pois $\frac{1}{t^*} \in (1, \infty)$ e se $(x_1^*, x_2^*) \in \bar{U} \times \partial_{P_2}V$ temos que (3.8) contradí (b)-(ii). Deste xeito, a propiedade de invariancia baixo homotopía asegúranos que

$$i(T, U \times V, P) = i(H^*(\cdot, 0), U \times V, P). \quad (3.9)$$

Ademais $H^*(\cdot, 0)$ non ten puntos fixos en $U \times V$ porque do contrario existiría $(0, x'_2) \in U \times V$ satisfacendo que

$$x'_2 = T_2(0, x'_2) + \mu_0 S(0, x'_2),$$

de onde restando $T_2(0, x'_2)$ a ambos lados, tomando normas e utilizando a desigualdade triangular xunto coas definicións de α , β e γ no Lema 3.3,

$$\mu_0 = \frac{\|x'_2 - T_2(0, x'_2)\|}{\|S(0, x'_2)\|} \leq \frac{\|x'_2\| + \|T_2(0, x'_2)\|}{\|S(0, x'_2)\|} \leq \frac{\alpha + \beta}{\gamma}. \quad (3.10)$$

Así, e ao igual que facíamos na proba do resultado anterior, podemos concluír pola propiedade de punto fixo para o índice que $i(T, U \times V, P) = 0$. \square

Observación 3.7. Na última desigualdade de (3.10) da proba anterior estamos empregando que

$$\gamma := \inf_{x \in \bar{U} \times \bar{V}} \|Sx\| \leq \inf_{x_2 \in \bar{V}} \|S(0, x_2)\| \leq \|S(0, x'_2)\|.$$

Deste xeito, obsérvamos que en realidade cambiando a condición (b)-(i) do Lema 3.3 pola seguinte

$$(b^*) (i) \quad \inf_{x_2 \in \bar{V}} \|S(0, x_2)\| > 0,$$

a tese do mesmo mantense sen máis que tomar $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\mu_0 > \frac{\alpha + \beta}{\gamma^*}$ onde agora

$$\gamma^* := \inf_{x_2 \in \bar{V}} \|S(0, x_2)\|.$$

Observación 3.8. Máis aínda, no Lema 3.6 sería suficiente con que S estivese definido en $\overline{U} \times \partial_{P_2} V$ e a condición correspondente a (b)-(i) fose

$$\inf_{x \in \overline{U} \times \partial_{P_2} V} \|Sx\| > 0, \quad (3.11)$$

sempre que fose posible estender S a un operador $S' : \overline{U \times V} \rightarrow P_2$ compacto de xeito que

$$\inf_{x \in \overline{U \times V}} \|S'x\| > 0. \quad (3.12)$$

É fácil ver que se para o aberto V relativo de P_2 existe unha retracción $\rho_2 : \overline{V} \rightarrow \partial_{P_2} V$ de \overline{V} na súa fronteira, entón satisfáise o que queremos. En efecto, se teño $S : \overline{U} \times \partial_{P_2} V \rightarrow P_2$ satisfacendo (3.11), entón a aplicación $S^* : x = (x_1, x_2) \in \overline{U \times V} \rightarrow S^*(x_1, x_2) = S(x_1, \rho_2(x_2)) \in P_2$ cumpre a condición (3.12) pois é claro que

$$\inf_{x \in \overline{U \times V}} \|S^*x\| = \inf_{x \in \overline{U} \times \partial_{P_2} V} \|Sx\|.$$

Enunciamos a continuación o resultado correspondente a modificar o Lema 3.6 tendo en conta os comentarios da Observación 3.8.

Corolario 3.9. *Sexan U e V abertos relativos de P_1 e P_2 respectivamente, e limitados tales que $0 \in U$ e existe $\rho_2 : \overline{V} \rightarrow \partial_{P_2} V$ retracción de \overline{V} na súa fronteira en P_2 . Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \overline{U \times V} \rightarrow P$ e $S : \overline{U} \times \partial_{P_2} V \rightarrow P_2$ son operadores compactos satisfacendo as seguintes condicións*

- (a) $T_1x \neq \lambda x_1$ para cada $x_1 \in \partial_{P_1} U$, $x_2 \in \overline{V}$ e $\lambda > 1$,
- (b) (i) $\inf_{x \in \overline{U} \times \partial_{P_2} V} \|Sx\| > 0$;
- (ii) $x_2 - T_2x \neq \mu Sx$ para cada $x_1 \in \overline{U}$, $x_2 \in \partial_{P_2} V$ e $\mu > 0$,
- (c) T non ten puntos fixos en $\partial_P(U \times V)$,

entón, $i(T, U \times V, P) = 0$.

Observación 3.10. É claro que no resultado anterior se poden intercambiar as condicións sobre T_1 e T_2 e o resultado segue sendo certo.

No resultado anterior, a existencia da retracción do conxunto \overline{V} na súa fronteira en P_2 é un requerimento para poder facer o cómputo do índice do operador. Un tipo particular de conxuntos para os que tal retracción existe son $(\overline{P}_k)_{r_k}$ para $k \in \{1, 2\}$. Deste xeito, é directo que $\overline{P}_{r,R}$ é un retracto de \overline{P}_R .

Presentamos a continuación unha posible retracción de \bar{P}_R en $\bar{P}_{r,R}$ tomada de [40] (ver tamén [18, Example 3]). Definimos, para cada $k \in \{1, 2\}$ a retracción $\rho_k : (\bar{P}_k)_{R_k} \rightarrow (\bar{P}_k)_{r_k, R_k}$ dada por

$$\rho_k(x_k) = \begin{cases} r_k \frac{x_k + (r_k - \|x_k\|)^2 h_k}{\|x_k + (r_k - \|x_k\|)^2 h_k\|}, & \text{se } \|x_k\| < r_k, \\ x_k, & \text{se } r_k \leq \|x_k\| \leq R_k. \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ está fixado.

Observación 3.11. Notamos que ρ_k está ben definido pois $\|x_k + (r_k - \|x_k\|)^2 h_k\| \neq 0$ para todo $x_k \in (\bar{P}_k)_{r_k}$. En efecto, do contrario teríamos que $-x_k = (r_k - \|x_k\|)^2 h_k \in P_k$, que xunto co feito de que $x_k \in P_k$ implica pola definición de cono que $x_k = 0$. Pero se $x_k = 0$, entón temos que $\|r_k^2 h_k\| > 0$, pois $r_k > 0$ e $h_k \in P_k \setminus \{0\}$. É máis, a aplicación ρ_k é continua e $\rho_k(x_k) = x_k$ para todo $x_k \in (\bar{P}_k)_{r_k, R_k}$.

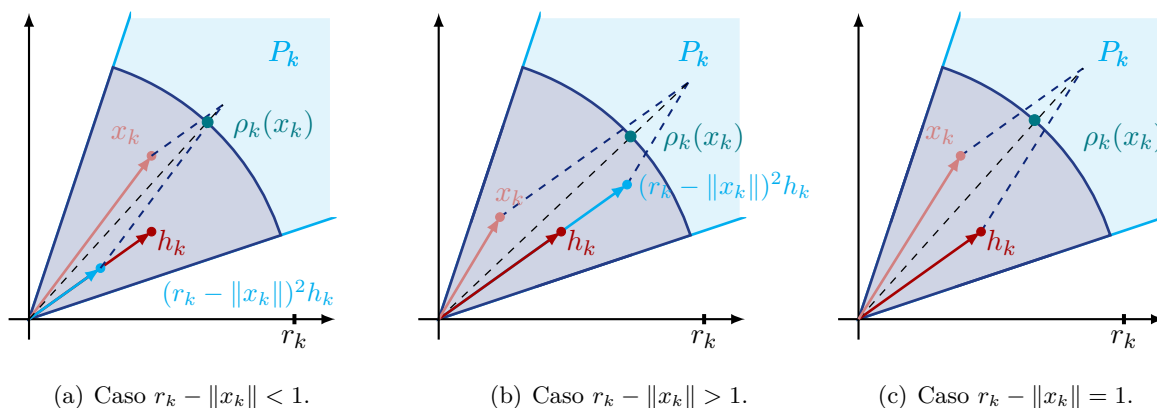


Figura 3.1: Visualización da parte da retracción dada por (3.13) correspondente a contraer $(\bar{P}_k)_{r_k}$ na súa fronteira en P_k , para $k = 1, 2$. Distínguense tres posibles casos segundo o valor de $r_k - \|x_k\|$.

Esta retracción, xunto co Corolario 3.9, o Corolario 1.23 e o Lema 1.19 permítenos ver o seguinte resultado. Este consiste nunha versión máis xeral que o teorema de Krasnoselskii-Benjamin en espazos produto.

Teorema 3.12. *Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador compacto e que existen operadores compactos $S_1 : D_1 = \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2} \rightarrow P_1$, $S_2 : D_2 = (\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2} \rightarrow P_2$, $S_1^* : F_1 = \partial_{P_1}(P_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2} \rightarrow P_1$ e $S_2^* : F_2 = (\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{R_2} \rightarrow P_2$ de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfán en $\bar{P}_{r,R}$ algunhas das seguintes condicións (isto é, (a^\heartsuit) ou (b^\heartsuit))*

- (a[♥]) (a) $T_k x \neq \lambda x_k$ para $\|x_k\| = R_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$) e $\lambda \geq 1$,
- (b) (i) $\inf_{x \in D_k} \|S_k x\| > 0$;
- (ii) $x_k - T_k x \neq \mu S_k x$ para $\|x_k\| = r_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$), e $\mu \geq 0$,
- (b[♥]) (a) $T_k x \neq \lambda x_k$ para $\|x_k\| = r_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$) e $\lambda \geq 1$,
- (b) (i) $\inf_{x \in F_k} \|S_k^* x\| > 0$;
- (ii) $x_k - T_k x \neq \mu S_k^* x$ para $\|x_k\| = R_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$), e $\mu \geq 0$.

Entón

$$i(T, P_{r,R}, P) = (-1)^s,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é o número de compoñentes de T que satisfán a condición (a[♥]). En particular, T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $P_{r,R}$, isto é, tal que $r_k < \|\tilde{x}_k\| < R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Demostración. Faremos en primeiro lugar a proba do resultado supoñendo que ámbolas dúas compoñentes satisfán a condición (a[♥]). Definindo a retracción $\rho : \overline{P}_R \rightarrow \overline{P}_{r,R}$ de xeito que $\rho(x_1, x_2) = (\rho_1(x_1), \rho_2(x_2))$ onde ρ_k vén dada por (3.13) para cada $k \in \{1, 2\}$. Defínese a función auxiliar $N = (N_1, N_2) : \overline{P}_R \rightarrow P$ como

$$N(x) := T \circ \rho(x).$$

Sexan tamén $L_1 : E_1 = \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2} \rightarrow P_1$ dada por $L_1(x_1, x_2) := S_1(x_1, \rho_2(x_2))$ e $L_2 : E_2 = (\overline{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2} \rightarrow P_2$ dada por $L_2(x_1, x_2) := S_2(\rho_1(x_1), x_2)$. Os operadores N, L_1 e L_2 son compactos. Ademais $N(x) = T(x)$ para $x \in \overline{P}_{r,R}$ e, debido á como actúan as retraccións ρ_k , é fácil comprobar que temos para cada $k \in \{1, 2\}$ as seguintes condicións en \overline{P}_R

- (a^{*}) $N_k x \neq \lambda x_k$ para $\|x_k\| = R_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$) e $\lambda \geq 1$,
- (b^{*}) (i) $\inf_{x \in E_k} \|L_k x\| > 0$;
- (ii) $x_k - N_k x \neq \mu L_k x$ para $\|x_k\| = r_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$), e $\mu \geq 0$.

Vexamos isto, por exemplo, para o caso $k = 1$. Para ver (a^{*}) supoñamos $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \overline{P}_R$ tal que $\|\bar{x}_1\| = R_1$, entón claramente, pola forma da retracción e satisfacerse (a[♥])-(a) temos

$$N_1 \bar{x} = T_1(\bar{x}_1, \rho_2(\bar{x}_2)) \neq \lambda \bar{x}_1, \text{ con } \lambda \geq 1.$$

A condición (b^{*})-(i) séguese directamente da igualdade

$$\inf_{x \in D_1} \|S_1 x\| = \inf_{x \in E_1} \|L_1 x\|,$$

que tamén é consecuencia da definición da retracción. Por outra parte, para ver (b^*) -(ii), se novamente temos un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{P}_R$ tal que $\|\bar{x}_1\| = r_1$, é claro das definicións de N_1 e L_1 , e da propiedade (a^\heartsuit) -(a)-(ii), que temos

$$\bar{x}_1 - N_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_1 - T_1(\bar{x}_1, \rho_2(\bar{x}_2)) \neq \mu S_1(\bar{x}_1, \rho_2(\bar{x}_2)) = \mu L_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \text{ con } \mu \geq 0.$$

Os conxuntos $(P_1)_{R_1}$ e $(P_2)_{r_2}$ están nas condicións dos abertos do Corolario 3.9. Ademais, as condicións (a^*) para $k = 1$ e (b^*) para $k = 2$ fan que o operador N restrinxido a $(\bar{P}_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2}$ se atope nas hipóteses do Corolario 3.9 (volvendo a facer a apreciación comentada na Observación 3.5) e así

$$i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = 0.$$

Podemos facer o mesmo razoamento con (a^*) para $k = 2$, (b^*) para $k = 1$ e N restrinxido a $(\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{R_2}$ chegando a que

$$i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 0.$$

Por outra parte, se definimos $L_1^* : E_1^* = (\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{R_2} \rightarrow P_1$ dada por $L_1^*(x_1, x_2) := L_1(\rho_1(x_1), x_2)$ e $L_2^* : E_2^* = (\bar{P}_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2} \rightarrow P_2$ dada por $L_2^*(x_1, x_2) := L_2(x_1, \rho_2(x_2))$ e as restrinximos ao conxunto \bar{P}_r , das condición (b^*) -(i) e (b^*) -(ii) obtemos as seguintes

$$(a^{**}) \quad (i) \quad \inf_{x \in (\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2}} \|L_1^*x\| \geq \inf_{x \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{R_2}} \|L_1x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_1 - N_1x \neq \mu L_1^*x \text{ para cada } \|x_1\| = r_1 \ (x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1}), \ x_2 \in (\bar{P}_2)_{r_2} \text{ e } \mu \geq 0,$$

$$(b^{**}) \quad (i) \quad \inf_{x \in (\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2}} \|L_2^*x\| \geq \inf_{x \in (\bar{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}} \|L_2x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_2 - N_2x \neq \mu L_2^*x \text{ para cada } x_1 \in (\bar{P}_1)_{r_1}, \ \|x_2\| = r_2 \ (x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}) \text{ e } \mu \geq 0.$$

De aquí, é directo que nos atopamos nas hipóteses do Corolario 1.22 para N restrinxido a $\bar{P}_r = (\bar{P}_1)_{r_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2}$ e con $S := L^* = (L_1^*, L_2^*) : \bar{P}_r \rightarrow P$. Polo tanto

$$i(N, P_r, P) = 0.$$

Finalmente, é directo que o operador N no conxunto \bar{P}_R se atopa nas condicións do Lema 1.19 por terse (a^*) para cada $k \in \{1, 2\}$. Deste xeito temos que

$$i(N, P_R, P) = 1.$$

Botando man da propiedade de aditividade para o índice de punto fixo, temos que

$$i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}) - i(N, P_r, P) = 0,$$

e de aquí, novamente pola propiedade de aditividade, obtemos

$$i(N, P_{r,R}, P) = i(N, P_R, P) - i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) - i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 1.$$

Como $T(x) = N(x)$ no conxunto $\overline{P}_{r,R}$, deducimos que $i(T, P_{r,R}, P) = i(N, P_{r,R}, P) = 1$ e pola propiedade de punto fixo concluímos que T ten un punto fixo en $P_{r,R}$.

Fagamos agora a proba nalgún dos outros casos, por exemplo, supoñendo que o operador T satisfai a condición (a^\heartsuit) para $k = 1$ e a condición (b^\heartsuit) para $k = 2$. Do mesmo xeito que para o caso anterior, definindo a extensión $\hat{L}_2 : \hat{F}_2 = (\overline{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{R_2} \rightarrow P_2$ de S_2^* dada por $\hat{L}_2(x_1, x_2) := S_2^*(\rho_1(x_1), x_2)$ que é compacta, pódese ver que se satisfán as condicións seguintes en \overline{P}_R

$$(a^*) \quad N_1x \neq \lambda x_1 \text{ para } \|x_1\| = R_1 \text{ (} x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{R_1} \text{) e } \lambda \geq 1,$$

$$(b^*) \quad (i) \quad \inf_{x \in E_1} \|L_1x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_1 - N_1x \neq \mu L_1x \text{ para } \|x_1\| = r_1 \text{ (} x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \text{), e } \mu \geq 0.$$

$$(a^{**}) \quad N_2x \neq \lambda x_2 \text{ para } \|x_2\| = r_2 \text{ (} x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{r_2} \text{) e } \lambda \geq 1,$$

$$(b^{**}) \quad (i) \quad \inf_{x \in \hat{F}_2} \|\hat{L}_2x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_2 - N_2x \neq \mu \hat{L}_2x \text{ para } \|x_2\| = R_2 \text{ (} x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{R_2} \text{), e } \mu \geq 0.$$

Seguindo os pasos anteriores, das condicións (a^*) e (b^{**}) , se restrinximos o operador N a \overline{P}_r é claro que se atopa nas condicións do Corolario 3.9. Ademais, o propio operador N definido sobre \overline{P}_R , tamén se atopa nas hipóteses deste mesmo resultado pero intercambiando as compoñentes. Deste xeito, temos

$$i(N, P_r, P) = i(N, P_R, P) = 0.$$

Así mesmo, a restrición do operador N ao conxunto $(\overline{P}_1)_{R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2}$ atópase nas condicións do Lema 1.19 por satisfacérense (a^*) e (a^{**}) . Deste xeito

$$i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = 1.$$

Finalmente, definindo a extensión $\hat{L}_2^* : (\overline{P}_1)_{R_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2} \rightarrow P_2$ dada por $\hat{L}_2^*(x_1, x_2) := \hat{L}_2(x_1, \rho_2(x_2))$ e restrinxíndoa a $(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}$ temos que

$$(a^{***}) \quad (i) \quad \inf_{x \in (\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}} \|L_1^*x\| \geq \inf_{x \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}} \|L_1x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_1 - N_1x \neq \mu L_1^*x \text{ para cada } \|x_1\| = r_1 \text{ (} x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \text{), } x_2 \in (\overline{P}_2)_{R_2} \text{ e } \mu \geq 0,$$

$$(b^{***}) \quad (i) \quad \inf_{x \in (\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}} \|\hat{L}_2^*x\| \geq \inf_{x \in (\overline{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{R_2}} \|\hat{L}_2x\| > 0;$$

(ii) $x_2 - N_2 x \neq \mu \hat{L}_2^* x$ para cada $x_1 \in (\overline{P_1})_{r_1}$, $\|x_2\| = R_2$ ($x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{R_2}$) e $\mu \geq 0$.

Así pois, atopámonos nas hipóteses do Corolario 1.22 para N restrinxido a $(\overline{P_1})_{r_1} \times (\overline{P_2})_{R_2}$ e con $S := L^* = (L_1^*, \hat{L}_2^*) : (\overline{P_1})_{r_1} \times (\overline{P_2})_{R_2} \rightarrow P$. Polo tanto

$$i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 0.$$

Empregando agora a propiedade de aditividade para o índice de punto fixo, como faciamos con anterioridade, atopamos que

$$i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}) - i(N, P_r, P) = 1,$$

e de aquí

$$i(N, P_{r, R}, P) = i(N, P_R, P) - i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) - i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = -1.$$

Isto conclúe a proba para este caso, téndose a existencia de punto fixo de xeito análogo ao caso anterior. Os dous casos restantes próbanse analogamente aplicando o Corolario 1.22, o Corolario 3.9 e o Lema 1.19 nos distintos subconxuntos segundo sexa o caso e empregando a propiedade de aditividade. \square

Observación 3.13. Sería interesante poder eliminar a igualdade para λ e μ nas condicións deste resultado e pedir simplemente que o operador T non teña puntos fixos en $\partial_P(P_{r, R})$. Notamos que, facendo esta petición, non podemos garantir que a aplicación auxiliar N non conte con puntos fixos en $\partial_P P_r$ ou en $\partial_P P_R$, o cal precisamos para asegurarmos a boa definición do índice de N nos conxuntos de interese.

3.1.1 Versión normada do teorema de Krasnoselskii

Atopámonos neste punto, en condicións de abordar a versión vectorial normada do teorema de Krasnoselskii. Nun intento de dar resposta á cuestión exposta na Observación 3.13 para o resultado anterior, a continuación veremos que é posible estender o operador T a P_R asegurando a boa definición do índice nos subconxuntos de interese baixo a imposición de condicións adicionais. En concreto, impondo sobre cada compoñente do operador a condición compresiva do teorema de Krasnoselskii en termos de normas sobre a fronteira das bólas de menor radio, como vemos a continuación.

Proposición 3.14. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{P_{r, R}} \rightarrow P$ un operador compacto tal que en $\overline{P_{r, R}}$ satisfai a seguinte condición*

$$\|T_k x\| \geq \|x_k\| \text{ para } \|x_k\| = r_k \text{ (} x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}\text{), e para cada } k \in \{1, 2\}. \quad (3.14)$$

Se T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R} = \partial_P((P_1)_{r_1,R_1} \times (P_2)_{r_2,R_2})$, entón a extensión de T , $N = (N_1, N_2) : \bar{P}_R \rightarrow P$ da forma

$$N(x) := T \circ \rho(x), \quad (3.15)$$

onde $\rho : \bar{P}_R \rightarrow \bar{P}_{r,R}$ é a retracción dada por $\rho(x_1, x_2) = (\rho_1(x_1), \rho_2(x_2))$ con ρ_k definida por (3.13) para cada $k \in \{1, 2\}$, non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1,R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2,R_2})$.

Demostración. Será suficiente con ver que N non ten puntos fixos nin en $\partial_P P_r$, nin en $\partial_P P_R$. Que isto é suficiente para que se teña en todos os conxuntos na tese do resultado é consecuencia do feito de que T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R}$ e $T = N$ en $\bar{P}_{r,R}$ xunto co feito de que a unión de todos estes conxuntos é igual á unión de $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$ e $\partial_P P_{r,R}$.

Vexamos en primeiro lugar que N non ten puntos fixos en $\partial_P P_R$. Temos que

$$\partial_P P_R = \partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{R_2}) = [\partial_{P_1}(P_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{R_2}] \cup [(\bar{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{R_2}] = A \cup B \cup C \cup D,$$

onde (ver Figura 3.2),

$$A = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| = R_1 \text{ e } \|x_2\| < r_2\},$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| < r_1 \text{ e } \|x_2\| = R_2\},$$

$$C = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| = R_1 \text{ e } r_2 \leq \|x_2\| \leq R_2\},$$

$$D = \{(x_1, x_2) \in P : r_1 \leq \|x_1\| < R_1 \text{ e } \|x_2\| = R_2\}.$$

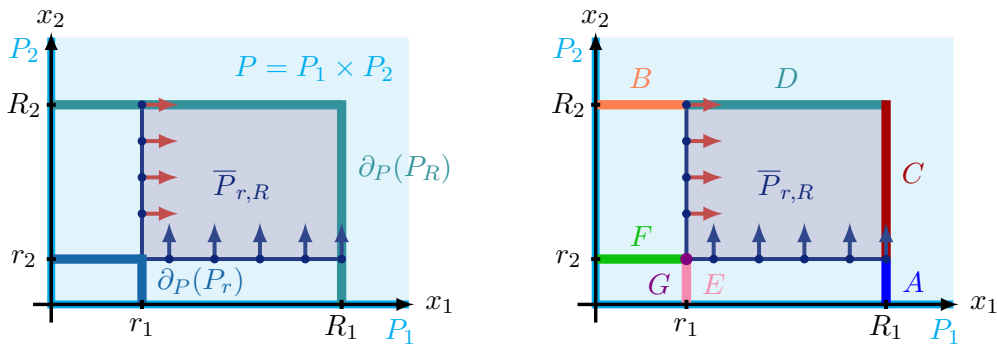


Figura 3.2: Visualización da condición (3.14) imposta sobre o operador T e os conxuntos de interese para o caso no que $X = \mathbb{R}^2$, e $P_1 = P_2 = \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$.

Os conxuntos C e D forman parte de $\partial_P P_{r,R}$, onde T está definido, non ten puntos fixos e coincide con N . Logo N non ten puntos fixos nin en C nin tampouco en D . Vexamos agora que N non ten puntos fixos en A . En efecto, se existise $(x'_1, x'_2) \in A$ punto fixo de N , daquela

$N(x'_1, x'_2) = T(x'_1, \rho_2(x'_2)) = (x'_1, x'_2)$ e así

$$T_1(x'_1, \rho_2(x'_2)) = x'_1 \text{ e } T_2(x'_1, \rho_2(x'_2)) = x'_2.$$

Tomando normas chegaríamos a que $\|T_2(x'_1, \rho_2(x'_2))\| = \|x'_2\|$, pero $\|x'_2\| < r_2$ pois $(x'_1, x'_2) \in A$ e $\|\rho_2(x'_2)\| = r_2$ pola definición de ρ_2 . Pero isto é unha contradición con (3.14) para $k = 2$.

Analogamente, se N tivese un punto fixo $(x'_1, x'_2) \in B$, entón $N(x'_1, x'_2) = T(\rho_1(x'_1), x'_2) = (x'_1, x'_2)$ e de aquí deduciríamos que $\|T_1(\rho_1(x'_1), x'_2)\| = \|x'_1\| < r_1$ con $\|\rho_1(x'_1)\| = r_1$ obtendo novamente unha contradición con (3.14) pero agora para $k = 1$. Conclúese así que N non ten puntos fixos en $\partial_P P_R$.

Agora vexamos que N non ten puntos fixos en $\partial_P P_r$. É claro que

$$\partial_P P_r = \partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2}) = [\partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\overline{P_2})_{r_2}] \cup [(\overline{P_1})_{r_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}] = E \cup F \cup G,$$

onde,

$$E = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| = r_1 \text{ e } \|x_2\| < r_2\},$$

$$F = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| < r_1 \text{ e } \|x_2\| = r_2\},$$

$$G = \{(x_1, x_2) \in P : \|x_1\| = r_1 \text{ e } \|x_2\| = r_2\}.$$

O conxunto G forma parte de $\partial_P P_{r,R}$ e en consecuencia N non ten puntos fixos nel por non telos T . Tampouco hai puntos fixos de N en E pois se así fose teríamos un punto $(x'_1, x'_2) \in E$ de xeito que $N(x'_1, x'_2) = T(x'_1, \rho_2(x'_2)) = (x'_1, x'_2)$ e tomando normas chegaríamos a que $\|T_2(x'_1, \rho_2(x'_2))\| = \|x'_2\| < r_2$ pois $(x'_1, x'_2) \in E$ con $\|\rho_2(x'_2)\| = r_2$ contradicindo (3.14) para $k = 2$.

Do mesmo xeito, se existise $(x'_1, x'_2) \in F$ punto fixo de N chegaríamos a que $\|T_1(\rho_1(x'_1), x'_2)\| = \|x'_1\| < r_1$ con $\|\rho_1(x'_1)\| = r_1$ tendo novamente unha contradición con (3.14) para $k = 1$. Conclúese tamén que N non ten puntos fixos en $\partial_P P_r$. \square

A proposición anterior permítenos probar a versión vectorial normada na súa forma máis débil, calculando o índice de punto fixo baixo condicións compresivas nas dúas compoñentes.

Teorema 3.15. *Supoñamos que $T : (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que en $\overline{P}_{r,R}$ se atopa nalgunha das seguintes situacións (ver Figura 3.4):*

(a) **Versión Compresión-compresión**

(i) $\|T_1 x\| \geq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1 x\| \leq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;

(ii) $\|T_2 x\| \geq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2 x\| \leq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,

(b) *Versión Expansión-compresión*(i) $\|T_1x\| \leq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| \geq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;(ii) $\|T_2x\| \geq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| \leq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,(c) *Versión Compresión-expansión*(i) $\|T_1x\| \geq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| \leq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;(ii) $\|T_2x\| \leq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| \geq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,(d) *Versión Expansión-expansión*(i) $\|T_1x\| \leq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| \geq \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;(ii) $\|T_2x\| \leq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| \geq \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$.

Entón, o operador T ten polo menos un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\overline{P}_{r,R}$, isto é, tal que $r_k \leq \|\tilde{x}_k\| \leq R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

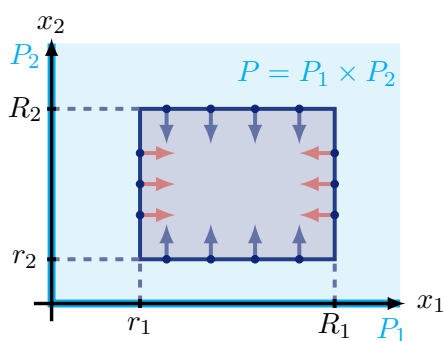
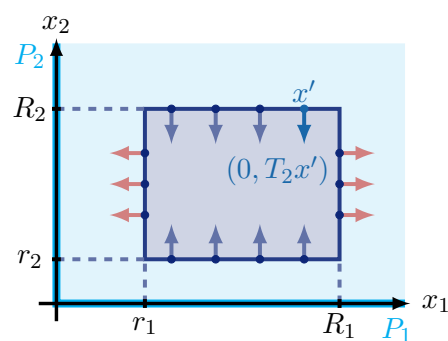
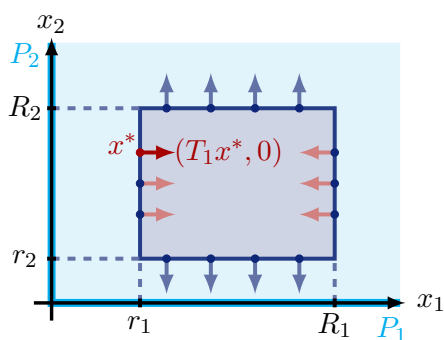
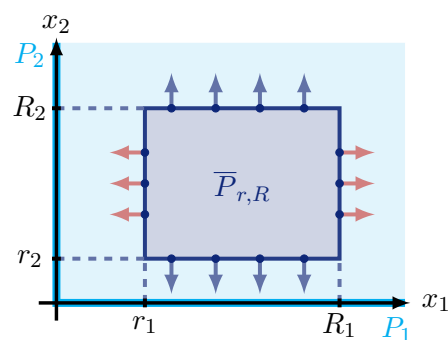
(a) *Versión Compresión-compresión*(b) *Versión Expansión-compresión*(c) *Versión Compresión-expansión*(d) *Versión Expansión-expansión*

Figura 3.3: Visualización das condicións impostas sobre o operador T no Teorema 3.15 en cada caso para $X = \mathbb{R}^2$ e $P_1 = P_2 = \mathbb{R}^+$.

Demostración. (a) Vexamos esta primeira versión utilizando a teoría do índice. As condicións impostas sobre T na fronteira do seu dominio non impiden que este poida ter puntos fixos na mesma. Supoñamos que non os ten, entón pola Proposición 3.14, sabemos que a extensión N de T a \overline{P}_R non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$. Ademais, satisfanse en \overline{P}_R as seguintes propiedades

$$(a^*) \|N_k x\| \geq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = r_k \text{ para cada } k \in \{1, 2\},$$

$$(b^*) \|N_k x\| \leq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = R_k \text{ para cada } k \in \{1, 2\}.$$

En efecto, vexámolo para (a^*) con $k = 1$ (o resto de casos son análogos). Sexa $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \overline{P}_R$ tal que $\|\bar{x}_1\| = r_1$. Polas definicións de N e de ρ temos que

$$N_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = T_1(\rho_1(\bar{x}_1), \rho_2(\bar{x}_2)) = T_1(\bar{x}_1, \rho_2(\bar{x}_2)).$$

Ademais, $(\bar{x}_1, \rho_2(\bar{x}_2)) \in \overline{P}_{r, R}$ e $\|\bar{x}_1\| = r_1$ e así, da condición (a)-(i) chegamos a que

$$\|N_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| = \|T_1(\rho_1(\bar{x}_1), \rho_2(\bar{x}_2))\| \geq \|\bar{x}_1\|.$$

Por outro lado, a condición (b^*) implica que para cada $k \in \{1, 2\}$ se ten

$$(b^{**}) N_k x \neq \mu x_k \text{ para cada } \|x_k\| = R_k, x_j \in (\overline{P}_j)_{R_j} (k \neq j) \text{ e } \mu > 1.$$

En efecto, se isto non fose así, existirían $x'_j \in (\overline{P}_j)_{R_j}$, $x'_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$ ($\|x'_k\| = R_k$) e $\mu_0 > 1$ de xeito que $N_k x' = \mu_0 x'_k$ e así

$$\|N_k x'\| = \|\mu_0 x'_k\| = \mu_0 \|x'_k\| > R_k,$$

o cal é unha contradición con (b^*) . A condición (b^{**}) xunto co feito de que N non ten puntos fixos en $\partial_P P_R$ fai que poidamos botar man do Lema 1.19 tendo que

$$i(N, P_R, P) = 1.$$

Por outra parte, a condición (a^*) implica que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai

$$(a^{**}) N_k x \neq \mu x_k \text{ para cada } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}, x_j \in (\overline{P}_j)_{R_j} (j \neq k) \text{ e } \mu \in (0, 1).$$

Pois, do contrario, existirían $x'_j \in (\overline{P}_j)_{R_j}$ ($\|x'_j\| \leq R_j$) e $x'_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$ ($\|x'_k\| = r_k$) e $\mu_0 \in (0, 1)$ tales que $N_k x' = \mu_0 x'_k$ e así,

$$\|N_k x'\| = \|\mu_0 x'_k\| = \mu_0 \|x'_k\| < r_k,$$

que é unha contradición con (a^*) . Ademais, esta condición (a^{**}) implica á súa vez a seguinte para cada $k \in \{1, 2\}$,

(a^{***}) $x_k - N_k x \neq \mu N_k x$, para cada $x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$, $x_j \in (\overline{P}_j)_{R_j}$ ($k \neq j$) e $\mu > 0$,

pois en caso contrario teriamos $x'_j \in (\overline{P}_j)_{R_j}$, $x'_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$ e $\mu_0 > 0$ cumprindo que $x'_k - N_k x' = \mu_0 N_k x'$ e así $N_k x' = (1 + \mu_0)^{-1} x_k$ con $(1 + \mu_0)^{-1} \in (0, 1)$ e isto contradí (a^{**}).

Por outra parte, da condición (a^*) tense que

$$\inf_{\partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}} \|N_1 x\| \geq r_1 \quad \text{e} \quad \inf_{(\overline{P}_1)_{R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}} \|N_2 x\| \geq r_2. \quad (3.16)$$

Isto último, xunto coas condicións (a^{***}) e (b^{**}) fan que o operador N se atope nas hipóteses do Corolario 3.9 nos conxuntos $(\overline{P}_1)_{R_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}$ e $(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}$ tomando $S = N_2$ no primeiro caso e $S = N_1$ no segundo e tendo en conta que o operador non ten puntos fixos nas fronteiras destes conxuntos. Temos así

$$i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 0.$$

Ademais, da condición (a^{***}) é directo que, para cada $k \in \{1, 2\}$, temos que

$$x_k - N_k x \neq \mu N_k x, \text{ para cada } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}, x_j \in (\overline{P}_j)_{r_j} \text{ (} k \neq j \text{) e } \mu > 0,$$

e ademais, das desigualdades dadas por (3.16)

$$\inf_{(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2}} \|N_1 x\| \geq r_1 \quad \text{e} \quad \inf_{(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2}} \|N_2 x\| \geq r_2,$$

e de aquí, o operador N atópase nas hipóteses do Corolario 1.22 no conxunto \overline{P}_r , con $S := N$, polo que

$$i(N, P_r, P) = 0.$$

Agora, unha vez máis, botando man da propiedade de aditividade para o índice de punto fixo obtemos

$$i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = i(N, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}) - i(N, P_r, P) = 0,$$

e de aquí (ver Figura 3.4)

$$i(N, P_{r, R}, P) = i(N, P_R, P) - i(N, (P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) - i(N, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 1.$$

Como $T(x) = N(x)$ no conxunto $\overline{P}_{r, R}$, entón $i(T, P_{r, R}, P) = i(N, P_{r, R}, P) = 1$ e a propiedade de punto fixo para o índice dinos que T ten, polo menos, un punto fixo en $P_{r, R}$. Chegamos así a que T ten, polo menos, un punto fixo en $\overline{P}_{r, R}$ pois supoñendo que non existían tales puntos na fronteira deste conxunto, chegamos a que necesariamente hai, polo menos un, no interior.

