



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **A integral de Kurzweil-Stieltjes**

Santiago Reinal Giménez

2022 - 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **A integral de Kurzweil-Stieltjes**

Santiago Reinal Giménez

Xullo, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

|  |
|--|
| <b>Área de Coñecemento:</b> Análise Matemática   |
| <b>Título:</b> A integral de Kurzweil-Stieltjes  |
| <b>Director</b> Fernando Adrián Fernández Tojo   |
| <b>Breve descrición do contido</b>   |
| <p>A integral de Kurzweil-Stieltjes xeneraliza ás integrais de Riemann e Lebesgue en tanto que ao conxunto de funcións que se poden integrar como á forma na que integramos ás funcións, permitindo que se faga con respecto a unha función prefixada que escala o dominio.</p> <p>Con este traballo preténdese estender os coñecementos obtidos no grado máis aló da integración de Riemann e de Lebesgue, así coma introducir novos elementos da teoría de funcións.</p> |



# Índice xeral

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Notación</b>  | <b>VIII</b> |
| <b>Resumo</b>  | <b>IX</b>   |
| <b>Introdución</b>   | <b>XIII</b> |
| <b>1. A integral de Kurzweil-Stieltjes</b>                 | <b>1</b>    |
| 1.1. Conceptos e resultados previos . . . . .              | 1           |
| 1.2. A integral de Kurzweil-Stieltjes . . . . .            | 4           |
| 1.3. A integral de Kurzweil-Henstock . . . . .             | 9           |
| <b>2. A existencia da integral de Kurzweil-Stieltjes</b>   | <b>13</b>   |
| 2.1. Funcións de variación limitada . . . . .              | 13          |
| 2.2. Funcións regradas . . . . .                           | 14          |
| 2.3. A integral sobre funcións a chanzos . . . . .         | 16          |
| 2.4. Primeiro teorema de existencia da integral . . . . .  | 19          |
| <b>3. A integral indefinida</b>                            | <b>23</b>   |
| 3.1. A integral indefinida de Kurzweil-Stieltjes . . . . . | 23          |
| 3.2. A integral indefinida de Kurzweil-Henstock . . . . .  | 29          |
| <b>4. Consecuencias do Lema de Saks-Henstock</b>           | <b>31</b>   |
| 4.1. O Teorema de Substitución . . . . .                   | 31          |

---

|   |           |
|---|-----------|
| 4.2. Integrabilidade absoluta . . . . .   | 34        |
| <b>5. Teoremas de converxencia</b>  | <b>39</b> |
| <b>6. A relación con outras integrais de tipo Stieltjes</b>                               | <b>47</b> |
| 6.1. A relación entre a integral de Riemann-Stieltjes e a de Kurzweil-Stieltjes . . . . . | 47        |
| 6.2. A integral de Lebesgue-Stieltjes . . . . .   | 49        |
| 6.3. Relación entre a integral de Lebesgue-Stieltjes e a de Kurzweil-Stieltjes . . . . .  | 52        |
| <b>7. Conclusións</b>   | <b>57</b> |
| <b>A. Teoría da medida</b>  | <b>59</b> |





# Notación e convencións

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $\mathbb{N}$                 | Conxunto dos números naturais.   |
| $\mathbb{Q}$                 | Conxunto dos números racionais.  |
| $\mathbb{R}$                 | Conxunto dos números reais.  |
| $[a, b]$                     | Intervalo compacto non dexenerado de $\mathbb{R}$ .                      |
| $\mathcal{P}([a, b])$        | Conxunto de particións do intervalo $[a, b]$ .                           |
| $f(t^+)$                     | Límite lateral dereito de $f$ en $t$ .                                   |
| $f(t^-)$                     | Límite lateral esquerdo de $f$ en $t$ .                                  |
| $\mu_g$                      | Medida de Lebesgue-Stieltjes xerada pola función $g$ .                   |
| $\mu_{\text{id}}$            | Medida de Lebesgue usual.  |
| $BV([a, b])$                 | Conxunto de funcións de variación limitada.                              |
| $G([a, b])$                  | Conxunto de funcións regradas.   |
| $\int_a^b f \, d g$          | Integral de Kurzweil-Stieltjes de $f$ respecto a $g$ .                   |
| $\int_a^b f \, d x$          | Integral de Kurzweil-Henstock de $f$ .                                   |
| $\int_{[a, b]} f \, d \mu_g$ | Integral de Lebesgue-Stieltjes de $f$ respecto á medida xerada por $g$ . |
| $(\delta) \int_a^b f \, d g$ | $(\delta)$ -integral de Riemann-Stieltjes de $f$ respecto a $g$ .        |
| $(\sigma) \int_a^b f \, d g$ | $(\sigma)$ -integral de Riemann-Stieltjes de $f$ respecto a $g$ .        |



## Resumo

Neste traballo introduciremos a integral de Kurzweil-Stieltjes e exporemos como, cun sinxelo cambio na clásica definición de Riemann, obtense unha poderosa ferramenta que chega incluso a superar á de Lebesgue. Exporemos dun xeito practicamente completo a teoría que trae consigo esta integral, e retornaremos á definición de Kurzweil-Henstock para destacar algunhas importantes propiedades que herda neste caso. Principalmente faremos fincapé nos teoremas clásicos de converxencia que comparte con Lebesgue-Stieltjes e culminaremos demostrando que a integrabilidade de Kurzweil-Stieltjes abrangue á de Riemann e a de Lebesgue-Stieltjes. Centrarémonos na integración sobre intervalos pechados e limitados da recta real por ser a base da integración sobre unha variable real.

## Abstract

In this dissertation, we will introduce the Kurzweil-Stieltjes integral and explore how a simple change in the classic Riemann definition leads to a powerful tool that even surpasses Lebesgue's. We will extensively delve into the theory behind this integral and return to the Kurzweil-Henstock definition to highlight some important properties it inherits in this case. Our main focus will be on the classical convergence theorems shared with Lebesgue-Stieltjes, and we will culminate by demonstrating that Kurzweil-Stieltjes integrability encompasses both Riemann's and Lebesgue-Stieltjes'. We will primarily concentrate on integration over closed and bounded intervals of the real line, as it serves as the fundamental basis for integration over a real variable.



# Introdución

A teoría da integración, como tantas outras ramas das matemáticas actuais, nace na xeometría, en particular, no cálculo de áreas e volumes. Esta materia era de grande interese, tanto práctico como intelectual, para as civilizacións da Antigüidade. Por exemplo, na Grecia helenística, Arquímedes de Siracusa lograría aproximar diversas superficies mediante o coñecido como método exhaustivo, moi semellante ó actual concepto de particións de Riemann, aínda que non rematou por concibir o concepto de límite.

Porén, os primeiros avances substanciais na materia da integración desenvolveríanse na Idade Moderna, cando xa se comezaría a albiscar a súa relación coa derivación. No século XVII, matemáticos como Bonaventura Cavalieri, Evangelista Torricelli e John Wallis conseguirían computar as integrais de diversas curvas e, aínda máis, Isaac Barrow demostraría unha versión moi particular do Teorema Fundamental do Cálculo. A pesar diso, estas primeiras incursións na teoría da integración foron, de novo, de natureza puramente xeométrica.

Non obstante, a consolidación da integración chegaría da man de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, os que, continuando o traballo realizado polos seus predecesores, desenvolverían unha teoría completa sobre derivación e definirían as funcións integrables como aquelas que posúen primitiva. Agora ben, para poder desfrutar dun completo rigor e formalismo matemático, habería que agardar ata as definicións e resultados introducidos por Augustin Louis Cauchy no século XIX, que servirían como base para que Bernhard Riemann introducese a integral tal e como a coñecemos hoxe en día, máis xeral, incluso, que a de Newton e Leibniz.

Sería durante esta época cando, estudando distribucións de masa, Thomas Joannes Stieltjes introduciría unha innovadora idea que cambiaría a teoría de integración para sempre. Isto é, ampliaría a definición proposta por Riemann permitindo integrar respecto a funcións ou distribucións distintas da identidade. En consecuencia, gran variedade de disciplinas matemáticas poderían sustentarse neste novo concepto, dende a teoría da probabilidade ata o estudo de ecuacións diferenciais avanzadas. Ademais, a aparición durante o século XX de novas propostas de integrais, como a de Lebesgue, Denjoy ou Kurzweil-Henstock, traerían sempre da man unha xeneralización análoga á concibida no seu día por Stieltjes.

Así, o obxectivo deste traballo é expoñer e dar a coñecer unha das máis modernas integrais de tipo Stieltjes, isto é, a integral de Kurzweil-Stieltjes. Na segunda metade do século pasado, Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock formularon, de xeito independente, unha integral que levou un paso máis alá o Teorema Fundamental do Cálculo. Esta, coñecida como a integral de Kurzweil-Henstock, afastouse por completo da teoría da medida e retomou a definición orixinal de Riemann, restrinxindo as particións consideradas para aumentar a xeneralidade da integral. Con este pequeno cambio, lograron unha integral que englobaba a definición de Riemann e Lebesgue sobre intervalos pechados e limitados. A súa xeneralización de tipo Stieltjes foi desenvolvida por matemáticos como Milan Tvrdý nos anos 90. Porén, non atoparemos unha verdadeira monografía adicada a esta teoría ata o ano 2019, cando Tvrdý publica xunto con Giselle Monteiro e Antonín Slavík *Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications*, onde desenvolven de xeito exhaustivo os principais teoremas e resultados que a acompañan, incluíndo a relación con todo tipo de integrais de tipo Stieltjes e a súa aplicación a ecuacións diferenciais xeneralizadas. Este libro, [14], é o que serve como base do noso traballo.

Así pois, comezaremos o traballo familiarizándonos coa integral de Kurzweil-Henstock e o revolucionario concepto que é base da súa definición: o *calibre*. Este marcará o punto de inflexión coa definición de Riemann, xa que será unha poderosa ferramenta que nos permitirá restrinxir adecuadamente as particións que utilizamos á hora de integrar, como comentaremos máis adiante. Entón, no Capítulo 1 introduciremos esta integral, xunto coa súa xeneralización de Stieltjes, e veremos algunhas poderosas propiedades que se desprenden da súa definición, en particular, como mellora o Teorema Fundamental do Cálculo.

No Capítulo 2 entraremos de cheo na teoría de Kurzweil-Stieltjes e nos conceptos máis elementais que serán fundamentais para comprendela a fondo, presentando hipóteses suficientes para poder asegurar a existencia da integral. A continuación, no Capítulo 3, faremos referencia a un dos teoremas máis importantes do traballo, o Lema de Saks-Henstock, que teremos presente durante a meirande parte das demostracións máis avanzadas. Tamén introduciremos a integral indefinida e estableceremos as súas condicións de regularidade. Complementaremos este capítulo no seguinte, onde introduciremos algunhas importantes consecuencias do susodito lema, entre elas que existen funcións condicionalmente integrables, ó contrario que sucede na integral de Lebesgue.

É máis, despregaremos toda a potencia da integral no Capítulo 5, pois teremos un análogo a todos os teoremas fundamentais de converxencia da integral de Lebesgue, un dos motivos polos que esta última resulta tan popular entre os matemáticos. Finalmente, culminaremos no Capítulo 6 establecendo que toda función Riemann-Stieltjes e Lebesgue-Stieltjes integrable é tamén Kurzweil-Stieltjes e mencionaremos algúns resultados recíprocos.

Por último, queremos destacar que para a breve revisión histórica desta introdución tomamos como referencia [7, 8, 17].

# Capítulo 1

## A integral de Kurzweil-Stieltjes

O obxectivo deste capítulo é introducir a definición e as principais propiedades da integral de Kurzweil-Stieltjes sobre un intervalo pechado e limitado  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . En xeral, estas propiedades son as que cabería esperar en calquera teoría da integración como, por exemplo, a linearidade da integral ou o bó comportamento respecto á restrición do intervalo.

A principal referencia deste capítulo é [14], no que se trata con gran detalle os aspectos desta integral. Porén, en moitos momentos ímonos apoiar tamén en [4] e [19] que, pese a tan só tratar a integral de Kurzweil-Henstock, presentan un enfoque moi práctico e sinxelo no manexo do concepto de calibre.

### 1.1. Conceptos e resultados previos

**Definición 1.1.** Sexa  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo limitado non dexenerado da recta real. É dicir,  $I$  adopta a forma  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ou  $(a, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ . Definimos a *lonxitude* do intervalo  $I$  coma o número real  $\ell(I) := b - a$ .

Ao longo do texto e sempre que non xurda confusión,  $[a, b]$  vai denotar un intervalo compacto non dexenerado da recta real.

**Definición 1.2.** Diremos que unha sucesión finita de números reais  $\mathcal{P} := (x_0, \dots, x_m)$  é unha *partición* de  $[a, b]$  se cumpre

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$$

Observemos que os elementos da partición inducen  $m$  subintervalos da forma  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ , con  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Denotaremos o conxunto de tódalas particións do intervalo  $[a, b]$  por  $\mathcal{P}([a, b])$ .

Definiremos a *norma dunha partición* coma

$$|\mathcal{P}| := \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \ell(I_k).$$

Sexan  $\mathcal{P}_1 = (x_0, \dots, x_m)$ ,  $\mathcal{P}_2 = (y_0, \dots, y_n) \in \mathcal{P}([a, b])$  dúas particións de  $[a, b]$ , diremos que  $\mathcal{P}_1$  é *máis fina* que  $\mathcal{P}_2$ , ou que  $\mathcal{P}_1$  é un *refinamento* de  $\mathcal{P}_2$ , se  $\{y_0, \dots, y_n\} \subseteq \{x_0, \dots, x_m\}$ , e denotáremolo por  $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$ .

Dada unha partición  $\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])$  e unha sucesión real finita de  $m$  elementos  $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_m)$  cumprindo  $t_k \in I_k$ , para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ , diremos que o par ordenado  $\dot{\mathcal{P}} := (\mathcal{P}, \mathbf{t})$  é unha *partición etiquetada* de  $I$ . Definiremos a *norma dunha partición etiquetada* coma  $|\dot{\mathcal{P}}| := |\mathcal{P}|$ .

Sexa  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición de  $[a, c]$  e  $\dot{\mathcal{Q}} = ((y_0, \dots, y_n), (r_1, \dots, r_n))$  outra de  $[c, b]$ . Denotaremos por  $\dot{\mathcal{P}} \cup \dot{\mathcal{Q}}$  a partición de  $[a, b]$  seguinte:

$$((x_0, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), (t_1, \dots, t_m, r_1, \dots, r_n)).$$

**Definición 1.3.** Diremos que unha función  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  é un *calibre* de  $[a, b]$ . Ademais, diremos que unha partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$  é  *$\delta$ -fina* se cumpre

$$[x_{k-1}, x_k] \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k)), \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$

En adiante, cando nos refiramos a unha partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina, entenderemos que é unha partición etiquetada do intervalo  $[a, b]$ .

**Definición 1.4.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións reais e  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición etiquetada de  $[a, b]$ . Definiremos a *suma parcial* de  $f$  respecto a  $g$  asociada a  $\dot{\mathcal{P}}$  como o número real

$$S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

A continuación enunciaremos o coñecido como lema de Cousin, que será fundamental para definir correctamente a integral de Kurzweil-Stieltjes, como comprobaremos posteriormente.

**Lema 1.5** ([19, Teorema 3, p. 5] Lema de Cousin). *Para todo calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  o conxunto de particións  $\delta$ -finas é non baleiro.*

*Demostración.* Supoñamos que existe un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  que non admite particións  $\delta$ -finas. Consideremos o subconxunto de  $I := [a, b]$  definido como

$$A := \{t \in I : \exists \dot{\mathcal{P}} \text{ unha partición de } [a, t] \text{ } \delta|_{[a, t]} \text{-fina}\}.$$

Temos que  $A$  é non baleiro. Basta considerar  $x \in (a, a + \delta(a)) \cap I$  e a partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((a, x), (a))$  que é, grazas á escolla de  $x$ ,  $\delta|_{[a,x]}$ -fina. Como ademais  $A$  está limitado superiormente por  $b$ , existe  $y := \sup A$ .

Pola caracterización do supremo, podemos escoller un elemento  $x \in (y - \delta(y), y) \cap A$  e, por conseguinte, existe  $\dot{\mathcal{Q}}$  unha partición  $\delta|_{[a,x]}$ -fina. Entón,  $\dot{\mathcal{Q}} \cup ((x, y), (y))$  é unha partición  $\delta|_{[a,y]}$ -fina, é dicir,  $y \in A$ .

Finalmente, se  $y < b$ , sexa  $x \in (y, y + \delta(y)) \cap I$ . Como  $y \in A$ , repetindo o argumento anterior atoparemos unha partición  $\dot{\mathcal{Q}}$   $\delta|_{[a,x]}$ -fina. É dicir,  $x \in A$  e  $x > y$ , contradicindo o carácter de supremo de  $y$ . En definitiva, como  $y = b$ ,  $I$  admite unha partición  $\delta$ -fina.  $\square$

Agora presentaremos dúas proposicións de utilidade para probar certas propiedades da integral. Pódense consultar en [14, pp. 142-144], pero cabe mencionar que se obteñen de forma sinxela atendendo as definicións de calibre e de suma parcial.

**Proposición 1.6.** *Sexan  $\delta_1, \delta_2: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  dous calibres tales que  $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Entón, toda partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_1$ -fina é  $\delta_2$ -fina.*

**Proposición 1.7.** *Sexan  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constantes arbitrarias e  $\dot{\mathcal{P}}$  unha partición etiquetada de  $[a, b]$ . Entón*

$$\begin{aligned} S(C_1 f_1 + C_2 f_2, g, \dot{\mathcal{P}}) &= C_1 S(f_1, g, \dot{\mathcal{P}}) + C_2 S(f_2, g, \dot{\mathcal{P}}), \\ S(f, C_1 g_1 + C_2 g_2, \dot{\mathcal{P}}) &= C_1 S(f, g_1, \dot{\mathcal{P}}) + C_2 S(f, g_2, \dot{\mathcal{P}}). \end{aligned}$$

Por último, antes de introducir a definición da integral de Kurzweil-Stieltjes imos presentar un resultado moi útil na práctica. Grazas a este, poderemos seleccionar un conxunto finito de puntos do intervalo  $[a, b]$  e construír un calibre de xeito que os puntos seleccionados sexan sempre etiquetas de calquera partición  $\delta$ -fina.

**Lema 1.8.** *Sexa  $D = \{a_1, \dots, a_s\}$  un conxunto finito de puntos do intervalo  $[a, b]$ , entón existe un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que para toda partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta$ -fina cúmprese que  $D \subseteq \{t_1, \dots, t_m\}$ .*

Ademais, para toda  $\dot{\mathcal{P}}$  nas condicións anteriores, existe outra partición etiquetada  $\dot{\mathcal{Q}} = ((y_0, \dots, y_n), (r_1, \dots, r_n))$   $\delta$ -fina tal que  $D \subseteq \{y_0, \dots, y_n\} \cap \{r_1, \dots, r_n\}$  e  $S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})$ , para calquera función de variable real  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Imos tomar a partición dada por

$$\delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} d(x, D \setminus \{x\}), & \text{se } D \setminus \{x\} \neq \emptyset, \\ 1, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

onde  $d$  denota a distancia euclidiana. Fixado  $k \in \{1, \dots, s\}$ , tense que para calquera  $t \in [a, b]$ ,  $t \neq a_k$  satisfaise  $\delta(t) \leq \frac{1}{2} d(t, a_k)$ . É dicir,

$$(t - \delta(t), t + \delta(t)) \subseteq \left( t - \frac{1}{2} d(t, a_k), t + \frac{1}{2} d(t, a_k) \right).$$

Agora ben,  $a_k$  non pode pertencer ao intervalo anterior. Noutras palabras, para unha partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina,  $a_k$  non pode pertencer a ningún intervalo con etiqueta distinta de  $a_k$ , logo forzosamente  $D \subseteq \{t_1, \dots, t_m\}$ .

Por outro lado, se  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  é unha partición  $\delta$ -fina e  $a_k \in D \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$ . Entón, sabemos que existe un  $i \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $a_k \in (x_{i-1}, x_i)$  e, polo que acabamos de probar,  $a_k = t_i$ . Agora ben, se dividimos o intervalo anterior en dous subintervalos  $[x_{i-1}, a_k]$  e  $[a_k, x_i]$ , ambos con etiqueta  $a_k$ , temos que

$$f(a_k)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = f(a_k)(g(x_i) - g(a_k)) + f(a_k)(g(a_k) - g(x_{i-1})).$$

É dicir, realizando este proceso obtemos unha partición etiquetada  $\dot{\mathcal{Q}}$   $\delta$ -fina cumprindo que os puntos de  $D$  son tanto extremos como etiquetas dos subintervalos e que  $S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})$ , como queriamos atopar.  $\square$

## 1.2. A integral de Kurzweil-Stieltjes

**Definición 1.9.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Diremos que existe a *integral de Kurzweil-Stieltjes* de  $f$  respecto a  $g$  se existe un número real  $I \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un calibre  $\delta_\varepsilon: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  cumprindo  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon$ , para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_\varepsilon$ -fina.