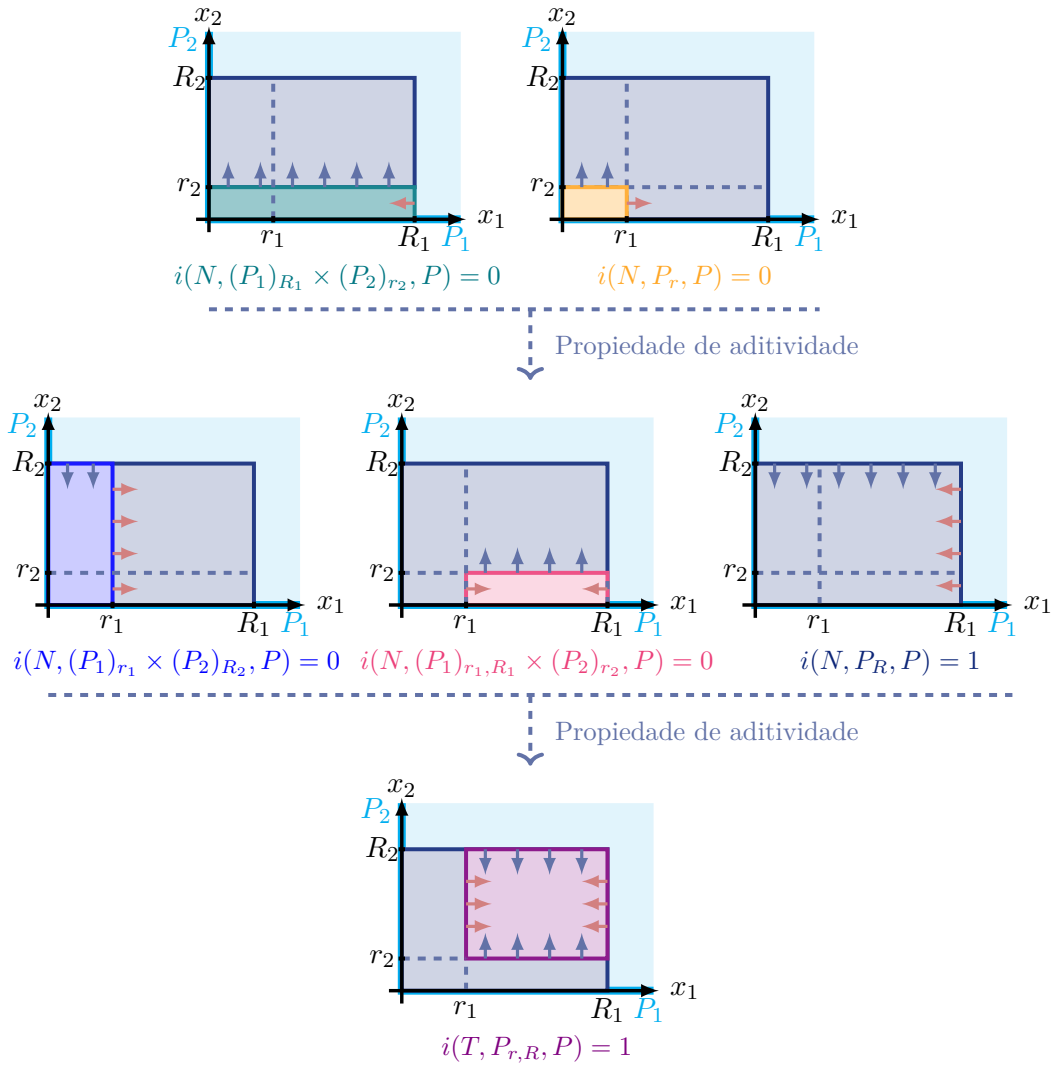


Figura 3.4: Visualización do valor dos índices calculados na proba do Teorema 3.15 (a) nos distintos conxuntos no caso particular no que $X = \mathbb{R}^2$ e $P_1 = P_2 = \mathbb{R}^+$.

(b) Facemos notar que, agora, non podemos botar man da Proposición 3.14. É dicir, que a extensión de T a \bar{P}_R podería ter puntos fixos nas fronteiras dos conxuntos nos que interesa computar o grao. O que faremos agora é transformar o operador $T = (T_1, T_2)$ noutro auxiliar, baseándonos nas ideas presentes en [37, 38], que se atopa na versión compresiva nas dúas compoñentes.

Definimos $T_1^b : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P_1$ dado por

$$T_1^b x = \left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right)^{-1} T_1 \left(\left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) x_1, x_2 \right).$$

Este está ben definido, pois se $x_1 \in (\bar{P}_1)_{r_1, R_1}$, entón

$$\left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) x_1 \in (\bar{P}_1)_{r_1, R_1},$$

xa que para $r_1 \leq \|x_1\| \leq R_1$ tense que

$$\left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) \in \left[\frac{r_1}{R_1}, \frac{R_1}{r_1} \right].$$

Ademais, se $\|x_1\| = r_1$ entón

$$\left\| \left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) x_1 \right\| = R_1$$

e se $\|x_1\| = R_1$, entón

$$\left\| \left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) x_1 \right\| = r_1.$$

Deste xeito, o operador auxiliar $T^b = (T_1^b, T_2)$ está nas condicións do apartado (a) e xa que logo T^b ten un punto fixo en $\bar{P}_{r,R}$. Se (v_1, v_2) é tal punto, entón $(u_1, u_2) \in \bar{P}_{r,R}$ dado por

$$u_1 = \left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = v_2,$$

é punto fixo de T .

(c) Nesta situación definimos o operador auxiliar $T^c = (T_1, T_2^c)$ onde $T_2^c : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P_2$ vén dado por

$$T_2^c x = \left(\frac{R_2}{\|x_2\|} + \frac{r_2}{\|x_2\|} - 1 \right)^{-1} T_2 \left(x_1, \left(\frac{R_2}{\|x_2\|} + \frac{r_2}{\|x_2\|} - 1 \right) x_2 \right).$$

Facendo os mesmos razoamentos temos que este operador está ben definido e atópase na situación compresiva para as dúas compoñentes, logo ten algún punto fixo. Novamente, se $(v_1, v_2) \in \bar{P}_{r,R}$ é este punto, entón o punto $(u_1, u_2) \in \bar{P}_{r,R}$ dado por

$$u_1 = v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = \left(\frac{R_2}{\|x_2\|} + \frac{r_2}{\|x_2\|} - 1 \right) v_2,$$

é punto fixo de T .

(d) De forma análoga, defínese o operador auxiliar $T^d = (T_1^b, T_2^c)$. Se $(v_1, v_2) \in \bar{P}_{r,R}$ é punto fixo de T^d , que sabemos que existe, entón o punto $(u_1, u_2) \in \bar{P}_{r,R}$ dado por

$$u_1 = \left(\frac{R_1}{\|x_1\|} + \frac{r_1}{\|x_1\|} - 1 \right) v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = \left(\frac{R_2}{\|x_2\|} + \frac{r_2}{\|x_2\|} - 1 \right) v_2,$$

é punto fixo de T . □

Observación 3.16. Observamos que neste Teorema 3.15 obtemos a existencia de punto fixo en cada versión, pero só calculamos o índice do operador no caso no que se pide compresión nas dúas compoñentes.

Se fortalecemos as condicións substituíndo as desigualdades non estritas por desigualdades estritas, é posible obter o valor do índice do operador en todas as situacións compresivo-expansivas. Enúnciase a continuación o resultado correspondente, cuxas hipóteses son máis fortes que as do Teorema 3.12.

Corolario 3.17. *Sexa $T : (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \longrightarrow P$ un operador compacto.*

Por un lado, se en $\overline{P}_{r,R}$ o operador T se atopa nalgunha das seguintes situacións

(a) Versión Compresión-compresión

- (i) $\|T_1x\| > \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| < \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;
- (ii) $\|T_2x\| > \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| < \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,

(b) Versión Expansión-expansión

- (i) $\|T_1x\| < \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| > \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;
- (ii) $\|T_2x\| < \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| > \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,

entón $i(T, P_{r,R}, P) = 1$.

Por outro lado, se en $\overline{P}_{r,R}$ o operador T se atopa nalgunha das seguintes situacións

(c) Versión Expansión-compresión

- (i) $\|T_1x\| < \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| > \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;
- (ii) $\|T_2x\| > \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| < \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,

(d) Versión Compresión-expansión

- (i) $\|T_1x\| > \|x_1\|$, se $\|x_1\| = r_1$ e $\|T_1x\| < \|x_1\|$, se $\|x_1\| = R_1$;
- (ii) $\|T_2x\| < \|x_2\|$, se $\|x_2\| = r_2$ e $\|T_2x\| > \|x_2\|$, se $\|x_2\| = R_2$,

entón $i(T, P_{r,R}, P) = -1$.

Demostración. Supoñamos que nos atopamos na situación (c). A proba para o resto de casos é análoga. Imos ver que nos atopamos nas condicións do Teorema 3.12 satisfacéndose (a^\heartsuit) para $k = 2$ e (b^\heartsuit) para $k = 1$. En efecto, o operador T satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ as seguintes propiedades

$$(a^\star) \|T_1x\| < \|x_1\|, \text{ se } \|x_1\| = r_1, \quad (b^\star) \|T_2x\| < \|x_2\|, \text{ se } \|x_2\| = R_2,$$

que son máis fortes que as seguintes

$$(a^{\star\star}) T_1x \neq \mu x_1 \text{ se } \|x_1\| = r_1 \text{ e } \mu \geq 1, \quad (b^{\star\star}) T_2x \neq \mu x_2 \text{ se } \|x_2\| = R_2 \text{ e } \mu \geq 1.$$

O razoamento é análogo ao que se facía na proba do Teorema 3.15, lixeiramente modificado (a diferenza reside en que agora μ pode acadar a igualdade). En efecto, se (a^{**}) non fose certa, existirían $x'_2 \in (\bar{P}_2)_{R_2}$, $x'_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1}$ e $\mu_0 \geq 1$ de xeito que $T_1 x' = \mu_0 x'_1$ e así temos a contradición

$$\|T_1 x'\| = \|\mu_0 x'_1\| = \mu_0 \|x'_1\| \geq r_1.$$

Por outra parte, as condicións

$$(c^*) \|T_1 x\| > \|x_1\|, \text{ se } \|x_1\| = R_1, \quad (d^*) \|T_2 x\| > \|x_2\|, \text{ se } \|x_2\| = r_2,$$

que sabemos que T satisfai en $\bar{P}_{r,R}$, implican as seguintes

$$(c^{**}) x_1 - T_1 x \neq \mu T_1 x, \text{ se } \|x_1\| = R_1 \text{ e } \mu \geq 0, \quad (d^{**}) x_2 - T_2 x \neq \mu T_2 x, \text{ se } \|x_2\| = r_2 \text{ e } \mu \geq 0.$$

Esta implicación séguese directamente da proba do Teorema 3.15 tendo en conta novamente a liberdade que ten agora μ de acadar a igualdade.

Ademais, de (c^*) e (d^*) , é claro que

$$\inf_{x \in \partial_{P_1}(P_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}} \|T_1 x\| \geq R_1 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in (\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}} \|T_2 x\| \geq r_2.$$

Temos así, chegados a este punto, que o operador T satisfai en $\bar{P}_{r,R}$ as condicións do Teorema 3.12 que buscabamos con $S_1^* := T_1|_{\partial_{P_1}(P_1)_{R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}}$ e $S_2 := T_2|_{(\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}}$ que buscabamos, o cal conclúe a proba. \square

3.1.2 Versión homotópica do teorema de Krasnoselskii

Xa se coñece unha versión vectorial homotópica do teorema de Krasnoselskii probada botando man da teoría do índice. Imos ver aquí que tal resultado se pode ver tamén como unha consecuencia do Teorema 3.12. O resultado é o seguinte.

Teorema 3.18. [40, Theorem 2.8] *Sexa $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ un operador compacto de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ existe $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ tal que se satisfai algunha das seguintes condicións en $\bar{P}_{r,R}$*

$$(a) \quad T_k x + \mu h_k \neq x_k \text{ se } \|x_k\| = r_k \text{ e } \mu \geq 0, \text{ e } T_k x \neq \lambda x_k \text{ se } \|x_k\| = R_k \text{ e } \lambda \geq 1;$$

$$(b) \quad T_k x \neq \lambda x_k \text{ se } \|x_k\| = r_k \text{ e } \lambda \geq 1, \text{ e } T_k x + \mu h_k \neq x_k \text{ se } \|x_k\| = R_k \text{ e } \mu \geq 0.$$

Entón

$$i(T, P_{r,R}, P) = (-1)^s,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é o número de compoñentes de T que satisfán a condición (a).

Demostración. Imos ver que este resultado é máis forte que o Teorema 3.12. Isto é, a versión homotópica xa coñecida é un caso particular dese novo resultado. Ímolo ver para a situación na que se pide (a) nas dúas compoñentes.

Da propia hipótese xa temos directamente que o operador T satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ a seguinte condición para cada $k \in \{1, 2\}$

$$(a^*) T_k x \neq \lambda x_k \text{ se } \|x_k\| = R_k \text{ e } \lambda \geq 1.$$

Por outra parte, definindo os operadores $S_1 : D_1 = \partial_{P_1}(P_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2, R_2} \longrightarrow P_1$ e $S_2 : D_2 = (\overline{P}_1)_{r_1, R_1} \times \partial_{P_2}(P_2)_{r_2} \longrightarrow P_2$ dados por $S_1 x := h_1$ e $S_2 x := h_2$, é claro que o operador T satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ a seguinte condición para cada $k \in \{1, 2\}$

$$(b^*) (i) \inf_{x \in D_k} \|S_k x\| > 0;$$

$$(ii) x_k - T_k x \neq \mu S_k x \text{ para } \|x_k\| = r_k \text{ (} x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k} \text{), e } \mu \geq 0.$$

Temos pois que T satisfai a condición (a^\heartsuit) do Teorema 3.12 para cada $k \in \{1, 2\}$. Así,

$$i(T, P_{r,R}, P) = 1,$$

e isto conclúe a proba. □

Corolario 3.19. *Nas condicións do resultado anterior o operador T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $P_{r,R}$. Isto é, tal que $r_k < \|\tilde{x}_k\| < R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.*

Observación 3.20. No Teorema 3.18 catro situacións son posibles, do mesmo xeito que no Teorema 3.15, onde se detallaban cada unha delas independentemente. Aquí, a condición (a) correspóndese coa versión compresiva do Teorema de Krasnoselskii-Benjamin sobre a compoñente k -ésima, mentres que a condición (b) é a correspondente versión expansiva. Así se, por exemplo, estamos na situación na que se satisfai (a) para as dúas compoñentes do operador, atopariámonos ante a *Versión Compresión-compresión* deste resultado.

O que faremos agora será tratar de atopar unha proba deste resultado coas hipóteses debilitadas ás do Teorema 2.4 para o caso da versión compresión-compresión, do mesmo xeito que faciamos coa versión normada do Teorema 3.15. Neste sentido, buscamos construír unha retracción axeitada. O seguinte lema é un primeiro paso nesta dirección.

Lema 3.21. *Sexan $r \in \mathbb{R}_+$, P un cono sólido nun espazo normado X onde a norma preserva a relación de orde $\prec\prec_P$ sobre os elementos de P e $h \in \mathring{P}$. Entón, para cada $x \in \overline{P}_r$ fixado, existe $t_x \in [0, \infty)$ de xeito que $\|x + t_x h\| = r$. Ademais, a aplicación*

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_h^r : \overline{P}_r &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longrightarrow \mathfrak{t}_h^r(x) = t_x \end{aligned} \tag{3.17}$$

está ben definida e é continua.

Demostración. Fixado $x \in \overline{P}_r$, definamos a aplicación

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f(t) = \|x + th\|. \end{aligned}$$

Esta aplicación é continua, por ser a norma dunha expresión lineal e limitada no espazo normado. Supoñamos que $x \in P_r$, entón $f(0) = \|x\| < r$ e ademais

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty,$$

de onde tomando $M \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande tal que $M > r$, existe $m \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(t) > M$ para cada $t > m$ (podemos supoñer que $f(m) = M$).

Deste xeito, e como f é crecente por conservar a norma a relación de orde, temos que $f|_{[0, m]} = [\|x\|, M]$ polo que $r \in (\|x\|, M)$ e posto que f é continua sabemos que existe $t_x \in (0, m)$ de xeito que $f(t_x) = r$. Se $x \in \partial_P(P_r)$, tomando $t_x = 0$ temos o que queremos. Temos pois vista a existencia.

Vexamos agora que este elemento t_x é o único que satisfai que a súa imaxe por f é r . Primeiro vexámolo para o caso no que $x \in P_r$. Supoñamos que existe $t'_x \in \mathbb{R}_+$ distinto tal que $\|x + t'_x h\| = r = \|x + t_x h\|$. Supoñamos sen perda de xeralidade que $t'_x < t_x$, entón existe $a \in (1, \infty)$ de forma que $t_x = at'_x$. Temos

$$\|x + at'_x h\| = \|x + t'_x h\|,$$

pero isto é unha contradición pois

$$(x + at'_x h) - (x + t'_x h) = (a - 1)t'_x h \in \mathring{P},$$

de onde se ten que $x + t'_x h \prec\prec_P x + t_x h$ e como $\|\cdot\|$ preserva esta relación de orde sobre elementos do cono, necesariamente tería que $\|x + t'_x h\| < \|x + t_x h\|$. Temos pois que $t'_x = t_x$, e xa que logo, a unicidade buscada.

Para o caso no que $x \in \partial_P P_r$ supoñamos que existe $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|x + th\| = \|x\| = r$, entón, como anteriormente, temos unha contradición pois $(x + th) - x = th \in \mathring{P}$ e así $x \prec\prec_P x + th$. Como estamos supoñendo que a norma preserva a relación de orde tería necesariamente que $\|x\| < \|x + th\|$ atopando unha contradición. Podemos concluír pois que \mathbf{t}_h^r está ben definida.

Agora vexamos que a aplicación \mathbf{t}_h^r é secuencialmente continua, e xa que logo continua. Sexa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{P}_r$ unha sucesión converxente a $\tilde{x} \in \overline{P}_r$ e vexamos que a sucesión $\{\mathbf{t}_h^r(x_n) = t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é converxente a $\mathbf{t}_h^r(\tilde{x}) = t_{\tilde{x}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|x_n + t_{x_n} h\| = r, \tag{3.18}$$

de onde se deduce directamente que a sucesión $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada en \mathbb{R} ao selo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debido á súa converxencia. En efecto, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ademais,

$$r = \|x_n + t_{x_n}h\| \geq t_{x_n}\|h\| - \|x_n\|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

polo que

$$t_{x_n} \leq \frac{r + \|x_n\|}{\|h\|} \leq \frac{r + M}{\|h\|}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Destá maneira, a sucesión $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ posúe, polo menos, unha subsucesión converxente. Sexa $\{t_{x_{n_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ unha subsucesión converxente de $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e sexa $t_{\tilde{x}_k}$ o seu límite. Tomando límites en (3.18) e posto que a norma é continua temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} + t_{x_{n_k}}h\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} + t_{x_{n_k}}h\| = \|\tilde{x} + t_{\tilde{x}_k}h\| = r,$$

de onde, por unicidade $t_{\tilde{x}_k} = t_{\tilde{x}}$.

Acabamos pois de ver que toda subsucesión converxente de $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ten o mesmo límite $t_{\tilde{x}}$. Neste caso, a sucesión $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é necesariamente converxente e o seu límite $t_{\tilde{x}}$. En efecto, se $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ fose non converxente a $t_{\tilde{x}}$, entón existiría un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ de tal xeito que para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $N_n \in \mathbb{N}$, $N_n > n$, tal que $|t_{x_{N_n}} - t_{\tilde{x}}| > \varepsilon$. Deste xeito, atoparíamos unha subsucesión $\{t_{x_{N_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Esta subsucesión é limitada por selo a sucesión de partida e xa que logo necesariamente ten alguna subsucesión converxente, pero o feito de que $|t_{x_{N_n}} - t_{\tilde{x}}| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ impediría que tal subsucesión (que tamén é unha subsucesión da sucesión orixinal) converxese a $t_{\tilde{x}}$. Temos pois que a sucesión $\{t_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é converxente e o seu límite $t_{\tilde{x}}$, como queríamos. \square

En virtude do lema anterior, cando P é un cono sólido, a norma do espazo preserva a relación de orde \prec_P sobre os elementos de P e $h \in \mathring{P}$, a aplicación $\psi_k : (\overline{P}_k)_{R_k} \rightarrow (\overline{P}_k)_{r_k, R_k}$ para cada $k \in \{1, 2\}$, dada por

$$\psi_k(x_k) = \begin{cases} x_k + t_h^r(x_k)h_k, & \text{se } x_k \in (P_k)_{r_k}, \\ x_k, & \text{se } x_k \in (\overline{P}_k)_{r_k, R_k}, \end{cases} \quad (3.19)$$

é unha retracción de $(\overline{P}_k)_{R_k}$ en $(\overline{P}_k)_{r_k, R_k}$.

Vemos a continuación como esta retracción nos permite estender o operador sen puntos fixos nas rexións de interese baixo as hipóteses de compresión correspondentes á versión homotópica.

Proposición 3.22. *Sexa para cada $k \in \{1, 2\}$, P_k un cono sólido no espazo normado X_k onde a norma $\|\cdot\|_k$ preserva a relación de orde \prec_{P_k} sobre os elementos de P_k . Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r, R} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que para cada $k \in \{1, 2\}$ existe $h_k \in \mathring{P}_k$ de xeito que se satisfai en $\overline{P}_{r, R}$ a seguinte condición*

$$x_k - T_k x \neq \mu h_k \text{ se } \|x_k\| = r_k \text{ e } \mu > 0. \quad (3.20)$$

Se T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R} = \partial_P((P_1)_{r_1,R_1} \times (P_2)_{r_2,R_2})$, entón a extensión de T , $\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2) : \bar{P}_R \rightarrow P$ da forma

$$\tilde{N}(x) := T \circ \psi(x),$$

onde $\psi : \bar{P}_R \rightarrow \bar{P}_{r,R}$ é a retracción dada por $\psi(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2))$ con ψ_k definida por (3.19) elixindo para ψ_k o vector no interior do cono $h_k \in \mathring{P}_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$, non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1,R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2,R_2})$.

Demostración. Procedemos como na Proposición 3.14. Para ver que \tilde{N} non ten puntos fixos nos conxuntos desexados, é suficiente con velo sobre A , B , E e F (ver Figura 3.2). Vexámolo para A e E , pois para B e F os razoamentos son análogos sobre a outra compoñente do operador.

Se \tilde{N} tivese un punto fixo $(x'_1, x'_2) \in A \cup E$, tería que $T_2(x'_1, \psi_2(x'_2)) = x'_2 = \psi_2(x'_2) - t_{x'_2} h_2$, logo $\psi_2(x'_2) - T_2(x'_1, \psi_2(x'_2)) = t_{x'_2} h_2$ con $t_{x'_2} > 0$ ($\|x'_2\| < r_2$) e teriamos que $\|\psi_2(x'_2)\| = r_2$ o cal é unha contradición coa hipótese (3.20) para $k = 2$. \square

Tendo en conta o que acabamos de ver e seguindo tanto a idea da proba da *Versión Compresión-compresión* do Teorema 3.15, como a do Teorema 3.18, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.23. *Supoñamos que P_k é un cono sólido, para cada $k \in \{1, 2\}$, no espazo normado X_k onde a norma $\|\cdot\|_k$ preserva a relación de orde \prec_{P_k} sobre os elementos de P_k .*

Se $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador compacto sen puntos fixos sobre $\partial_P(P_{r,R})$ tal que para cada $k \in \{1, 2\}$ existe $h_k \in \mathring{P}_k$ de xeito que se satisfai en $\bar{P}_{r,R}$ a seguinte condición

$$x_k - T_k x \neq \mu h_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k, \mu > 0 \text{ e } T_k x \neq \lambda x_k, \text{ se } \|x_k\| = R_k, \lambda > 1.$$

Entón $i(T, P_{r,R}, P) = 1$.

Corolario 3.24. *No contexto do resultado anterior, supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ é un operador tal que para cada $k \in \{1, 2\}$ existe $h_k \in \mathring{P}_k$ de xeito que se satisfai en $\bar{P}_{r,R}$ algunha das seguintes condicións*

(a) $x_k - T_k x \neq \mu h_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\mu > 0$, e $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\lambda > 1$;

(b) $T_k x \neq \lambda x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ e $\lambda > 1$, e $x_k - T_k x \neq \mu h_k$ se $\|x_k\| = R_k$ e $\mu > 0$.

Entón T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\bar{P}_{r,R}$, isto é, tal que $r_k \leq \|\tilde{x}_k\| \leq R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Observación 3.25. Facemos notar que o mesmo resultado nun contexto máis xeral, no que non pedimos que os conos sexan sólidos e a norma preserve a relación de orde, foi establecido en [37]. A principal novidade aquí reside en que facemos a proba a través do cálculo do índice de punto fixo para a *Versión Compresión-compresión* do resultado. As hipóteses adicionais foron engadidas para poder probar a boa definición da retracción que nos permite estender o operador a \overline{P}_R sen puntos fixos nas fronteiras dos conxuntos nos que precisamos coñecer o índice.

É importante destacar que este contexto, en principio máis restritivo en abstracto, non o é en realidade para o caso das aplicacións ás ecuacións diferenciais. En múltiples ocasións, para a procura de resultados de existencia, trabállase con operadores en conos sólidos nun espazo normado cuxa norma se comporta ben coa relación de orde correspondente. Por exemplo, en [19, 21] trabállase con operadores en conos no espazo das funcións continuas da forma dada no Exemplo 1.9, e vimos con anterioridade que estes conos satisfán estas propiedades.

Observación 3.26. No Lema 3.21 pediamos que

- (†) P fose un cono sólido que preserve a relación de orde \prec_{\prec_P} sobre os elementos de P e $h \in \overset{\circ}{P}$,

e con estas hipóteses asegurabamos a boa definición da aplicación \mathbf{t}_h^r .

Seguindo a proba deste lema, é fácil observar que, substituindo (†) por

- (††) O cono P preserve a relación de orde \prec_P sobre os elementos de P e tomando $h \in P \setminus \{0\}$,
ou,

- (†††) Fixado $h \in P \setminus \{0\}$ satisfáise

se $x, y \in P$ son tales que $y - x = \lambda h$ para algún $\lambda > 0$, entón $\|x\| < \|y\|$,

a aplicación \mathbf{t}_h^r segue a estar ben definida e ser continua. De feito, a condición (†††) é o mínimo que temos que pedir para que, seguindo a proba, a tese do lema se manteña. Neste sentido, é claro que, na Proposición 3.22, no Teorema 3.23 e no Corolario 3.24 tamén podemos substituír (†) por (††), ou por (†††), sen que a tese cambie.

Exemplo 3.27. (i) En \mathbb{R}^2 , o cono $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ satisfai calquera das situacións na observación anterior.

(ii) Os conos na forma do Exemplo 1.9 satisfán (†), como vimos, pero non (††). En efecto, consideremos

$$K^* = \left\{ u \in P^* : \min_{t \in [0, \frac{1}{2}]} u(t) \geq \frac{1}{2} \|u\|_\infty \right\},$$

onde $P^* = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : u(t) \geq 0 \text{ para cada } t \in [0, 1]\}$. As funcións $x(t) = 3$ e $y(t) = 2 + t$ para cada $t \in [0, 1]$, que están claramente en K^* , satisfán $x - y \in K^* \setminus \{0\}$. Isto é $y \prec_{K^*} x$, pero $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 3$.

(iii) Un cono no espazo das funcións continuas $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ que si satisfai $(\dagger\dagger)$ é o seguinte

$$C^* = \{u \in P^* : u \text{ é decrecente}\}.$$

En efecto, se $0 \preceq_{C^*} x \prec_{C^*} y$, entón existe $h \in C^* \setminus \{0\}$ tal que $y - x = h$. Pola definición do cono C^* , $\|u\|_\infty = u(0)$ para cada $u \in C^*$ e así, $\|y\|_\infty = y(0) = x(0) + h(0) > x(0) = \|x\|_\infty$ xa que $h \neq 0$.

(iv) Consideremos o subespazo $Z = \{u \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$ de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ coa norma do supremo e o cono

$$P_Z^* = \{u \in Z : u(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1]\}.$$

Entón, calquera función $h \in Z$ tal que $h(t) > 0$ para todo $t \in (0, 1)$ satisfai $(\dagger \dagger \dagger)$.

3.1.3 Versión clásica do teorema de Krasnoselskii

Nesta subsección probamos a versión vectorial clásica do teorema de Krasnoselskii empregando o índice de punto fixo. Esta pode verse como unha consecuencia directa da versión vectorial do teorema de Krasnoselskii-Benjamin [40, Theorem 2.8] por seren as súas condicións máis fortes que as deste.

Enunciamos a continuación a versión vectorial clásica do teorema de Krasnoselskii.

Teorema 3.28. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \longrightarrow P$ un operador compacto de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións en $\overline{P}_{r,R}$*

(a) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$;

(b) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$.

Entón

$$i(T, P_{r,R}, P) = (-1)^s,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é o número de compoñentes de T que satisfán a condición (a).

Demostración. Vexamos que estas condicións son máis fortes que as da versión homotópica (Teorema 3.18) para o caso no que T satisfai (a) para $k = 1$ e (b) para $k = 2$. O operador T satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ as seguintes condicións

$$(a^*) T_1 x \not\prec_{P_1} x_1 \text{ se } \|x_1\| = R_1, \quad (b^*) T_2 x \not\prec_{P_2} x_2 \text{ se } \|x_2\| = r_2,$$

que á súa vez implican as seguintes

$$(a^{**}) T_1x \neq \lambda x_1 \text{ se } \|x_1\| = R_1 \text{ e } \lambda \geq 1, \quad (b^{**}) T_2x \neq \lambda x_2 \text{ se } \|x_2\| = r_2 \text{ e } \lambda \geq 1.$$

En efecto supoñamos que, por exemplo, non é certa (a^{**}) . Entón existirían $x' \in \overline{P}_{r,R}$ tal que $\|x'_1\| = R_1$ e $\lambda_0 \geq 1$ de xeito que $T_1x' = \lambda_0x'_1$ e así temos dúas opcións, ou ben $\lambda_0 = 1$ téndose $T_1x' = x'_1$, ou ben $\lambda_0 > 1$ polo que poderíamos escribir $T_1x' = (1 + \varepsilon')x'_1$ con $\varepsilon' > 0$ e en calquera dos dous casos chegaríamos a que $T_1x - x_1 \in P_1$, atopando unha contradición con (a^*) .

Por outra parte, as condicións

$$(c^*) T_1x \not\in_{P_1} x_1 \text{ se } \|x_1\| = r_1, \quad (d^*) T_2x \not\in_{P_2} x_2 \text{ se } \|x_2\| = R_2,$$

que sabemos que o operador T satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ implican, para $h_1 \in P_1 \setminus \{0\}$ e $h_2 \in P_2 \setminus \{0\}$ fixados, as seguintes

$$(c^{**}) x_1 - T_1x \neq \mu h_1, \text{ se } \|x_1\| = r_1 \text{ e } \mu \geq 0, \quad (d^{**}) x_2 - T_2x \neq \mu h_2, \text{ se } \|x_2\| = R_2 \text{ e } \mu \geq 0.$$

Vexamos a segunda, isto é (d^{**}) . Se esta non fose certa, entón existirían $x' \in \overline{P}_{r,R}$ con $\|x'_2\| = R_2$ e $\mu_0 \geq 0$ de xeito que $x'_2 - T_2x' = \mu_0h_2$ e posto que $\mu_0h_2 \in P_2$ teríamos novamente unha contradición, desta volta con (d^*) .

É directo que as condicións (a^{**}) e (c^{**}) consisten na condición (a) do Teorema 3.18 para $k = 1$ e que as condicións (b^{**}) e (d^{**}) se corresponden coa condición (b) dese mesmo resultado, para $k = 2$. Isto conclúe a proba. \square

Corolario 3.29. *Nas condicións do resultado anterior o operador T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $P_{r,R}$. Isto é, tal que $r_k < \|\tilde{x}_k\| < R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.*

Trataremos a continuación de atopar unha proba empregando o índice de punto fixo para a versión vectorial clásica coas condicións do Teorema 2.5, lixeiramente máis débiles que as do resultado anterior. Para iso introducimos unha nova retracción de \overline{P}_R en $\overline{P}_{r,R}$. Agora, para cada $k \in \{1, 2\}$ traballaremos con $\phi_k : (\overline{P}_k)_{R_k} \rightarrow (\overline{P}_k)_{r_k, R_k}$ dada por

$$\phi_k(x_k) = \begin{cases} r_k \frac{x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k}{\|x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k\|}, & \text{se } \|x_k\| < r_k, \\ x_k, & \text{se } r_k \leq \|x_k\| \leq R_k. \end{cases} \quad (3.21)$$

onde $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ está fixado.

Esta nova retracción permitiranos, como nos casos anteriores, estender o operador sen puntos fixos nos conxuntos de interese para poder computar o índice na *Versión Compresión-compresión* da versión clásica debilitada mencionada.

Proposición 3.30. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \longrightarrow P$ un operador compacto tal que en $\bar{P}_{r,R}$ se satisfai que*

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ para } \|x_k\| = r_k \text{ (} x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}\text{), para cada } k \in \{1, 2\}. \quad (3.22)$$

Se T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R} = \partial_P((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$, entón a extensión de T , $L = (L_1, L_2) : \bar{P}_R \longrightarrow P$ da forma

$$L(x) := T \circ \phi(x), \quad (3.23)$$

onde $\phi : \bar{P}_R \longrightarrow \bar{P}_{r,R}$ é a retracción dada por $\phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2))$ con ϕ_k definida por (3.21) elixindo $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ tal que $\|h_k\| = 1$ para cada $k \in \{1, 2\}$, non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$.

Demostración. Como xa sabemos, para ver que L non ten puntos fixos nos conxuntos requiridos, é suficiente con ver que non os ten nos conxuntos A , B , E e F na proba da Proposición 3.14. Facemos a proba en A e E .

Se L tivese un punto fixo $(x'_1, x'_2) \in A \cup E$, entón tería que $L(x'_1, x'_2) = T(x'_1, \phi_2(x'_2)) = (x'_1, x'_2)$ e en consecuencia $T_2(x'_1, \phi_2(x'_2)) = x'_2$ pero ademais temos que $x'_2 \prec_{P_2} \phi_2(x'_2)$ pois $\phi_2(x'_2) - x'_2 \in P_2 \setminus \{0\}$ como consecuencia de que

$$\phi_2(x'_2) - x'_2 = \left(\frac{r_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) h_2\|} - 1 \right) x'_2 + \frac{r_2 - \|x'_2\|}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) h_2\|} h_2,$$

onde o segundo sumando está en $P_2 \setminus \{0\}$, pois $h_2 \in P_2 \setminus \{0\}$ e $\frac{r_2 - \|x'_2\|}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) h_2\|} > 0$, e o primeiro sumando está en P_2 por terse que $x'_2 \in P_2$ e $\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) h_2\| \leq \|x'_2\| + (r_2 - \|x'_2\|) \|h_2\| = r_2$ de onde

$$\frac{r_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) h_2\|} - 1 \geq 0.$$

Que $\phi_2(x'_2) - x'_2 \in P_2 \setminus \{0\}$ é consecuencia de que a suma dun elemento en P_2 e outro en $P_2 \setminus \{0\}$ está necesariamente en $P_2 \setminus \{0\}$ pois se isto non ocorrese existirían $v \in P_2$ e $u \in P_2 \setminus \{0\}$ de xeito que $u + v = 0$ (a suma de elementos do cono ten que estar no cono) e de aquí chegaría a que $v = -u \in P_2$, pero como $u \in P_2$, entón tería que $u = 0$ o cal é unha contradición. Teño pois que $T_2(x'_1, \phi_2(x'_2)) \prec_{P_2} \phi_2(x'_2)$, pero $\|\phi_2(x'_2)\| = r_2$ de onde atopamos unha contradición con (3.22) para $k = 2$. \square

Observación 3.31. Observamos que a construción desta nova retracción non requiriu supoñer que os conos sexan sólidos, o que nos leva a que, aínda que as condicións no Teorema 3.28 sexan máis fortes que as condicións no Teorema 3.18, no que respecta ás súas formas débiles temos que a versión clásica aplica a un contexto máis xeral que a versión homotópica.

Probamos pois a forma débil do Teorema 3.28 na situación sinalada.

Teorema 3.32. *Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \longrightarrow P$ é un operador compacto que non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R}$ e tal que satisfai en $\overline{P}_{r,R}$ a seguinte condición para cada $k \in \{1, 2\}$,*

*$T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$) e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$ ($x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$),
entón $i(T, P_{r,R}, P) = 1$.*

Demostración. A idea da proba deste resultado é semellante á do Teorema 3.28. Procedendo analogamente, dedúcese que a extensión L de T a \overline{P}_R dada por (3.23) satisfai

- (a^{*}) $L_1 x \neq \lambda x_1$ se $\|x_1\| = R_1$, $x_2 \in (\overline{P}_2)_{R_2}$ e $\lambda > 1$,
- (b^{*}) $L_2 x \neq \lambda x_2$ se $\|x_2\| = R_2$, $x_1 \in (\overline{P}_1)_{R_1}$ e $\lambda > 1$,
- (c^{*}) $x_1 - L_1 x \neq \mu h_1$ se $\|x_1\| = r_1$, $x_2 \in (\overline{P}_2)_{R_2}$ e $\mu > 0$,
- (d^{*}) $x_2 - L_2 x \neq \mu h_2$ se $\|x_2\| = r_2$, $x_1 \in (\overline{P}_1)_{R_1}$ e $\mu > 0$.

Ademais, como T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R}$, a extensión L en virtude da Proposición 3.30, non ten puntos fixos en $\partial_P P_R$, $\partial_P P_r$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{R_2})$ nin en $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$. Así pois, o operador L está nas hipóteses do Lema 1.19 en \overline{P}_R , nas do Corolario 3.9 no conxunto $(\overline{P}_1)_{R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2}$ para $S := h_2$ e no conxunto $(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}$ coas condicións intercambiadas nas compoñentes e $S := h_1$ e nas do Corolario 1.22 en \overline{P}_r tomando $S := (h_1, h_2)$.

Polo tanto, $i(L, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = 0$, $i(L, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = 0$, $i(L, P_R, P) = 1$ e $i(L, P_r, P) = 0$.

Finalmente, empregando a propiedade de aditividade chégase a que $i(L, P_{r,R}, P) = 1$ de xeito totalmente análogo a como se facía na proba do Teorema 3.15. Igual que alí, como $T(x) = L(x)$ en $\overline{P}_{r,R}$, entón $i(T, P_{r,R}, P) = 1$. \square

Corolario 3.33. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \longrightarrow P$ un operador compacto de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións en $\overline{P}_{r,R}$*

- (a) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$;
- (b) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = r_k$, e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $\|x_k\| = R_k$.

Entón T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\overline{P}_{r,R}$, isto é, tal que $r_k \leq \|\tilde{x}_k\| \leq R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Demostración. É directo da propiedade de punto fixo para a situación compresiva nas dúas compoñentes. O resto de casos conclúense cos mesmos argumentos que no Teorema 3.15. \square

3.1.4 Versión clásica con épsilon do teorema de Krasnoselskii

Neste apartado buscamos estender a espazos produto o Corolario 1.27. As condicións correspondentes na versión vectorial deste resultado non garanten a non existencia de puntos fixos do operador sobre a fronteira do seu dominio. Neste sentido, seguiremos a mesma estratexia que nos tres apartados anteriores. É dicir, veremos que no caso compresivo nas dúas compoñentes, supoñer a non existencia de puntos fixos do operador na fronteira do seu dominio implicará a non existencia de puntos fixos da extensión nos conxuntos de interese.

Proposición 3.34. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \longrightarrow P$ un operador compacto e para cada $k \in \{1, 2\}$, $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ definimos o conxunto*

$$P_{h_k} = \{x_k \in P_k : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } x_k \succeq_{P_k} \lambda h_k\}.$$

Supoñamos que en $\overline{P}_{r,R}$ se satisfai a seguinte condición

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ para todo } x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k} (P_k)_{r_k}, \text{ para cada } k \in \{1, 2\}. \quad (3.24)$$

Se T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R} = \partial_P ((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$, entón a extensión de T , $M = (M_1, M_2) : \overline{P}_R \longrightarrow P$ da forma

$$M(x) := T \circ \phi(x),$$

onde $\phi : \overline{P}_R \longrightarrow \overline{P}_{r,R}$ é a retracción dada por $\phi(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2))$ con ϕ_k definida por (3.21) elixindo para ϕ_k o vector non nulo do cono $\frac{h_k}{\|h_k\|} \in P_k \setminus \{0\}$ para cada $k \in \{1, 2\}$, non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P ((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P ((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P ((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P ((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$.

Demostración. Unha vez máis como na demostración da Proposición 3.14. Para ver que M non ten puntos fixos nestes conxuntos, chega con velo para **A**, **B**, **E** e **F**. Vémolo para os conxuntos **A** e **E**.

Se M tivese un punto fixo $(x'_1, x'_2) \in \mathbf{A} \cup \mathbf{E}$, entón tería que $M(x'_1, x'_2) = T(x'_1, \phi_2(x'_2)) = (x'_1, x'_2)$ e en consecuencia $T_2(x'_1, \phi_2(x'_2)) = x'_2$ pero ademais temos que $x'_2 \prec_{P_2} \phi_2(x'_2)$ (pois estou escollendo o vector $\frac{h_2}{\|h_2\|} \in P_2 \setminus \{0\}$ que é unitario) con $\phi_2(x'_2) \in \partial_{P_2} (P_2)_{r_2}$. Vexamos agora que $\phi_2(x'_2) \in P_{h_2}$, para iso temos que ver que existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ de xeito que $\phi_2(x'_2) - \lambda h_2 \in P_2$. En efecto, temos

$$\begin{aligned}\phi_2(x'_2) - \lambda h_2 &= r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) \frac{h_2}{\|h_2\|}}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) \frac{h_2}{\|h_2\|}\|} - \lambda \|h_2\| \frac{h_2}{\|h_2\|} \\ &= \frac{r_2 x'_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) \frac{h_2}{\|h_2\|}\|} + \left[\frac{r_2(r_2 - \|x'_2\|)}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) \frac{h_2}{\|h_2\|}\|} - \lambda \|h_2\| \right] \frac{h_2}{\|h_2\|},\end{aligned}$$

polo que tomando $\lambda = \frac{1}{2} \frac{r_2(r_2 - \|x'_2\|)}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|) \frac{h_2}{\|h_2\|}\| \|h_2\|} \in \mathbb{R}_+$ chegamos ao que estabamos buscando, pois $\phi_2(x'_2) - \lambda h_2 = \alpha x'_2 + \beta \frac{h_2}{\|h_2\|}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, e xa que logo $\phi_2(x'_2) - \lambda h_2 \in P_2$ por ser $x'_2, h_2 \in P_2$. Chegamos así a que $T_2(x'_1, \phi_2(x'_2)) \prec_{P_2} \phi_2(x'_2)$ con $\phi_2(x'_2) \in P_{h_2} \cap \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}$ o cal é unha contradición con (3.24) para $k = 2$. \square

Calculamos a continuación o índice de punto fixo dun operador nas condicións da *Versión Compresión-compresión* no contexto clásico con épsilon do teorema de Krasnoselskii.

Teorema 3.35. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \bar{P}_{r,R} \rightarrow P$ un operador compacto e para cada $k \in \{1, 2\}$, $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ definamos o conxunto*

$$P_{h_k} := \{x_k \in P_k : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } x_k \succeq_{P_k} \lambda h_k\}. \quad (3.25)$$

Supoñamos que T non ten puntos fixos en $\partial_P P_{r,R}$ e que en $\bar{P}_{r,R}$ se satisfai a seguinte condición para cada $k \in \{1, 2\}$,

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ se } x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{r_k} \text{ e } T_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k \text{ se } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k} \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Entón $i(T, P_{r,R}, P) = 1$.

Demostración. Como T non ten puntos fixos na fronteira do seu dominio, entón, pola proposición anterior, a súa extensión M de T a \bar{P}_R non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P P_r$, $\partial_P P_R$, $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2})$, $\partial_P((P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2})$, $\partial_P((P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2})$ e $\partial_P((P_1)_{r_1} \times (P_2)_{r_2, R_2})$. Ademais, satisfanse para cada $k \in \{1, 2\}$ as seguintes propiedades en \bar{P}_R

$$(a^*) M_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ para todo } x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{r_k},$$

$$(b^*) M_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k \text{ para todo } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k} \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}_+.$$

Da condición (a^*) dedúcese que $x_k - M_k x \neq \mu h_k$, para $\|x_k\| = r_k$ e $\mu > 0$ pois do contrario existiría x' tal que $\|x'_k\| = r_k$ e $\mu' > 0$ de xeito que $x'_k - M_k x' = \mu' h_k \in P_k$ polo que $x'_k \succeq_{P_k} M_k x'$. Ademais $M_k x' = x'_k - \mu' h_k \in P_k$ de onde se deduce tamén que $x'_k \succeq_{P_k} \mu' h_k$ e de aquí $x'_k \in P_{h_k}$. Teño así que en \bar{P}_R se satisfai

$$x_k - M_k x \neq \mu h_k, \text{ con } \|x_k\| = r_k \text{ e } \mu > 0 \text{ para cada } k \in \{1, 2\},$$

e ademais M non ten puntos fixos en $\partial_P P_r$. Aplicando o Corolario 1.22 para $S = (h_1, h_2)$ e $M|_{\overline{P}_r}$,

$$i(M, P_r, P) = 0.$$

Pola súa parte, a condición (b^*) implica á súa vez que en \overline{P}_R se ten $M_k x \neq \lambda x_k$, para $\|x_k\| = R_k$ e $\lambda > 1$ para cada $k \in \{1, 2\}$. Se isto non fose así, existiría x' tal que $\|x'_k\| = R_k$ e $\lambda' > 1$ de xeito que $M_k x' = \lambda' x'_k = (1 + \varepsilon') x'_k$ sendo $\varepsilon' = \lambda' - 1 > 0$ o cal é unha contradición con (b^*) . Deste xeito, podemos aplicar o Lema 1.19 téndose que $i(M, P_R, P) = 1$.

Restringindo o operador M aos conxuntos $(\overline{P}_1)_{r_1} \times (\overline{P}_2)_{R_2}$ e $(\overline{P}_1)_{R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2}$, é claro das condicións que acabamos de ver que M está nas hipóteses do Corolario 3.9 no segundo caso para $S = h_2$ e para o primeiro caso o mesmo resultado intercambiando os papeis sobre as condicións sobre a primeira e segunda compoñente do operador. En consecuencia

$$i(M, (P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}, P) = i(M, (P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}, P) = 0.$$

Finalmente, e como no resto das probas, a propiedade de aditividade permítenos deducir que $i(M, P_{r,R}, P) = 1$ e posto que M coincide con T en $\overline{P}_{r,R}$ concluimos que

$$i(T, P_{r,R}, P) = 1. \quad \square$$

Corolario 3.36. *Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r,R} \rightarrow P$ un operador compacto e para cada $k \in \{1, 2\}$, $h_k \in P_k \setminus \{0\}$. Definimos o conxunto*

$$P_{h_k} = \{x_k \in P_k : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } x_k \succeq_{P_k} \lambda h_k\}.$$

Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións

(a) $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$ e $T_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$;

(b) $T_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ e $T_k x \not\prec_{P_k} x_k$ se $x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{R_k}$.

Entón T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\overline{P}_{r,R}$, isto é, tal que $r_k \leq \|\tilde{x}_k\| \leq R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Observación 3.37. Seguindo a proba do Teorema 3.35, é directo que o Corolario 3.36 é un resultado máis forte que o probado por R. Precup [38, Theorem 2.1] (Teorema 2.4). Isto é, a versión clásica con épsilon é máis forte que a versión débil do Teorema de Krasnoselskii-Benjamin. Facemos notar que no Teorema 2.4 non pediamos que os conos fosen sólidos, algo que si faciamos na sección anterior para poder computar o índice na situación dúas veces compresiva.

3.2 Versións vectoriais noutros dominios: conxuntos estrelados

Se repasamos a proba do Teorema 3.12 podemos darnos conta de que, en realidade, todos os argumentos para o cómputo do índice se apoian sobre o Lema 1.19, o Corolario 1.22 e o Corolario 3.9. Nestes resultados, o operador está definido na clausura dun aberto $U \times V$ relativo e limitado do cono $P_1 \times P_2$ no espazo produto $X_1 \times X_2$. Sobre este aberto non se impón ningún tipo de restrición xeométrica ou de forma, o único momento da devandita proba na que se utiliza que o operador está definido en $\overline{P}_{r,R}$ é cando este se estende a \overline{P}_R sen puntos fixos nas fronteiras de P_r , P_R , $(P_1)_{r_1} \times (P_2)_{R_2}$, $(P_1)_{R_1} \times (P_2)_{r_2}$ e $(P_1)_{r_1, R_1} \times (P_2)_{r_2}$ a través da retracción ρ .

Deste xeito, o resultado segue a ser certo para operadores definidos en conxuntos máis xerais. En concreto, temos o seguinte resultado, correspondente á *Versión Compresión-compresión* adaptada a este contexto.

Teorema 3.38. *Supoñamos que U_1 e \mathcal{O}_1 son abertos relativos e limitados de P_1 , tales que $0 \in U_1$, $\overline{U}_1 \subset \mathcal{O}_1$ e existe unha retracción $\rho_1 : \overline{U}_1 \rightarrow \partial_{P_1} U_1$ e que U_2 e \mathcal{O}_2 son abertos relativos e limitados de P_2 , de xeito que $0 \in U_2$, $\overline{U}_2 \subset \mathcal{O}_2$ e existe unha retracción $\rho_2 : \overline{U}_2 \rightarrow \partial_{P_2} U_2$.*

Sexa $T = (T_1, T_2) : \overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2 \rightarrow P$ un operador compacto e supoñamos que existen dous operadores compactos $S_1 : D_1 = \partial_{P_1} U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2 \rightarrow P_1$ e $S_2 : D_2 = \overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \partial_{P_2} U_2 \rightarrow P_2$ de xeito que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfán simultaneamente en $\overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2$ as seguintes propiedades

- (a) $T_k x \neq \lambda x_k$ para $x_k \in \partial_{P_k} \mathcal{O}_k$ e $\lambda \geq 1$,
- (b) (i) $\inf_{x \in D_k} \|S_k x\| > 0$;
- (ii) $x_k - T_k x \neq \mu S_k x$ para $x_k \in \partial_{P_k} U_k$, e $\mu \geq 0$.

Entón T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2$.

Demostración. Definimos a extensión de T a $\overline{\mathcal{O}_1} \times \overline{\mathcal{O}_2}$, que denotamos $\tilde{M} = (\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) : \overline{\mathcal{O}_1} \times \overline{\mathcal{O}_2} \rightarrow P$, da seguinte maneira

$$\tilde{M}(x) := T \circ \tilde{\theta}(x)$$

con $\tilde{\theta} : \overline{\mathcal{O}_1} \times \overline{\mathcal{O}_2} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2$ dada por $\tilde{\theta}(x_1, x_2) = (\tilde{\theta}_1(x_1), \tilde{\theta}_2(x_2))$ onde para cada $k \in \{1, 2\}$, a aplicación $\tilde{\theta}_k : \overline{\mathcal{O}_k} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_k} \setminus U_k$ ten a seguinte forma

$$\tilde{\theta}_k(x_k) = \begin{cases} \rho_k(x_k), & \text{se } x_k \in U_k, \\ x_k, & \text{se } x_k \in \overline{\mathcal{O}_k} \setminus U_k. \end{cases}$$

Sexan tamén as extensións $\tilde{L}_1 : E_1 = \partial_{P_1} U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \rightarrow P_1$ dada por $\tilde{L}_1(x_1, x_2) = S_1(x_1, \tilde{\theta}_2(x_2))$ de S_1 e $\tilde{L}_2 : E_2 = \overline{\mathcal{O}_1} \times \partial_{P_2} U_2 \rightarrow P_2$ dada por $\tilde{L}_2(x_1, x_2) = S_2(\tilde{\theta}_1(x_1), x_2)$ de S_2 .

Os novos operadores \tilde{M} , \tilde{L}_1 e \tilde{L}_2 son compactos por selo T , S_1 e S_2 , respectivamente. Ademais, a extensión \tilde{M} satisfai en $\overline{P_R}$ para cada $k \in \{1, 2\}$ as condicións

$$(a^*) \quad \tilde{M}_k x \neq \lambda x_k \text{ para } x_k \in \partial_{P_k} \overline{\mathcal{O}_k} \text{ e } \lambda \geq 1,$$

$$(b^*) \quad (i) \quad \inf_{x \in E_k} \|\tilde{L}_k x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_k - \tilde{M}_k x \neq \mu \tilde{L}_k x \text{ para } x_k \in \partial_{P_k} U_k, \text{ e } \mu \geq 0.$$

Se restrinximos o operador \tilde{M} a $\overline{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{U}_2}$, as condicións (a^*) para $k = 1$ e (b^*) para $k = 2$ fan que \tilde{M} se atope nas hipóteses do Corolario 3.9 e así

$$i(\tilde{M}, \mathcal{O}_1 \times U_2, P) = 0.$$

Analogamente, de (a^*) para $k = 2$ e (b^*) para $k = 1$ atopámonos nas condicións do mesmo resultado en $\overline{U_1 \times \mathcal{O}_2}$ intercambiando as condicións sobre as compoñentes do operador. Logo

$$i(\tilde{M}, U_1 \times \mathcal{O}_2, P) = 0.$$

Agora volvemos a estender \tilde{L}_1 e \tilde{L}_2 a $\overline{U_1 \times \mathcal{O}_2}$ e $\overline{\mathcal{O}_1 \times U_2}$, respectivamente. Definimos $\tilde{L}_1^* : E_1^* = \overline{U_1 \times \mathcal{O}_2} \rightarrow P_1$ dada por $\tilde{L}_1^*(x_1, x_2) = \tilde{L}_1(\tilde{\theta}_1(x_1), x_2)$ e $\tilde{L}_2^* : E_2^* = \overline{\mathcal{O}_1 \times U_2} \rightarrow P_2$ dada por $\tilde{L}_2^*(x_1, x_2) = \tilde{L}_2(x_1, \tilde{\theta}_2(x_2))$. Se restrinximos \tilde{L}_1^* e \tilde{L}_2^* a $\overline{U_1 \times U_2}$, de (b^*) -(i) e (b^*) -(ii) dedúcese que se satisfán as condicións seguintes

$$(a^{**}) \quad (i) \quad \inf_{x \in \overline{U_1 \times U_2}} \|\tilde{L}_1^* x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_1 - \tilde{M}_1 x \neq \mu \tilde{L}_1^* x \text{ para cada } x_1 \in \partial_{P_1} U_1, x_2 \in \overline{U_2} \text{ e } \mu \geq 0,$$

$$(b^{**}) \quad (i) \quad \inf_{x \in \overline{U_1 \times U_2}} \|\tilde{L}_2^* x\| > 0;$$

$$(ii) \quad x_2 - \tilde{M}_2 x \neq \mu \tilde{L}_2^* x \text{ para cada } x_1 \in \overline{U_1}, x_2 \in \partial_{P_2} U_2 \text{ e } \mu \geq 0.$$

Temos de aquí que o operador \tilde{M} está nas condicións do Corolario 1.22 en $\overline{U_1 \times U_2}$ tomando $S := \tilde{L}^* = (\tilde{L}_1^*, \tilde{L}_2^*) : \overline{U_1 \times U_2} \rightarrow P$. Polo tanto,

$$i(\tilde{M}, U_1 \times U_2, P) = 0.$$

Por outro lado, da condición (a^*) para $k \in \{1, 2\}$ é claro que podemos aplicar o Lema 1.19 a \tilde{M} en $\overline{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2}$, entón

$$i(\tilde{M}, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2, P) = 1.$$

Facendo o mesmo argumento final que na proba do Teorema 3.12, empregando a propiedade de aditividade chegamos a que

$$i(\tilde{M}, \mathcal{O}_1 \setminus \overline{U_1} \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{U_2}, P) = 1,$$

e de aquí, como \tilde{M} e T coinciden en $\overline{\mathcal{O}_1 \setminus U_1} \times \overline{\mathcal{O}_2 \setminus U_2}$, temos $i(T, \mathcal{O}_1 \setminus \overline{U_1} \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{U_2}, P) = 1$ e concluímos grazas á propiedade de punto fixo. \square

Observación 3.39. Obviamente, o resultado podería adaptarse e seguir sendo certo para todas as situacións compresivo-expansivas.

Se nos fixamos, a proba do resultado anterior coincide ca do Teorema 3.12, pero traballando co operador definido noutro dominio. Se seguimos as probas do Corolario 3.17, do Teorema 3.28 e do Teorema 3.18 [40, Theorem 2.8], onde podiamos calcular o índice de punto fixo para todas as posibles situacións compresivo-expansivas, é claro que os mesmos resultados se satisfán para operadores definidos en conxuntos nas condicións do resultado anterior. É mais, estas condicións poden ser mesturadas, isto é, pódense impoñer condicións distintas sobre cada compoñente. Temos pois o seguinte resultado, que inclúe as distintas versións do teorema de Krasnoselskii mencionadas.

Teorema 3.40. *Supoñamos que U_1 e \mathcal{O}_1 son abertos relativos e limitados de P_1 , tales que $0 \in U_1$, $\bar{U}_1 \subset \mathcal{O}_1$ e existe unha retracción $\rho_1 : \bar{U}_1 \rightarrow \partial_{P_1}U_1$ e que U_2 e \mathcal{O}_2 son abertos relativos e limitados de P_2 , satisfacendo que $0 \in U_2$, $\bar{U}_2 \subset \mathcal{O}_2$ e existe unha retracción $\rho_2 : \bar{U}_2 \rightarrow \partial_{P_2}U_2$.*

Sexa $T = (T_1, T_2) : \bar{\mathcal{O}}_1 \setminus U_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus U_2 \rightarrow P$ un operador compacto tal que para cada $k \in \{1, 2\}$ se atopa nalgunhas das seguintes situacións (ou (a), ou (b), ou (c)):

- (a) **(Versión vectorial normada):** *Satisfáise algunha das seguintes condicións en $\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus U_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus U_2$*
- (i) $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$ e $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$;
 - (ii) $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$ e $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$,
- (b) **(Versión vectorial clásica):** *Satisfáise algunha das seguintes condicións en $\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus U_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus U_2$*
- (i) $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$, e $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$;
 - (ii) $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$, e $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$,
- (c) **(Versión vectorial homotópica):** *Satisfáise algunha das seguintes condicións en $\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus U_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus U_2$*
- (i) $x_k - T_k x \neq \mu h_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$ e $\mu \geq 0$, e $T_k x \neq \lambda x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$ e $\lambda \geq 1$;
 - (ii) $T_k x \neq \lambda x_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}U_k$ e $\lambda \geq 1$, e $x_k - T_k x \neq \mu h_k$ se $x_k \in \partial_{P_k}\mathcal{O}_k$ e $\mu \geq 0$.

Entón

$$i(T, \bar{\mathcal{O}}_1 \setminus U_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus U_2, P) = (-1)^s,$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$ é o número de compoñentes de T que satisfán a condición expansiva.

Corolario 3.41. *Nas condicións do resultado anterior o operador T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\mathcal{O}_1 \setminus \overline{U}_1 \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{U}_2$.*

Observación 3.42. Na sección anterior vimos distintas retraccións de conxuntos da forma P_r , con $r \in \mathbb{R}_+$, na súa fronteira $\partial_P P_r$. Deste xeito, o resultado anterior é certo cando $U_1 = (P_1)_{r_1}$ e $U_2 = (P_2)_{r_2}$ para algún $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sempre e cando $(\overline{P}_1)_{r_1} \subset \mathcal{O}_1$ e $(\overline{P}_2)_{r_2} \subset \mathcal{O}_2$.

A continuación presentamos unha clase particular de conxuntos máis xerais que tamén se atoparán nas condicións requiridas sobre os abertos U_1 e U_2 do resultado anterior. Estes conxuntos denomínanse *estritamente estrelados* e gardan unha estreita relación cos *estrelados convexos*. A versión clásica con épsilon do teorema de Krasnoselskii foi proba con anterioridade para operadores contractivos definidos nunha rexión delimitada por dous conxuntos estrelados convexos nun cono [33, Theorem 3.4].

Definición 3.43. Un subconxunto $A \subset X$ dun espazo normado X dise **p -estrelado** ou **p -estrelado convexo** se

$$(1 - \lambda)p + \lambda x \in A \text{ para todo } \lambda \in [0, 1] \text{ e todo } x \in A.$$

É dicir, o conxunto A contén o segmento que conecta p e calquera $x \in A$. Ademais, cando $p = 0$, o conxunto A dise simplemente un conxunto **estrelado** ou **estrelado convexo**.

Definición 3.44. Sexa $\Omega \subset E$ un aberto relativo e limitado non baleiro dun subconxunto E dun espazo normado X . Diremos que $\overline{\Omega}$ é **estritamente p -estrelado en E** se

$$(1 - \lambda)p + \lambda x \in \Omega \text{ para todo } \lambda \in [0, 1) \text{ e todo } x \in \partial_E \Omega.$$

Se $p = 0$, diremos que $\overline{\Omega}$ é **estritamente estrelado en E** . Ademais, se o é en X diremos simplemente que é **estritamente estrelado**.

Observación 3.45. Facemos notar que cando $\Omega \subset X$ un aberto limitado non baleiro dun espazo normado X é tal que $\overline{\Omega}$ é estritamente p -estrelado, entón $\overline{\Omega}$ é p -estrelado convexo. En efecto, supoñamos que $\overline{\Omega}$ non é p -estrelado convexo, entón existen $\bar{x} \in \overline{\Omega}$ e $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ de xeito que

$$(1 - \bar{\lambda})p + \bar{\lambda}\bar{x} \notin \overline{\Omega}.$$

Definamos $\lambda^* = \inf\{\lambda > \bar{\lambda} : (1 - \lambda)p + \lambda\bar{x} \in \overline{\Omega}\}$, entón claramente $x^* = (1 - \lambda^*)p + \lambda^*\bar{x} \in \partial\Omega$, pero como $\overline{\Omega}$ é estritamente p -estrelado chegamos a que

$$(1 - \lambda)p + \lambda x^* \in \Omega, \text{ para cada } \lambda \in [0, 1). \quad (3.26)$$

Como $\tilde{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda^*} \in [0, 1)$, de (3.26) dedúcese que

$$(1 - \bar{\lambda})p + \bar{\lambda}\bar{x} \in \Omega,$$

atopando unha contradición.

Probamos a continuación dous resultados que nos permitirán construír unha retracción dun conxunto estrelado na súa fronteira.

Proposición 3.46. *Sexa $\Omega \subset X$ un aberto limitado non baleiro dun espazo normado X . Se $\bar{\Omega}$ é un conxunto estritamente estrelado con respecto a p , entón satisfai a seguinte condición*

para todo $x \in \bar{\Omega} \setminus \{p\}$, existe un único $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$ tal que $(1 - \lambda_x)p + \lambda_x x \in \partial\Omega$.

Demostración. Sexa $x \in \bar{\Omega} \setminus \{p\}$. Vexamos a existencia do número positivo λ_x . Por ser $\bar{\Omega}$ p -estrelado, temos que $(1 - \lambda)p + \lambda x \in \bar{\Omega}$ para todo $\lambda \in [0, 1)$. Como $\bar{\Omega}$ é limitado, existe $\lambda > 1$ suficientemente grande tal que $(1 - \lambda)p + \lambda x \notin \bar{\Omega}$. Tomando

$$\lambda_x = \inf\{\lambda > 1 : (1 - \lambda)p + \lambda x \notin \bar{\Omega}\},$$

temos claramente que $(1 - \lambda_x)p + \lambda_x x \in \partial\Omega$.

Probemos agora a unicidade. Supoñamos que temos $\lambda_x^1, \lambda_x^2 > 0$ satisfacendo que $(1 - \lambda_x^i)p + \lambda_x^i x \in \partial\Omega$, para $i \in \{1, 2\}$ e $\lambda_x^1 \neq \lambda_x^2$. Supoñamos que $\lambda_x^1 < \lambda_x^2$ e sexa $\lambda = \frac{\lambda_x^1}{\lambda_x^2}$. Por unha parte temos que $(1 - \lambda_x^2)p + \lambda_x^2 x \in \partial\Omega$ e así, como $\lambda \in (0, 1)$ e $\bar{\Omega}$ é estritamente p -estrelado temos que

$$(1 - \lambda)p + \lambda[(1 - \lambda_x^2)p + \lambda_x^2 x] \in \Omega,$$

ou, equivalentemente, $(1 - \lambda_x^1)p + \lambda_x^1 x \in \Omega$. Pero así atopamos unha contradición co feito de que $(1 - \lambda_x^1)p + \lambda_x^1 x \in \partial\Omega$, pois Ω é aberto. \square

Proposición 3.47. *Sexa P un cono nun espazo normado X e $\Omega \subset P$ un aberto relativo limitado e non baleiro tal que a súa clausura é estritamente estrelada en P . Entón, para cada $x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ existe un único $\beta_x \in [1, +\infty)$ tal que $\beta_x x \in \partial_P \Omega$. É mais, a aplicación*

$$\beta : \bar{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty); \quad \beta(x) := \beta_x$$

é continua e $\beta(x)$ tende a $+\infty$ cando x tende a 0.

Demostración. As ideas empregadas apóianse sobre argumentos introducidos en [33, 34]. Para probar o resultado, primeiro veremos que existe unha función continua $\hat{\beta} : \bar{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow \partial_X \Omega$ tal que

$$\hat{\beta}(x) = \hat{\beta}(\lambda x), \text{ para todo } x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\} \text{ e } \lambda \in (0, 1], \text{ e } \hat{\beta}(x) = x \text{ para todo } x \in \partial_X \Omega.$$

Como $0 \in \bar{\Omega} \setminus \partial_X \Omega$, existe $\gamma > 0$ tal que $B = \{x \in X : \|x\| \leq \gamma\} \subset \bar{\Omega} \setminus \partial_X \Omega = \Omega$. Consideremos $\hat{\beta}$ como a composición $\nu \circ \nu_0$ onde

$$\nu_0 : \bar{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow \partial_X B; \quad x \rightarrow \nu_0(x) := \frac{\gamma}{\|x\|}x, \text{ e } \nu : \partial_X B \rightarrow \partial_X \Omega; \quad x \rightarrow \nu(x) := \lambda_x x,$$

onde para cada $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$, $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$ é o único valor tal que $\lambda_x x \in \partial_X \Omega$. Observamos que ν está ben definida en virtude da Proposición 3.46.

É claro que $\nu \circ \nu_0$ satisfai as propiedades requiridas. En efecto, se $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ e $\lambda \in (0, 1]$, entón

$$\hat{\partial}(\lambda x) = \nu \circ \nu_0(\lambda x) = \nu \left(\frac{\gamma}{\|\lambda x\|} \lambda x \right) = \nu \left(\frac{\gamma}{\|x\|} x \right) = \nu \circ \nu_0(x) = \hat{\partial}(x).$$

Ademais, se $x \in \partial_X \Omega$ entón é claro que

$$\hat{\partial}(x) = \nu \circ \nu_0(x) = \nu \left(\frac{\gamma}{\|x\|} x \right) = x.$$

Por outra parte, ν_0 é continua, pois ten unha expresión continua onde o denominador non se anula. Vexamos que ν é continua, para iso é suficiente probar a continuidade de

$$\lambda : \partial_X B \rightarrow \mathbb{R}_+; \quad x \rightarrow \lambda(x) := \lambda_x.$$

Sexa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unha sucesión en $\partial_X B$ converxente a $x^* \in \partial_X B$. Como $\overline{\Omega}$ é un conxunto limitado e $\lambda(\partial_X B) \subset [0, \infty)$ podemos afirmar que existe $m \in \mathbb{R}_+$ tal que $\lambda(\partial_X B) \subset [0, m]$. Así pois, $\{\lambda(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é unha sucesión no intervalo compacto $[0, m]$, polo que ten unha subsucesión converxente. Vexamos que todas as subsucesións converxentes teñen o mesmo límite. Sexa $\{\lambda(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ unha subsucesión converxente a l . Sabemos que

$$\nu(x_{n_k}) = \lambda(x_{n_k})x_{n_k} \in \partial_X \Omega, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

e de aquí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(x_{n_k}) = lx^* \in \partial_X \Omega,$$

logo pola unicidade de λ_{x^*} atopamos que $\lambda(x^*) = l$. De aquí séguese que $\lambda(x_n) \rightarrow \lambda(x^*)$ cando $n \rightarrow \infty$ e xa que logo λ é continua, como queriamos atopar.

Consideremos agora a restrición da aplicación $\hat{\partial} : \overline{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow \partial_X \Omega$ a $P \cap \overline{\Omega} \setminus \{0\}$. O cono P é un subconxunto convexo. Vexamos que $\hat{\partial}(P \cap \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \subset \partial_P \Omega$. Se supoñemos o contrario, entón existirían $\bar{x} \in \partial_X \Omega \setminus P$ e $x \in P \cap \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ de xeito que $\hat{\partial}(x) = \bar{x}$. Ademais, temos que

$$\hat{\partial}(x) = \nu \circ \nu_0(x) = \nu \left(\frac{\gamma}{\|x\|} x \right) = \lambda_{\frac{\gamma}{\|x\|} x} \left(\frac{\gamma}{\|x\|} x \right) = \bar{x},$$

pero como $x \in P$ e $\lambda_{\frac{\gamma}{\|x\|} x} \left(\frac{\gamma}{\|x\|} x \right) > 0$, entón $\bar{x} \in P$, o cal é unha contradición.