Denotaremos  $\int_a^b f \, dg := I$ . Definiremos tamén  $\int_a^a f \, dg := 0$  e, para  $b > a$ ,  $\int_b^a f \, dg := -\int_a^b f \, dg$ . Se  $g$  é a función identidade, poderemos referirnos a ela como a *integral de Kurzweil-Henstock*, que denotaremos por  $\int_a^b f \, dx$ .

Observemos que, grazas ó Lema de Cousin (Lema 1.5), a definición da integral ten sentido, posto que se existise un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  que non admitira particións  $\delta$ -finas, a definición cumprírase trivialmente para calquera función  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para rematar de dar significado á definición, demostraremos que o valor da integral está unicamente determinado.

**Lema 1.10.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que existe  $\int_a^b f \, dg$ , entón o seu valor é único.

*Demostración.* Supoñamos que existen  $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$  tales que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existen calibres  $\delta_1, \delta_2: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  cumprindo

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I_1| &< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para toda partición } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta_1\text{-fina,} \\ |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I_2| &< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para toda partición } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta_2\text{-fina.} \end{aligned}$$

Sexa  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e  $\dot{\mathcal{P}}$  unha partición  $\delta$ -fina. Pola Proposición 1.6,  $\dot{\mathcal{P}}$  é  $\delta_1$ -fina e  $\delta_2$ -fina. Finalmente, a desigualdade triangular asegúranos que

$$|I_1 - I_2| \leq |I_1 - S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| + |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, necesariamente  $|I_1 - I_2| = 0$ . É dicir,  $I_1 = I_2$ . □

Agora que coñecemos a definición da integral de Kurzweil-Stieltjes, podemos realzar as diferencias significativas entre esta definición e a de Riemann.

**Exemplo 1.11.** Consideremos a función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Para calquera número real  $c \in (0, 1]$ , sabemos que a integral de Riemann usual da función  $f$  restrinxida ó intervalo  $[c, 1]$  existe e é igual a  $1 - \sqrt{c}$ . É dicir, por moi pequeno que sexa  $c$ , podemos atopar unha partición de  $[c, 1]$  que nos aproxime a área baixo o grafo de  $f$  tanto como queiramos. Agora ben, por que non podemos integrar  $f$  sobre  $[0, 1]$ ? Se consideramos  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición etiquetada de  $[0, 1]$ , perdemos por completo o control sobre a primeira etiqueta  $t_1$ . Como  $f(0^+) = \infty$ , sempre hai unha etiqueta do intervalo  $[0, x_1]$  tal que  $f(t_1)(x_1 - 0)$  é tan grande como queiramos, non podendo así aproximarnos a ningunha área finita.

Se dalgún xeito conseguimos controlar esta etiqueta  $t_1$  que tanto conflito nos causa, achegaríamos ó valor que desexamos. Supoñamos que conseguimos seleccionar as particións que forzosamente teñen a súa etiqueta  $t_1$  no punto 0. Como  $f(t_1) = 0$ , estaríamos «perdendo» toda a área da función no intervalo  $[0, x_1]$ , pero se imos refinando as particións de xeito que  $x_1$  sexa cada vez máis e máis pequeno, a área perdida sería completamente desprezable. Entre estas particións con etiqueta  $t_1 = 0$ , poderíamos intentar seleccionar ademais, as que se aproximen á área baixo a curva en  $[x_1, b]$ , que sabemos que é  $1 - \sqrt{x_1}$ , de novo ó facer  $x_1$  diminuír, iríamos achegándonos o valor 1.

Imos ver como a integral de Kurzweil-Stieltjes, ou neste caso de Kurzweil-Henstock, permítenos facer este proceso de control e integrar a función  $f$ . A chave está no Lema 1.8, que é o que nos vai permitir desfacernos destas etiquetas problemáticas centradas ó redor do 0.

Fixado  $\varepsilon > 0$ , imos tomar o calibre  $\delta: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  definido como no susodito lema que nos faga que 0 sexa unha etiqueta de toda partición  $\delta$ -fina. Agora ben, sexa  $x \in (0, \frac{\varepsilon^2}{4})$  tense que

$$|f(0)(x-0) - \sqrt{x}| = \sqrt{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outra parte, fixados  $u, v \in (0, 1]$ ,  $u < v$  sabemos que a área baixo o grafo de  $f$  en  $[u, v]$  é  $\sqrt{v} - \sqrt{u}$ . Sexa  $t \in [u, v]$  podemos ver que

$$\begin{aligned} |f(t)(v-u) - (\sqrt{v} - \sqrt{u})| &= \left| \frac{v-u}{2\sqrt{t}} - \frac{v-u}{\sqrt{v} + \sqrt{u}} \right| = (v-u) \left| \frac{\sqrt{v} + \sqrt{u} - 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}(\sqrt{v} + \sqrt{u})} \right| \\ &= \frac{v-u}{2t} \left| \frac{\sqrt{t}(\sqrt{v} + \sqrt{u}) - 2t}{\sqrt{v} + \sqrt{u}} \right| \leq \frac{v-u}{2t} \left| \frac{\sqrt{t}(\sqrt{v} + \sqrt{u}) - 2t}{\sqrt{t}} \right| \\ &= \frac{v-u}{2t} |\sqrt{v} + \sqrt{u} - 2\sqrt{t}| \leq \frac{v-u}{2t} (|\sqrt{v} - \sqrt{t}| + |\sqrt{u} - \sqrt{t}|) \\ &= \frac{v-u}{2t} \left( \frac{v-z}{\sqrt{v} + \sqrt{t}} + \frac{z-u}{\sqrt{u} + \sqrt{t}} \right) \leq \frac{v-u}{2t} \left( \frac{v-z}{\sqrt{t}} + \frac{z-u}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \frac{(v-u)^2}{2t^{2/3}}. \end{aligned}$$

Isto que acabamos de ver suxírenos que redefinamos o calibre  $\delta$  tomando  $\delta_\varepsilon(x) := \min\{\delta(x), \frac{x^{2/3}\varepsilon}{2}\}$ , para  $x \in (0, 1]$ , e  $\delta_\varepsilon(0) := \min\{\delta(0), \frac{\varepsilon^2}{4}\}$ . Finalmente, para  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\delta_\varepsilon$ -fina, temos que

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - 1| &= \left| \sum_{k=1}^m (f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}})) \right| \\ &\leq |f(0)(x_1 - 0) - \sqrt{x_1}| + \sum_{k=1}^m |f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}})| \\ &\leq \sqrt{x_1} + \sum_{k=1}^m \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2t_k^{2/3}} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon(x_k - x_{k-1})}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, a integral  $\int_a^b f \, dx$  existe e é igual a 1. En resumo, é esta idea de poder controlar as etiquetas dunha partición a que nos permite potenciar a integral de Riemann moitos pasos máis aló. Por exemplo, veremos cara ao final deste capítulo como poder controlar as etiquetas dunha partición de xeito que non nos afecte integrar sobre conxuntos de medida nula.

O seguinte resultado que imos enunciar preséntanos unha caracterización de Cauchy para a existencia da integral de Kurzweil-Stieltjes, que será útil para demostrar algúns dos teoremas de existencia da integral.

**Teorema 1.12** (Condición de Cauchy para a existencia da integral de Kurzweil-Stieltjes). *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Entón, a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, dg$  existe se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un calibre  $\delta_\varepsilon$  de  $[a, b]$  de xeito que*

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon, \text{ para calquera } \dot{\mathcal{P}} \text{ e } \dot{\mathcal{Q}} \text{ partición } \delta_\varepsilon\text{-fina.}$$

*Demostración.*

“ $\implies$ ” Sexa  $I := \int_a^b f \, d g$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un calibre  $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}} : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})| \leq |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| + |I - S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para calquera  $\dot{\mathcal{P}}$  e  $\dot{\mathcal{Q}}$  partición  $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ -fina.

“ $\impliedby$ ” Se se cumpre a Condición de Cauchy tense que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un calibre  $\delta_n : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  que satisfai

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})| < \frac{1}{n}, \text{ para calquera } \dot{\mathcal{P}} \text{ e } \dot{\mathcal{Q}} \text{ partición } \delta_n\text{-fina.} \quad (1.1)$$

Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que  $\delta_{n+1}(x) \leq \delta_n(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . En caso contrario, bastaría tomar  $\tilde{\delta}_{n+1} = \min\{\delta_{n+1}, \delta_n\}$ . Agora, se para cada  $n \in \mathbb{N}$  escollemos  $\dot{\mathcal{P}}_n$  unha partición  $\delta_n$ -fina, tense que  $(S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_n))_{n=1}^\infty$  é unha sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . En efecto, para cada  $\varepsilon > 0$  escollemos un número natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Por construción da sucesión de calibres, para todo  $n \geq N$ ,  $\dot{\mathcal{P}}_n$  é  $\delta_N$ -fina e cúmprese

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_m) - S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_n)| < \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N.$$

Denotemos ó límite da sucesión anterior por  $I \in \mathbb{R}$ . Finalmente, para todo  $\varepsilon > 0$  tomaremos un natural  $n_0 \in \mathbb{N}$  cumprindo  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_{n_0}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ . En consecuencia, para toda  $\dot{\mathcal{P}}$  partición  $\delta_{n_0}$ -fina, aplicando (1.1), tense que

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| \leq |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_{n_0})| + |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_{n_0}) - I| < \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

É dicir, a integral de Kurzweil-Stieltjes existe e é igual a  $I$ . □

O próximo paso é establecer as propiedades máis básicas da integral de Kurzweil-Stieltjes, as cales son as que caberían esperar en calquera teoría da integración. Omitimos as demostracións por utilizar técnicas similares ás xa realizadas. Fundaméntanse no manexo das definicións de suma parcial e calibre e na utilización das Proposicións 1.6 e 1.7. Pódense consultar en detalle en [14, pp. 144-146].

**Teorema 1.13.** Sexan  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real e  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constantes arbitrarias.

1. Se existen  $\int_a^b f_1 \, d g$  e  $\int_a^b f_2 \, d g$  entón

$$\int_a^b (C_1 f_1 + C_2 f_2) \, d g = C_1 \int_a^b f_1 \, d g + C_2 \int_a^b f_2 \, d g.$$

2. Se existen  $\int_a^b f \, d g_1$  e  $\int_a^b f \, d g_2$  entón

$$\int_a^b f \, d(C_1 g_1 + C_2 g_2) = C_1 \int_a^b f \, d g_1 + C_2 \int_a^b f \, d g_2.$$

**Teorema 1.14.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real e  $[c, d]$  un intervalo contido en  $[a, b]$ . Se a integral  $\int_a^b f \, d g$  existe, a integral  $\int_c^d f \, d g$  tamén.

**Teorema 1.15.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real e  $c \in [a, b]$ . A integral  $\int_a^b f \, d g$  existe se, e só se, as integrais  $\int_a^c f \, d g$  e  $\int_c^b f \, d g$  existen. Ademais tense a relación

$$\int_a^b f \, d g = \int_a^c f \, d g + \int_c^b f \, d g.$$

Por último, imos establecer un par de propiedades de monotonía que utilizaremos con frecuencia en seccións posteriores.

**Proposición 1.16.** Sexan  $f_1, f_2, g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real tales que as integrais  $I_1 := \int_a^b f_1 \, d g_1$  e  $I_2 := \int_a^b f_2 \, d g_2$  existen e  $|S(f_1, g_1, \dot{\mathcal{P}})| \leq |S(f_2, g_2, \dot{\mathcal{P}})|$  para calquera partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$ . Entón  $\left| \int_a^b f_1 \, d g_1 \right| \leq \left| \int_a^b f_2 \, d g_2 \right|$ .

*Demostración.* Sexa  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre tal que

$$|S(f_1, g_1, \dot{\mathcal{P}}) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |S(f_2, g_2, \dot{\mathcal{P}}) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para toda partición } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta\text{-fina.}$$

A desigualdade triangular inversa permítenos afirmar que

$$|I_1| \leq |S(f_1, g, \dot{\mathcal{P}})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |S(f_2, g, \dot{\mathcal{P}})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |I_2| + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, temos o que buscamos. □

*Observación 1.17.* Por exemplo, sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real crecente,  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións non negativas tales que as integrais  $I_1 := \int_a^b f_1 \, d g$  e  $I_2 := \int_a^b f_2 \, d g$  existen e  $f_1 \leq f_2$ . Sen máis que calcular explicitamente as sumas parciais pódese ver que  $|S(f_1, g, \dot{\mathcal{P}})| = S(f_1, g, \dot{\mathcal{P}}) \leq S(f_2, g, \dot{\mathcal{P}}) = |S(f_2, g, \dot{\mathcal{P}})|$ , para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina, e que  $I_1, I_2 \geq 0$ . Pola proposición anterior,  $0 \leq \int_a^b f_1 \, d g \leq \int_a^b f_2 \, d g$ .

O seguinte resultado demóstrase de xeito análogo á Proposición 1.16.

**Proposición 1.18.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real,  $M \in [0, \infty)$  un número real non negativo tal que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq M$ , para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina. Se a integral  $I := \int_a^b f \, d g$  existe, entón  $\left| \int_a^b f \, d g \right| \leq M$ .

### 1.3. A integral de Kurzweil-Henstock

Para rematar o capítulo imos ofrecer unha serie de resultados referentes á integral de Kurzweil-Henstock. É dicir, particularizaremos a integral de Kurzweil-Stieltjes tomando  $g = \text{id}_{[a,b]}$ . Realzaremos por que nos interesa traballar con esta xeneralización da definición de Riemann e co concepto de calibre, e veremos que este lixeiro cambio na definición permite aumentar a “potencia” da integral e xeneralizar a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo. Para demostrar este teorema imos precisar o lema seguinte.

**Lema 1.19** ([19, Lema 1, p. 2] “Straddle Lemma”). *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real diferenciable nun punto  $z \in [a, b]$ . Entón, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que*

$$|f(v) - f(u) - f'(z)(v - u)| < \varepsilon(v - u), \quad (1.2)$$

para calquera número real  $u, v \in [a, b]$  cumprindo  $u \leq z \leq v$  e  $[u, v] \subset (z - \delta, z + \delta)$ .

*Demostración.* Por hipótese,  $f$  é diferenciable en  $z$ . Entón, fixado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in [a, b]$  cumprindo  $0 < |x - z| < \delta$  tense

$$\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon \iff |f(x) - f(z) - f'(z)(x - z)| < \varepsilon |x - z|. \quad (1.3)$$

Sexan  $u, v \in [a, b]$  dous números reais cumprindo  $u \leq z \leq v$  e  $[u, v] \subset (z - \delta, z + \delta)$ . Se  $v = u = z$ , (1.2) cúmprese trivialmente, e se  $u = z$  ou  $v = z$  e son distintos, basta aplicar (1.3). En cambio, se  $u < z < v$  temos que

$$\begin{aligned} |f(v) - f(u) - f'(z)(v - u)| &\leq |f(v) - f(z) - f'(z)(v - z)| + |f(z) - f(u) - f'(z)(z - u)| \\ &< \varepsilon(v - z) + \varepsilon(z - u) = \varepsilon(v - u). \end{aligned} \quad \square$$

Como podemos observar, as condicións que impuxemos sobre os números  $u$  e  $v$  no lema anterior son moi similares á definición dunha partición  $\delta$ -fina. De feito, este lema e a xeneralización do Teorema Fundamental do Cálculo foi unha das principais motivacións á hora de definir a integral de Kurzweil-Henstock. Como veremos a continuación, a súa demostración obtense practicamente de xeito inmediato.

**Teorema 1.20** (Teorema Fundamental do Cálculo: Parte I). *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real diferenciable en  $[a, b]$ , onde entendemos que nos extremos do intervalo é derivable lateralmente. Entón  $f'$  é Kurzweil-Henstock integrable e*

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a).$$

*Demostración.* Fixado  $\varepsilon > 0$  e  $t \in [a, b]$ , definimos un calibre  $\delta_\varepsilon : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  de xeito que, en cada  $t \in [a, b]$ , toma o valor  $\delta$  obtido no Lema 1.19 asociado a dito punto e ó real positivo  $\frac{\varepsilon}{b-a}$ . Se  $\dot{P}$  é unha partición  $\delta_\varepsilon$ -fina, entón

$$\begin{aligned} |S(f', g, \dot{P}) - (f(b) - f(a))| &= \left| \sum_{k=1}^m (f'(t_k)(x_k - x_{k-1})) - \sum_{k=1}^m (f(x_k) - f(x_{k-1})) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f'(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(x_k) + f(x_{k-1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Acabamos de probar que a única hipótese necesaria para que se cumpra o Teorema 1.20 é que a función  $f$  sexa diferenciable. En consecuencia, esta versión é máis xeral que o clásico Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Riemann e para a de Lebesgue. Nestes últimos, débese verificar, ademais, que  $f'$  sexa Riemann ou Lebesgue integrable. Estes resultados pódense consultar en detalle en [13, Teorema 2.30, p. 34] e [18, Teorema 3, p. 158], respectivamente.

Para rematar o capítulo, imos demostrar que existen funcións Kurzweil-Henstock integrables que non son Riemann integrables. Para isto imos utilizar algúns conceptos de teoría da medida cos que supoñemos que o lector estará familiarizado. De calquera forma, no Anexo A facemos unha breve introdución a eles.

**Definición 1.21.** Sexa  $Z \subset \mathbb{R}$  un subconxunto dos números reais. Diremos que  $Z$  é de *medida nula* ou que ten *medida de Lebesgue cero* se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe unha colección  $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de intervalos abertos de  $\mathbb{R}$  tal que

$$Z \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\text{id}}(J_k) < \varepsilon,$$

onde  $\mu_{\text{id}}(A)$  denota a medida de Lebesgue do conxunto  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Neste caso, como os  $J_k$  son intervalos,  $\mu_{\text{id}}(J_k) = \ell(J_k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Observación 1.22.* Como consecuencia inmediata da definición, calquera subconxunto dun conxunto de medida nula tamén ten medida nula.

**Proposición 1.23.** Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real tal que o conxunto

$$Z = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

ten medida de Lebesgue cero. Entón a integral de Kurzweil-Henstock de  $f$  existe e é igual a cero.

*Demostración.* Sexa, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o conxunto  $Z^n := \{x \in [a, b] : n-1 < |f(x)| \leq n\}$ . Como  $Z^n \subseteq Z$ , tense que  $Z^n$  é un conxunto de medida nula para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora, fixado  $\varepsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,

existe unha familia  $\{J_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$  de intervalos abertos de  $\mathbb{R}$  tal que

$$Z^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i^n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i^n) < \frac{\varepsilon}{n 2^n}.$$

O seguinte paso é definir un calibre en  $[a, b]$ . Se  $x \notin Z$ , definimos  $\delta_\varepsilon(x) := 1$ . Por outro lado, sabemos que os elementos de  $\{Z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son disxuntos dous a dous por definición. Co cal, fixado  $x \in Z$ , existe un único  $n(x) \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in Z^{n(x)}$ . Ademais, como  $x \in J_i^{n(x)}$  para algún  $i \in \mathbb{N}$ , podemos considerar  $i(x)$  o mínimo natural cumprindo a condición anterior. Entón, definimos  $\delta_\varepsilon(x) > 0$  de xeito que  $(x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)) \subseteq J_{i(x)}^{n(x)}$ .

Agora, sexa  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\delta_\varepsilon$ -fina, e denotaremos  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ , para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Se definimos o conxunto de índices  $A_n := \{k \in \{1, \dots, m\} : n(t_k) = n\}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos o seguinte:

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{k=1}^m |f(t_k)| \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^m n(t_k) \ell(I_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in A_n} n \ell(I_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \left( \sum_{k \in A_n} \ell(I_k) \right). \quad (1.4)$$

Agora ben, dados  $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$  dous intervalos limitados reais concatenados, é dicir, a súa intersección é un único punto, entón a lonxitude da súa unión é igual á suma das súas lonxitudes. En cambio, se son intervalos reais disxuntos, a suma das súas lonxitudes coincide coa medida de Lebesgue usual da súa unión. En calquera caso, a suma das lonxitudes dunha familia de intervalos que son disxuntos ou concatenados dous a dous é igual a medida de Lebesgue da súa unión. Entón, se definimos o conxunto de índices  $B_i := \{k \in \{1, \dots, m\} : i(t_k) = i\}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\sum_{k \in A_n} \ell(I_k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in (A_n \cap B_i)} \ell(I_k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_{\text{id}} \left( \bigcup_{k \in (A_n \cap B_i)} I_k \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \ell(J_i^n) < \frac{\varepsilon}{n 2^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (1.5)$$

onde  $\mu_{\text{id}}$  denota a medida de Lebesgue usual e na primeira desigualdade utilizamos que dados dous conxuntos medibles  $A \subset B$ , entón  $\mu_{\text{id}}(A) \leq \mu_{\text{id}}(B)$  e que  $\mu_{\text{id}}(J_i^n) = \ell(J_i^n)$  por ser  $J_i^n$  un intervalo.

Para rematar, se temos en conta tanto (1.4) como (1.5), podemos concluír que

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, a integral de Kurzweil-Henstock  $\int_a^b f \, dx$  existe e é igual a cero.  $\square$

En capítulos posteriores demostraremos que toda función Riemann integrable é Kurzweil-Henstock integrable. Agora ben, como consecuencia da Proposición 1.23 podemos ver que o recíproco é falso, sen máis que considerar a función de Dirichlet definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Outro corolario desta proposición é que se dúas funcións  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de variable real son iguais en case todo punto, isto é, o conxunto  $Z := \{x \in [a, b] : f_1(x) \neq f_2(x)\}$  ten medida nula, entón as súas integrais de Kurzweil-Henstock coinciden. Basta ver que a función  $f_1 - f_2$  é distinta de cero exactamente no conxunto  $Z$ , que ten medida nula.

## Capítulo 2

# A existencia da integral de Kurzweil-Stieltjes

Unha vez coñecida a definición formal e as principais propiedades da integral de Kurzweil-Stieltjes, enunciaremos unha serie de condicións suficientes que nos van garantir a existencia da integral. Para isto introduciremos dous conceptos de funcións de variable real: as funcións regradas e as funcións de variación limitada. O noso obxectivo neste capítulo será probar que se  $f$  e  $g$  son regradas e unha delas ten variación limitada, a integral  $\int_a^b f \, d g$  existe.

A principal referencia desde capítulo é [14], na que se tratan en detalle varios teoremas de existencia e converxencia da integral de Kurzweil-Stieltjes. No entanto, á hora de introducir os conceptos de funcións de variación limitada apoiámonos en [1], e para as funcións regradas en [4] e [9].

### 2.1. Funcións de variación limitada

**Definición 2.1.** Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real e  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_m)$  unha partición de  $[a, b]$ , definimos

$$V(f, \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Definimos tamén a *variación* de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  como

$$\text{var}_a^b f := \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])} V(f, \mathcal{P}) \in [0, \infty].$$

Se  $a = b$  definimos  $\text{var}_a^b f := 0$ . En consecuencia, podemos definir unha función  $\text{Var} f : t \in [a, b] \mapsto \text{var}_a^t f \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ . Se  $\text{var}_a^b f < \infty$  dise que  $f$  é unha *función de variación limitada* en  $[a, b]$ . Denotaremos por  $BV([a, b])$  o conxunto de funcións de variación limitada en  $[a, b]$ .

Enunciaremos unha proposición na que recollemos algunhas das propiedades máis importantes da variación dunha función. Estas serán de gran utilidade en resultados posteriores.

**Proposición 2.2** ([1, Proposición 1.3, p. 53]). *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real. A variación de  $f$  cumpre as seguintes propiedades:*

1. *Para todo par de números reais  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \leq y$ , tense*

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{var}_x^y f. \quad (2.1)$$

2. *Toda función de variación limitada  $f \in \text{BV}([a, b])$  é limitada e satisfai*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \text{var}_a^b f, \text{ para todo } x \in [a, b]. \quad (2.2)$$

3. *Para todo número real  $c \in [a, b]$  cúmprese*

$$\text{var}_a^b f = \text{var}_a^c f + \text{var}_c^b f. \quad (2.3)$$

Para rematar a sección imos definir unha norma sobre o espazo de funcións de variación limitada, que se pode comprobar que é unha norma completa.

**Proposición 2.3** ([1, Proposición 1.10, p. 62]). *O conxunto de funcións de variación limitada  $\text{BV}([a, b])$  é un  $\mathbb{R}$ -espazo vectorial. Ademais, sexa aplicación  $\|\cdot\|_{\text{BV}} : \text{BV}([a, b]) \rightarrow [0, \infty)$  definida como*

$$\|f\|_{\text{BV}} := |f(a)| + \text{var}_a^b f.$$

*Entón,  $\|\cdot\|_{\text{BV}}$  é unha norma completa, é dicir,  $\text{BV}([a, b])$  é un espazo de Banach.*

## 2.2. Funcións regradas

**Definición 2.4.** *Sexa  $X$  un conxunto e  $A$  un subconxunto de  $X$ , a función definida como*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

*denomínase función característica do conxunto  $A$ .*

**Definición 2.5.** *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real. Diremos que  $f$  é unha función a chanzas finita se existen intervalos disxuntos  $I_1, \dots, I_n \subset [a, b]$ , podendo ser algún deles dexenerado, e números reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tales que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

*onde consideramos as funcións características definidas sobre  $[a, b]$ .*

**Definición 2.6.** Unha función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dise *función regrada* en  $[a, b]$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe unha función a chanzos finita  $s_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

O conxunto de funcións regradas en  $[a, b]$  denótase por  $G([a, b])$ .

A definición de función regrada admite unha caracterización que imos enunciar e demostrar a continuación. Esta vai ser de gran utilidade pois estaremos manexando ambas condicións cando traballemos con este tipo de funcións.

**Teorema 2.7** ([4, Teorema 3.17, p. 49]). *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real.  $f$  é unha función regrada se, e só se, existen e son finitos os límites laterais dereitos  $f(t^+)$  para todo  $t \in [a, b)$ , e existen e son finitos os límites laterais esquerdos  $f(t^-)$  para todo  $t \in (a, b]$ .*

*Demostración.*

“ $\implies$ ” Sexa  $c \in (a, b]$ , imos ver que existe  $f(c^-)$ . Fixado  $\varepsilon > 0$ , tomemos unha función a chanzos finita  $s_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

Vexamos que existe un  $\delta > 0$  tal que  $s_\varepsilon$  é constante en  $(c - \delta, c)$ . Por un lado, sabemos que  $s_\varepsilon$  adopta a forma  $s_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{I_k}$ . Sexa  $A$  o conxunto de subintervalos  $I_k$  tales que  $c$  é un punto de acumulación pola esquerda de  $I_k$ . Se  $I_k \notin A$ , existe un certo  $\delta_k > 0$  tal que  $(c - \delta_k, c) \cap I_k = \emptyset$ . En cambio, se  $I_k \in A$ , existe unha sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_k \cap (-\infty, c)$  con límite  $c$  tal que  $a_n \geq a_1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por ser  $I_k$  un intervalo, tense que  $[a_1, a_n] \subset I_k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pero entón,  $[a_1, c) \subset I_k$  e existe un certo  $\delta_k > 0$  tal que  $(c - \delta_k, c) \subset [a_1, c)$ . Se tomamos  $\delta := \min_{I_k \in A} \delta_k$ , é fácil comprobar que  $s_\varepsilon|_{(c-\delta, c)}$  é constante igual a  $\sum_{I_k \in A} \alpha_k$ .

En consecuencia, se  $x, y \in (c - \delta, c)$  satisfaise que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - s_\varepsilon(x)| + |s_\varepsilon(x) - s_\varepsilon(y)| + |s_\varepsilon(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, a Condición de Cauchy para os límites laterais implica que existe  $f(c^-)$ . A demostración para os límites laterais dereitos é análoga.

“ $\impliedby$ ” Fixado  $\varepsilon > 0$ , imos construír unha función a chanzos finita  $s_\varepsilon$  cumprindo (2.4). Sexa  $c \in (a, b]$ , entón existe  $\delta_\varepsilon^-(c) > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in (c - \delta_\varepsilon^-(c), c).$$

Analogamente, se  $c \in [a, b)$  tense que existe  $\delta_\varepsilon^+(c)$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in (c, c + \delta_\varepsilon^+(c)).$$

Grazas a isto podemos definir un calibre  $\delta_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \delta_\varepsilon^+(x), & \text{se } x = a, \\ \delta_\varepsilon^-(x), & \text{se } x = b, \\ \min\{\delta_\varepsilon^+(x), \delta_\varepsilon^-(x)\}, & \text{se } x \in (a, b). \end{cases}$$

Polo Lema de Cousin (Lema 1.5), podemos tomar unha partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta_\varepsilon$ -fina. Finalmente, definiremos a función a chanzos  $s_\varepsilon(x) := f(x)$  se  $x \in \{x_0, \dots, x_m, t_1, \dots, t_m\}$ , namentres que nos intervalos da forma  $(x_{k-1}, t_k) \subset (t_k - \delta_\varepsilon(t_k), t_k)$  definimos  $s_\varepsilon(x) := f(\frac{1}{2}(x_{k-1} + t_k))$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ . Observemos que nestes puntos cúmprese

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(\frac{1}{2}(x_{k-1} + t_k))| < \varepsilon,$$

xa que  $x, \frac{1}{2}(x_{k-1} + t_k) \in (t_k - \delta_\varepsilon^-(t_k), t_k)$ . Analogamente, nos intervalos  $(t_k, x_k)$  definimos  $s_\varepsilon(x) := f(\frac{1}{2}(t_k + x_k))$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ .

En consecuencia, obtivemos unha función a chanzos finita  $s_\varepsilon$  que cumpre (2.5) por construción. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario tense que  $f$  é unha función regrada.  $\square$

### 2.3. A integral sobre funcións a chanzos

Antes de poder demostrar as primeiras condicións suficientes de existencia da integral de Kurzweil-Stieltjes imos traballar con funcións a chanzos finitas posto que, como veremos a continuación, toda función regrada pódese aproximar uniformemente por funcións deste tipo.

**Definición 2.8.** Sexa  $\mathcal{B}([a, b])$  o espazo de funcións de variable real limitadas definidas sobre o intervalo  $[a, b]$ . Definiremos a *norma uniforme* como aquela que asigna a cada  $f \in \mathcal{B}([a, b])$  o valor seguinte:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

**Definición 2.9.** Sexa  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións de variable real e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  outra función. Diremos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converxe uniformemente* a  $f$ , e denotáremolo por  $f_n \rightrightarrows f$ , se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un número natural  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  cumprindo

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n \geq N_\varepsilon. \quad (2.5)$$

Equivalentemente, podemos cambiar a condición (2.5) por  $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N_\varepsilon$ .

*Observación 2.10.* Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real regrada. Por definición, podemos tomar para todo número natural  $n \in \mathbb{N}$ , a función a chanzos finita  $s_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpre  $|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{n}$ , para todo  $x \in [a, b]$ . É dicir, podemos formar unha sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funcións a chanzos finitas que converxe uniformemente a  $f$ .

*Observación 2.11.* Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función constante, é fácil comprobar, calculando as sumas parciais, que para toda función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , as seguintes integrais existen e toman os valores:

$$\int_a^b f \, dg = f(a)(g(b) - g(a)) \quad \text{e} \quad \int_a^b g \, df = 0.$$

**Lema 2.12.** Para toda función de variable real  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , as seguintes integrais existen e toman os valores:

$$\int_a^b f \, d\chi_{(c,b]} = f(c), \quad \text{para todo } c \in [a, b), \quad (2.6)$$

$$\int_a^b f \, d\chi_{[c,b]} = f(c), \quad \text{para todo } c \in (a, b], \quad (2.7)$$

$$\int_a^b f \, d\chi_{[a,c]} = -f(c), \quad \text{para todo } c \in [a, b), \quad (2.8)$$

$$\int_a^b f \, d\chi_{(a,c]} = -f(c), \quad \text{para todo } c \in (a, b], \quad (2.9)$$

$$\int_a^b f \, d\chi_{\{c\}} = f(c), \quad \text{para todo } c \in (a, b). \quad (2.10)$$

*Demostración.*

(2.6). Sexa  $c \in [a, b)$  e  $g = \chi_{(c,b]}$ . Tense que  $g(x) = 0$  para todo  $x \in [a, c]$  e, grazas á Observación 2.11, sabemos que  $\int_a^c f \, dg = 0$ . Sexa  $\varepsilon > 0$ , polo Lema 1.8, existe un calibre  $\delta : [c, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que para toda partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta$ -fina, cúmprese  $t_1 = c = x_0$ . É máis,  $g(x_k) - g(x_{k-1}) = 1 - 1 = 0$ , para todo  $k \in \{2, \dots, m\}$ . En consecuencia,

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - f(c)| = |f(c)(g(x_1) - g(c)) - f(c)| = 0 < \varepsilon.$$

É dicir,  $\int_c^b f \, dg = f(c)$ . Finalmente, aplicando o Teorema 1.15, obtemos que  $\int_a^b f \, dg = f(c)$ .

(2.7). Sexa  $c \in (a, b]$  e  $g = \chi_{[c,b]}$ . Sabemos que  $g(x) = 1$  para todo  $x \in [c, b]$ , e de novo pola Observación 2.11 tense que  $\int_c^b f \, dg = 0$ . Como no apartado anterior, tomamos un calibre  $\delta : [a, c] \rightarrow (0, \infty)$  de xeito que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta$ -fina, tense  $t_m = c = x_m$ . Cos mesmos razoamentos obteremos que  $\int_a^c f \, dg = -f(c)$ , é dicir,  $\int_a^b f \, dg = f(c)$ .

(2.8). Sexa  $c \in [a, b)$ , aplicando o Teorema 1.13, a Observación 2.11 e o resultado (2.6) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f \, d\chi_{[a,b]} = \int_a^b f \, d(\chi_{[a,c]} + \chi_{(c,b]}) = \int_a^b f \, d\chi_{[a,c]} + \int_a^b f \, d\chi_{(c,b]} \\ &\implies \int_a^b f \, d\chi_{[a,c]} = - \int_a^b f \, d\chi_{(c,b]} = -f(c). \end{aligned}$$

(2.9) e (2.10). Obtéñense cun razoamento análogo ó do apartado anterior.  $\square$

**Lema 2.13.** Para toda función de variable real regrada  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  as seguintes integrais existen e toman os valores:

$$\int_a^b \chi_{(c,b]} dg = g(b) - g(c^+) \quad \text{se } c \in [a, b), \quad (2.11)$$

$$\int_a^b \chi_{[c,b]} dg = g(b) - g(c^-) \quad \text{se } c \in (a, b], \quad (2.12)$$

$$\int_a^b \chi_{[a,c]} dg = g(c^+) - g(a) \quad \text{se } c \in [a, b), \quad (2.13)$$

$$\int_a^b \chi_{[a,c)} dg = g(c^-) - g(a) \quad \text{se } c \in (a, b], \quad (2.14)$$

$$\int_a^b \chi_{\{c\}} dg = g(c^+) - g(c^-) \quad \text{se } c \in (a, b). \quad (2.15)$$

*Demostración.* Neste caso imos probar tan só as relacións (2.11) e (2.12), pois as outras obteranse utilizando o Teorema 1.13 como xa fixemos na proba anterior.

(2.11). Sexa  $c \in [a, b)$  e  $f = \chi_{(c,b]}$ . Novamente podemos asegurar que  $\int_a^c f dg = 0$ , logo tan só precisamos probar que  $\int_c^b f dg = g(b) - g(c^+)$ . Agora, por ser  $g$  regrada, existe  $g(c^+)$  e para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $\Delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$|g(c^+) - g(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in (c, c + \Delta_\varepsilon).$$

Ademais, polo Lema 1.8, podemos considerar un calibre  $\delta: [c, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que para toda partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta$ -fina cúmprese  $t_1 = c = x_0$ . Definimos así o calibre seguinte:

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \delta(x), & \text{se } x \in (c, b], \\ \min\{\Delta_\varepsilon, \delta(c)\}, & \text{se } x = c. \end{cases}$$

Finalmente, se  $\dot{\mathcal{P}}$  é unha partición  $\delta_\varepsilon$ -fina e temos en conta que  $f(t_1) = f(c) = 0$  e  $f(t_k) = 1$  se  $k \in \{2, \dots, m\}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - (g(b) - g(c^+))| &= \left| \sum_{k=2}^m (g(x_k) - g(x_{k-1})) - (g(b) - g(c^+)) \right| \\ &= |g(b) - g(x_1) - g(b) + g(c^+)| = |g(x_1) - g(c^+)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

onde para a última desigualdade tivemos en conta que  $x_1 \in (c, x_1] \subset (c, c + \Delta_\varepsilon)$ . É dicir,  $\int_c^b f dg = g(b) - g(c^+)$ , como queríamos ver.

(2.12). Sexa  $c \in (a, b]$  e  $f = \chi_{[c,b]}$ . Pola Observación 2.11, sabemos que  $\int_c^b f dg = g(b) - g(c)$ . Se para cada  $\varepsilon > 0$  tomamos un  $\Delta_\varepsilon > 0$  que cumpra

$$|g(c^-) - g(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in (c - \Delta_\varepsilon, c),$$

podemos construír un calibre  $\delta_\varepsilon : [a, c] \rightarrow (0, \infty)$  de forma análoga á do apartado anterior. En consecuencia, chegaríamos a que  $\int_a^c f \, dg = g(c) - g(c^-)$  e, polo Teorema 1.13, teremos que  $\int_a^b f \, dg = g(b) - g(c^-)$ .  $\square$ .

Para rematar esta sección, se observamos que toda función a chanzos finita pódese escribir como combinación lineal de funcións características da forma  $\chi_{[a,c]}$ ,  $\chi_{(a,c]}$  e  $\chi_{\{b\}}$  con  $c \in [a, b)$  e utilizamos os Lemas 2.12 e 2.13, podemos probar sen dificultade o seguinte resultado.

**Corolario 2.14.** *Sexan  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real cumprindo algunha das seguintes condicións:*

1.  *$g$  é unha función a chanzos finita.*
2.  *$f$  é unha función a chanzos finita e  $g$  é regrada.*

*Entón, a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe.*

## 2.4. Primeiro teorema de existencia da integral

Co obxectivo de demostrar os principais teoremas de existencia e converxencia da integral de Kurzweil-Stieltjes, imos introducir dous teoremas de limitación da integral, que serán de moita utilidade en adiante.

**Teorema 2.15.** *Sexan  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Entón*

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g, \text{ para toda partición etiquetada } \dot{\mathcal{P}} \text{ de } [a, b].$$

*Ademais se a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe, entón*

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \quad (2.16)$$

*E, se tamén a integral  $\int_a^b |f| \, d(\operatorname{Var} g)$  existe, tense*

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \left| \int_a^b |f| \, d(\operatorname{Var} g) \right| \leq \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \quad (2.17)$$

*Demostración.* Sen mais que ter en conta as propiedades da variación (2.1) e (2.3) tense que

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| &= \left| \sum_{k=1}^m f(t_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| \leq \sum_{k=1}^m |f(t_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(t_k)| \operatorname{var}_{x_{k-1}}^{x_k} g \leq \sum_{k=1}^m \|f\| \operatorname{var}_{x_{k-1}}^{x_k} g = \|f\| \operatorname{var}_a^b g. \end{aligned}$$

Se a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe, (2.16) séguese da Proposición 1.18. Mentres que se a integral  $\int_a^b |f| \, d\text{Var } g$  existe, basta observar que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{k=1}^m |f(t_k)| \text{var}_{x_{k-1}}^{x_k} g = |S(|f|, \text{Var } g, \dot{\mathcal{P}})|$ , logo (2.17) séguese da Proposición 1.16.  $\square$

**Teorema 2.16.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións. Entón*

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\| \leq 2\|f\|_{BV} \|g\|$$

para toda  $\dot{\mathcal{P}}$  partición de  $[a, b]$ . Ademais, se a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe entón

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\| \leq 2\|f\|_{BV} \|g\|. \quad (2.18)$$

*Demostración.* Sexa  $\dot{\mathcal{P}}$  unha partición de  $[a, b]$ . Entón, reordenando os termos da suma parcial e denotando  $t_0 = a$  e  $t_{m+1} = b$ , temos que

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| &= \left| \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| = \left| f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=0}^m (f(t_{k+1}) - f(t_k))g(x_k) \right| \\ &\leq (|f(b)| + |f(a)| + \sum_{k=0}^m \text{var}_{x_k}^{x_{k+1}} f) \|g\| = (|f(a)| + |f(b)| + \text{var}_a^b f) \|g\| \leq 2\|f\|_{BV} \|g\|, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos a propiedade da variación (2.2). Por último, (2.18) séguese da Proposición 1.18.  $\square$

Xa estamos en condicións de demostrar os primeiros teoremas básicos de converxencia para a integral de Kurzweil-Stieltjes, grazas ás dúas limitacións que acabamos de establecer.

**Teorema 2.17.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións tales que as integrais  $\int_a^b f_n \, dg$  existen para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se algunhas das seguintes condicións se satisfán:*

1.  $g \in \text{BV}([a, b])$  e  $f_n \rightrightarrows f$ .
2.  $g$  é limitada e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$ .

Entón, a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$  existen e son iguais.

*Demostración.* Imos ver que en ambos casos a sucesión  $\left( \int_a^b f_n \, dg \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  é de Cauchy. No caso 1, se aplicamos o Teorema 2.15 obtemos:

$$\left| \int_a^b f_n \, dg - \int_a^b f_m \, dg \right| = \left| \int_a^b (f_n - f_m) \, dg \right| \leq \|f_n - f_m\| \text{var}_a^b g \leq (\|f_n - f\| + \|f_m - f\|) \text{var}_a^b g,$$

para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ . Como  $g$  é de variación limitada e  $f_n \rightrightarrows f$ , o lado dereito da desigualdade será tan pequeno como queiramos para  $n$  e  $m$  o suficientemente grandes. No caso 2, grazas ao Teorema 2.16 tense que

$$\left| \int_a^b f_n \, dg - \int_a^b f_m \, dg \right| = \left| \int_a^b (f_n - f_m) \, dg \right| \leq 2 \|f_n - f_m\|_{BV} \|g\| \leq 2 \|f_n - f\|_{BV} \|g\| + 2 \|f_m - f\|_{BV} \|g\|,$$

para todo  $m, n \in \mathbb{N}$ . Como  $g$  é limitada e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$ , o lado dereito da desigualdade será tan pequeno como queiramos para  $n$  e  $m$  o suficientemente grandes. En ambos casos, a sucesión é de Cauchy en  $\mathbb{R}$ , é dicir, existe un  $I \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg = I$ .