Para rematar, definamos

$$\beta : P \cap \overline{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow [1, \infty); \quad x \rightarrow \beta(x) := \frac{d(0, \hat{\partial}(x))}{d(0, x)}.$$

Esta aplicación é claramente continua por composición de expresións continuas onde o denominador non se anula. Ademais $d(0, \hat{\partial}(x)) > \gamma$ para cada $x \in \bar{\Omega}$ e

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0^+} d(0, x) = 0^+,$$

polo que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \beta(x) = \infty,$$

como queriamos ver. □

No que segue desta sección Ω_1 e Ω_2 van a ser abertos relativos nos conos P_1 e P_2 , respectivamente, e limitados tales que $\bar{\Omega}_1$ e $\bar{\Omega}_2$ son estritamente estrelados. Observemos que por ser $\bar{\Omega}_1$ e $\bar{\Omega}_2$ estritamente estrelados temos que $0 \in \Omega_1$ e $0 \in \Omega_2$ e así, como Ω_1 e Ω_2 son abertos, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ ($r_1 < d(0, \partial_{P_1}\Omega_1)$ e $r_2 < d(0, \partial_{P_2}\Omega_2)$) de xeito que $(\bar{P}_1)_{r_1} \subset \bar{\Omega}_1$ e $(\bar{P}_2)_{r_2} \subset \bar{\Omega}_2$. Se para cada $k \in \{1, 2\}$ fixamos $h_k \in P_k \setminus \{0\}$, temos unha nova retracción (ver Figura 3.5) $\alpha_k : \bar{\Omega}_k \rightarrow \partial_{P_k}\Omega_k$ dada por

$$\alpha_k(x_k) = \begin{cases} \beta \left(r_k \frac{x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k}{\|x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k\|} \right) \left(r_k \frac{x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k}{\|x_k + (r_k - \|x_k\|) h_k\|} \right), & \text{se } x_k \in (\bar{P}_k)_{r_k}, \\ \beta(x_k)x_k, & \text{se } x_k \in \bar{\Omega}_k \setminus (\bar{P}_k)_{r_k}. \end{cases}$$

Observación 3.48. Xa sabemos pola Observación 3.11 que $\|x_k + (r_k - \|x_k\|)h_k\| \neq 0$ para cada $x_k \in (\bar{P}_k)_{r_k}$ polo que α_k está ben definida para $k \in \{1, 2\}$. Ademais, esta aplicación é claramente continua en $\bar{\Omega}_k$ e tamén se ten que $\alpha_k(x_k) = x_k$ para todo $x_k \in \partial_{P_k}\Omega_k$.

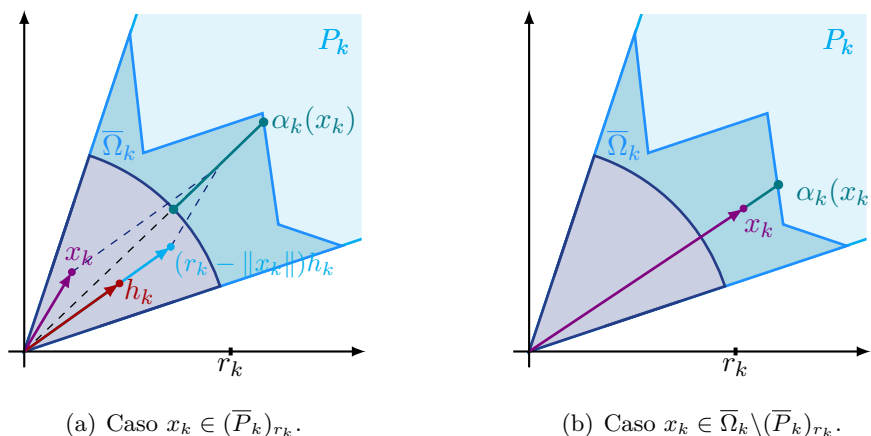


Figura 3.5: Visualización da actuación da retracción α_k sobre un conxunto $\bar{\Omega}_k$ estritamente estrelado nun cono P_k de \mathbb{R}^2 .

Observación 3.49. Observamos tamén que, pola definición, para cada $k \in \{1, 2\}$ se ten que $\|\alpha_k(x_k)\| > \|x_k\|$ para todo $x_k \in \Omega_k$.

Observación 3.50. Atopada esta retracción, é claro que os Teoremas 3.38 e 3.40 son certos para os abertos U_1 e U_2 tales que \bar{U}_1 e \bar{U}_2 son estrictamente estrelados en P_1 e P_2 , respectivamente.

Agora vexamos que esta retracción nos permite seguir a mesma estratexia que na subsección anterior. Vemos a continuación que, baixo as condicións compresivas máis débiles dalgunhas das diferentes versións do teorema de Krasnoselskii sobre as fronteiras de conxuntos estrelados, podemos estender o operador sen puntos fixos nos conxuntos de interese. Deste xeito, estaremos en condicións de computar o índice, vendo novamente que este non é nulo e asegurando así a existencia de punto fixo.

Proposición 3.51. *Supoñamos agora que \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 son abertos relativos e limitados de P_1 e P_2 , respectivamente, tales que os conxuntos estrictamente estrelados $\bar{\Omega}_1$ e $\bar{\Omega}_2$ en P_1 e P_2 satisfán que $\bar{\Omega}_1 \subset \mathcal{O}_1$ e $\bar{\Omega}_2 \subset \mathcal{O}_2$.*

Se $T = (T_1, T_2) : \bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2 \longrightarrow P$ é un operador compacto tal que en $\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2$ satisfai que

$$\|T_k x\| \geq \|x_k\| \text{ para } x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k, \text{ para cada } k \in \{1, 2\}, \quad (3.27)$$

e non ten puntos fixos en $\partial_P(\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2)$, entón a súa extensión, $N^ = (N_1^*, N_2^*) : \bar{\mathcal{O}}_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \longrightarrow P$ da forma*

$$N^*(x) := T \circ \nu(x),$$

onde $\nu : \bar{\mathcal{O}}_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2$ é a retracción dada por $\nu(x_1, x_2) = (\nu_1(x_1), \nu_2(x_2))$ con $\nu_k : \bar{\mathcal{O}}_k \rightarrow \bar{\mathcal{O}}_k \setminus \Omega_k$ definida como

$$\nu_k(x_k) = \begin{cases} \alpha_k(x_k), & \text{se } x_k \in \Omega_k, \\ x_k, & \text{se } x_k \in \bar{\mathcal{O}}_k \setminus \Omega_k. \end{cases}$$

para cada $k \in \{1, 2\}$, non ten puntos fixos nos conxuntos $\partial_P(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\partial_P(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, $\partial_P(\Omega_1 \times \mathcal{O}_2)$, $\partial_P(\mathcal{O}_1 \times \Omega_2)$, $\partial_P(\mathcal{O}_1 \setminus \bar{\Omega}_1 \times \Omega_2)$ e $\partial_P(\Omega_1 \times \mathcal{O}_2 \setminus \bar{\Omega}_2)$.

Demostración. De xeito análogo a casos anteriores, é claro que é suficiente con que o operador N^* non teña puntos fixos nos conxuntos $\tilde{A} = \partial_{P_1} \mathcal{O}_1 \times \Omega_2$, $\tilde{B} = \Omega_1 \times \partial_{P_2} \mathcal{O}_2$, $\tilde{E} = \partial_{P_1} \Omega_1 \times \Omega_2$ e $\tilde{F} = \Omega_1 \times \partial_{P_2} \Omega_2$.

Procedendo por redución ao absurdo supoñendo que si, é claro que o operador N^* non ten puntos fixos nestes conxuntos, pois o operador foi construído para satisfacer a propiedade destacada na Observación 3.49. \square

Proposición 3.52. *Supoñamos que nos atopamos na situación da proposición anterior, pero cambiando a condición (3.27) sobre o operador T pola seguinte*

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ se } x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k, \text{ para cada } k \in \{1, 2\}. \quad (3.28)$$

Se T non ten puntos fixos en $\partial_P(\overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2)$, entón a súa extensión, $\tilde{L} = (\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) : \overline{\mathcal{O}}_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \rightarrow P$ dada por

$$\tilde{L}(x) := T \circ \nu(x),$$

tomando para a definición de α_k un $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ tal que $\|h_k\| = 1$ satisfai a tese da proposición anterior.

Demostración. A idea da proba é a mesma, pero agora non é directa. Procedemos vendo que \tilde{L} non ten puntos fixos nin en \tilde{A} nin en \tilde{E} por redución ao absurdo. Que non os ten nin en \tilde{B} nin en \tilde{F} razónase de forma análoga para a outra compoñente.

Supoñamos que \tilde{L} ten un punto fixo $(x'_1, x'_2) \in \tilde{A} \cup \tilde{E}$. Entón temos que $T_2(x'_1, \nu_2(x'_2)) = x'_2$, pero ademais $x'_2 \prec_{P_2} \nu_2(x'_2)$ pois $\nu_2(x'_2) - x'_2 \in P_2 \setminus \{0\}$. En efecto, se $x'_2 \in \Omega_2 \setminus P_{r_2}$ entón

$$\nu_2(x'_2) - x'_2 = \beta(x'_2)x'_2 - x'_2 = (\beta(x'_2) - 1)x'_2$$

e posto que $\beta(x'_2) > 1$ e $x'_2 \neq 0$ pois $0 \notin \Omega_2 \setminus P_{r_2}$ temos que $(\beta(x'_2) - 1)x'_2 \in P_2 \setminus \{0\}$. Por outra parte, se $x'_2 \in P_{r_2}$, entón

$$\begin{aligned} \nu_2(x'_2) - x'_2 &= \beta \left(r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \right) \left(r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \right) - x'_2 \\ &= \left[\frac{r_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \beta \left(r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \right) - 1 \right] x'_2 + \frac{r_2(r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|}, \end{aligned}$$

onde por ser $x'_2 \in P_{r_2}$ se ten claramente que $\frac{r_2(r_2 - \|x'_2\|)}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} > 0$ e ademais

$$\frac{r_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \beta \left(r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \right) - 1 > 0$$

pois $\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\| \leq \|x'_2\| + (r_2 - \|x'_2\|)\|h_2\| = r_2$ por ser $\|h_2\| = 1$ e $\beta \left(r_2 \frac{x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2}{\|x'_2 + (r_2 - \|x'_2\|)h_2\|} \right) > 1$. \square

Enunciadas e probadas as proposicións anteriores e seguindo as probas dos Teoremas 3.15 e 3.32 temos o seguinte resultado.

Teorema 3.53. *Supoñamos que \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 son abertos relativos e limitados de P_1 e P_2 , respectivamente, tales que os conxuntos estritamente estrellados $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$ en P_1 e P_2 satisfán que $\overline{\Omega}_1 \subset \mathcal{O}_1$ e $\overline{\Omega}_2 \subset \mathcal{O}_2$.*

Se $T = (T_1, T_2) : \overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2 \rightarrow P$ é un operador compacto sen puntos fixos en $\partial_P(\overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2)$ tal que se atopa nalgunha das seguintes situacións:

(a) **(Versión vectorial normada):** Para cada $k \in \{1, 2\}$ satisfaise a seguinte condición en $\overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2$

$$\|T_k x\| \geq \|x_k\|, \text{ se } x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k \text{ e } \|T_k x\| \leq \|x_k\|, \text{ se } x_k \in \partial_{P_k} \mathcal{O}_k,$$

(b) (*Versión vectorial clásica*): Para cada $k \in \{1, 2\}$ satisfáise a seguinte condición en $\overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2$

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ se } x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k, \text{ e } T_k x \not\prec_{P_k} x_k \text{ se } x_k \in \partial_{P_k} \mathcal{O}_k.$$

Entón

$$i(T, \mathcal{O}_1 \setminus \overline{\Omega}_1 \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{\Omega}_2, P) = 1.$$

Corolario 3.54. No contexto do Teorema 3.53, se o operador T é un operador compacto nalgunha das situacións (a) ou (b), entón T ten, polo menos, un punto fixo $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ en $\overline{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1 \times \overline{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2$.

Observación 3.55. Notamos que agora non podemos probar o resultado anterior para condicións correspondentes aos contextos nos que sobre algunha compoñente se pide a condición expansiva transformando o operador como faciamos na proba do Teorema 3.15. Isto débese a que a transformación que faciamos sobre a compoñente para a que se impoñía a condición expansiva pasase a atoparse na situación compresiva estaba ligada á xeometría do dominio.

3.3 Resultados de Multiplicidade

No primeiro capítulo deste traballo, enunciabamos dous resultados de multiplicidade de punto fixo, o Teorema 1.29 e o Teorema 1.30. A idea consistía en concatenar as distintas condicións expansivas e compresivas do teorema de Krasnoselskii, alternándoas sobre abertos que comparten fronteiras. Cos resultados en espazos produto presentados neste capítulo podemos facer o mesmo, alternando as distintas condicións compresivas e expansivas de cada unha das distintas versións do teorema de Krasnoselskii sobre cada compoñente.

Enunciamos a continuación o resultado de multiplicidade correspondente sobre rexións anulares resultante de concatenar a forma forte da versión normada.

Teorema 3.56. Sexan $r_k^{(0)}, r_k^{(1)}, \dots, r_k^{(n_k)} \in \mathbb{R}^+$, $n_k \in \mathbb{N}$, ($n_k \geq 2$) para cada $k \in \{1, 2\}$ tales que $r_k^{(j)} < r_k^{(j+1)}$ para $j \in \{0, \dots, n_k - 1\}$. Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : (\overline{P}_1)_{r_1^{(0)}, r_1^{(n_1)}} \times (\overline{P}_2)_{r_2^{(0)}, r_2^{(n_2)}} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que para cada $k \in \{1, 2\}$, o operador T satisfai no seu dominio algunha das seguintes condicións (onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte enteira)

- (i) $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(l)}$ con $l \in \{2m + 1 : m = 0, \dots, \lfloor \frac{n_k - 1}{2} \rfloor\}$;
 $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(s)}$ con $s \in \{2m : m = 0, \dots, \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor\}$,
- (ii) $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(l)}$ con $l \in \{2m + 1 : m = 0, \dots, \lfloor \frac{n_k - 1}{2} \rfloor\}$;
 $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(s)}$ con $s \in \{2m : m = 0, \dots, \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor\}$.

Entón T ten, polo menos, $n_1 \cdot n_2$ puntos fixos en $(P_1)_{r_1^{(0)}, r_1^{(n_1)}} \times (P_2)_{r_2^{(0)}, r_2^{(n_2)}}$. Ademais, en cada un dos seguintes subconxuntos do dominio

$$(P_1)_{r_1^{(j)}, r_1^{(j+1)}} \times (P_2)_{r_2^{(t)}, r_2^{(t+1)}}, \quad j \in \{0, \dots, n_1 - 1\}, t \in \{0, \dots, n_2 - 1\},$$

hai, polo menos, un punto fixo.

Demostración. É claro que se restrinximos o operador T ao subconxunto

$$(\overline{P_1})_{r_1^{(j)}, r_1^{(j+1)}} \times (\overline{P_2})_{r_2^{(t)}, r_2^{(t+1)}}, \quad \text{con } j \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \text{ e } t \in \{0, \dots, n_2 - 1\},$$

este se atopa nas hipóteses do Corolario 3.17. Deste xeito, o operador T ten, polo menos, un punto fixo en cada conxunto

$$(P_1)_{r_1^{(j)}, r_1^{(j+1)}} \times (P_2)_{r_2^{(t)}, r_2^{(t+1)}}, \quad \text{con } j \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \text{ e } t \in \{0, \dots, n_2 - 1\}.$$

De aquí é directo que, entón, o operador T ten polo menos $n_1 \cdot n_2$ puntos fixos no seu dominio. Isto conclúe a proba deste resultado de multiplicidade. \square

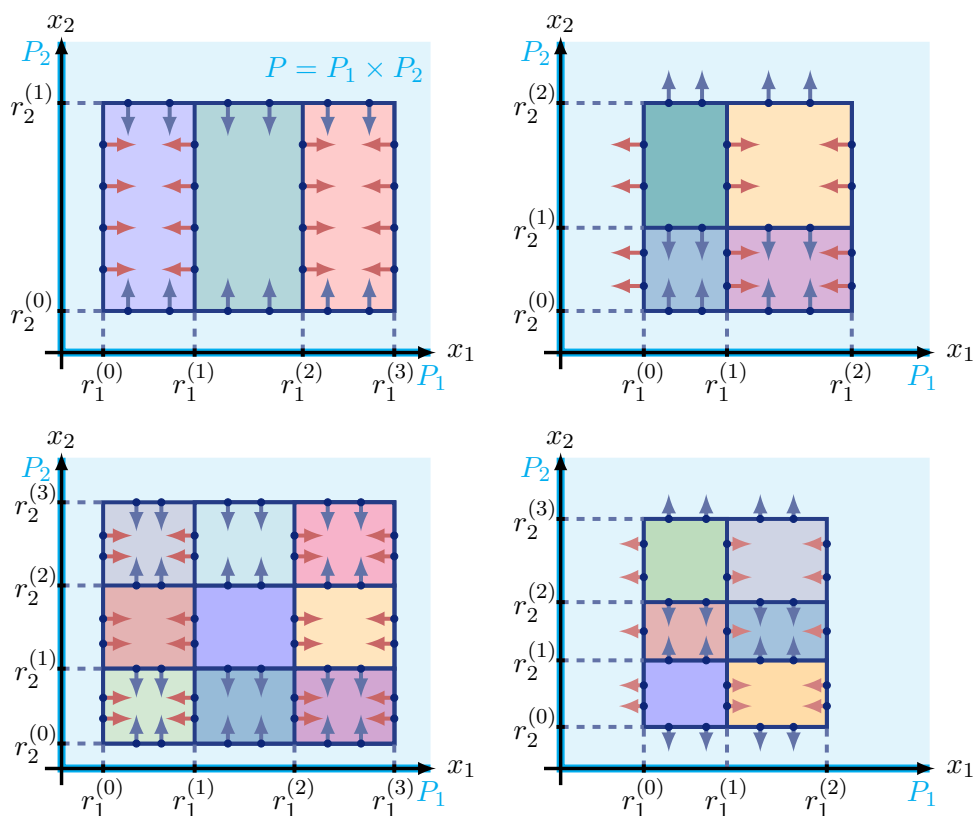


Figura 3.6: Este debuxo ilustra distintos casos de concatenación de condicións do Teorema 3.56 sobre operadores definidos en rexións anulares do cono $P_1 \times P_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ no espazo produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para a obtención de tres, catro, seis, e nove puntos fixos.

Observación 3.57. O resultado anterior tamén é certo cambiando as condicións por as correspondentes formas fortes da versión clásica e a versión homotópica. Así, sendo $n_k \in \mathbb{N}$ para cada $k \in \{1, 2\}$ e denotando

$$A_{n_k} = \left\{ 2m + 1 : m = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n_k - 1}{2} \right\rfloor \right\} \text{ e } B_{n_k} = \left\{ 2m : m = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n_k}{2} \right\rfloor \right\}, \quad (3.29)$$

o resultado segue a ser certo se cambiamos as condicións (i) e (ii) por

$$(i^*) \quad T_k x \not\leq_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } T_k x \not\leq_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k};$$

$$(ii^*) \quad T_k x \not\leq_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } T_k x \not\leq_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k},$$

respectivamente, condicións correspondentes á versión clásica, ou por

$$(i^{**}) \quad x_k - T_k x \neq \mu h_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ e } \mu \geq 0 \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$T_k x \neq \lambda x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ e } \lambda \geq 1 \text{ con } s \in B_{n_k},$$

$$(ii^{**}) \quad T_k x \neq \lambda x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ e } \lambda \geq 1 \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$x_k - T_k x \neq \mu h_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ e } \mu \geq 0 \text{ con } s \in B_{n_k},$$

para $h_k \in P_k \setminus \{0\}$, condicións correspondentes á versión homotópica.

O mesmo resultado é tamén certo se concatenamos as condicións correspondentes á forma débil. A diferenza reside en que agora, será necesario pedir que o operador T non teña puntos fixos nas fronteiras dos conxuntos

$$(P_1)_{r_1^{(j)}, r_1^{(j+1)}} \times (P_2)_{r_2^{(t)}, r_2^{(t+1)}}, \text{ con } j \in \{0, \dots, n_1 - 1\} \text{ e } t \in \{0, \dots, n_2 - 1\},$$

para evitar a posibilidade de que o punto fixo que sabemos que existirá en cada un destes ao impoñer as condicións sexa o mesmo sobre subconxuntos non disxuntos.

Teorema 3.58. *Na situación do Teorema 3.56, supoñamos ademais que o operador T non ten puntos fixos no seu dominio tales que $\|x_k\| = r_k^{(j)}$ para $j \in \{0, \dots, n_k - 1\}$ e $k \in \{1, 2\}$.*

Se T satisfai no seu dominio para cada $k \in \{1, 2\}$ algunha das seguintes condicións (segundo a notación establecida en (3.29))

$$(i) \quad \|T_k x\| \geq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } \|T_k x\| \leq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k};$$

$$(ii) \quad \|T_k x\| \leq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } \|T_k x\| \geq \|x_k\|, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k},$$

entón T ten, polo menos, $n_1 \cdot n_2$ puntos fixos en $(P_1)_{r_1^{(0)}, r_1^{(n_1)}} \times (P_2)_{r_2^{(0)}, r_2^{(n_2)}}$. Ademais, en cada un dos seguintes subconxuntos do dominio

$$(P_1)_{r_1^{(j)}, r_1^{(j+1)}} \times (P_2)_{r_2^{(t)}, r_2^{(t+1)}}, \quad j \in \{0, \dots, n_1 - 1\}, t \in \{0, \dots, n_2 - 1\},$$

hai, polo menos, un punto fixo.

Observación 3.59. Como vimos de adiantar, o Teorema 3.53 tamén é certo impondo as condicións correspondentes a outras versións. En concreto, segue a ser certo se cambiamos as condicións (i) e (ii) por as seguintes

$$(i^*) \quad T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k};$$

$$(ii^*) \quad T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ con } l \in A_{n_k} \text{ e } T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ con } s \in B_{n_k},$$

respectivamente, correspondentes á forma débil da versión clásica.

Tamén segue a ser certo se cambiamos as condicións por as correspondentes á versión clásica con épsilon ou a forma débil da versión homotópica (Teorema 2.4). Isto é, por

$$(i^{**}) \quad T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{r_k^{(l)}} \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$T_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k, \text{ se } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k^{(s)}} \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ con } s \in B_{n_k},$$

$$(ii^{**}) \quad T_k x \not\prec_{P_k} (1 + \varepsilon)x_k, \text{ se } x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k^{(l)}} \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$T_k x \not\prec_{P_k} x_k, \text{ se } x_k \in P_{h_k} \cap \partial_{P_k}(P_k)_{r_k^{(s)}} \text{ con } s \in B_{n_k},$$

para $h_k \in P_k \setminus \{0\}$ e onde P_{h_k} é o conxunto definido en (3.25), ou por

$$(i^{***}) \quad x_k - T_k x \neq \mu h_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ e } \mu > 0 \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$T_k x \neq \lambda x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ e } \lambda > 1 \text{ con } s \in B_{n_k},$$

$$(ii^{***}) \quad T_k x \neq \lambda x_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(l)} \text{ e } \lambda > 1 \text{ con } l \in A_{n_k};$$

$$x_k - T_k x \neq \mu h_k, \text{ se } \|x_k\| = r_k^{(s)} \text{ e } \mu > 0 \text{ con } s \in B_{n_k},$$

onde tamén $h_k \in P_k \setminus \{0\}$, respectivamente.

Observación 3.60. No segundo capítulo comentabamos a importancia de coñecer o índice de punto fixo do operador á hora de obter resultados de multiplicidade. Se nos fixamos, o teorema de multiplicidade anterior é certo para as versións que só nos permitiron coñecer o índice de punto fixo no caso no que se impón a condición compresiva sobre as dúas compoñentes.

Nos Teoremas 3.56 e 3.53 imponemos as condicións dunha maneira moi restritiva para poder garantir que en cada un dos correspondentes subconxuntos se poden aplicar directamente as diferentes versións vectoriais do teorema de Krasnoselskii previamente desenvolvidas.

O coñecemento do índice nos distintos subconxuntos permítenos, como veremos a continuación, obter resultados de multiplicidade baixo unha imposición menos restritiva das condicións. Deste xeito, poderemos localizar puntos fixos en rexións sobre as que o operador non se atopa directamente nas hipóteses de ningunha das versións vectoriais. Explicamos isto con maior detalle a través do seguinte exemplo.

Exemplo 3.61. Supoñamos que nos atopamos en \mathbb{R}^2 como espazo produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e que os nosos conos son $P_1 = P_2 = \mathbb{R}^+$. Se temos un operador $T = (T_1, T_2) : \left[\frac{1}{2}, 4\right] \times \left[\frac{3}{10}, 3\right] \rightarrow P_1 \times P_2$ continuo tal que satisfai en $(\overline{P}_1)_{\frac{1}{2}, 4} \times (\overline{P}_2)_{\frac{3}{10}, 3} = \left[\frac{1}{2}, 4\right] \times \left[\frac{3}{10}, 3\right]$ as seguintes condicións

$$(i) \quad \|T_1 x\| > \|x_1\|, \text{ se } \|x_1\| = \frac{1}{2} \text{ e } \|T_1 x\| < \|x_1\| \text{ se } \|x_1\| = 4;$$

$$(ii) \quad \|T_2 x\| > \|x_2\|, \text{ se } \|x_2\| = \frac{3}{10} \text{ e } \|T_2 x\| < \|x_2\| \text{ se } \|x_2\| = 3,$$

en $(\overline{P}_1)_{\frac{1}{2}, 2} \times (\overline{P}_2)_{\frac{3}{10}, 2} = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \times \left[\frac{3}{10}, 2\right]$ as seguintes

$$(i)^* \quad \|T_1 x\| > \|x_1\|, \text{ se } \|x_1\| = \frac{1}{2} \text{ e } \|T_1 x\| < \|x_1\| \text{ se } \|x_1\| = 2;$$

$$(ii)^* \quad \|T_2 x\| > \|x_2\|, \text{ se } \|x_2\| = \frac{3}{10} \text{ e } \|T_2 x\| < \|x_2\| \text{ se } \|x_2\| = 2,$$

e en $(\overline{P}_1)_{\frac{14}{5}, 4} \times (\overline{P}_2)_{2, 3} = \left[\frac{14}{5}, 4\right] \times [2, 3]$ as seguintes

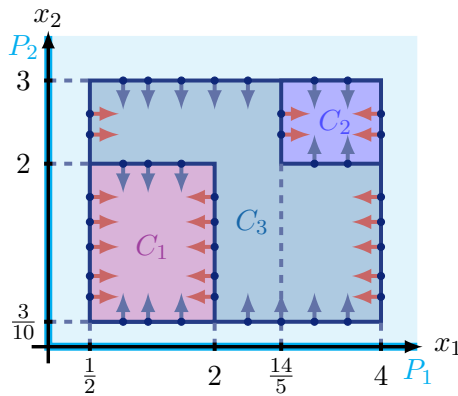
$$(i)^{**} \quad \|T_1 x\| > \|x_1\|, \text{ se } \|x_1\| = \frac{14}{5} \text{ e } \|T_1 x\| < \|x_1\| \text{ se } \|x_1\| = 4;$$

$$(ii)^{**} \quad \|T_2 x\| > \|x_2\|, \text{ se } \|x_2\| = 2 \text{ e } \|T_2 x\| < \|x_2\| \text{ se } \|x_2\| = 3.$$

Entón, o operador T ten, polo menos, tres puntos fixos distintos en $\left(\frac{1}{2}, 4\right) \times \left(\frac{3}{10}, 3\right)$. Ademais, hai polo menos un punto fixo en cada un dos seguintes conxuntos (ver Figura 3.7)

$$C_1 := P_{r^{(1)}, R^{(1)}} = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \times \left(\frac{3}{10}, 2\right), \quad C_2 := P_{r^{(2)}, R^{(2)}} = \left(\frac{14}{5}, 4\right) \times (2, 3), \quad \text{e}$$

$$C_3 := P_{r^{(3)}, R^{(3)}} \setminus (\overline{P}_{r^{(1)}, R^{(1)}} \cup \overline{P}_{r^{(2)}, R^{(2)}}) = \left(\left(\frac{1}{2}, 4\right) \times \left(\frac{3}{10}, 3\right)\right) \setminus (\overline{C}_1 \cup \overline{C}_2).$$



$$r_1^{(1)} = r_1^{(3)} = \frac{1}{2}; \quad r_1^{(2)} = \frac{14}{5};$$

$$r_2^{(1)} = r_2^{(3)} = \frac{3}{10}; \quad r_2^{(2)} = 2;$$

$$R_1^{(1)} = 2; \quad R_1^{(2)} = R_1^{(3)} = 4;$$

$$R_2^{(1)} = 2; \quad R_2^{(2)} = R_2^{(3)} = 3.$$

Figura 3.7: Visualización de distintas rexións nas que podemos atopar algún punto fixo do operador T no Exemplo 3.61.

Claramente podemos aplicar o Corolario 3.17 para o operador restrinxido aos conxuntos C_1 e C_2 , obtendo que

$$i(T, C_j, P) = 1, \quad j \in \{1, 2\},$$

e de aquí, pola propiedade de punto fixo, a existencia de punto fixo de T en cada un deles.

Pola contra, o operador restrinxido a C_3 non se atopa nas hipóteses dese resultado. O que si sabemos é que

$$i(T, P_{r^{(3)}, R^{(3)}}(P)) = 1,$$

pois o operador T si se atopa nas condicións do resultado no seu dominio. Ademais, e posto que as condicións impostas impiden que o operador T teña puntos fixos en $\partial_P C_3$, aplicando a propiedade de punto fixo temos

$$i(T, C_3, P) = i(T, P_{r^{(3)}, R^{(3)}}(P)) - i(T, C_1, P) - i(T, C_2, P) = -1.$$

Que T ten, polo menos, un punto fixo localizado en C_3 séguese da propiedade de punto fixo. De aquí é tamén claro que o operador T ten, polo menos, tres puntos fixos en $P_{r^{(3)}, R^{(3)}} = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \times \left(\frac{3}{10}, 3\right)$.

Enunciamos a continuación o resultado de multiplicidade mais xeral no que se pode encadrar o exemplo anterior.

Teorema 3.62. *Sexan $r^{(j)}, R^{(j)} \in \mathbb{R}^2$, con $0 < r_k^{(j)} < R_k^{(j)}$ ($k \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, 2m + 1\}$, $m \in \mathbb{N}$) tales que os conxuntos $\overline{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}}$ satisfán*

$$\bigcup_{j=1}^{2m} \overline{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}} \subset \overline{P}_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}} \text{ e } \overline{P}_{r^{(s)}, R^{(s)}} \cap \overline{P}_{r^{(l)}, R^{(l)}} = \emptyset, \text{ para } s, l \in \{1, 2, \dots, 2m\}, (s \neq l).$$

Se $T = (T_1, T_2) : \overline{P}_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que se atopa nalgunha das seguintes situacións:

- (a) (**Versión normada**): *Para cada $j \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$, o operador T satisfai en $\overline{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}}$ algunha das seguintes condicións para cada $k \in \{1, 2\}$*
 - (i) $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$ e $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$;
 - (ii) $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$ e $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$,
- (b) (**Versión clásica**): *Para cada $j \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$, o operador T satisfai en $\overline{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}}$ algunha das seguintes condicións para cada $k \in \{1, 2\}$*
 - (i) $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$ e $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$;
 - (ii) $T_k x \not\leq_{P_k} x_k$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$ e $T_k x \leq_{P_k} x_k$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$,
- (c) (**Versión homotópica**): *Para cada $j \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$, o operador T satisfai en $\overline{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}}$ algunha das seguintes condicións para cada $k \in \{1, 2\}$ sendo $h_k^{(j)} \in P_k \setminus \{0\}$*
 - (i) $x_k - T_k x \neq \mu h_k^{(j)}$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$, $\mu \geq 0$ e $T_k x \neq \lambda x_k$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$, $\lambda \geq 1$;
 - (ii) $T_k x \neq \lambda x_k$, se $\|x_k\| = r_k^{(j)}$, $\lambda \geq 1$ e $x_k - T_k x \neq \mu h_k^{(j)}$, se $\|x_k\| = R_k^{(j)}$, $\mu \geq 0$.

Entón T ten, polo menos, $2m + 1$ puntos fixos $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{2m+1}$ tales que

$$\bar{x}^j \in P_{r^{(j)}, R^{(j)}}, j \in \{1, 2, \dots, 2m\} \text{ e } \bar{x}^{2m+1} \in P_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}} \setminus \bigcup_{j=1}^{2m} \bar{P}_{r^{(j)}, R^{(j)}}.$$

Demostración. Séguese do Corolario 3.17, do Corolario 3.33, ou do Teorema 3.18 que

$$i(T, P_{r^{(j)}, R^{(j)}}, P) = \pm 1, j = 1, 2, \dots, 2m + 1.$$

Da propiedade de punto fixo temos que o operador T ten puntos fixos $\bar{x}^j \in P_{r^{(j)}, R^{(j)}}$ con $j = 1, 2, \dots, 2m$. Claramente cada un destes puntos fixos son distintos, pois os correspondentes conxuntos son disxuntos por hipótese.

Ademais, é claro que podemos utilizar a propiedade de aditividade tendo que

$$i\left(T, P_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}} \setminus \bigcup_{l=1}^{2m} \bar{P}_{r^{(l)}, R^{(l)}}, P\right) = i(T, P_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}}, P) - \sum_{l=1}^{2m} i(T, P_{r^{(l)}, R^{(l)}}, P),$$

que é claramente un número impar e xa que logo, non nulo. Novamente a propiedade de punto fixo garántenos a existencia do punto fixo $\bar{x}^{2m+1} \in P_{r^{(2m+1)}, R^{(2m+1)}} \setminus \bigcup_{l=1}^{2m} \bar{P}_{r^{(l)}, R^{(l)}}$, distinto dos anteriores. Isto conclúe a nosa proba. \square

Resultados de multiplicidade análogos poden enunciarse para operadores definidos en conxuntos mais xerais para aquelas versións nas que coñecemos o índice en todas as situacións compresivo-expansivas. Isto é, para as formas fortes da versión normada, da versión clásica e da versión homotópica. Enunciamos a continuación os resultados adaptados para o caso da versión normada. As condicións correspondentes ás outras dúas versións poden adaptarse facilmente, como fixemos na Observación 3.57 ou no Teorema 3.62, respectivamente.

Teorema 3.63. *Sexan para cada $k \in \{1, 2\}$, \mathcal{O}_k un aberto relativo e limitado de P_k , e $\Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \dots, \Omega_k^{(n_k)}$, ($n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq 2$) abertos relativos e limitados de P_k tales que as súas clausuras $\bar{\Omega}_k^{(1)}, \bar{\Omega}_k^{(2)}, \dots, \bar{\Omega}_k^{(n_k)}$ son conxuntos estritamente estrelados en P_k e que satisfán que*

$$0 \in \Omega_k^{(1)}, \quad \bar{\Omega}_k^{(j)} \subset \Omega_k^{(j+1)}, j \in \{1, \dots, n_k - 1\}, \text{ e } \bar{\Omega}_k^{(n_k)} \subset \mathcal{O}_k.$$

Supoñamos que $T = (T_1, T_2) : \bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1^{(1)} \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2^{(1)} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que para cada $k \in \{1, 2\}$ satisfai algunha das seguintes condicións en $\bar{\mathcal{O}}_1 \setminus \Omega_1^{(1)} \times \bar{\mathcal{O}}_2 \setminus \Omega_2^{(1)}$

- (i) $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(l)}$ con $l \in \{2m + 1 : m = 0, \dots, \lfloor \frac{n_k - 1}{2} \rfloor\}$;
- $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(s)}$ con $s \in \{2m : m = 1, \dots, \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor\}$; e
- $(-1)^{n_k} \|T_k x\| > (-1)^{n_k} \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \mathcal{O}_k$,

(ii) $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(l)}$ con $l \in \{2m+1 : m=0, \dots, \lfloor \frac{n_k-1}{2} \rfloor\}$;

$\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(s)}$ con $s \in \{2m : m=1, \dots, \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor\}$; e

$(-1)^{n_k} \|T_k x\| < (-1)^{n_k} \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \mathcal{O}_k$.

Entón, o operador T ten, polo menos, $n_1 \cdot n_2$ puntos fixos distintos en $\mathcal{O}_1 \setminus \overline{\Omega}_1^{(1)} \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{\Omega}_2^{(1)}$.