Agora, sexa  $\varepsilon > 0$ , podemos ver que existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$  e para todo  $n \geq n_1$ , cúmprese que  $|S(f - f_n, g, \dot{\mathcal{P}})| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Basta aplicar de novo os Teoremas 2.15 e 2.16, respectivamente en cada caso, pero esta vez ás sumas parciais.

Por outra parte, grazas á converxencia da sucesión  $(\int_a^b f_n \, dg)_{n \in \mathbb{N}}$ , podemos escoller  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq n_1$ , tal que  $|\int_a^b f_{n_0} \, dg - I| < \frac{\varepsilon}{3}$ . É máis, tomemos  $\delta_0$  un calibre tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_0$ -fina, se verifique  $|S(f_{n_0}, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_{n_0} \, dg| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Finalmente, temos que

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| \leq |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f_{n_0}, g, \dot{\mathcal{P}})| + |S(f_{n_0}, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_{n_0} \, dg| + \left| \int_a^b f_{n_0} \, dg - I \right| < \varepsilon,$$

para calquera partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_0$ -fina. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario,  $\int_a^b f \, dg = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$ .  $\square$

**Teorema 2.18.** Sexan  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tales que as integrais  $\int_a^b f \, dg_n$  existen para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se algunhas das seguintes condicións se satisfán:

1.  $f \in BV([a, b])$  e  $g_n \rightrightarrows g$ .
2.  $f$  é limitada e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_a^b (g_n - g) = 0$ .

Entón a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \, dg_n$  existen e son iguais.

*Demostración.* Novamente poderemos comprobar que a sucesión  $(\int_a^b f \, dg_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  satisfai a condición de Cauchy. No caso 1, aplicando o Teorema 2.16, tense que

$$\left| \int_a^b f \, dg_n - \int_a^b f \, dg_m \right| = \left| \int_a^b f \, d(g_n - g_m) \right| \leq 2 \|f\|_{BV} (\|g_n - g\| + \|g - g_m\|),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Como  $f$  é de variación limitada e  $g_n \rightrightarrows g$ , o lado dereito da desigualdade é tan pequeno como queiramos para  $n$  e  $m$  o suficientemente grandes. No caso 2, usando o Teorema 2.15,

podemos asegurar que

$$\left| \int_a^b f \, d g_n - \int_a^b f \, d g_m \right| = \left| \int_a^b f \, d(g_n - g_m) \right| \leq \|f\| (\text{var}_a^b(g_n - g) + \text{var}_a^b(g - g_m)),$$

para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Como  $f$  é limitada e  $\text{var}_a^b(g_n - g) \rightarrow 0$ , o lado dereito da desigualdade faise tan pequeno como queiramos para  $n$  e  $m$  o suficientemente grandes. En calquera caso, a sucesión é de Cauchy e existe un  $I \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \, d g_n = I$ .

Sexa  $\varepsilon > 0$ . Novamente podemos atopar un  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$  e para todo  $n \geq n_1$ , cúmprese  $|S(f, g - g_n, \dot{\mathcal{P}})| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Basta aplicar ós Teoremas 2.16 e 2.15 ás sumas parciais en cada caso.

Sexa agora  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq n_1$  tal que  $\left| \int_a^b f \, d g_{n_0} - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ , e  $\delta_0$  un calibre tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_0$ -fina, se verifique  $\left| S(f, g_{n_0}, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, d g_{n_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Finalmente, tense que

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| \leq |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, g_{n_0}, \dot{\mathcal{P}})| + \left| S(f, g_{n_0}, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, d g_{n_0} \right| + \left| \int_a^b f \, d g_{n_0} - I \right| < \varepsilon,$$

para calquera partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_0$ -fina. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario,  $\int_a^b f \, d g = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f \, d g_n$ .  $\square$

**Teorema 2.19.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real regradas tales que unha delas é de variación limitada. Entón  $\int_a^b f \, d g$  existe.

*Demostración.* Supoñamos que  $g \in BV([a, b])$ . Pola Observación 2.10, existe unha sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funcións a chanzos finitas tales que  $f_n \rightrightarrows f$ . Polo Corolario 2.14, as integrais  $\int_a^b f_n \, d g$  existen para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entón, o Teorema 2.17 asegúranos que a integral  $\int_a^b f \, d g$  existe.

Analogamente, se supoñemos que  $f \in BV([a, b])$ , existe unha sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funcións a chanzos finitas tales que  $g_n \rightrightarrows g$ , e as integrais  $\int_a^b f \, d g_n$  existen para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando o Teorema 2.18, a integral  $\int_a^b f \, d g$  existe.  $\square$

*Observación 2.20.* Como acabamos de ver, nas hipóteses do teorema anterior, tanto as integrais  $\int_a^b f \, d g$  como  $\int_a^b g \, d f$  existen. É máis, nestas condicións podemos relacionar o valor de ambas integrais, aínda que non de forma sinxela, véxase [14, Sección 6.4] e Teorema 4.4.

**Exemplo 2.21.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Supoñamos que  $f$  é continua e  $g$  é monótona. Grazas ao Teorema 2.7, é evidente que toda función continua é regrada. Por outro lado, é fácil calcular, mediante a definición de variación, que  $\text{var}_a^b g = |g(a) - g(b)| < \infty$ . Ademais, é un resultado ben coñecido que para unha función monótona e limitada, existen e son finitos os límites laterais en todo punto, véxase [5, Teorema 5.6.1, p. 156]. É dicir,  $f$  e  $g$  son regradas e  $g$  é de variación limitada, polo Teorema 2.19, as integrais  $\int_a^b f \, d g$  e  $\int_a^b g \, d f$  existen.

## Capítulo 3

# A integral indefinida

Neste capítulo imos introducir a definición e as principais propiedades da integral indefinida de Kurzweil-Stieltjes. Isto é, dadas dúas funcións  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe, definiremos a función  $F: x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f \, dg \in \mathbb{R}$ .

De novo, baseámonos en [4] e [14] para os resultados principais, ademais de en [13]. Imos dedicar tamén unha sección á integral indefinida de Kurzweil-Henstock, pois presenta moi boas propiedades que cómpre destacar.

### 3.1. A integral indefinida de Kurzweil-Stieltjes

O primeiro paso vai ser introducir o Lema de Saks-Henstock, esencial para esta sección. Este lema afirma que, dada unha partición cumprindo  $|S(f, g, \mathcal{P}) - \int_a^b f \, dg| < \varepsilon$ , podemos eliminar termos da suma parcial e seguir mantendo a desigualdade, restrinxindo adecuadamente a integral. É máis, tamén veremos que se pode intercambiar o valor absoluto coa suma sen aumentar de maneira considerable o erro na estimación.

**Lema 3.1** (Lema de Saks-Henstock). *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe. Sexa  $\varepsilon > 0$  e un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que*

$$\left| S(f, g, \mathcal{P}) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon, \text{ para toda partición } \mathcal{P} \text{ } \delta\text{-fina.}$$

*Sexa tamén unha sucesión finita de particións etiquetadas  $((s_k, t_k), (\theta_k))_{k=1}^m$  cumprindo*

$$\begin{aligned} a \leq s_1 \leq \theta_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_m \leq \theta_m \leq t_m \leq b, \\ [s_k, t_k] \subset (\theta_k - \delta(\theta_k), \theta_k + \delta(\theta_k)), \text{ para todo } k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Entón,

$$\left| \sum_{k=1}^m \left( f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg \right) \right| \leq \varepsilon.$$

*Demostración.* Sexa  $((s_k, t_k), (\theta_k))_{k=1}^m$  unha sucesión finita de particións etiquetadas satisfacendo (3.1). Denotaremos tamén  $t_0 = a$  e  $s_{m+1} = b$ .

Sexa  $\eta > 0$  e  $k \in \{0, \dots, m\}$ . Se  $t_k < s_{k+1}$ , podemos tomar un calibre  $\delta_k : [t_k, s_{k+1}] \rightarrow (0, \infty)$  tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_k$ -fina, cúmprese

$$\left| S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_{t_k}^{s_{k+1}} f \, dg \right| < \frac{\eta}{m+1}. \quad (3.2)$$

Ademais, podemos considerar, sen perda de xeneralidade, que  $\delta_k(x) \leq \delta(x)$  para todo  $x \in [t_k, s_{k+1}]$ . Tomaremos  $\dot{\mathcal{P}}_k$  unha partición  $\delta_k$ -fina. No caso de que  $t_k = s_{k+1}$ , consideraremos  $\dot{\mathcal{P}}_k = ((t_k, t_k), t_k)$ .

Agora, sexa a partición  $\dot{\mathcal{Q}}$  obtida concatenando a sucesión de particións dada con  $\dot{\mathcal{P}}_0, \dots, \dot{\mathcal{P}}_m$ . Como  $\dot{\mathcal{Q}}$  é, por construción,  $\delta$ -fina, satisfaise que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^m \left( f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg \right) + \sum_{k=0}^m \left( S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_k) - \int_{t_k}^{s_{k+1}} f \, dg \right) \right| \\ &= \left| S(f, g, \dot{\mathcal{Q}}) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

A desigualdade triangular e (3.2) asegúranos que

$$\left| \sum_{k=1}^m \left( f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg \right) \right| < \varepsilon + \left| \sum_{k=0}^m \left( S(f, g, \dot{\mathcal{P}}_k) - \int_{t_k}^{s_{k+1}} f \, dg \right) \right| < \varepsilon + \eta.$$

Como  $\eta > 0$  foi arbitrario, obtemos a desigualdade buscada.  $\square$

**Corolario 3.2.** Sexan  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe. Sexa  $\varepsilon > 0$  e un calibre  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\left| S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon, \text{ para toda partición } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta\text{-fina.}$$

Sexa tamén unha sucesión finita de particións etiquetadas  $((s_k, t_k), (\theta_k))_{k=1}^m$  cumprindo as condicións (3.1). Entón,

$$\sum_{k=1}^m \left| f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg \right| \leq 2\varepsilon.$$

*Demostración.* Consideremos os conxuntos de índices seguintes:

$$K^+ := \{k \in \{1, \dots, m\} : f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg > 0\},$$

$$K^- := \{k \in \{1, \dots, m\} : f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg < 0\}.$$

Aplicando o Lema 3.1 a cada conxunto de índices, obtemos que

$$0 \leq \sum_{k \in K^+} \left( f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) - \int_{s_k}^{t_k} f \, dg \right) \leq \varepsilon,$$

$$0 \leq \sum_{k \in K^-} \left( \int_{s_k}^{t_k} f \, dg - f(\theta_k)(g(t_k) - g(s_k)) \right) \leq \varepsilon.$$

Sumando ambas desigualdades probamos o que buscábamos.  $\square$

En xeral, a integral indefinida de Kurzweil-Stieltjes non é necesariamente continua. Así a todo, podemos obter un resultado «satisfactorio» respecto ó comportamento da integral indefinida. Veremos que se a función respecto á cal integramos é regrada, tamén o será a integral indefinida.

**Teorema 3.3.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe, e sexa un número real  $c \in [a, b]$ . Entón,*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in [a, b]}} \left( \int_a^x f \, dg + f(c)(g(c) - g(x)) \right) = \int_a^c f \, dg,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in [a, b]}} \left( \int_x^b f \, dg + f(c)(g(x) - g(c)) \right) = \int_c^b f \, dg.$$

*Demostración.* Imos probar o primeiro límite, xa que o segundo obtense con razoamentos análogos. Fixado  $\varepsilon > 0$ , sexa  $\delta_\varepsilon: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre tal que, para toda partición  $\dot{P}$   $\delta$ -fina,  $\left| S(f, g, \dot{P}) - \int_a^b f \, dg \right| < \varepsilon$ .

Para cada  $x \in (c, c + \delta(c)) \cap [a, b]$ , a partición  $((c, x), (c))$  satisfai as condicións (3.1) e, polo Lema 3.1, tense que

$$\left| f(c)(g(x) - g(c)) - \int_c^x f \, dg \right| \leq \varepsilon.$$

Analogamente, se  $x \in (c, c - \delta(c))$  obtemos que

$$\left| f(c)(g(c) - g(x)) - \int_x^c f \, dg \right| \leq \varepsilon. \quad (3.3)$$

En consecuencia, a desigualdade 3.3 satisfaise para todo  $x \in (c - \delta(c), c + \delta(c))$ . É dicir,

$$\left| \int_a^c f \, dg - \int_a^x f \, dg - f(c)(g(c) - g(x)) \right| = \left| \int_x^c f \, dg - f(c)(g(c) - g(x)) \right| \leq \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, probamos o que queríamos.  $\square$

Como corolario do Teorema 3.3, podemos obter o seguinte resultado sen máis que realizar unha manipulación elemental dos límites.

**Corolario 3.4.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe. Entón, téñense as seguintes afirmacións:*

1. *Se  $c \in (a, b]$  e existe  $g(c^-)$ , entón*

$$\int_a^c f \, dg = \lim_{x \rightarrow c^-} \left( \int_a^x f \, dg \right) + f(c)(g(c) - g(c^-)).$$

2. *Se  $c \in [a, b)$ , e existe  $g(c^+)$ , entón*

$$\int_c^b f \, dg = \lim_{x \rightarrow c^+} \left( \int_x^b f \, dg \right) + f(c)(g(c^+) - g(c)).$$

Xa estamos en condicións de probar que a primeira condición de regularidade da integral de Kurzweil-Stieltjes. Ademais, estableceremos unha condición baixo a cal será tamén de variación limitada.

**Corolario 3.5.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que  $\int_a^b f \, dg$  existe e  $g$  é regrada. Sexa a función integral indefinida definida como*

$$F(x) := \int_a^x f \, dg, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

*Entón, téñense as seguintes afirmacións:*

1.  *$h$  é regrada e cumpre*

$$F(t^+) = F(t) + f(t)(g(t^+) - g(t)), \text{ para todo } t \in [a, b),$$

$$F(t^-) = F(t) - f(t)(g(t) - g(t^-)), \text{ para todo } t \in (a, b].$$

2. *Se  $f$  é limitada e  $g$  é de variación limitada, entón  $h$  é de variación limitada e cumpre*

$$\text{var}_a^b F \leq \|f\| \text{var}_a^b g.$$

*Demostración.* A afirmación 1 é consecuencia inmediata do Corolario 3.4. Para probar 2, imos considerar unha partición  $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_m\}$  do intervalo  $[a, b]$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} V(F, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \int_a^{x_k} f \, dg - \int_a^{x_{k-1}} f \, dg \right| \\ &= \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \, dg \right| \leq \|f\| \sum_{k=1}^m \text{var}_{x_{k-1}}^{x_k} g = \|f\| \text{var}_a^b g, \end{aligned}$$

onde na desigualdade utilizamos o Teorema 2.15 e na última igualdade a propiedade (2.3). Se estamos nas hipóteses da afirmación 2,  $\|f\| \operatorname{var}_a^b g < \infty$  e, tomando o supremo de  $V(F, \mathcal{P})$ , obtemos que  $F$  é de variación limitada.  $\square$

Ata agora sabemos que se a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe, entón tamén existen  $\int_a^x f \, dg$  e  $\int_x^b f \, dg$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Imos rematar a sección enunciando un teorema que nos ofrece unha serie de condicións para poder afirmar o recíproco.

**Teorema 3.6** (Teorema de Hake). *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Téñense as seguintes afirmacións:*

1. Se  $\int_a^x f \, dg$  existe para todo  $x \in [a, b)$  e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \left( \int_a^x f \, dg + f(b)(g(b) - g(x)) \right) = I \in \mathbb{R},$$

$$\text{logo } \int_a^b f \, dg = I.$$

2. Se  $\int_x^b f \, dg$  existe para todo  $x \in (a, b]$  e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left( \int_x^b f \, dg + f(a)(g(x) - g(a)) \right) = I \in \mathbb{R},$$

$$\text{logo } \int_a^b f \, dg = I.$$

*Demostración.* Imos probar tan só a afirmación 1, pois a outra obterase mediante métodos análogos. Fixemos  $\varepsilon > 0$  e escollamos  $\Delta > 0$  de xeito que

$$\left| \int_a^x f \, dg + f(b)(g(b) - g(x)) - I \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para cada } x \in (b - \Delta, b). \quad (3.4)$$

A continuación, imos tomar  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente de elementos de  $(a, b)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , e denotaremos  $x_0 = a$ . Para cada  $s \in [a, b)$  denotaremos por  $\kappa(s)$  ó único número natural  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $s \in [x_{k-1}, x_k)$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , como existe  $\int_a^{x_k} f \, dg$ , podemos escoller un calibre  $\delta_k: [a, x_k] \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\left| S(f, g, \mathcal{P}) - \int_a^{x_k} f \, dg \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \text{ para toda partición } \mathcal{P} \text{ } \delta_k\text{-fina.} \quad (3.5)$$

Agora, fixado  $k \in \mathbb{N}$ , para cada  $s \in [x_{k-1}, x_k)$  escollemos un  $\delta(s) > 0$  de xeito que  $(s - \delta(s), s + \delta(s)) \subset [a, x_k]$ . Así, definiremos un calibre  $\delta_0: [a, b) \rightarrow (0, \infty)$  no punto  $s$  como  $\delta_0(s) := \min\{\delta_k(s), \delta(s)\}$ .

Por outro lado, sexa  $x \in [a, b]$  e  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\delta_0|_{[a, x]}$ -fina, imos probar que

$$\left| S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^x f \, dg \right| < \varepsilon. \quad (3.6)$$

Primeiro, sexa  $j \in \{1, \dots, m\}$  e  $k = \kappa(t_j) \in \{1, \dots, \kappa(x)\}$ , entón

$$[x_{j-1}, x_j] \subset (t_j - \delta_0(t_j), t_j + \delta_0(t_j)) \subseteq (t_j - \delta_k(t_j), t_j + \delta_k(t_j)) \subset [a, x_k]. \quad (3.7)$$

A continuación, fixado  $k \in \{1, \dots, \kappa(x)\}$ , definiremos o conxunto de índices  $J_k := \{j \in \{1, \dots, m\} : \kappa(t_j) = k\}$ . Consideraremos tamén a sucesión finita de particións etiquetadas  $((x_{j-1}, x_j), (t_j)) : j \in J_k$ . Tendo en conta (3.5) e (3.7), podemos aplicar o Lema 3.1 e asegurar que

$$\left| \sum_{j \in J_k} \left( f(t_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \, dg \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^x f \, dg \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\kappa(x)} \sum_{j \in J_k} \left( f(t_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \, dg \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\kappa(x)} \left| \sum_{j \in J_k} \left( f(t_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \, dg \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\kappa(x)} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

probando así (3.6).

Para rematar, imos definir un calibre  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  como  $\delta(x) := \min\{b - x, \delta_0(x)\}$ , se  $x \in [a, b]$ , e  $\delta(b) := \Delta$ . Sexa  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\delta$ -fina, pódese comprobar que, por definición do calibre,  $t_m = x_m = b$ . En consecuencia, satisfaise que

$$\begin{aligned} |S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} (f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))) + f(b)(g(b) - g(x_{m-1})) - I \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{m-1} (f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))) - \int_a^{x_{m-1}} f \, dg \right| \\ &\quad + \left| \int_a^{x_{m-1}} f \, dg - f(b)(g(b) - g(x_{m-1})) - I \right|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como  $x_{m-1} \in (b - \Delta, b)$ , podemos aplicar (3.4) e (3.6) a (3.8) e obter

$$|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario,  $\int_a^b f \, dg$  existe e é igual a  $I$ .  $\square$

## 3.2. A integral indefinida de Kurzweil-Henstock

O obxectivo desta sección vai ser enunciarse dous resultados fundamentais sobre a integral indefinida no caso de que a función respecto á cal integramos é a identidade, xa que baixo estas hipóteses obtemos comportamentos máis «satisfactorios». Estes son que a integral indefinida é continua en todo  $[a, b]$  e diferenciable salvo nun conxunto de medida nula. Cabe destacar que todos os teoremas enunciados na sección anterior seguen sendo válidos neste caso particular.

**Teorema 3.7.** *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real tal que a integral  $\int_a^b f \, dx$  existe. Entón, a integral indefinida  $F$  é continua en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Sexa  $c \in [a, b)$ , imos ver que  $F(c^+) = F(c)$ . Fixado  $\varepsilon > 0$ , sexa  $\delta_\varepsilon : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre tal que

$$\left| S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para toda partición } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta\text{-fina.}$$

Imos redefinir  $\delta(c)$  de xeito que sexa menor que  $\frac{\varepsilon}{2(|f(c)|+1)}$ . Agora, sexa  $h \in (0, \delta(c)) \cap [a, b]$ , e consideremos a partición  $\dot{\mathcal{P}}_0 = ((c, c+h), (c))$  que cumpre, por escolla, (3.1). Aplicando o Lema 3.1 a  $\dot{\mathcal{P}}_0$  obtemos:

$$\left| f(c)h - \int_c^{c+h} f \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pero é máis, como  $h < \delta(c) < \frac{\varepsilon}{2(|f(c)|+1)}$ , cúmprese que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f \, dx \right| \leq \left| \int_c^{c+h} f \, dx - f(c)h \right| + |f(c)h| < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario,  $F(c^+) = F(c)$ . De maneira análoga, pódese probar que  $F(c^-) = F(c)$ , para todo  $c \in (a, b]$ . É dicir,  $F$  é continua en  $[a, b]$ .  $\square$

Por último, imos enunciar a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo. A súa demostración require un concepto coñecido como coberturas de Vitali e un lema previo relacionado con esta idea. Omitiremos as demostracións, que poden ser consultadas en [4].

**Definición 3.8.** Sexa un subconxunto  $E \subseteq [a, b]$  e  $\mathcal{F}$  unha colección de subintervalos cerrados non dexenerados contidos en  $[a-1, b+1]$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  é unha *cobertura de Vitali* de  $E$  se, para cada  $x \in E$  e  $s > 0$ , existe un intervalo  $J \in \mathcal{F}$  tal que  $x \in J$  e  $\ell(J) < s$ .

*Observación 3.9.* Da definición anterior despréndese que se  $\mathcal{F}$  é unha cobertura de Vitali de  $E$ , cada punto  $x \in E$  pertence a infinitos intervalos de  $\mathcal{F}$ . Como exemplo, unha cobertura de Vitali de  $I := [0, 1]$  é a familia  $\mathcal{F} := \{B[r, \frac{1}{n}] : r \in I \cap \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$  que, ademais, é numerable.

**Lema 3.10** ([4, Lema 5.8, p 79]). *Sexa un subconxunto  $E \subseteq [a, b]$  e  $\mathcal{F}$  unha cobertura de Vitali de  $E$ . Entón, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un número finito de intervalos disxuntos dous a dous  $I_1, \dots, I_m \in \mathcal{F}$  e unha familia numerable de intervalos cerrados reais  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cumprindo*

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^m I_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \quad e \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(J_n) \leq \varepsilon.$$

En tal caso, séguese que

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^m I_k \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n.$$

**Teorema 3.11** ([4, Teorema 5.9, p 80] Teorema Fundamental do Cálculo: Parte II). *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función Kurzweil-Henstock integrable. Entón, a integral indefinida  $F$  é diferenciable en case todo punto  $x \in [a, b]$ . Ademais, nos puntos onde  $F$  é diferenciable, satisfaise  $F'(x) = f(x)$ .*

*Observación 3.12.* As hipóteses do teorema anterior non se poden mellorar. Por exemplo, consideraremos un conxunto  $E \subset [a, b]$  de medida nula e a función  $f := \chi_E$ . Para cada  $x \in [a, b]$ , tense que  $\chi_E|_{[a, x]}$  é igual a cero en case todo punto, co cal a Proposición 1.23 asegúranos que a integral  $F(x) = \int_a^x f \, dx$  existe e é igual a cero. Agora ben, a integral indefinida  $F$  é derivable en todo  $[a, b]$  pero  $F'(x) \neq f(x)$ , para todo  $x \in E$ .

## Capítulo 4

# Consecuencias do Lema de Saks-Henstock

Como xa comentamos no capítulo anterior, o Lema de Saks-Henstock é unha ferramenta moi poderosa para estudar o comportamento da integral de Kurzweil-Stieltjes. Ademais de permitírnos demostrar algunhas das propiedades da integral indefinida, este lema vai nos servir para introducir dous resultados de gran interese. Por un lado, o Teorema de Substitución co que, baixo certas hipóteses, poderemos converter unha integral de Kurzweil-Stieltjes nunha de Kurzweil-Henstock. Pola outra banda, imos ver que esta integral, ó contrario que a de Lebesgue-Stieltjes, non é absolutamente converxente. É dicir, a existencia de  $\int_a^b f \, dg$  non implica necesariamente a de  $\int_a^b |f| \, dg$ .

### 4.1. O Teorema de Substitución

**Teorema 4.1** (Teorema de Substitución). *Sexan  $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real tales que  $f$  é limitada e a integral  $\int_a^b g \, dh$  existe. Entón, se existe algunha das seguintes integrais:*

$$\int_a^b f \, d\left(\int_a^x g \, dh\right) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f g \, dh,$$

*a outra tamén o fai e son iguais.*

*Demostración.* Como  $\int_a^b g \, dh$  existe, a integral indefinida  $G(x) := \int_a^x g \, dh$  está ben definida para todo  $x \in [a, b]$ .

Supoñamos que a integral  $\int_a^b f \, dh$  existe e fixemos  $\varepsilon > 0$ . Sexa  $\delta_\varepsilon: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre tal que  $|S(g, h, \mathcal{P}) - \int_a^b g \, dh| < \frac{\varepsilon}{4(\|f\|+1)}$  e  $|S(fg, h, \mathcal{P}) - \int_a^b fg \, dh| < \frac{\varepsilon}{4(\|f\|+1)}$ , para toda partición

$\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina. O Corolario 3.2 asegúranos o seguinte:

$$\sum_{k=1}^m \left| f(t_k) g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f g dh \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|f\| + 1)},$$

$$\sum_{k=1}^m \left| g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} g dh \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|f\| + 1)},$$

para  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  calquera partición  $\delta$ -fina. Pero entón,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^m f(t_k) (G(x_k) - G(x_{k-1})) - \int_a^b f g dh \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^m \left| f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g dh - f(t_k) g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) \right| \\ & \quad + \sum_{k=1}^m \left| f(t_k) g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f g dh \right| \\ & \leq \|f\| \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} g dh - g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) \right| + \sum_{k=1}^m \left| f(t_k) g(t_k) (h(x_k) - h(x_{k-1})) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f g dh \right| \\ & \leq (\|f\| + 1) \frac{\varepsilon}{2(\|f\| + 1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, a integral  $\int_a^b f d(\int_a^x g dh)$  existe e é igual a  $\int_a^b f g dh$ . Probar a outra parte do teorema, é dicir, supoñendo que existe a outra integral, é completamente análogo e fai de novo uso do Corolario 3.2.  $\square$

Como dixemos, grazas a este teorema imos poder convertir certo tipo de integrais de Kurzweil-Stieltjes en integrais de Kurzweil-Henstock.

**Corolario 4.2.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que  $f$  é limitada e  $g$  é diferenciable en  $[a, b]$ . Entón, se algunha das seguintes integrais existen:*

$$\int_a^b f dg \quad \text{ou} \quad \int_a^b f g' dx,$$

*entón a outra tamén o fai e son iguais.*

*Demostración.* Recordemos que o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 1.20) para a integral de Kurzweil-Henstock dicíanos que se  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función diferenciable nun intervalo  $[c, d]$ , a integral  $\int_c^d h' dx$  existe e é igual a  $h(d) - h(c)$ . Neste caso, como  $g$  é diferenciable en  $[a, b]$ , tamén o é en  $[a, x]$ , para todo  $x \in [a, b]$ . É dicir,  $\int_a^x g' dx = g(x) - g(a)$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Entón, estamos nas hipóteses do Teorema 4.1 para  $h$  a función identidade en  $[a, b]$ , do cal séguese o resultado, sen máis que ter en conta que  $\int_a^b f d(g - g(a)) = \int_a^b f dg$ .  $\square$

**Exemplo 4.3.** Consideremos a función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) := x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ , se  $x \in (0, 1]$  e  $f(0) := 0$ . Sexa tamén a función  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) := \log x$ , se  $x \in (0, 1]$  e  $g(0) := 0$ . Imos calcular a integral  $\int_0^1 f \, dg$  con todo o que vimos ata agora.

Por un lado, para cada  $t \in (0, 1]$ , a función  $g$  é diferenciable en  $[t, 1]$  e  $g'(t) = \frac{1}{t}$ , para todo  $t \in (0, 1]$ . Que  $f$  é limitada en  $[0, 1]$  é inmediato. Ademais, temos que

$$\int_t^1 \left( x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} \, dx = \int_t^1 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \, dx = \int_t^1 \left( x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)' \, dx = \operatorname{sen} 1 - t \operatorname{sen} \frac{1}{t}.$$

É dicir, a integral  $\int_t^1 f g' \, dx$  existe e, como estamos en condicións do Corolario 4.2, temos que  $\int_t^1 f \, dg = \operatorname{sen}(1) - t \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ . Por último, imos aplicar o Teorema de Hake (Teorema 3.6), pois a integral  $\int_t^1 f \, dg$  existe para todo  $t \in (0, 1]$  e existe o límite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \int_t^1 f \, dg + f(0)(g(t) - g(a)) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \int_t^1 \left( x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) d(\log x) + 0(\log t - 0) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \operatorname{sen} 1 - t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) = \operatorname{sen} 1 - 1. \end{aligned}$$

É dicir, o Teorema 3.6 asegúranos que a integral  $\int_0^1 f \, dg$  existe e é igual a  $\operatorname{sen} 1 - 1$ .

No seguinte resultado imos utilizar o Teorema de Substitución para establecer, baixo certas hipóteses, a relación entre as integrais  $\int_a^b f \, dg$  e  $\int_a^b g \, df$ .

**Teorema 4.4.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real diferenciables e limitadas. Entón,

$$\int_a^b f \, dg + \int_a^b g \, df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

*Demostración.* Como ambas funcións son diferenciables, a función  $fg$  é Kurzweil-Henstock integrable e, utilizando a regra do produto para a derivada e o Corolario 4.2, tense que

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)' \, dx = \int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx = \int_a^b g \, df + \int_a^b f \, dg. \quad \square$$

Por último, imos ver que as reparametrizacións continuas do intervalo  $[a, b]$  non afectan ó valor da integral.

**Teorema 4.5.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real, e  $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  unha función continua, sobrexectiva e estrictamente crecente. Entón, se algunha das seguintes integrais existe:

$$\int_a^b f \, dg \quad \text{ou} \quad \int_a^b (f \circ \phi) \, d(g \circ \phi),$$

a outra tamén o fai e son iguais.

*Demostración.* Supoñamos que a integral  $I := \int_a^b f \, dg$  existe e sexa  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición etiquetada de  $[c, d]$ . Non é difícil comprobar que esta partición da lugar a  $\dot{\mathcal{Q}} = ((\phi(x_0), \dots, \phi(x_m)), (\phi(t_1), \dots, \phi(t_m)))$ , unha partición de  $[a, b]$  que denotaremos por  $\phi(\dot{\mathcal{P}})$ .

Agora, fixado  $\varepsilon > 0$ , tomemos un calibre  $\delta_\varepsilon: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  de xeito que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon$ , para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_\varepsilon$ -fina. Imos definir un calibre  $\tilde{\delta}_\varepsilon: [c, d] \rightarrow (0, \infty)$  de xeito que se teñan as seguintes relacións:

$$\begin{aligned} \phi(t_k + \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k)) &< \phi(t_k) + \delta_\varepsilon(t_k), \text{ para todo } x \in (a, b], \\ \phi(t_k - \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k)) &> \phi(t_k) - \delta_\varepsilon(t_k), \text{ para todo } x \in [a, b), \end{aligned}$$

o cal podemos facer grazas ó carácter crecente de  $\delta$  e á súa continuidade. Con isto podemos comprobar inmediatamente que, dada  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\tilde{\delta}_\varepsilon$ -fina, é dicir,  $[x_{k-1}, x_k] \subseteq (t_k - \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k), t_k + \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k))$ , para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ , entón

$$[\phi(x_{k-1}), \phi(x_k)] \subset (\phi(t_k - \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k)), \phi(t_k + \tilde{\delta}_\varepsilon(t_k))) \subset (\phi(t_k) - \delta_\varepsilon(t_k), \phi(t_k) + \delta_\varepsilon(t_k)),$$

isto é,  $\phi(\dot{\mathcal{P}})$  é  $\delta_\varepsilon$ -fina. Finalmente, observemos que

$$S(f, g, \phi(\dot{\mathcal{P}})) = \sum_{k=1}^m f(\phi(t_k))(g(\phi(x_{k-1})) - g(\phi(x_k))) = S(f \circ \phi, g \circ \phi, \dot{\mathcal{P}}).$$

En consecuencia, se  $\dot{\mathcal{P}}$  é unha partición  $\tilde{\delta}_\varepsilon$ -fina temos que

$$|S(f \circ \phi, g \circ \phi, \dot{\mathcal{P}}) - I| = |S(f, g, \phi(\dot{\mathcal{P}})) - I| < \varepsilon,$$

por ser  $\phi(\dot{\mathcal{P}})$   $\delta_\varepsilon$ -fina. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario,  $\int_a^b (f \circ \phi) \, d(g \circ \phi)$  existe e é igual a  $\int_a^b f \, dg$ . A demostración do outro caso obtense por simetría, posto que basta aplicar este resultado usando función  $\phi^{-1}$  que existe, é estritamente crecente e continua.  $\square$

O resultado anterior tamén pode enunciarse para reparametrizacións estritamente decrecentes. A proba é inmediata, pois se  $\phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  é estritamente decrecente, basta aplicar o resultado anterior á función  $-\phi$ .

## 4.2. Integrabilidade absoluta

Para estudar a integrabilidade absoluta, restrinxiremos a nosa atención ao caso en que  $g$  sexa crecente. Baixo estas hipóteses, pódese comprobar directamente, utilizando a definición das sumas parciais, que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq S(|f|, g, \dot{\mathcal{P}})$ , para toda partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$ . Da Proposición 1.16, séguese que

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \int_a^b |f| \, dg. \quad (4.1)$$

Como dixemos, en xeral, a existencia da integral  $\int_a^b f \, d g$  non implica a de  $\int_a^b |f| \, d g$ . Máis adiante daremos un amplo abanico de exemplos. Porén, podemos obter unha caracterización sobre a existencia da integral  $\int_a^b |f| \, d g$ .

**Teorema 4.6.** *Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que  $g$  é crecente e a integral  $\int_a^b f \, d g$  existe. Entón, a integral  $\int_a^b |f| \, d g$  existe se, e só se, a integral indefinida  $F$  é de variación limitada. En tal caso, tense que*

$$\int_a^b |f| \, d g = \text{var}_a^b F.$$

*Demostración.*

“ $\implies$ ” Se consideramos unha partición arbitraria  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_m) \in \mathcal{P}([a, b])$  e temos en conta (4.1), tense que

$$V(F, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \, d g \right| \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f| \, d g = \int_a^b |f| \, d g < \infty.$$

É dicir, tomando o supremo,  $\text{var}_a^b F \leq \int_a^b |f| \, d g$ .

“ $\impliedby$ ” Fixado  $\varepsilon < 0$ . Pola caracterización do supremo, existe unha partición  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}([a, b])$  tal que

$$\text{var}_a^b F - \frac{\varepsilon}{2} < V(F, \mathcal{P}_0) \leq \text{var}_a^b F.$$

É máis, se  $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}([a, b])$  é tal que  $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q}$  é inmediato comprobar que  $V(F, \mathcal{P}_0) \leq V(F, \mathcal{Q})$ . É dicir, cúmprese que

$$\text{var}_a^b F - \frac{\varepsilon}{2} < V(F, \mathcal{Q}) \leq \text{var}_a^b F, \text{ para toda } \mathcal{Q} \in \mathcal{P}([a, b]) \text{ tal que } \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q}. \quad (4.2)$$

A continuación, grazas ó Lema 1.8, sabemos que existe un calibre  $\delta_1: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que, para calquera partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta_1$ -fina, cúmprese que os puntos de  $\mathcal{P}_0$  son etiquetas de  $\dot{\mathcal{P}}$ . Ademais, como por hipótese existe  $\int_a^b f \, d g$ , podemos considerar un calibre  $\delta_2: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\left| \int_a^b f \, d g - S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para toda partición etiquetada } \dot{\mathcal{P}} \text{ } \delta_2\text{-fina.}$$

Agora, tomemos o calibre  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , e sexa  $\dot{\mathcal{P}}$  unha partición  $\delta$ -fina. Logo, a segunda parte do Lema 1.8 asegúranos que existe outra partición  $\dot{\mathcal{Q}} = ((y_0, \dots, y_n), (r_1, \dots, r_n))$   $\delta$ -fina tal que

$$S(|f|, g, \dot{\mathcal{Q}}) = S(|f|, g, \dot{\mathcal{P}}) \text{ e } \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q},$$

onde  $\mathcal{Q}$  denota a partición  $(y_0, \dots, y_n)$  de  $[a, b]$ .

En consecuencia, utilizando que  $g$  é crecente, a desigualdade triangular inversa ( $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ) e o Corolario 3.2, temos que

$$\begin{aligned} |S(|f|, g, \dot{\mathcal{P}}) - V(F, \mathcal{Q})| &= |S(|f|, g, \dot{\mathcal{Q}}) - V(F, \mathcal{Q})| = \left| \sum_{k=1}^n \left( |f(r_k)(g(y_k) - g(y_{k-1}))| - \left| \int_{y_{k-1}}^{y_k} f \, dg \right| \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| f(r_k)(g(y_k) - g(y_{k-1})) - \int_{y_{k-1}}^{y_k} f \, dg \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para rematar, se temos en conta (4.2), (4.3) e que  $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ , satisfaise que

$$|S(|f|, g, \dot{\mathcal{P}}) - \text{var}_a^b F| \leq |S(|f|, g, \dot{\mathcal{Q}}) - V(F, \mathcal{Q})| + |V(F, \mathcal{Q}) - \text{var}_a^b F| < \varepsilon,$$

para calquera partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, chegamos a que a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe e é igual a  $\text{var}_a^b F$ .  $\square$

A continuación, utilizando o teorema que acabamos de ver, imos introducir unha ampla gama de funcións que, en xeral, non teñen por que ser absolutamente integrables.

**Proposición 4.7.** *Sexa  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente de números reais no intervalo  $(a, b)$  con límite  $\tau \in (a, b]$ . Sexa  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de números reais non negativos tales que a serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  converxe. Se definimos a función  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como*

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \chi_{[t_n, b]}(x),$$

entón, para calquera  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tense:

1. A integral  $\int_a^b f \, dg$  existe se, e só se, a serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$  converxe. En tal caso, tense a relación

$$\int_a^b f \, dg = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n).$$

2. A integral  $\int_a^b |f| \, dg$  existe se, e só se, a serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$  é absolutamente converxente.

*Demostración.* Antes de nada, observemos que a función  $g$  está ben definida grazas á converxencia da serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ .

1. O primeiro paso que imos realizar vai ser ver que a función  $g$  é crecente e que  $\lim_{x \rightarrow \tau^-} g(x) = g(\tau)$ . Por un lado, se  $x \in [a, t_1)$ ,  $g(x) = 0$  e se  $x \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^k c_n$ . Pola contra, todo  $x \in [t_1, \tau)$  pertence a un único intervalo da forma  $[t_{k-1}, t_k]$ , con  $k \in \mathbb{N}$ . En tal caso,  $g(x) = \sum_{n=1}^k c_n$ , e como os termos  $c_n$  son non negativos, é evidente que a función  $g$  é crecente. Tamén dedúcese de forma sinxela que  $\lim_{x \rightarrow \tau^-} g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = g(\tau)$ .

Agora, polas observacións que acabamos de facer, é evidente que se fixamos  $x \in [a, \tau)$ ,  $g|_{[a,x]}$  é unha función a chanzos finita e o Corolario 2.14 asegúranos que existe a integral  $\int_a^x f \, dg$ . É máis, o Lema 2.12 e o Teorema 1.13 dannos as seguintes relacións:

$$\int_a^{t_1} f \, dg = \int_a^{t_1} f \, d(c_1 \chi_{\{t_1\}}) = c_1 f(t_1),$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \, dg &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \, d\left(\sum_{n=1}^k c_n \chi_{[t_k, t_{k+1})} + \sum_{n=1}^{k+1} c_n \chi_{\{t_{k+1}\}}\right) \\ &= -f(t_{k+1}) \sum_{n=1}^k c_n + f(t_{k+1}) \sum_{n=1}^{k+1} c_n = c_{k+1} f(t_{k+1}), \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

É máis, polo que acabamos de ver, se para calquera  $k \in \mathbb{N}$  tomamos  $x \in [t_k, t_{k+1})$ , tense que

$$\begin{aligned} \int_a^x f \, dg &= \int_a^{t_k} f \, dg + \int_{t_k}^x f \, dg = \int_a^{t_1} f \, dg + \sum_{n=1}^{k-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f \, dg + \int_{t_k}^x f \, dg \\ &= c_1 f(t_1) + \sum_{n=1}^{k-1} c_{n+1} f(t_{n+1}) + \int_{t_k}^x f \, d\left(\sum_{n=1}^k c_n \chi_{[t_k, x]}\right) = \sum_{n=1}^k c_n f(t_n). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para a última igualdade, se  $x \neq t_k$ , utilizamos a Observación 2.11, xa que a función  $\sum_{n=1}^k c_n \chi_{[t_k, x]}$  é constante en  $[t_k, x]$  e, se  $x = t_k$ , a integral  $\int_{t_k}^{t_k} f \, dg$  é cero.

Se supoñemos que  $\int_a^b f \, dg$  existe,  $\int_a^\tau f \, dg$  tamén o fará. Ademais, como dixemos ó inicio, existe  $g(\tau^-) = g(\tau)$  e, aplicando o Corolario 3.4 xunto con (4.4), temos que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n f(t_n) = \lim_{x \rightarrow \tau^-} \int_a^x f \, dg = \int_a^\tau f \, dg \in \mathbb{R}.$$

Pola contra, se supoñemos que existe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$ , por (4.4), cúmprese que

$$\lim_{x \rightarrow \tau^-} \left( \int_a^x f \, dg + f(\tau)(g(\tau) - g(x)) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^k c_n f(t_n) \right) + f(\tau)(g(\tau) - g(\tau)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n) \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o Teorema 3.6, podemos asegurar que a integral  $\int_a^\tau f \, dg$  existe e é igual a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$ . Ademais, se  $\tau \neq b$ ,  $\int_\tau^b f \, dg = \int_\tau^b f \, d\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \chi_{[\tau, b]}\right) = 0$ , pola Observación 2.11. É dicir, en calquera caso,  $\int_a^b f \, dg$  existe e é igual a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$ .