Observación 3.64. Nas hipóteses do resultado anterior é claro que o operador T ten, polo menos, un punto fixo en cada un dos seguintes conxuntos

$$\Omega_1^{(j+1)} \setminus \overline{\Omega}_1^{(j)} \times \Omega_2^{(l+1)} \setminus \overline{\Omega}_2^{(l)}, j \in \{1, \dots, n_1 - 1\}, l \in \{1, \dots, n_2 - 1\},$$

$$\mathcal{O}_1 \setminus \overline{\Omega}_1^{(n_1)} \times \Omega_2^{(s+1)} \setminus \overline{\Omega}_2^{(s)}, s \in \{1, \dots, n_1 - 1\},$$

$$\Omega_1^{(t+1)} \setminus \overline{\Omega}_1^{(t)} \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{\Omega}_2^{(n_2)}, t \in \{1, \dots, n_2 - 1\}, e$$

$$\mathcal{O}_1 \setminus \overline{\Omega}_1^{(n_1)} \times \mathcal{O}_2 \setminus \overline{\Omega}_2^{(n_2)}.$$

Teorema 3.65. *Sexan para cada $k \in \{1, 2\}$, $\mathcal{O}_k^{(1)}, \mathcal{O}_k^{(2)}, \dots, \mathcal{O}_k^{(2m+1)}$ abertos relativos e limitados de P_k , $\Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \dots, \Omega_k^{(2m+1)}$ abertos relativos e limitados de P_k tales que $\overline{\Omega}_k^{(1)}, \overline{\Omega}_k^{(2)}, \dots, \overline{\Omega}_k^{(2m+1)}$ son estritamente estrelados en P_k . Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfan*

$$\overline{\Omega}_k^{(j)} \subset \mathcal{O}_k^{(j)}, j \in \{1, \dots, 2m+1\},$$

$$\bigcup_{l=1}^{2m} (\overline{\mathcal{O}}_1^{(l)} \setminus \Omega_1^{(l)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(l)} \setminus \Omega_2^{(l)}) \subset (\overline{\mathcal{O}}_1^{(2m+1)} \setminus \Omega_1^{(2m+1)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(2m+1)} \setminus \Omega_2^{(2m+1)}), e$$

$$(\overline{\mathcal{O}}_1^{(s)} \setminus \Omega_1^{(s)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(s)} \setminus \Omega_2^{(s)}) \cap (\overline{\mathcal{O}}_1^{(t)} \setminus \Omega_1^{(t)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(t)} \setminus \Omega_2^{(t)}), s, t \in \{1, 2, \dots, 2m\}, (t \neq s).$$

Se $T = (T_1, T_2) : \overline{\mathcal{O}}_1^{(2m+1)} \setminus \Omega_1^{(2m+1)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(2m+1)} \setminus \Omega_2^{(2m+1)} \rightarrow P$ é un operador compacto tal que para cada $j \in \{1, 2, \dots, 2m+1\}$, satisfai en $\overline{\mathcal{O}}_1^{(j)} \setminus \Omega_1^{(j)} \times \overline{\mathcal{O}}_2^{(j)} \setminus \Omega_2^{(j)}$ algunha das seguintes condicións para cada $k \in \{1, 2\}$

(i) $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(j)}$ e $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \overline{\mathcal{O}}_k^{(j)}$;

(ii) $\|T_k x\| < \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \Omega_k^{(j)}$ e $\|T_k x\| > \|x_k\|$, se $x_k \in \partial_{P_k} \overline{\mathcal{O}}_k^{(j)}$,

entón T ten, polo menos, $2m+1$ puntos fixos $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^{2m+1}$ tales que

$$\bar{x}^j \in \mathcal{O}_1^{(j)} \setminus \overline{\Omega}_1^{(j)} \times \mathcal{O}_2^{(j)} \setminus \overline{\Omega}_2^{(j)}, j \in \{1, 2, \dots, 2m\} e$$

$$\bar{x}^{2m+1} \in \left(\mathcal{O}_1^{(2m+1)} \setminus \overline{\Omega}_1^{(2m+1)} \times \mathcal{O}_2^{(2m+1)} \setminus \overline{\Omega}_2^{(2m+1)} \right) \setminus \bigcup_{l=1}^{2m} \left(\mathcal{O}_1^{(l)} \setminus \overline{\Omega}_1^{(l)} \times \mathcal{O}_2^{(l)} \setminus \overline{\Omega}_2^{(l)} \right).$$

Capítulo 4

Aplicacións a sistemas diferenciais e integrais

As distintas versións do teorema de Krasnoselskii expostas no capítulo anterior permiten establecer condicións suficientes para garantir a existencia de solucións positivas con todas as compoñentes non triviais [37, 38, 39, 40] en distintos problemas diferenciais e integrais, como manifestabamos no segundo capítulo.

Neste capítulo, detallaremos a relación existente entre as solucións de problemas diferenciais e os puntos fixos de operadores integrais, un feito clave que permite aplicar de maneira efectiva a teoría de punto fixo. Unha vez tratada esta cuestión traballaremos con distintos tipos de sistemas, tanto diferenciais como integrais, procurando condicións baixo as cales a aplicación directa dos resultados do capítulo anterior garanta a existencia de solucións.

En particular, aplicaremos os resultados orixinais obtidos ao longo do traballo. A saber: a versión vectorial normada en rexións anulares, a versión vectorial homotópica coas condicións máis febles (manifestando que os requirimentos necesarios para a súa demostración non resultan restritivos no contexto das aplicacións) tamén formulada en rexións anulares e a versión vectorial clásica para operadores en conxuntos máis xerais.

4.1 Problemas diferenciais e integrais: unha correspondencia

Con anterioridade poñiamos de manifesto a existencia dunha correspondencia entre as solucións do problema de fronteira da forma (2.1) e os puntos fixos do operador integral dado por (2.2). Este non é un caso illado. Son múltiples as ocasións nas que un problema diferencial pode transformarse nunha ecuación integral de xeito que as súas solucións, que serán puntos fixos dun operador integral, se corresponden coas solucións do problema diferencial orixinal, e viceversa [5].

Definición 4.1. Sexa $F \subset L^1(I; \mathbb{R})$ un espazo normado no conxunto de funcións Lebesgue integrables nun intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $K : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unha función tal que $K(t, \cdot)g(\cdot) \in L^1(I; \mathbb{R})$ para todo $t \in I$ e $g \in F$. Chamamos **operador integral** ao operador linear $T : F \rightarrow \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ dado por

$$Tg(t) := \int_I K(t, s)g(s)ds, \quad t \in I,$$

onde K se denomina **núcleo integral** e $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ denota o conxunto das funcións definidas en I con valores en \mathbb{R} . Ademais, cando T sexa o operador inverso dun operador diferencial \mathcal{L} , o núcleo integral K , que pasaremos a denotar coa letra G , recibe o nome de **función de Green** asociada a \mathcal{L}^{-1} .

Supoñamos que temos unha ecuación diferencial co seguinte aspecto

$$\mathcal{L}x = f(\cdot, x(\cdot)),$$

onde $f \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, con $T \in \mathbb{R}_+$, e $\mathcal{L} : (\mathcal{C}^s([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^s}) \rightarrow (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é un operador diferencial tal que s é a maior orde de derivación involucrada en \mathcal{L} . Asumamos tamén que a nosa ecuación se cumprimenta con condicións iniciais ou de fronteira de xeito que o subconxunto de funcións en $(\mathcal{C}^s([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^s})$ que as satisfán é un subespazo vectorial pechado de $\mathcal{C}^s([0, T]; \mathbb{R})$. Denotemos por E este subespazo.

Cando o operador $\mathcal{L}|_E$ sexa invertible, o seu operador inverso será un operador integral e, a solución do problema virá dada por

$$x = (\mathcal{L}|_E)^{-1}(f(\cdot, x(\cdot))),$$

ou o que é o mesmo, a solución satisfai a ecuación integral tipo Fredholm [47] de segunda especie

$$x(t) = (\mathcal{L}|_E)^{-1}(f(t, u(t))) = \int_0^T G(t, s)f(s, x(s)), \quad t \in [0, T],$$

sendo G a función de Green asociada a $(\mathcal{L}|_E)^{-1}$.

Observación 4.2. Naqueles casos nos que sexa posible atopar esta correspondencia, é claro que unha función $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ será solución do problema diferencial, se e só se, é un punto fixo do operador \mathcal{S} dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ \{x : t \in [0, T] \rightarrow x(t)\} &\longrightarrow \left\{ \mathcal{S}x : t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{S}x(t) = \int_0^T G(t, s)f(s, x(s))ds \right\}. \end{aligned}$$

Neste capítulo, traballaremos con sistemas diferenciais co seguinte aspecto

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 x_1 = f_1(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot)), \\ \mathcal{L}_2 x_2 = f_2(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot)), \end{cases}$$

onde $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, para $T \in \mathbb{R}_+$, e $\mathcal{L}_1 : \mathcal{C}^s([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ e $\mathcal{L}_2 : \mathcal{C}^l([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ son operadores diferenciais tales que s e l son as súas ordes máis altas de derivación, respectivamente.

Ademais, este sistema estará suxeito a condicións sobre x e y de xeito que os respectivos subconxuntos de $\mathcal{C}^s([0, T]; \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^l([0, T]; \mathbb{R})$ que as satisfán son subespazos vectoriais dos mesmos, que denotaremos por F_1 e F_2 , e tales que os operadores $\mathcal{L}_1|_{F_1}$ e $\mathcal{L}_2|_{F_2}$ son invertibles.

Nestes supostos, é claro que a solución do noso sistema satisfará

$$\begin{cases} x_1 = (\mathcal{L}_1|_{F_1})^{-1} f_1(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot)), \\ x_2 = (\mathcal{L}_2|_{F_2})^{-1} f_2(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot)), \end{cases}$$

ou equivalentemente, as solucións do sistema diferencial correspóndense con solucións do sistema de ecuacións integrais tipo Hammerstein

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^T G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds, & t \in [0, T], \\ x_2(t) = \int_0^T G_2(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.1)$$

onde G_1 e G_2 son as funcións de Green asociadas a $(\mathcal{L}_1|_{F_1})^{-1}$ e $(\mathcal{L}_2|_{F_2})^{-1}$, respectivamente.

Deste xeito, estudaremos a existencia de solución do sistema diferencial orixinal, ou equivalentemente do sistema de ecuacións integrais (4.1), aplicando os resultados de teoría de punto fixo tratados no capítulo anterior ao operador integral en espazos produto co seguinte aspecto

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) : X \times X \longrightarrow X \times X \\ &\{x = (x_1, x_2)\} \longrightarrow \{\mathcal{S}x = (\mathcal{S}_1x, \mathcal{S}_2x)\}, \end{aligned}$$

onde $X := (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é o espazo de Banach das funcións continuas coa norma do supremo e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1x &= \mathcal{S}_1(x_1, x_2) : t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_1(x_1, x_2)(t) = \int_0^T G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \text{ e} \\ \mathcal{S}_2x &= \mathcal{S}_2(x_1, x_2) : t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_2(x_1, x_2)(t) = \int_0^T G_2(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds. \end{aligned}$$

4.2 Existencia de solución para sistemas diferenciais e integrais

Neste punto, empregaremos os resultados mencionados na introdución deste capítulo para obter condicións de existencia de solucións con compoñentes positivas en sistemas diferenciais de segunda orde con condicións periódicas (xeneralizando a sistemas o traballo presentado en [42]) e en sistemas con condicións Robin (guiándonos polos resultados establecidos en [46]). Así mesmo, seguindo [40], introduciremos resultados de existencia para sistemas integrais da forma (4.1).

4.2.1 Solucións periódicas con compoñentes positivas para un sistema diferencial de segunda orde

Estudaremos aquí baixo que condicións conta con solución non trivial un sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde con condicións periódicas da seguinte forma

$$\begin{cases} x_1''(t) + a_1(t)x_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t)), & t \in [0, T], \\ x_2''(t) + a_2(t)x_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)), & t \in [0, T], \\ x_1(0) = x_1(T), & x_1'(0) = x_1'(T), \\ x_2(0) = x_2(T), & x_2'(0) = x_2'(T), \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $T \in \mathbb{R}_+$, as aplicacións $f_1, f_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas e $a_k \in L^{p_k}([0, T]; \mathbb{R})$ con $1 \leq p_k \leq \infty$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Asumiremos en todo momento que, para cada $k \in \{1, 2\}$, os problemas homoxéneos

$$\begin{cases} x_k''(t) + a_k(t)x_k(t) = 0, & t \in [0, T], \\ x_k(0) = x_k(T), & x_k'(0) = x_k'(T), \end{cases} \quad (4.3)$$

son non resoantes, é dicir, a súa única solución é a trivial. Nestas circunstancias pódese probar que, baixo certas condicións sobre $a_k \in L^{p_k}([0, T]; \mathbb{R})$, a función de Green G_k correspondente ten signo constante en $[0, T] \times [0, T]$. Tales condicións poden consultarse en [42] e varían en función do valor que toma p_k . Cando $a_k \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$, ou en particular $a_k \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$, sabemos que a función de Green ten signo constante se satisfai algunha das seguintes condicións

(\mathcal{C}_1) $a_k(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, T]$ e a_k é negativa nun conxunto de medida non nula.

(\mathcal{C}_2) $a_k(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$, a_k é positiva nun conxunto de medida non nula e $\|a_k\|_\infty < (\frac{\pi}{T})^2$.

Cando se satisfai (\mathcal{C}_1) temos que $G_k(t, s) < 0$ para todo $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ e cando se satisfai (\mathcal{C}_2) que $G_k(t, s) > 0$ para todo $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.

Observación 4.3. No caso de termos unha función constante $a_k(t) \equiv \eta^2$ con $\eta \in (0, \frac{\pi}{T})$, a función de Green G_k será positiva.

Por outra parte, e como poñiamos de manifesto na sección anterior, as solucións do sistema (4.2) correspóndense cos puntos fixos do operador integral $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) : X \times X \rightarrow X \times X$, onde $X = (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é o espazo de Banach das funcións continuas coa norma do supremo, dado por

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1(x_1, x_2)(t) := \int_0^T G_1(t, s)f_1(s, x_1(s), x_2(s))ds, & t \in [0, T], \\ \mathcal{S}_2(x_1, x_2)(t) := \int_0^T G_2(t, s)f_2(s, x_1(s), x_2(s))ds, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (4.4)$$

onde G_k é a función de Green asociada a $(\mathcal{L}_k|_{F_k})^{-1}$ con \mathcal{L}_k o operador diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k : \mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) \\ \{x : t \in [0, T] \rightarrow x(t)\} &\longrightarrow \{\mathcal{L}_k x : t \in [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_k x(t) = x''(t) + a_k(t)x(t)\}, \end{aligned}$$

e $F_k = \{x \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R}) : x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)\}$ é o subespazo vectorial pechado de $\mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R})$ ao que restrinximos \mathcal{L}_k .

Observación 4.4. A función de Green asociada a $(\mathcal{L}_k|_{F_k})^{-1}$ pode probarse continua, como pode consultarse en [5, Sección 1.4].

Buscaremos os puntos fixos do operador \mathcal{S} restrinxido ao cono $P_1 \times P_2$, onde para cada $k \in \{1, 2\}$

$$P_k = \left\{ x_k \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) : \min_{t \in [0, T]} x_k(t) \geq c_k \|x_k\|_\infty \right\},$$

con $c_k = \min \left\{ \frac{m_k}{M_k}, \frac{M_k}{m_k} \right\}$, sendo

$$m_k := \min_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s) \quad \text{e} \quad M_k := \max_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s).$$

Observación 4.5. Observamos que cando G_k é positivo se ten que $0 < m_k < M_k$ e polo tanto $c_k = \frac{m_k}{M_k} \in (0, 1)$ e cando G_k é negativo, entón $m_k < M_k < 0$ de onde $c_k = \frac{M_k}{m_k} \in (0, 1)$.

Observación 4.6. Fixado $k \in \{1, 2\}$, sábese [42] que cando $a_k(t) \equiv -\eta_k^2$, para $\eta_k \in (0, \infty)$, os valores mínimo e máximo da función de Green veñen dados por

$$m_k = -\frac{1 - e^{\eta_k T}}{2\eta_k(e^{\eta_k T} - 1)}, \quad M_k = -\frac{e^{\frac{\eta_k T}{2}}}{\eta_k(e^{\eta_k T} - 1)}, \quad (4.5)$$

e cando $a_k(t) \equiv \eta_k^2$, para $\eta_k \in (0, \frac{\pi}{T})$, por

$$m_k = \frac{1}{2\eta_k} \cot\left(\frac{\eta_k T}{2}\right), \quad M_k = \frac{1}{2\eta_k \text{sen}\left(\frac{\eta_k T}{2}\right)}. \quad (4.6)$$

Para estar en condicións de aplicar os resultados do capítulo anterior precisamos que $\mathcal{S}|_{P_1 \times P_2}$ sexa un operador compacto que aplica o cono $P_1 \times P_2$ en si mesmo. A continuación probaremos que a continuidade das funcións de Green e das f_k nos permite asegurar a compacidade requirida. Así mesmo, veremos tamén que baixo certas condicións podemos garantir que $\mathcal{S}(P_1 \times P_2) \subset P_1 \times P_2$.

Proposición 4.7. *Se $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})^2$, entón o operador \mathcal{S} dado por (4.4) é compacto.*

Demostración. En primeiro lugar, vexamos a continuidade de \mathcal{S} . Farémolo vendo a súa continuidade secuencial. Sexan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$ unha sucesión e $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$ tales que $x_n \rightarrow x$ en $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$, isto é

$$\|x_n - x\| = \max\{\|x_1^n - x_1\|_\infty, \|x_2^n - x_2\|_\infty\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Vexamos que $\mathcal{S}x_n \rightarrow \mathcal{S}x$ en $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$. Posto que $x_n \rightarrow x$ en $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$ e para cada $k \in \{1, 2\}$, a función f_k é continua, é claro que $f_k(\cdot, x_n(\cdot)) \rightarrow f_k(\cdot, x(\cdot))$ en $\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ ou equivalentemente

$$\|f_k(\cdot, x_n(\cdot)) - f_k(\cdot, x(\cdot))\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Deste xeito dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $N_k \in \mathbb{N}$ de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_k$ se ten que

$$\|f_k(\cdot, x_n(\cdot)) - f_k(\cdot, x(\cdot))\|_\infty < \frac{\varepsilon}{T\tilde{M}_k},$$

onde $\tilde{M}_k = \max_{(t,s) \in [0,T]^2} |G_k(t,s)|$, que existe pola continuidade de G_k . Polo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_k$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_k x_n - \mathcal{S}_k x\|_\infty &= \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^T G_k(t, s) [f_k(s, x_n(s)) - f_k(s, x(s))] ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^T |G_k(t, s)| |f_k(s, x_n(s)) - f_k(s, x(s))| ds \\ &\leq \max_{s \in [0, T]} |f_k(s, x_n(s)) - f_k(s, x(s))| \max_{t \in [0, T]} \int_0^T |G_k(t, s)| ds < \varepsilon, \end{aligned}$$

así pois, tomando $\tilde{N} = \max\{N_1, N_2\}$ temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \tilde{N}$

$$\|\mathcal{S}x_n - \mathcal{S}x\| = \max\{\|\mathcal{S}_1 x_n - \mathcal{S}_1 x\|_\infty, \|\mathcal{S}_2 x_n - \mathcal{S}_2 x\|_\infty\} < \varepsilon,$$

atopando o que buscábamos.

Agora vexamos que \mathcal{S} é un operador compacto. Sexa $U \subset \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$ un subconxunto limitado e vexamos que $\mathcal{S}(U)$ é relativamente compacto. Empregaremos o teorema de Ascoli-Arzelá [4, Theorem 4.25], polo cal un subconxunto das funcións continuas uniformemente limitado e uniformemente equicontinuo é relativamente compacto.

Comezamos vendo que $\mathcal{S}(U)$ é uniformemente limitado. Como U é limitado, existe $R \in \mathbb{R}_+$ tal que se $x \in U$ entón $\|x\|_\infty < R$. Por outra parte, para cada $k \in \{1, 2\}$, como f_k é continua en $[0, T] \times B_{\mathbb{R}^2}[0, R]$, está limitada por un valor $S_k \in \mathbb{R}_+$. Deste xeito, dado $y \in \mathcal{S}(U)$ existe $x \in U$ tal que $y = \mathcal{S}x$, e ademais para cada $k \in \{1, 2\}$ temos

$$\|y_k\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^T G_k(t, s) f_k(s, x(s)) ds \right| \leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^T |G_k(t, s)| |f_k(s, x(s))| ds \leq T\tilde{M}_k S_k.$$

Deste xeito, é claro que o conxunto $\{y(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], y \in \mathcal{S}(U)\}$ está limitado por $\alpha = \max\{T\tilde{M}_1 S_1, T\tilde{M}_2 S_2\}$ e, por definición, $\mathcal{S}(U)$ é uniformemente limitado.

Antes de probar a equicontinuidade de $\mathcal{S}(U)$ veremos que, para cada $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$, a aplicación $\mathcal{S}x$ é uniformemente continua. En efecto, como $x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})^2$, existe $R \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|x\|_\infty \leq R$. Ademais, como para cada $k \in \{1, 2\}$, f_k é continua en $[0, T] \times B_{\mathbb{R}^2}[0, R]$, esta estará limitada neste conxunto por certa constante $S_k \in \mathbb{R}_+$. Sexa agora $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, como para cada

$s \in [0, T]$ sabemos que $G_k(\cdot, s)$ é continua no compacto $[0, T]$ e así uniformemente continua, existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que se $t_1, t_2 \in [0, T]$ son tales que $|t_1 - t_2| < \delta$, entón

$$|G_k(t_1, s) - G_k(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{TS_k},$$

e, xa que logo, para cada $k \in \{1, 2\}$ temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_k x(t_1) - \mathcal{S}_k x(t_2)| &= \left| \int_0^T [G_k(t_1, s) - G_k(t_2, s)] f_k(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^T |G_k(t_1, s) - G_k(t_2, s)| |f_k(s, x(s))| ds < \int_0^T \frac{\varepsilon}{TS_k} |f_k(s, x(s))| ds = \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde podemos concluír.

Chegados a este punto, que $\mathcal{S}(U)$ é uniformemente equicontinuo tense de observar que para cada $x \in U$, como este conxunto é limitado, podemos tomar unha mesma cota $S_k \in \mathbb{R}_+$ para f_k ($k = 1, 2$) de xeito que no razoamento visto anteriormente de que a función $\mathcal{S}x$ é uniformemente continua, o δ non depende do $x \in U$. Así, o que temos é que dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ de xeito que se $t_1, t_2 \in [0, T]$ son tales que $|t_1 - t_2| < \delta$, entón $\|y(t_1) - y(t_2)\| < \varepsilon$ para todo $y \in \mathcal{S}(U)$. Isto é, $\mathcal{S}(U)$ é uniformemente equicontinuo. \square

Proposición 4.8. *Supoñamos que se satisfai algunhas das seguintes condicións para cada $k \in \{1, 2\}$*

(a) *se G_k é positivo, entón f_k é non negativa;*

(b) *se G_k é negativo, entón f_k é non positiva.*

Entón o operador \mathcal{S} leva o cono $P_1 \times P_2$ en si mesmo.

Demostración. Sexa $(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2$ e para $k \in \{1, 2\}$ supoñamos que G_k é positivo. Entón temos para cada $t \in [0, T]$ a seguinte cadea de desigualdades en virtude da hipótese

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\geq \int_0^T \min_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s) \frac{\max_{t \in [0, T]} G_k(t, s)}{\max_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s)} f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &= \frac{m_k}{M_k} \int_0^T \max_{t \in [0, T]} G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \frac{m_k}{M_k} \|\mathcal{S}_k(x_1, x_2)\|_\infty \\ &= c_k \|\mathcal{S}_k(x_1, x_2)\|_\infty, \end{aligned}$$

de onde se ten claramente que $\mathcal{S}_k(x_1, x_2) \in P_k$.

Por outra parte, se G_k é negativo, entón a correspondente cadea de desigualdades para $t \in [0, T]$ é a seguinte

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\
&\geq \int_0^T \max_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s) \frac{\min_{t \in [0, T]} G_k(t, s)}{\min_{t, s \in [0, T]} G_k(t, s)} f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\
&= \frac{M_k}{m_k} \int_0^T \min_{t \in [0, T]} G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \frac{M_k}{m_k} \|\mathcal{S}_k(x_1, x_2)\|_\infty \\
&= c_k \|\mathcal{S}_k(x_1, x_2)\|_\infty,
\end{aligned}$$

e do mesmo xeito temos que $\mathcal{S}_k(x_1, x_2) \in P_k$. \square

A continuación presentamos un primeiro resultado que impón condicións sobre as funcións f_k ($k = 1, 2$) supoñendo que as funcións de Green son positivas. Baixo as hipóteses deste novo resultado poderemos garantir que o operador integral \mathcal{S} dado por (4.4) se atopa nas condicións do Teorema 3.15.

Teorema 4.9. *Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ estamos nas condicións nas que G_k é positivo e f_k é non negativa. Se existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $0 < r_k < R_k$ ($k = 1, 2$) e para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións*

$$(i) \ f_k(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_k T c_k} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k r_k, r_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T], \text{ e}$$

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_k T} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k R_k, R_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T];$$

$$(ii) \ f_k(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_k T} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k r_k, r_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T], \text{ e}$$

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_k T c_k} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k R_k, R_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T],$$

entón, o problema (4.2) ten polo menos unha solución positiva (x_1, x_2) tal que $r_k \leq \|x_k\|_\infty \leq R_k$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Xa sabemos que o operador \mathcal{S} aplica o cono en si mesmo e que é compacto. Consideremos a súa restrición a $(\bar{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$. Probemos o caso no que se ten a condición (i) nas dúas compoñentes.

Se $x_k \in \partial_{P_k}(P_k)_{r_k}$ e $x_j \in (\bar{P}_j)_{r_j, R_j}$ entón temos que $\|x_k\|_\infty = r_k$, $c_k r_k \leq x_k(t) \leq r_k$ e $c_j r_j \leq x_j(t) \leq R_j$ para cada $t \in [0, T]$. Aplicando a condición (i) temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq m_k \int_0^T f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\
&\geq \frac{1}{T c_k} \int_0^T x_k(s) ds \geq r_k = \|x_k\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T],
\end{aligned}$$

e de aquí é claro que $\|\mathcal{S}_k x\|_\infty \geq \|x_k\|_\infty$ para $\|x_k\|_\infty = r_k$, $x_j \in (\bar{P}_j)_{r_j, R_j}$ ($j \neq k$).

Por outra parte, se $x_k \in \partial P_k(P_k)_{R_k}$ e $x_j \in (\overline{P}_j)_{r_j, R_j}$ entón $\|x_k\|_\infty = R_k$, $c_k R_k \leq x_k(t) \leq R_k$ e $c_j r_j \leq x_j(t) \leq R_j$ para cada $t \in [0, T]$ e por (i) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq M_k \int_0^T f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T x_k(s) ds \leq R_k = \|x_k\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T], \end{aligned}$$

e así $\|\mathcal{S}_k x\|_\infty \leq \|x_k\|_\infty$ para $\|x_k\|_\infty = R_k$, $x_j \in (\overline{P}_j)_{r_j, R_j}$ ($j \neq k$).

Está pois o operador \mathcal{S} nas condicións da *Versión Compresión-compresión* do Teorema 3.15 e ten un punto fixo $(x_1, x_2) \in (\overline{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2, R_2}$ que é unha solución do problema (4.2). \square

Observación 4.10. Observamos que no teorema anterior, o motivo polo que pedimos que para cada $k \in \{1, 2\}$ a función f_k sexa non negativa en todo o seu dominio é para poder garantir que o operador \mathcal{S} leva o cono en si mesmo, como afirma a Proposición 4.8. En realidade, no contexto deste resultado, é suficiente con pedir

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq 0, \text{ para cada } t \in [0, T] \text{ e } (x_1, x_2) \in [c_1 r_1, R_1] \times [c_2 r_2, R_2], \quad (4.7)$$

para termos que $\mathcal{S}((\overline{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2, R_2}) \subset P_1 \times P_2$ e poder aplicar o Teorema 3.15, concluíndo igualmente o resultado.

En efecto, se $(x_1, x_2) \in (\overline{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2, R_2}$ claramente $c_k r_k \leq x_k(t) \leq R_k$ para $t \in [0, T]$ e de aquí, fixado $k \in \{1, 2\}$, por estar supoñendo que G_k é positivo e que se satisfai (4.7) temos que

$$\mathcal{S}_k(x_1, x_2)(t) \geq c_k \|\mathcal{S}_k(x_1, x_2)\|_\infty \text{ para cada } t \in [0, T].$$

Logo $\mathcal{S}_k(x_1, x_2) \in P_k$ como na Proposición 4.8.

Exemplo 4.11. Probaremos con axuda deste resultado que existe unha solución 2π -periódica con compoñentes non triviais para o sistema

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{16}x(t) = \frac{3}{2}\text{sen}(x(t)) + y^3(t) + \frac{t}{2\pi} + 2, & t \in \mathbb{R}, \\ y''(t) + \frac{1}{9}y(t) = y^2(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Probar a existencia dunha solución 2π -periódica deste sistema equivale a probar a existencia de solución dun problema de fronteira da forma dada por (4.2) onde $T = 2\pi$, $a_1(t) \equiv \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $a_2(t) \equiv \left(\frac{1}{3}\right)^2$ e as funcións f_1 e f_2 veñen dadas por

$$f_1 : (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow f_1(t, x, y) = \frac{3}{2}\text{sen}(x) + y^3 + \frac{t}{2\pi} + 2, \text{ e}$$

$$f_2 : (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow f_2(t, x, y) = y^2.$$

Observamos que para cada $k \in \{1, 2\}$, a función de Green G_k é positiva en virtude do sinalado na Observación 4.10. Ademais, os valores mínimo e máximo destas funcións no seu dominio veñen dadas polas fórmulas en (4.15), resultando

$$m_1 = 2, \quad M_1 = 2\sqrt{2}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{e} \quad M_2 = \sqrt{3},$$

de onde $c_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{1}{2}$.

Tomemos $r_1 = 1$, $R_1 = 64\pi$, $r_2 = \frac{1}{4\pi}$ e $R_2 = 1$. Temos claramente que, para cada $k \in \{1, 2\}$

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq 0, \quad \text{para cada } t \in [0, 2\pi] \text{ e } (x, y) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 64\pi \right] \times \left[\frac{1}{8\pi}, 1 \right],$$

polo que, en virtude da Observación 4.10, temos que $\mathcal{S} \left((\overline{P}_1)_{1,64\pi} \times (\overline{P}_2)_{\frac{1}{4\pi},1} \right) \subset P_1 \times P_2$ e o operador \mathcal{S} é compacto.

Vexamos agora que para $k = 1$ se satisfai a condición (i) do Teorema 4.9, isto é, que se teñen

$$f_1(t, x, y) \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}x, \quad \text{para cada } x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], \quad y \in \left[\frac{1}{8\pi}, 1 \right], \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{e}$$

$$f_1(t, x, y) \leq \frac{\sqrt{2}}{8\pi}x, \quad \text{para cada } x \in [32\sqrt{2}\pi, 64\pi], \quad y \in \left[\frac{1}{8\pi}, 1 \right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

En efecto, e posto que $\text{sen}(x) \in (0, 1]$ para cada $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$, se fixamos $t_o \in [0, 2\pi]$ e $y_o \in \left[\frac{1}{8\pi}, 1 \right]$ é claro que

$$f_1(t_o, x, y_o) = \frac{3}{2}\text{sen}(x) + y_o^3 + \frac{t_o}{2\pi} + 2 \geq 2 \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}x, \quad \text{para cada } x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right], \quad \text{e que}$$

$$f_1(t_o, x, y_o) = \frac{3}{2}\text{sen}(x) + y_o^3 + \frac{t_o}{2\pi} + 2 \leq 6 \leq \frac{\sqrt{2}}{8\pi}x, \quad \text{para cada } x \in [32\sqrt{2}\pi, 64\pi].$$

Finalmente, temos que para $k = 2$ se satisfai a condición (ii) do mesmo resultado. É dicir, temos que

$$f_2(t, x, y) \leq \frac{\sqrt{3}}{6\pi}y, \quad \text{para cada } y \in \left[\frac{1}{8\pi}, \frac{1}{4\pi} \right], \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 64\pi \right], \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{e que}$$

$$f_2(t, x, y) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}y, \quad \text{para cada } y \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \quad x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 64\pi \right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Isto é claro pois, independentemente dos valores que tomen t e x temos claramente que

$$y \leq \frac{\sqrt{3}}{6\pi}, \quad \text{para cada } y \in \left[\frac{1}{8\pi}, \frac{1}{4\pi} \right] \quad \text{e} \quad y \geq \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}, \quad \text{para cada } y \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Podemos pois concluír a existencia de solución 2π -periódica para o sistema coas dúas compoñentes positivas. Ademais, sabemos que tal solución $(x, y) \in P_1 \times P_2$ satisfai que $1 \leq \|x\|_\infty \leq 64\pi$ e $\frac{1}{4\pi} \leq \|y\|_\infty \leq 1$.

Facemos notar que non estamos a aplicar o Teorema 4.9 como tal, pero si debilitado ao ter en conta a Observación 4.10. A función f_1 non é non negativa en todo o seu dominio. Porén, f_1 é non negativa no conxunto $[0, 2\pi] \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 64\pi\right] \times \left[\frac{1}{8\pi}, 1\right]$, e isto resulta suficiente.

Un resultado análogo ao Teorema 4.9 pode probarse cando as funcións de Green son ámbalas dúas negativas.

Teorema 4.12. *Supoñamos que estamos nas condicións nas que para cada $k \in \{1, 2\}$ temos que G_k é negativa e f_k é non positiva. Se existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $0 < r_k < R_k$ ($k = 1, 2$) e para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfái algunha das seguintes condicións*

$$(i) f_k(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_k T c_k} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k r_k, r_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T], \text{ e}$$

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_k T} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k R_k, R_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T];$$

$$(ii) f_k(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_k T} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k r_k, r_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T], \text{ e}$$

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_k T c_k} x_k, \text{ para cada } x_k \in [c_k R_k, R_k], x_j \in [c_j r_j, R_j], (j \neq k), t \in [0, T],$$

entón, o problema (4.2) ten polo menos unha solución positiva (x_1, x_2) tal que $r_k \leq \|x_k\|_\infty \leq R_k$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Probaremos o caso no que se ten (i) para $k = 1$ e (ii) para $k = 2$.

Sexa $x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{r_1}$ e $x_2 \in (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$. Entón $\|x_1\|_\infty = r_1$, $c_1 r_1 \leq x_1(t) \leq r_1$ e $c_2 r_2 \leq x_2(t) \leq R_2$ para cada $t \in [0, T]$ e así, por (i) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_0^T M_1 f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\geq \frac{1}{T c_1} \int_0^T x_1(s) ds \geq r_1 = \|x_1\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T], \end{aligned}$$

e de aquí $\|\mathcal{S}_1 x\|_\infty \geq \|x_1\|_\infty$ para $\|x_1\|_\infty = r_1$ e $x_2 \in (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$.

Se ademais $x_1 \in \partial_{P_1}(P_1)_{R_1}$ e $x_2 \in (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$, entón $\|x_1\|_\infty = R_1$, $c_1 R_1 \leq x_1(t) \leq R_1$ e $c_2 r_2 \leq x_2(t) \leq R_2$ para cada $t \in [0, T]$. De aquí novamente por (i) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq \int_0^T m_1 f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T x_1(s) ds \leq R_1 = \|x_1\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T], \end{aligned}$$

logo $\|\mathcal{S}_1 x\|_\infty \leq \|x_1\|_\infty$ para $\|x_1\|_\infty = R_1$ e $x_2 \in (\bar{P}_2)_{r_2, R_2}$.