2. Como por hipótese os termos  $c_n$  son non negativos,  $|c_n f(t_n)| = c_n |f(t_n)|$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agora ben, se no apartado 1 consideramos a función  $|f|$ , temos que  $\int_a^b |f| \, dg$  existe se, e só se, a serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n |f(t_n)|$  converxe, ou equivalentemente se, e só se,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n)$  é absolutamente converxente.  $\square$

Con isto, podemos finalmente introducir un exemplo explícito dunha función que é Kurzweil-Stieltjes integrable mentres que o seu valor absoluto non o é.

**Exemplo 4.8.** Consideremos o intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , as sucesións  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} := (1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  e a función  $f$  definida como

$$f(x) := \begin{cases} (-1)^{n-1} n, & \text{se } x = t_n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

É fácil comprobar que estamos nas hipóteses da Proposición 4.7 e que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f(t_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$ , mentres que a serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n f(t_n)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$  diverxe. Entón, para a función definida como  $g(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \chi_{[1-\frac{1}{n}, 1]}(x)$ , para  $x \in [0, 1]$ , tense que  $\int_a^b f \, d g$  existe e toma o valor  $\log 2$ , mentres que  $\int_a^b |f| \, d g$  non existe.

**Teorema 4.9.** Sexan  $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real tales que  $g$  é crecente, as integrais  $\int_a^b f \, d g$  e  $\int_a^b h \, d g$  existen e  $|f(x)| \leq h(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Entón,  $\int_a^b |f| \, d g$  existe.

*Demostración.* Sexa un subconxunto arbitrario  $[c, d] \subseteq [a, b]$  e  $\dot{\mathcal{P}}$  unha partición etiquetada de  $[c, d]$ , é fácil comprobar que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| \leq S(h, g, \dot{\mathcal{P}})$ . Pola Proposición 1.16, podemos asegurar que

$$\left| \int_c^d f \, d g \right| \leq \int_c^d h \, d g, \text{ para todo } [c, d] \subseteq [a, b].$$

Para rematar, se denotamos por  $F$  á integral indefinida de  $f$  respecto a  $g$  e sexa unha partición  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_m) \in \mathcal{P}([a, b])$  arbitraria, entón

$$V(F, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \, d g \right| \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} h \, d g = \int_a^b h \, d g.$$

É dicir,  $F \in BV([a, b])$  e o Teorema 4.6 asegúranos que a integral  $\int_a^b |f| \, d g$  existe.  $\square$

**Teorema 4.10.** Sexan  $f_1, f_2, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións de variable real tales que  $g$  é crecente e as integrais  $\int_a^b f_1 \, d g$ ,  $\int_a^b f_2 \, d g$ ,  $\int_a^b |f_1| \, d g$  e  $\int_a^b |f_2| \, d g$  existen. Entón as integrais  $\int_a^b \max\{f_1, f_2\} \, d g$  e  $\int_a^b \min\{f_1, f_2\} \, d g$  tamén existen.

*Demostración.* Pola desigualdade triangular  $|f_1 - f_2| \leq |f_1| + |f_2|$ , e o Teorema 4.9 asegúranos que a integral  $\int_a^b |f_1 - f_2| \, d g$  existe. En consecuencia, se temos en conta as fórmulas

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2} \text{ e } \min\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2},$$

a existencia de  $\int_a^b \max\{f_1, f_2\} \, d g$  e  $\int_a^b \min\{f_1, f_2\} \, d g$  séguese inmediatamente da linearidade da integral.  $\square$

## Capítulo 5

# Teoremas de converxencia

O obxectivo deste capítulo vai ser introducir resultados que nos garantan a existencia da integral cando as condicións do Teorema 2.19 non son suficientes. En particular, introduciremos algúns teoremas de converxencia análogos ós da integral de Lebesgue, por exemplo, o Teorema da Converxencia Monótona ou o Lema de Fatou. Non obstante, imos ver que estes resultados ofrecen unha gran dificultade á hora de ser probados, ó contrario que sucede na teoría de Lebesgue, pois esta conta co respaldo dunha poderosa teoría da medida. Por motivos de brevidade non incluiremos varias das demostracións, pero poderán consultarse en [14]. Comezaremos introducindo o concepto de *integrabilidade uniforme* ou *equiintegrabilidade* que xogará un papel fundamental neste capítulo.

**Definición 5.1.** Sexan  $f_n, g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dúas sucesións de funcións de variable real. Diremos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é *uniformemente integrable* respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se se satisfán as seguintes condicións:

1. A integral  $\int_a^b f_n \, d g_n$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un calibre  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que a desigualdade

$$\left| \int_a^b f_n \, d g_n - S(f_n, g_n, \dot{\mathcal{P}}) \right| < \varepsilon, \quad (5.1)$$

cúmprese para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Se a sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é constante igual a  $f$ , diremos que  $f$  é *uniformemente integrable* respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Do mesmo xeito, se a sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é constante igual a  $g$ , diremos que a sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é *uniformemente integrable* respecto a  $g$ .

A continuación imos introducir un teorema de converxencia básico para a integral de Kurzweil-Stieltjes. En xeral, a hipótese de converxencia uniforme non é sinxela de probar, pero iremos enunciando algunhas condicións baixo as cales se ten.

**Teorema 5.2** ([14, Teorema 6.8.2, p. 184]). *Sexan  $f_n, g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dúas sucesións de funcións de variable real. Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e existen dúas funcións  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

*entón, a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg_n$  existen e son iguais.*

*Ademais, se  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converxe uniformemente a  $g$  e  $g$  é limitada, tense que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, dg_n - \int_a^x f \, dg \right| \right) = 0.$$

**Lema 5.3.** *Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función a chanzos finita, entón toda sucesión de funcións  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  é uniformemente converxente respecto a  $g$ .*

*Demostración.* O Corolario 2.14 asegúranos que  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Por outro lado, se  $h$  é a función característica dun intervalo limitado da forma  $[c, b]$  con  $c \in (a, b)$  ou  $(c, b]$  con  $c \in [a, b)$ , na proba realizada no Lema 2.12, demostramos que existe un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que, para calquera función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , cúmprese

$$\left| S(f, h, \mathcal{P}) - \int_a^b f \, dh \right| = 0, \quad \text{para toda partición } \mathcal{P} \text{ } \delta\text{-fina.}$$

Como  $g$  é combinación lineal de funcións da forma  $h$  e de funcións constantes en  $[a, b]$  (cuxa integral é 0 para calquera  $f$ ), séguese que para o calibre anterior cúmprese a condición (5.1) e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$ .  $\square$

**Teorema 5.4.** *Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función regradada e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións de variación limitada que satisfai  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_a^b f_n < \infty$ . Se existe unha función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ , entón  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$ . É dicir, a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$  existen e son iguais. Ademais, satisfaise que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, dg - \int_a^x f \, dg \right| \right) = 0. \quad (5.2)$$

*Demostración.* Só imos probar que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$ , xa que entón estaremos nas hipóteses do Teorema 5.2 e cumprírase o que buscamos.

Por un lado, as sucesións  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  son limitadas para todo  $x \in [a, b]$ , grazas á existencia dos límites puntuais. Ademais,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_a^b f_n < \infty$ . Entón, podemos atopar certo  $M > 0$  tal que

$$|f_n(a)| + |f_n(b)| + \text{var}_a^b f_n \leq M, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Agora, fixado  $\varepsilon > 0$ , como  $g$  é regrada, existe unha función a chanzos finita  $s_\varepsilon: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\|g - s_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4M}$ . O Lema 5.3 asegúranos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $s_\varepsilon$ . Entón, podemos considerar  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre tal que

$$\left| \int_a^b f_n ds_\varepsilon - S(f, s_\varepsilon, \dot{\mathcal{P}}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.4)$$

para toda  $\dot{\mathcal{P}}$  partición etiquetada  $\delta$ -fina e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Utilizando as desigualdades (5.4) e (5.3) xunto co Teorema 2.16 temos que

$$\begin{aligned} \left| S(f_n, g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_n dg \right| &\leq |S(f_n, g - s_\varepsilon, \dot{\mathcal{P}})| + \left| S(f_n, s_\varepsilon, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_n ds_\varepsilon \right| + \left| \int_a^b f_n d(g - s_\varepsilon) \right| \\ &\leq 2(|f_n(a)| + |f_n(b)| + \text{var}_a^b f_n) \|g - s_\varepsilon\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En consecuencia,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$ , como queriamos ver.  $\square$

Atopar un resultado simétrico ó teorema que acabamos de enunciar, é dicir, intercambiando as hipóteses establecidas sobre  $f$  e  $g$ , non é tarefa sinxela. É máis, precisaremos unha condición a maiores sobre a sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que definiremos a continuación.

**Definición 5.5.** Sexa  $M \subset G([a, b])$  un conxunto de funcións reais regradas definidas sobre  $[a, b]$ . Diremos que  $M$  é *equiregrado* se cumpre as seguintes condicións:

- Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in (a, b]$ , existe  $\delta_1(x) \in (0, x - a)$  tal que

$$|f(x^-) - f(t)| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in (x - \delta_1(x), x) \text{ e } f \in M.$$

- Para todo  $\varepsilon > 0$  e  $x \in [a, b)$ , existe  $\delta_2(x) \in (0, b - x)$  tal que

$$|f(x^+) - f(t)| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in (x, x + \delta_2(x)) \text{ e } f \in M.$$

**Lema 5.6** ([14, Lema 6.8.7, p. 189]). Sexa  $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  unha sucesión de funcións de variación limitada equiregrada que satisfai  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_a^b g_n < \infty$ . Se  $f$  é regrada, entón  $f$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Teorema 5.7.** Sexa  $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións reais de variación limitada tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_a^b g_n < \infty$  e existe unha función  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converxe uniformemente a  $g$ . Ademais, sexa  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , outra sucesión de funcións reais tal que  $\int_a^b f_n dg_n$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$  e existe unha función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  regrada tal que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converxe uniformemente a  $f$ . Entón,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . É dicir, a integral  $\int_a^b f dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg$  existen e son iguais. Ademais, satisfaise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n dg_n - \int_a^x f dg \right| \right) = 0.$$

*Demostración.* Novamente, se probamos que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , estaremos nas hipóteses do Teorema 5.2 e cumprírase o que buscamos.

Fixemos  $\varepsilon > 0$ . Sexa  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}_a^b g_n$ . Como  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente converxente, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{4M}$ , para todo  $n \geq n_0$ . É máis, a existencia da integral  $\int_a^b f_n \, d g_n$ , para todo  $n \in \{1, \dots, n_0\}$ , asegúranos que podemos escoller un calibre  $\gamma: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que

$$\left| S(f_n, g_n, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_n \, d g_n \right| < \varepsilon, \quad (5.5)$$

para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\gamma$ -fina e para todo  $n \in \{1, \dots, n_0\}$ .

Como  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente converxente a  $g$ , pódese comprobar que entón é equiregrada, véxase [14, Teorema 4.3.6, p. 84]. Estamos en condicións do Lema 5.6, co cal  $f$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En consecuencia, existe un calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\left| S(f, g_n, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, d g_n \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Sexa  $\tilde{\delta} := \min\{\gamma, \delta\}$ . Se  $\dot{\mathcal{P}}$  é unha partición  $\tilde{\delta}$ -fina, (5.5) satisfaise para  $n \in \{1, \dots, n_0\}$ . En cambio, para  $n > n_0$ , se temos en conta o Teorema 2.15, tense que

$$\begin{aligned} \left| S(f_n, g_n, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_n \, d g_n \right| &\leq |S(f_n - f, g_n, \dot{\mathcal{P}})| + \left| S(f, g_n, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \, d g_n \right| + \left| \int_a^b (f - f_n) \, d g_n \right| \\ &< 2\|f_n - f\| \text{var}_a^b g_n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Noutras palabras,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Para completar o capítulo imos demostrar os principais teoremas de converxencia que non requiren hipóteses de integrabilidade uniforme. Para isto imos enunciar un teorema previo, do cal desprenderase o resto de resultados. Porén, a súa demostración non é sinxela e prescindiremos dela por mor de brevidade.

**Teorema 5.8** ([14, Teorema 6.8.10, p. 195]). *Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variación limitada e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións reais definidas sobre  $[a, b]$  que satisfán:*

1. A integral  $\int_a^b f_n \, d g$  existe, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .
3. Existen  $B, C \in \mathbb{R}$  tales que, para toda  $\mathcal{P} = (x_0, \dots, x_m)$  partición de  $[a, b]$  e  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ , satisfaise

$$B \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_k} \, d g \leq C.$$

Entón,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$ , a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$  existen e son iguais e tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, dg - \int_a^x f \, dg \right| \right) = 0.$$

**Teorema 5.9** (Teorema da Convergencia Dominada). *Sexa  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función real crecente e  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións reais definidas sobre  $[a, b]$  e cumprindo as seguintes condicións:*

1. A integral  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .
3. Existen funcións  $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que as integrais  $\int_a^b h_1 \, dg$  e  $\int_a^b h_2 \, dg$  existen e  $h_1 \leq f_n \leq h_2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Entón,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$  e a integral  $\int_a^b f \, dg$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$  existen e son iguais. Ademais, tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, dg - \int_a^x f \, dg \right| \right) = 0.$$

*Demostración.* Se definimos

$$B := \int_a^b h_1 \, dg \quad \text{e} \quad C := \int_a^b h_2 \, dg,$$

entón, para calquera partición  $\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_m\}$  de  $[a, b]$  e  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ , tense que

$$B = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} h_1 \, dg \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_k} \, dg \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} h_2 \, dg = C.$$

Como estamos nas hipóteses do Teorema 5.8, séguese o que queriamos probar. □

**Teorema 5.10** (Teorema da Convergencia Limitada). *Sexa  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variación limitada,  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións reais definidas en  $[a, b]$  satisfacendo as condicións seguintes:*

1. A integral  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .
3. Existe unha constante  $M \geq 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ .

Entón, a sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$  e a integral  $\int_a^b f \, d g$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g$  existen e son iguais. Ademais, tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, d g - \int_a^x f \, d g \right| \right) = 0.$$

*Demostración.* Sexa  $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_m\}$  unha partición de  $[a, b]$  e  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ , entón:

$$\left| \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_k} \, d g \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_k} \, d g \right| \leq \sum_{k=1}^m M \operatorname{var}_{x_{k-1}}^{x_k} g = M \operatorname{var}_a^b g,$$

onde na segunda desigualdade utilizamos o Teorema 2.15. Considerando  $B := -M \operatorname{var}_a^b g$  e  $C := M \operatorname{var}_a^b g$ , estamos nas hipóteses do Teorema 5.8 e séguese o que queremos probar.  $\square$

**Teorema 5.11** (Teorema da Converxencia Monótona). Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  unha sucesión de funcións tales que a integral  $\int_a^b f_n \, d g$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en  $[a, b]$ . Se ademais se cumpre algunha das seguintes condicións:

1.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión crecente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g < \infty$ .
2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión decrecente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g > -\infty$ .

Entón,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente integrable respecto a  $g$  e a integral  $\int_a^b f \, d g$  e o límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g$  existen e son iguais. Ademais, tense que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f_n \, d g - \int_a^x f \, d g \right| \right) = 0.$$

*Demostración.* Imos supoñer que se satisfai a primeira condición. Definamos

$$B := \int_a^b f_1 \, d g \quad \text{e} \quad C := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g.$$

Sexa  $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_m\}$  unha partición de  $[a, b]$  e  $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{N}$ , e imos supoñer sen perda de xeneralidade que  $s_1 \leq \dots \leq s_m$ , entón

$$B = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_1 \, d g \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_k} \, d g \leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{s_m} \, d g \leq C.$$

De novo estamos nas condicións do Teorema 5.8 e temos o que queremos probar. No caso de que se cumpra a segunda condición, basta aplicar a primeira á sucesión  $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

**Teorema 5.12.** *Sexa  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  unha sucesión de funcións reais non negativas,  $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  e  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente. Se a integral  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$  e a suma  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \, dg$  é finita, entón a sucesión  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dada por  $s_k := \sum_{n=1}^k f_n$  é uniformemente integrable respecto a  $g$  e a integral  $\int_a^b f \, dg$  existe e é igual a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \, dg$ . Ademais, tense que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x s_n \, dg - \int_a^x f \, dg \right| \right) = 0.$$

*Demostración.* A sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é non decrecente, a integral  $\int_a^b s_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ . Ademais,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n \, dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \sum_{n=1}^k f_n \right) \, dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_a^b f_n \, dg = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \, dg < \infty.$$

Entón, estamos nas hipóteses do Teorema 5.11 e séguese o resultado.  $\square$

*Observación 5.13.* Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente,  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións non negativas e  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Se ademais,  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\int_a^b f \, dg$  tamén existe, temos que

$$\sum_{n=1}^k \int_a^b f_n \, dg = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^k f_n \right) \, dg \leq \int_a^b f \, dg, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \, dg$  é finita e é igual a  $\int_a^b f \, dg$  polo teorema anterior. É dicir,  $\int_a^b \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \, dg$  existe se, e só se,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n \, dg$  é finita. Ademais, ambas expresións teñen o mesmo valor.

**Lema 5.14.** *Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función de variable real crecente e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións non negativas tales que a integral  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entón,  $\int_a^b (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n) \, dg$  existe tamén.*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sexa  $h_n = \min\{f_1, \dots, f_n\}$ , o Teorema 4.10 asegúranos que  $\int_a^b h_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A sucesión  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é non negativa e converxe puntualmente a  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Entón, o Teorema da Converxencia Monótona asegúranos que a integral  $\int_a^b (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n) \, dg$  existe.  $\square$

**Lema 5.15** (Lema de Fatou). *Sexa  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente e  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións tales que a integral  $\int_a^b f_n \, dg$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entón téñense os seguintes resultados:*

1. *Se existe unha función  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a integral  $\int_a^b \varphi \, dg$  existe e  $f_n \geq \varphi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, ademais,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < \infty$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg < \infty$ , entón  $\int_a^b (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, dg$  existe e tense que*

$$\int_a^b (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, dg \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dg$$

2. Se existe unha función  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a integral  $\int_a^b \psi \, d g$  existe e  $f_n \leq \psi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, ademais,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > -\infty$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g > -\infty$ , entón  $\int_a^b (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d g$  existe e tense que

$$\int_a^b (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d g \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g.$$

*Demostración.* Imos probar a primeira afirmación. Para iso supoñeremos sen perda de xeneralidade que  $\varphi = 0$ , noutro caso basta considerar a sucesión  $(f_n - \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sexa  $h_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . A sucesión  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de funcións non negativas, é crecente e converxe puntualmente a  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Polo Lema 5.14, a integral  $\int_a^b h_n \, d g$  existe para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ademais, temos que

$$\int_a^b h_n \, d g \leq \int_a^b f_n \, d g.$$

Como  $g$  unha función crecente e  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente, a Observación 1.17 asegúranos que a sucesión  $(\int_a^b h_n \, d g)_{n \in \mathbb{N}}$  tamén é crecente. Entón, podemos asegurar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \, d g = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \, d g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g < \infty.$$

O Teorema da Converxencia Monótona implica a existencia da integral  $\int_a^b (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d g$  e temos que

$$\int_a^b (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d g = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} h_n) \, d g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \, d g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d g,$$

como queríamos probar.

A segunda afirmación do lema próbese aplicando a primeira á sucesión  $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

## Capítulo 6

# A relación con outras integrais de tipo Stieltjes

Para rematar o traballo, imos dedicar un capítulo á relación entre a integral de Kurzweil-Stieltjes e as integrais de Riemann e Lebesgue-Stieltjes. Aquí é onde imos en poñer en valor todo o visto ata agora para poder establecer que esta integral é completamente xeral e reúne todas as boas propiedades de ámbalas dúas integrais. Para isto imos introducir a definición destas integrais que, no caso de Lebesgue-Stieltjes, non é tarefa sinxela, pois requírese moito coñecemento previo de teoría da medida. Neste capítulo baseámonos en [3, 6, 15, 14, 16].

### 6.1. A relación entre a integral de Riemann-Stieltjes e a de Kurzweil-Stieltjes

Á hora de definir a integral de Riemann-Stieltjes podemos tentar cegamente xeneralizar a definición de Riemann baseada na norma das particións. No entanto, esta non é unha definición óptima pois veremos que posúe algúns problemas fundamentais. É por isto que xorden dúas definicións distintas da integral de Riemann-Stieltjes.

**Definición 6.1.** Sexan  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real.

1. Diremos que a  $(\delta)$ -integral de Riemann-Stieltjes de  $f$  respecto a  $g$  existe e é igual a  $I \in \mathbb{R}$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon$ , para toda partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}}$  de  $[a, b]$  tal que  $|\dot{\mathcal{P}}| < \delta_\varepsilon$ . Denotaremos  $(\delta) \int_a^b f \, dg := I$ .
2. Diremos que a  $(\sigma)$ -integral de Riemann-Stieltjes de  $f$  respecto a  $g$  existe e é igual a  $I \in \mathbb{R}$  se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe unha partición  $\mathcal{P}_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$  tal que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| < \varepsilon$ , para toda

partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \mathbf{t})$  de  $[a, b]$  tal que  $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_\varepsilon$ . Denotaremos  $(\sigma) \int_a^b f \, d g := I$ .

**Proposición 6.2.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Se a integral  $(\delta) \int_a^b f \, d g$  existe, entón a integral  $(\sigma) \int_a^b f \, d g$  tamén existe e son iguais.

*Demostración.* Sexan  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{P}([a, b])$  dúas particións de  $[a, b]$ . Se  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ , entón  $|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{P}|$ .  $\square$

*Observación 6.3.* Como comentabamos, ambas definicións son diferentes e o recíproco á proposición anterior non é certa en xeral. Consideremos as seguintes funcións:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [-1, 0], \\ 1, & \text{se } x \in (0, 1], \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1, 0), \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Se fixamos a partición  $\mathcal{P}_0 = \{-1, 0, 1\}$  de  $[-1, 1]$  e consideramos unha partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \mathbf{t})$  tal que  $\mathcal{P}$  é máis fina que  $\mathcal{P}_0$ . Entón, entón non é difícil ver que

$$S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = f(t_k)(g(0) - g(x_{k-1})) + f(t_k)(g(x_k) - g(0)) = 0,$$

onde  $k$  é o índice tal que  $x_k = 0$ . É dicir,  $(\sigma) \int_{-1}^1 f \, d g = 0$ .

En cambio, para calquera  $\delta > 0$ , existe unha partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \mathbf{t})$  con norma máis pequena que  $\delta$  de xeito que  $0 \notin \mathcal{P}$ . En consecuencia, existe un  $k$  tal que  $x_{k-1} < 0 < x_k$  e tense que

$$S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = f(t_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = -f(t_k) = \begin{cases} 0, & \text{se } t_k \leq 0, \\ -1, & \text{se } t_k > 0. \end{cases}$$

É dicir, a integral  $(\delta) \int_{-1}^1 f \, d g$  non existe.

É máis, pódese comprobar sen dificultade que as integrais  $(\delta) \int_{-1}^0 f \, d g$  e  $(\delta) \int_0^1 f \, d g$ , en cambio, si que existen. É dicir, para esta definición de Riemann-Stieltjes, a aditividade respecto ós intervalos non «funciona» correctamente.

**Teorema 6.4.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Se a integral de Riemann-Stieltjes  $(\delta) \int_a^b f \, d g$  existe, entón a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, d g$  tamén existe e son iguais.

*Demostración.* Denotemos  $I := (\delta) \int_a^b f \, d g$ . Fixado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon$  para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$  tal que  $|\dot{\mathcal{P}}| < \delta$ . Imos definir o calibre  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  como  $\delta(x) := \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Entón, para todo  $x \in [a, b]$  tense que  $\ell((x - \delta(x), x + \delta(x))) = \delta_\varepsilon$ , co cal toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina cumpre  $|\dot{\mathcal{P}}| < \delta$ .  $\square$

**Teorema 6.5.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real. Se a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, d g$  existe e, ademais, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe un calibre  $\delta_n: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}})| < \frac{1}{n}$ , para toda  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_n$ -fina, e cumpre  $\inf\{\delta(x) : x \in [a, b]\} > 0$ , entón a integral de Riemann-Stieltjes  $(\delta) \int_a^b f \, d g$  existe é igual a  $\int_a^b f \, d g$ .

*Demostración.* Denotemos  $I := \int_a^b f \, dg$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  escollemos un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Sexa o calibre  $\delta_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cumprindo  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \frac{1}{n}$ , para toda partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta_n$ -fina, e  $\delta := \inf\{\delta_n(x) : x \in [a, b]\} > 0$ . Entón, se  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  é unha partición con norma  $|\dot{\mathcal{P}}| < \delta$ , tense que  $\max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{|x_k - x_{k-1}|\} < \delta$ .

Por outro lado, para a etiqueta  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  cúmprese que  $\ell((t_k - \delta_n(t_k), t_k + \delta_n(t_k))) = 2\delta_n(t_k) \geq 2\delta$ . Como  $\ell([x_{k-1}, x_k]) < \delta$ , necesariamente  $[x_{k-1}, x_k] \subset (t_k - \delta_n(t_k), t_k + \delta_n(t_k))$ . É dicir,  $\dot{\mathcal{P}}$  é  $\delta$ -fina e  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .  $\square$

*Observación 6.6.* Nas condicións do teorema anterior, a Proposición 6.2 asegúranos que a integral de Riemann-Stieltjes  $(\sigma) \int_a^b f \, dg$  tamén existe e é igual a  $\int_a^b f \, dg$ .

**Teorema 6.7.** Sexan  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dúas funcións de variable real tales que a integral de Riemann-Stieltjes  $(\sigma) \int_a^b f \, dg$  existe. Entón, a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, dg$  tamén existe e son iguais.

*Demostración.* Denotemos  $I := (\sigma) \int_a^b f \, dg$ . Fixado  $\varepsilon > 0$ , existe unha partición  $\mathcal{P}_\varepsilon = (a_0, \dots, a_k) \in \mathcal{P}([a, b])$  tal que, para toda partición etiquetada  $\dot{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \mathbf{t})$  cumprindo  $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_\varepsilon$ , tense que  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| < \varepsilon$ . Polo Lema 1.8, podemos considerar un calibre  $\delta_\varepsilon: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  tal que, para toda partición  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$   $\delta$ -fina, cúmprese  $\{a_0, \dots, a_k\} \subset \{t_1, \dots, t_m\}$ . Ademais, fixada unha partición  $\dot{\mathcal{P}}$   $\delta$ -fina, existe outra  $\dot{\mathcal{Q}} = ((y_0, \dots, y_n), (r_1, \dots, r_n))$  tal que  $\{a_0, \dots, a_k\} \subset \{r_1, \dots, r_n\} \cap \{y_0, \dots, y_n\}$  e  $S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, g, \dot{\mathcal{Q}})$ . Pero entón,  $|S(f, g, \dot{\mathcal{P}}) - I| = |S(f, g, \dot{\mathcal{Q}}) - I| < \varepsilon$ .  $\square$

No caso particular en que  $g = \text{id}_{[a, b]}$ , é ben coñecido que as dúas definicións da integral  $(\delta)$  e  $(\sigma)$  son equivalentes, véxase por exemplo [5, Capítulo 7]. É dicir, baixo as condicións do Teorema 6.5, podemos establecer unha condición necesaria e suficiente para que unha función Riemann integrable sexa Kurzweil-Henstock integrable. Porén, se estas non se cumpren, podemos atopar funcións Kurzweil-Henstock integrables que non son Riemann integrables, como xa vimos no primeiro capítulo, consecuencia da Proposición 1.23.

## 6.2. A integral de Lebesgue-Stieltjes

Nesta sección imos introducir o concepto de integral de Lebesgue-Stieltjes. Para isto supoñemos que o lector posúe uns coñecementos básicos sobre teoría da medida e o concepto de integral de Lebesgue respecto a unha medida. De todos modos, no Anexo A realizamos unha introdución básica e completa a estes conceptos.

**Definición 6.8.** Sexa  $X \subset \mathbb{R}$  un conxunto de números reais e  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida. Diremos que a medida  $\mu$  é unha *medida de Lebesgue-Stieltjes* se cumpre as seguintes propiedades:

1.  $\mathcal{B}(\tau_U|_X) \subset \mathcal{A}$ , onde  $\mathcal{B}(\tau_U|_X)$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel xerada pola topoloxía usual de  $\mathbb{R}$  restrinxida a  $X$ .
2. Para todo conxunto medible limitado  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) < \infty$ .

Diremos que a integral respecto a unha medida  $\mu$  de Lebesgue-Stieltjes é unha *integral de Lebesgue-Stieltjes*.

Agora ben, vamos interesarnos en considerar a integral de Lebesgue-Stieltjes respecto a unha función dada, que chamaremos *integrador*. Para isto, imos ver que podemos definir unha medida de Lebesgue-Stieltjes mediante un integrador e viceversa. Para realizar isto, precisamos introducir o concepto de medida exterior e un teorema de grande importancia que nos permitirá construír medidas.

**Definición 6.9.** Sexa  $X$  un conxunto. Diremos que unha aplicación  $\mu^*: X \rightarrow [0, \infty]$  é unha *medida exterior* se cumpre as seguintes propiedades:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
2. Se  $A \subset B$ , entón  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .
3. Para toda familia numerable de conxuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  tense que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

**Definición 6.10.** Sexa  $X$  un conxunto. Diremos que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$  é unha *semiálgebra* se cumpre as seguintes propiedades:

1.  $A \cap B \in \mathcal{C}$ , para todo  $A, B \in \mathcal{C}$ .
2. Para cada  $A \in \mathcal{C}$  existen finitos conxuntos disxuntos dous a dous  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{C}$  tales que

$$X \setminus A = \bigcup_{k=1}^m B_k.$$

Ademais, diremos que unha aplicación  $\mu: \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$  é unha *medida sobre unha semiálgebra* se cumpre as seguintes propiedades:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Para toda familia numerable de conxuntos disxuntos dous a dous  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$  tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ , entón:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

**Teorema 6.11** ([2, Teoremas 1.3.2 e 1.3.3, p. 24] Teorema de Extensión de Carathéodory). *Sexa  $X$  un conxunto,  $\mathcal{C}$  unha semiálgebra sobre  $X$  e  $\mu$  unha medida sobre  $\mathcal{C}$ . A aplicación  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  definida como*

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}, \quad A \in \mathcal{P}(X),$$

*cumpre as seguintes propiedades:*

1.  $\mu^*$  é unha medida exterior.

2. O conxunto

$$\mathcal{M}_{\mu^*} := \{A : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)), \text{ para todo } E \in X\}$$

*é unha  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$ . Ademais,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$ .*

3.  $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$  é unha medida en  $\mathcal{M}_{\mu^*}$ .

4.  $\mu^*|_{\mathcal{C}} = \mu$ .

En consecuencia, se damos unha medida  $\mu$  sobre unha semiálgebra  $\mathcal{C}$  dun conxunto  $X$ , podemos obter un espazo de medida  $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$  de xeito que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$  e  $\mu^*|_{\mathcal{C}} = \mu$ . Por isto,  $\mu^*$  chámase unha *extensión* de  $\mu$ . Ademais, é inmediato comprobar que  $\mathcal{M}_{\mu^*}$  contén á  $\sigma$ -álgebra xerada por  $\mathcal{C}$ . Imos utilizar este resultado para construír medidas de Lebesgue-Stieltjes a partir dunha función dada.

Sexa  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente. Consideraremos o conxunto

$$\mathcal{C}_g := \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\} \cup \{\emptyset\},$$

e a aplicación  $\mu_g : \mathcal{C} \rightarrow [-\infty, \infty]$  definida como

$$\begin{aligned} \mu_g((a, b]) &= g(b^+) - g(a^+), \\ \mu_g((a, \infty)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) - g(a^+). \end{aligned}$$

Pódese comprobar que  $\mathcal{C}_g$  é unha semiálgebra e  $\mu_g$  é unha medida en  $\mathcal{C}_g$ , véxase por exemplo [2, Sección 1.3.2].

Sexa  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_g}, \mu_g^*)$  a extensión de Carathéodory de  $\mu_g$ . A  $\sigma$ -álgebra xerada por  $\mathcal{C}_g$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel usual de  $\mathbb{R}$ . Ademais, se  $A \in \mathcal{M}_{\mu_g^*}$  é un conxunto medible limitado, existe un  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $A \subset (-M, M]$ , co cal,  $\mu_g^*(A) \leq \mu_g^*((-M, M]) = g(M^+) - g(-M^+) < \infty$ . É dicir,  $\mu_g^*$  cumpre as dúas condicións da Definición 6.8 e é unha medida de Lebesgue-Stieltjes.

Reciprocamente, sexa  $\mu$  unha medida de Lebesgue-Stieltjes e

$$g(x) := \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Pódese comprobar que a función  $g$  definida de esta maneira satisfai  $\mu_g = \mu$  en  $\mathcal{C}$ . Isto implica que  $\mu_g^* = \mu$  en  $\mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}})$ , véxase, por exemplo, [2, Sección 1.3.2]. É dicir, toda medida de Lebesgue-Stieltjes pódese obter como unha medida respecto a unha función integradora, co cal ambos conceptos son equivalentes.

**Proposición 6.12** ([20, Proposición 22.7, p. 528]). *Sexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función real crecente,  $\mu_g$  a súa medida de Lebesgue-Stieltjes asociada e  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Entón,*

$$\begin{aligned} \mu_g([a, b]) &= g(b^+) - g(a^-), \\ \mu_g((a, b]) &= g(b^+) - g(a^+), \\ \mu_g([a, b)) &= g(b^-) - g(a^-), \\ \mu_g((a, b)) &= g(b^-) - g(a^+), \\ \mu_g(\{a\}) &= g(a^+) - g(a^-). \end{aligned}$$

En virtude da proposición anterior, cando consideramos a función integradora  $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ , diremos que  $\mu_g$  é a *medida de Lebesgue usual* que denotaremos por  $\mu_{\text{id}}$ . Entón,  $\mu_{\text{id}}(I) = \ell(I)$ , para calquera intervalo limitado real  $I \subset \mathbb{R}$ .

Para rematar imos establecer unha propiedade de regularidade que cumpre a medida de Lebesgue-Stieltjes e que será de utilidade na demostración de teorema posteriores.

**Teorema 6.13** ([20, Teorema 22.11, p. 530]). *Sexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente de variable real e  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_g}, \mu_g)$  o seu espazo de medida de Lebesgue-Stieltjes asociado. Entón, un conxunto  $E$  é medible se, e só se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conxunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}$  tal que  $E \subset U$  e  $\mu_g(U \setminus E) < \varepsilon$ .*

### 6.3. Relación entre a integral de Lebesgue-Stieltjes e a de Kurzweil-Stieltjes

Finalmente, veremos que a integrabilidade de Lebesgue-Stieltjes implica a de Kurzweil-Stieltjes. Para isto, faremos uso dos lema seguinte.

**Lema 6.14.** *Sexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente,  $\mu_g$  a súa medida de Lebesgue-Stieltjes asociada e*

$E \subset [a, b]$  un conxunto  $\mu_g$ -medible. Entón, a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b \chi_E dg$  existe e cumpre:

$$\int_a^b \chi_E dg = \int_{(a,b)} \chi_E d\mu_g + \chi_E(a)(g(a^+) - g(a)) + \chi_E(b)(g(b) - g(b^-)).$$

*Demostración.* Sexa  $\tilde{E} := E \cap (a, b)$  e observemos que

$$\int_{(a,b)} \chi_E d\mu_g = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\tilde{E}} d\mu_g = \mu_g(\tilde{E}).$$

Por outro lado, os conxuntos  $E \cap \{a\}$  e  $E \cap \{b\}$  son ou ben o conxunto vacío ou un único punto, co cal as relacións (2.12) e (2.13) asegúranos que

$$\int_a^b \chi_{E \cap \{a\}} = \chi_E(a)(g(a^+) - g(a)) \quad \text{e} \quad \int_a^b \chi_{E \cap \{b\}} = \chi_E(b)(g(b) - g(b^-)).$$

Entón, para completar a proba debemos ver que  $\int_a^b \chi_{\tilde{E}} dg = \mu_g(\tilde{E})$ .

Sexa  $H := (a, b) \setminus \tilde{E}$  e fixemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $H$  e  $\tilde{E}$  son subconxuntos de  $(a, b)$ , ambos teñen medida finita e, aplicando o Teorema 6.13, existen  $U_1$  e  $U_2$  dous conxuntos abertos de  $\mathbb{R}$  tales que

$$\tilde{E} \subset U_1 \quad \text{e} \quad \mu_g(U_1) < \mu_g(\tilde{E}) + \varepsilon, \quad H \subset U_2 \quad \text{e} \quad \mu_g(U_2) < \mu_g(H) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, sexa  $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  un calibre cumprindo as seguintes propiedades:

1.  $\delta(x) < d(x, \mathbb{R} \setminus U_1)$  para todo  $x \in \tilde{E}$  e  $\delta(x) < d(x, \mathbb{R} \setminus U_2)$ , para todo  $x \in H$ .
2.  $\delta(x) < x - a$ , para todo  $x \in (a, b]$ , e  $\delta(x) < b - x$ , para todo  $x \in [a, b)$ .
3. Se  $x \in (a, a + \delta(a))$ , entón  $g(x) - g(a^+) < \frac{\varepsilon}{4}$ , e se  $x \in (b - \delta(b), b)$ , entón  $g(b^-) - g(x) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Sexa  $\dot{\mathcal{P}} = ((x_0, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m))$  unha partición  $\delta$ -fina. A primeira propiedade da definición de  $\delta$  asegúranos que se  $t_k \in \tilde{E}$ , entón  $[x_{k-1}, x_k] \subset U_1$ , e se  $t_k \in H$ , entón  $[x_{k-1}, x_k] \subset U_2$ . A segunda propiedade garántenos que  $t_1 = a$  e  $t_m = b$ .

Por outro lado, podemos escribir

$$\bigcup_{t_k \in \tilde{E}} [x_{k-1}, x_k] = \bigcup_{k \in K} [y_{k-1}, y_k],$$

onde o lado dereito da igualdade é a unión finita de intervalos disxuntos contidos en  $U_1$  (nótese que os intervalos no lado esquerdo en xeral non son disxuntos, pero ó sumo intersécanse nun punto).

Ademais, por ser  $g$  crecente,  $g(x) \leq g(x^+)$ , para todo  $x \in [a, b)$ , e  $g(x) \geq g(x^-)$ , para todo  $x \in (a, b]$ . En consecuencia, tense que

$$\begin{aligned} S(\chi_{\tilde{E}}, g, \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{t_k \in \tilde{E}} (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{k \in K} (g(y_k) - g(y_{k-1})) \\ &\leq \sum_{k \in K} (g(y_k^+) - g(y_{k-1}^-)) = \sum_{k \in K} \mu_g([y_{k-1}, y_k]) \leq \mu_g(U_1) < \mu_g(\tilde{E}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Para obter unha cota inferior de  $S(\chi_{\tilde{E}}, g, \dot{\mathcal{P}})$  imos escribir

$$\bigcup_{t_k \in H} [x_{k-1}, x_k] = \bigcup_{k \in J} [z_{k-1}, z_k],$$

onde o lado dereito da igualdade é a unión finita de intervalos disxuntos contidos en  $U_2$ . Observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \sum_{k=1}^m (g(x_k) - g(x_{k-1})) = \sum_{t_k \in \tilde{E}} (g(x_k) - g(x_{k-1})) + \sum_{t_k \in [a, b] \setminus \tilde{E}} (g(x_k) - g(x_{k-1})) \\ &= S(\chi_{\tilde{E}}, g, \dot{\mathcal{P}}) + \sum_{t_k \in [a, b] \setminus \tilde{E}} (g(x_k) - g(x_{k-1})). \end{aligned}$$

En consecuencia, se lembramos que  $t_1 = a \notin \tilde{E}$  e  $t_m = b \notin \tilde{E}$ , e temos en conta como definimos o calibre  $\delta$ , podemos ver que

$$\begin{aligned} S(\chi_{\tilde{E}}, g, \dot{\mathcal{P}}) &= g(b) - g(a) - \sum_{t_k \in [a, b] \setminus \tilde{E}} (g(x_k) - g(x_{k-1})) \\ &= g(b) - g(a) - \left( g(x_1) - g(x_0) + \sum_{t_k \in H} (g(x_k) - g(x_{k-1})) + g(x_m) - g(x_{m-1}) \right) \\ &= g(x_{m-1}) - g(x_1) - \sum_{t_k \in H} (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(x_{m-1}) - g(x_1) - \sum_{k \in J} (g(z_k) - g(z_{k-1})) \\ &> g(b^-) - \frac{\varepsilon}{4} - g(a^+) - \frac{\varepsilon}{4} - \sum_{k \in J} (g(z_k^+) - g(z_{k-1}^-)) \geq \mu_g((a, b)) - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k \in J} \mu_g([z_{k-1}, z_k]) \\ &\geq \mu_g((a, b)) - \frac{\varepsilon}{2} - \mu_g(U_2) \geq \mu_g((a, b)) - \mu_g(H) - \varepsilon = \mu_g(\tilde{E}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

É dicir, acabamos de probar que

$$|S(\chi_{\tilde{E}}, g, \dot{\mathcal{P}}) - \mu_g(\tilde{E})| < \varepsilon,$$

para toda  $\dot{\mathcal{P}}$  partición  $\delta$ -fina. Como  $\varepsilon > 0$  foi arbitrario, chegamos a que  $\int_a^b \chi_{\tilde{E}} d g = \mu_g(\tilde{E})$ , como queriamos demostrar.  $\square$

**Corolario 6.15.** *Sexa  $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función simple  $\mu_g$ -medible, entón a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b s d g$  existe e tense que*

$$\int_a^b s d g = \int_{(a, b)} s d \mu_g + s(a)(g(a^+) - g(a)) + s(b)(g(b) - g(b^-)). \quad (6.1)$$

Xa estamos en condicións de probar o teorema principal deste capítulo. Imos basearnos no Teorema da Convergencia Monótona tanto da integral de Kurzweil-Stieltjes como da integral de Lebesgue-Stieltjes. Para isto, enunciaremos este último.