Por outra parte, ao satisfacerse (ii) para $k = 2$ se tomamos $x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{r_2}$ e $x_1 \in (\bar{P}_1)_{r_1, R_1}$, entón satisfáise que $\|x_2\|_\infty = r_2$, $c_2 r_2 \leq x_2(t) \leq r_2$ e $c_1 r_1 \leq x_1(t) \leq R_1$ para cada $t \in [0, T]$ e así

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_2(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq \int_0^T m_2 f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T x_2(s) ds \leq r_2 = \|x_2\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T],\end{aligned}$$

polo que, directamente se ten que $\|\mathcal{S}_2 x\|_\infty \leq \|x_2\|_\infty$ para $\|x_2\|_\infty = r_2$ e $x_1 \in (\overline{P}_1)_{r_1, R_1}$.

Finalmente, se $x_2 \in \partial_{P_2}(P_2)_{R_2}$ e $x_1 \in (\overline{P}_1)_{r_1, R_1}$, temos que $\|x_2\|_\infty = R_2$, $c_2 R_2 \leq x_2(t) \leq R_2$ e $c_1 r_1 \leq x_1(t) \leq R_1$ para cada $t \in [0, T]$ e así

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(x_1, x_2)(t) &= \int_0^T G_2(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_0^T M_2 f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\geq \frac{1}{T c_2} \int_0^T x_2(s) ds \geq R_2 = \|x_2\|_\infty, \text{ para cada } t \in [0, T],\end{aligned}$$

polo que, $\|\mathcal{S}_2 x\|_\infty \geq \|x_2\|_\infty$ para $\|x_2\|_\infty = R_2$ e $x_1 \in (\overline{P}_1)_{r_1, R_1}$.

Acabamos de ver que o operator \mathcal{S} se atopa na *Versión Compresión-expansión* do Teorema 3.15 e temos pois un punto fixo do mesmo $(x_1, x_2) \in (\mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}_+), \|\cdot\|_\infty)^2$ tal que $r_k \leq \|x_k\|_\infty \leq R_k$ ($k = 1, 2$) que se corresponde, como sabemos, coa solución do problema (4.2) buscada. \square

Observación 4.13. Novamente, no contexto do teorema anterior, se para cada $k \in \{1, 2\}$ relaxamos as condicións sobre as funcións f_k pedindo soamente que

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq 0, \text{ para cada } t \in [0, T] \text{ e } (x_1, x_2) \in [c_1 r_1, R_1] \times [c_2 r_2, R_2],$$

e non sobre todo o seu dominio, podemos ver que $\mathcal{S}((\overline{P}_1)_{r_1, R_1} \times (\overline{P}_2)_{r_2, R_2}) \subset P_1 \times P_2$ e ter igualmente a tese do resultado.

Tamén podemos estar en condicións de que unha das funcións de Green sexa positiva e a outra negativa. Enunciamos o correspondente resultado debilitado, tendo tamén en conta as Observacións 4.10 e 4.13.

Teorema 4.14. *Supoñamos que para un $k \in \{1, 2\}$ a función G_k é positiva e para $j \in \{1, 2\}$, $j \neq k$, G_j é negativa e que ademais existen $r_1, r_2, R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_1 < R_1$, $r_2 < R_2$ e que*

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq 0, \text{ para cada } t \in [0, T], (x_1, x_2) \in [c_1 r_1, R_1] \times [c_2 r_2, R_2];$$

$$f_j(t, x_1, x_2) \leq 0, \text{ para cada } t \in [0, T], (x_1, x_2) \in [c_1 r_1, R_1] \times [c_2 r_2, R_2].$$

Se para a compoñente k se satisfán algunha das condicións (i) ou (ii) do Teorema 4.9 e para a compoñente j se satisfán algunha das condicións (i) ou (ii) do Teorema 4.12, entón, o problema (4.2) ten polo menos unha solución (x_1, x_2) tal que $r_1 \leq \|x_1\|_\infty \leq R_1$ e $r_2 \leq \|x_2\|_\infty \leq R_2$.

O Exemplo 4.11 pon de manifesto o laborioso que pode chegar a ser realizar a comprobación das condicións nestes resultados. A continuación veremos que non é necesario coñecer explícitamente o valor de m_k e M_k ($k = 1, 2$) se se asume un comportamento asintótico das funcións f_k para $k \in \{1, 2\}$. Antes de enunciar os resultados correspondentes introducimos a seguinte notación para $k \in \{1, 2\}$

$$(f_k)_{0+} := \lim_{x_k \rightarrow 0^+} \frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k} \quad \text{e} \quad (f_k)_{+\infty} := \lim_{x_k \rightarrow +\infty} \frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k}. \quad (4.9)$$

Corolario 4.15. *Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ a función de Green G_k é positiva e $f_k : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é non negativa.*

Se para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfái algunha das seguintes condicións

- (i) $(f_k)_{0+} = +\infty$ e $(f_k)_{+\infty} = 0$ uniformemente para t e x_j ($j \neq k$);
- (ii) $(f_k)_{0+} = 0$ e $(f_k)_{+\infty} = +\infty$ uniformemente para t e x_j ($j \neq k$),

entón o problema (4.2) ten unha solución (x_1, x_2) tal que $\|x_k\|_\infty > 0$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Probemos o caso no que se ten (i) para cada $k \in \{1, 2\}$. Entón para $\frac{1}{m_k T c_k} \in \mathbb{R}_+$, existe $r_k \in \mathbb{R}_+$ de xeito que

$$\frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k} \geq \frac{1}{m_k T c_k}, \quad \text{para todo } x_k \in (0, r_k], x_j \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T],$$

e de aquí

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_k T c_k} x_k, \quad \text{para todo } x_k \in (0, r_k], x_j \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T].$$

Por outra parte, para $\frac{1}{M_k T} \in \mathbb{R}_+$ existe $R_k \in \mathbb{R}_+$ (podemos asumir que $r_k < R_k$) de xeito que

$$\frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k} \leq \frac{1}{M_k T}, \quad \text{para todo } x_k \in [c_k R_k, \infty), x_j \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T],$$

e de aquí

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_k T} x_k, \quad \text{para todo } x_k \in [c_k R_k, \infty), x_j \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T].$$

Satisfáise pois a condición (i) do Teorema 4.9 para cada $k \in \{1, 2\}$ e así, existe unha solución do problema (4.2) coas compoñentes positivas. \square

Observación 4.16. Claramente, as condicións no Corolario 4.15 son máis sinxelas de comprobar que as condicións no Teorema 4.9. A cambio, observamos que a tese do corolario nos aporta menos información sobre a solución que a do teorema. O corolario só nos aporta información sobre a existencia de solución coas dúas compoñentes positivas mentres que o teorema nos proporciona, ademais, unha estimación en norma de cada unha delas.

Observación 4.17. O Exemplo 4.11 non está nas condicións do Corolario 4.15 ao pensarmos $f_1|_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+^2}$ e $f_2|_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+^2}$. En efecto, non se satisfai que $(f_1)_{+\infty} = 0$ uniformemente para t e y , pois en tal caso existiría $M \in \mathbb{R}_+$ (que podemos supoñer tal que $M > 1$) de xeito que

$$\left| \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{2x} + \frac{y^3}{x} + \frac{t}{2\pi x} + \frac{2}{x} \right| < 1, \text{ para todo } t \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R}_+ \text{ e } x \in [M, \infty),$$

e isto non é certo. Para velo abundaría con tomar, por exemplo, $x = M$, $y = 3M$ e $t = 0$.

Exemplo 4.18. Consideremos o sistema de ecuacións

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x(t) = Ax^\alpha(t) + \operatorname{sen}^2(y(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ y''(t) + a_2(t)y(t) = By^\mu(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.10)$$

con $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R})$ satisfacendo a condición (\mathcal{C}_2) para un certo valor $T \in \mathbb{R}_+$, $A, B \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in [0, 1)$, e $\mu > 1$.

Sabemos que baixo estes supostos a función de Green G_k do problema

$$\begin{cases} x_k''(t) + a_k(t)x_k(t) = 0, & t \in [0, T], \\ x_k(0) = x_k(T), & x_k'(0) = x_k'(T), \end{cases} \quad (4.11)$$

é positiva no seu dominio $[0, T] \times [0, T]$ para cada $k \in \{1, 2\}$.

Pola súa parte, as funcións

$$f_1 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow f_1(t, x, y) = Ax^\alpha + \operatorname{sen}^2(y(t)), \text{ e } f_2 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow f_2(t, x, y) = By^\mu,$$

son tales que $f_1(t, x, y) \geq 0$ e $f_2(t, x, y) \geq 0$ para cada $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^2$.

Ademais, claramente, por un lado temos que

$$(f_1)_{0+} := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t, x, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Ax^{\alpha-1} + \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{x} = +\infty \text{ uniformemente para } t \text{ e } y, \text{ e}$$

$$(f_1)_{+\infty} := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(t, x, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Ax^{\alpha-1} + \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{x} = 0, \text{ uniformemente para } t \text{ e } y,$$

mentres que, polo outro, temos

$$(f_2)_{0+} := \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_2(t, x, y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} By^{\mu-1} = 0, \text{ uniformemente para } t \text{ e } x, \text{ e}$$

$$(f_2)_{+\infty} := \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f_2(t, x, y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} By^{\mu-1} = +\infty, \text{ uniformemente para } t \text{ e } x.$$

Estamos nas condicións do Corolario 4.15 pois satisfáise a condición (i) do mesmo para f_1 e a condición (ii) para f_2 . Deste xeito, conclúese a existencia de, polo menos, unha solución T -periódica do sistema (4.10) coas dúas compoñentes positivas.

Observación 4.19. No exemplo anterior cambiemos a aplicación f_2 pola seguinte

$$f_2^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow f_2^*(t, x, y) = Bx^\lambda y^\mu,$$

onde $B \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \geq 0$ e $\mu > 1$. Agora non podemos aplicar directamente o Corolario 4.15 porque non existen uniformemente para t e x os límites $(f_2^*)_{0+}$ e $(f_2^*)_{+\infty}$. Porén, para todo $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+$ ($\varepsilon < M$) temos que

$$\begin{aligned} (f_2^*)_{0+} &= 0, \text{ uniformemente para } t \text{ en } [0, T] \text{ e para } x \text{ en } [\varepsilon, M], \text{ e} \\ (f_2^*)_{+\infty} &= +\infty, \text{ uniformemente para } t \text{ en } [0, T] \text{ e para } x \text{ en } [\varepsilon, M]. \end{aligned}$$

En efecto, fixados $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+$, ($\varepsilon < M$), temos

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \max_{(t,x) \in [0,T] \times [\varepsilon, M]} Bx^\lambda y^{\mu-1} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} BM^\lambda y^{\mu-1} = 0, \text{ e} \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \min_{(t,x) \in [0,T] \times [\varepsilon, M]} Bx^\lambda y^{\mu-1} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} B\varepsilon^\lambda y^{\mu-1} = +\infty. \end{aligned}$$

Isto, xunto co feito de que f_1 satisfai a condición (i) do Corolario 4.15 é suficiente para que o sistema modificado teña solución, como pon de manifesto o seguinte resultado.

Corolario 4.20. *Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ a función de Green G_k é positiva e $f_k : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é non negativa.*

Se se satisfai algunha das seguintes condicións

- (i) $(f_1)_{0+} = +\infty$ e $(f_1)_{+\infty} = 0$ uniformemente para t e x_2 ;
- (ii) $(f_1)_{0+} = 0$ e $(f_1)_{+\infty} = +\infty$ uniformemente para t e x_2 ,

e, ademais, para cada $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+$ ($\varepsilon < M$), denotando $f_2^{\varepsilon, M} = f_2|_{[0, T] \times [\varepsilon, M] \times \mathbb{R}_+}$ se ten algunha das seguintes

- (i*) $(f_2^{\varepsilon, M})_{0+} = +\infty$ e $(f_2^{\varepsilon, M})_{+\infty} = 0$ uniformemente para t e x_1 ;
- (ii*) $(f_2^{\varepsilon, M})_{0+} = 0$ e $(f_2^{\varepsilon, M})_{+\infty} = +\infty$ uniformemente para t e x_1 ,

entón o problema (4.2) ten unha solución (x_1, x_2) tal que $\|x_k\|_\infty > 0$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Supoñamos que se satisfán (i) e (i*). De (i) sabemos que existen $r_1, R_1 \in \mathbb{R}_+$ con $r_1 < R_1$ de xeito que

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2) &\geq \frac{1}{m_1 T c_1} x_1, \text{ para todo } x_1 \in (0, r_1], x_2 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T], \text{ e} \\ f_1(t, x_1, x_2) &\leq \frac{1}{M_1 T} x_1, \text{ para todo } x_1 \in [c_1 R_1, \infty), x_2 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Ademais, posto que se ten $(f_2^{c_1 r_1, R_1})_{0+} = +\infty$ uniformemente para t e x_1 , é sinxelo ver que para $\frac{1}{m_2 T c_2} \in \mathbb{R}_+$ existe $r_2 \in \mathbb{R}_+$ de xeito que

$$f_2(t, x_1, x_2) \geq \frac{1}{m_2 T c_2} x_2, \text{ para todo } x_2 \in (0, r_2], x_1 \in [c_1 r_1, R_1], \text{ e } t \in [0, T].$$

Por outra parte, como $(f_2^{c_1 r_1, R_1})_{+\infty} = 0$, para $\frac{1}{M_2 T} \in \mathbb{R}_+$ existe $R_2 \in \mathbb{R}_+$ de xeito que

$$f_2(t, x_1, x_2) \leq \frac{1}{M_2 T} x_2, \text{ para todo } x_2 \in (c_2 R_2, \infty), x_1 \in [c_1 r_1, R_1], \text{ e } t \in [0, T].$$

É claro que estamos nas condicións do Teorema 4.9, o que conclúe a proba. \square

Observación 4.21. No resultado anterior pódense intercambiar os requerimentos sobre f_1 e f_2 .

Conclusións similares ás anteriores poden ser sacadas nos casos nos que ou ben as dúas funcións de Green son negativas ou o é algunha delas. Enunciamos os resultados homólogos ao Corolario 4.15 para cada un destes casos. Obviamente, tamén poderíamos nestes casos debilitar as hipóteses dos mesmos no senso do Corolario 4.20.

Corolario 4.22. *Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ a función de Green G_k é negativa e $f_k : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é non positiva.*

Se para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai algunha das seguintes condicións

- (i) $(f_k)_{0+} = -\infty$ e $(f_k)_{+\infty} = 0$ uniformemente para t e x_j ($j \neq k$);
- (ii) $(f_k)_{0+} = 0$ e $(f_k)_{+\infty} = -\infty$ uniformemente para t e x_j ($j \neq k$),

entón o problema (4.2) ten unha solución (x_1, x_2) tal que $\|x_k\|_\infty > 0$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Probemos o caso no que se satisfai (i) para $k = 2$ e (ii) para $k = 1$. Como $(f_2)_{0+} = -\infty$, dado $\frac{1}{M_2 T c_2} \in \mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$ existe $r_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\frac{f_2(t, x_1, x_2)}{x_2} \leq \frac{1}{M_2 T c_2}, \text{ para } x_2 \in [0, r_2], x_1 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

Por outra parte, de $(f_2)_{+\infty} = 0$, para $\frac{1}{m_2 T} \in \mathbb{R}_-$ existe $R_2 \in \mathbb{R}_+$ (que podemos supoñer tal que $r_2 < R_2$) de xeito que

$$\frac{f_2(t, x_1, x_2)}{x_2} \geq \frac{1}{m_2 T}, \text{ para } x_2 \in [c_2 R_2, \infty), x_1 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]. \quad (4.13)$$

Observamos que de (4.12) e (4.13) se ten claramente a condición (i) do Teorema 4.12 para $k = 2$.

Ademais, posto que $(f_1)_{0+} = 0$, para $\frac{1}{m_1 T} \in \mathbb{R}_-$ existe $r_1 \in \mathbb{R}_+$ satisfacéndose

$$\frac{f_1(t, x_1, x_2)}{x_1} \geq \frac{1}{m_1 T}, \text{ para } x_1 \in [0, r_1], x_2 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T], \quad (4.14)$$

e como $(f_1)_{+\infty} = -\infty$, para $\frac{1}{M_1 T c_1} \in \mathbb{R}_-$ novamente existe $R_1 \in \mathbb{R}_+$ ($r_1 < R_1$) tal que se ten

$$\frac{f_1(t, x_1, x_2)}{x_1} \leq \frac{1}{M_1 T c_1}, \text{ para } x_1 \in [c_1 R_1, \infty), x_2 \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T]. \quad (4.15)$$

Así pois, de (4.14) e (4.15) dedúcese directamente que se satisfai a condición (ii) do Teorema 4.12 para $k = 1$. \square

Corolario 4.23. *Supoñamos que para un $k \in \{1, 2\}$ estamos en condicións de que G_k é positiva con f_k non negativa e para $j \in \{1, 2\}$, ($j \neq k$), G_j é negativa con f_j non positiva.*

Se para a compoñente k se satisfan algunha das condicións (i) ou (ii) do Corolario 4.15 e para a compoñente j se satisfán algunha das condicións (i) ou (ii) do Corolario 4.22, entón, o problema (4.2) ten polo menos unha solución (x_1, x_2) tal que $\|x_k\|_\infty > 0$ ($k = 1, 2$).

Exemplo 4.24. (Sistemas de ecuacións diferenciais singulares) Os resultados de existencia propostos nesta sección imponen condicións sobre f_1 e f_2 en conxuntos da forma $[0, T] \times [c_1 r_1, R_1] \times [c_2 r_2, R_2] \subset [0, T] \times \mathbb{R}_+^2$. Isto motívanos a aplicarlos a casos nos que estas funcións presentan singularidades en $x = 0$ ou $y = 0$ e que, polo tanto, non están definidas en todo \mathbb{R} para estas variables. Dado $k \in \{1, 2\}$, diremos que $f_k : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ presenta unha singularidade en $x = 0$ ou $y = 0$ cando se teña que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} |f_k(t, x, y)| &= \infty, \text{ uniformemente para } t \text{ e } y, \text{ ou} \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} |f_k(t, x, y)| &= \infty, \text{ uniformemente para } t \text{ e } x, \end{aligned}$$

respectivamente, e diremos que f_k presenta unha singularidade na orixe cando

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f_k(t, x, y)| = \infty, \text{ uniformemente para } t.$$

O estudo da existencia de solucións periódicas para ecuacións diferenciais con singularidades foi iniciado polos matemáticos Lazer e Solimini en [29]. Estas ecuacións, coñecidas como *ecuacións singulares* aparecen en múltiples aplicacións a modelos físicos, de enxeñaría, ou incluso biolóxicos, como pode verse en [43]. Ademais das distintas aplicacións detalladas en [43], é habitual atopar este tipo de ecuacións no estudo da mecánica celeste [9, 14, 36]. Un caso en particular de sobrado renome consiste no problema dos N -corpos.

O teorema de Krasnoselskii clásico foi empregado en [10, 11, 31, 44] para demostrar a existencia de solución do problema periódico para sistemas de ecuacións diferenciais singulares que poden encadrarse dentro do marco no que estamos a traballar, é dicir, na forma dada por (4.2) con $f_k : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para algún $T \in \mathbb{R}_+$ e cada $k \in \{1, 2\}$. Empregaremos os resultados anteriores para atopar novas condicións de existencia de solucións periódicas con compoñentes non triviais para sistemas deste tipo.

Supoñamos que temos o seguinte sistema de ecuacións

$$\begin{cases} x''(t) + a_1(t)x(t) = -\frac{h_1(t, x(t), y(t))}{x^\alpha(t)} - g_1(t, x(t), y(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ y''(t) + a_2(t)y(t) = \frac{h_2(t, x(t), y(t))}{y^\beta(t)} + g_2(t, x(t), y(t)), & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e para un determinado $T \in \mathbb{R}_+$, a_1 satisfai a condición (\mathcal{C}_1) , a_2 a condición (\mathcal{C}_2) e as aplicacións $h_1, h_2, g_1, g_2 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ son continuas con h_1 e h_2 limitadas.

Neste caso, as nosas funcións $f_1, f_2 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ veñen dadas por

$$f_1(t, x, y) = -\frac{h_1(t, x, y)}{x^\alpha} - g_1(t, x, y) \quad \text{e} \quad f_2(t, x, y) = \frac{h_2(t, x, y)}{y^\beta} + g_2(t, x, y),$$

e posto que h_1, h_2, g_1, g_2 son non negativas, f_1 é non positiva e f_2 é non negativa. Ademais, como a_1 satisfai a condición (\mathcal{C}_1) e a_2 a condición (\mathcal{C}_2) , tamén sabemos que

$$G_1(t, s) < 0, \quad \text{para todo } (t, s) \in [0, T] \times [0, T], \quad \text{e} \quad G_2(t, s) > 0, \quad \text{para todo } (t, s) \in [0, T] \times [0, T],$$

sendo G_k a función de Green do problema (4.11) con $k \in \{1, 2\}$.

Se pedimos que as funcións h_1 e h_2 estean limitadas inferiormente por dous valores positivos, denotemos estes por A e B respectivamente, entón

$$f_1(t, x, y) \leq -\frac{A}{x^\alpha} \quad \text{e} \quad f_2(t, x, y) \geq \frac{B}{y^\beta}, \quad \text{para todo } t \in [0, T] \quad \text{e} \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Isto implica que f_1 presenta o que na literatura se coñece como *singularidade atractiva* en $x = 0$, isto é

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(t, x, y) = -\infty, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } y,$$

e f_2 unha *singularidade repulsiva* en $y = 0$, é dicir

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f_2(t, x, y) = +\infty, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } x.$$

Claramente, de aquí tense que $(f_1)_{0^+} = -\infty$ uniformemente para t e y , e $(f_2)_{0^+} = +\infty$ uniformemente para t e x .

Se ademais pedimos que se satisfaga

$$(g_1)_{+\infty} = 0, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } y, \quad \text{e} \quad (g_2)_{+\infty} = 0, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } x,$$

é claro que

$$(f_1)_{+\infty} = 0, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } y, \quad \text{e} \quad (f_2)_{+\infty} = 0, \quad \text{uniformemente para } t \text{ e } x,$$

de onde, aplicando o Corolario 4.23, obtemos a existencia de solución periódica coas dúas compoñentes positivas.

Caso particular: Estes razoamentos lévannos a afirmar que o sistema de ecuacións singulares dado por

$$\begin{cases} x'' - x = -\frac{2+\cos(y)}{x^3} - 33t, \\ y'' + \frac{1}{5}y = \frac{1}{(1+e^{-x})y} + \frac{\sqrt{ty}}{x^2+1}, \end{cases}$$

conta con, polo menos, unha solución 2π -periódica coas dúas compoñentes positivas.

Observamos que na literatura mencionada non se estudan sistemas nos que as singularidades son de diferente tipo en cada compoñente como facemos nós aquí, pois a singularidade na primeira compoñente é repulsiva e na segunda é atractiva.

Consideraremos agora dúas modificacións do sistema (4.16) que nos permitirán engadir singularidades nas dúas compoñentes e singularidades na orixe.

1ª Modificación: Cambiamos a función f_2 a $f_2^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ coa forma dada por

$$f_2^*(t, x, y) = \frac{h_2^*(t, x, y)}{y^\beta} u(t, x) + g_2^*(t, x, y) v(t, x),$$

onde $\beta > 0$, $h_2^*, g_2^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ son funcións baixo as mesmas condicións que impoñiamos sobre h_2 e g_2 , e $u, v : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ son funcións continuas.

É sinxelo comprobar que, por satisfacer h_2^* e g_2^* as mesmas condicións que h_2 e g_2 e ser u e v continuas, para calesquera $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+$ ($\varepsilon < M$), denotando $f_2^{*\varepsilon, M} = f_2^*|_{[0, T] \times [\varepsilon, M] \times \mathbb{R}_+}$ temos que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f_2^{*\varepsilon, M}(t, x, y) = +\infty \text{ e } (f_2^{*\varepsilon, M})_{+\infty} = 0, \text{ uniformemente para } t \text{ e } x,$$

de onde, seguindo os razoamentos correspondentes aos feitos na proba do Corolario 4.20, se ten a existencia de solución T -periódica para o sistema que resulta de cambiar f_2 en (4.16) por f_2^* .

Observamos que esta modificación nos permite introducir singularidades adicionais na variable x , pois a función u podería vir dada, por exemplo, por expresións do tipo

$$u(t, x) = \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}, \text{ ou } \frac{1}{x^\eta p(t)}, \text{ con } \eta > 0 \text{ e } p \text{ un polinomio sen raíces en } [0, T], \text{ entre outras.}$$

Caso particular: O sistema de ecuacións singulares dado por

$$\begin{cases} x'' - x = -\frac{2+\cos(y)}{x^3} - 33t, \\ y'' + \frac{1}{5}y = \frac{1}{(1+e^{-x})y} \frac{t}{x^2(t^2+1)} + \frac{\sqrt{ty}e^{tx^2}}{x^2+1}, \end{cases}$$

conta con, polo menos, unha solución 2π -periódica coas dúas compoñentes positivas.

2ª Modificación: cambiando f_2 por $\hat{f}_2 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ coa forma dada por

$$\hat{f}_2(t, x, y) = \frac{\hat{h}_2(t, x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\delta} + \hat{g}_2(t, x, y),$$

onde $\delta > 0$ e $\hat{h}_2, \hat{g}_2 : [0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ son novamente funcións baixo as mesmas condicións que impoñiamos sobre h_2 e g_2 , temos agora unha singularidade na orixe. Este tipo de singularidades atópanse de xeito natural en ecuacións que modelan fenómenos eléctricos e gravitacionais, aparecendo como resultado da derivación dos correspondentes potenciais. Denotemos por \hat{A} a cota inferior de \hat{h}_2 e por \hat{B} a cota superior.

Fixados $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_+$ ($\varepsilon < M$) temos que

$$\min_{(t,x) \in [0,T] \times [\varepsilon, M]} \frac{\hat{f}_2(t, x, y)}{y} \geq \frac{\hat{A}}{(\sqrt{M^2 + y^2})^\delta y} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} +\infty,$$

de onde se ten directamente $(\hat{f}_2^{\varepsilon, M})_{0^+} = +\infty$, uniformemente para t e x .

Así mesmo, por outra parte, temos

$$\max_{(t,x) \in [0,T] \times [\varepsilon, M]} \frac{\hat{h}_2(t, x, y)}{y(\sqrt{x^2 + y^2})^\delta} \leq \frac{\hat{B}}{y(\sqrt{\varepsilon^2 + y^2})^\delta} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0,$$

que xunto co feito de que $(\hat{g}_2)_{+\infty} = 0$ deixa claro que $(\hat{f}_2^{\varepsilon, M})_{+\infty} = 0$, uniformemente para t e x .

De novo, aplicando razoamentos análogos aos da proba do Corolario 4.20, temos a existencia de solución T -periódica para o sistema que resulta de cambiar f_2 en (4.16) por \hat{f}_2 .

Caso particular: O sistema de ecuacións singulares dado por

$$\begin{cases} x'' - x = -\frac{2+\cos(y)}{x^3} - 33t, \\ y'' + \frac{1}{5}y = \frac{t^3+7t+5}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{ty}}{x^2+1}, \end{cases}$$

conta con, polo menos, unha solución 2π -periódica coas dúas compoñentes positivas.

4.2.2 Solucións con compoñentes positivas para un sistema diferencial de segunda orde con condicións de fronteira mixtas

Neste punto presentamos unha aplicación a un sistema diferencial de segunda orde con condicións de fronteira mixtas. Empregaremos a versión homotópica do teorema de Krasnoselskii en espazos produto na súa versión debilitada. Isto é, coas condicións no Teorema 2.4, no Teorema 3.23 e no Corolario 3.24. Seguiremos as ideas introducidas en [46], as cales adaptaremos aquí para sistemas.

Traballaremos agora co sistema de ecuacións diferenciais

$$\begin{cases} x_1''(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ x_2''(t) + f_2(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ x_1'(0) = x_1(1) = 0 = x_2'(0) = x_2(1), \end{cases} \quad (4.17)$$

onde $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ son funcións continuas.

Observación 4.25. A continuidade das funcións f_k , $k = 1, 2$ fai que estas satisfagan a seguinte condición.

(\mathcal{C}_1) Para cada $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$, existe $\varphi_{R_1, R_2}^k \in L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ tales que

$$0 \leq f_k(t, x_1, x_2) \leq \varphi_{R_1, R_2}^k(t), \text{ para todo } x_1 \in [0, R_1], x_2 \in [0, R_2], \text{ e } t \in [0, 1].$$

Seguindo a notación introducida na sección 4.1 do presente capítulo, o problema pode probarse equivalente a un sistema de ecuacións integrais da forma (4.1), onde agora $T = 1$ e $G_1 = G_2 =: G$ é a función de Green asociada a $(\mathcal{L}|_F)^{-1}$, sendo \mathcal{L} o operador diferencial

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : (\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^2}) &\longrightarrow (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ \{x : t \in [0, 1] \rightarrow x(t)\} &\longrightarrow \{\mathcal{L}x : t \in [0, 1] \rightarrow x''(t)\}, \end{aligned}$$

e F o subespazo vectorial pechado de $\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ dado por

$$F = \{x \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R}) : x'(0) = x(1) = 0\}.$$

Observación 4.26. O operador linear $\mathcal{L}|_F : F \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ é invertible. En efecto, abonda con ver que o núcleo é cero para garantir a inxectividade. Temos que,

$$x \in \ker(\mathcal{L}) \Leftrightarrow x''(t) = 0, \text{ para } t \in [0, 1] \Leftrightarrow x(t) = c_1 t + c_2, \text{ para } t \in [0, 1] \text{ e } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Así, $\text{Ker}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R}) : x(t) = c_1 t + c_2, \text{ para } t \in [0, 1] \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ e posto que $\text{Ker}(\mathcal{L}|_F) = F \cap \text{Ker}(\mathcal{L})$, se $x \in \text{Ker}(\mathcal{L}|_F)$ entón $x(t) = c_1 t + c_2$ para $t \in [0, 1]$ e $x'(0) = x(1) = 0$, o cal se ten unicamente se $x(t) = 0$ para $t \in [0, 1]$ e polo tanto $\text{Ker}(\mathcal{L}|_F) = 0$.

Imos a ver agora unha forma de atopar a función de Green G asociada a $(\mathcal{L}|_F)^{-1}$, isto é, ao problema de segunda orde con condicións de contorno tipo Robin. Para $k \in \{1, 2\}$ fixado, supoñamos que $x_k \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ é solución do problema

$$\begin{cases} x_k''(t) + f_k(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ x_k'(0) = x_k(1) = 0. \end{cases}$$

Integrando sucesivamente dúas veces, atopamos

$$x_k(t) = x_k(1) - (1-t)x_k'(0) + \int_t^1 \int_0^r f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds dr,$$

e substituíndo as condicións de contorno

$$x_k(t) = \int_t^1 \int_0^r f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds dr.$$

Fixado $t \in [0, 1]$, a rexión de integración é $\hat{R} = \{(s, r) \in \mathbb{R}^2 : t \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq s \leq r\}$. Deste xeito, cambiando a orde de integración, é claro que

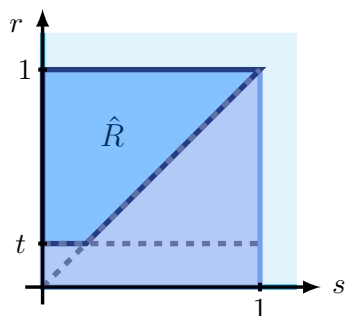


Figura 4.1: Rexión de integración \hat{R} .

$$x_k(t) = \int_0^1 \left(\int_{\max(s,t)}^1 dr \right) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds.$$

Ademais, se $s \leq t$, entón

$$\int_{\max(s,t)}^1 dr = \int_t^1 dr = 1 - t,$$

e se $s > t$, atopamos

$$\int_{\max(s,t)}^1 dr = \int_s^1 dr = 1 - s.$$

Así pois, a función de Green buscada está dada por

$$G(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & \text{se } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 1 - s, & \text{se } 0 \leq t < s \leq 1, \end{cases}$$

e as solucións do problema diferencial (4.17) correspóndense cos puntos fixos do operador $\mathcal{S}^* = (\mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2^*) : X \times X \rightarrow X \times X$, onde $X = (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dado por

$$\mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) := \int_0^1 G(s, t) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in [0, 1], \quad k = 1, 2.$$

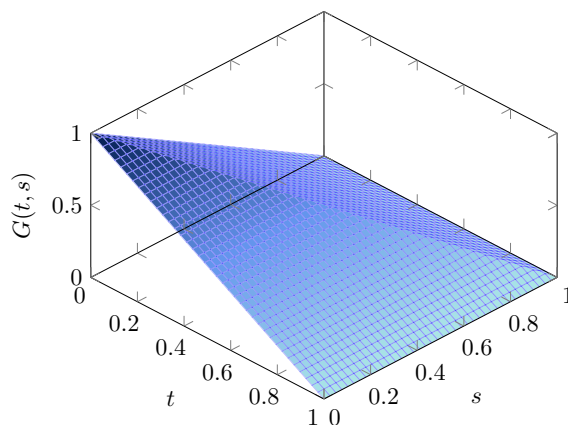


Figura 4.2: Gráfica da función de Green asociada ao problema diferencial de segunda orde con condicións mixtas.

Observación 4.27. Nótese que a función de Green é continua e tal que $0 \leq G(t, s) \leq 1$ para todo $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Observación 4.28. A continuidade da función de Green, xunto coa das funcións f_1 e f_2 , permiten probar de xeito completamente análogo a como faciamos na Proposición 4.7 que o operador \mathcal{S}^* é compacto.

Para aplicar o resultado desexado, isto é, o Teorema 3.23, traballaremos coa restrición de \mathcal{S}^* ao cono $C = C_1 \times C_2$, onde

$$C_1 = C_2 = \{x \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) : x(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e } x \text{ decrecente en } [0, 1]\}.$$

Observación 4.29. Os conos C_1 e C_2 , introducidos no Exemplo 3.27 (iii), preservan as relacións de orde \prec_{C_1} e \prec_{C_2} sobre os seus elementos, respectivamente.

Proposición 4.30. *O operador \mathcal{S}^* leva o cono $C = C_1 \times C_2$ en si mesmo.*

Demostración. Sexa $x = (x_1, x_2) \in C$, entón, para cada $k \in \{1, 2\}$ temos que

$$x_k(t) \geq 0, \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e } x_k \text{ é decrecente en } [0, 1].$$

Fixado $k \in \{1, 2\}$, como $f_k([0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ e $G(t, s) \geq 0$ para todo $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, é claro que

$$\mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) = \int_0^1 G(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq 0, \quad t \in [0, 1].$$

Ademais,

$$\mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) = \int_0^t (1-t) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \int_t^1 (1-s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in [0, 1]$$

polo que, derivando con respecto a t , empregando a regra de Leibniz xeneralizada [41, Teorema 5] e o teorema fundamental do cálculo integral

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) &= (1-t) f_k(t, x_1(t), x_2(t)) - \int_0^t f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\quad - (1-t) f_k(t, x_1(t), x_2(t)) = - \int_0^t f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)$ é decrecente. □

Seguiremos as ideas en [46]. Para iso, introducimos o seguinte operador lineal compacto

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ \{x : t \in [0, 1] \rightarrow x(t)\} &\longrightarrow \left\{ \mathcal{M}x : t \in [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}x(t) := \int_0^1 G(t, s) x(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

O resultado de existencia de solución con compoñentes positivas para o problema (4.17) que aquí probaremos virá dado en termos dos autovalores deste operador, relacionado con \mathcal{S}^* do seguinte xeito

$$\mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) = \mathcal{M}f_k(t, x_1(t), x_2(t)) = \int_0^1 G(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \quad t \in [0, 1], \quad k = 1, 2.$$

Notación 4.31. Denotaremos por λ_1 o maior dos autovalores de \mathcal{M} , é dicir, dos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda x = \mathcal{M}x$, e por $\mu_1 := \frac{1}{\lambda_1}$ o inverso do seu radio espectral.