**Teorema 6.16** ([16, Teorema 1.26, p 21] Teorema da Convergencia Monótona). *Sexa  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida,  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unha sucesión de funcións medibles e supoñamos que*

1.  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$ , para todo  $x \in X$ .
2.  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , para todo  $x \in X$ .

Entón,  $f$  é medible e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

**Teorema 6.17.** *Sexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe a integral de Lebesgue-Stieltjes  $\int_{(a,b)} f \, d\mu_g$ , entón a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, dg$  tamén existe e téñense as relacións:*

$$\int_a^b f \, dg = \int_{(a,b)} f \, d\mu_g + f(a)(g(a^+) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(b^-)), \quad (6.2)$$

$$\int_{(a,b)} f \, d\mu_g = \lim_{\substack{c \rightarrow a^+, \\ d \rightarrow b^-}} \int_c^d f \, dg. \quad (6.3)$$

Ademais, se  $g(a^+) = g(a)$  e  $g(b^+) = g(b)$ , entón

$$\int_a^b f \, dg = \int_{(a,b]} f \, d\mu_g, \quad (6.4)$$

mentres que se  $g(a^-) = g(a)$  e  $g(b^-) = g(b)$ , entón

$$\int_a^b f \, dg = \int_{[a,b)} f \, d\mu_g. \quad (6.5)$$

*Demostración.* Como a integral de Lebesgue-Stieltjes existe,  $f$  (que a consideramos definida como cero para os puntos de  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ ) é medible. As funcións  $f^+$  e  $f^-$  son non negativas e medibles. En consecuencia, existen dúas sucesións crecentes de funcións simples, non negativas e medibles con límites  $f^+$  e  $f^-$ , respectivamente. O Corolario 6.15 asegúranos que as integrais de Lebesgue-Stieltjes e Kurzweil-Stieltjes de cada elemento das sucesións existen e satisfán a relación (6.1). Aplicando o Teorema da Convergencia Monótona ós dous tipos de integrais (Teoremas 5.11 e 6.16), obtemos as seguintes relacións:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^+ \, dg &= \int_{(a,b)} f^+ \, d\mu_g + f^+(a)(g(a^+) - g(a)) + f^+(b)(g(b) - g(b^-)), \\ \int_a^b f^- \, dg &= \int_{(a,b)} f^- \, d\mu_g + f^-(a)(g(a^+) - g(a)) + f^-(b)(g(b) - g(b^-)). \end{aligned}$$

Basta sumar ambas igualdades para obter (6.2). Pola outra banda, (6.3) séguese do Corolario 3.4.

Por último, se  $g(b^+) = g(b)$ , temos que

$$f(b)(g(b) - g(b^-)) = f(b)(g(b^+) - g(b^-)) = f(b)\mu_g(\{b\}) = \int_{\{b\}} f \, d\mu_g.$$

Se ademais disto, supoñemos que  $g(a^+) = g(a)$ , entón (6.4) séguese inmediatamente. Ademais, a proba de (6.5) é completamente análoga.  $\square$

Para rematar o traballo, veremos un resultado que establece unha condición suficiente para que unha función Kurzweil-Stieltjes integrable sexa Lebesgue-Stieltjes integrable. Por brevidade, tan só o imos enunciar.

**Teorema 6.18** ([14, Teorema 6.12.7, p. 230]). *Sexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unha función crecente,  $\mu_g$  a súa medida de Lebesgue-Stieltjes asociada e  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  unha función non negativa tal que a integral de Kurzweil-Stieltjes  $\int_a^b f \, dg$  existe. Entón, a integral de Lebesgue-Stieltjes  $\int_{(a,b)} f \, d\mu_g$  tamén existe, é finita e cúmprese a relación (6.2).*

## Capítulo 7

# Conclusións

Como puidemos comprobar ó longo do traballo, o concepto de calibre foi o cimento sobre o cal construimos a integral de Kurzweil-Stieltjes. Por isto, o Capítulo 1 resultou substancial para coñecelos a fondo e comprender a súa utilización. En primeiro lugar, foron fundamentais o Lema de Cousin (Lema 1.5), para que a nosa definición non estivese carente de sentido, e o Exemplo 1.11, para comprender a fondo as diferenzas respecto á de Riemann. Tamén cómpre destacar o papel que xogou o Lema 1.8 durante a proba dun elevado número de resultados ó longo de todo o traballo. Neste capítulo introducimos as propiedades máis básicas que esperaríamos de calquera teoría de integración e fixemos unha incursión na potencia da integral de Kurzweil-Henstock, demostrando que calquera función diferenciable é integrable (Teorema 1.20) e vendo que, ó igual que sucede na integral de Lebesgue, os conxuntos de medida nula non xogan ningún papel no valor da integral (Proposición 1.23).

A continuación, no Capítulo 2, co obxectivo de estudar algún dos conxuntos de funcións integrables máis sinxelos, presentamos dous conceptos básicos do análise nunha variable real, pero que non se adoitan impartir no Grao de Matemáticas: as funcións de variación limitada e as funcións regradas. Con isto, puidemos establecer diversas condicións suficientes de existencia e, como consecuencia do Teorema 1.8, estudamos a integrabilidade de dúas clases de funcións importantísimas: as continuas e as monótonas. O Capítulo 3 despexounos o camiño de cara ós teoremas máis avanzados do traballo, pois o Lema de Saks-Henstock (Lema 3.1) resultou crucial en adiante. Tamén serviunos para comprender a fondo a integral indefinida de Kurzweil-Stieltjes, para estudar o seu comportamento respecto ós límites laterais e para ver que, baixo certas hipóteses, era unha función regrada. Outro importante resultado desprendido neste capítulo foi o Teorema de Hake (Teorema 3.6), grazas ó cal podemos observar que, sobre un intervalo pechado e limitado, as funcións integrables en sentido impropio de Riemann son Kurzweil-Stieltjes integrables. Con isto en mente, no seguinte capítulo recopilamos algunhas interesantes consecuencias do visto ata ese momento. Por un lado, enuncia-

mos o Teorema de Substitución (Teorema 4.1), de grande interese na práctica e, pola outra parte, vimos que existen funcións condicionalmente converxentes, tendo así un carácter máis completo que a integral de Lebesgue. Por último, chegamos ós resultados máis importantes do traballo e nos que queriamos facer fincapé. No Capítulo 5 amosamos o amplo abanico de teoremas de converxencia que presenta e comparte a integral de Kurzweil-Stieltjes coa de Lebesgue-Stieltjes, dende o Teorema da Converxencia Dominada (Teorema 5.9) ata o Lema de Fatou (Lema 5.15). Finalmente, adicamos o último capítulo a demostrar o que levabamos todo o traballo adiantando: que toda función Riemann e Lebesgue-Stieltjes integrable é Kurzweil-Stieltjes integrable. Ademais, establecemos un par de hipóteses nas que se tiña o resultado recíproco.

Así a todo, durante a realización do traballo tivemos que ter sempre en conta os diferentes tipos de teorías de integración sen a súa xeneralización de Stieltjes, pois permitíronnos comprender e visualizar as súas diferentes definicións dun xeito máis sinxelo e completo. Para isto puidemos consultar diversas monografías completas e de calidade como [3, 4, 13, 18, 19]. Porén, á hora de introducir a definición de Stieltjes non é sinxelo atopar libros completamente adicados a elas, pese a ser unha ferramenta indispensable para diversas ramas das matemáticas como a estatística. No caso da integral de Kurzweil-Stieltjes, actualmente só podemos achar [14], pois a súa teoría é moi moderna e foi desenvolvida fai escasos anos. Aínda así, atopar un desenvolvemento profundo e formal sobre a integral de Lebesgue-Stieltjes non foi doado, de feito, quizais a mellor referencia coa que nos fixemos foi a tese dun antigo estudante desta universidade ([15]). Tamén utilizamos [2, 12] e incluso recorremos ás obras orixinais de Stieltjes ([17]). Por último, cómpre mencionar as referencias que tratan diversos conceptos clásicos do análise e da teoría da medida que utilizamos ó longo do traballo, estes son [1, 5, 6, 9, 16].

En conclusión, consideramos que o coñecemento das integrais de Stieltjes é verdadeiramente fundamental para calquera estudante de matemáticas, non sendo unha xeneralización excesivamente avanzada para un alumno do Grao. É estraño que, tratándose da base da teoría da probabilidade, non sexan explicadas na actual programación. Máis aínda, ábrennos as portas ó estudo das ecuacións diferenciais máis avanzadas e do concepto de derivada de Stieltjes, campo de estudo do grupo de investigación de Ecuacións Diferenciais non Lineares desta universidade, véxase [10, 11, 15]. Por outra banda, a integral introducida por Kurzweil e Henstock goza dunha increíble definición, sinxela á vez que elegante. Ademais, arranxa con facilidade os problemas que carrexan as integrais de Riemann e de Lebesgue, polo que non estaría de máis introducila ós alumnos que comezan ás súas incursións nesta rama do cálculo, por moito que o concepto de calibre poida resultar un tanto exótico de primeiras, pois non é difícil adecuarse a eles e comprender o seu poder. Para rematar, pese a todo, cremos que o estudo da integral de Lebesgue e da teoría da medida non debe ser descoidado, xa que esta permite realizar rápidas e refinadas xeneralizacións de resultados que, no caso da integral de Kurzweil-Stieltjes, custaron suor e lágrimas demostrar, como vimos durante o Capítulo 5.

## Anexo A

# Teoría da medida

Nesta sección imos desenvolver unha serie de resultados básicos de teoría da medida e da integral respecto a unha medida, que serán fundamentais coñecer e manexar ó longo do traballo. En particular, o serán no momento de definir e comparar a integral de Lebesgue-Stieltjes e a de Kurzweil-Stieltjes. As principais referencias para esta introdución á teoría da medida son [3, 6, 15, 16].

**Definición A.1.** Sexa  $X$  un conxunto arbitrario e  $\mathcal{P}(X)$  o conxunto de tódolos subconxuntos de  $X$ . Un conxunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  dise unha  $\sigma$ -álgebra de  $X$  se cumpre as seguintes propiedades:

1.  $X \in \mathcal{A}$ .
2. Se  $A \in \mathcal{A}$ , entón  $X \setminus A \in \mathcal{A}$ .
3. Para calquera familia  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ , entón  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Ademais, unha dupla  $(X, \mathcal{A})$  formada por un conxunto  $X$  e unha  $\sigma$ -álgebra en  $X$   $\mathcal{A}$ , dise un *espazo medible*. Os elementos de  $\mathcal{A}$  dinse *conxuntos medibles*.

*Observación A.2.* Da definición séguese que a intersección arbitraria de  $\sigma$ -álgebras é unha  $\sigma$ -álgebra.

**Definición A.3.** Sexa  $\mathcal{F}$  unha familia arbitraria de subconxuntos de  $X$ . A menor  $\sigma$ -álgebra que contén a  $\mathcal{F}$  denomínase a  $\sigma$ -álgebra xerada por  $\mathcal{F}$  e denótase por  $\sigma(\mathcal{F})$ .

A seguinte proposición é de demostración elemental.

**Proposición A.4.** Sexa  $X$  un conxunto. Para toda familia  $\mathcal{F}$  de subconxuntos de  $X$  existe unha única  $\sigma$ -álgebra xerada por  $\mathcal{F}$ . Ademais esta é

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ é unha } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \}.$$

**Definición A.5.** Sexa  $(X, \tau)$  un espazo topolóxico e  $\mathcal{A}$  unha  $\sigma$ -álgebra.

A  $\sigma$ -álgebra xerada pola colección de conxuntos abertos de  $X$  dise a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $(X, \tau)$  e denotárase por  $\mathcal{B}(\tau)$ . Os elementos de  $\mathcal{B}(\tau)$  dinse *conxuntos de Borel*.

Este tipo de  $\sigma$ -álgebras que acabamos de definir vai ser fundamental para o resto desta sección, pois normalmente interézanos integrar sobre intervalos abertos ou pechados, e estes son elementos da  $\sigma$ -álgebra de Borel xerada pola topoloxía usual de  $\mathbb{R}$ .

**Definición A.6.** Sexa  $X$  un conxunto e  $\mathcal{A}$  unha  $\sigma$ -álgebra en  $X$ . Diremos que unha función  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  é unha *medida positiva en  $X$*  se cumpre a propiedade de *aditividade numerable*, isto é

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),$$

para toda familia de subconxuntos disxuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ . Baixo estas hipóteses, a terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  dise un *espazo de medida*.

No caso de que  $\mu(X) = 1$ ,  $\mu$  dise unha *medida de probabilidade* e a terna  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un *espazo de probabilidade*, mentres que se  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ ,  $\mu$  dise unha *medida de Borel*.

Na definición anterior engadimos o adxectivo *positiva*, pois baixo algunhas circunstancias pódense considerar medidas *con signo*, é dicir, tales que o seu codominio é  $[-\infty, \infty]$ . A continuación imos introducir algunhas das propiedades máis básicas dunha medida, que se desprenden de forma sinxela da súa definición.

**Proposición A.7.** Sexa  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida. Entón téñense as seguintes afirmacións:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Se  $A, B \in \mathcal{A}$  son tales que  $A \subseteq B$ , entón  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .
3. Se  $A \subset B$  e  $\mu(A) < \infty$ , entón  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .
4. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  tales que  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entón,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

5. Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión de elementos de  $\mathcal{A}$  tales que  $A_{n+1} \subseteq A_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mu(A_1) < \infty$ . Entón,

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

**Definición A.8.** Sexan  $(X, \mathcal{A}_X), (Y, \mathcal{A}_Y)$  dous espazos medibles. Unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dise  $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$ -medible, ou simplemente *medible*, se  $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}_X$ , para todo  $U \in \mathcal{A}_Y$ .

*Observación A.9.* Ó longo do capítulo imos traballar con funcións definidas nun espazo de medida que toma valores na recta real estendida  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ . Este conxunto admite unha relación de orde total ampliando a orde usual de  $\mathbb{R}$  de xeito que  $-\infty < a < \infty$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ , é dicir, dotaremos a  $\overline{\mathbb{R}}$  da topoloxía inducida por esta orde, que é homeomorfa ó intervalo real  $[0, 1]$ . En consecuencia, sempre consideraremos ós subconxuntos  $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  como espazos medibles coa  $\sigma$ -álgebra de Borel xerada pola topoloxía inducida pola de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposición A.10** ([16, Teorema 1.12, p. 13]). Sexan  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida e  $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$  unha función. Entón,

1. Se  $f$  é medible e  $B$  é un conxunto de Borel de  $[-\infty, \infty]$ , entón  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .
2. Se  $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ , entón  $f$  é medible.

**Teorema A.11** ([3, Lema 2.9, p. 12]). Sexan  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida e  $f_n: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  unha sucesión de funcións medibles. Entón as funcións

$$\begin{aligned} f &= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, & F &= \sup f_n, \\ f^* &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n & F^* &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \end{aligned}$$

son medibles.

**Corolario A.12.** Nas condicións anteriores, se existe  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , entón  $f$  é medible.

O seguinte resultado pódese atopar en [3].

**Proposición A.13.** Sexan  $f, g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$  dúas funcións medibles e  $c \in [-\infty, \infty]$  unha constante, entón as funcións

$$cf, \quad fg, \quad |f|, \quad \max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}, \quad f^+ = \max\{0, f\}, \quad f^- = \min\{0, f\},$$

son medibles, onde entendemos que cando  $c = 0$ ,  $cf = 0$ .

Ademais, a función definida como

$$(f + g)(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) = \infty \text{ e } g(x) = -\infty, \\ 0, & \text{se } g(x) = \infty \text{ e } f(x) = -\infty, \\ f(x) + g(x), & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

é medible.

**Definición A.14.** Sexa  $(X, \mathcal{A})$  un espazo medible. Dado un conxunto finito de conxuntos medibles  $\{A_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{A}$  e de números reais  $\{\alpha_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$ , unha función  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  dise *simple* se adopta a forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}(x), \quad x \in X.$$

Non é difícil comprobar que toda función simple é medible se, e só se, os conxuntos  $A_k$  son medibles para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

**Definición A.15.** Sexan  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida,  $E \in \mathcal{A}$  un conxunto medible e  $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$  unha función simple da forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_{A_k}(x), \quad x \in X.$$

Diremos que a *integral* de  $\varphi$  en  $E$  respecto a  $\mu$  é

$$\int_E \varphi \, d\mu := \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k \cap E),$$

onde adoptamos o convenio  $0 \cdot (+\infty) = 0$ .

Para unha función medible arbitraria  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  diremos que a *integral* de  $f$  en  $E$  respecto a  $\mu$  é

$$\int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu : \varphi \text{ é simple, } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Na seguinte proposición enunciaremos algunhas das propiedades máis básicas da integral que acabamos de definir.

**Proposición A.16.** Sexan  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida,  $A, B \in \mathcal{A}$  dous conxuntos medibles e  $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$  dúas funcións medibles. Entón téñense as seguintes propiedades:

1.  $\int_A f \, d\mu = \int_X \chi_A f \, d\mu$ .
2. Se  $0 \leq f \leq g$ , entón  $\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu$ .
3. Se  $A \subset B$ , entón  $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$ .
4. Se  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A$ , entón  $\int_A f \, d\mu = 0$ .
5. Se  $\mu(A) = 0$ , entón  $\int_A f \, d\mu = 0$ .

**Corolario A.17.** Sexan  $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$  dúas funcións medibles e  $c \in [0, \infty)$ . Entón,

$$\int_X c f \, d\mu = c \int_X f \, d\mu \quad e \quad \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

**Teorema A.18** ([16, Teorema 1.29, p 23]). Sexa  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida,  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  unha función medible, e

$$\phi(E) := \int_E f \, d\mu, \quad \text{para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Entón,  $\phi$  é unha medida en  $\mathcal{A}$  e

$$\int_X g \, d\phi = \int_X g f \, d\mu,$$

para toda función medible  $g: X \rightarrow [0, \infty]$ .

**Definición A.19.** Sexa  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida e  $A \in \mathcal{A}$ . Unha función  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  dise  $\mu$ -integrable en  $A$  ou integrable respecto a  $\mu$  en  $A$ , se  $f$  é  $\mu$ -medible e

$$\int_A |f| \, d\mu < \infty.$$

O conxunto de funcións  $\mu$ -integrables denotarémolo por  $\mathcal{L}_\mu^1(A, \mathbb{R})$ .

Se para unha función  $f \in \mathcal{L}_\mu^1(A, \mathbb{R})$  consideramos as funcións

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \text{ e } f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}, x \in X,$$

definiremos a *integral* de  $f$  en  $A$  respecto a  $\mu$  como

$$\int_A f \, d\mu := \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu.$$

**Proposición A.20** ([16, Teorema 1.33, p. 26]). Sexa  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espazo de medida,  $A \in \mathcal{A}$  e  $f \in \mathcal{L}_\mu^1(A, \mathbb{R})$ . Entón,

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d\mu.$$



# Bibliografía

- [1] Appell, J., Banas, J., Díaz, N.J.M.: Bounded Variation and Around. De Gruyter (2013)
- [2] Athreya, K.B., Lahiri, S.N.: Measure Theory and Probability Theory. Springer (2006)
- [3] Bartle, R.G.: The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley (1995)
- [4] Bartle, R.G.: A Modern Theory of Integration. American Mathematical Society (2001)
- [5] Bartle, R.G.: Introduction to Real Analysis. Wiley (2011)
- [6] Bogachev, V.I.: Measure Theory, vol. 1. Springer (2007)
- [7] Boyer, C.B.: The History of the Calculus and its Conceptual Development. General Publishing Company (1949)
- [8] Burton, D.M.: The History of Mathematics: an introduction. McGraw-Hill (2011)
- [9] Dieudonné, J.A.: Foundations of Modern Analysis. Academic Press (1960)
- [10] Fernández, F.J., Marqués Albés, I., Fernández Tojo, F.A.: *On first and second order linear Stieltjes differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications (2021)
- [11] Frigon, M., Pouso, R.L.: *Theory and applications of first-order systems of Stieltjes differential equations*. Advances in Nonlinear Analysis (2017)
- [12] Kingman, J.F.C., Taylor, S.J.: Introduction to Measure and Probability. Cambridge University Press (1977)
- [13] Kurtz, D.S., Swartz, C.W.: Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane. World Scientific Publishing Company (2004)
- [14] Monteiro, G.A., Tvrdý, M., Slavik, A.: Kurzweil-Stieltjes Integral: Theory and Applications. World Scientific Publishing Company (2019)
- [15] Márquez Albés, I.: *Differential problems with Stieltjes derivatives and applications*. Tese de doutoramento. Universidade de Santiago de Compostela (2020)

- [16] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Education (1987)
- [17] Stieltjes, T.J.: Œuvres Complètes. Springer-Verlag (1991)
- [18] Swartz, C.W.: Measure, Integration and Function Spaces. World Scientific Publishing Company (1994)
- [19] Swartz, C.W.: Introduction to Gauge Integrals. World Scientific Publishing Company (2001)
- [20] Yeh, J.: Real Analysis: Theory of Measure and Integration. World Scientific Publishing Company (2014)