Observación 4.32. Notemos que existe unha correspondencia entre as autofuncións de \mathcal{M} asociadas a un autovalor λ e as solución non triviais do problema

$$\begin{cases} x''(t) + \mu x(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ x'(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

para $\mu = \frac{1}{\lambda}$. É sinxelo comprobar que este problema de fronteira ten solucións non triviais soamente cando $\mu > 0$. Ademais, é coñecido que a solución xeral da ecuación diferencial neste caso, está dada por

$$x(t) = A \cos(\sqrt{\mu}t) + B \sin(\sqrt{\mu}t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo as condicións de contorno $x'(0) = x(1) = 0$, obtemos que $B = 0$ e $\mu = (\frac{\pi}{2} + l\pi)^2$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así pois, o radio espectral do noso operador \mathcal{M} é $\lambda_1 = \frac{4}{\pi^2}$, o seu inverso é $\mu_1 = \frac{\pi^2}{4}$ e unha autofunción asociada $h(t) = \cos(\frac{\pi t}{2})$, $t \in [0, 1]$.

Estamos xa en condicións de enunciar e probar o resultado de existencia de solución para o problema (4.17). As condicións deste resultado veñen dadas en termos do radio espectral do operador \mathcal{M} e o comportamento asintótico das funcións f_1 e f_2 . Estas permitirannos ver que o operador \mathcal{S}^* se atopa nas hipóteses do Teorema 3.23 cambiando os requirimentos sobre o cono neste resultado por ($\dagger\dagger$) na Observación 3.26.

Teorema 4.33. *Supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ se satisfai a seguinte condición*

$$\mu_1 < (f_k)_{0+} \leq +\infty, \quad e \quad 0 \leq (f_k)_{+\infty} < \mu_1, \quad \text{uniformemente para } t, x_j (k \neq j).$$

Entón, o problema (4.17) ten unha solución (x_1, x_2) tal que $\|x_k\|_\infty > 0$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Para $k \in \{1, 2\}$ fixado, sexa $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que $(f_k)_{0+} > \mu_1 + \varepsilon$. Como

$$(f_k)_{0+} = \lim_{x_k \rightarrow 0^+} \frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k} > \mu_1 + \varepsilon \quad \text{uniformemente para } t, x_j (k \neq j),$$

existe $r_k \in \mathbb{R}_+$ tal que se satisfai a seguinte condición para cada $x_k \in (0, r_k]$

$$f_k(t, x_1, x_2) \geq (\mu_1 + \varepsilon)x_k \quad \text{uniformemente para } t \in [0, 1], x_j (k \neq j). \quad (4.18)$$

Sexa $r_k^* \in (0, r_k]$. Probemos que

$$x_k \neq \mathcal{S}_k^* x + \mu h, \quad \text{para todo } \|x_k\|_\infty = r_k^*, x_j \in C_j (k \neq j) \text{ e } \mu > 0, \quad (4.19)$$

onde h é a autofunción de \mathcal{M} con $\|h\|_\infty = 1$ correspondente ao autovalor λ_1 .

En efecto, supoñamos o contrario. En tal caso, existiría $x \in C$ con $\|x_k\|_\infty = r_k^*$ e $\mu > 0$ de xeito que $x_k = \mathcal{S}_k^* x + \mu h$. Así

$$x_k(t) \geq \mu h(t) \quad e \quad \mathcal{M}x_k(t) \geq \mu \mathcal{M}h(t) = \frac{\mu}{\mu_1} h(t), \quad t \in [0, 1].$$

Usando (4.18) temos

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \mathcal{S}_k^*(x_1, x_2)(t) + \mu h(t) = \int_0^1 G(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \mu h(t) \\ &\geq (\mu_1 + \varepsilon) \int_0^1 G(t, s) x_k(s) ds + \mu h(t) = (\mu_1 + \varepsilon) \mathcal{M} x_k(t) + \mu h(t) \\ &\geq (\mu_1 + \varepsilon) \frac{\mu}{\mu_1} h(t) + \mu h(t) > 2\mu h(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Repetindo o proceso, atopamos $\|x_k\|_\infty > n\mu\|h\|_\infty = n\mu$, para $n \in \mathbb{N}$, o cal é unha contradición.

Por outra parte, sexa $\delta \in \mathbb{R}_+$ ($\delta < \mu_1$) tal que $(f_k)_{+\infty} < \mu_1 - \delta$. Como

$$(f_k)_{+\infty} = \lim_{x_k \rightarrow +\infty} \frac{f_k(t, x_1, x_2)}{x_k} < \mu_1 - \delta \text{ uniformemente para } t, x_j (k \neq j).$$

Entón, existe $R_k \in \mathbb{R}_+$ (que podemos tomar $r_k < R_k$) tal que para cada $x_k \geq R_k$

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq (\mu_1 - \delta)x_k, \text{ para todo } t, x_j (k \neq j).$$

Como f_k satisfai a condición (\mathcal{C}_1) , para cada $R_j \in \mathbb{R}_+$ ($k \neq j$) existe unha función $\phi_{R_1, R_2}^k \in L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}_+)$ tal que

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq \phi_{R_1, R_2}^k(t), \text{ para todo } x_k \in [0, R_k], x_j \in [0, R_j] (k \neq j) \text{ e } t \in [0, 1].$$

Deste xeito

$$f_k(t, x_1, x_2) \leq (\mu_1 - \delta)x_k + \phi_{R_1, R_2}^k(t), \text{ para todo } x_k \in \mathbb{R}_+, x_j \in [0, R_j] (k \neq j) \text{ e } t \in [0, 1]. \quad (4.20)$$

Ademais, por ser $\frac{1}{\mu_1}$ o radio espectral de \mathcal{M} , existe

$$\left(\frac{1}{\mu_1 - \delta} I - \mathcal{M} \right)^{-1}.$$

Definamos para cada $k \in \{1, 2\}$

$$c_k = \int_0^1 \phi_{R_1, R_2}^k(s) ds \quad \text{e} \quad R_0^k = \left(\frac{1}{\mu_1 - \delta} I - \mathcal{M} \right)^{-1} \left(\frac{c_k}{\mu_1 - \delta} \right).$$

Vexamos agora que para cada $R_k^* \in (R_0^k, \infty)$ temos

$$\mathcal{S}_k^* x \neq \lambda x_k, \text{ para todo } \|x_k\|_\infty = R_k^*, x_j \in (\overline{C}_j)_{r_j^*, R_j^*} (k \neq j) \text{ e } \lambda > 1. \quad (4.21)$$

En efecto, do contrario, existiría $x \in \overline{C}_{r^*, R^*}$ tal que $\|x_k\|_\infty = R_k^*$ e $\lambda > 1$ tal que $\lambda x_k = \mathcal{S}_k^* x$. De aquí, empregando (4.20) temos

$$x_k(t) \leq \lambda x_k(t) = \mathcal{S}_k^* x(t) = \int_0^1 G(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq (\mu_1 - \delta) \mathcal{M} x_k(t) + c_k, \quad t \in [0, 1],$$

o cal implica

$$\left(\frac{1}{\mu_1 - \delta} I - \mathcal{M} \right) x_k(t) \leq \frac{c_k}{\mu_1 - \delta}, \quad t \in [0, 1].$$

Observando que o operador $\tilde{\mathcal{M}} = (\mu_1 - \delta)\mathcal{M}$ satisfai $\tilde{\mathcal{M}}(C_k) \subset C_k$ e que o seu radio espectral é

$$\tilde{\lambda}_1 = (\mu_1 - \delta)\lambda_1 = \frac{\mu_1 - \delta}{\mu_1} < 1,$$

podemos aplicar [45, Lemma 4.1] obtendo

$$x_k(t) \leq \left(\frac{1}{\mu_1 - \delta} I - \mathcal{M} \right)^{-1} \left(\frac{c_k}{\mu_1 - \delta} \right), \quad t \in [0, 1].$$

Así pois, $\|x_k\|_\infty \leq R_0^k < R_k^*$, o cal é unha contradición.

Para concluír, cómpre fixarse en que o operador \mathcal{S}^* satisfai as condicións (4.19) e (4.21). Logo podemos aplicar o Corolario 3.24 coa Observación 3.26, pois os conos C_k satisfán $(\dagger\dagger)$ para cada $k \in \{1, 2\}$ e así \mathcal{S}^* ten un punto fixo que é unha solución do problema (4.17). \square

Observación 4.34. Cómpre salientar que o feito de ter conseguido calcular o índice de punto fixo para a Versión Compresión-compresión da versión homotópica débil do teorema de Krasnoselskii permite que, no resultado anterior, non só se poida garantir a existencia de solucións, algo que tamén era posible co resultado de Precup [38, Theorem 2.1], senón que, ademais, se poida determinar o valor do índice de \mathcal{S}^* no conxunto $C_{r,R}$ cando este non conte con puntos fixos na súa fronteira. Ademais, cabe destacar tamén que o mesmo resultado baixo condicións máis fortes (Teorema 3.18) non permite empregar os argumentos utilizados na proba anterior.

Exemplo 4.35. O seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde con condicións de fronteira mixtas

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{t+1}{y(t)+1} + x(t) \arctan(x(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ y''(t) + \frac{t}{e^{-x(t)}+1} + \frac{1}{3} = 0, & t \in [0, 1], \\ x'(0) = x(1) = 0 = y'(0) = y(1), \end{cases}$$

ten algunha solución non trivial decrecente e coas dúas compoñentes positivas en virtude do teorema anterior.

En efecto, as aplicacións $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dadas por

$$f_1(t, x, y) = \frac{t+1}{y+1} + x \arctan(x) \text{ e } f_2(t, x, y) = \frac{t}{e^{-x}+1} + \frac{1}{3},$$

son continuas e satisfán

$$(f_1)_{0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t+1}{y+1} \frac{1}{x} + \arctan(x) = +\infty, \text{ uniformemente para } t \text{ e } y,$$

$$(f_1)_{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{y+1} \frac{1}{x} + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} < \frac{\pi^2}{4} = \mu_1, \text{ uniformemente para } t \text{ e } y,$$

$$(f_2)_{0^+} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{t}{e^{-x}+1} \frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{1}{y} = +\infty, \text{ uniformemente para } t \text{ e } x, \text{ e}$$

$$(f_2)_{+\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{-x}+1} \frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{1}{y} = 0, \text{ uniformemente para } t \text{ e } y.$$

4.2.3 Aplicación da teoría de punto fixo en conxuntos estrelados: Solucións con compoñentes positivas para un sistema de ecuacións integrais.

Buscaremos agora condicións suficientes para a existencia de solucións non triviais coas dúas compoñentes positivas para un sistema de ecuacións tipo Hammerstein da forma

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^1 G_1(t,s)f_1(s,x_1(s),x_2(s))ds, & t \in [0,1], \\ x_2(t) = \int_0^1 G_2(t,s)f_2(s,x_1(s),x_2(s))ds, & t \in [0,1], \end{cases} \quad (4.22)$$

onde para cada $k \in \{1,2\}$ se satisfán as seguintes condicións:

(\mathcal{C}_1) O núcleo integral $G_k : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ é continuo ($I := [0,1]$).

(\mathcal{C}_2) Existe un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ e unha función $\Phi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\Phi_k \in L^1(I; \mathbb{R}^+), \quad \int_a^b \Phi_k(s)ds > 0,$$

e unha constante $c_k \in (0,1)$ satisfacendo

$$\begin{aligned} G_k(t,s) &\leq \Phi_k(s), \quad \text{para todo } t, s \in I, \\ c_k \Phi_k(s) &\leq G_k(t,s), \quad \text{para todo } t \in [a,b], s \in I. \end{aligned}$$

(\mathcal{C}_3) A función $f_k : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é continua.

Para probar a existencia de solución do sistema de ecuacións integrais (4.22) aplicaremos resultados de punto fixo sobre o operador $\mathcal{T} : K \rightarrow K$, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ dado por

$$\mathcal{T}_k(x_1, x_2)(t) := \int_0^1 G_k(t,s)f_k(s,x_1(s),x_2(s))ds, \quad t \in [0,1], k = 1, 2, \quad (4.23)$$

con $K := K_1 \times K_2$, onde K_k é o cono do espazo normado $\mathcal{C}(I; \mathbb{R})$ coa norma $\|\cdot\|_\infty$ dado por

$$K_k = \left\{ x \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}) : x(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in I \text{ e } \min_{t \in [a,b]} x(t) \geq c_k \|x\|_\infty \right\}, \quad k = 1, 2.$$

Observación 4.36. Baixo as condicións (\mathcal{C}_1)-(\mathcal{C}_3) o operador \mathcal{T} está ben definido. Isto é, leva o cono en si mesmo e é compacto. A proba da compacidade é análoga á da Proposicións 4.7, mentres que a invariancia do cono polo operador se deriva facilmente das condicións (\mathcal{C}_1)-(\mathcal{C}_3).

Definimos aquí, para cada $k \in \{1,2\}$, o funcional cóncavo $\varphi_k : K_k \rightarrow \mathbb{R}^+$ dado por

$$\varphi_k(x) := \min_{t \in [a,b]} x(t),$$

así como os conxuntos

$$(K_k)_{r_k}^{\varphi_k} := \{x_k \in K_k : \varphi_k(x_k) < r_k\}, \quad (K_k)_{r_k, R_k}^{\varphi_k} = (K_k)_{R_k} \setminus (\overline{(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}}), \quad \text{e } K_{r,R}^{\varphi} = (K_1)_{r_1, R_1}^{\varphi_1} \times (K_2)_{r_2, R_2}^{\varphi_2},$$

onde $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ son tales que $r_k < c_k R_k$ (e polo tanto $r_k < R_k$).

Lema 4.37. O conxunto $(\overline{K}_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ é estritamente estrelado en K_k , para $k \in \{1, 2\}$ fixado.

Demostración. Fixemos $k \in \{1, 2\}$. É claro que

$$\partial_{K_k}(K_k)_{r_k}^{\varphi_k} \subset \{x \in K_k : \min_{t \in [a, b]} x_k(t) = r_k\} =: L_k.$$

Deste xeito, tomando $x_k \in L_k$ e $\lambda \in [0, 1)$, temos que

$$\min_{t \in [a, b]} \lambda x_k(t) < r_k.$$

Logo, por definición, o conxunto $(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ é estritamente estrelado en K_k . \square

Observación 4.38. Pedimos que $r_k < c_k R_k$ para garantir que $(\overline{K}_k)_{r_k}^{\varphi_k} \subset (K_k)_{R_k}$. En efecto, se $x_k \in (\overline{K}_k)_{r_k}^{\varphi_k}$, entón

$$\min_{t \in [a, b]} x_k(t) \leq r_k \text{ e } \min_{t \in [a, b]} x_k(t) \geq c_k \|x_k\|_{\infty}.$$

Así $c_k \|x_k\|_{\infty} \leq r_k$, polo que

$$\|x_k\|_{\infty} \leq \frac{r_k}{c_k} < R_k.$$

Seguiremos as ideas en [40] para empregar agora a situación (b) do Teorema 3.53 sobre o operador \mathcal{T} restrinxido a $K_{r, R}^{\varphi}$ e obter condicións para a existencia de solución do problema (4.22). Antes de enunciar o correspondente resultado cómpre introducir a seguinte notación

$$A_k := \min_{t \in [a, b]} \int_a^b G_k(t, s) ds, \quad B_k := \max_{t \in I} \int_0^1 G_k(t, s) ds, \quad k = 1, 2.$$

Ademais, para $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$ fixados, denotamos para cada $s \in I$

$$m_k^{r, R}(s) := \min \left\{ f_k(s, x_1, x_2) : r_k \leq x_k \leq \frac{r_k}{c_k}, r_j \leq x_j \leq R_j (k \neq j) \right\}, \quad k = 1, 2,$$

$$M_k^{r, R}(s) := \max \{ f_k(s, x_1, x_2) : 0 \leq x_k \leq R_k, 0 \leq x_j \leq R_j (k \neq j) \}, \quad k = 1, 2.$$

Teorema 4.39. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < R_k$ e $r_k < c_k R_k$, de xeito que se satisfán as seguintes condicións*

(i) $A_k m_k^{r, R}(s) \geq r_k$, para cada $s \in [a, b]$; e (ii) $B_k M_k^{r, R}(s) < R_k$, para cada $s \in I$.

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que

$$r_k \leq \varphi_k(x_k) \text{ e } \|x_k\|_{\infty} < R_k \quad (k = 1, 2).$$

Demostración. Sexa $\mathcal{T} : \overline{K}_{r, R}^{\varphi} \rightarrow K$, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ o operador dado por (4.23). Imos ver que para cada $x \in \overline{K}_{r, R}^{\varphi}$ e $k \in \{1, 2\}$ se satisfán as seguintes condicións

(i*) $\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k$ se $\min_{t \in [a, b]} x_k(t) = r_k$; e (ii*) $\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k$ se $\|x_k\|_{\infty} = R_k$.

Deste xeito, $\mathcal{T} : \overline{K}_{r,R}^\varphi \rightarrow K$ atópase na situación (b) do Teorema 3.53 e ten así un punto fixo en $\overline{K}_{r,R}^\varphi$ que se corresponde cunha solución do problema integral (4.22).

Fixado $k \in \{1, 2\}$, supoñamos que non ocorre (i^*) . Entón, existe $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ con $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$ tal que $\mathcal{T}_k x \prec_{K_k} x_k$. Deste xeito

$$x_k(t) > \mathcal{T}_k x(t) = \int_0^1 G_k(t,s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in [a,b].$$

En efecto, como $\mathcal{T}_k x \prec_{K_k} x_k$, entón $x_k - \mathcal{T}_k x \in K_k \setminus \{0\}$. Se existise $t^* \in [a,b]$ tal que $x_k(t^*) = \mathcal{T}_k x(t^*)$, teríamos $\min_{t \in [a,b]} (x_k - \mathcal{T}_k x)(t^*) = 0$ e así posto que $x_k - \mathcal{T}_k x \in K_k$, entón $\|x_k - \mathcal{T}_k x\|_\infty = 0$, de onde $x_k - \mathcal{T}_k x = 0$, atopando unha contradición.

Posto que $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ é tal que $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$, é claro que $r_k \leq x_k(t) \leq \frac{r_k}{c_k}$ e $r_j \leq x_j(t) \leq R_j$ ($k \neq j$) para cada $t \in [a,b]$. Así,

$$\begin{aligned} x_k(t) > \mathcal{T}_k x(t) &= \int_0^1 G_k(t,s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_a^b G_k(t,s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \\ &\geq \int_a^b G_k(t,s) m_k^{r,R}(s) ds \geq \frac{r_k}{A_k} \int_a^b G_k(t,s) ds \geq r_k, \quad t \in [a,b], \end{aligned}$$

o cal é unha contradición con $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$.

De xeito similar, se (ii^*) non fose certo, existiría $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ tal que $\|x_k\|_\infty = R_k$ e $\mathcal{T}_k x \succ_{K_k} x_k$. Así

$$x_k(t) \leq \mathcal{T}_k x(t) = \int_0^1 G_k(t,s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in I,$$

e a desigualdade é estrita para algún $t^* \in I$. Como $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ é tal que $\|x_k\|_\infty = R_k$, podemos asegurar $0 \leq x_k(t) \leq R_k$ e $0 \leq x_j(t) \leq R_j$ ($k \neq j$) para cada $t \in I$. Deste xeito,

$$\begin{aligned} x_k(t) \leq \mathcal{T}_k x(t) &= \int_0^1 G_k(t,s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq \int_0^1 G_k(t,s) M_k^{r,R}(s) ds \\ &< \frac{R_k}{B_k} \int_0^1 G_k(t,s) ds \leq R_k, \quad t \in I, \end{aligned}$$

de novo unha contradición, agora co feito de que $\|x_k\|_\infty = R_k$. Observamos para concluir que, en realidade, próbese que $\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k$ se $\|x_k\|_\infty = R_k$. \square

Observación 4.40. Na proba do resultado anterior, no caso particular no que $[a,b] = I$, poderíamos concluir o resultado substituindo a condición (ii) pola seguinte

$$(ii^*) \quad B_k \check{M}_k^{r,R}(s) \leq R_k, \quad \text{para cada } s \in I, \text{ onde}$$

$$\check{M}_k^{r,R}(s) = \max\{f_k(s, x_1, x_2) : c_k R_k \leq x_k \leq R_k, 0 \leq x_j \leq R_j (k \neq j)\}.$$

Neste caso, asegurariamos unha solución positiva (x_1, x_2) para o sistema (4.22) tal que

$$r_k \leq \varphi_k(x_k) \text{ e } \|x_k\|_\infty \leq R_k, \quad (k = 1, 2).$$

Observación 4.41. As condicións impostas sobre as funcións f_1 e f_2 forzan que o operador $\mathcal{T} : \overline{K}_{r,R}^\varphi \rightarrow K$ se atope nas hipóteses do Teorema 3.53. O operador é pois compresivo nas dúas compoñentes e, ademais de coñecer a existencia dun punto fixo para o mesmo en $\overline{K}_{r,R}^\varphi$, sabemos que $i(\mathcal{T}, K_{r,R}^\varphi, K) = 1$.

Observación 4.42. Se as funcións f_1 e f_2 son tales que para cada $s \in I$ se ten que $f_1(s, \cdot, \cdot)$ e $f_2(s, \cdot, \cdot)$ definidas en $[0, R_1] \times [0, R_2]$ son crecentes (en cada variable), entón podemos reescribir as condicións do Teorema 4.39 como segue

$$(i) A_k f_k(s, r_1, r_2) \geq r_k, \text{ para cada } s \in [a, b]; \text{ e } (ii) B_k f_k(s, R_1, R_2) < R_k, \text{ para cada } s \in I.$$

No resultado anterior, estamos a aplicar as condicións máis débiles da versión vectorial clásica do teorema de Krasnoselskii. Porén, é claro que podemos aplicar, de forma semellante o resultado coas condicións máis fortes. Isto é, as da situación (b) no Teorema 3.40 xunto coa Observación 3.50. Empregando estas condicións somos coñecedores do valor do índice en todas as situacións compresivo-expansivas. Enunciamos, neste sentido, un novo teorema a continuación, para o cal introducimos a seguinte notación para $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$ fixados, e para cada $s \in I$

$$\hat{m}_k^{r,R}(s) := \min\{f_k(s, x_1, x_2) : c_k R_k \leq x_k \leq R_k, r_j \leq x_j \leq R_j (k \neq j)\}, \quad k = 1, 2,$$

$$\hat{M}_k^{r,R}(s) := \max\left\{f_k(s, x_1, x_2) : 0 \leq x_k \leq \frac{r_k}{c_k}, 0 \leq x_j \leq R_j (k \neq j)\right\}, \quad k = 1, 2.$$

Teorema 4.43. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$, de xeito que se satisfai, para cada $k \in \{1, 2\}$, algunha das seguintes condicións*

$$(a) A_k m_k^{r,R}(s) > r_k, \text{ para cada } s \in [a, b] \text{ e } B_k M_k^{r,R}(s) < R_k, \text{ para cada } s \in I;$$

$$(b) B_k \hat{M}_k^{r,R}(s) < r_k, \text{ para cada } s \in [a, b] \text{ e } A_k \hat{m}_k^{r,R}(s) > R_k, \text{ para cada } s \in I.$$

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que

$$r_k < \varphi_k(x_k) \text{ e } \|x_k\|_\infty < R_k, \quad (k = 1, 2).$$

Demostración. A situación na que se satisfai (a) para ámbalas dúas compoñentes séguese facilmente dunha lixeira adaptación da proba do Teorema 4.39. Veremos aquí o caso no que se satisfai (b) para cada $k \in \{1, 2\}$. Os casos restantes son semellantes.

Vexamos que o operador $\mathcal{T} : \overline{K}_{r,R}^\varphi \rightarrow K$ dado por (4.23) satisfai para cada $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ e cada $k \in \{1, 2\}$

(i*) $\mathcal{T}_k x \not\leq_{K_k} x_k$ se $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$; e (ii*) $\mathcal{T}_k x \not\leq_{K_k} x_k$ se $\|x_k\|_\infty = R_k$.

Así, a aplicación directa do Teorema 3.40 conclúe o resultado.

Fixado $k \in \{1, 2\}$ supoñamos, por un lado, que non se satisfai (ii*). Entón, existe $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ tal que $\|x_k\|_\infty = R_k$ e $\mathcal{T}_k x \leq_{K_k} x_k$. Deste xeito, temos que

$$x_k(t) \geq \mathcal{T}_k x(t) = \int_0^1 G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_a^b G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Como $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ é tal que $\|x_k\|_\infty = R_k$, entón $c_k R_k \leq x_k(t) \leq R_k$ e $r_j \leq x_j(t) \leq R_j$ ($k \neq j$) para cada $t \in [a, b]$. Así

$$\begin{aligned} x_k(t) &\geq \int_a^b G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_a^b G_k(t, s) \hat{m}_k^{r,R}(s) ds \\ &> \frac{R_k}{A_k} \int_a^b G_k(t, s) ds \geq R_k, \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

que é unha contradición con $\|x_k\|_\infty = R_k$.

Supoñamos agora que non temos (i*). Entón existe $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ tal que $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$ e $\mathcal{T}_k x \succeq_{K_k} x_k$. Así,

$$x_k(t) \leq \mathcal{T}_k x(t) = \int_0^1 G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in I,$$

e como $x \in \overline{K}_{r,R}^\varphi$ é tal que $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$, podemos asegurar que $0 \leq x_k(t) \leq \frac{r_k}{c_k}$ e $0 \leq x_j(t) \leq R_j$ ($k \neq j$) para todo $t \in I$. Logo

$$x_k(t) \leq \int_0^1 G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \leq \int_0^1 G_k(t, s) \hat{M}_k^{r,R}(s) ds < \frac{r_k}{B_k} \int_0^1 G_k(t, s) ds \leq r_k, \quad t \in I,$$

pero isto contradí $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k$. □

Neste momento é natural preguntarse ata que punto traballar con conxuntos estrelados deste tipo supón unha ganancia con respecto a empregar os resultados en rexións anulares. Trataremos de dar aquí resposta a esta cuestión para xustificar todo o esforzo depositado na realización da sección 3.2.

Observación 4.44. Fixémonos en que, para $r_k \in \mathbb{R}_+$ ($k = 1, 2$) temos

$$(K_k)_{r_k} \subset (K_k)_{\frac{r_k}{c_k}}^\varphi \subset (K_k)_{\frac{r_k}{c_k}}, \quad k = 1, 2,$$

pois se $x_k \in (K_k)_{r_k}$, entón $\|x_k\|_\infty = \max_{t \in I} x_k(t) < r_k$ e así claramente $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) < r_k$. Ademais, se $x_k \in (K_k)_{\frac{r_k}{c_k}}^\varphi$, como $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) < r_k$ e $\min_{t \in [a,b]} x_k(t) \geq c_k \|x_k\|_\infty$, temos que $\|x_k\|_\infty < \frac{r_k}{c_k}$.

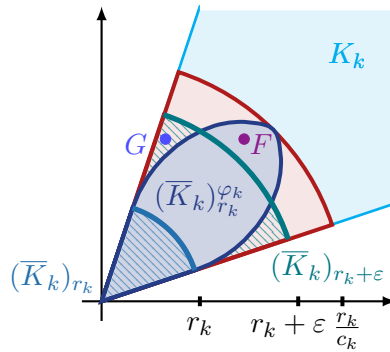


Figura 4.3: Idea ilustrativa da posición relativa entre os conxuntos $(\bar{K}_k)_{r_k}$, $(\bar{K}_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ e $(\bar{K}_k)_{r_k+\varepsilon}$.

Por outra parte, claramente $(\bar{K}_k)_{r_k}^{\varphi_k} \not\subset (K_k)_{r_k+\varepsilon}$ e $(\bar{K}_k)_{r_k} \not\subset (K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$. De feito, fixado $\varepsilon \in (0, \frac{r_k}{c_k} - r_k)$ é posible atopar elementos en $(K_k)_{r_k+\varepsilon}$ que non están en $(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$, así como elementos en $(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ que non están en $(K_k)_{r_k+\varepsilon}$. Polo tanto

$$(K_k)_{r_k}^{\varphi_k} \not\subset (K_k)_{r_k+\varepsilon} \quad \text{e} \quad (K_k)_{r_k+\varepsilon} \not\subset (K_k)_{r_k}^{\varphi_k}.$$

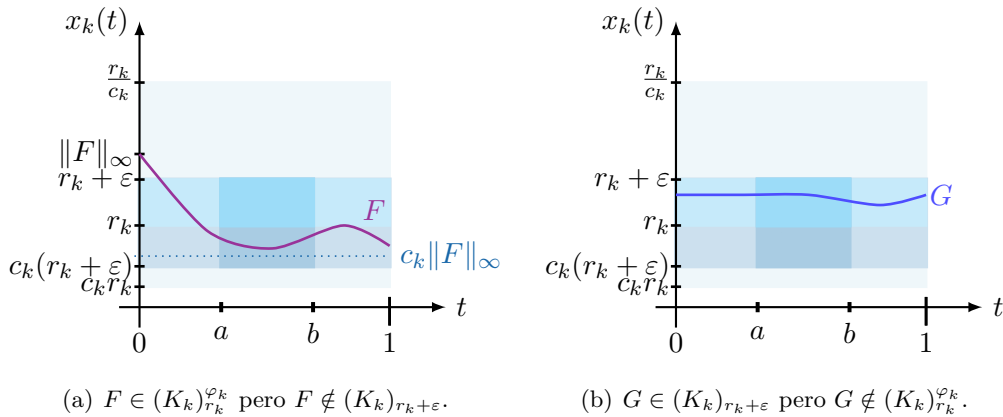


Figura 4.4: Exemplos gráficos dun elemento de $(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ que non está en $(K_k)_{r_k+\varepsilon}$ e dun elemento de $(K_k)_{r_k+\varepsilon}$ que non está en $(K_k)_{r_k}^{\varphi_k}$ (ver Figura 4.3).

Observación 4.45. Nas condicións do Teorema 4.43, fixado $k \in \{1, 2\}$, pódese ver que a condición

$$B_k \hat{M}_k^{r,R}(s) < r_k, \text{ para cada } s \in [a, b] \text{ e } A_k \hat{m}_k^{r,R}(s) > R_k, \text{ para cada } s \in I,$$

non só implica que o operador $\mathcal{T} : \bar{K}_{r,R}^{\varphi} \rightarrow K$ satisfai para cada $x \in \bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ e cada $k \in \{1, 2\}$

$$\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \min_{t \in [a,b]} x_k(t) = r_k \text{ e } \mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_{\infty} = R_k,$$

senón que tamén permite probar que para cada $x \in \bar{K}_{r,R}^{\varphi}$ e cada $k \in \{1, 2\}$ se ten

$$\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_{\infty} = \frac{r_k}{c_k} \text{ e } \mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_{\infty} = R_k.$$

A Observación 4.45 pon de manifesto que, neste caso, as condicións mínimas que atopamos sobre f_k para que a compoñente k -ésima do operador \mathcal{T} sobre $\overline{K}_{r,R}^\varphi$ satisfaga a condición expansiva da versión clásica do teorema de Krasnoselskii non aporta ningunha mellora. Baixo tales condicións, a compoñente k -ésima do operador en $\overline{K}_{\frac{r}{c},R}$ satisfai esa mesma condición na fronteira deste conxunto e o resultado proporcionáanos unha mellor localización para a solución. Polo tanto, o Teorema 4.43 pode reescribirse de xeito máis preciso da seguinte maneira.

Teorema 4.46. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$, de xeito que se satisfai, para cada $k \in \{1, 2\}$, algunha das seguintes condicións*

$$(a) \quad A_k m_k^{r,R}(s) > r_k, \text{ para cada } s \in [a, b] \text{ e } B_k M_k^{r,R}(s) < R_k, \text{ para cada } s \in I;$$

$$(b) \quad B_k \hat{M}_k^{r,R}(s) < r_k, \text{ para cada } s \in [a, b] \text{ e } A_k \hat{m}_k^{r,R}(s) > R_k, \text{ para cada } s \in I.$$

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que

$$r_k < \varphi_k(x_k) \text{ e } \|x_k\|_\infty < R_k, \text{ se } f_k \text{ satisfai (a); e,}$$

$$\frac{r_k}{c_k} < \|x_k\|_\infty < R_k, \text{ se } f_k \text{ satisfai (b).}$$

Pola contra, baixo as condicións mínimas sobre f_k para que a compoñente \mathcal{T}_k do operador en $\overline{K}_{r,R}^\varphi$ satisfaga a condición compresiva non podemos asegurar que estas se satisfagan tamén para o operador en $\overline{K}_{\frac{r}{c},R}$. Para que ocorra isto precisamos impoñer condicións máis fortes. En particular, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.47. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ existen $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$, de xeito que se satisfán as seguintes condicións*

$$(i) \quad A_k m_k^{r,R}(s) \geq \frac{r_k}{c_k}, \text{ para cada } s \in [a, b]; \text{ e (ii) } B_k M_k^{r,R}(s) < R_k, \text{ para cada } s \in I.$$

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que $\frac{r_k}{c_k} \leq \|x_k\|_\infty < R_k$ ($k = 1, 2$).

Demostración. Seguindo a proba do Teorema 4.39, xa sabemos que

$$\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_\infty = R_k.$$

Vexamos $\mathcal{T}_k x \not\prec_{K_k} x_k$ se $\|x_k\|_\infty = \frac{r_k}{c_k}$. En efecto, do contrario, existiría $x \in \overline{K}_{\frac{r}{c},R}$ tal que $\|x_k\|_\infty = \frac{r_k}{c_k}$ e $\mathcal{T}_k x \prec_{K_k} x_k$. Así,

$$x_k(t) > \mathcal{T}_k x(t) = \int_0^1 G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_a^b G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Agora, como $x \in \overline{K}_{\frac{r}{c}, R}$ é tal que $\|x_k\|_\infty = \frac{r_k}{c_k}$, temos que $r_k \leq x_k(t) \leq \frac{r_k}{c_k}$ e $r_j \leq x_j(t) \leq R_j$ ($k \neq j$) para cada $t \in [a, b]$. Deste xeito,

$$\begin{aligned} x_k(t) &> \int_a^b G_k(t, s) f_k(s, x_1(s), x_2(s)) ds \geq \int_a^b G_k(t, s) m_k^{r, R}(s) ds \\ &\geq \frac{r_k}{c_k A_k} \int_a^b G_k(t, s) ds \geq \frac{r_k}{c_k}, \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

o cal contradí $\|x_k\|_\infty = \frac{r_k}{c_k}$. □

Observación 4.48. As hipóteses sobre as funcións f_1 e f_2 son máis fortes no Teorema 4.47 que no Teorema 4.39 fixados $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$ ($k = 1, 2$). Porén, o Teorema 4.47 proporciona unha mellor localización para a solución que o Teorema 4.39, pois seguindo a Observación 4.44 é claro que

$$(\overline{K}_k)_{\frac{r_k}{c_k}, R_k} \subset (\overline{K}_k)_{R_k} \setminus (K_k)_{r_k}^{\varphi_k}.$$

Fixados $r_k^*, R_k^* \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k^* < R_k^*$ ($k = 1, 2$) enunciámos a continuación o resultado correspondente a aplicar o Corolario 3.33 para obter unha solución positiva coas compoñentes satisfacendo $r_k^* \leq \|x_k\|_\infty < R_k^*$ ($k = 1, 2$).

Corolario 4.49. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que para cada $k \in \{1, 2\}$ existen $r_k^*, R_k^* \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k^* < R_k^*$, de xeito que se satisfán as seguintes condicións*

$$(i) A_k \tilde{m}_k^{r^*, R^*}(s) \geq r_k^*, \text{ para cada } s \in [a, b]; \text{ e } (ii) B_k M_k^{r^*, R^*}(s) < R_k^*, \text{ para cada } s \in I,$$

onde

$$\tilde{m}_k^{r^*, R^*}(s) := \min\{f_k(s, x_1, x_2) : c_k r_k^* \leq x_k \leq r_k^*, c_j r_j^* \leq x_j \leq R_j^* (k \neq j)\}.$$

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que $r_k^* \leq \|x_k\|_\infty < R_k^*$ ($k = 1, 2$).

Observación 4.50. Fixemos $r_k, R_k \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k < c_k R_k$ para cada $k \in \{1, 2\}$. Sexan $r_k^*, R_k^* \in \mathbb{R}_+$. Tomando $R_k^* = R_k$ para $k \in \{1, 2\}$ e $r_k^* \neq \frac{r_k}{c_k}$, as condicións (i) no Teorema 4.39 e no Corolario 4.49 non son comparables. Non hai unha relación directa entre $m_k^{r, R}(s)$ e $\tilde{m}_k^{r^*, R^*}(s)$ como pode verse na Figura 4.5, fixado $s \in I$. Porén, para $r_k^* = \frac{r_k}{c_k}$, o Corolario 4.49 correspóndese co Teorema 4.47, cuxas condicións eran máis fortes que as do Teorema 4.39.

É evidente que tamén podemos atopar condicións sobre f_1 e f_2 de xeito que o operador \mathcal{T} restrinxido a un conxunto da forma $(\overline{K}_1)_{r_1^{**}, R_1^{**}} \times (\overline{K}_2)_{r_2^{**}, R_2^{**}}^{\varphi_2}$, onde $r_k^{**}, R_k^{**} \in \mathbb{R}_+$ con $r_k^{**} < R_k^{**}$ ($k = 1, 2$) e $r_2^{**} < c_2 R_2^{**}$, se atope na situación (b)-(i) do Teorema 3.40. Isto é, condicións nas que podemos asegurar que o sistema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que $r_1^{**} < \|x_1\|_\infty < R_1^{**}$, $\varphi_2(x_2) > r_2^{**}$ e $\|x_2\|_\infty < R_2^{**}$.

Enunciamos a continuación o resultado correspondente, cuxa proba omitimos por seguirse directamente de razoamentos análogos aos dos resultados anteriores.

Corolario 4.51. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que existen $r_k^{**}, R_k^{**} \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k^{**} < R_k^{**}$, $(k = 1, 2)$ e $r_2^{**} < c_2 R_2^{**}$ de xeito que se satisfán as seguintes condicións*

(a) $A_1 \check{m}_1^{r_1^{**}, R_1^{**}}(s) > r_1^{**}$, para cada $s \in [a, b]$ e $B_1 M_1^{r_1^{**}, R_1^{**}}(s) < R_1^{**}$ para cada $s \in I$, onde

$$\check{m}_1^{r_1^{**}, R_1^{**}}(s) = \min\{f_1(s, x_1, x_2) : c_1 r_1^{**} \leq x_1 \leq r_1^{**}, r_2^{**} \leq x_2 \leq R_2^{**}\}$$

(b) $A_2 m_2^{r_2^{**}, R_2^{**}}(s) > r_2^{**}$, para cada $s \in [a, b]$ e $B_2 M_2^{r_2^{**}, R_2^{**}}(s) < R_2^{**}$ para cada $s \in I$.

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, unha solución positiva (x_1, x_2) tal que

$$r_1^{**} < \|x_1\|_\infty < R_1^{**}, \quad \varphi_2(x_2) > r_2^{**} \quad e \quad \|x_2\|_\infty < R_2^{**}.$$

Observación 4.52. As condicións sobre as compoñentes no Corolario 4.51 poden intercambiarse.

Observación 4.53. Na Observación 4.50 vimos que fixados $r_k, R_k, r_k^*, R_k^* \in \mathbb{R}_+$ $(k = 1, 2)$ o Teorema 4.39 e o Corolario 4.49 eran comparables só cando $R_k^* = R_k$ e $r_k^* = \frac{r_k}{c_k}$ $(k = 1, 2)$, situación na que o Corolario 4.49 se corresponde co Teorema 4.47 e cuxas hipóteses son máis fortes que as do Teorema 4.39.

Se agora tomamos $r_k^{**}, R_k^{**} \in \mathbb{R}_+$ e impoñemos $R_k^{**} = R_k^* = R_k$ $(k = 1, 2)$ temos que para

$$r_1^{**} = r_1^* = \frac{r_1}{c_1} \quad e \quad r_2^{**} = c_2 r_2^* = r_2,$$

o Teorema 4.39, o Corolario 4.51 e o Corolario 4.49 son comparables (ver Figura 4.5). Este último conta con condicións máis fortes que o segundo, que á súa vez, conta con condicións máis fortes que o primeiro.

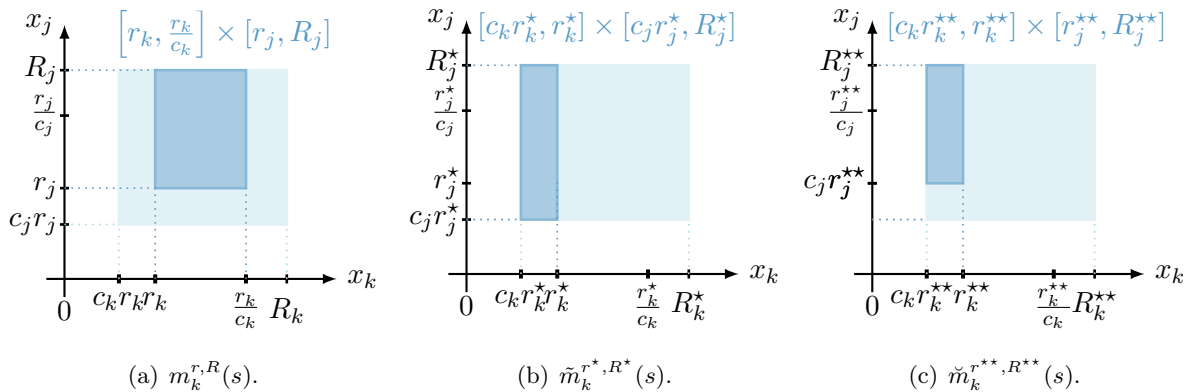


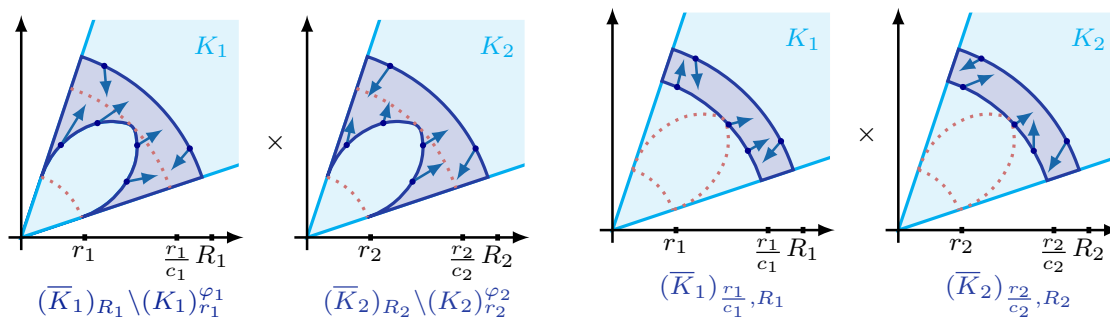
Figura 4.5: Rexións nas que se busca o mínimo de f_k para obter $m_k^{r,R}(s)$, $\tilde{m}_k^{r^*,R^*}(s)$ e $\check{m}_k^{r^{**},R^{**}}(s)$ fixado $s \in I$, respectivamente.

Noutro caso, os resultados son non comparables e podería ocorrer que para algún exemplo concreto só un deles fose capaz de detectar solucións. Isto ten sentido, pois nada impide a priori que un operador $\mathcal{H} : K \rightarrow K$ dado poida satisfacer para certos $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{H}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_\infty = R_k, \text{ e } \mathcal{H}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \min_{t \in [a,b]} x_k(t) = \tilde{r}_k \quad k = 1, 2,$$

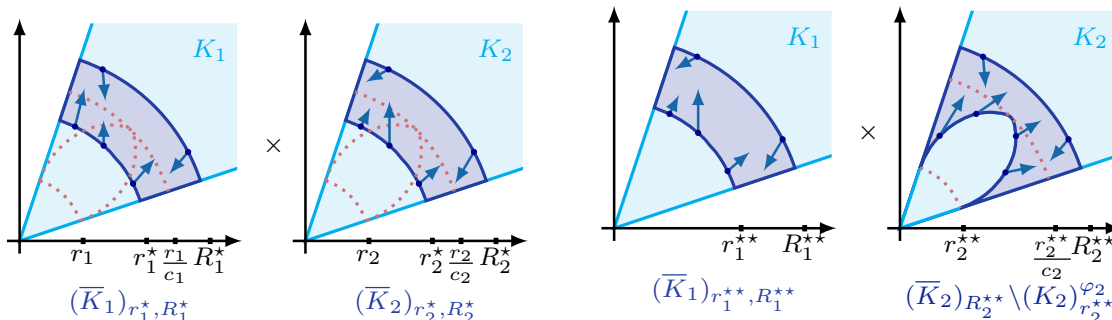
con $\tilde{r}_1 \in [0, c_1 R_1]$ e $\tilde{r}_2 \in [0, c_2 R_2]$, pero non existir nin $\hat{r}_1 \in [0, R_1]$ nin $\hat{r}_2 \in [0, R_2]$ de xeito que

$$\mathcal{H}_k x \not\prec_{K_k} x_k \text{ se } \|x_k\|_\infty = \hat{r}_k, \quad k = 1, 2.$$



(a) Teorema 4.39.

(b) Teorema 4.47.



(c) Corolario 4.49.

(d) Corolario 4.51.

Figura 4.6: Visualización comparativa das distintas localizacións que os distintos resultados desta sección ofrecen para as solucións do problema (4.22).

Exemplo 4.54. Consideremos o sistema de ecuacións de segunda orde con condicións tipo Dirichlet da seguinte forma

$$\begin{cases} x''(t) + f_1(x(t), y(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ y''(t) + f_2(x(t), y(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0 = y(0) = y(1), \end{cases} \quad (4.24)$$

onde $f_1, f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ veñen dadas por

$$f_1(x, y) = (\sqrt{x} + A)(1 + \text{sen}^2(\pi y)), \text{ e } f_2(x, y) = 33 + 3e^{-\frac{x^2+y^2}{3}},$$

con $A \in \mathbb{R}_+$.

Podemos atopar unha correspondencia entre o sistema (4.24) e un sistema de ecuacións integrais tipo Hammerstein da forma (4.22) onde os núcleos están dados polas correspondentes funcións de Green

$$G_1(t, s) = G_2(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & \text{se } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s), & \text{se } 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

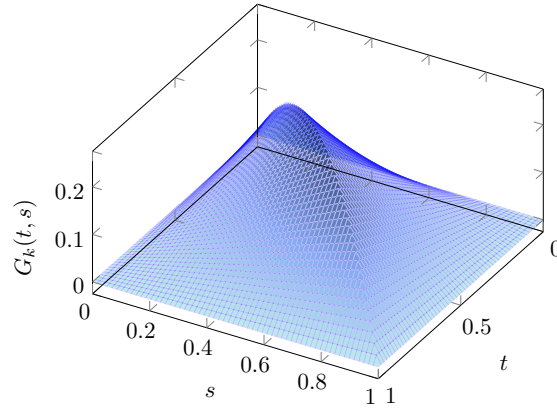


Figura 4.7: Gráfica da función de Green asociada ao problema diferencial de segunda orde con condicións Dirichlet.

A xustificación de que esta é a forma das funcións de Green deste problema pode consultarse en [22] e é semellante ao que faciamos na subsección 4.2.2 para o problema con condicións mixtas. Ademais, a condición (\mathcal{C}_2) satisfáise (consultar [22]) tomando

$$\Phi_k(s) = s(1-s), \quad [a, b] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \quad \text{e} \quad c_k = \frac{1}{4} \quad (k = 1, 2).$$

Por outra parte, para cada $k \in \{1, 2\}$ temos

$$B_k = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G_k(t, s) ds = \max_{t \in [0,1]} \int_0^t s(1-t) ds + \int_t^1 t(1-s) ds = \max_{t \in [0,1]} \frac{t}{2}(1-t) = \frac{1}{8},$$

$$A_k = \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G_k(t, s) ds = \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \int_{\frac{1}{4}}^t s(1-t) ds + \int_t^{\frac{3}{4}} t(1-s) ds = \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{32} = \frac{1}{16}.$$

Fixemos agora $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $R_1 = 5$ e $R_2 = 9$. Imos ver que hai valores de $A \in \mathbb{R}_+$ para os que o operador $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ satisfai as hipóteses do Teorema 4.39 pero non as do Teorema 4.47.

En primeiro lugar, observamos que $33 \leq f_2(x, y) \leq 36$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Así, claramente

$$\frac{1}{16} m_2^{r,R} \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8} M_2^{r,R} < 9,$$

onde $m_2^{r,R} = \min\{f_2(x, y) : 2 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 9\}$ e $M_2^{r,R} = \max\{f_2(x, y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 9\}$.

Agora, para que se satisfaga o Teorema 4.39 precisamos que

$$\frac{1}{16} m_1^{r,R} \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8} M_1^{r,R} < 9,$$

onde $m_1^{r,R} = \min\{f_1(x,y) : 1 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 9\} = 1 + A$ e $M_1^{r,R} = \max\{f_1(x,y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 9\} = 2(3 + A)$. É dicir

$$A \geq 15 \quad \text{e} \quad A < 33.$$

Por outra parte, f_2 non satisfai a hipótese correspondente ao Teorema 4.47, pois se o fixese teriamos que

$$\frac{1}{16}m_2^{r,R} \geq 8 \quad \text{e} \quad \frac{1}{8}M_2^{r,R} < 9,$$

e isto non ocorre.

Non podemos, polo tanto, aplicar o Teorema 4.47 ao operador $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ restrinxido a $\overline{K}_{r,R}^{\frac{r}{c}}$ para ningún $A \in \mathbb{R}_+$. Pola contra, se $A \in [15, 33)$ o operador $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ restrinxido a $\overline{K}_{r,R}^{\varphi}$ satisfai as hipóteses do Teorema 4.39 e así, o problema (4.24) ten, polo menos unha solución positiva (x, y) tal que

$$\min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x(t) \geq 1, \|x\|_{\infty} < 5 \quad \text{e} \quad \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} y(t) \geq 2, \|y\|_{\infty} < 9.$$

Fixemos $A = 15$. Xa sabemos que para este valor podemos aplicar o Teorema 4.39 tomando $r_1 = 1, r_2 = 2, R_1 = 5$ e $R_2 = 9$, pero non o Teorema 4.47 para esta mesma escolla. Tampouco é posible aplicar o Corolario 4.49 tomando $r_k^* = r_k$ e $R_k^* = R_k, k = 1, 2$. En efecto,

$$\frac{1}{16}\tilde{m}_1^{r,R} < 1,$$

onde $\tilde{m}_1^{r,R} = \min\{f_1(x,y) : \frac{1}{4} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 5\} = \frac{1}{2} + 15$.

Destá maneira, o operador \mathcal{T} satisfai

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} x(t) = 1 \text{ e } \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \|x\|_{\infty} = 5, \text{ e} \\ \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} y(t) = 2 \text{ e } \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \|y\|_{\infty} = 9, \end{aligned}$$

pero non podemos garantir que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \|x\|_{\infty} = 1 \text{ e } \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \|x\|_{\infty} = 5, \text{ e} \\ \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \|y\|_{\infty} = 2 \text{ e } \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \|y\|_{\infty} = 9, \end{aligned}$$

nin tampouco

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \|x\|_{\infty} = 4 \text{ e } \mathcal{T}_1(x, y) \not\prec_{K_1} x \text{ se } \|x\|_{\infty} = 5, \text{ e} \\ \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \|y\|_{\infty} = 8 \text{ e } \mathcal{T}_2(x, y) \not\prec_{K_2} y \text{ se } \|y\|_{\infty} = 9. \end{aligned}$$

É importante reparar en que, aínda que puidésemos atopar $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ para os cales fose posible aplicar o Corolario 4.49 tomando $r_k^* = r_k, (k = 1, 2), R_1^* = 5$ e $R_2^* = 9$, a localización proporcionada pola aplicación de tal resultado non sería comparable coa que nos proporciona o Teorema 4.39, como pon de manifesto a Observación 4.44.

4.2.3.1 Aplicación dos resultados de multiplicidade de punto fixo a sistemas de ecuacións integrais tipo Hammerstein

Para exemplificar a aplicabilidade dos resultados de multiplicidade de punto fixo introducidos na sección 3.3, enunciámos aquí o seguinte resultado, que se obtén de aplicar a situación (b) *Versión Clásica* no Teorema 3.62 para $m = 1$.

Teorema 4.55. *Baixo as condicións (\mathcal{C}_1) - (\mathcal{C}_3) , supoñamos que existen $r_k^{(j)}, R_k^{(j)} \in \mathbb{R}_+$ tales que $r_k^{(j)} < R_k^{(j)}$, $k = 1, 2, j = 1, 2, 3$, e $r_k^{(1)}, r_k^{(2)}, R_k^{(1)}, R_k^{(2)} \in [r_k^{(3)}, R_k^{(3)}]$ para $k = 1, 2$, que existe $k \in \{1, 2\}$ tal que $R_k^{(1)} < r_k^{(2)}$ e*

$$A_k \tilde{m}_k^{r_k^{(j)}, R_k^{(j)}}(s) > r_k^{(j)}, \text{ para cada } s \in [a, b], k = 1, 2, j = 1, 2, 3; \text{ e}$$

$$B_k M_k^{r_k^{(j)}, R_k^{(j)}}(s) < R_k^{(j)}, \text{ para cada } s \in I, k = 1, 2, j = 1, 2, 3.$$

Entón, o problema (4.22) ten, polo menos, tres solucións positivas $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ e $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$ tales que

$$r_k^{(j)} < \|x_k^{(j)}\|_\infty < R_k^{(j)}, k = 1, 2, j = 1, 2, 3.$$

Demostración. Consideremos o operador $\mathcal{T} : \overline{K}_{r^{(3)}, R^{(3)}} \rightarrow K$, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ dado por (4.23). Como $r_k^{(1)}, r_k^{(2)}, R_k^{(1)}, R_k^{(2)} \in [r_k^{(3)}, R_k^{(3)}]$ para $k \in \{1, 2\}$, claramente $\overline{K}_{r^{(1)}, R^{(1)}} \cup \overline{K}_{r^{(2)}, R^{(2)}} \subset \overline{K}_{r^{(3)}, R^{(3)}}$. Ademais, a existencia dalgún $k \in \{1, 2\}$ tal que $R_k^{(1)} < r_k^{(2)}$ implica $\overline{K}_{r^{(1)}, R^{(1)}} \cap \overline{K}_{r^{(2)}, R^{(2)}} = \emptyset$.

Repetindo os pasos realizados nas probas desta sección, é directo que se satisfai a condición (b)-(i) do Teorema 3.62 para $k = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Isto conclúe a existencia dos tres puntos fixos para \mathcal{T} con compoñentes positivas que se corresponden coas solucións na tese deste resultado. \square

Exemplo 4.56. O sistema de ecuacións de segunda orde con condicións de fronteira Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) + \hat{h}(x(t))(1 + \text{sen}^2(y(t))) = 0, & t \in [0, 1], \\ y''(t) + \sqrt{y(t)}(1 + \text{sen}^2(x(t))) = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x(1) = 0 = y(0) = y(1), \end{cases} \quad (4.25)$$

onde

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{se } x \in [0, 1], \\ x^4, & \text{se } x \in (1, 6), \\ \sqrt[3]{x-6} + 1296, & \text{se } x \in [6, \infty), \end{cases}$$

é da forma (4.24) para as funcións $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dadas por

$$f_1(x, y) = \hat{h}(x)(1 + \text{sen}^2(y)) \text{ e } f_2(x, y) = \sqrt{y}(1 + \text{sen}^2(x)).$$

Pode probarse que este sistema de ecuacións satisfai as hipóteses do Teorema 4.55 tomando $r_1^{(1)} = r_1^{(3)} = 2^{-9}$, $r_1^{(2)} = 2^6$, $R_1^{(1)} = 2^{-2}$, $R_1^{(2)} = R_1^{(3)} = 2^9 + 6$ e $r_2^{(j)} = 2^{-14}$, $R_2^{(j)} = 2^9$, $j = 1, 2, 3$.

Polo tanto, o sistema de ecuacións (4.25) ten, polo menos, tres solucións distintas $(x^{(1)}, y^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)})$ e $(x^{(3)}, y^{(3)})$ tales que

$$\frac{1}{512} < \|x^{(1)}\|_\infty < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{16384} < \|y^{(1)}\|_\infty < 512,$$

$$64 < \|x^{(2)}\|_\infty < 512, \quad \frac{1}{16384} < \|y^{(2)}\|_\infty < 512,$$

$$\frac{1}{4} < \|x^{(3)}\|_\infty < 64, \quad \frac{1}{16384} < \|y^{(3)}\|_\infty < 512.$$

Capítulo 5

Conclusión e traballos futuros

Culminamos o traballo con este último capítulo, onde pretendemos expoñer tanto as principais conclusións obtidas ao longo da súa realización, como as preguntas que foron xurdindo e poderían quedar abertas a ser exploradas nun futuro próximo.

5.1 Conclusión

No primeiro capítulo, comezamos introducindo distintas versións do teorema de Krasnoselskii para operadores definidos en subconxuntos da forma $\overline{U_2} \setminus U_1$ onde U_1 e U_2 son abertos relativos e limitados tales que $0 \in U_1$ e $\overline{U_1} \subset U_2$ dun cono P nun espazo de Banach X . Nese mesmo capítulo, poñiamos de manifesto que o feito de que o espazo sexa de Banach non é preciso sempre e cando se poida estender o operador ao conxunto $\overline{U_2}$, algo que en particular é fácil ver cando $\partial_P U_1$ é un retrato de $\overline{U_1}$. No contexto dos espazos de Banach, podemos empregar o teorema de extensión de Dugundji directamente sen preocupámonos de se $\partial_P U_1$ é ou non un retrato de $\overline{U_1}$ e obtendo unha extensión sen puntos fixos en $\partial_P U_1$ (o cal é clave para poder falar do índice de punto fixo do operador nos conxuntos desexados para facer a proba).







Cando pasamos a probar as versións vectoriais, empregar este teorema de extensión en espazos de Banach xa non serve para obter un operador co índice ben definido nos conxuntos de interese. Aínda que este feito non aparece reflexado en [40], neste artigo (no que se introduce a versión vectorial homotópica empregando o índice) explícase que para poder estender un operador dado sobre un conxunto da forma $\overline{\mathcal{O}_1} \setminus U_1 \times \overline{\mathcal{O}_2} \setminus U_2$ (con U_k e \mathcal{O}_k abertos relativos e limitados de P_k un cono dun espazo normado X_k , tales que $0 \in U_k$, $\overline{U_k} \subset \mathcal{O}_k$, $k = 1, 2$) sen puntos fixos nos correspondentes conxuntos soamente foi posible cando $\partial_{P_k} U_k$ é un retrato de $\overline{U_k}$ para cada $k \in \{1, 2\}$. Nese mesmo artigo introdúcese unha retracción de $U_k = \overline{P}_{r_k}$ en $\partial_{P_k} P_{r_k}$ con $r_k \in \mathbb{R}_+$.

Con isto e a versión vectorial homotópica de [40] en mente, o primeiro obxectivo que abordamos

foi o desenvolvemento da versión vectorial normada en rexións anulares. A retracción necesaria para estender o operador xa estaba dispoñible, o verdadeiro desafío consistía agora en xeneralizar o [40, Lemma 2.1], substituíndo a condición correspondente pola do Corolario 1.23, sobre a que se basea a demostración de todos os resultados do primeiro capítulo. Deste xeito, obtivemos un resultado xeral, o Teorema 3.12, cuxas hipóteses recollen as de todas as formas fortes das versións normada, clásica e homotópica.

A versión vectorial normada constitúe o resultado orixinal máis relevante deste traballo. Non só dá sentido ás denominacións de compresión e expansión asociadas ao teorema de Krasnoselskii, senón que, ademais, é unha versión independente das demais, as cales si están relacionadas entre si. As condicións que require son tamén máis doadas de visualizar, o que resultou clave para identificar que, baixo condicións compresivas en ámbalas dúas compoñentes, a extensión dada pola retracción introducida en [40] non presenta puntos fixos nos conxuntos de interese cando o operador non os ten na fronteira do seu dominio. Isto permitiu obter a forma débil desta versión empregando o índice de punto fixo. Esta observación motivou a busca de distintas retraccións que, baixo condicións compresivas das versións clásica e homotópica (esta última nun contexto máis restritivo), nos levaron ás súas correspondentes formas débiles. Así mesmo, tamén foi posible atopar unha retracción que permitiu demostrar a versión vectorial clásica con ϵ .

	Rexións anulares		Rexións máis xerais (estrelados)	
Versión	Forte	Débil	Forte	Débil
Homotópica	En [40]	✓	✓	✗
Clásica	En [40]	✓	✓	✓
Normada	✓	✓	✓	✓
Clásica con ϵ	✓		✗	

-  : Conseguido en todas as situacións compresivo-expansivas calculando o índice en todas elas.
-  : Conseguido en todas as situacións compresivo-expansivas pero calculando o índice soamente na *Versión Compresión-compresión*.
-  : Igual a  pero nunha situación máis restritiva. Casos nos que a norma preserva a relación de orde inducida polo cono sobre os elementos deste.
-  : Conseguida só a *Versión Compresión-compresión* a través do cálculo do índice.
-  : Non acadada para ningunha situación compresivo-expansiva.

Táboa 5.1: Resumo das distintas versións vectoriais do teorema de Krasnoselskii acadadas no terceiro capítulo.

Na sección 4.2.2 do capítulo anterior amosamos a importancia de ter logrado este obxectivo de debilitación de hipóteses, obtendo un resultado de existencia de solución que precisa das condicións débiles da versión homotópica para funcionar. Ademais, este exemplo evidencia que as restricións necesarias para a construción da retracción neste caso son razoables, especialmente se o propósito é abordar este tipo de problemas de análise non lineal.

Outro dos obxectivos do traballo consistía en atopar conxuntos máis xerais tales que permitisen estender o operador da forma desexada. Neste contexto atopamos os conxuntos estrelados, para os que fomos capaces de construír unha retracción (con axuda dos traballos [33, 34]) que permitiu obter todas as situacións compresivo-expansivas para as distintas versións fortes. Así mesmo, foi posible tratar os casos de compresión en ambas compoñentes para as versións débiles clásica e normada, aínda que non para a versión homotópica débil nin para a clásica con ϵ (ver Taboa 5.1). Ademais, na sección 4.2.3 vimos que estes resultados en conxuntos máis xerais poden resultar de utilidade, ben para obter distintas localizacións de solucións de sistemas diferenciais e integrais para cada compoñente, ou ben para obter resultados que poderían detectar existencia de solución cando o correspondente resultado obtido ao aplicar o mesmo en rexións anulares non o fai.

5.2 Traballos futuros

Como en todo traballo de investigación, numerosas preguntas e liñas de investigación foron aparecendo. Entre elas destacamos as seguintes.

- Non parece sinxelo obter o valor do índice nos casos con compoñentes expansivas para as distintas versións débiles, especialmente naqueles nos que os dominios son máis xerais que rexións anulares. No caso dos resultados para operadores definidos en rexións anulares podería ser interesante obter o valor do índice do operador auxiliar que construímos para transformar a compoñente expansiva en compresiva e obter o punto fixo.
- Outros tipos de conxuntos estrelados como os introducidos en [33, 34] e conos poderían ter sido escollidos na sección 4.2.3 para buscar resultados de existencia de solución que poidan ofrecer distintas e posibles mellores localizacións.
- Podería ser interesante explorar a posibilidade de mesturar as distintas versións con outros resultados de punto fixo. Por exemplo, en [7] propoñen unha modificación do teorema de Krasnoselskii que podería impoñerse sobre unha compoñente dun operador, mentres que na outra se impón algunha das versións neste traballo. O teorema de Leggett-Williams [30] podería ser outro resultado a empregar neste sentido. Esta idea apoiase principalmente en

[23], onde propoñen un resultado híbrido entre as versións homotópica e clásica do teorema de punto fixo de Krasnoselskii e o teorema de punto fixo de Schauder.

- Na sección dedicada ás aplicacións a sistemas de ecuacións diferenciais traballamos con sistemas nos que as partes homoxéneas están desacopladas. No traballo [6], utilízase o teorema de Krasnoselskii para estudar a existencia de solucións en sistemas integrais con múltiples núcleos da forma

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^T G_1(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \int_0^T G_2(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds, & t \in [0, T], \\ x_2(t) = \int_0^T G_3(t, s) f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds + \int_0^T G_4(t, s) f_2(s, x_1(s), x_2(s)) ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

con $T \in \mathbb{R}_+$, unha situación que aparece cando o sistema homoxéneo presenta ecuacións acopladas. Unha posible liña de investigación futura consistiría en explorar a aplicabilidade das versións vectoriais deste traballo a ese tipo de sistemas, o que permitiría obter solucións non triviais en ambas compoñentes, a diferenza dos resultados probados en [6].

Bibliografía

- [1] C.D. Aliprantis, K.C. Border, *Infinite dimensional analysis*, Springer, 1999.
- [2] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review **18** (1976), no. 4, 620–709.
- [3] H. Amann, S. Weiss, *On the uniqueness of the topological degree*, Mathematische Zeitschrift **130** (1973), 39–54.
- [4] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [5] A. Cabada, *Green's functions in the theory of ordinary differential equations*, Springer, 2014.
- [6] A. Cabada, L. López-Somoza, and M. Yousfi, *Existence of solutions of nonlinear systems subject to arbitrary linear non-local boundary conditions*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **25** (2023), no. 4.
- [7] A. Cabada, J.A. Cid, *Existence of a non-zero fixed point for nondecreasing operators proved via Krasnoselskii's fixed point theorem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **71** (2009), no. 5–6, 2114–2118.
- [8] A. Cañada, A. Zertiti, *Fixed point theorems for systems of equations in ordered Banach spaces with applications to differential and integral equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **27** (1996), no. 4, 397–411.
- [9] J. Chu, P.J. Torres, and F. Wang, *Twist periodic solutions for differential equations with a combined attractive–repulsive singularity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **437** (2016), no. 2, 1070–1083.
- [10] J. Chu, S. Siegmund, and F. Wang, *Periodic solutions for second order singular differential systems with parameters*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **46** (2015), 1.
- [11] J. Chu, Z. Zhang, *Periodic solutions of second order superlinear singular dynamical systems*, Acta Applicandae Mathematicae **111** (2009), no. 2, 179–187.

- [12] J.A. Cid, *Grado topológico y ecuaciones diferenciales*, <https://angelcid.webs.uvigo.es/archivos/papers/degree.article.pdf> [acceso: (08/7/2025)].
- [13] J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, American Mathematical Society, 1995.
- [14] G.H. Darwin, *Periodic orbits*, vol. 21, International Press of Boston, 1897.
- [15] G. Dinca, J. Mawhin, *Brouwer degree. The core of nonlinear analysis*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 95, Birkhäuser, 2021.
- [16] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics **1** (1951), 353–367.
- [17] L.H. Erbe, S.C. Hu, and H.Y. Wang, *Multiple positive solutions of some boundary value problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **184** (1994), no. 3, 640–648.
- [18] G. Feltrin, *A note on a fixed point theorem on topological cylinders*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **196** (2016), no. 4, 1441–1458.
- [19] L.M. Fernández-Pardo, *Teoría de punto fijo e aplicaciones as ecuacións diferenciais*, Trabajo Fin de Grao, USC, 2024.
- [20] L. González-Aguilar, *Introducción a la teoría de conos*, Master's thesis, Facultad de ciencias físico matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Agosto 2016.
- [21] D. Guo, V. Lakshmikantham (ed.), *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, 1988.
- [22] G. Infante, *A short course on positive solutions of systems of ODEs via fixed point index*, Lecture notes in nonlinear analysis **16** (2017), 93–140.
- [23] G. Infante, G. Mascali, and J. Rodríguez-López, *A hybrid Krasnosel'skiĭ-Schauder fixed point theorem for systems*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **80** (2024), 104165.
- [24] G. Infante, M. Maciejewski, *Multiple positive solutions of parabolic systems with nonlinear, nonlocal initial conditions*, Journal of the London Mathematical Society **94** (2016), no. 3, 859–882.
- [25] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis: A first course*, Texts and Readings in Mathematics, Hindustan Book Agency, 2004.
- [26] M.A. Krasnosel'skii, *Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators*, Soviet Mathematics. Doklady. **135** (1960), 527–530.

- [27] ———, *Positive solutions of operator equations*, P. Noordhoff LDT, 1964.
- [28] K. Lan, *Coexistence fixed point theorems in product Banach spaces and applications*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **44** (2020), no. 5, 3960–3984.
- [29] A.C. Lazer, S. Solimini, *On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **99** (1987), no. 1, 109–114.
- [30] R.W. Leggett, L.R. Williams, *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, *Indiana University Mathematics Journal* **28** (1979), no. 4, 673–688.
- [31] X. Lin, D. Jiang, D. O'Regan, and R.P. Agarwal, *Twin positive periodic solutions of second order singular differential systems*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **25** (2005), no. 2, 263 – 273.
- [32] Z. Liu, F. Li, *Multiple positive solutions of nonlinear two-point boundary value problems*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **203** (1996), no. 3, 610–625.
- [33] C. Lois-Prados, R. Precup, and R. Rodríguez-López, *Krasnosel'skii type compression-expansion fixed point theorem for set contractions and star convex sets*, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* **22** (2020), no. 3.
- [34] C. Lois-Prados, R. Rodríguez-López, *A generalization of Krasnosel'skii compression fixed point theorem by using star convex sets*, *Proceedings of the Royal Society* **150** (2019), no. 1, 277–303.
- [35] J. Mawhin, *Mark A. Krasnosel'skii and nonlinear analysis: A fruitful love story*, Mark Alexandrovitch Krasnosel'skii, YPCC, 2000, pp. 80–97.
- [36] A. Mira-Cristiana, *Exact solutions for differential equations in celestial mechanics*, *Didactica Mathematica* **31** (2013), 1–6.
- [37] R. Precup, *A vector version of Krasnosel'skii's fixed point theorem in cones and positive periodic solutions of nonlinear systems*, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* **2** (2007), no. 1, 141–151.
- [38] ———, *Componentwise compression-expansion conditions for systems of nonlinear operator equations and applications*, *AIP Conference Proceedings*, 2009.
- [39] R. Precup, J. Rodríguez-López, *Multiplicity results for operator systems via fixed point index*, *Results in Mathematics* **74** (2019), no. 1.
- [40] J. Rodríguez-López, *A fixed point index approach to Krasnosel'skii-Precup fixed point theorem in cones and applications*, *Nonlinear Analysis* **226** (2023), 113138.

- [41] J.M. Sanchez-Muñoz, P. Sampere-Valdes, *La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral*, *Lecturas matemáticas* **43** (2022), no. 1, 5–22 (esp).
- [42] P.J. Torres, *Existence of one signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed theorem*, *Journal of Differential Equations* **190** (2003), 643–662.
- [43] ———, *Mathematical models with singularities: A zoo of singular creatures*, Atlantis Press, 2015.
- [44] H. Wang, *Positive periodic solutions of singular systems with a parameter*, *Journal of Differential Equations* **249** (2010), no. 12, 2986–3002.
- [45] J.R.L. Webb, *Solutions of nonlinear equations in cones and positive linear operators*, *Journal of the London Mathematical Society* **82** (2010), no. 2, 420–436.
- [46] J.R.L. Webb, K.Q. Lan, *Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type*, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **27** (2006), 91–115.
- [47] E.W. Weisstein, *Fredholm integral equation of the second kind*, 2025, <https://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheSecondKind.html> [Acceso: (27/4/2025)].